คณิตศาสตร์พื้นฐาน
สำหรับ Options Trading

Part VI: Time Series, Numerical Methods & Stochastic Calculus

บทที่ 12-14: AR/MA/ARMA, GARCH, IV Solver, Brownian Motion, Ito's Lemma, การพิสูจน์ BS PDE

อ่านจบ → forecast volatility + พิสูจน์ที่มาของ Black-Scholes ได้เอง

บทที่ 12: Time Series & Volatility Forecasting

อุปมา: นักพยากรณ์อากาศที่พยากรณ์ "ความแปรปรวน" ไม่ใช่ "อุณหภูมิ"

นักพยากรณ์อากาศไม่ได้แค่บอกว่า "พรุ่งนี้ร้อน/เย็น" — เขายังบอก "พรุ่งนี้ฝนฟ้าคะนองมาก" (ความแปรปรวนสูง)

เช่นเดียวกัน Volatility Forecasting ไม่ได้ทำนายว่าราคาจะขึ้นหรือลง แต่ทำนายว่า **"ราคาจะผันผวนมากแค่ไหน"**

ใน Options Trading: ซื้อ Straddle ก่อนตลาดผันผวน ขาย Straddle เมื่อตลาดเงียบ — ไม่จำเป็นต้องรู้ทิศทาง!

Volatility ไม่คงที่ — มันเปลี่ยนตลอดเวลา ถ้า forecast ได้ = ได้เปรียบในการเทรด Options

12.1 แนวคิด Time Series

ข้อมูลที่เรียงตามเวลา: ราคาหุ้นรายวัน, daily returns, implied volatility

- **Trend:** ทิศทางระยะยาว (ขึ้น/ลง/นิ่ง)
- **Stationarity:** สมบัติไม่เปลี่ยนตามเวลา (mean, variance คงที่)

สำคัญ: วิเคราะห์ Returns ไม่ใช่ราคา!

ราคาหุ้น = **non-stationary** (มี trend ขึ้นตลอด) แต่ **returns** = stationary (เฉลี่ย ≈ 0, variance ≈ คงที่)
ถ้าวิเคราะห์ราคาโดยตรง = เหมือนหาค่าเฉลี่ยส่วนสูงของเด็กที่กำลังโต — ค่าเฉลี่ยเปลี่ยนตลอด ไม่มีประโยชน์!

12.2 Autocorrelation — Volatility Clustering

อุปมา: ความนิยมของเพลง "เมื่อวานฮิต วันนี้มักยังฮิตอยู่"

Autocorrelation วัดว่า "ข้อมูลวันนี้สัมพันธ์กับข้อมูลเมื่อวานแค่ไหน?"

สำหรับ Returns: เกือบ 0 (ทิศทางพรุ่งนี้ทำนายไม่ได้จากวันนี้)
สำหรับ |Returns| หรือ Returns²: **สูงมาก!** — วันที่ผันผวนมักตามด้วยวันที่ผันผวน

$$\rho(k) = \mathrm{Corr}(r_t,\, r_{t-k})$$

ข้อมูล	Autocorrelation	ความหมาย
returns (r_t)	≈ 0	ทำนายทิศทางไม่ได้ (Efficient Market)
|returns| หรือ r^2_t	**สูง! (~0.2-0.4)**	วันที่ผันผวนมากมักตามด้วยวันผันผวนมาก

ข่าวร้ายวันนี้ → Return² สูง → ตลาดกังวล → Return² พรุ่งนี้สูงด้วย → Volatility Clustering!

เชื่อมกับ Options

Volatility Clustering: ความผันผวนมักมาเป็น "กลุ่ม" — ช่วงที่ตลาดกลัว σ สูงนาน
นี่คือเหตุผลที่ GARCH model ทำงานได้ดี เพราะจำลอง clustering นี้

12.3 AR / MA / ARMA Models & Realized Volatility

อุปมา: "วันนี้ขึ้นกับเมื่อวาน" vs "วันนี้ขึ้นกับ shock เมื่อวาน"

AR (Autoregressive): วันนี้ขึ้นกับ *ค่าเมื่อวาน* — เหมือนโมเมนตัมของลูกตุ้ม: ถ้าเมื่อวานสูง วันนี้ก็มักสูงตาม (persistent) หรือดีดกลับสู่ค่าเฉลี่ย (mean-reversion)

MA (Moving Average): วันนี้ขึ้นกับ *shock (เซอร์ไพรส์) เมื่อวาน* — เหมือนเสียงสะท้อนของข่าว: ข่าวช็อกเมื่อวานยังดังก้องมาถึงวันนี้

ทั้งสองคือ "หน่วยความจำ" ของ time series แต่จำกันคนละอย่าง: AR จำ *ค่า*, MA จำ *shock*

AR(1) — Autoregressive order 1: ค่าวันนี้เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของค่าเมื่อวาน + shock ใหม่

$$x_t = c + \phi\, x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$|\phi| < 1$ → stationary + mean-reverting ($\bar{x} = c/(1-\phi)$); $\phi \approx 1$ → persistent

φ บอกอะไร?

φ = 0.9 → ค่าเมื่อวานส่งต่อมา 90% ทุกวัน → series เคลื่อนช้า ต่อเนื่องยาว (เหมือน IV ที่ค่อยๆ ลดลงหลัง crash)

φ = 0.1 → ค่าเมื่อวานแทบไม่มีผล → series กระโดดไปมาเร็ว เกือบเป็น white noise

φ < 0 → ดีดสลับขึ้นลง (oscillation) — วันนี้สูง พรุ่งนี้มักต่ำ

MA(1) — Moving Average order 1: ค่าวันนี้เป็น shock วันนี้ + เศษของ shock เมื่อวาน

$$x_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\,\varepsilon_{t-1}$$

ARMA(1,1) — รวมทั้งสอง: วันนี้ขึ้นกับ *ทั้ง*ค่าเมื่อวาน *และ*shock เมื่อวาน

$$x_t = c + \underbrace{\phi\,x_{t-1}}_{\text{AR}} + \varepsilon_t + \underbrace{\theta\,\varepsilon_{t-1}}_{\text{MA}}$$

Lineage: AR → ARCH → GARCH (วางบริบทให้บท 12.5)

เทคนิค AR/MA ข้างบนใช้กับ *ระดับ (level)* ของ series แต่ในการเงินเราสนใจ **ความแปรปรวน (variance)** มากกว่า — เลยเอาแนวคิดเดียวกันมาใช้กับ variance:

- **ARCH** = จำลอง variance วันนี้เป็น **AR บน squared-returns เมื่อวาน** (σ^2_t ขึ้นกับ r^2_{t-1}, r^2_{t-2}, ...)
- **GARCH** = เพิ่ม **MA term บน variance เมื่อวาน** เข้าไป (σ^2_t ขึ้นกับ σ^2_{t-1} ด้วย)

ดังนั้น **GARCH(1,1) คือโครงสร้าง ARMA(1,1) บน variance นั่นเอง!** — $\alpha \times r^2_{t-1}$ คือ "AR/ARCH part" และ $\beta \times \sigma^2_{t-1}$ คือ "MA/persistence part" นี่คือเหตุผลที่ GARCH (บท 12.5) จับ volatility clustering ได้

Realized Volatility (RV) — วัด vol จริงจากข้อมูล intraday:

แทนที่จะใช้ *โมเดล* ทำนาย σ เราวัด σ ที่ *เกิดขึ้นจริง* ภายในวัน จาก return ย่อยๆ (เช่น ทุก 5 นาที) แล้วรวมกำลังสอง

$$RV = \sqrt{\sum_i r_i^2} \quad \text{(intraday intervals, model-free)}$$

ตัวอย่าง: Realized Volatility จาก 4 intraday returns

โจทย์: วันหนึ่งมี intraday returns 4 ช่วง: +0.5%, −0.3%, +0.4%, −0.6%

ขั้น 1 — ยกกำลังสองแต่ละตัว:

$(0.005)^2 = 0.000025$

$(-0.003)^2 = 0.000009$

$(0.004)^2 = 0.000016$

$(-0.006)^2 = 0.000036$

ขั้น 2 — รวม: $\Sigma r_i^2 = 0.000025 + 0.000009 + 0.000016 + 0.000036 =$ **0.000086**

ขั้น 3 — RV รายวัน: RV = √0.000086 ≈ **0.0093 = 0.93%/วัน**

ขั้น 4 — annualize ×√252: 0.93% × √252 ≈ 0.93% × 15.87 ≈ **14.8%/ปี**

สำคัญ: RV เป็น **model-free estimate** ของ vol ที่เกิดขึ้น *แล้ว* (backward-looking, ใช้ข้อมูลจริง ไม่ต้องสมมติโมเดล) ส่วน GARCH เป็น **forecast** ของ vol *วันพรุ่งนี้* (forward-looking) — เทรดเดอร์มักเทียบ RV (จริง) กับ IV (ตลาดคาด) และ GARCH (โมเดลคาด) เพื่อหา edge

โจทย์: Realized Volatility

วันหนึ่งมี intraday returns 3 ช่วง: −0.8%, +0.6%, +0.4%

คำนวณ RV รายวัน แล้ว annualize ด้วย √252 — ได้ vol รายปีเท่าไหร่?

▶ ดูเฉลย

12.4 Moving Average & EWMA

อุปมา: คะแนนความนิยมแบบ "ใหม่กว่า = น้ำหนักมากกว่า"

Simple MA ให้น้ำหนักเท่ากันทุกวัน เหมือนนับคะแนนโหวตทุกคนเท่ากัน

EWMA ให้น้ำหนักวันล่าสุดมากกว่า เหมือน "คะแนนใหม่สำคัญกว่าคะแนนเก่า"

λ=0.94 หมายความว่า: ข้อมูล 1 เดือนที่แล้วมีน้ำหนักเหลือ (0.94)^20 ≈ 29% เท่านั้น

Simple MA Volatility: σ = std(returns ใน window n วัน)

$$\sigma^2_{\text{SMA}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r^2_{t-i} \quad (\mu \approx 0)$$

EWMA (Exponentially Weighted): ให้น้ำหนักข้อมูลล่าสุดมากกว่า

$$\sigma^2_t = \lambda\,\sigma^2_{t-1} + (1-\lambda)\,r^2_{t-1} \qquad \lambda = 0.94\ (\text{RiskMetrics})$$

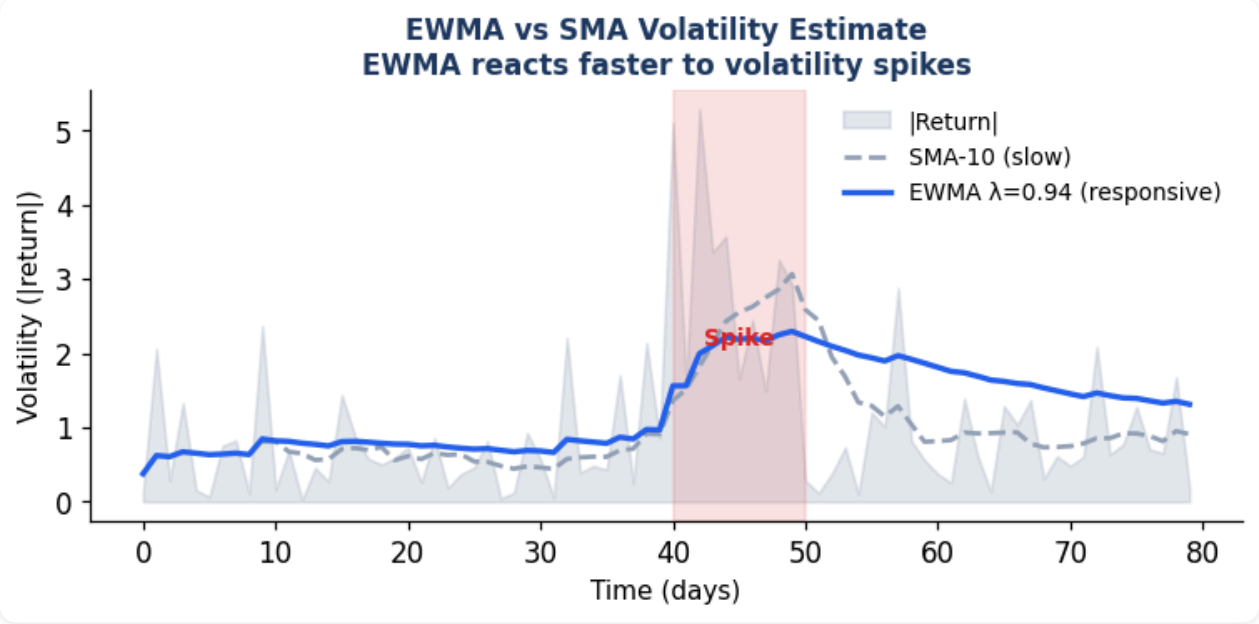
ทำไม EWMA ถึงเขียนแบบนี้?

Expand ออกมา: $\sigma^2_t = (1-\lambda)[r^2_{t-1} + \lambda r^2_{t-2} + \lambda^2 r^2_{t-3} + \ldots]$ = weighted average ของ r^2 ทั้งหมด

น้ำหนักของวันที่ k วันก่อน = $(1-\lambda)\lambda^k$ → ลดลง exponentially → วันเก่าๆ มีผลน้อยมาก

ข้อดีสำคัญ: Update ง่ายมาก! ต้องจำแค่ σ^2 เมื่อวาน + r เมื่อวาน

1. **โจทย์**: $\lambda=0.94$, $\sigma^2_{t-1} = 0.0025$ ($\sigma=5\%$), r_{t-1} = -3% = -0.03
2. $r^2_{t-1} = (-0.03)^2 = 0.0009$
3. $\sigma^2_t = 0.94 \times 0.0025 + 0.06 \times 0.0009$
4. = 0.002350 + 0.000054 = **0.002404**
5. $\sigma_t = \sqrt{0.002404} \approx$ **4.90%** ลดลงนิดเดียวจาก 5% เพราะ $r^2=0.09\% < \sigma^2=0.25\%$



EWMA (λ=0.94) reacts faster to volatility spikes than SMA-10

12.5 GARCH Model

อุปมา: นักพยากรณ์ที่จำ "ข่าวเมื่อวาน" + "ความแปรปรวนสะสม"

GARCH บอกว่า volatility วันนี้ขึ้นกับ 2 ปัจจัย:

1. **ข่าวเมื่อวาน** (r^2_{t-1}): ถ้าตลาดร่วงแรงเมื่อวาน → ความกังวลสูง

2. **Volatility เมื่อวาน** (σ^2_{t-1}): Volatility มี "inertia" — สูงแล้วมักยังคงสูงอยู่

α + β < 1 → ในระยะยาว volatility กลับสู่ค่าเฉลี่ย ω/(1-α-β)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\, r_{t-1}^2 + \beta\, \sigma_{t-1}^2 \qquad \alpha + \beta < 1$$

ω = baseline, α = news impact, β = persistence; long-run $\sigma = \sqrt{\omega/(1-\alpha-\beta)}$

ω (baseline) + α × r^2_{t-1} (ข่าว) + β × σ^2_{t-1} (inertia) = σ^2_t (forecast)

1. **GARCH(1,1) ตัวอย่าง**: ω=0.000002, α=0.10, β=0.85
2. r_{t-1} = -2% = -0.02, σ^2_{t-1} = 0.0004 (σ=2%)
3. r^2_{t-1} = 0.0004
4. σ^2_t = 0.000002 + 0.10 × 0.0004 + 0.85 × 0.0004
5. = 0.000002 + 0.000040 + 0.000340 = **0.000382**
6. σ_t = √0.000382 ≈ **1.95%** (ลดลงจาก 2% เล็กน้อย เพราะ $r^2 = \sigma^2$ พอดี)
7. Long-run σ = √(ω/(1-α-β)) = √(0.000002/0.05) = √0.00004 = **0.63%/วัน ≈ 10%/ปี**

เชื่อมกับ Options

- **Forecast σ** → เทียบกับ Implied Volatility (IV) ของตลาด
- ถ้า GARCH forecast < IV → options "แพงเกินไป" → อาจ **sell options**
- ถ้า GARCH forecast > IV → options "ถูกเกินไป" → อาจ **buy options**
- **BS สมมติ σ คงที่** ← **ผิด!** GARCH บอกว่า σ เปลี่ยนตลอดเวลา

⚠️ Model Risk: GARCH ใช้ Historical — ไม่รู้จัก Regime Change

GARCH มีจุดอ่อนสำคัญในการใช้งานจริง:

• **Regime shift**: GARCH calibrate กับ low-vol period จะ underestimate vol ใน high-vol regime ใหม่ (เช่น COVID breakout ปี 2020)

• **Overfitting ช่วงสงบ**: $\alpha + \beta \to 1$ ใน calm markets → Integrated GARCH → ไม่มี mean reversion → forecast vol ไม่กลับ

• **Asymmetry (Leverage Effect)**: basic GARCH ไม่จับ "ตลาดลงแล้ว vol ขึ้นมากกว่าตลาดขึ้น" — ต้องใช้ GJR-GARCH หรือ EGARCH

แนวทาง: monitor μ drift, refit monthly, ใช้ Markov-switching GARCH ถ้า regime ชัดเจน

12.6 Mean Reversion

อุปมา: ยางยืดที่ดึงกลับสู่จุดกึ่งกลาง

Volatility ไม่วิ่งไปเรื่อยๆ มีแรงดึงกลับสู่ค่าเฉลี่ยระยะยาว (long-run volatility)

เหมือนยางยืด: ยิ่งดึงออกห่าง แรงดึงกลับยิ่งแรง

กฎ: $\alpha + \beta < 1$ → มี mean reversion; $\alpha + \beta = 1$ → ไม่มี mean reversion (IGARCH — ไม่เสถียร)

เชื่อมกับ Options

• ถ้า IV สูงมาก (เช่น หลัง market crash) → มักจะลดลง → **sell high IV**

• Long-term $\sigma \approx \sqrt{\omega/(1 - \alpha - \beta)}$ จาก GARCH → ใช้เป็น "anchor" ว่า IV ควรอยู่แถวไหน

บทที่ 13: วิธีเชิงตัวเลข — IV Solver

อุปมา: หาคำตอบที่ "สมการปิด" ไม่มี

ถ้าตลาดบอกว่า Call มีราคา ฿7.50 แต่ Black-Scholes สูตรให้ราคาเป็น σ → หา σ ที่ทำให้ราคา = ฿7.50

ปัญหา: ไม่มีสูตร "ย้อนกลับ" Black-Scholes แบบ closed-form → ต้องลองแล้วปรับ

วิธีเชิงตัวเลข = "การลองแบบฉลาด" ที่ converge หาคำตอบได้เร็ว

บางสมการแก้แบบ closed-form ไม่ได้ — ต้องใช้คอมพิวเตอร์หาคำตอบ ตัวอย่างสำคัญที่สุด: **หา Implied Volatility**

13.1 Bisection Method — "เกมทายตัวเลข"

อุปมา: เกมทาย "สูงไป/ต่ำไป"

ถ้าเพื่อนคิดตัวเลข 1-100 ไว้ในใจ กลยุทธ์ที่ดีที่สุดคือเดา 50 ก่อน

ถ้า "สูงไป" → เดา 25 ถัดไป; ถ้า "ต่ำไป" → เดา 75
ทำซ้ำ → ทุกครั้งช่วยให้แคบลงครึ่งหนึ่ง → หาเจอใน 7 ครั้งเสมอ ($\log_2(100) \approx 7$)

ถ้ารู้ว่าคำตอบอยู่ระหว่าง a กับ b → ลอง midpoint → ดูว่าคำตอบอยู่ครึ่งซ้ายหรือขวา → แบ่งครึ่งอีก

1. เลือก a, b ที่ $f(a) \cdot f(b) < 0$
2. $m = (a + b)/2$
3. ถ้า $f(m) \cdot f(a) < 0 \to b = m$ มิฉะนั้น $a = m$
4. ทำซ้ำจนกว่า $|b - a| < \varepsilon$

รอบ	a	b	m = (a+b)/2	f(m) = BS(m)−฿7.5	ช่วงใหม่
1	0.05	1.00	0.525	+3.2 (สูงไป)	[0.05, 0.525]
2	0.05	0.525	0.288	+0.8 (สูงไป)	[0.05, 0.288]
3	0.05	0.288	0.169	-0.5 (ต่ำไป)	[0.169, 0.288]
4	0.169	0.288	0.228	+0.1 (สูงไป)	[0.169, 0.228]
...	→ converge ไปที่ σ ≈ 0.20 (IV = 20%)				

13.2 Newton-Raphson Method — เร็วกว่า!

อุปมา: ลงเขาโดยใช้แผนที่ความลาดชัน ไม่ใช่แค่ลองผิดลองถูก

Bisection: ลองครั้งละครึ่ง — ช้า แต่แน่นอน

Newton-Raphson: ใช้ slope (derivative) ของฟังก์ชัน เพื่อ "คาด" ว่าคำตอบอยู่ตรงไหน

เหมือนลากเส้นสัมผัส (tangent) จากจุดที่อยู่ → เส้นสัมผัสตัดแกน x ที่ไหน → ลองจุดนั้น

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{C_{\text{BS}}(\sigma_n) - C_{\text{mkt}}}{\mathcal{V}(\sigma_n)} \quad (\text{IV solver, Vega} = \partial C/\partial\sigma)$$

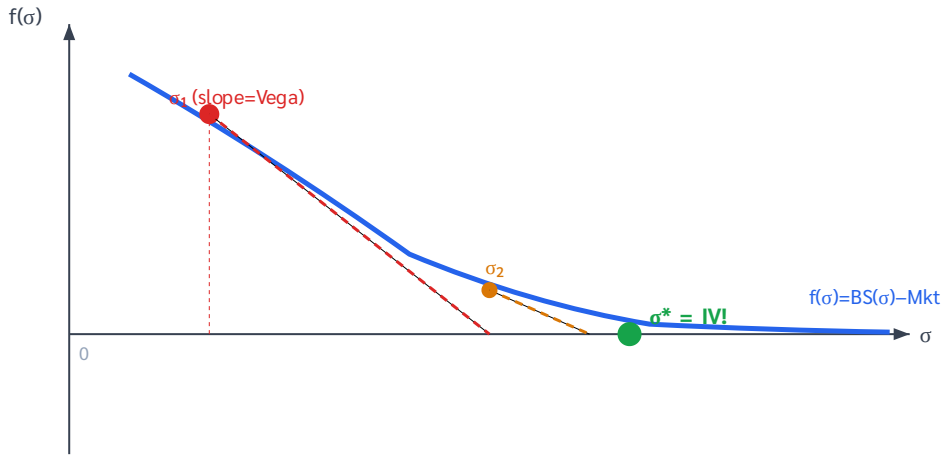
ทำไม Vega ถึงเป็น derivative ที่ใช้?

Vega = ∂V/∂σ = อัตราการเปลี่ยนแปลงของราคา option ต่อการเปลี่ยน σ 1 หน่วย

Newton-Raphson ต้องการ f'(σ) = d(BS price)/dσ = Vega นั่นเอง!

ข้อดี: BS Vega มีสูตร closed-form → คำนวณเร็ว → Newton-Raphson converge ใน 3-5 รอบ!

1. **IV Solver**: Market price = ฿7.50, S=100, K=100, T=0.25, r=5%
2. เดาเริ่มต้น: $\sigma_0 = 0.30$ (30%)
3. คำนวณ BS(0.30) = ฿8.20 (แพงเกินไป ฿0.70)
4. Vega(0.30) = ฿20 (ราคาเปลี่ยน ฿20 ต่อการเปลี่ยน σ 1 หน่วย)
5. $\sigma_1 = 0.30 - (8.20 - 7.50)/20 = 0.30 - 0.035 =$ **0.265 (26.5%)**
6. BS(0.265) ≈ ฿7.52 → error เล็กมาก → 1 iteration อีกรอบ → σ ≈ **0.264 = IV 26.4%**



แผนภาพ: Newton-Raphson หา Implied Volatility — แต่ละ iteration เข้าใกล้ σ* ที่แก้สมการ BS(σ) = C_mkt

เชื่อมกับ Options — IV Solver

Newton-Raphson ใช้ **Vega** เป็น derivative → converge ใน 3-5 รอบ!
ทุกครั้งที่คุณเห็น "IV = 25%" บนหน้าจอ Bloomberg — เบื้องหลังคือ Newton-Raphson กำลังทำงาน

🏛️ Quant Desk: IV Solver ทำงานตลอดเวลา — Vol Surface คือ "ราคากลาง" ของตลาด

ในทุก derivatives desk Newton-Raphson IV solver runs continuously:

- **Real-time IV**: Bloomberg feed market prices → solve IV ทุก tick → build vol surface
- **Relative value**: เปรียบเทียบ model vol vs market IV → ซื้อ "ถูก" ขาย "แพง"
- **Greeks from surface**: Delta/Gamma คำนวณจาก Vol Surface (sticky-delta vs sticky-strike)

IV solver ที่ดีต้อง robust: handle deep OTM options (Vega → 0 → Newton แกว่ง) — ใช้ Bisection fallback

13.3 Numerical Differentiation

ทำไมต้องคำนวณ derivative เชิงตัวเลข?

BS model มีสูตร closed-form สำหรับ Greeks แต่ model อื่นๆ (Local Vol, Stochastic Vol) ไม่มี

แนวคิด: Delta = "ถ้า S เพิ่ม h → V เพิ่มเท่าไหร่?" → หาร h → ได้ approximate derivative

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \text{(central difference)}$$

เชื่อมกับ Options

คำนวณ Greeks จาก pricing model ที่ไม่มีสูตร closed-form:

Delta ≈ [V(S+h) - V(S-h)] / (2h) ใช้ h = ฿0.01 หรือ ฿0.001

Gamma ≈ [V(S+h) - 2V(S) + V(S-h)] / h² (second derivative)

บทที่ 14: Stochastic Processes & Ito's Lemma

อุปมา: ฝุ่นละอองในน้ำ — ราคาหุ้นก็เคลื่อนที่แบบสุ่มเช่นกัน

Robert Brown ค้นพบ "Brownian Motion" ในปี 1827 โดยมองกล้องจุลทรรศน์ดูละอองเรณูในน้ำ — มันเคลื่อนที่สุ่มตลอดเวลา

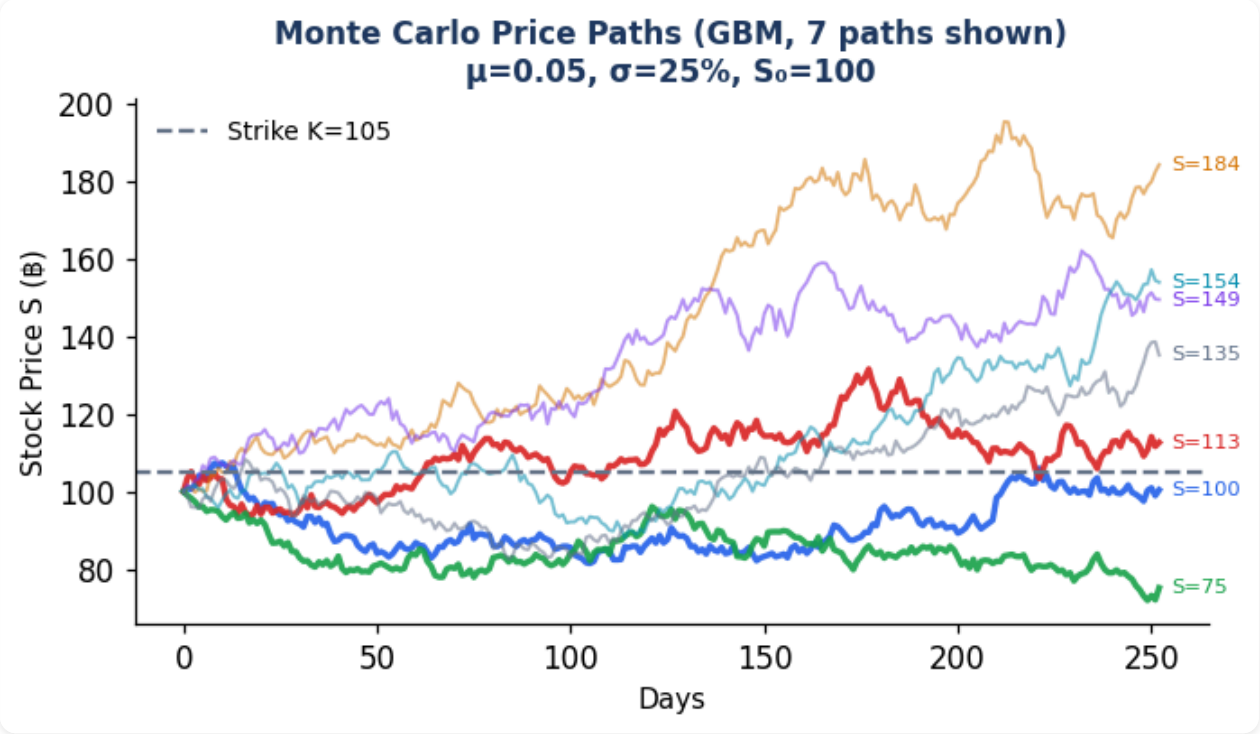
Einstein อธิบายในปี 1905 ว่าเกิดจากโมเลกุลน้ำชนทุกทิศทาง

Bachelier (1900) ใช้ Brownian Motion อธิบายราคาหุ้นเป็นคนแรก — ก่อน Einstein อีก!

บทนี้คือ "ยอดเขา" ของเล่ม — เข้าใจบทนี้ = เข้าใจที่มาของ Black-Scholes

14.1 Random Walk & Binomial Tree

Random Walk: ทุก step ราคาขึ้น (+1) หรือลง (-1) ด้วยโอกาส 50/50



Monte Carlo GBM paths — each run gives different S(T); average = option price

Binomial Tree: ราคาขึ้น u หรือลง d ในแต่ละ step

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1/u, \quad p^* = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

ทำไม u = e^(σ√Δt)?

ต้องการให้ u, d สอดคล้องกับ volatility σ ของหุ้น

เงื่อนไข: Variance ใน 1 step = $\sigma^2\Delta t \rightarrow p(1-p)(u-d)^2 \approx \sigma^2\Delta t$

การเลือก u=e^(σ√Δt) ทำให้เงื่อนไขนี้สอดคล้อง **โดยประมาณ (to first order ใน Δt)** — ไม่ใช่เป๊ะสำหรับ Δt จำกัด แต่ error เล็กลงเรื่อย ๆ เมื่อ Δt→0 และ u×d = 1 (recombining tree!) ทำให้ tree พับกลับได้ ลดจำนวน node

1. **Binomial ตัวอย่าง**: S=100, K=100, σ=20%, r=5%, T=1ปี, n=1 step
2. Δt=1, u=e^(0.2×1)=1.2214, d=1/u=0.8187
3. p* = (e^(0.05×1)−0.8187)/(1.2214−0.8187) = (1.0513−0.8187)/0.4027 = 0.578
4. S(u)=122.14, S(d)=81.87; Payoff Call: C(u)=max(22.14,0)=22.14, C(d)=0
5. C = e^(-0.05×1) × [0.578×22.14 + 0.422×0] = 0.9512 × 12.80 = **฿12.18**

เชื่อมกับ Options — Binomial Option Pricing

1. สร้าง tree ราคาหุ้น n steps
2. คำนวณ payoff ที่ปลาย tree (วันหมดอายุ)
3. ย้อนกลับทีละ step: $V = e^{-r\Delta t} \times [p^* \times V(up) + (1-p^*) \times V(down)]$
4. ค่าที่ node แรก = **ราคา Option!**

เมื่อ n → ∞ → converge สู่ **Black-Scholes price**

14.2 Risk-Neutral Pricing

อุปมา: ประกันภัย — ราคาไม่ขึ้นกับว่าคุณจะเกิดอุบัติเหตุหรือไม่

บริษัทประกัน define ราคากรมธรรม์จาก "expected payout" โดยไม่ต้องรู้ว่าคุณ "โชคดี" หรือ "โชคร้าย"

Risk-neutral pricing ทำแบบเดียวกัน: คำนวณ "expected option payoff" ในโลก risk-neutral

เหตุผลที่ใช้ได้: เราสามารถ *replicate* option payoff ด้วย stock + bond → ราคาต้อง = cost of replication

หลักการสำคัญที่สุดใน Derivatives Pricing

เราสามารถ price option ได้โดย **ไม่ต้องรู้ว่าหุ้นจะขึ้นหรือลง!**

ทำได้โดยใช้ **"โลก risk-neutral"** ที่สมมติว่า:

- ทุกสินทรัพย์มี expected return = risk-free rate (r)
- ใช้ probability p* (ไม่ใช่ real probability p)
- **Option Price = e^{-rT} × E*[Payoff]**

ทำไมใช้ได้? — No-Arbitrage Argument

เพราะเราสามารถ **replicate** payoff ของ option ได้ด้วย stock + bond (hedging)
ดังนั้นราคาของ option ต้อง = ต้นทุนของ replicating portfolio
ต้นทุนนี้ **ไม่ขึ้นกับว่าหุ้นจะขึ้นหรือลง** → ไม่ต้องรู้ real probability!

14.3 Brownian Motion

Brownian Motion W(t) = continuous limit ของ random walk สมบัติ:

- W(0) = 0 (เริ่มที่ 0)
- Independent increments: $W(t_2)-W(t_1)$ ไม่ขึ้นกับ $W(t_1)-W(t_0)$
- $W(t_2)-W(t_1) \sim \text{Normal}(0, t_2-t_1)$ → ยิ่งเวลานาน *variance* ยิ่งมาก (ไม่ใช่ standard deviation)
- Continuous paths — ไม่กระโดด

ทำไม Variance ∝ t ไม่ใช่ Std ∝ t?

random walk n steps: แต่ละ step ±1 → หลัง n steps, std = √n (จาก CLT)

ถ้า 1 ปี = n steps, 1 วัน = 1 step → std(yearly) = √(252) × std(daily)

นี่คือเหตุผลที่เราคูณ σ ด้วย √T ไม่ใช่ T เมื่อ scale ตามเวลา!

14.4 Geometric Brownian Motion (GBM)

อุปมา: เรือในทะเลคลื่น

ราคาหุ้น = เรือที่ลอยในทะเล:

• **Drift (μdt)** = กระแสน้ำ: ดันเรือไปทิศหนึ่งอย่างสม่ำเสมอ

• **Volatility (σdW)** = คลื่น: สุ่มขึ้นลง ยิ่งคลื่นแรง (σ สูง) เรือก็โคลงมาก

ทำไม "Geometric"? เพราะคลื่นใหญ่เล็กสัมพันธ์กับ *ขนาดของเรือ* — หุ้น ฿1000 ขยับ ฿20 ไม่เหมือนหุ้น ฿10 ขยับ ฿0.20

$$\frac{dS}{S} = \mu\, dt + \sigma\, dW$$

อ่านว่า: "% การเปลี่ยนแปลงราคา = drift + สุ่ม"

- **μ dt** = drift × เวลา → deterministic (คาดเดาได้)
- **σ dW** = volatility × Brownian shock → stochastic (สุ่ม)

ทำไม Geometric? → ราคาเป็น Lognormal!

เพราะ dS/**S** (% change) เป็น normal ไม่ใช่ dS (absolute change)
→ ราคา S เป็น **Lognormal** (เชื่อมกับบท 6.4!) → ราคา > 0 เสมอ — ไม่สามารถติดลบได้!

14.5 Ito's Lemma — "Chain Rule ของโลกสุ่ม"

Chain Rule ธรรมดา vs Ito's Lemma — ต่างกันอะไร?

Chain Rule ปกติ: ถ้า V = V(S,t) และ S เปลี่ยนไป dS → dV = (∂V/∂t)dt + (∂V/∂S)dS

แต่ในโลกสุ่ม: S ขยับแบบ Brownian Motion → dS มีความ "ผันผวน" ในตัวเอง

ผลลัพธ์: $(dS)^2 \neq 0$ แต่ $= \sigma^2 S^2 dt$ → ต้องบวก "ค่าแก้" $\frac{1}{2}\Gamma(dS)^2$ เพิ่มเข้าไป!

ถ้า S เป็น stochastic process และ V(S,t) เป็นฟังก์ชันของ S:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}\, dt + \frac{\partial V}{\partial S}\, dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(dS)^2$$

dS/S = μdt + σdW → $(dW)^2 = dt$ → $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$ → ไม่ตัดทิ้งได้! → บวก $\frac{1}{2}\Gamma\sigma^2 S^2 dt$

ทำไมมี term ½(∂²V/∂S²)(dS)² พิเศษ?

ในโลกปกติ $(dt)^2 \approx 0$ ตัดทิ้งได้ แต่ในโลกสุ่ม **$(dW)^2 = dt \neq 0$!**
ดังนั้น $(dS)^2 = (\mu S dt + \sigma S dW)^2 \approx \sigma^2 S^2 dt$ (เอา dt^2 และ $dt \times dW$ ออก เพราะเล็กกว่า dt)
นี่คือเหตุผลว่าทำไม Gamma สำคัญ — มันเป็น "ค่าแก้" ที่โลกสุ่มบังคับให้ใส่

1. **ตัวอย่าง Ito**: หา $d(\ln S)$ เมื่อ $dS/S = \mu dt + \sigma dW$
2. ตั้ง $V = \ln(S)$, $\partial V/\partial t = 0$, $\partial V/\partial S = 1/S$, $\partial^2 V/\partial S^2 = -1/S^2$
3. $dV = 0 \cdot dt + (1/S)dS + ½(-1/S^2)(dS)^2$
4. $= (1/S)(\mu S dt + \sigma S dW) + ½(-1/S^2)(\sigma^2 S^2 dt)$
5. $= \mu dt + \sigma dW - ½\sigma^2 dt =$ **$(\mu - ½\sigma^2)dt + \sigma dW$**
6. นี่คือ "log return ของ GBM" → Normal distribution → S เป็น Lognormal!

14.6 การพิสูจน์ Black-Scholes PDE (5 ขั้น)

อุปมา: สร้าง portfolio ที่ "ไร้ความเสี่ยง" → ต้องโตเท่า risk-free rate

ลองสร้างกระเป๋าลงทุนจาก option + หุ้น ในสัดส่วนที่ "หักล้าง" ความผันผวนของกันและกันออกหมด → กลายเป็น portfolio ที่ **ไร้ความเสี่ยง** (ไม่ว่าหุ้นขึ้นหรือลง ค่ามันก็เท่าเดิม)

เหตุ→ผล: ถ้าอะไรไร้ความเสี่ยง มันต้องให้ผลตอบแทนเท่ากับเงินฝากปลอดภัย (risk-free rate r) เป๊ะ — **ไม่งั้นมี arbitrage!** (ถ้าโตเร็วกว่า r ก็กู้เงิน r มาซื้อฟรีๆ; ถ้าช้ากว่า r ก็ short มันแล้วเอาเงินไปฝาก)

เงื่อนไขนี้แหละบีบให้ราคา option ต้องเป็นค่าใดค่าหนึ่งเท่านั้น → ออกมาเป็น PDE

เราจะ *พิสูจน์* PDE ทีละขั้น โดยใช้ Ito's Lemma (บท 14.5) + no-arbitrage:

1. **สร้าง portfolio**: long 1 option (มูลค่า V) + short Δ หุ้น (มูลค่า Δ·S)

$$\Pi = V - \Delta \cdot S$$

เป้าหมาย: เลือก Δ ให้ portfolio นี้ไร้ความเสี่ยง

2 **หา dΠ ด้วย Ito's Lemma**: จากบท 14.5, dV ของ V(S,t) คือ

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \frac{\partial V}{\partial S}\, dS$$

(term dt มารวมจาก ∂V/∂t กับ Ito-correction ½σ²S²∂²V/∂S² ส่วน dS คูณ ∂V/∂S) ดังนั้น

$$d\Pi = dV - \Delta\, dS = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right) dS$$

3 **กำจัด randomness**: ตัว random ทั้งหมดอยู่ใน dS (เพราะ dS = μS·dt + σS·dW มี dW สุ่ม) เลือก

$$\Delta = \partial V / \partial S \text{ (Delta hedge)}$$

→ term (∂V/∂S − Δ)dS = 0 → **dS หายไปทั้งหมด!** เหลือแต่ส่วน deterministic:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt$$

ตอนนี้ dΠ ไม่มี dW แล้ว → portfolio **ไร้ความเสี่ยง** ในช่วงเวลา dt

4 **No-arbitrage**: portfolio ที่ไร้ความเสี่ยง *ต้อง* โตด้วยอัตรา r เท่านั้น คือ dΠ = r·Π·dt จับสองฝั่งของ dΠ มาเท่ากัน (และแทน Π = V − Δ·S = V − S·∂V/∂S):

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right) dt = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right) dt$$

5 **จัดรูป**: หาร dt ทิ้ง แล้วย้ายทุก term มาฝั่งซ้าย → ได้ **Black-Scholes PDE**:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

แก่นของการพิสูจน์: Delta Hedging กำจัด Randomness

หัวใจอยู่ที่ **ขั้น 3**: เลือก $\Delta = \partial V/\partial S$ ทำให้ตัวสุ่ม (dS / dW) หายไปหมด → portfolio ไร้ความเสี่ยง

ผลที่ตามมาน่าทึ่ง: PDE ที่ได้ **ไม่มี μ (drift จริงของหุ้น) เลย!** ราคา option ถูกบังคับโดย no-arbitrage ล้วนๆ — ไม่สนว่าหุ้นจะ "มีแนวโน้มขึ้น" แค่ไหน

นี่คือเหตุผลที่ risk-neutral pricing (บท 14.2) ใช้ได้: ในเมื่อ μ หายไป เราจะแทน μ ด้วยอะไรก็ได้ที่สะดวก — เลยเลือก $\mu = r$ (โลก risk-neutral) แล้วราคาที่ได้ก็ยังถูกต้อง

PDE นี้ไม่มี μ — มีแค่ r และ σ

สังเกตว่าตัวแปรในสมการมีแค่ **r** (risk-free rate) และ **σ** (volatility) — ไม่มี μ (expected return จริงของหุ้น)

PDE เพียงอย่างเดียวยังบอกราคา option ไม่ได้ ต้องใส่ **boundary / terminal condition** ด้วย สำหรับ European Call:

$V(S, T) = \max(0, S - K)$ (payoff ตอนหมดอายุ)

แก้ PDE ตัวนี้พร้อม condition นี้ → จะได้ **สูตร Black-Scholes** (จะประกอบเต็มๆ ใน Part 7)

โจทย์: Terminal Condition + ระบุ Greek ของแต่ละ term

(ก) European Call มี strike $K = ฿100$ ตอนหมดอายุ ถ้า $S = ฿120$ payoff เท่าไหร่? ถ้า $S = ฿80$ ล่ะ? — ตรงกับ $V(S,T) = \max(0, S-K)$ ไหม?

(ข) ใน PDE: $\partial V/\partial t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \cdot \partial^2 V/\partial S^2 + rS \cdot \partial V/\partial S - rV = 0$ — term ไหนคือ "Theta" และ term ไหนเกี่ยวกับ "Gamma"?

▶ ดูเฉลย

14.7 Black-Scholes PDE — ตีความเป็น Greeks

ที่มาของ BS PDE — Hedging Argument

สร้าง portfolio: Long 1 option + Short Δ หุ้น → portfolio นี้ "ไม่มีความเสี่ยง" (delta neutral)

Portfolio ไม่มีความเสี่ยง → ต้องได้ผลตอบแทน = risk-free rate (ไม่งั้นมี arbitrage!)

นำหลักการนี้ + Ito's Lemma → ได้ PDE ที่ทุก option ต้องสอดคล้อง

ใช้ Ito's Lemma + hedging argument → ได้สมการ:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

แต่ละ term คือ Greek:

Term	Greek	ความหมาย
$\partial V/\partial t$	**Theta (Θ)**	Time decay — ราคา option ลดตามเวลา
$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2(\partial^2 V/\partial S^2)$	**$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2$ × Gamma (Γ)**	Convexity benefit จาก volatility
$rS(\partial V/\partial S)$	**rS × Delta (Δ)**	Cost of carry ของหุ้นที่ hedge
$-rV$	—	Discounting — ต้นทุนการถือ option

Greeks Balance! Theta vs Gamma Trade-off

$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta = rV$

หมายความว่า: Time decay (Theta) **ถูก offset** ด้วย Convexity gain (Gamma term)
สำหรับ Long Option: Theta เป็นลบ (จ่าย time decay) แต่ Gamma term เป็นบวก (ได้ convexity benefit)
ไม่มี "free lunch" — ได้ Gamma ต้องจ่าย Theta

1. **ตรวจสอบ BS PDE**: Call ATM, S=K=100, σ=20%, r=5%, T=0.5ปี
2. คำนวณ d_1=(0.035)/(0.2×√0.5)=0.247; Greek จริง: Delta=N(d_1)≈0.60, Gamma≈0.027/฿, Theta≈-฿8.1/ปี, V≈฿6.89
3. Theta term: −8.1
4. Gamma term: ½ × 0.04 × 10000 × 0.027 = ½ × 10.8 = +5.4
5. rSΔ term: 0.05 × 100 × 0.60 = +3.0
6. rV: 0.05 × 6.89 = 0.34
7. LHS = −8.1 + 5.4 + 3.0 = +0.30 ≈ rV = 0.34 ✓ (ใกล้มาก ต่างกันเพราะปัดทศนิยม)

แบบฝึกหัด Part VI

โจทย์ 1: EWMA Volatility Update

กำหนด $\lambda = 0.94$, $\sigma^2_{t-1} = 0.0009$ ($\sigma = 3\%$), r_{t-1} = +4% = 0.04

คำนวณ σ^2_t และ σ_t ด้วย EWMA — volatility เพิ่มหรือลด?

▶ ดูเฉลย

โจทย์ 2: Newton-Raphson IV Solver — 1 Step

Market price ของ Call = ฿5.00

$\sigma_0 = 0.25$ (25%), BS(0.25) = ฿5.80, Vega(0.25) = ฿25

คำนวณ σ_1 ด้วย Newton-Raphson แล้วตรวจว่าเข้าใกล้ IV ไหม?

▶ ดูเฉลย

โจทย์ 3: Ito's Lemma — หา dV

กำหนด $V = S^2$ (portfolio value proportional to S squared)

ราคาหุ้น: $dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dW$ (GBM)

ใช้ Ito's Lemma หา dV — มี term พิเศษอะไรเพิ่มมาบ้าง?

▶ ดูเฉลย

สรุป Part VI

✓ Autocorrelation → Volatility Clustering — r^2 มี autocorrelation สูง

✓ **AR/MA/ARMA: AR จำค่าเมื่อวาน, MA จำ shock เมื่อวาน → GARCH = ARMA บน variance!**

✓ **Realized Vol: RV = $\sqrt{(\Sigma r_i^2)}$ → model-free (จริง) vs GARCH (forecast)**

✓ EWMA: $\sigma^2_t = \lambda\sigma^2_{t-1} + (1-\lambda)r^2_{t-1}$ → น้ำหนักข้อมูลล่าสุดมากกว่า

✓ GARCH: $\sigma^2_t = \omega + \alpha r^2_{t-1} + \beta\sigma^2_{t-1}$ → News Impact + Persistence

✓ Mean Reversion → Long-run $\sigma = \sqrt{(\omega/(1-\alpha-\beta))}$

✓ Bisection: แบ่งครึ่งทุกรอบ → IV Solver ช้าแต่แน่นอน

✓ **Newton-Raphson: $\sigma(n+1) = \sigma(n) - (BS-Mkt)/Vega$ → IV Solver เร็ว**

✓ Random Walk → Binomial Tree → Option Pricing (p^* = risk-neutral prob)

✓ **Risk-Neutral: Price = $e^{-rT} \times E^*[Payoff]$ — ไม่ต้องรู้ทิศทางหุ้น!**

✓ GBM: $dS/S = \mu dt + \sigma dW$ → Lognormal price

✓ **Ito's Lemma: $dV = \Theta dt + \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma(dS)^2$ → $(dW)^2=dt$ เป็น key!**

✓ **พิสูจน์ BS PDE (5 ขั้น): delta hedge กำจัด randomness → PDE ไม่มี μ!**

✓ **BS PDE: $\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\Gamma + rS\Delta = rV$ — Theta-Gamma Trade-off!**

จบ Part VI

Part VII: ประมวลรวม → อ่าน Black-Scholes ออกทุกตัว + Monte Carlo