คณิตศาสตร์พื้นฐาน
สำหรับ Options Trading

Part II: สถิติ ความน่าจะเป็น และ Distributions (v2)

บทที่ 4–6: ค่ากลาง · Variance · Volatility · ความน่าจะเป็น · Normal · Lognormal

เรียนแบบ 3 ชั้น: อุปมา → เหตุ→ผล → ตัวเลขจริง

บทที่ 4: สถิติพื้นฐาน — "อ่านข้อมูลให้ออก"

Options คือการซื้อขาย **"ความไม่แน่นอน"** ถ้าไม่เข้าใจสถิติ ก็ไม่เข้าใจว่า options ราคาแพงหรือถูก บทนี้สร้างฐานตั้งแต่ต้น

4.1 ข้อมูลและการนำเสนอ — Histogram

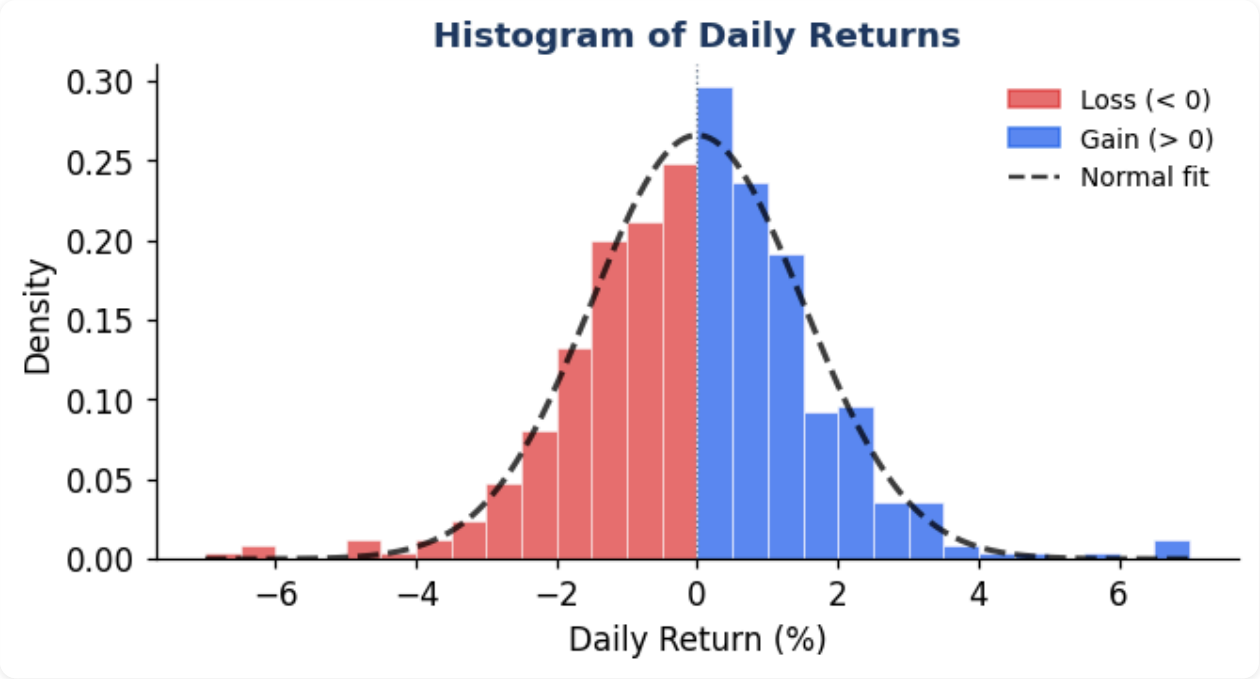
🔍 **อุปมา: ถ่ายรูปข้อมูล**

ลองนึกว่าคุณมีผลตอบแทนรายวัน 250 วัน (1 ปีการค้า) — มองทีละตัวเลขไม่บอกอะไรเลย

Histogram เหมือน **ถ่ายรูปข้อมูลจากมุมสูง** — เห็นรูปร่างภาพรวมทันที:

"ผลตอบแทนกระจุกอยู่แถว 0% หรือกระจายกว้าง? มีหางขวายาวไหม?"

มีข้อมูล 250 จุด → แบ่งเป็นช่วงๆ → นับความถี่แต่ละช่วง → เห็นรูปร่าง distribution



Histogram of daily returns with normal fit (blue=gain, red=loss)

เชื่อมกับ Options

Histogram ของ daily returns มีรูปร่างคล้าย "ระฆัง" = **Normal Distribution** ที่ Black-Scholes ใช้
ถ้า histogram มีหางซ้ายยาว = ตลาดกลัว crash มาก = **Skew สูง** = OTM Puts แพง

4.2 ค่ากลาง — Mean, Median, Mode

🔍 **อุปมา: เพื่อน 6 คนไปกินข้าว**

เพื่อน 6 คนไปกินข้าว แต่ละคนจ่ายไปตาม "ผลตอบแทนรายวัน" ของหุ้นที่ถือ:
-5%, +2%, +8%, -1%, +3%, +50% (คนสุดท้ายโชคดีมากวันนั้น)

Mean = ถ้าเอาทุกอย่างมารวมกันแล้วหารเท่าๆ กัน → ได้คนละ **+9.5%** — แต่ไม่สะท้อนความจริงเลย!
Median = เรียงแถวแล้วดูคนตรงกลาง → ได้ **+2.5%** — ตัวเลขนี้จริงกว่ามาก

ตัวอย่าง: Daily returns 6 วัน: **-5%, +2%, +8%, -1%, +3%, +50%**

ค่ากลาง	วิธีคำนวณ	ผลลัพธ์	จุดเด่น/จุดด้อย
Mean (ค่าเฉลี่ย)	(-5+2+8-1+3+50) / 6	**+9.5%**	ง่าย แต่ถูก outlier บิดเบือน
Median (มัธยฐาน)	เรียง: -5,-1,2,3,8,50 → กลาง = (2+3)/2	**+2.5%**	ทนต่อ outlier — ภาพจริงมากกว่า
Mode (ฐานนิยม)	ค่าที่ซ้ำบ่อยสุด	ไม่มี	ใช้กับ discrete data เท่านั้น

🔍 **ทำไม Mean ถึงเขียนว่า Σx_i / n?**

Σx_i = รวมทุกค่า = "เอาของทุกคนมากองรวมกัน"
/ n = หารจำนวนคน = "แบ่งให้เท่าๆ กัน"

สมการนี้ตอบว่า: *"ถ้าแบ่งผลลัพธ์ให้เท่ากันทุกคน แต่ละคนจะได้เท่าไร?"*
นั่นคือ Mean ตาม intuition พอดี

ระวัง: Outlier บิดเบือน Mean!

ค่า +50% ทำให้ Mean = 9.5% ซึ่ง **สูงกว่าทุกวันที่เหลือ**
ใน finance: ถ้า 1 วันใน 10 ปีกำไร 300% แต่วันอื่นๆ เฉลี่ย 0% → Mean ดูดีมาก แต่ Median ≈ 0%
→ **ดู Median ควบคู่ Mean เสมอ**

Weighted Average — ใช้กับ Portfolio

Weighted Mean = $\Sigma(w_i \times x_i)$

พอร์ต: หุ้น A (40%, return +5%) + หุ้น B (60%, return -2%)

Portfolio Return = 0.4 × 5% + 0.6 × (−2%) = 2.0% − 1.2% = **+0.8%**

4.3 Variance และ Standard Deviation — "วัดความกระจาย"

🔍 **อุปมา: นักยิงธนู 2 คน**

นักยิงธนูสองคนยิง 5 ครั้ง เล็งเป้าตรงกลาง:

นักยิง A: ทุกลูกตกในวงแคบๆ รอบศูนย์กลาง (แม่น)

นักยิง B: ลูกกระจายไปทั่วเป้า (ไม่แม่น)

ทั้งคู่อาจมี **Mean ≈ 0** (เฉลี่ยแล้วเล็งถูกตรงกลาง) แต่ **Standard Deviation ต่างกันมาก**

SD คือตัววัด "ความกระจาย" นั่นเอง

วัดระยะห่างแต่ละจุดจาก Mean → ยกกำลัง 2 (ทำให้เป็นบวก) → หาค่าเฉลี่ย = Variance → √ = Standard Deviation

$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \mu)^2}{n} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{n}}$$

หมายเหตุ: Population vs Sample Variance

สูตรนี้คือ **population variance** (÷n) ใช้เมื่อรู้ข้อมูลทั้งหมด — ใน finance จริงที่ใช้ข้อมูล historical (sample) ควรใช้ **sample variance** ÷(n−1) แทน เพื่อให้ unbiased estimator ความแตกต่างน้อยมากเมื่อ n ≥ 30

🔍 **ทำไมต้องยกกำลัง 2? ทำไมไม่ใช้ $|x_i - \mu|$ ธรรมดา?**

ปัญหาถ้าไม่ยกกำลัง 2: ค่าบวกและลบหักล้างกัน
เช่น ข้อมูล: +3%, -3% → ระยะห่างเฉลี่ย = (3 + (−3)) / 2 = 0 ← ผิด! ชัดเจนว่ามีความกระจาย

ทำไมไม่ใช้ $|x_i - \mu|$ (absolute value)? ทำได้ แต่ค่าสัมบูรณ์ไม่ smooth — ไม่มี derivative ที่ x=0
การ optimize และ calculus ยากกว่ามาก → นักคณิตศาสตร์เลือก $(x_i-\mu)^2$ แทน

ทำไมต้อง √ ตอนสุดท้าย?
ถ้าข้อมูลเป็น % → $(x_i-\mu)^2$ เป็น $\%^2$ → Variance มีหน่วย $\%^2$
√Variance กลับมาเป็น % (หน่วยเดิม) → เปรียบเทียบกับ returns ได้โดยตรง

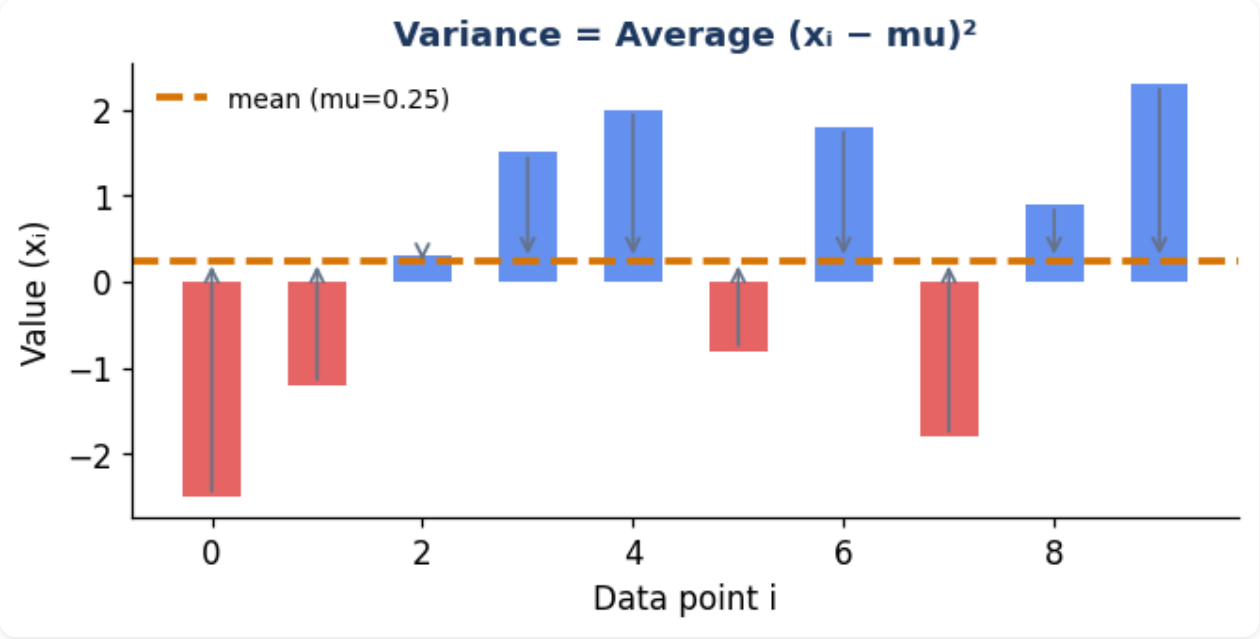
ตัวอย่างเปรียบเทียบ 2 หุ้น: μ ทั้งคู่ = 0%

หุ้น
returns: +1%, -1%, +2%, -2%
$\sigma^2 = [(1-0)^2 + (-1-0)^2 + (2-0)^2 + (-2-0)^2] / 4 = [1+1+4+4] / 4 =$ **2.5 (%²)**
$\sigma = \sqrt{2.5} =$ **1.58%** ← นิ่ง

หุ้น
returns: +10%, -8%, +12%, -14%
$\sigma^2 = [(10)^2 + (8)^2 + (12)^2 + (14)^2] / 4 = [100+64+144+196] / 4 =$ **126 (%²)**
$\sigma = \sqrt{126} =$ **11.2%** ← ผันผวนมาก!

เชื่อมกับ Options — σ คือ Volatility!

Standard Deviation ของ daily returns = Historical Volatility (HV)
หุ้น B (σ=11.2%/วัน) มี options แพงกว่าหุ้น A (σ=1.58%/วัน) มาก
เพราะ "ความไม่แน่นอนสูงกว่า" = "โอกาสที่ option จะ expire มีค่า" สูงกว่า
ยิ่ง σ สูง → ราคา option แพงขึ้นทุกประเภท



Variance = average squared distance from mean (arrows show each ($x_i - \mu$))

4.4 Percentile และ Quartile

🔍 **อุปมา: ผลสอบ ONET**

ถ้าคุณอยู่ที่ **Percentile 85** แปลว่า: นักเรียน 85% ทำคะแนนได้น้อยกว่าคุณ
ถ้าอยู่ที่ Percentile 5 แปลว่า: 95% ทำคะแนนได้มากกว่าคุณ ← กลุ่มที่แย่ที่สุด 5%

ใน finance: วันที่ "แย่ที่สุด 5%" คือ **VaR (Value at Risk) ที่ 95%**

Percentile	ชื่อ	ความหมาย	ใช้ใน Finance
P5	5th Percentile	มีแค่ 5% ที่ต่ำกว่านี้	**VaR 95%** (worst 5% days)
P25 (Q1)	Quartile 1	25% ของข้อมูลต่ำกว่านี้	ดู drawdown ช่วงล่าง
P50 (Q2)	Median	กึ่งกลาง	ผลตอบแทน "ทั่วไป"
P75 (Q3)	Quartile 3	75% ต่ำกว่านี้	ดู return ช่วงบน

เชื่อมกับ Options — VaR (Value at Risk)

VaR 95%, 1-day = P5 ของ daily returns
ตัวอย่าง: ถ้า VaR (95%, 1-day) = −3.2% บนพอร์ต ฿1 ล้าน
→ มีโอกาส 5% ที่จะเสีย ≥ ฿32,000 ในวันเดียว
→ นักวาง hedge ใช้ค่านี้ในการเลือก strike ของ protective put

4.5 Covariance และ Correlation

🔍 **อุปมา: คนขายร่ม vs คนขายแว่นกันแดด**

วันฝนตก: คนขายร่มขายดี (+), คนขายแว่นกันแดดขายไม่ดี (−)
วันแดดจัด: คนขายร่มขายไม่ดี (−), คนขายแว่นกันแดดขายดี (+)

ยอดขายทั้งคู่ **สวนทางกันตลอด** → Correlation = **−1**

ถ้าถือหุ้นบริษัทร่มกับหุ้นบริษัทแว่นกันแดด → พอร์ตนิ่งมาก = **diversification ทำงาน!**

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{\sum(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{n} \qquad \rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \in [-1,\ +1]$$

🔍 **ทำไม Correlation = Cov / ($\sigma_X \times \sigma_Y$)?**

Covariance มีปัญหา: ขนาดขึ้นอยู่กับหน่วยของข้อมูล
เช่น return เป็น % vs return เป็นสตางค์ → Cov ต่างกัน แต่ความสัมพันธ์จริงๆ เท่ากัน

การหาร $\sigma_X \times \sigma_Y$ คือ **normalize (ปรับมาตรฐาน)** → ทำให้ผลลัพธ์อยู่ระหว่าง −1 ถึง +1
ตีความได้ทันที ไม่ขึ้นกับหน่วย

ρ	ความหมาย	ตัวอย่าง
+1.0	ขึ้น/ลงพร้อมกันเป๊ะ	หุ้น CPALL กับดัชนี SET50
+0.5	ขึ้น/ลงทิศเดียวกัน แต่ไม่ตาม	หุ้นไทย 2 ตัวในอุตสาหกรรมต่างกัน
0.0	ไม่สัมพันธ์กัน	หุ้นไทย กับราคาข้าวสาลีชิคาโก
−1.0	สวนทางกันเป๊ะ	คนขายร่ม กับ คนขายแว่นกันแดด

เชื่อมกับ Options — Portfolio Variance

ยิ่ง ρ ต่ำ → diversification ลด risk ได้มากขึ้น

Portfolio Variance = $\Sigma_i \Sigma_j w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$

ถ้า ρ = −1: Var พอร์ตลดเป็นศูนย์ได้ (perfect hedge) → นี่คือหลักการของ options hedging!

⚠️ Model Risk: Correlation พัง ตอน Stress — "Diversification หายไปเมื่อต้องการที่สุด"

Correlation ที่วัดในช่วงตลาดปกติ **ไม่ valid ตอน crisis**:

• ปี 2008: Correlation ระหว่าง asset classes ต่างๆ กระโดดขึ้นหา +1 พร้อมกัน (everything falls together)

• Diversification ที่คำนวณด้วย ρ = 0.3 อาจกลายเป็น ρ = 0.9 ในวันที่ตลาดร่วง

• **ระวัง**: $w^T \Sigma w$ ที่ใช้ historical Σ จะ underestimate tail risk ในสถานการณ์ stress

แก้ไข: Stress test ด้วย correlation matrix จาก historical crisis periods (e.g., 2008, 2020 COVID)

สรุปบทที่ 4

✓ Histogram: ดูรูปร่างข้อมูลทั้งหมดในนัดเดียว

✓ Mean vs Median: Mean ถูก outlier บิดเบือน — ดูทั้งคู่

✓ **σ (Standard Deviation) = Volatility** — ยิ่งสูง options ยิ่งแพง

✓ Percentile → VaR → ช่วยเลือก strike ของ protective put

✓ Correlation → ยิ่งต่ำ diversification ยิ่งดี

โจทย์ฝึกหัด บทที่ 4

ข้อ 1. Returns 5 วัน: +2%, −1%, +4%, −3%, +3%

คำนวณ (ก) Mean (ข) Median (ค) Standard Deviation

▶ ดูเฉลย

ข้อ 2. หุ้น X มี σ = 1%/วัน, หุ้น Y มี σ = 3%/วัน

ราคา ATM Call ตัวไหนแพงกว่า และทำไม?

▶ ดูเฉลย

ข้อ 3. พอร์ต: หุ้น A (60%, σ=20%) + หุ้น B (40%, σ=15%) ρ = +0.3

คำนวณ Portfolio Standard Deviation

▶ ดูเฉลย

บทที่ 5: ความน่าจะเป็น — "วัดความไม่แน่นอน"

Options คือการ **"ซื้อขายความน่าจะเป็น"** ราคา call สะท้อนโอกาสที่หุ้นจะขึ้น ราคา put สะท้อนโอกาสที่จะลง — ถ้าไม่เข้าใจ probability ก็ไม่เข้าใจว่า options แพงหรือถูก

5.1 ความน่าจะเป็นพื้นฐาน

🔍 **อุปมา: พยากรณ์อากาศ**

กรมอุตุฯ บอก "70% ฝนตกพรุ่งนี้" — นี่ไม่ได้แปลว่าพรุ่งนี้ฝนตก 70% ของวัน
แต่แปลว่า: **ถ้าวันแบบนี้เกิดขึ้น 100 ครั้ง ฝนตกประมาณ 70 ครั้ง**

ความน่าจะเป็นคือ "สัดส่วนในระยะยาว" ไม่ใช่คำทำนายแน่นอน 100%

$$0 \leq P(A) \leq 1 \qquad P(A^c) = 1 - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ (ถ้าอิสระ)}$$

ตัวอย่าง: Options Trade

ประเมินว่า P(หุ้นขึ้น > 5%) = 30%
P(หุ้นไม่ขึ้น > 5%) = 1 − 30% = **70%** ← Call OTM expire ไร้ค่า

ถ้าวิเคราะห์ 2 หุ้น อิสระต่อกัน แต่ละตัว P(ขึ้น) = 60%:
P(ทั้งคู่ขึ้น) = 0.6 × 0.6 = **36%**
P(อย่างน้อย 1 ตัวขึ้น) = 1 − P(ทั้งคู่ไม่ขึ้น) = 1 − 0.4×0.4 = **84%**

5.2 Combinations C(n, k)

🔍 **อุปมา: เลือกนักฟุตบอล**

เลือกกองหน้า 2 คนจากผู้เล่น 5 คน (ไม่สนว่าใครเป็นตัวจริง/สำรอง แค่ใครอยู่ในทีม)
C(5,2) = 5! / (2! × 3!) = 120/12 = **10 วิธี**

ถ้าสนลำดับ (ตัวจริงคนไหน): Permutation = 5×4 = 20 วิธี
ไม่สนลำดับ: Combination = 20/2! = 10 วิธี

$$\binom{n}{k} = C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

n	k	C(n,k)	ตัวอย่าง
5	2	10	เลือกหุ้น 2 ตัวจาก universe 5 ตัว
10	3	120	เลือก option 3 ตัวจาก 10 strike
4	2	6	วันขึ้น 2 วันจาก 4 วัน (Binomial Tree)

เชื่อมกับ Options — Binomial Tree

C(n,k) คือหัวใจของ Binomial Distribution (บทถัดไป)
ใน **Binomial Option Pricing**: C(4,2) = 6 วิธีที่หุ้นจะขึ้น 2 ครั้งจาก 4 step
รวม payoff ทุก path × ความน่าจะเป็น → ราคา option

5.3 Conditional Probability และ Bayes' Theorem

🔍 **อุปมา: ผล COVID Test**

ก่อนตรวจ: P(ติดเชื้อ) = 1% (ความชุกในประชากร)
ตรวจได้ผล **Positive** (B) — ควรกังวลแค่ไหน?

สัญชาตญาณบอกว่า "ติดเชื้อแน่เลย!" แต่ถ้า test มี False Positive rate 5%
ความจริง: P(ติดเชื้อ | ผล Positive) ≈ **17%** ไม่ใช่ 99%

Bayes ช่วยอัพเดทความเชื่อเมื่อได้ข้อมูลใหม่

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (\text{Bayes: } P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\,P(A)}{P(B)})$$

🔍 **ทำไม Bayes ถึงเขียนแบบนี้?**

เริ่มจากนิยาม: P(A|B) = P(A and B) / P(B)

และ: P(B|A) = P(A and B) / P(A)

ดังนั้น: **P(A and B) = P(B|A) × P(A)**

แทนเข้าสมการแรก: P(A|B) = P(B|A) × P(A) / P(B) ← ได้ Bayes!

ตัวอย่าง: อัพเดทมุมมองหลังข่าวกำไร

ก่อนประกาศ (prior): P(หุ้นขึ้น) = 50% — ยังไม่มีข้อมูล เดา 50/50

ได้ข่าวกำไรดีกว่าคาด (likelihood): P(กำไรดี|หุ้นขึ้น) = 70%, P(กำไรดี|หุ้นไม่ขึ้น) = 20%

P(กำไรดี) = 0.70×0.50 + 0.20×0.50 = 0.35 + 0.10 = 0.45

P(หุ้นขึ้น | กำไรดี) = 0.70×0.50 / 0.45 = 0.35/0.45 ≈ 78% ← อัพจาก 50% (prior) เป็น 78% (posterior)!

สังเกต: prior (50%), likelihood (70%), posterior (78%) เป็น **3 ค่าที่ต่างกัน** — สิ่งที่ผลักให้มุมมองขยับขึ้นมากคือ **likelihood ratio** 70%/20% = 3.5 เท่า (ข่าวกำไรดี "ชี้" ไปทางหุ้นขึ้นแรง) ยิ่ง ratio สูง posterior ยิ่งเขยิบจาก prior มาก

5.4 Expected Value — "ค่าคาดหวัง"

🔍 **อุปมา: เกมทอยเหรียญ**

เกม: ทอยเหรียญ — หัวได้ +฿100, ก้อยเสีย −฿80

ควรเล่นไหม? ทอย 1,000 ครั้ง:

- หัว ~500 ครั้ง: ได้ 500 × ฿100 = +฿50,000
- ก้อย ~500 ครั้ง: เสีย 500 × ฿80 = −฿40,000
- กำไรสุทธิ: +฿10,000 / 1,000 ครั้ง = **+฿10 ต่อครั้ง**

นี่คือ Expected Value = +฿10 → ควรเล่น!

$$E[X] = \sum_i x_i \, P(x_i)$$

$$E[aX + b] = a\,E[X] + b \qquad E[X + Y] = E[X] + E[Y] \text{ (เสมอ)}$$

🔍 **ทำไม E[X] = Σ x_i × P(x_i)?**

คิดแบบ weighted average: แต่ละผลลัพธ์มีน้ำหนัก = ความน่าจะเป็น
ผลลัพธ์ที่เกิดบ่อย (P สูง) ควรมีน้ำหนักมาก
ผลลัพธ์ที่เกิดน้อย (P ต่ำ) ควรมีน้ำหนักน้อย

E[X] คือ **ค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนักด้วย probability** ไม่ใช่ค่าเฉลี่ยธรรมดา

เชื่อมกับ Options — Expected Payoff

ราคา Call Option = e^{-rT} × E*[max(0, S_T – K)]
E* = expected value ภายใต้ risk-neutral probability
= "ถ้า option expire วันนี้ 1,000 ครั้ง แต่ละครั้ง payoff เฉลี่ยเท่าไร" → นั่นคือราคา!

5.5 Variance ของตัวแปรสุ่ม

$$\mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{Var}(X) \qquad \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

🔍 **ทำไม Var(aX + b) = a^2Var(X)?**

b คือ "ขยับกราฟซ้าย/ขวา" — ไม่เปลี่ยนความกระจาย → Var ไม่เปลี่ยน
a คือ "ขยาย/ยุบ scale" — ถ้า scale กว้างขึ้น 2 เท่า ทุกระยะห่างกว้าง 2 เท่า
แต่ Var คิดจาก (x_i–μ)² → ระยะห่างยกกำลัง 2 → Var เพิ่ม a^2 เท่า

เชื่อมกับ Options — Portfolio Variance

Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2·Cov(X,Y)
ขยายเป็น n หุ้น: **σ^2_p = w^T Σ w** (matrix form — บท 8)
ถ้า Cov = 0 (uncorrelated): Portfolio Var = Var(X) + Var(Y) → diversification!

สรุปบทที่ 5

✓ Probability = "สัดส่วนในระยะยาว" ไม่ใช่คำทำนาย
✓ C(n,k) → จำนวน paths ใน Binomial Tree
✓ Bayes: อัพเดทความเชื่อจากข้อมูลใหม่ (กำไร, FOMC, ข่าว)
✓ E[X] = weighted average ของผลลัพธ์ → ราคา option = E* ของ payoff
✓ Var properties → เข้าใจ portfolio risk

โจทย์ฝึกหัด บทที่ 5

ข้อ 1. เกม: ทอยลูกเต๋า 1 ลูก
ถ้าออก 1–4: ได้ ฿20, ออก 5: ได้ ฿50, ออก 6: เสีย ฿60
(ก) คำนวณ E[X] (ข) ควรเล่นไหม?

▶ ดูเฉลย

ข้อ 2. Call Option: หุ้นวันหมดอายุมีโอกาส 40% ขึ้น strike ที่ +฿10, 60% expire ไร้ค่า
ราคา call ควรเป็นเท่าไร? (ไม่คิด discount)

▶ ดูเฉลย

ข้อ 3. P(หุ้นขึ้น) = 55%, P(IV ลด | หุ้นขึ้น) = 70%, P(IV ลด | หุ้นไม่ขึ้น) = 20%
ถ้าพรุ่งนี้ IV ลด → P(หุ้นขึ้น | IV ลด) = ?

▶ ดูเฉลย

บทที่ 6: Distributions — "รูปทรงของความไม่แน่นอน"

Distribution คือ "แผนที่" ของความน่าจะเป็น — บอกว่าค่าต่างๆ มีโอกาสเกิดมากน้อยแค่ไหน บทนี้สอน 4 distribution ที่สำคัญที่สุดใน options pricing

6.1 Binomial Distribution

🔍 **อุปมา: ยิง penalty 5 ลูก**

นักเตะมีโอกาสยิงได้ 70% ต่อลูก ยิง 5 ลูก
โอกาสยิงได้พอดี 3 ลูกคือเท่าไร?

- ต้องเลือกว่า **3 ลูกไหน**จาก 5 ที่จะได้ → C(5,3) = 10 วิธี
- แต่ละวิธี: P = $(0.7)^3 \times (0.3)^2 = 0.343 \times 0.09 = 0.03087$
- P(ยิงได้ 3 จาก 5) = 10 × 0.03087 = **30.87%**

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

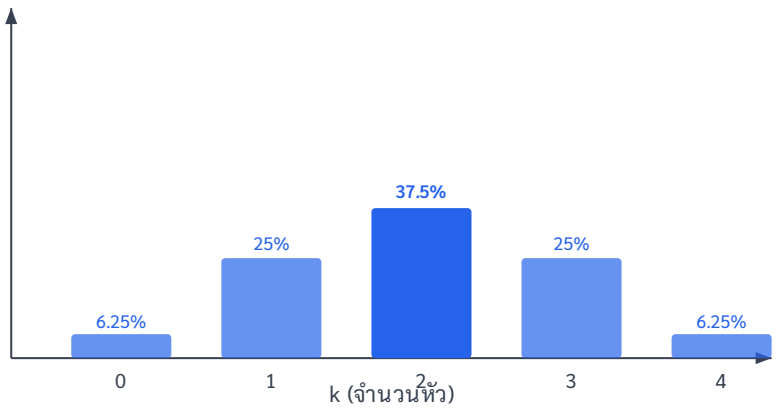
🔍 **ทำไมสูตรถึงเขียนแบบนี้?**

C(n,k) = จำนวนวิธีที่ k ครั้งจาก n ครั้งจะสำเร็จ (ลำดับไม่สำคัญ)
p^k = โอกาสสำเร็จ k ครั้ง (ทุกครั้งอิสระ → คูณกัน)
$(1-p)^{n-k}$ = โอกาสล้มเหลว n−k ครั้งที่เหลือ

รวม: "มีกี่วิธี" × "วิธีหนึ่งเป็นไปได้แค่ไหน" = ความน่าจะเป็นรวม

ตัวอย่าง: โยนเหรียญ (p=0.5) 4 ครั้ง

k (หัว)	C(4,k)	P(X=k)	เปอร์เซ็นต์
0	1	0.0625	6.25%
1	4	0.2500	25.0%
2	6	0.3750	37.5%
3	4	0.2500	25.0%
4	1	0.0625	6.25%



แผนภาพ: Binomial Distribution (n=4, p=0.5) — ความน่าจะเป็นแต่ละผลลัพธ์

เชื่อมกับ Options — Binomial Tree Pricing

ใน **Cox-Ross-Rubinstein (CRR) model**:
ราคาหุ้น step หนึ่ง ขึ้น u เท่า (prob p) หรือลง d เท่า (prob 1−p) = Binomial!
n steps → n→∞ → **Binomial → Normal (CLT)** → ได้ Black-Scholes

6.2 Normal Distribution — หัวใจของ Black-Scholes

🔍 **อุปมา: ส่วนสูงนักเรียน**

วัดส่วนสูงนักเรียน 1,000 คน:
- ส่วนใหญ่สูง 165–170 cm (กลุ่มใหญ่กองอยู่ตรงกลาง)
- น้อยคนที่สูง 140 cm หรือ 200 cm (หางทั้งสองข้างบาง)
- กราฟออกมาเป็นรูประฆัง = **Normal Distribution**

Daily returns ของหุ้นก็มีรูปร่างคล้ายกัน — ส่วนใหญ่เปลี่ยนแปลงน้อย วันที่ขึ้น/ลงมากนานๆ ถึงเจอ

Normal Distribution กำหนดโดย 2 ค่า:

- **μ (mean)** = จุดศูนย์กลาง (ยอดระฆัง)
- **σ (standard deviation)** = ความกว้างของระฆัง

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

🔍 **ทำไมสูตรถึงดูซับซ้อน? แยกเป็น 2 ส่วน**

ส่วนที่ 1: $e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ — "รูปร่างระฆัง"

• $(x-\mu)^2$ = ระยะห่างจาก mean ยกกำลัง 2 (เสมอ ≥ 0)

• ยิ่งห่างจาก mean → exponent ลบมาก → $e^{-\text{ใหญ่มาก}}$ → ใกล้ 0 (หางบาง)

• x = μ: exponent = 0 → e^0 = 1 → **peak ที่ mean**

• σ ใหญ่ → $2\sigma^2$ ใหญ่ → e ลดลงช้า → **ระฆังกว้าง**

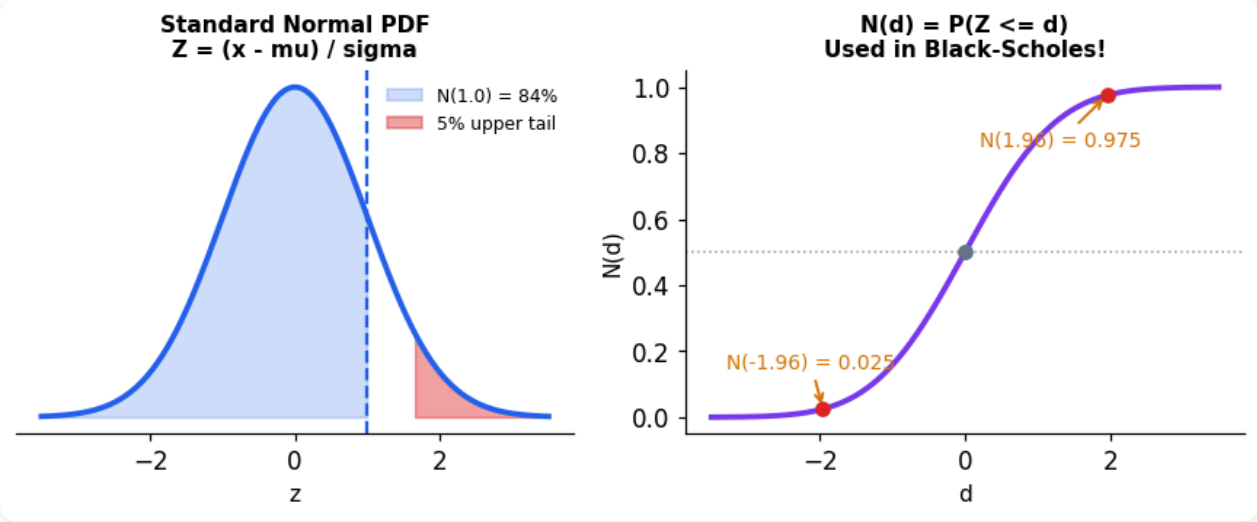
ส่วนที่ 2: 1/(σ√(2π)) — "scaling factor"

• √(2π) ≈ 2.507 มาจากการ integrate กราฟ Gaussian

• ทำให้พื้นที่ใต้กราฟทั้งหมด = 1 (นิยาม probability)

กฎ 68–95–99.7:

ช่วง	ครอบคลุม	ตัวอย่าง: หุ้น μ=0%, σ=20%/ปี
μ ± 1σ	**68.3%**	68% ของปี return อยู่ใน −20% ถึง +20%
μ ± 2σ	**95.4%**	95% อยู่ใน −40% ถึง +40%
μ ± 3σ	**99.7%**	99.7% อยู่ใน −60% ถึง +60%



Left: PDF with shaded areas | Right: CDF N(d) used in Black-Scholes

6.3 Z-Score และ Standard Normal N(0,1)

🔍 **อุปมา: GPS พิกัดสัมพัทธ์**

แทนที่จะบอกว่า "คุณอยู่ที่ latitude 13.756° N" (ตัวเลขสัมบูรณ์)
ลองบอกว่า "คุณอยู่ห่างจากศูนย์กลางเมือง 3.2 กม." (ตัวเลขสัมพัทธ์)

Z-score เหมือนกัน: แทนที่จะพูดถึงค่าดิบ x
บอกว่า "x ห่างจาก mean กี่ standard deviation" → เทียบข้ามหุ้น ข้าม market ได้ทันที

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} \qquad N(d) = P(Z \leq d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$$

🔍 **ทำไม Z = (x−μ)/σ?**

ลบ μ: ขยับ distribution ให้ mean = 0 (เหมือนเอา 0 ไว้ตรงกลาง)
หาร σ: scale ให้ standard deviation = 1 (มาตรฐานเดียวกัน)

ผล: ไม่ว่าข้อมูลจะมีหน่วยอะไร scale แค่ไหน → แปลงเป็น Z ได้เสมอ
Z = −2 แปลว่า "ต่ำกว่า mean 2 เท่าของ σ" ทุก distribution

d	N(d)	ความหมาย
−2.0	0.0228	มีแค่ 2.3% อยู่ต่ำกว่า −2σ
−1.0	0.1587	15.9% อยู่ต่ำกว่า −1σ
0.0	0.5000	50% พอดี (= median)
+1.0	0.8413	84.1% อยู่ต่ำกว่า +1σ
+2.0	0.9772	97.7% อยู่ต่ำกว่า +2σ

เชื่อมกับ Options — $N(d_1)$ และ $N(d_2)$ ใน Black-Scholes!

$C = S_0 \times N(d_1) - K \times e^{-rT} \times N(d_2)$

- $N(d_2)$ = ความน่าจะเป็นที่ option จะ expire ITM (ภายใต้ risk-neutral world)
- $N(d_1) = N(d_2)$ ที่ปรับด้วย delta → ใช้ hedge
- d_1, d_2 **คือ Z-scores ที่รวม ln(S/K), r, σ, T เข้าด้วยกัน**

พอรู้ Z-score → lookup ตาราง N(d) → ได้ราคา option!

6.4 Lognormal Distribution — ทำไมราคาหุ้นไม่เป็น Normal

ปัญหา: Normal Distribution → ราคาหุ้นติดลบได้!

ถ้าราคาหุ้น ~ Normal(500, 200^2) → มีโอกาส ~0.6% ที่ราคาจะ < 0

ราคาหุ้น –฿50 ไม่มีความหมายในโลกจริง (limited liability → ต่ำสุดคือ 0)

Normal ใช้กับราคาไม่ได้!

🔍 **อุปมา: เงินทบต้น**

ฝากเงิน ฿100 ทบต้นทุกวัน อัตราดอกเบี้ยรายวัน r:

วันที่ 1: ฿100 × $(1+r_1)$

วันที่ 2: ฿100 × $(1+r_1) \times (1+r_2)$

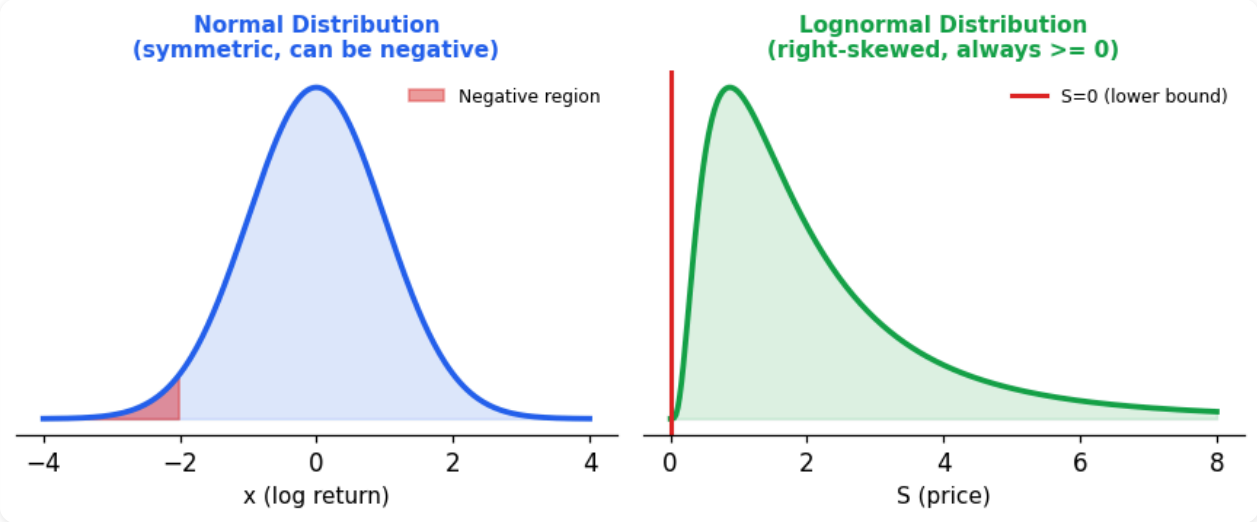
...

วันที่ n: ฿100 × $\Pi(1+r_i)$ ≈ ฿100 × $e^{r_1+r_2+\cdots+r_n}$

ผลคูณของ random variables → Lognormal! เพราะ $e^X > 0$ เสมอ

$$\ln(S) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \;\Rightarrow\; S \sim \text{Lognormal} \quad (S = e^{\ln S} > 0)$$

Chain: $r = \ln(S_1/S_0) \sim \mathcal{N} \to S_1/S_0 = e^r \sim \text{Lognormal}$



Normal distribution (can be negative) vs Lognormal (always ≥ 0)

สาย Chain: Log Return → Normal → ราคา → Lognormal

$r = \ln(S_1/S_0) \sim$ Normal → $S_1 = S_0 \times e^r \sim$ Lognormal

Black-Scholes สมมติว่า log returns เป็น Normal Distribution

→ ราคาหุ้นเป็น Lognormal → ราคาไม่ติดลบ ✓

🏛️ Quant Desk: Lognormal เป็น Working Assumption — รู้ข้อจำกัดไว้ด้วย

Lognormal ใช้กันทั่วไปใน derivatives pricing เพราะ:

- **ราคาไม่ติดลบ** (bounded below by 0) ✓
- **มี closed-form solution** สำหรับ Black-Scholes ✓
- **Log returns additive** ข้ามช่วงเวลา ✓

แต่ data จริงมี fat tails และ negative skew (§6.6) — นั่นคือทำไมตลาดจึงให้ implied vol ที่ OTM Put > ATM (Volatility Skew)

6.5 Central Limit Theorem (CLT) — เวทมนตร์ของสถิติ

Central Limit Theorem

"ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างจำนวนมาก → **Normal Distribution เสมอ**
ไม่ว่า distribution เดิมจะเป็นรูปร่างอะไรก็ตาม"

ต้องการแค่: (1) sample size ใหญ่พอ ($n \geq 30$ มักพอ) (2) variance มีอยู่จำกัด

🔍 **Demo: ทอยลูกเต๋า**

ทอย 1 ลูก: distribution สม่ำเสมอ (แต่ละหน้า 1/6) — ไม่ใช่ Normal เลย!
เฉลี่ย 2 ลูก: distribution เริ่มรูปสามเหลี่ยม (กลางนูน)
เฉลี่ย 10 ลูก: distribution คล้าย bell curve
เฉลี่ย 30 ลูก: Normal Distribution ชัดเจน!

ลูกเต๋าไม่ Normal เลย แต่ **ค่าเฉลี่ยของลูกเต๋าหลายๆ ลูก → Normal** = CLT

เชื่อมกับ Options

- **Binomial → Normal (CLT):** เมื่อ n steps → ∞ → ได้ Black-Scholes สูตร!
- Return รายวันอาจไม่ Normal แต่ return รายเดือน/ปี ≈ Normal (CLT)
- **Monte Carlo:** เฉลี่ย payoff จากล้าน simulations → converge หา E[payoff] ได้แม่น

6.6 Skewness และ Kurtosis — ตลาดจริงไม่ใช่ Normal

🔍 **อุปมา: เงินเดือนในไทย (Skewness)**

เงินเดือนคนไทยส่วนใหญ่ 15,000–30,000 บาท แต่มีมหาเศรษฐีไม่กี่คนรับ 10 ล้าน/เดือน
→ กราฟ **เบ้ขวา (Positive Skew)**: หางขวายาว, Mean > Median

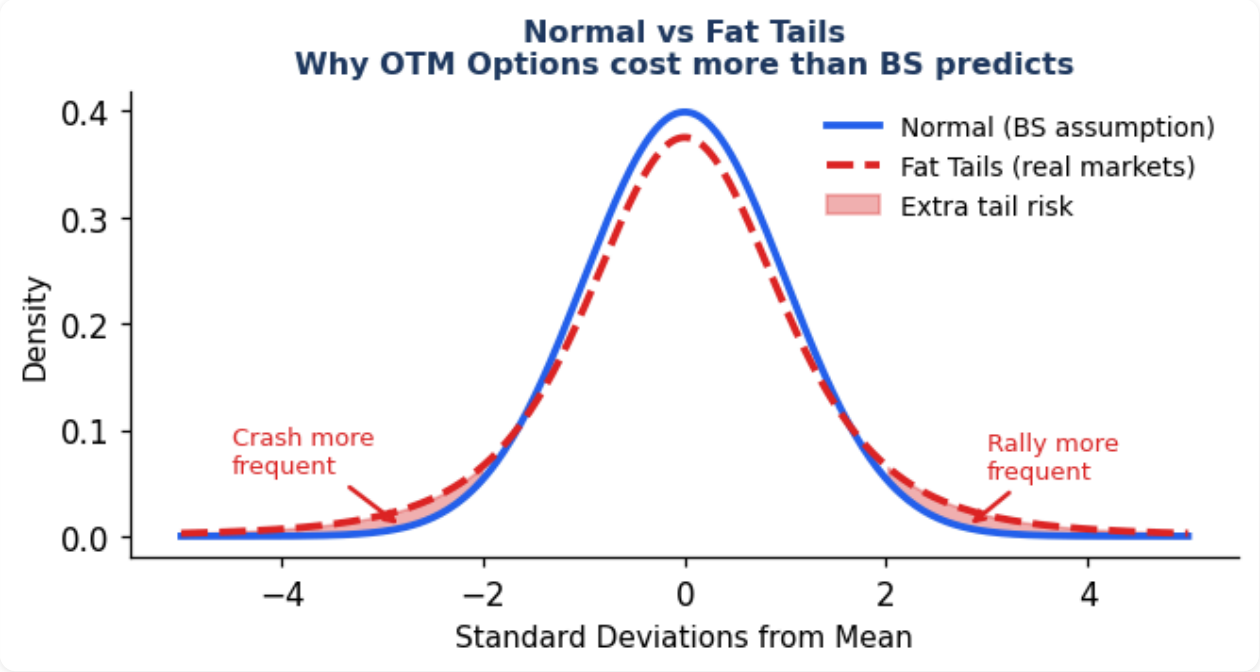
ตลาดหุ้นกลับกัน: **เบ้ซ้าย (Negative Skew)**
วัน crash (−10%) เกิดบ่อยกว่าวัน rally (+10%) และรุนแรงกว่า
→ หางซ้ายยาว = ผู้ถือหุ้นกลัวขาดทุนหนักกว่าที่ Normal ทำนาย

🔍 **อุปมา: แผ่นดินไหว 100 ปีครั้ง (Kurtosis)**

ถ้าตลาดเป็น Normal จริง: เหตุการณ์ 5σ (เช่น −40% ในวันเดียว) ควรเกิด 1 ในล้านล้านวัน
แต่ในความเป็นจริง: crash รุนแรงเกิดบ่อยกว่านั้นมาก (ทุก 10–20 ปี)

Fat Tails (Kurtosis สูง) = หางหนากว่า Normal
= เหตุการณ์สุดขั้วเกิดบ่อยกว่าที่ model ทำนาย

สมบัติ	Normal	ตลาดจริง	ผลกระทบต่อ Options
Skewness	0 (สมมาตร)	เบ้ซ้าย (negative)	Put OTM แพงกว่า Call OTM
Kurtosis	3 (mesokurtic)	>3 (fat tails)	Deep OTM options แพงกว่า BS



Real returns have heavier tails than Normal — OTM options are priced accordingly

เชื่อมกับ Options — Volatility Smile / Skew

ตลาด "รู้" ว่า Normal ไม่พอ → ราคา options สะท้อน fat tails จริงๆ

- OTM Puts แพงกว่า BS ทำนาย → **Volatility Skew** (IV ลดขณะ strike เพิ่ม)
- Deep OTM ทั้งสองด้านแพง → **Volatility Smile**

นี่คือเหตุผลที่ quant ต้อง **"ซื้อ vol ที่ถูก ขาย vol ที่แพง"** ไม่ใช่แค่ดู BS

สรุปบทที่ 6

✓ **Binomial**: C(n,k)×p^k×(1−p)^(n−k) → สะพานสู่ Binomial Tree

✓ **Normal**: Bell curve, กฎ 68-95-99.7, สูตร 2 ส่วน (รูปร่าง + scaling)

✓ **Z-score → N(d)**: อ่าน $N(d_1)$, $N(d_2)$ ใน Black-Scholes ออกแล้ว!

✓ **Lognormal**: ราคาหุ้นต้อง ≥ 0 → log return Normal → ราคา Lognormal

✓ **CLT**: ค่าเฉลี่ยหลายๆ sample → Normal เสมอ → ทำไม BS ทำงานได้

✓ **Skew + Fat Tails**: ตลาดจริง ≠ Normal → Volatility Smile/Skew

โจทย์ฝึกหัด บทที่ 6

ข้อ 1. หุ้น $\mu = 0\%$, $\sigma = 25\%$/ปี (ใช้กฎ 68-95-99.7)

(ก) โอกาสที่ return จะอยู่ใน −25% ถึง +25%

(ข) โอกาสที่จะ *ขาดทุนมากกว่า* 50%/ปี

(ค) ถ้าซื้อ Put Strike −50% (deep OTM) ความน่าจะเป็นที่จะ ITM คือเท่าไร?

▶ ดูเฉลย

ข้อ 2. หุ้นราคา ฿100, $\sigma = 20\%$/ปี, $T = 1$ ปี, $r = 3\%$

ในโมเดล Black-Scholes: $d_2 = [\ln(100/95) + (r - \sigma^2/2)T] / (\sigma\sqrt{T}) = [0.0513 + (0.03-0.02)\times 1] / (0.20\times 1) = 0.0613/0.20 \approx 0.31$

$N(0.31) \approx 0.6217$ → ความน่าจะเป็นที่ Call (K=95) จะ expire ITM คือเท่าไร?

▶ ดูเฉลย

ข้อ 3. ตลาดหุ้นมี Negative Skew และ Fat Tails

ระหว่าง (ก) Short ATM Straddle กับ (ข) Short OTM Put — ตัวไหนเสี่ยงกว่าในโลกจริง? เพราะอะไร?

▶ ดูเฉลย

จบ Part II

ตอนนี้คุณเข้าใจ:

Volatility (σ), Normal Distribution, N(d), Lognormal, Expected Value, Skew/Fat Tails

→ พร้อมอ่าน Greeks และ Black-Scholes อย่างลึกซึ้งแล้ว!

Part III: แคลคูลัส → เข้าใจ Greeks (Delta, Gamma, Theta, Vega) ทางคณิตศาสตร์