Payoff Mastery

Part V-A: Pricing & Greeks — สูตรที่ต้องรู้ (บทเสริม)

Black-Scholes + Digital Pricing + Greeks Formulas + Breeden-Litzenberger + Kelly

Black-Scholes — "สูตรที่บอกว่าเส้นโค้งอยู่ตรงไหน"

แนวคิด: ทำไมต้องรู้?

Payoff chart ณ expiry = **เส้นหักศอก** (ตรงไปตรงมา)
แต่ก่อน expiry = **เส้นโค้ง** → Black-Scholes บอกว่าเส้นโค้งนั้นอยู่ตรงไหน

Black-Scholes Call Price

$$C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$$

$$d_1 = [\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2) \cdot T] / (\sigma \cdot \sqrt{T})$$
$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$$

ความหมายแต่ละส่วน

$S \cdot N(d_1)$ = "ส่วนที่ได้จากหุ้น" → Delta × ราคาหุ้น → มูลค่าหุ้นที่ option "ครอบครอง"
$K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$ = "ส่วนที่ต้องจ่าย" → PV ของ strike × probability ที่จะต้องจ่าย
$N(d_2)$ = probability ที่ option จบ ITM (risk-neutral) → "โอกาสที่จะได้ใช้สิทธิ"
$N(d_1)$ = Delta = hedge ratio → "ต้องถือหุ้นกี่หุ้นเพื่อ hedge option 1 สัญญา"

Black-Scholes Put Price

$$P = K \cdot e^{-rT} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1)$$

หรือจาก PCP: $P = C - S + K \cdot e^{-rT}$ (ง่ายกว่าคำนวณเอง)

ตัวอย่างคำนวณ

ข้อมูล: S=100, K=100, r=5%, σ=20%, T=0.5 (6 เดือน)

Step 1: คำนวณ d_1
$d_1 = [\ln(100/100) + (0.05 + 0.04/2) \times 0.5] / (0.20 \times \sqrt{0.5})$

```
   = [0 + (0.05 + 0.02)×0.5] / (0.20×0.7071)
   = [0.035] / [0.1414]
   = 0.2475

Step 2: คำนวณ d₂
d₂ = 0.2475 - 0.1414 = 0.1061

Step 3: หา N(d₁) และ N(d₂) จากตาราง Normal Distribution
N(0.2475) ≈ 0.5977 (Delta)
N(0.1061) ≈ 0.5422 (P(ITM))

Step 4: คำนวณ Call Price
C = 100×0.5977 - 100×e^(-0.025)×0.5422
  = 59.77 - 97.53×0.5422
  = 59.77 - 52.88
  = ฿6.89

Step 5: คำนวณ Put Price (ผ่าน PCP)
P = 6.89 - 100 + 97.53 = ฿4.42

ตรวจสอบ PCP: C + PV(K) = 6.89 + 97.53 = 104.42 | P + S = 4.42 + 100 =
104.42 ✓
```

3 สิ่งที่ต้องจำ (BS)

1. **$N(d_2)$ = probability ITM** → "โอกาสที่ option จะมีค่าเมื่อหมดอายุ"
2. **$N(d_1)$ = Delta** → "ต้องถือหุ้นกี่หุ้นเพื่อ hedge"
3. **BS ใช้ได้แค่ European** + สมมติ vol คงที่ (จริงๆ มี smile/skew)

Digital Option Pricing — "PM ควรราคาเท่าไร?"

Digital Call = $e^{-rT} \times N(d_2)$

ตัวอย่าง (ข้อมูลเดิม): $e^{-0.025} \times 0.5422 = 0.9753 \times 0.5422 =$ **$0.529**

ความหมาย: PM Above Yes ที่ K=100 ควรมีราคา ≈ **53¢** (ถ้า price ด้วย BS)
ถ้า PM ขาย 62¢ → PM แพงกว่า Options implied 9¢ → อาจมี edge (หรือ PM มีข้อมูลมากกว่า)

Greeks Formulas — "ตัวเลข exact"

จาก Part V เรียนว่า "Delta = slope, Gamma = curvature" แต่ไม่มีสูตร — ตอนนี้เพิ่มสูตร exact

Normal PDF: N'(x)

```
N'(x) = (1/√(2π)) × e^(-x²/²) ≈ 0.3989 × e^(-x²/²)
(ใช้ในสูตร Gamma, Theta, Vega)
```

Delta — "Option เปลี่ยนเท่าไรเมื่อหุ้นขยับ ฿1"

Delta_Call = N(d_1) → ค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง +1
Delta_Put = N(d_1) - 1 → ค่าอยู่ระหว่าง -1 ถึง 0

ตัวอย่าง: Delta_Call = N(0.2475) = **0.5977**
→ หุ้นขึ้น ฿1 → Call ขึ้น ≈ ฿0.60
Delta_Put = 0.5977 - 1 = **-0.4023**
→ หุ้นขึ้น ฿1 → Put ลง ≈ ฿0.40

Gamma — "Delta เปลี่ยนเร็วแค่ไหน"

Gamma = N'(d_1) / (S × σ × √T) (เท่ากันสำหรับ Call และ Put)

ตัวอย่าง: N'(0.2475) = 0.3989 × $e^{-0.0306}$ = 0.3989 × 0.9698 = **0.3869**
Gamma = 0.3869 / (100 × 0.20 × 0.7071) = 0.3869 / 14.14 = **0.0274**
→ หุ้นขึ้น ฿1 → Delta เปลี่ยนประมาณ 0.027

Theta — "Option เสียค่าเท่าไรต่อวัน"

Theta_Call = -S×N'(d_1)×σ/(2√T) - r×K×e^{-rT}×N(d_2)

ส่วนแรก = time decay ของ optionality (ติดลบเสมอ)
ส่วนสอง = ดอกเบี้ยบน exercise price

```
ตัวอย่าง (ต่อปี):
= -(100×0.3869×0.20)/(2×0.7071) - (0.05×100×0.9753×0.5422)
= -(7.738)/(1.4142) - (2.644)
= -5.473 - 2.644 = -8.12 ต่อปี
= -8.12/365 = -฿0.022 ต่อวัน
→ ทุกวันที่ถือ Call เสียค่าประมาณ ฿0.02
```

Vega — "Option เปลี่ยนเท่าไรเมื่อ vol เปลี่ยน 1%"

```
Vega = S × N'(d₁) × √T (เท่ากันสำหรับ Call และ Put)

ตัวอย่าง: 100 × 0.3869 × 0.7071 = 27.36 (ต่อ 100% vol)
→ ต่อ 1% vol: 27.36/100 = ฿0.274
→ ถ้า IV เพิ่มจาก 20% เป็น 21% → option ขึ้น ≈ ฿0.27
```

Greeks Summary Table

Greek	สูตร	ความหมาย	ค่าตัวอย่าง
Delta	$N(d_1)$ / $N(d_1)-1$	sensitivity ต่อราคาหุ้น	+0.598 / -0.402
Gamma	$N'(d_1)/(S\sigma\sqrt{T})$	อัตราเปลี่ยนของ Delta	0.0274
Theta	$-SN'(d_1)\sigma/(2\sqrt{T}) - rKe^{-rT}N(d_2)$	time decay ต่อวัน	-฿0.022/day
Vega	$SN'(d_1)\sqrt{T}$	sensitivity ต่อ vol 1%	฿0.274

Breeden-Litzenberger — "Butterfly = ตัวดูด Probability"

```
f(K) = e^rT × d²C/dK²

ความหมาย: ถ้าเราหาอนุพันธ์อันดับสองของราคา Call เทียบกับ Strike
→ ได้ risk-neutral probability density ที่ strike นั้น

ในทางปฏิบัติ: ราคา Butterfly ที่ width → 0
= ตลาดบอกว่า "probability ที่ราคาจะจบตรง K นี้ = เท่าไร"
```

เชื่อมโยงกลับ: Butterfly Convexity (บท 10)

$C(K_1) - 2C(K_2) + C(K_3) \geq 0$ (convexity condition)

Breeden-Litzenberger อธิบายว่า **ทำไม**: เพราะค่านี้ = probability density × width

Probability ≥ 0 เสมอ → Butterfly price ≥ 0 เสมอ → ถ้า < 0 = arbitrage!

Expected Payoff — "ปิดลูป Payoff ≠ Prediction"

บท 8 สอนว่า "Payoff ≠ Prediction — payoff chart ไม่มี probability"
ตอนนี้เรา **ปิดลูป**: ถ้ามี probability density → คำนวณ Expected Value ได้

```
E[payoff] = ∫ payoff(S) × f(S) dS

= "ซ้อน probability density บน payoff chart"
= พื้นที่ถ่วงน้ำหนัก = Expected Value ของ trade

ในทางปฏิบัติ (discrete):
EV = Σ P(state_i) × payoff(state_i)
```

ตัวอย่าง: Bull Call Spread 100/110, net premium = 5

สมมติ probability distribution:

P(S < 100) = 40% → payoff = -5

P(100 ≤ S ≤ 110) = 35% → payoff เฉลี่ย ≈ 0 (midpoint)

P(S > 110) = 25% → payoff = +15

EV = 0.40×(-5) + 0.35×(0) + 0.25×(15) = -2 + 0 + 3.75 = **+฿1.75**

→ EV > 0 → trade นี้มี edge (ถ้า probability estimate ถูก)

Kelly Criterion — "ลงทุนเท่าไรต่อ trade"

```
f* = (b×p - q) / b

b = odds (ได้เท่าไรต่อ 1 ที่เสี่ย)
p = probability ชนะ
q = 1-p = probability แพ้

ตัวอย่าง: trade ที่ชนะ 60% ของเวลา, ชนะได้ 2x ที่เสี่ยง
f* = (2×0.6 - 0.4) / 2 = (1.2-0.4)/2 = 0.4 = 40%

ในทางปฏิบัติ: ใช้ Half-Kelly (20%)
เพราะ probability estimate ไม่แม่นยำ 100% → ลดขนาดเพื่อความปลอดภัย
```

ระวัง: สูตรนี้ใช้ได้แค่ binary outcomes!

สูตร f* = (bp-q)/b สมมติว่า **ผลลัพธ์มีแค่ 2 แบบ**: ชนะได้ b หรือแพ้เสีย 1
สำหรับ options ที่มี payoff แบบ continuous (spreads, condors) → ต้องใช้ generalized Kelly: **f* = argmax E[log(1 + f×R)]**
ในทางปฏิบัติ: ใช้สูตร binary เป็น **upper bound** แล้วลดด้วย Half-Kelly

ในโลกจริง probability เป็น **estimate** ไม่ใช่ fact
ถ้า estimate ผิดแค่ 5% → Full Kelly อาจทำให้เจ๊งได้
กฎ: ใช้ Half-Kelly หรือ Quarter-Kelly เสมอ

สูตรรวม — Quick Reference

หมวด	สูตร	ใช้ทำอะไร
BS Call	$C = S \cdot N(d_1) - Ke^{-rT} \cdot N(d_2)$	ราคา Call ก่อน expiry
BS Put	$P = Ke^{-rT} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1)$	ราคา Put ก่อน expiry
d_1	$[\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)T]/(\sigma\sqrt{T})$	input หลักของ BS
d_2	$d_1 - \sigma\sqrt{T}$	probability ITM
Digital	$e^{-rT} \times N(d_2)$	ราคา PM / digital option
Delta	$N(d_1)$ / $N(d_1)-1$	hedge ratio
Gamma	$N'(d_1)/(S\sigma\sqrt{T})$	ความโค้งของ payoff curve
Theta	$-SN'(d_1)\sigma/(2\sqrt{T})-rKe^{-rT}N(d_2)$	time decay
Vega	$S \cdot N'(d_1) \cdot \sqrt{T}$	vol sensitivity
B-L	$e^{rT} \times d^2C/dK^2$	implied probability density
EV	$\Sigma P_i \times payoff_i$	expected value ของ trade
Kelly	$(bp-q)/b$	optimal position size

3 สิ่งที่ต้องจำ (Part V-A)

1. **BS บอกว่าเส้นโค้งอยู่ตรงไหน** → $N(d_2) = P(ITM)$, $N(d_1) = Delta$
2. **Breeden-Litzenberger**: Butterfly price = implied probability → เชื่อมกลับ Ch10
3. **EV ปิดลูป Ch8**: payoff × probability = expected value → ตัดสินใจ trade ได้

สรุป Part V-A

✓ **Black-Scholes** Call/Put formula + ตัวอย่างคำนวณครบ

✓ **Digital Option Pricing**: PM ควรราคาเท่าไร?

✓ **Greeks exact**: Delta, Gamma, Theta, Vega พร้อมค่าตัวอย่าง

✓ **Breeden-Litzenberger**: Butterfly = probability density extractor

✓ **Expected Payoff**: ปิดลูป "Payoff ≠ Prediction"

✓ **Kelly Criterion**: position sizing + Half-Kelly ในทางปฏิบัติ

จบ Part V-A