STATISTICAL ARBITRAGE · บทที่ 12

Position Sizing: คำนวณขนาด Position อย่างถูกต้อง

Kelly criterion + half-life scaling + jump adjustment = position ที่ optimal

ตัวอย่างหลัก: Bybit BTC Perp ↔ Lighter BTC Perp

แก่นของบทนี้ — อ่านก่อน

Kelly criterion บอก **fraction ของทุนที่ควรเสี่ยง** เพื่อให้ long-run geometric growth สูงสุด แต่สำหรับ stat arb ต้องปรับด้วย half-life (ความเร็ว mean reversion) และ jump risk เพื่อให้ size เหมาะกับลักษณะ pair จริงๆ

$$f^* = \frac{p \cdot b - q}{b} \qquad \text{where } p = \text{win rate},\ b = \frac{\text{avg win}}{\text{avg loss}},\ q = 1 - p$$

12.1 Kelly Criterion พื้นฐาน

Kelly criterion มาจาก maximization ของ E[log(wealth)] สำหรับ gamble ที่มี edge:

สูตร KELLY สำหรับ CONTINUOUS RETURN

$$f^* = \frac{\mu}{\sigma^2} = \frac{\text{edge}}{\text{variance}}$$

μ = expected return ต่อ period (edge)
σ² = variance ของ return ต่อ period
f* = fraction ของ capital ที่ควรลงทุน (0 ถึง 1)

ในรูปแบบ bet แบบ binary (win/lose) สูตรคือ f* = (p·b – q)/b = (p·b – (1–p))/b

ตัวอย่างตัวเลข: Kelly fraction

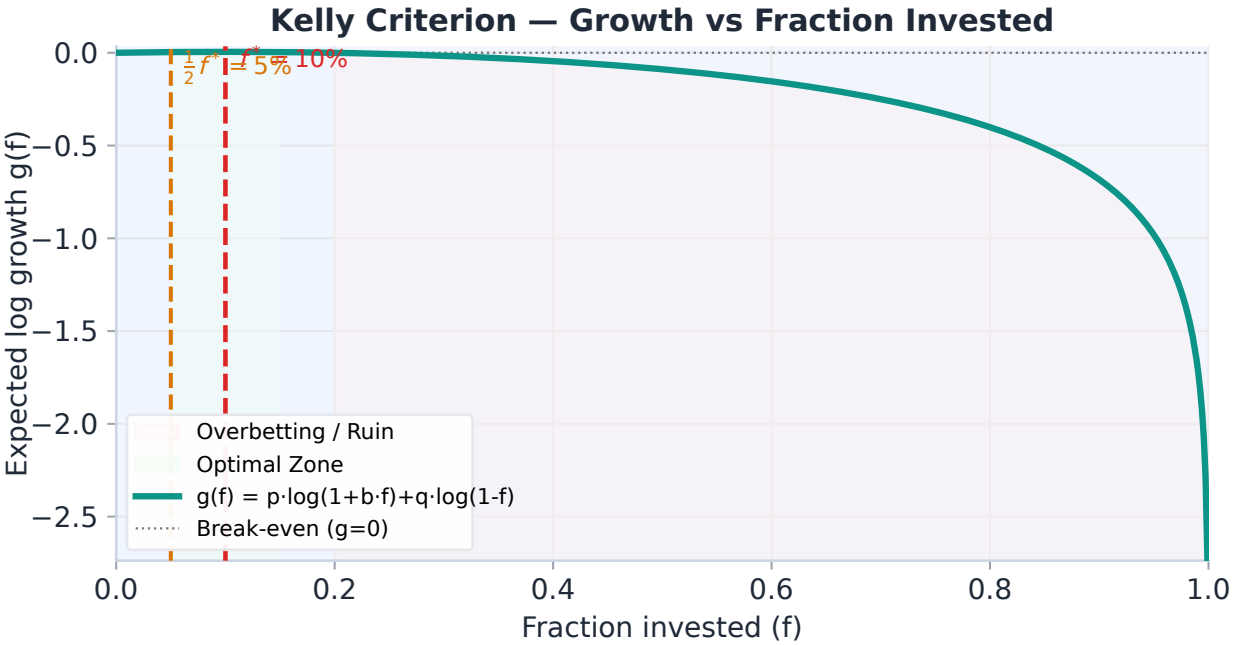
สมมติ spread มี edge = 0.6% per trade และ σ = 1.2% per trade:

```
f* = edge / σ² = 0.006 / (0.012)² = 0.006 / 0.000144 = 41.67 → f* คือ
fraction ของทุนที่ Kelly แนะนำให้ลงทุน — ไม่ใช่ค่า leverage → f* = 41.67 (>>
1) เป็นค่าที่ไม่สมเหตุสมผล (สัญญาณว่า input ผิด — ดูหมายเหตุด้านล่าง) → ในทางปฏิบัติใช้
fractional Kelly: f_actual = f* × 0.25 (quarter Kelly) → f_actual =
41.67 × 0.25 ≈ 10.4 ซึ่งยังสูงเกินจริง → ต้องปรับด้วย half-life, jump discount
และ drawdown limit ต่อไป
```

หมายเหตุ: f* > 1 คือสัญญาณเตือน input ผิด

ถ้าคำนวณแล้วได้ f* > 1 (เช่น 41.67) นั่นไม่ได้แปลว่าควรใช้ leverage 41 เท่า — แต่เป็น **red flag** ว่า μ และ σ ที่ใส่เข้าไปไม่ใช่ per-period strategy return จริง (edge 0.8% กับ vol 1.5% ต่อ trade ไม่ได้หมายความว่าควร bet 35 เท่าของทุน). f* ของ stat arb จริงหลังหัก cost อย่างซื่อสัตย์มักต่ำกว่า 1 มาก — ในทางปฏิบัติให้ใช้ **drawdown-based sizing limit** (§12.4) เป็นตัวกำหนดขนาดจริง

Kelly Fraction vs Edge/Variance — Parabola Curve



Kelly growth curve g(f) = p·log(1+b·f) + q·log(1−f): RED dashed = f* (optimal), AMBER = ½f* (Half-Kelly). GREEN zone = optimal region. RED zone = overbetting/ruin.

12.2 Half-life Scaling — ปรับขนาดตาม Mean Reversion Speed

ถ้า half-life ยาว (spread mean-revert ช้า) เราต้อง hold position นานกว่า ความเสี่ยงสะสมมากขึ้น — Kelly เดิมไม่ได้รวม factor นี้

HALF-LIFE SCALING FACTOR

$$\text{size_adjusted} = f^* \times \min\left(1, \frac{\tau_{\text{target}}}{\tau_{\text{actual}}}\right)$$

target_halflife = half-life ที่เราออกแบบ strategy สำหรับ (เช่น 5 ชั่วโมง)
actual_halflife = half-life จริงที่คำนวณได้จากข้อมูล
ถ้า actual > target → scale down size (position เล็กลง เพราะ mean-revert ช้า)

actual_halflife	target_halflife	scaling factor	ผลกระทบ
3 ชั่วโมง	5 ชั่วโมง	min(1, 5/3) = 1.0	ไม่ลด (fast mean reversion — ดี)
5 ชั่วโมง	5 ชั่วโมง	min(1, 5/5) = 1.0	ไม่ลด (ตรงเป้า)
10 ชั่วโมง	5 ชั่วโมง	min(1, 5/10) = 0.5	ลด size เหลือ 50%
24 ชั่วโมง	5 ชั่วโมง	min(1, 5/24) ≈ 0.21	ลด size เหลือ 21% (slow — ระวัง)

สังเกตสำคัญ: Half-life เปลี่ยนตามเวลา

Half-life ของ Bybit ↔ Lighter spread อาจสั้นกว่าช่วง sideways market (1-2h) และยาวขึ้นในช่วง trending market (8-12h) — ต้องคำนวณ half-life ใหม่ทุก N ชั่วโมง ไม่ใช่ fix ไว้ตลอด

12.3 Jump-adjusted Kelly

ในตลาด crypto มี jump risk สูง: ราคาอาจกระโดดข้ามคืนหรือช่วง liquidation cascade ค่าพยากรณ์ E[log(1+f·R)] ลดลงอย่างมากเมื่อมี jump — Kelly สูตรปกติ assume normal returns ซึ่งไม่ถูกต้อง

JUMP-ADJUSTED KELLY

$$f^*_{\text{adj}} = f^* \times \delta_{\text{jump}}, \quad \delta_{\text{jump}} = e^{-\lambda \cdot J^2/\sigma^2}$$

jump_discount = 1 − P(jump) × (expected_loss_given_jump / max_tolerable_loss)
ค่าปกติ: jump_discount ∈ [0.6, 0.9] ขึ้นอยู่กับ volatility regime
ช่วง low vol: 0.85–0.90 | ช่วง high vol (เช่น ก่อน major news): 0.60–0.70

ทำไม Jump ถึงทำลาย Kelly?

สมมติ Kelly บอก f* = 0.5 (ลง 50% ของทุน) แต่มี 1% chance ที่ spread จะกระโดด 5σ ในพริบตา:

```
ขาดทุน = 0.5 × capital × 5 × σ_spread ถ้า σ_spread = 2% และ capital =
$100,000 ขาดทุน = 0.5 × $100,000 × 5 × 0.02 = $5,000 จากเหตุการณ์ 1 ครั้ง ถ้า
ลด f* ด้วย jump_discount = 0.8: f*_adj = 0.5 × 0.8 = 0.4 ขาดทุน = 0.4 ×
$100,000 × 5 × 0.02 = $4,000 (ดีขึ้น 20%)
```

12.4 Max Drawdown Constraint

นอกจาก Kelly และ half-life scaling แล้ว ต้องตั้ง hard limit จาก max drawdown ที่ยอมรับได้:

MAX DRAWDOWN POSITION LIMIT

$$\text{size}_{\text{DD}} = \frac{\text{max_loss}}{z_{\text{entry}} \cdot \sigma_{\varepsilon}}$$

max_loss = capital × max_dd fraction (เช่น 2% ของ capital)
entry_z = z-score ณ จุดเข้า trade
σ_spread = volatility ของ spread
ขนาด position สุดท้าย = min(kelly_size, size_dd)

ตัวอย่าง: Max Drawdown เป็น Binding Constraint

Kelly บอก $80,000 แต่ drawdown limit บอก $45,000 → ใช้ $45,000
สถานการณ์นี้เกิดขึ้นเมื่อ entry_z ต่ำ (เช่น z = 2.0 ต่ำกว่า z = 3.5) หรือ σ_spread สูง
Kelly ไม่ได้รู้จัก "ทุนกี่บาท" — Drawdown limit ป้องกัน ruin ในกรณีเลวร้าย

12.5 Pseudo-code: compute_position_size()

```
def compute_position_size( capital, edge, sigma, halflife, entry_z, target_halflife=5, jump_discount=0.8, max_dd=0.02 ): # Step 1: Kelly fraction kelly_f = edge / (sigma ** 2) # Step 2: Half-life scaling (ลดถ้า mean reversion ช้า) hl_scale = min(1.0, target_halflife / halflife) # Step 3: Jump discount (ลดความเสี่ยง tail event) jump_scale = jump_discount # Step 4: Max drawdown constraint (hard limit) dd_limit = (capital * max_dd) / (entry_z * sigma) # Step 5: รวมทุก factor raw_size = capital * kelly_f * hl_scale * jump_scale # Step 6: ใช้ขนาดที่น้อยกว่า (conservative) return min(raw_size, dd_limit)
```

หมายเหตุเกี่ยวกับ sigma ใน dd_limit

ตัวหาร `entry_z * sigma` ใน dd_limit มาจากสมมติว่า worst-case adverse move คือ spread เคลื่อนจาก z ณ จุดเข้า (`entry_z`) กลับไปที่ค่ากลาง — ระยะที่ spread วิ่งสวน position ได้จึง scale ตาม `entry_z` โดยตรง ยิ่ง entry ที่ z สูง position ยิ่งต้องเล็กลง ถ้าต้องการ conservative มากขึ้นให้บวก buffer เข้ากับ entry_z ตาม risk appetite

12.6 Running Example: Bybit ↔ Lighter BTC Perp

Running Example: คำนวณขนาด Position ทีละขั้น

สถานการณ์: ระบบเพิ่ง transition ไป MANUAL_GO — ต้องคำนวณขนาด order ก่อนส่ง

Parameter	ค่า	ที่มา
capital	$100,000	กำหนดโดย risk manager
edge (μ)	0.8% = 0.008	historical P&L per trade
sigma (σ)	1.5% = 0.015	std ของ spread returns (30d)
halflife	4 ชั่วโมง	OU model calibration
target_halflife	5 ชั่วโมง	ออกแบบ strategy สำหรับ 5h
jump_discount	0.80	low-vol regime
max_dd	2% = 0.02	risk limit

การคำนวณทีละขั้น

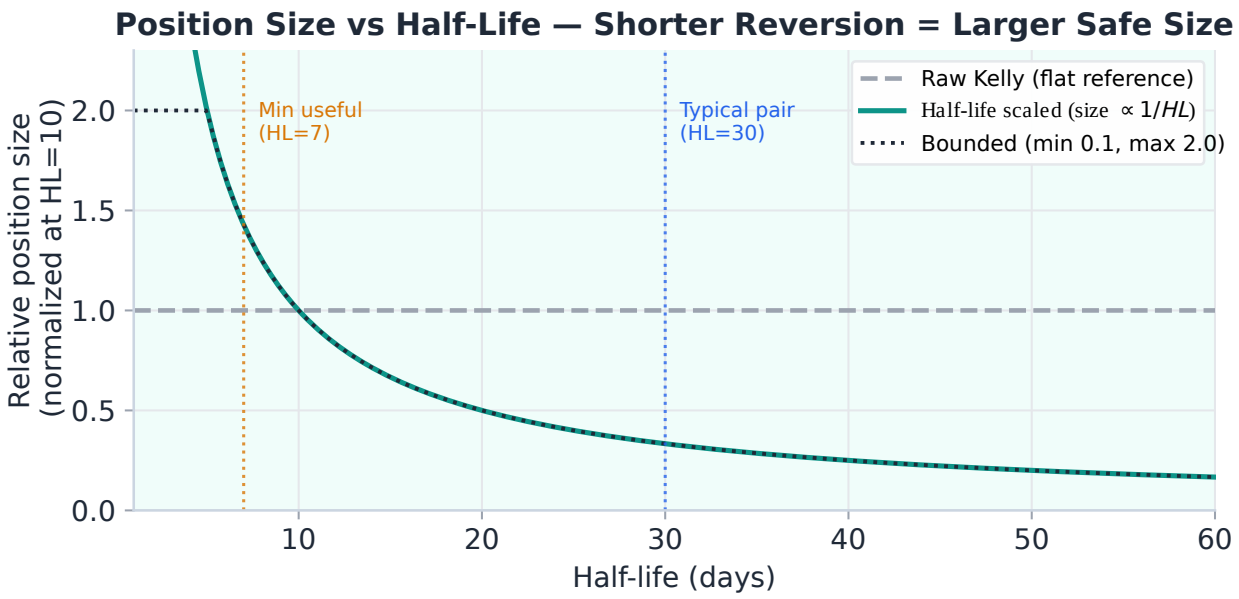
```
Step 1: Kelly fraction kelly_f = edge / sigma² = 0.008 / (0.015)² = 0.008 /
0.000225 = 35.56 ← f* >> 1: input ไม่ใช่ return จริง ต้องปรับ Step 2: Half-life
scaling hl_scale = min(1.0, 5 / 4) = min(1.0, 1.25) = 1.0 ← actual (4h) เร็ว
กว่า target (5h) → ไม่ลด Step 3: Jump discount jump_scale = 0.80 Step 4: Max
drawdown limit dd_limit = (100,000 × 0.02) / (2 × 0.015) = 2,000 / 0.03 =
$66,667 Step 5: Raw size raw_size = 100,000 × 35.56 × 1.0 × 0.80 =
$2,844,800 ← สูงกว่า dd_limit มาก! Step 6: Final size = min($2,844,800,
$66,667) = $66,667
```

ผลลัพธ์และการตีความ

- Position size สุดท้าย: **$66,667** (ถูก cap โดย drawdown limit)
- Kelly บอก $2.8M แต่นั่นคือ theoretical optimum ภายใต้ assumptions ที่ unrealistic
- Drawdown limit เป็น binding constraint — ในทางปฏิบัติ max_dd มักเป็น primary constraint

- ทั้งสองขา: Long Lighter ≈ $66,667 | Short Bybit ≈ $66,667 × β

Sensitivity Analysis: ผลของ Half-life ที่ต่างกัน



Position size ∝ 1/half-life — pairs ที่ revert เร็ว (HL ต่ำ) ได้ size ใหญ่กว่า; bounded เพื่อป้องกัน concentration. AMBER vertical = min useful HL=7d, BLUE = typical pair HL=30d.

🏛️ **บนโต๊ะจริง — Kelly Sizing ใน Production**

1. **ใช้ Half-Kelly (f = f*/2) เป็น default:** Full Kelly ถูกในทางทฤษฎีแต่สมมติว่ารู้ p และ b แม่นยำ — estimation error ทำให้ full Kelly overbets ในทางปฏิบัติเสมอ
2. **Re-compute Kelly รายวัน** จาก 30-day win rate และ average win/loss; อย่า lock parameters ไว้นาน
3. **Cap position ที่ 5% NAV ต่อ pair** โดยไม่คำนึงถึง Kelly output — concentration risk สำคัญกว่า theoretical optimality
4. **Emergency halving:** ถ้า drawdown > 3× Kelly-predicted → ลด size ทันทีครึ่งหนึ่ง อย่า restore จนกว่า drawdown recover กลับมา

⚠️ **คณิตที่พัง — เมื่อ Kelly พัง**

- **Kelly assumes i.i.d. trades:** spread trades มี serial correlation (consecutive losses ในช่วง regime shift) — Kelly มาตรฐานจะ underestimate ruin probability 2–5× ในช่วง Stressed regime

- **b estimate จาก backtest:** ถ้า backtest overestimate b (เช่น ลืมรวม slippage หรือมี lookahead bias) Kelly จะ prescribe fraction ที่ใหญ่เกินความเป็นจริงอย่างอันตราย
- **Half-life scaling ไม่ scale กับ correlation:** pairs ที่ correlated สูง (เช่น BTC pair หลายตัว) size รวมอาจเกิน Kelly แม้แต่ละ pair อยู่ในขีดจำกัด — ต้องคำนวณ portfolio-level Kelly ด้วย

12.7 แบบฝึกหัด

โจทย์ 12.1 — คำนวณ Kelly Size

Pair ใหม่มี edge = 1.2% per trade, σ = 2.0% per trade
capital = $50,000, halflife = 8h, target_halflife = 5h
jump_discount = 0.75, max_dd = 3%
ถาม: คำนวณ position size ทีละขั้น และระบุว่า constraint ไหนเป็น binding?

▶ ดูคำตอบ

โจทย์ 12.2 — เปรียบเทียบ Two Pairs

เปรียบเทียบสอง pair ด้วย capital = $200,000 เดียวกัน:

- Pair A: edge=0.5%, σ=0.8%, halflife=3h, jump_discount=0.9, max_dd=2%
- Pair B: edge=1.5%, σ=3.0%, halflife=12h, jump_discount=0.65, max_dd=2%

ถาม: คำนวณ final size ของแต่ละ pair และอธิบายว่า pair ไหน "ดีกว่า" ในแง่ risk-adjusted

▶ ดูคำตอบ

โจทย์ 12.3 — Dynamic Sizing เมื่อ Regime เปลี่ยน

ระหว่าง hold position อยู่ ระบบตรวจพบ volatility regime เปลี่ยนจาก low-vol เป็น high-vol:
jump_discount ลดจาก 0.85 เป็น 0.60 และ σ_spread เพิ่มจาก 1.5% เป็น 2.5%
Current position size = $80,000, capital = $100,000, max_dd = 2%
ถาม: ควรทำอะไรกับ position ที่ถืออยู่?

▶ ดูคำตอบ

Ch.12 Position Sizing | ต่อไป → **Ch.13: Perpetual Basis Strategy**