STATISTICAL ARBITRAGE · บทที่ 18

Options Overlay: Put-Call Parity Arbitrage

$\varepsilon = \text{Call} - \text{Put} - (F-K)e^{-rT}$ — deviation คือโอกาส arbitrage

ค้นหาและ exploit ความไม่สมดุลใน options market อย่างเป็นระบบ

แก่นของบทนี้ — อ่านก่อน

Put-Call Parity เป็นกฎพื้นฐานที่ต้องเป็นจริงในตลาดที่ไม่มี arbitrage เมื่อ $\varepsilon \neq 0$ แสดงว่า call หรือ put ราคาผิดสัมพัทธ์กัน และสามารถทำ riskless profit ได้โดยการ construct portfolio ที่สอดคล้อง

$$\varepsilon = C - P - (F - K) \times e^{-rT}$$

18.1 Put-Call Parity — สูตรและที่มา

Put-Call Parity เป็น no-arbitrage relationship ที่เชื่อม call, put, forward, และ strike เข้าด้วยกัน:

PUT-CALL PARITY สำหรับ EUROPEAN OPTIONS

สำหรับ European options บน futures contract F ที่ strike K expiry T:

$$C - P = (F - K) \times e^{-rT}$$

สำหรับ European options บน spot asset S:

$$C - P = S \times e^{-qT} - K \times e^{-rT}$$

โดยที่: C = call price, P = put price, r = risk-free rate, q = dividend/funding yield

ที่มาของสูตร: พิจารณา 2 portfolio ที่ให้ payoff เดียวกัน:

Portfolio	ส่วนประกอบ	Payoff เมื่อ $F_T > K$	Payoff เมื่อ $F_T \leq K$
A: Long Call	Buy C, Invest $(F-K)e^{-rT}$	$(F_T - K) + (F-K)$	$0 + (F-K)$
B: Long Fwd + Put	Long F at K, Buy P	$(F_T - K) + 0$	$0 + (K - F_T)$

เนื่องจาก payoff เท่ากัน ราคาต้องเท่ากัน → $C - P = (F - K)e^{-rT}$ ต้องเป็นจริงเสมอ

18.2 Parity Deviation ε — เมื่อไรจึง Arbitrage ได้

นิยาม PARITY DEVIATION

$$\varepsilon = C - P - (F - K) \times e^{-rT}$$

ถ้า **ε > 0**: Call แพงเกินไปเทียบกับ put → Sell call, Buy put, Buy forward
ถ้า **ε < 0**: Put แพงเกินไปเทียบกับ call → Buy call, Sell put, Sell forward
ถ้า **ε = 0**: parity สมบูรณ์ — ไม่มีโอกาส arbitrage

เงื่อนไขที่ ε ≠ 0 ในทางปฏิบัติ

- **Bid-Ask spread:** ε ต้องเกิน bid-ask cost รวมทุก leg ก่อนจะ profitable
- **Margin/collateral cost:** ต้องใช้ margin วาง → มีต้นทุน opportunity
- **Execution risk:** ต้อง fill ทุก leg พร้อมกัน ไม่เช่นนั้นเป็น legged risk
- **American vs European:** American options มี early exercise premium → parity แตกต่าง

18.3 BTC Options ตัวอย่าง — Deribit Put-Call Parity

Running Example: BTC Options บน Deribit

ข้อมูลจาก Deribit สำหรับ BTC-28JUN-65000 (Strike K = $65,000, expiry 30 วัน):

- BTC Futures (28JUN) = **$66,200**
- Call (K=65000, T=30d) = **$2,850**
- Put (K=65000, T=30d) = **$1,520**
- Risk-free rate r = 5% ต่อปี → e^{−rT} = e^{−0.05×30/365} = 0.9959

```
Theoretical C - P = (F - K) × e^{-rT} = ($66,200 - $65,000) × 0.9959 =
$1,200 × 0.9959 = $1,195.08 Observed C - P = $2,850 - $1,520 = $1,330 ε =
$1,330 - $1,195 = +$135 → Call แพงเกินไปเทียบกับ Put Trade: Sell Call + Buy Put
+ Long Forward (at K=$65,000) Expected profit ≈ $135 (ก่อนหักค่าธรรมเนียม)
```

ตรวจสอบต้นทุนก่อน Trade

Deribit taker fee ≈ 0.03% ต่อ option position (per leg)

4 legs: Sell C + Buy P + Long F + Short F (delta hedge) → total fee ≈ 0.12% × notional

Notional ≈ $65,000 → fee ≈ $78

Net profit ≈ $135 − $78 = **$57** ต่อ BTC → ยังคุ้ม แต่ต้องระวัง execution

18.4 IV Surface Arbitrage — Calendar Spread ใน IV

นอกจาก put-call parity แล้ว ยังมีโอกาส arbitrage จากความไม่สอดคล้องของ Implied Volatility (IV) ข้าม expiry:

ประเภทของ IV Surface Arbitrage

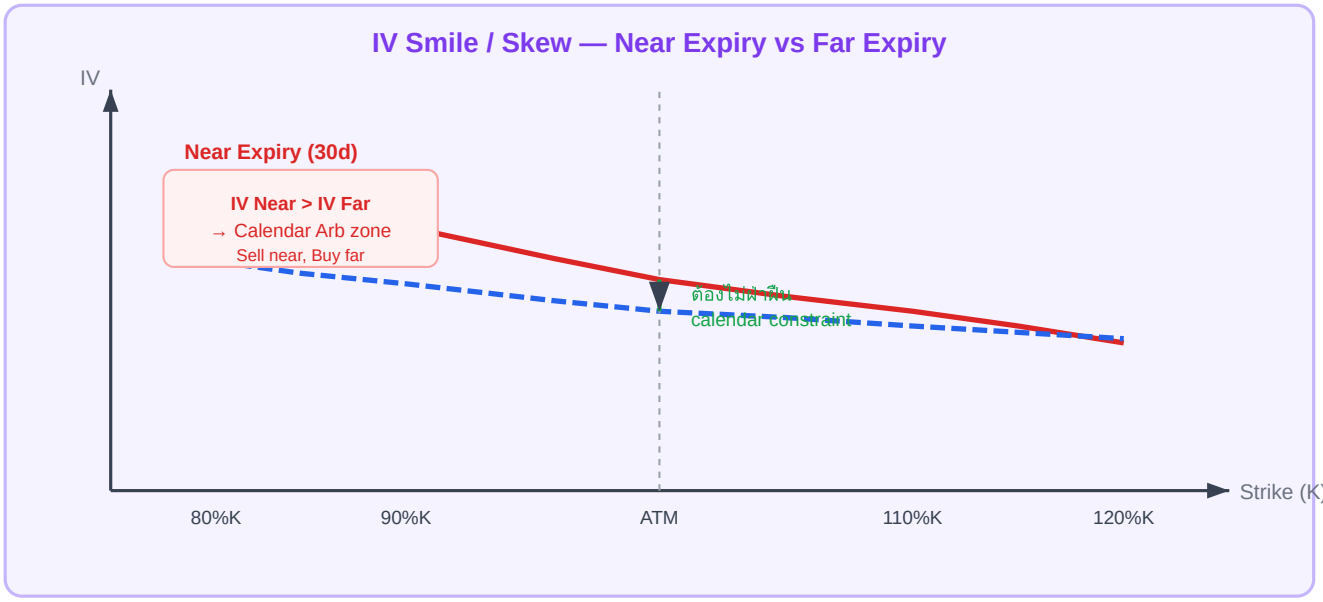
- **Calendar Spread IV Arb:** IV ของ near-expiry สูงกว่า far-expiry ผิดปกติ → sell near, buy far vega
- **Strike Spread (Skew Arb):** IV skew ระหว่าง OTM put และ OTM call ผิดปกติ
- **Butterfly Arb:** IV ของ ATM ผิดจาก weighted average ของ OTM wings

No-Arbitrage Constraints ของ IV Surface

Constraint	สูตร / เงื่อนไข	ถ้าฝ่าฝืน
Calendar spread	Total variance $V(T) = IV^2 \times T$ ต้องเพิ่มตาม T	Sell near, buy far → calendar arb
Butterfly	$\partial^2 C/\partial K^2 \geq 0$ (call spread เป็น convex)	Butterfly spread ให้ riskless profit
Call spread	$\partial C/\partial K \leq 0$ (call price ลดเมื่อ K ขึ้น)	Vertical spread arb
Horizontal bound	$C(K,T_2) \geq C(K,T_1)$ สำหรับ $T_2 > T_1$	Calendar spread arb

18.5 IV Surface Diagram (2D Slice)

แผนภาพ 2D slice ของ IV surface ที่ expiry คงที่ (IV vs. Strike):



Near expiry IV (แดง) ต้องไม่สูงกว่า far expiry IV อย่างผิดปกติที่ strike เดียวกัน มิฉะนั้นเป็น calendar arb

18.6 Delta Hedge ของ Options Spread

เมื่อ trade put-call parity arbitrage หรือ IV surface arb ต้องระวังว่า position มี **delta exposure** ที่ต้อง hedge ออก:

ขั้นตอน Delta Hedge

1. คำนวณ net delta ของ options portfolio: Δ_net = Δ_call − Δ_put + Δ_forward
2. Sell/Buy futures ในปริมาณ Δ_net เพื่อให้ net delta ≈ 0
3. Re-hedge เมื่อ delta drift (เนื่องจาก gamma effect) หรือทุก interval ที่กำหนด
4. ระวัง gamma risk: position ที่ delta-neutral อาจมี gamma ที่ทำให้ P&L เป็น non-linear

```
ตัวอย่าง: ε trade บน BTC K=65000, T=30d Long Put: Δ_put = −0.42 → contribution =
−1×(−0.42) = +0.42 Short Call: Δ_call = +0.58 → contribution = −1×(0.58) = −0.58
Long Fwd: Δ_fwd = +1.00 → contribution = +1.00 Net Δ = +0.42 − 0.58 + 1.00 = +0.84
→ Sell 0.84 BTC futures เพื่อ delta-neutral
```

Re-hedge Frequency

สำหรับ crypto options ที่ volatile มาก: re-hedge ทุก 30–60 นาที หรือทุกครั้งที่ delta drift เกิน ±0.05

Transaction cost ของ re-hedge ต้องรวมใน edge calculation (บทที่ 19)

18.7 แบบฝึกหัด

โจทย์ 18.1 — คำนวณ ε และ Direction

ETH Options บน Deribit: Strike K = $3,500, Expiry = 45 วัน

ETH Futures (45d) = $3,620 | Call = $285 | Put = $148 | r = 5% ต่อปี

ถาม: คำนวณ ε และระบุ direction ของ trade arbitrage

▶ ดูคำตอบ

โจทย์ 18.2 — IV Calendar Constraint

BTC options ที่ K = ATM: IV_30d = 72%, IV_90d = 58%

Total variance: $V_{30} = 0.72^2 \times (30/365) = 0.0426$, $V_{90} = 0.58^2 \times (90/365) = 0.0832$

ถาม: IV surface นี้ violate calendar constraint หรือไม่? ถ้า violate ควร trade อย่างไร?

▶ ดูคำตอบ