STATISTICAL ARBITRAGE · บทที่ 2

Stochastic Calculus พื้นฐาน

Brownian Motion · $(dW)^2 = dt$ · Itô's Lemma

เครื่องมือที่จำเป็นสำหรับอ่าน SDE ของ spread

ทำไมต้องเรียนบทนี้

Spread ε เดิน SDE แบบ OU Process: $d\varepsilon = \kappa(\theta-\varepsilon)dt + \sigma dW$

เพื่ออ่านสมการนี้ได้ต้องรู้ว่า dW คืออะไร และทำไม $(dW)^2$ ถึงไม่ตัดทิ้ง

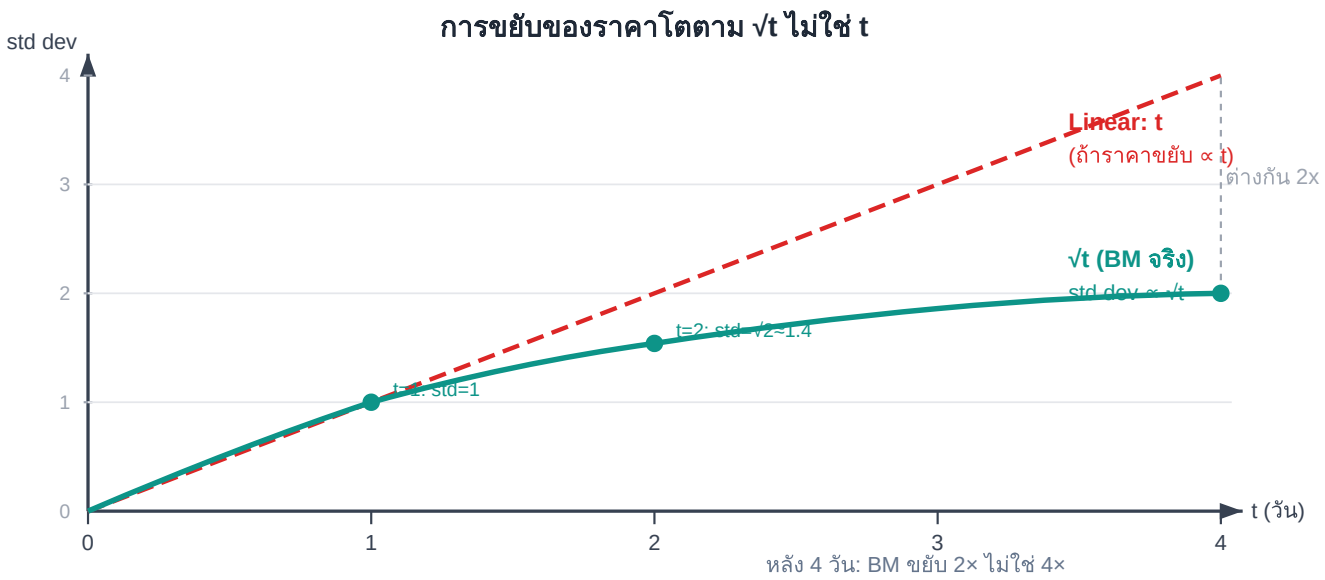
2.1 Brownian Motion — ราคาเดิน Random Walk อย่างไร

Brownian Motion (หรือ Wiener Process) W(t) คือโมเดลที่ใช้อธิบายการเคลื่อนที่แบบสุ่มของราคา มีคุณสมบัติหลัก 3 ข้อ:

3 คุณสมบัติสำคัญของ W(t)

1. **W(0) = 0:** เริ่มต้นที่จุดเดิม
2. **Increments อิสระ:** การขยับในช่วง [s,t] ไม่ขึ้นกับการขยับในช่วง [r,s] — "อดีตไม่ส่งผลต่ออนาคต"
3. **W(t)−W(s) ~ N(0, t−s):** ในช่วงเวลา Δt = t−s ราคาขยับประมาณ ±√Δt (ไม่ใช่ ±Δt)

ข้อ 3 สำคัญมาก: ราคาขยับตาม √t ไม่ใช่ t



Brownian Motion โต "ช้ากว่าที่คิด" — ต้องรอ 4 วันจึงจะขยับ 2 เท่าของวันเดียว

2.2 dW คืออะไร และทำไม $(dW)^2 = dt$

เราใช้ dW_t แทน W(t+dt) − W(t) — การขยับเล็กๆ ในช่วงเวลา dt

```
dW_t ~ N(0, dt) E[dW_t] = 0 ← ค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ (ไม่รู้จะขึ้นหรือลง) Var[dW_t] = dt ←
variance = dt
```

ทำไม $(dW)^2 = dt$ — ไม่ตัดทิ้งแบบ Calculus ธรรมดา?

Calculus ธรรมดา: $(dx)^2 \to 0$

ถ้า x เดินแบบ smooth: $dx = v \cdot dt$

$(dx)^2 = v^2 \cdot (dt)^2 \to$ ตัดทิ้งได้ เพราะ dt^2 เล็กมาก

เช่น $dt = 0.001 \to dt^2 = 0.000001 \approx 0$

Stochastic: $(dW)^2 = dt$ (ตัดไม่ได้!)

W เดินแบบ random: $dW \approx \pm\sqrt{dt}$

$(dW)^2 \approx (\pm\sqrt{dt})^2 = dt \to$ **ไม่ใช่ dt^2 แต่เป็น dt**

เช่น $dt = 0.001 \to (dW)^2 \approx 0.001 \neq 0$

ทำไม $(dW)^2 = dt$ — ดูจากตัวเลข

ช่วงเวลา T=1 แบ่งเป็น n=4 ขั้น (dt = 0.25 แต่ละขั้น)

ขั้นที่ 1	ขั้นที่ 2	ขั้นที่ 3	ขั้นที่ 4
dW = +0.5	dW = −0.5	dW = +0.5	dW = −0.5
$(dW)^2 = 0.25$	$(dW)^2 = 0.25$	$(dW)^2 = 0.25$	$(dW)^2 = 0.25$

$\Sigma (dW)^2 = 0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 = 1.0 = T$

สรุป: ไม่ว่า dW จะเป็น + หรือ − เมื่อยกกำลังสอง จะได้ dt เสมอ

เพราะ $dW = \pm\sqrt{dt} \to (dW)^2 = (\sqrt{dt})^2 = dt$

$\Sigma (dW)^2 \approx n \times dt = n \times (T/n) = T \to$ สะสมเป็นค่าจริง ไม่หายไป

เปรียบ: ราคา BTC ขึ้นลงเดี๋ยวนี้ แต่ความเปลี่ยนแปลงสะสมทุกนาที → ตัดทิ้งไม่ได้

สัญชาตญาณ: dW ขยับสลับ +/− แต่ $(dW)^2$ เป็นบวกเสมอ → สะสมได้ → ไม่ตัดทิ้ง

2.3 Stochastic Differential Equation (SDE)

SDE คือสมการที่บอกว่า process X เปลี่ยนอย่างไรในแต่ละช่วง dt:

รูปแบบ SDE ทั่วไป

$$dX_t = \mu(X,t)\,dt + \sigma(X,t)\,dW_t$$

แยกส่วนของ SDE

dX_t	=	$\mu(X,t) \cdot dt$	+	$\sigma(X,t) \cdot dW_t$
การเปลี่ยน X ใน dt		Drift — ทิศทางที่คาดได้ล่วงหน้า		Diffusion — ความสุ่มที่คาดไม่ได้

ตัวอย่าง SDE ที่สำคัญ

GBM (Black-Scholes):	OU Process (Spread):	Random Walk:
$\mu=\mu S,\ \sigma=\sigma S$	$\mu=\kappa(\theta-\varepsilon),\ \sigma=\sigma$	$\mu=0,\ \sigma=\sigma$

OU Process: drift = $\kappa(\theta-\varepsilon)$ → ดึงกลับเมื่อ ε ห่างจาก θ | Random Walk: drift = 0 → ไม่มีแรงดึง

2.4 Itô's Lemma — Chain Rule ของ Stochastic World

ถ้าเราต้องการหา SDE ของ **f(X)** เมื่อรู้ SDE ของ **X** ใช้ Itô's Lemma:

ITÔ'S LEMMA

$$df = (\partial f/\partial t + \mu \cdot \partial f/\partial X + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \cdot \partial^2 f/\partial X^2)\, dt + \sigma \cdot \partial f/\partial X \cdot dW$$

เทียบกับ Chain Rule ธรรมดา ทีละขั้น

#	Calculus ธรรมดา	Itô's Lemma (Stochastic)	เหตุผลที่ต่างกัน
1	$df = (\partial f/\partial t)dt + (\partial f/\partial x)dx$	เริ่มเหมือนกัน	—
2	แทน $dx = \mu dt + \sigma dW$	แทน $dX = \mu dt + \sigma dW$	—
3	คิด Taylor: $(dx)^2 \to 0$ ตัดทิ้ง	คิด Taylor: $(dX)^2 = \sigma^2 dt$ **ไม่ตัด!**	$(dW)^2=dt$ ไม่ใช่ 0
4	$df = (\partial f/\partial t + \mu \partial f/\partial x)dt + \sigma \partial f/\partial x\, dW$	$df = (\partial f/\partial t + \mu \partial f/\partial X + \boldsymbol{\tfrac{1}{2}\sigma^2 \partial^2 f/\partial X^2})dt + \sigma \partial f/\partial X\, dW$	Term พิเศษ $\tfrac{1}{2}\sigma^2(\partial^2 f/\partial X^2)dt$

Term พิเศษ $\tfrac{1}{2}\sigma^2(\partial^2 f/\partial X^2)dt$ มาจากไหน?

Taylor expansion ของ $f(X+dX)$: $f(X+dX) = f(X) + f' \cdot dX + \tfrac{1}{2}f'' \cdot (dX)^2 + \ldots$

ใน calculus ธรรมดา: $(dX)^2 = (\mu dt + \sigma dW)^2 \approx \sigma^2 (dW)^2 \to$ ถ้า $(dW)^2=0$ ก็ตัดทิ้ง

ใน stochastic: $(dW)^2 = dt \to \tfrac{1}{2}f'' \cdot \sigma^2 \cdot dt$ **ไม่หายไป** → กลายเป็น term ใหม่ในสมการ

ตัวอย่างสำคัญ: log(S) เมื่อ S ~ GBM

1. **กำหนด:** $dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dW$, $f(S) = \log(S)$
   $\partial f/\partial S = 1/S$, $\partial^2 f/\partial S^2 = -1/S^2$

2. **แทนใน Itô's Lemma:**
   $d(\log S) = [\mu S \cdot (1/S) + \tfrac{1}{2}(\sigma S)^2 \cdot (-1/S^2)]\, dt + \sigma S \cdot (1/S)\, dW$
   $= [\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2]\, dt + \sigma\, dW$

3 **ความหมาย:** log(S) มี drift = $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ (ไม่ใช่ μ)

Term $-\frac{1}{2}\sigma^2$ คือ "Itô correction" — เกิดจาก Jensen's inequality บนฟังก์ชัน concave log

Itô correction สำคัญสำหรับ Stat Arb อย่างไร?

ถ้าใช้ log price spread: $\varepsilon = \log(P_A) - \beta \cdot \log(P_B)$

drift ของ ε จาก Itô = $(\mu_A - \frac{1}{2}\sigma_A^2) - \beta(\mu_B - \frac{1}{2}\sigma_B^2)$

ถ้าไม่รวม Itô correction → ประเมิน drift ผิด → เลือก β ผิด → ε drift ไม่หาย

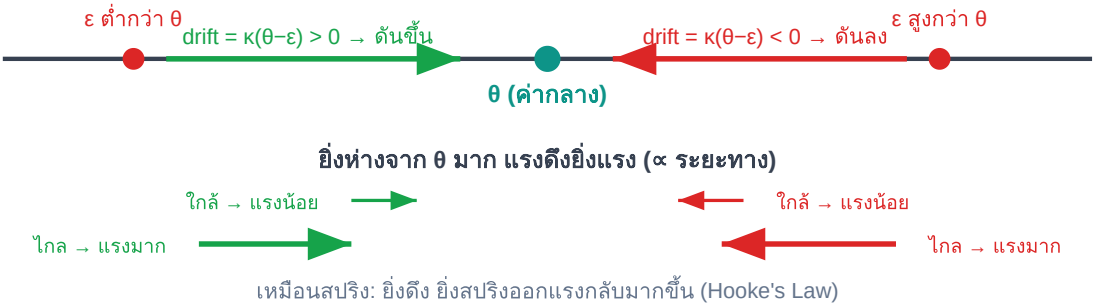
2.5 Preview: OU Process — SDE ที่เราต้องการ

สิ่งที่เราต้องการสำหรับ spread ε คือ SDE ที่มี drift "ดึงกลับ" เมื่อห่างจากค่ากลาง:

ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESS

$$d\varepsilon = \kappa(\theta - \varepsilon)\, dt + \sigma\, dW$$

drift ของ OU Process: κ(θ−ε)



OU drift ทำงานเหมือนสปริง — ยิ่งดึง spread ออกไปไกล แรงดึงกลับยิ่งมาก

โจทย์ 2.1 — $(dW)^2 = dt$

สมมติแบ่งช่วงเวลา T=2 ชั่วโมง เป็น n=8 ขั้น (dt = 0.25 ชม.) และ σ = 0.1% ต่อ √ชม.

ถาม: (a) dW แต่ละขั้นมี std dev เท่าไร? (b) $\Sigma(dW)^2$ ทั้งหมดมีค่าเท่าไร (โดย E)?

▶ ดูคำตอบ

โจทย์ 2.2 — Itô's Lemma

กำหนด dX = 3 dt + 2 dW และ $f(X) = X^2$

ถาม: หา df โดยใช้ Itô's Lemma และบอกว่า Itô correction เท่าไร

▶ ดูคำตอบ

โจทย์ 2.3 — อ่าน OU drift

Spread ε เดิน OU: $d\varepsilon = 2(0.001 - \varepsilon)\,dt + 0.003\,dW$

ขณะนี้ $\varepsilon = 0.005$

ถาม: drift ตอนนี้เท่าไร (ต่อวัน) และบอกทิศทางและขนาด

▶ ดูคำตอบ