STATISTICAL ARBITRAGE · บทที่ 18

Options Overlay: Put-Call Parity Arbitrage

ε = Call − Put − (F−K)e^{−rT} — deviation คือโอกาส arbitrage

ค้นหาและ exploit ความไม่สมดุลใน options market อย่างเป็นระบบ

แก่นของบทนี้ — อ่านก่อน

Put-Call Parity เป็นกฎพื้นฐานที่ต้องเป็นจริงในตลาดที่ไม่มี arbitrage เมื่อ ε ≠ 0 แสดงว่า call หรือ put ราคาผิดสัมพัทธ์กัน และสามารถทำ riskless profit ได้โดยการ construct portfolio ที่สอดคล้อง

$$\varepsilon = C - P - (F - K) \times e^{-rT}$$

18.1 Put-Call Parity — สูตรและที่มา

Put-Call Parity เป็น no-arbitrage relationship ที่เชื่อม call, put, forward, และ strike เข้าด้วยกัน:

PUT-CALL PARITY สำหรับ EUROPEAN OPTIONS

สำหรับ European options บน futures contract F ที่ strike K expiry T:

$$C - P = (F - K) \times e^{-rT}$$

สำหรับ European options บน spot asset S:

$$C - P = S \times e^{-qT} - K \times e^{-rT}$$

โดยที่: C = call price, P = put price, r = risk-free rate, q = dividend/funding yield

ที่มาของสูตร: พิจารณา 2 portfolio ที่ให้ payoff เดียวกัน:

Portfolio	ส่วนประกอบ	Payoff เมื่อ $F_T > K$	Payoff เมื่อ $F_T \leq K$
A: Long Call	Buy C, Invest $(F-K)e^{-rT}$	$(F_T - K) + (F-K)$	$0 + (F-K)$
B: Long Fwd + Put	Long F at K, Buy P	$(F_T - K) + 0$	$0 + (K - F_T)$

เนื่องจาก payoff เท่ากัน ราคาต้องเท่ากัน → $C - P = (F - K)e^{-rT}$ ต้องเป็นจริงเสมอ

18.2 Parity Deviation ε — เมื่อไรจึง Arbitrage ได้

นิยาม PARITY DEVIATION

$$\varepsilon = C - P - (F - K) \times e^{-rT}$$

ถ้า **ε > 0**: Call แพงเกินไปเทียบกับ put → Sell call, Buy put, Buy forward
ถ้า **ε < 0**: Put แพงเกินไปเทียบกับ call → Buy call, Sell put, Sell forward
ถ้า **ε = 0**: parity สมบูรณ์ — ไม่มีโอกาส arbitrage

เงื่อนไขที่ ε ≠ 0 ในทางปฏิบัติ

- **Bid-Ask spread:** ε ต้องเกิน bid-ask cost รวมทุก leg ก่อนจะ profitable
- **Margin/collateral cost:** ต้องใช้ margin วาง → มีต้นทุน opportunity
- **Execution risk:** ต้อง fill ทุก leg พร้อมกัน ไม่เช่นนั้นเป็น legged risk
- **American vs European:** American options มี early exercise premium → parity แตกต่าง

18.3 BTC Options ตัวอย่าง — Deribit Put-Call Parity

Running Example: BTC Options บน Deribit

ข้อมูลจาก Deribit สำหรับ BTC-28JUN-65000 (Strike K = $65,000, expiry 30 วัน):

- BTC Futures (28JUN) = **$66,200**
- Call (K=65000, T=30d) = **$2,850**
- Put (K=65000, T=30d) = **$1,520**
- Risk-free rate r = 5% ต่อปี → e^{−rT} = e^{−0.05×30/365} = 0.9959

```
Theoretical C - P = (F - K) × e^{-rT} = ($66,200 - $65,000) × 0.9959 =
$1,200 × 0.9959 = $1,195.08 Observed C - P = $2,850 - $1,520 = $1,330
ε = $1,330 - $1,195 = +$135 → Call แพงเกินไปเทียบกับ Put Trade: Sell Call
+ Buy Put + Long Forward (at K=$65,000) Expected profit ≈ $135 (ก่อนหัก
ค่าธรรมเนียม)
```

ตรวจสอบต้นทุนก่อน Trade

Deribit taker fee ≈ 0.03% ต่อ option position (per leg)

3 legs: Sell C + Buy P + Long F → total fee ≈ 0.09% × notional

Notional ≈ $65,000 → fee ≈ $58.50

Net profit ≈ $135 − $58.50 = **$76.50** ต่อ BTC → ยังคุ้ม แต่ต้องระวัง execution

หมายเหตุ: conversion เป็น delta-flat โดยโครงสร้าง (ดู §18.6) จึงไม่ต้องมี hedge leg แยกต่างหาก

18.4 IV Surface Arbitrage — Calendar Spread ใน IV

นอกจาก put-call parity แล้ว ยังมีโอกาส arbitrage จากความไม่สอดคล้องของ Implied Volatility (IV) ข้าม expiry:

ประเภทของ IV Surface Arbitrage

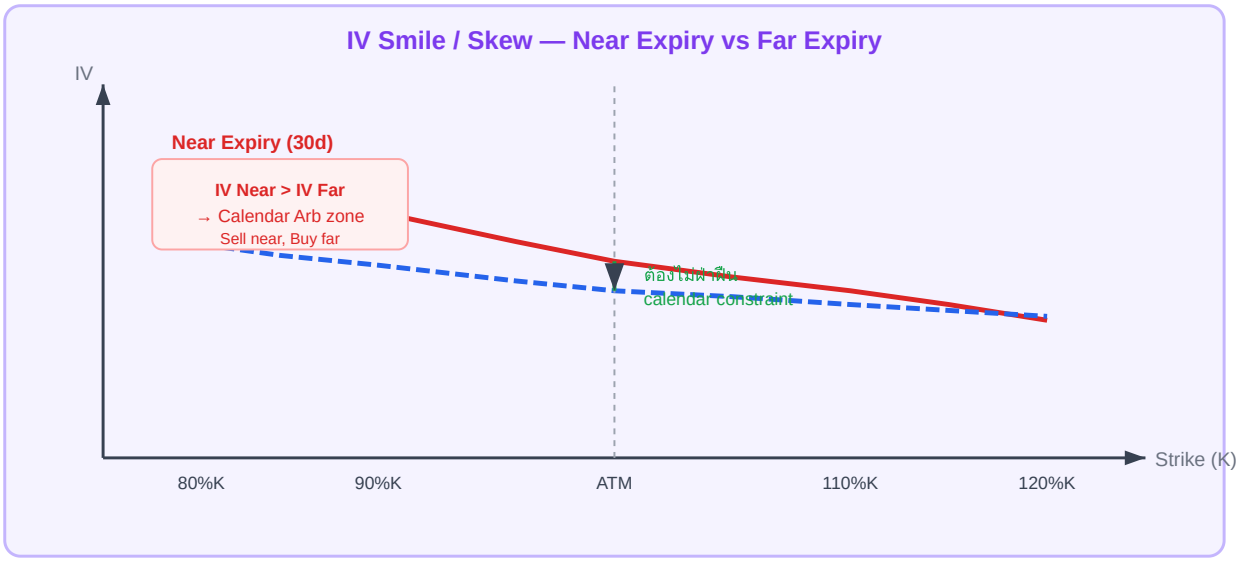
- **Calendar Spread IV Arb:** IV ของ near-expiry สูงกว่า far-expiry ผิดปกติ → sell near, buy far vega
- **Strike Spread (Skew Arb):** IV skew ระหว่าง OTM put และ OTM call ผิดปกติ
- **Butterfly Arb:** IV ของ ATM ผิดจาก weighted average ของ OTM wings

No-Arbitrage Constraints ของ IV Surface

Constraint	สูตร / เงื่อนไข	ถ้าฝ่าฝืน
Calendar spread	Total variance $V(T) = IV^2 \times T$ ต้องเพิ่มตาม T	Sell near, buy far → calendar arb
Butterfly	$\partial^2 C/\partial K^2 \geq 0$ (call spread เป็น convex)	Butterfly spread ให้ riskless profit
Call spread	$\partial C/\partial K \leq 0$ (call price ลดเมื่อ K ขึ้น)	Vertical spread arb
Horizontal bound	$C(K,T_2) \geq C(K,T_1)$ สำหรับ $T_2 > T_1$	Calendar spread arb

18.5 IV Surface Diagram (2D Slice)

แผนภาพ 2D slice ของ IV surface ที่ expiry คงที่ (IV vs. Strike):



Near expiry IV (แดง) ต้องไม่สูงกว่า far expiry IV อย่างผิดปกติที่ strike เดียวกัน มิฉะนั้นเป็น calendar arb

18.6 Delta Hedge ของ Options Spread

เมื่อ trade IV surface arb (เช่น calendar spread ใน IV) ต้องระวังว่า position มี **delta exposure** ที่ต้อง hedge ออก ส่วน conversion (put-call parity) นั้น delta-flat โดยโครงสร้างอยู่แล้ว — ดูตัวอย่างด้านล่าง:

ขั้นตอน Delta Hedge

1. คำนวณ net delta ของ options portfolio: Δ_net = Δ_call − Δ_put + Δ_forward
2. Sell/Buy futures ในปริมาณ Δ_net เพื่อให้ net delta ≈ 0
3. Re-hedge เมื่อ delta drift (เนื่องจาก gamma effect) หรือทุก interval ที่กำหนด
4. ระวัง gamma risk: position ที่ delta-neutral อาจมี gamma ที่ทำให้ P&L เป็น non-linear

```
ตัวอย่าง: ε trade บน BTC K=65000, T=30d Long Put: Δ_put = −0.42 → contribution
= +1×(−0.42) = −0.42 Short Call: Δ_call = +0.58 → contribution = −1×(+0.58)
= −0.58 Long Fwd: Δ_fwd = +1.00 → contribution = +1×(+1.00) = +1.00 Net Δ =
−0.42 − 0.58 + 1.00 ≈ 0.00 → conversion เป็น delta-neutral โดยอัตโนมัติ ไม่ต้อง
hedge เพิ่ม
```

Re-hedge Frequency

สำหรับ crypto options ที่ volatile มาก: re-hedge ทุก 30–60 นาที หรือทุกครั้งที่ delta drift เกิน ±0.05 Transaction cost ของ re-hedge ต้องรวมใน edge calculation (บทที่ 19)

18.7 แบบฝึกหัด

โจทย์ 18.1 — คำนวณ ε และ Direction

ETH Options บน Deribit: Strike K = $3,500, Expiry = 45 วัน

ETH Futures (45d) = $3,620 | Call = $285 | Put = $148 | r = 5% ต่อปี

ถาม: คำนวณ ε และระบุ direction ของ trade arbitrage

▶ ดูคำตอบ

โจทย์ 18.2 — IV Calendar Constraint

BTC options ที่ K = ATM: IV_30d = 72%, IV_90d = 58%

Total variance: $V_{30} = 0.72^2 \times (30/365) = 0.0426$, $V_{90} = 0.58^2 \times (90/365) = 0.0832$

ถาม: IV surface นี้ violate calendar constraint หรือไม่? ถ้า violate ควร trade อย่างไร?

▶ ดูคำตอบ

18.8 PCP Violation เป็น ε — เชื่อมสู่ Stat Arb Framework

ตลอด §18.1–18.7 เราใช้ PCP เพื่อ *สร้าง* synthetic position — แต่มีมุมมองที่ทรงพลังกว่า: **PCP violation คือ ε ในรูปแบบหนึ่ง** ที่สามารถนำเข้า stat arb framework ทั้งเล่มได้ทันที

KEY IDEA — PCP VIOLATION = E ชนิดใหม่

$$\varepsilon_{PCP} = (C - P) - (S - K \cdot e^{-rT})$$

PCP บอกว่า ε นี้ควร = 0 ในตลาดไร้ friction
ในตลาดจริง ε_PCP ≠ 0 เล็กน้อยและ mean-revert รอบ 0

โครงสร้างนี้เหมือนกับ ε = log(P_A) − β·log(P_B) ใน บทที่ 3 ทุกประการ — เราสร้าง synthetic process ที่ควรเป็น 0 แล้วเทรดเมื่อมันเบี่ยงออก ความแตกต่างคือ ε_PCP มาจาก no-arbitrage constraint ของ PCP ไม่ใช่ cointegration ของราคา

ε_PCP mean-revert ได้ไหม?

ε_PCP ≠ 0 เกิดจาก:

- **Liquidity mismatch:** bid-ask spread ของ C และ P ไม่เท่ากัน
- **Borrow cost:** หายากสำหรับ short stock → put premium ขึ้น
- **Vol regime:** ช่วง crash IV_put เพิ่มเร็วกว่า IV_call → skew spike
- **Funding:** crypto options มี basis risk ระหว่าง underlying spot กับ perp

แต่ทั้งหมดนี้เป็น transient → ε_PCP mean-revert รอบ 0 ในระยะสั้น

	ε ราคา (ch3–ch14)	ε_PCP (ch18.8)
สร้างจาก	log(P_A) − β·log(P_B)	C − P − (S − K·e^{−rT})
ควรเป็น	ค่าคงที่ θ (mean)	0 (no-arbitrage)
เบี่ยงเพราะ	market inefficiency	liquidity/skew/funding
test ด้วย	ADF, half-life, z-score	เหมือนกันทุกอย่าง
trade	z-score entry/exit	เหมือนกัน

Running Example: BTC Options — ε_PCP จาก Deribit

```
ข้อมูล ณ วันที่ T (BTC ≈ $95,000): Call ATM (K=95,000, T=30d): C = $4,820
Put ATM (K=95,000, T=30d): P = $4,310 Spot BTC: S = $95,000 r = 5%/yr,
T = 30/365 PCP fair value: S − K·e^{−rT} = 95,000 −
95,000·e^{−0.05×30/365} = 95,000 − 95,000·0.99590 = 95,000 − 94,610 =
390 ε_PCP = (C − P) − 390 = (4,820 − 4,310) − 390 = 510 − 390 = +120 →
ε_PCP = +$120 → Call แพงกว่า Put ผิดปกติ → ถ้า ε_PCP mean-revert → เปิด:
Short Call + Long Put + Long Stock (Conversion) รับกำไรเมื่อ ε_PCP กลับสู่ 0
```

ข้อควรระวัง — Options friction สูงกว่า Perp มาก

- Bid-ask ของ options กว้างกว่า perp 5–20x → breakeven ε_PCP สูงมาก
- American options (equity): early exercise ทำให้ PCP ไม่ strict — ใช้เฉพาะ European
- Crypto options (Deribit): European, ไม่มี dividend → PCP strict ✅
  หมายเหตุ: Deribit settle against futures reference index ไม่ใช่ spot → PCP ที่ถูกต้องคือ C−P = (F−K)·e^{−rT} (F คือ futures price) ความต่างจาก spot PCP ≈ basis × T ซึ่งเล็กมากสำหรับ T ≤ 30 วัน แต่ควรระวังถ้า basis กว้าง
- ต้องคำนวณ breakeven ε_PCP ≥ total_friction ก่อนเทรดเสมอ (ดู บทที่ 19)

บทที่ 22 — Options-Based Stat Arb เต็มรูปแบบ

บทที่ 22 ขยาย ε_PCP ไปสู่ IV Surface Stat Arb ครบชุด:

§22.1 IV series เป็น process ใหม่ · §22.2 Box Spread Arb
§22.3 IV Skew Stat Arb · §22.4 Cross-venue IV Arb (Deribit↔Bybit)
§22.5 Vol Risk Premium · §22.6 Friction · §22.7 Practical Setup

โจทย์ 18.8 — คำนวณ ε_PCP

Given: BTC C(K=100k, T=7d) = $2,400, P(K=100k, T=7d) = $2,350, S = $100,000, K = $100,000, r = 5%/yr

(ก) คำนวณ PCP fair value = S − K·e^{−rT}
(ข) คำนวณ ε_PCP
(ค) ถ้า ε_PCP = +$80 และ normal range ±$30 → ควรเปิด position ไหน?

▶ ดูคำตอบ

Ch.18 Options Overlay | ต่อไป → **Ch.19: Cost Analysis & Edge — คำนวณ Net Edge ก่อนเทรด** | §18.8 ดู ch22 สำหรับ Options Stat Arb เต็มรูปแบบ