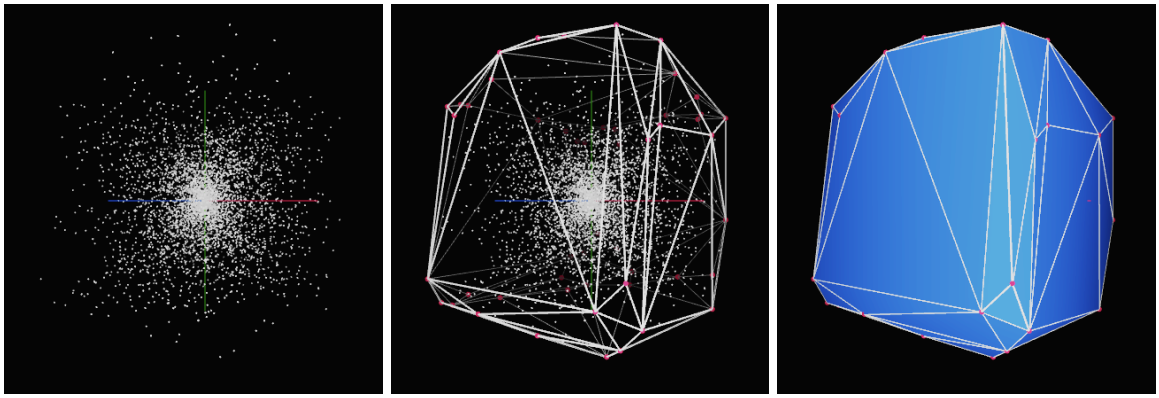
Implantation Fonctionnelle d'Algorithmes Géométriques en 3D

Rapport de projet de recherche - Le cas de l'enveloppe convexe : Quickhull

Titouan Laurent - Master 1 parcours Image et 3D
Encadrant : Nicolas Magaud



iCUBE
Université de Strasbourg

Note : l'impression couleur est recommandée pour ce document.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Choix d'un langage de programmation **2**

3 Implantation de Quickhull en 2D en JavaScript **3**
3.1 Principe général . . . 3
3.2 Structures de données . . . 3
3.3 Implantation et démo visuelle . . . 4

4 Implantation de Quickhull en 3D en JavaScript **5**
4.1 Principe et spécificités . . . 5
4.2 Adaptation de l'algorithme . . . 6
4.3 Structures de données . . . 6
4.3.1 Données d'entrées . . . 6
4.3.2 Stockage et manipulation de l'enveloppe convexe en mémoire . . . 6
4.3.3 Stockage et manipulation de l'ensemble de points extérieurs associés aux faces . . . 7
4.4 Pseudo-code d'implantation et spécifications . . . 7
4.5 Évaluation des performances . . . 10
4.6 Démo visuelle . . . 11

5 Implantation d'une étape de Quickhull 3D en Coq et extraction en Haskell **13**
5.1 Variations par rapport à l'implantation JavaScript . . . 13
5.2 Extraction du code Coq . . . 13
5.2.1 Choix du langage d'extraction . . . 13
5.2.2 Extraction de Coq vers Haskell . . . 14
5.3 Optimisations et performances . . . 14
5.4 Visualisation de la sortie du programme - Viewer . . . 15

6 Conclusion **16**
6.1 Pour résumer . . . 16
6.2 Si c'était à refaire . . . 16
6.3 Pour continuer . . . 16

1 Introduction

Preuve assistée par ordinateur Prouver la correction d'un algorithme, c'est à dire démontrer formellement qu'il répond à des spécifications précises est une tâche essentielle dans de nombreux domaines de l'informatique. Cela permet de s'assurer de sa robustesse et donc de celle des implantations qui en découlent.

Cependant, il peut être fastidieux de chercher à faire une démonstration formelle à la main, d'autant plus qu'en informatique l'écart entre une implantation donnée et sa description (formelle) représente une limite. Dans le cas des algorithmes géométriques, il y a l'introduction de difficultés supplémentaires, puisque l'on se retrouve généralement à travailler aussi bien sur des notions topologiques qu'arithmétiques.

À partir de là, les outils de preuve automatique se présentent comme une solution viable. Ils permettent de démontrer des propriétés dans une implantation donnée d'un algorithme, et donc d'en prouver la correction. La contrainte étant que, l'implantation doit être faite dans un style de programmation fonctionnel. Leur intérêt réside aussi dans le fait qu'on peut en extraire un programme certifié.

Application au calcul de l'enveloppe convexe Le calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points est un problème bien connu en géométrie et en informatique. Un certain nombre d'algorithmes existent pour le résoudre, et parmi ceux-ci Quickhull est inspiré de Quicksort en proposant une approche de type diviser pour régner, lui assurant une complexité en $O(n \log n)$.

Par le passé, une implantation de Quickhull restreinte aux ensembles de points à 2 dimensions a été proposée et prouvée formellement [2, 3]. Seulement, la généralisation de Quickhull aux ensembles à trois dimensions, n'est pas une tâche triviale à cause de contraintes supplémentaires de visibilité — qu'on ne retrouve pas en 2 dimensions. Il faut également ajouter que les implantations en 3 dimensions existantes sont pour la grande majorité faites dans un style de programmation impératif, et donc pas directement adapté à la formalisation dans un assistant de preuves comme Coq [4].

Mon travail de recherche a donc pour objectif d'explorer ce qui est envisageable en terme d'implantation en style de programmation fonctionnel, mais aussi d'aide à la visualisation de l'algorithme Quickhull en 3 dimensions. La finalité étant, de pouvoir en faire la démonstration formelle avec Coq.

2 Choix d'un langage de programmation

Pour ce sujet le langage de programmation retenu est celui de Coq. Coq est un assistant à la construction de preuves, codées avec une syntaxe qui lui est propre, en paradigme fonctionnel.

Seulement, ici il présente au moins quatre limitations importantes :

— C'est un langage plutôt austère à prendre en main, sa syntaxe est loin d'être évidente et donc il n'est que peu pratique pour développer rapidement et aisément.
— Il ne permet nativement pas de faire du dessin graphique, ce qui serait pourtant très pratique pour vérifier visuellement le bon fonctionnement des programmes développés.
— Il en est de même pour la lecture et l'écriture de fichiers (par exemple, pour stocker l'enveloppe convexe).
— Coq n'est pas un environnement dédié à l'exécution de programmes. En effet il n'est que très peu performant en temps et en capacités de calcul. Même lorsqu'il s'agit de faire des opérations arithmétiques sur de simples entiers non signés.

J'ai donc porté mon choix sur le **JavaScript**, et ce pour les raisons suivantes :

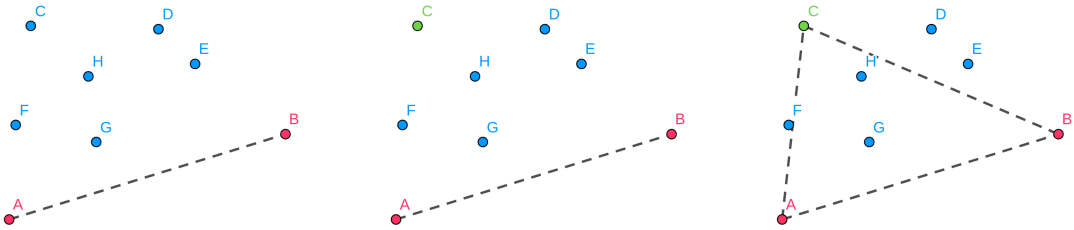
— Mis à part Coq, je n'ai jamais utilisé de langage purement fonctionnel jusque-là.
— Hors, JavaScript, un langage que je connais particulièrement bien, est **multi-paradigme**, et donc il permet nativement de développer dans un style de **programmation fonctionnel**.
— JavaScript est adapté à la lecture/écriture de fichiers.
— JavaScript intègre nativement des outils de **rendu graphique** (WebGL et dessin dans un Canvas avec des instructions simples).

3 Implantation de Quickhull en 2D en JavaScript

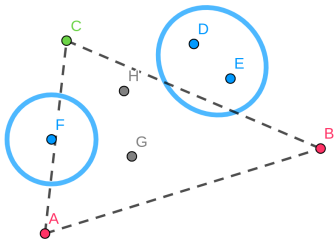
Avant de commencer à directement travailler sur Quickhull en 3 dimensions, il m'est d'abord bien plus évident de chercher à bien comprendre et me familiariser avec le cas restreint — et donc plus simple — des ensembles de points en deux dimensions, ne serait-ce que pour en cerner les caractéristiques principales. Cela passe donc par l'implantation de l'algorithme, qui sera faite dans un style fonctionnel.

3.1 Principe général

L'algorithme Quickhull en 2 dimensions pourrait être qualifié de "cas d'école" de la technique du *diviser pour régner*. Pour s'en convaincre on peut reprendre l'exemple suivant, illustrant des étapes successives de la construction de l'enveloppe.



Considérons que l'on dispose des points suivants. Supposons également qu'on sait que les points A et B (en rouge) appartiennent à l'enveloppe convexe (arête en pointillé). La prochaine étape de l'algorithme est alors de déterminer le point le plus extrême (le plus éloigné) de l'arête AB : on trouve le point C (en vert).



Sachant la nouvelle enveloppe obtenue, on peut procéder à la division du problème en deux sous-problèmes : pour chaque arête nouvellement créée (ici AC et CB), on forme un sous-ensemble de points (entourés en bleu) en ne gardant que ceux qui sont visibles depuis l'arête en question. *Ici H et G ne sont pas visibles (les arêtes sont orientées) ni par AC, ni par CB, donc ils ne font pas partie de l'enveloppe convexe.*

On peut alors récursivement appliquer le même algorithme sur les deux sous-ensembles générés (entourés en bleu ici) par rapport à leur arête respective (AC et CB). L'enveloppe convexe est implicitement construite par les opérations de combinaison des données de retour des sous-appels récursifs (il s'agit basiquement d'une liste ordonnée des points appartenant à l'enveloppe convexe).

La première étape de Quickhull en 2D (et donc des premiers appels récursifs) peut varier en fonction des implantations. Pour ma part j'ai choisi celle qui consiste à prendre les deux points sur un même axe (x ou y) qui sont les plus éloignés l'un de l'autre. On obtient une arête dont chacune des extrêmités appartient à l'enveloppe convexe. Il suffit alors de lancer l'algorithme précédent en partant successivement de chacun des deux côtés de l'arête.

3.2 Structures de données

En termes de structures de données il n'y a besoin que de trois structures principales :
— Un point constitué de deux coordonnées flottantes x et y.
— Une liste (statique) de points dont on va chercher à calculer l'enveloppe convexe.

— Une liste (dynamique) d'entiers non signés pour représenter aussi bien les ensembles de points (indices des points) associés à une arête, que ceux formant l'enveloppe convexe (cette liste est ordonnée dans l'ordre de voisinage des sommets des arêtes).

Du fait de la simplicité de ces structures, elles ne représentent pas une contrainte particulière pour une implantation en style fonctionnel.

3.3 Implantation et démo visuelle

En plus d'implanter Quickhull en 2D, j'ai développé un affichage en WebGL qui permet de visualiser et de naviguer entre les étapes de l'algorithme sur des exemples. La visualisation est un moyen de vérifier mais aussi de mieux comprendre le fonctionnement de ce qui est implanté.

Les captures qui suivent sont celles dudit affichage, avec le code couleur suivant :

— Petits points blancs : ensemble de points dont on souhaite calculer l'enveloppe convexe.
— Arête rouge : arête déjà parcourue qui appartient (ou qui a appartenu) à l'enveloppe convexe.
— Arête jaune : arête courante sur laquelle la récursion est faite ou arête nouvellement ajoutée à l'enveloppe convexe.
— Arête verte : arête appartenant à l'enveloppe convexe finale calculée.

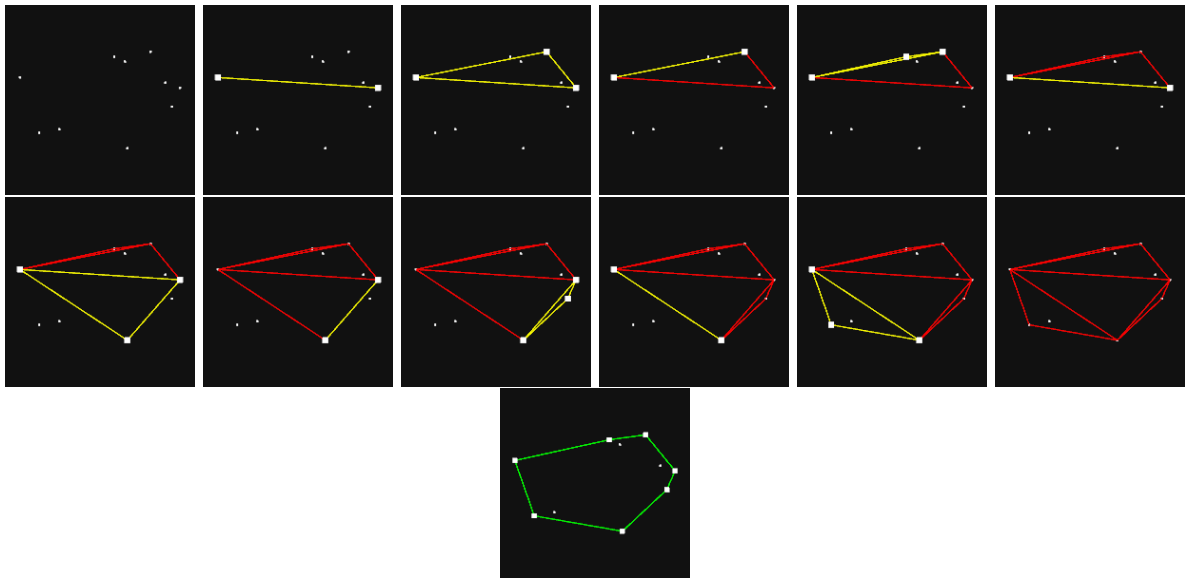


FIGURE 1 – Étapes de construction dans l'ordre chronologique de l'enveloppe convexe 2D sur un exemple simple.

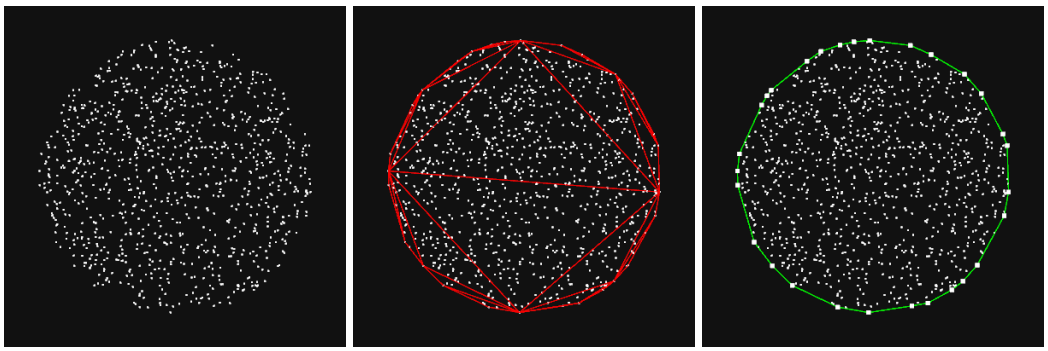


FIGURE 2 – Exemple avec un ensemble de points plus grand, sans toutes les étapes intermédiaires.

4 Implantation de Quickhull en 3D en JavaScript

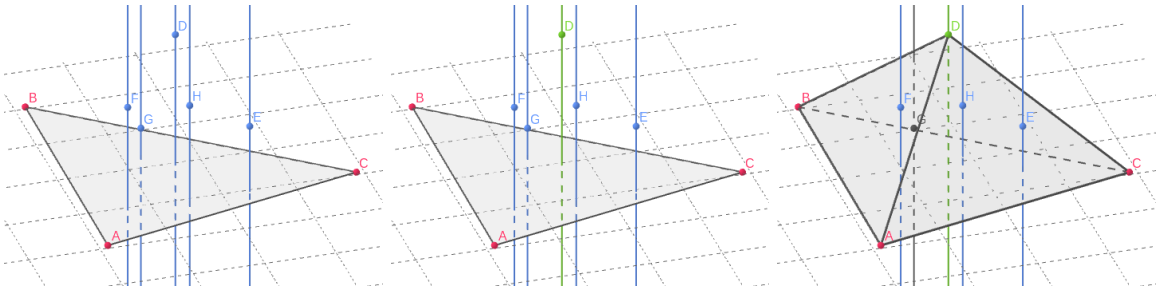
Implanter Quickhull restreint aux ensembles de points en 2D s'est révélé être assez simple, malgré la contrainte de devoir programmer en style fonctionnel. Dans cette section on s'attarde sur la version en 3D, qui représente la partie la plus importante de mon travail de recherche.

4.1 Principe et spécificités

Au-delà de 2 dimensions, l'algorithme Quickhull est nettement plus complexe à implanter. Déjà, en trois dimensions une enveloppe convexe n'est plus une suite d'arêtes mises bout à bout, mais un maillage surfacique triangulaire. Ce qui va demander de penser à une nouvelle structure de données adaptée.

De plus, il n'est plus possible de faire un algorithme en *diviser pour régner*, et pour le comprendre on va regarder un exemple similaire à celui donné pour Quickhull 2D.

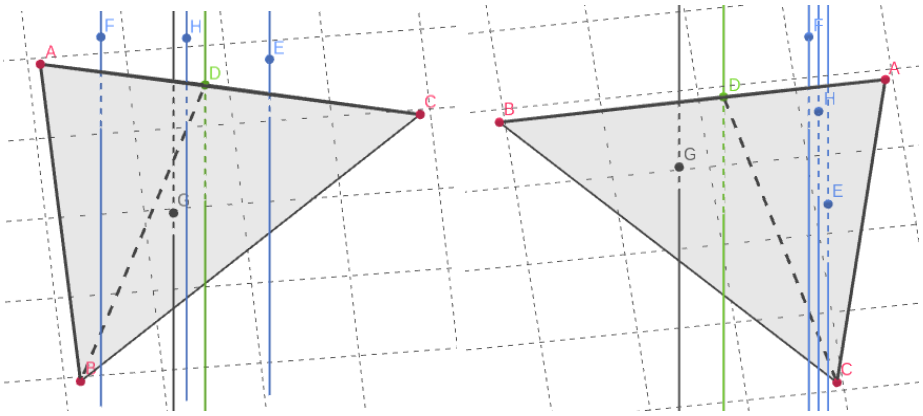
Pour aider à la lisibilité des points dans l'espace 3D, le triangle ABC est sur le plan de la grille, et les points D à H sont représentés avec leur droite verticale.



Considérons que l'on dispose du triangle ABC : une face de l'enveloppe convexe, et des points D à H comme étant l'ensemble des points non traités. Comme pour Quickhull 2D, on va déterminer le point le plus extrême (le plus éloigné) de la face ABC : on trouve le point D (en vert).

La nouvelle enveloppe est alors obtenue par la construction des trois faces ABD, ACD, BCD. Le prédicat de visibilité nous permet de déterminer que le point G (en gris) n'appartient pas à l'enveloppe convexe car non visible des trois faces.

Tout semble bien se passer, jusqu'à l'étape de la division :



Sur ces deux vues on ne fait **que** de déplacer la caméra autour du solide. En alignant sur une seule droite successivement les points A, D et C, puis les points B, D et A, on peut voir que le point F est visible **simultanément** par deux des faces nouvellement créées.

Cette particularité nous interdit de faire l'étape de la division pour *diviser pour régner*. On comprend également que contrairement à la version 2D où l'on se contentait d'agir sur une arête à la fois pour la subdiviser en de

nouvelles sous-arêtes, ici on devra parfois supprimer plusieurs faces (car visibles depuis un point extrême) pour reconstruire un certain nombre de faces supplémentaires (l'exemple donné ici est un cas particulier plutôt simple car le point extrême D ne voit qu'une seule face : le triangle ABC).

4.2 Adaptation de l'algorithme

Puisque l'on ne peut pas faire de *diviser pour régner*, l'algorithme doit être pensé différemment. Je me suis basé sur le pseudo-code donné dans [1] qui propose une généralisation pour les dimensions supérieures à 2.

La boucle principale de l'algorithme suit ces étapes :
- On choisit une face parmi les faces de l'enveloppe convexe courante dont le sous-ensemble de points non-traités associé est non-vide.
- On prend le point le plus extrême (le plus éloigné) par rapport à ladite face depuis le sous-ensemble de points associé.
- On supprime **toutes** les faces visibles de l'enveloppe convexe depuis ce point.
- On reconstruit l'enveloppe convexe en formant des faces (triangles) entre ce point et le bord du trou laissé à l'étape précédente.
- On recalcule le sous-ensemble de points associé à la face courante par rapport à la nouvelle enveloppe obtenue (étape qui est loin d'être triviale). On devrait obtenir un nouveau sous-ensemble de points par face nouvellement ajoutée.
- Ré-itérer jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sous-ensemble non-vide associé à l'une des faces de l'enveloppe convexe.

La première étape de l'algorithme consiste (à la manière de Quickhull 2D) à trouver un solide minimal qui formera l'enveloppe convexe initiale. Celui-ci est formé de 4 faces (soient 4 points), sélectionnés suivant la méthode suivante (méthode adaptée de [6]) :
- On cherche deux points les plus éloignés sur deux axes (parmi x, y et z) parmi l'ensemble de points.
- Avec l'arête formée des deux points précédents, on cherche un troisième point le plus éloigné de ce segment.
- On dispose maintenant d'une face (un triangle) depuis laquelle on va chercher un quatrième point qui en est le plus éloigné.
- On peut dès lors construire le tétrahèdre formé par ces 4 points.
- On attribue (arbitrairement) à chaque face un sous-ensemble de points qui lui sont visibles.

On se rend compte que cette fois-ci il va nous falloir une structure de données pour représenter les sous-ensembles de points associés aux faces. Celle-ci sera appelée *oset* pour *outside set* par la suite (et *osubset* pour *outside subset*).

4.3 Structures de données

4.3.1 Données d'entrées

Un *vec*3 permet de modéliser aussi bien un point qu'un vecteur dans l'espace 3D. Les composantes sont données dans l'ordre usuel x, y et z (avec $x, y, z \in \mathbf{R}$).
Dans notre implantation, on considèrera une simple liste ordonnée des n points (représentée par la variable globale $GLOBAL\_V\_LIST$) comme étant les données d'entrée du problème à résoudre.

4.3.2 Stockage et manipulation de l'enveloppe convexe en mémoire

La structure en liste de demi-arêtes orientées (doubly connected edge list, abrégé DCEL) est parmi les plus communes qu'il soit dès lors que l'on souhaite modéliser un maillage topologique.
Ici on implante une version restreinte de cette dernière, puisqu'elle permet de créer maillages triangulaires uniquement — ce qui correspond à notre besoin.

Demi-arête Une *he* (abrévation de halfedge, ou demi-arête) est une structure de données disposant d'informations sur elle-même et son voisinage topologique. Celles-ci sont les suivantes :
- $index \in \mathbf{Z}$, un identifiant unique pour la demi-arête, avec :

$$\begin{cases} index = -1 & \text{est une demi-arête nulle} \\ index \geq 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— *opposite* $\in \mathbf{Z}$, l'identifiant de la demi-arête opposée, avec :

$$\begin{cases} opposite = -1 & \text{est une demi-arête du bord} \\ opposite \geq 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— *vertex* $\in \mathbf{N}$, l'indice du sommet incident dont elle est issue.

Maillage triangulaire Une *dcel* permet la modélisation d'un maillage topologique triangulaire. Elle dispose des attributs suivants :
— *he_list*, une liste de *he*.
— *available_he_index* $\in \mathbf{N}$, le prochain indice non attribué à une *he* de la liste.

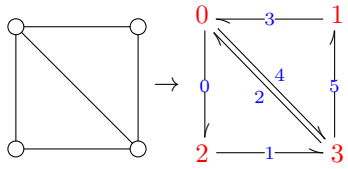


FIGURE 3 – Un maillage simple et un indiçage correspondant.

index	opposite	vertex
0	-1	0
1	-1	2
2	4	3
3	-1	1
4	2	0
5	-1	3

Indice	Coordonnées
0	(0,0)
1	(1,0)
2	(1,1)
3	(0,1)

available_he_index **:** 6

FIGURE 4 – Structure *dcel* à gauche et la table des sommets à droite.
Note : *avaiable_he_index* est l'indice pour la prochaine demi-arête qui sera ajoutée à la *dcel*. On pourrait s'en passer et utiliser à la place l'indice de la dernière *he* ajoutée à la *dcel* pour calculer le prochain indice.

Exemple simple en 2D Considérons le maillage de la Figure 3. Une structure *dcel* associée valide serait alors telle que celle présentée Figure 4.

Ajout et retrait d'une face dans une *dcel* Il s'agit des deux seules opérations de modification d'une *dcel*.

4.3.3 Stockage et manipulation de l'ensemble de points extérieurs associés aux faces

Sous-ensemble de points extérieurs — *osubset* Un sous-ensemble de points extérieurs (outside subset) est une structure de données à deux champs :
— $face\_index \in \mathbf{N}$, l'identifiant unique d'une face.
— $list \in \mathbf{N}$, l'ensemble des points extérieurs à la face $face\_index$, représentés par leur indice dans $GLOBAL\_V\_LIST$.

Ensemble de points extérieurs — *oset* L'ensemble de points extérieurs (outside set) n'est rien d'autre qu'une liste d'*osubset*, chacune associée à une unique face (et son ensemble de points extérieurs associé).

4.4 Pseudo-code d'implantation et spécifications

Soit $P \subset \mathbf{R^3}$, l'ensemble n des points tridimensionnels donnés en entrée de Quickhull.
Soit $P_{indices} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, l'ensemble des n indices associés aux n points de P.

Soit O un *oset*, l'ensemble des couples $\langle f, O_{subset} \rangle$ de faces et de points extérieurs associés. Soit E une *dcel*, l'ensemble des m demie-arêtes de l'enveloppe.
Alors à tout moment, les propriétés suivantes sur les structures de données sont censées être vérifiées :

— Les sous-ensembles de points sont disjoints :

$$\emptyset = \bigcap_{\langle f, O_{subset} \rangle \in O} O_{subset}$$

— L'union des sous-ensembles de points est inclus dans l'ensemble $P_{indices}$:

$$P_{indices} \supseteq \bigcup_{\langle f, O_{subset} \rangle \in O} O_{subset}$$

— Pour tout couple $\langle face_{indice}, O_{subset} \rangle \in O$:

$$0 \leq face_{indice} < \lfloor m/3 \rfloor$$

— Pour toute arête $he \in E$:

$$he.index \in \{x \mid 0 \leq x < m\}$$
$$he.opposite \in \{x \mid -1 \leq x < m\},$$
$$he.vertex \in P_{indices}$$

Fonctions principales

Algorithme 1 Quickhull3D

Requiert : P une liste de points tridimensionnels dont on veut calculer l'enveloppe convexe 3D

fonction QUICKHULL3D(P) :
  $P_{indices} \leftarrow$ LISTEORDONNEEENTIERS(P)
  $\langle E_{initiale}, O_{initial} \rangle \leftarrow$ TETRAHEDREINITIAL($P_{indices}$)
  renvoyer QUICKHULL3DREC(P, $E_{initiale}$, $O_{initial}$)
Fin fonction

L'algorithme qui suit, bien que récursif, est équivalent à une boucle `while`.

Algorithme 2 Quickhull3DRec

Requiert : P la liste des points 3D (reste inchangée lors de l'exécution)
Requiert : E une *dcel* (enveloppe)
Requiert : O un *oset* (ensemble des sous-ensembles de points extérieurs associés aux faces de E)

fonction QUICKHULL3DREC(P, E, O) :
  Si $O = \emptyset$ **alors**
    renvoyer E
  Sinon
    $\langle f_{sel}, O_{sel} \rangle \leftarrow$ PREMIEROSUBSET(O) ▷ $\langle f_{sel}, O_{sel} \rangle \in O$
    $p_{sel} \leftarrow$ LEPLUSELOIGNE(P, f_{sel}, O_{sel}) ▷ $p_{sel} \in O_{sel}$
    Supprimer p_{sel} du sous-ensemble associé à la face f_{sel} de O
    $\langle E, F_{suppr} \rangle \leftarrow$ SUPPRIMERFACESVISIBLES(P, E, f_{sel}, p_{sel})
    $\langle E, F_{creees} \rangle \leftarrow$ RECONSTRUIREFACES(E, p_{sel})
    $O \leftarrow$ METTREAJOUROSET(P, E, O, F_{suppr}, F_{creees})
    renvoyer QUICKHULL3DREC(P, E, O)
  Fin si
Fin fonction

Supression des faces visibles

Cet algorithme supprime les faces de l'enveloppe E, visibles depuis le point p_{sel}. En apparence plutôt complexe, son principe reste assez simple. Il part de la face f, la supprime (ligne 2, algo. 3), puis, récursivement, explore et supprime ses faces voisines. Les conditions d'arrêt sont que : la face explorée ne soit plus visible depuis p_{sel} (ligne 5, algo. 4), ou que la face explorée ait déjà été supprimée (ligne 2, algo. 4), auquel cas on est sur une arête de bordure.

Une illustration donnée à la section 4.6, figure 8, correspond à cet algorithme.

Algorithme 3 supprimerFacesVisibles

Requiert : P la liste des points 3D (reste inchangée lors de l'exécution)
Requiert : E une *dcel*
Requiert : f l'indice de la face sélectionnée
Requiert : p l'indice du point sélectionné

1: **fonction** SUPPRIMERFACESVISIBLES(P, E, f, p) :
2: $E \leftarrow$ SUPPRIMERFACE(E, f)
3: $F_{suppr} \leftarrow \{f\}$
4: **Pour** chaque arête he de la face f, **faire** :
5: $\langle E, F_{suppr}\rangle \leftarrow$ SUPPRIMERFACESVISIBLESREC(P, $\langle E, F_{suppr}\rangle$, he, p)
6: **Fin pour**
7: **renvoyer** $\langle E, F_{suppr}\rangle$
8: **Fin fonction**

Algorithme 4 supprimerFacesVisiblesRec

Requiert : P la liste des points 3D (reste inchangée lors de l'exécution)
Requiert : E une *dcel*
Requiert : F_{suppr} une liste d'indices des faces supprimées
Requiert : he_{oppo} la demie-arête d'où l'on vient, opposée à la demie-arête où l'on va
Requiert : p l'indice du point sélectionné (constant)

1: **fonction** SUPPRIMERFACESVISIBLESREC(P, $\langle E, F_{suppr}\rangle$, he_{oppo}, p) :
2: **Si** !ESTENBORDURE(he_{oppo}) **alors**
3: $he \leftarrow$ DEMIEARETEOPPOSEE(he_{oppo})
4: $f \leftarrow$ INDICEDEFACE(he)
5: **Si** ESTVISIBLE(P, E, p, f) **alors**
6: $E \leftarrow$ SUPPRIMERFACE(E, f)
7: $F_{suppr} \leftarrow F_{suppr} \cup \{f\}$
8: $\langle E, F_{suppr}\rangle \leftarrow$ SUPPRIMERFACESVISIBLESREC(P, $\langle E, F_{suppr}\rangle$, DEMIEARETEPREC($he$), p)
9: $\langle E, F_{suppr}\rangle \leftarrow$ SUPPRIMERFACESVISIBLESREC(P, $\langle E, F_{suppr}\rangle$, DEMIEARETESUIV($he$), p)
10: **Fin si**
11: **Fin si**
12: **renvoyer** $\langle E, F_{suppr}\rangle$
13: **Fin fonction**

Reconstruction des faces

L'algorithme précédent a conduit à la supression de faces dans l'enveloppe E. La reconstruction consiste à construire un triangle entre chaques demie-arêtes de la bordure de E et le point extrême p_{sel}. La bordure est obtenue en un temps linéaire, par parcours et récupération des demie-arêtes de E qui sont des demie-arêtes de bordure ($he.opposite == -1$).

Une illustration donnée à la section 4.6, figure 8, correspond à cet algorithme.

Algorithme 5 reconstruireFaces

Requiert : E une *dcel*, p l'indice du point sélectionné
1: **fonction** RECONSTRUIREFACES(E, p_{sel}) :
2: $HE_{bord} \leftarrow$ DEMIEARETESDUBORD(E) ▷ $HE_{bord} \subseteq E$
3: $F_{creees} \leftarrow \emptyset$
4: **Pour** chaque demie-arête he de HE_{bord}, **faire** :
5: $E \leftarrow$ AJOUTERFACE(E, he, p)
6: $F_{creees} \leftarrow F_{creees} \cup \{$INDICEDEFACE(DEMIEARETEOPPOS(he))$\}$
7: **Fin pour**
8: **renvoyer** $\langle E, F_{creees} \rangle$
9: **Fin fonction**

Mise à jour de l'ensemble de points extérieurs

L'appel à cette méthode se fait dans un contexte où l'on a déjà supprimé puis reconstruit des faces. Notre *oset* contient encore les faces qui ont été supprimées avec leurs points associés, et pas celles qui ont été créées.

On supprime les sous-ensembles de points associés à des faces supprimées ligne 6, et on garde dans une liste à part les points devenus orphelins, ligne 5. Dans la boucle, ligne 9, on ajoute à l'*oset*, des sous-ensembles extérieurs vides, associés aux faces nouvellement créées. Lignes 12 à 19, pour chaque point orphelin, on recherche parmi les nouvelles faces une pour laquelle il est visible. Si tel est le cas, ce point est ajouté au sous-ensemble correspondant de l'*oset*, sinon cela signifie qu'il a été capturé dans le volume de la nouvelle enveloppe convexe (auquel cas il est oublié). La ligne 20 supprime les sous-ensembles vides de l'*oset* (ça n'est pas obligatoire en fonction de l'implantation).

Algorithme 6 mettreAjourOset

Requiert : P la liste des points 3D (reste inchangée lors de l'exécution)
Requiert : E une *dcel*
Requiert : O un *oset*
Requiert : F_{suppr} la liste d'indices des faces qui ont été supprimées
Requiert : F_{creees} la liste d'indices des faces qui ont été créées
1: **fonction** METTREAJOUROSET(P, E, O, F_{suppr}, F_{creees}) :
2: $V_{atraiter} \leftarrow \emptyset$
3: **Pour** chaque couple $\langle f, O_{subset} \rangle$ de O, **faire** :
4: **Si** $f \in F_{suppr}$ **alors**
5: $V_{atraiter} \leftarrow V_{atraiter} \cup O_{subset}$
6: $O \leftarrow O \setminus \{\langle f, O_{subset} \rangle\}$
7: **Fin si**
8: **Fin pour**
9: **Pour** chaque face f de F_{creees}, **faire** :
10: $O \leftarrow O \cup \{\langle f, \emptyset \rangle\}$
11: **Fin pour**
12: **Pour** chaque point v de $V_{atraiter}$, **faire** :
13: **Pour** chaque face f de F_{creees}, **faire** :
14: **Si** ESTVISIBLE(P, E, v, f) **alors**
15: Ajouter v dans le sous-ensemble de f dans O
16: **Break** ▷ v est déjà assigné à f, donc on peut passer au point suivant
17: **Fin si**
18: **Fin pour**
19: **Fin pour**
20: $O \leftarrow$ SUPPRIMERSOUSENSEMBLESVIDES(O)
21: **renvoyer** O
22: **Fin fonction**

4.5 Évaluation des performances

Lors d'une itération dans l'algorithme de calcul d'enveloppe convexe 3D, deux instructions successives amènent à devoir choisir un élément parmi un ensemble — sachant que tous conduisent à la terminaison du programme et à

la construction d'une enveloppe convexe valide. Dès lors l'utilisation d'heuristiques est envisageable, et cette partie porte sur la comparaison des performances en temps de calcul en fonction des méthodes employées.

Les tests ont été conduits en moyennant le temps de calcul pour 50 échantillons de points générés aléatoirement (répartition spatiale aléatoire et uniforme).

Heuristique sur le choix du point Ici on s'intéresse à la sélection du point parmi ceux du sous-ensemble choisit. Correspond à la ligne 6 de l'algorithme 2, section 4.4.

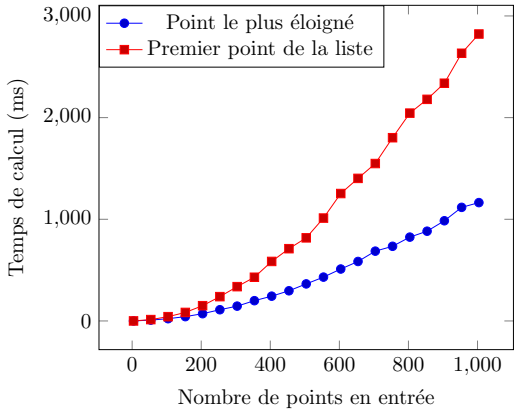


FIGURE 5 – La courbe bleue montre ici que la stratégie consistant à prendre le point le plus éloigné du plan courant offre de meilleures performances en temps que celle où l'on prend naïvement le premier point de la liste (courbe rouge).

Heuristique sur le choix du sous-ensemble Ici on s'intéresse à la sélection du prochain sous-ensemble de points non-vide (et donc implicitement d'une face du polygone convexe en cours de construction). Correspond à la ligne 5 de l'algorithme 2, section 4.4.

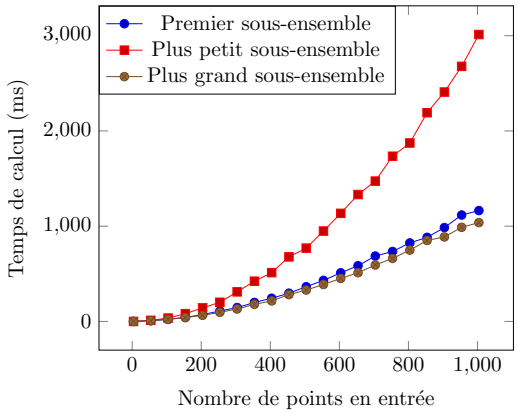


FIGURE 6 – De manière prévisible choisir le plus petit sous-ensemble à chaque itération nuit aux performances de l'algorithme (courbe rouge). En effet en ne prenant à chaque fois que un plus petit sous-ensemble de n points (avec $n > 0$), on se restreint alors à retirer de l'ensemble total n points au mieux à cette itération.
Il est intéressant de noter ici que prendre le plus grand sous-ensemble (courbe brune) est plus performant que de choisir le premier de la liste (courbe bleue), mais le gain n'est pas aussi significatif que ce qu'on a montré juste avant.

4.6 Démo visuelle

De la même manière que pour la version 2D, j'ai développé un affichage de l'algorithme de calcul d'enveloppe convexe 3D avec WebGL. Celui-ci s'est avéré absolument indispensable pour débugger le code tout au long du

développement. Au final il permet également de visualiser, étape par étape, la construction des différentes faces de l'enveloppe convexe.

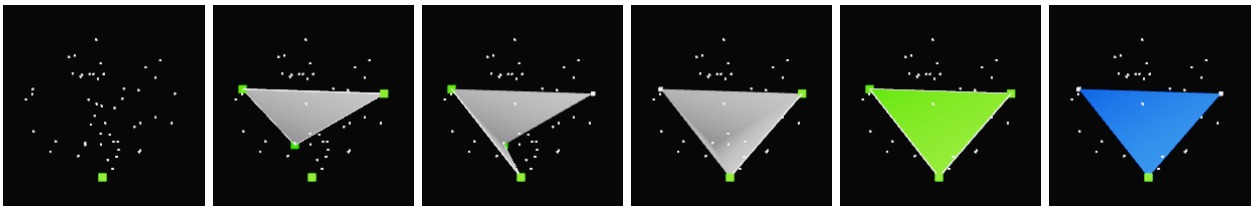


FIGURE 7 – Exemple d'étapes, dans l'ordre chronologique, de la construction de l'enveloppe initiale (tétrahèdre) sur un ensemble de points 3D, face après face.

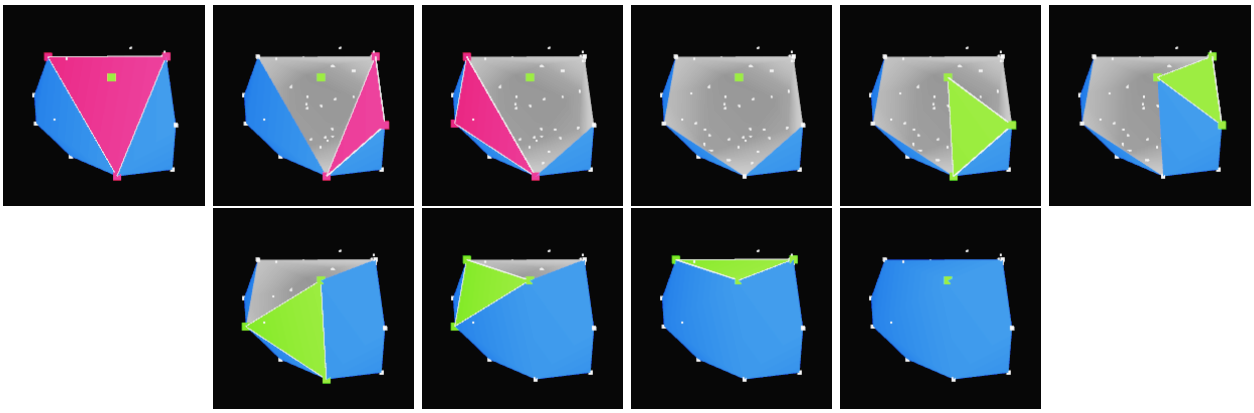


FIGURE 8 – Exemple d'étapes, dans l'ordre chronologique, de la suppression des faces visibles (en rouge) depuis un point extrême sélectionné (en vert), puis de la reconstructions de nouvelles faces (en vert). Ces dernières sont obtenues en construisant les triangles entre les arêtes du bord engendré, et le point extrême sélectionné.

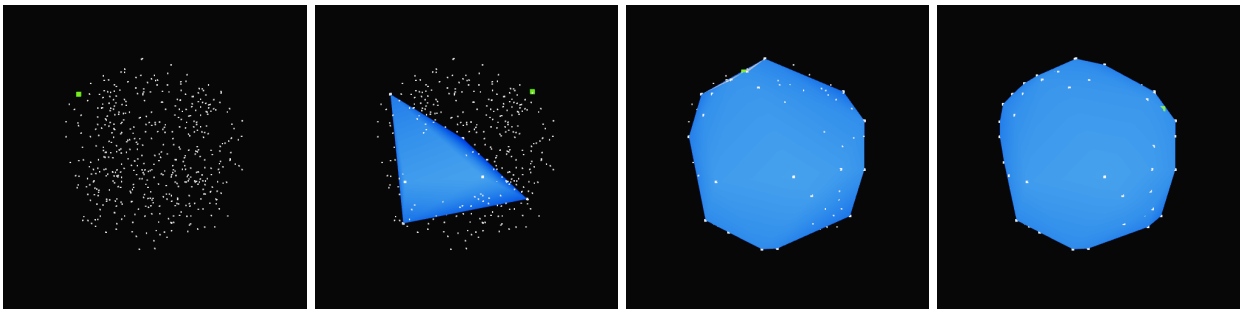


FIGURE 9 – Dernier exemple sur un grand ensemble de points, engendrant un nombre de faces plus élevé.

5 Implantation d'une étape de Quickhull 3D en Coq et extraction en Haskell

Maintenant que nous avons une implantation de Quickhull 3D qui fonctionne dans un style de programmation fonctionnelle, il serait intéressant d'explorer ce qu'il est possible de faire avec Coq. Pour rappel, l'idée à terme serait d'utiliser Coq pour prouver formellement que notre implantation de Quickhull 3D est correcte.

5.1 Variations par rapport à l'implantation JavaScript

Pour cette ré-implantation en Coq, je n'ai pas ré-écrit tout l'algorithme de Quickhull 3D, ni toutes ses structures de données. Le temps qu'il me restait m'aurait été bien insuffisant pour cela. L'idée c'est plutôt d'avoir une preuve de concept, et donc j'ai décidé de n'implémenter que la première partie de l'algorithme qui consiste à **calculer une enveloppe initiale**.

Ainsi ce que j'ai implanté sont les *vec*3 (pour représenter les points en 3 dimensions), des opérations arithmétiques sur ces mêmes *vec*3, des opérations sur les listes, les *he* et les *dcel* avec leurs méthodes (à l'exception de l'opération de suppression de face).

Des détails d'implantation ont été revus par rapport à la version en JavaScript L'exemple le plus parlant est celui d'avoir utilisé la valeur -1 à chaque fois qu'il y a un indice qui peut être non-défini. En Coq (et en programmation fonctionnelle de manière générale), on peut faire mieux que cela en utilisant des monades. Les monades apportent une réelle sémantique, qui est explicite — une valeur peut-être non-définie —, contrairement au fait de choisir une valeur constante arbitraire, qui elle serait spécifique à l'implantation.

J'ai étendu l'utilisation de monades partout où cela me paraissait pertinent. Par exemple, pour les opérations d'accès par indice dans une liste. L'intérêt est aussi d'avoir des garde-fous à plusieurs endroits du programme.

5.2 Extraction du code Coq

Dans l'introduction nous avons vu que Coq n'est pas fait pour exporter ou importer des fichiers, dès lors qu'il ne s'agit pas de fichiers Coq compilés. Il est aussi très limité en termes de capacités d'exécution de code.

Cependant, l'un de ses modules permet de faire ce que l'on appelle de **l'extraction de code**. Cette opération consiste à transformer du code source écrit en Coq en un code source écrit dans un autre langage fonctionnel, au choix. Ce que l'on voudrait donc c'est de pouvoir compiler ce code extrait, pour pouvoir ensuite l'exécuter et se convaincre visuellement de son fonctionnement.

5.2.1 Choix du langage d'extraction

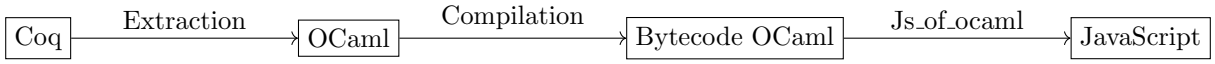
Les langages d'extraction supportés par Coq sont au nombre de quatre. À savoir : OCaml, Haskell, Scheme et JSON (qui n'est pas un langage de programmation, mais de stockage de données). Vient alors la question de choisir le langage d'extraction qui sera utilisé.

JSON Ma première idée fut de choisir le JSON. En effet, je n'ai aucune connaissance des autres langages disponibles, et j'ai d'abord estimé qu'il serait plus long pour moi de me former à l'un de ceux-ci. De plus, le JSON est extrêmement simple à comprendre et à utiliser, il le serait d'autant plus lorsqu'il s'agira de le raccorder à ce que j'avais déjà développé en JavaScript.

Seulement voilà, le JSON est un format de stockage de données uniquement, et donc l'agencement à l'intérieur d'un fichier est purement arbitraire. Hors l'extraction de Coq vers ce format n'est absolument pas documenté. Il n'y a même aucune assurance pour que le code extrait soit correct.

Faire la rétro-ingénierie des fichiers extraits depuis Coq aurait été d'une part difficile, mais en plus excessivement long à réaliser, sans aucune garantie de succès. Je n'ai donc pas maintenu ce choix.

OCaml OCaml était ma seconde option. Bien que je ne connaisse pas ce langage, j'ai découvert l'existence d'un compilateur appelé Js_of_ocaml, qui permet de compiler du bytecode OCaml vers du JavaScript.



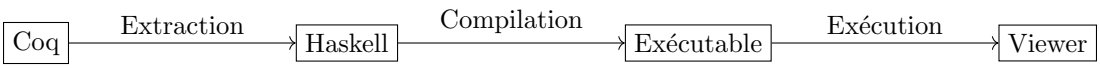
Sur le papier c'était clairement une bonne solution puisqu'elle aurait permis l'utilisation de ce que j'avais déjà fait auparavant en termes d'affichage et d'interface en JavaScript. Malheureusement, l'installation et le paramétrage d'un tel environnement était très chronophage et mes quelques essais successifs ne m'ont pas permis d'obtenir quoi que ce soit d'utilisable.

Haskell et Scheme Qu'en est-il des autres langages supportés à l'extration ? Je ne les connais pas mieux que OCaml, cependant mon choix se portera sur **Haskell** et ce pour les raisons (subjectives) suivantes :

— Sa documentation (Hoogle) me parait être la plus accessible.

— Il a une grande communauté de développeurs, donc potentiellement plus de personnes qui rencontrent les mêmes difficultés que moi.

Au final mon implantation suit le diagramme suivant pour l'exécution en Haskell. On pourra noter le "Viewer" à droite, c'est un programme d'affichage simplifié que j'ai écrit en C pour visualiser des points et des maillages triangulaire. Réutiliser ce que j'avais déjà programmé (section 4.6) aurait été contraignant, sachant que JavaScript impose de passer par l'interface graphique pour charger des fichiers, ce qui n'est pas le cas avec le Viewer.



5.2.2 Extraction de Coq vers Haskell

L'extraction de code source depuis Coq est une procédure relativement simple mais avec des contraintes assez particulières. De fait, nativement Coq n'implante pas l'extraction de tous les types et structures de données. Le problème se pose alors dans notre cas pour les types de données `nat` (entiers naturels), `bool` et `float`. Des opérations aussi simples, telles que l'addition, la soustraction, le moins unaire de nombres flottants, ou encore la déclaration de constantes flottantes sont tout simplement indéfinies lors de l'extraction.

Une grande partie de mon travail ici aura donc été d'écrire toutes les règles d'extraction indéfinie de Coq vers Haskell. Des exemples donnés page 25 de [5] m'ont bien aidé à comprendre la syntaxe de ces instructions. Ce travail nécessite d'assimiler aussi bien le fonctionnement et la syntaxe de Coq, que celle de Haskell, qui est bien différente.

5.3 Optimisations et performances

Je n'ai pas eu beaucoup de temps pour évaluer et comparer les performances avec cette version du programme. En revanche, ce qui m'est très vite devenu apparent est que le programme est significativement plus lent que la version en JavaScript. J'ai effectué un test simple sur un même jeu de données (3000 points répartis uniformément), en évaluant uniquement le temps de calcul de l'enveloppe initiale dans les deux cas.

— En JavaScript : l'ordre de grandeur en temps est de 160 millisecondes.

— En Haskell : il est de 3000 millisecondes.

Cette différence n'est pas négligeable, surtout quand on sait que JavaScript n'est pas réputé pour être ce qu'il y a de plus performant.

Dans un premier temps j'ai apporté une optimisation en ce qui concerne les accès aux tableaux, en modifiant des règles d'extraction vers Haskell. Le gain est net puisque cette fois-ci le temps de calcul est de 1300 millisecondes, mais c'est encore bien loin de ce que l'on pourrait attendre.

Une dernière méthode consiste à indiquer au compilateur de Haskell que l'on souhaite une compilation plus poussée. On arrive donc à un temps de calcul de 930 millisecondes.

Je n'ai pas exploré plus que cela l'optimisation, mais il n'est pas impossible que l'arithmétique sur les entiers naturels, telle qu'obtenue après extraction, soit la partie fautive de l'algorithme.

5.4 Visualisation de la sortie du programme - Viewer

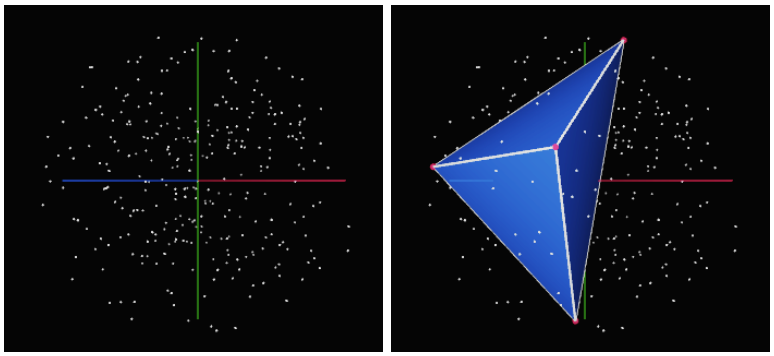


FIGURE 10 – L'enveloppe initiale calculée à l'aide du programme Haskell extrait depuis l'implantation en Coq. Ici on se sert du programme de visualisation écrit en C pour visualiser les points et le maillage triangulaire.

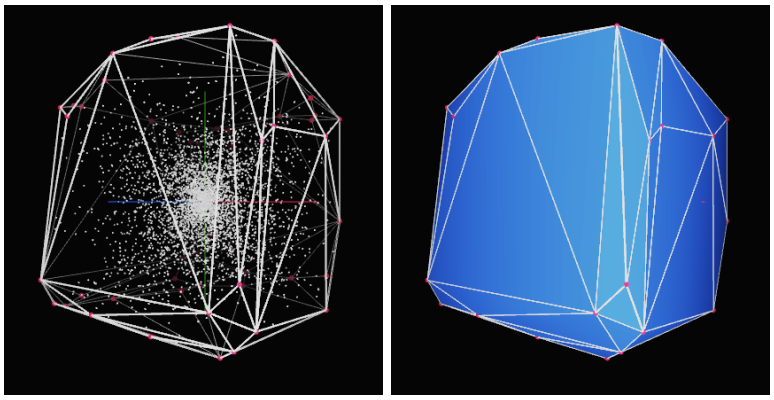


FIGURE 11 – Le programme de visualisation fonctionne également avec les enveloppes générées par la version JavaScript de Quickhull 3D, moyennant la conversion de l'enveloppe convexe et des points dans un format spécifique.

6 Conclusion

6.1 Pour résumer

Dans le cadre de ce travail recherche, pour me familiariser avec le sujet, j'ai d'abord implanté Quickhull en deux dimensions dans un style fonctionnel en JavaScript. J'y ai greffé une interface permettant de visualiser aussi bien l'enveloppe calculée que les étapes de sa construction.

Dans un second temps, j'ai travaillé sur la version tridimensionnelle de Quickhull. Outre les difficultés inhérentes au passage à la dimension supérieure, j'ai dû réfléchir à concevoir des structures de données complexes — pour représenter l'enveloppe calculée et les sous-ensembles de points —, utilisables dans un contexte de programmation fonctionnelle. Cette implantation est aussi accompagnée de son interface graphique, ici indispensable pour ne serait-ce que se convaincre du bon fonctionnement de l'algorithme. J'en ai profité, au passage, pour faire quelques évaluations de performances en temps de calcul.

La dernière partie de mon travail a consisté à développer une preuve de concept. Elle a pour objectif de montrer qu'il est possible d'avoir une implantation en Coq de Quickhull en trois dimensions, tout en proposant de visualiser la sortie du programme dans un affichage 3D — chose qui n'est pas évidente compte-tenu des limitations de Coq. J'ai donc proposé une implantation de la première étape de l'algorithme Quickhull en Coq, avec extraction et exécution du code en Haskell. Un programme de visualisation (le Viewer) permet de se convaincre de son bon fonctionnement.

6.2 Si c'était à refaire

Mon sujet de TER est un sujet plutôt libre. Et parmi tous les choix et les approches que j'ai pu aborder pour y répondre, avec le recul il ne me semble pas qu'ils aient tous été les plus pertinents.

Travailler sur l'algorithme Quickhull en particulier pouvait être particulièrement intéressant dans la mesure où, en théorie, le paradigme *diviser pour régner* était exploitable. De cette manière, on peut alors autoriser la parallélisation, et donc une obtenir une meilleure utilisation des ressources informatiques. Mais cela n'est pas le cas ici, nous l'avons vu, Quickhull en trois dimensions a un fonctionnement surtout itératif. Pourtant, il existe bel et bien des algorithmes de calcul de l'enveloppe convexe à trois dimensions en *diviser pour régner* [7]. Un autre algorithme, possiblement plus intéressant, aurait alors pu faire l'objet de ce travail d'implantation.

Un autre axe d'amélioration possible porte sur le fait d'utiliser JavaScript. Je l'ai choisi par facilité et méconnaissance d'un autre langage. Mais je pense que son principal défaut réside dans la lisibilité du code que j'ai écrit. JavaScript est un langage faiblement typé, cela veut dire que le type des variables n'est pas explicite. Pire encore, il y a beaucoup de conversions implicites et les types sont dynamiques. Hors pour le travail de ré-écriture en Coq, compte-tenu de ces aspects, le fait de repartir de la version JavaScript est une grande source de confusion. S'il fallait le refaire je choisirais sûrement un langage tel que le C++, ou alors dans l'idéal l'OCaml, langage dans lequel Coq a lui-même été écrit.

Enfin, plus un regret qu'autre chose, je n'ai pas été en mesure de proposer un programme pour l'affichage qui soit aisément maintenable ou évolutif. Le code n'est pas le plus propre qu'il soit, pas documenté, et il a été développé sur mesure en fonction de ce qui m'intéressait d'afficher. Si je devais reprendre cette partie du travail, je consacrerais bien plus de temps pour le rendre, au moins, compréhensible et lisible. Et dans l'idéal, mieux structuré pour permettre des évolutions.

6.3 Pour continuer

En considérant que l'on maintienne le choix de Quickhull en trois dimensions comme algorithme de calcul d'enveloppe convexe, déjà il faudrait continuer l'implantation en Coq, et en améliorer la documentation au passage. Il reste encore beaucoup de travail de ce côté là.

En parallèle, plusieurs pistes sont envisageables. Soit on garde le modèle actuel d'extraction vers du Haskell. Auquel cas, il serait éventuellement intéressant de chercher à corriger les écarts en performances que l'on a pu voir section 5.3. Le Viewer pourrait aussi être grandement amélioré pour afficher les états intermédiaires de construction de l'enveloppe, tel que ce qui est fait dans la version JavaScript (section 4.6). L'autre possibilité, c'est d'explorer plus en profondeur ce qui est possible de faire avec Js_of_ocaml. Dans ce cas, on pourrait alors réutiliser l'affichage, section 4.6, pour afficher les états intermédiaires de construction de l'enveloppe sans trop de travail supplémentaire.

Références

[1] C. Bradford Barber, David P. Dobkin, and Hannu Huhdanpaa. The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM Trans. Math. Softw.*, 22(4) :469–483, dec 1996.

[2] Christophe Brun, Jean-François Dufourd, and Nicolas Magaud. Designing and proving correct a convex hull algorithm with hypermaps in Coq. *Computational Geometry*, 45(8) :436–457, October 2012.

[3] Christophe Brun, Jean-François Dufourd, and Nicolas Magaud. Formal Proof in Coq and Derivation of a Program in C++ to Compute Convex Hulls. In Jacques Fleuriot & Testsuo Ida, editor, *Automated Deduction in Geometry (Post-proceedings)*, LNCS, pages 71–88, Edinbourg, United Kingdom, September 2012. Springer.

[4] Coq development team. The coq proof assistant reference manual, version 8.11.0. `https://coq.inria.fr/refman/`, 2020.

[5] Nicolas Magaud, Agathe Chollet, and Laurent Fuchs. Formalizing a Discrete Model of the Continuum in Coq from a Discrete Geometry Perspective. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, January 2015.

[6] Jordan Smith. Quickhull 3d. `http://algolist.ru/maths/geom/convhull/qhull3d.php`.

[7] Jeffrey M. White and Kevin A. Wortman. Divide-and-conquer 3d convex hulls on the gpu, 2012.