

# Algebrizacija geometrijskih tvrđenja

## 1. Uvod

Cilj ovog projekta je program koji će sa standardnog ulaza da učitava logičke izraze koji sadrže niz relacija iz euklidske geometrije. Na primer, jedna takva relacija je kolinearnost. Primer ulaza programa je  $\text{collinear}(a, b, c) \Rightarrow \text{collinear}(b, c, a)$ , što je jednostavna tautologija u euklidskoj geometriji. Cilj projekta nije da dokaže tu tautologiju, već da ga prevede u algebarski zapis, gde se umesto relacije *collinear* i tačaka  $a, b$  i  $c$  kao objekata, pojavljuju promenljive koje predstavljaju realne brojeve, to jest  $x$  i  $y$  koordinate tačaka. Posmatrano drugačije, izraze euklidske geometrije prevodimo na izraze analitičke geometrije, za koje postoje sat rešavači u koje možemo proslediti izlaz našeg programa.

Za potpunu sliku, očekivani izlaz programa za gore pomenuti izraz je:

$$\begin{aligned} (a_x - b_x) * (b_y - c_y) &= (a_y - b_y) * (b_x - c_x) \\ \Rightarrow (b_x - c_x) * (c_y - a_y) &= (b_y - c_y) * (c_x - a_x) \end{aligned}$$

## 2. Specifikacija

Program prihvata sve logičke izraze, dok je limitiran da prihvata samo određeni skup relacija kao termove.

To su:

- $\text{collinear}(a, b, c)$  – tri tačke su kolinearne.
- $\text{parallel}(a, b, c, d)$  – prava kroz tačke  $a$  i  $b$  je paralelna pravoj kroz tačke  $c$  i  $d$ .
- $\text{perpendicular}(a, b, c, d)$  – prava kroz tačke  $a$  i  $b$  je normalna na pravu kroz tačke  $c$  i  $d$ .
- $\text{lenghts\_eq}(a, b, c, d)$  – duž od tačke  $a$  do tačke  $b$  je jednake dužine kao i duž od tačke  $c$  do tačke  $d$ .
- $\text{is\_midpoint}(a, b, c)$  – tačka  $a$  predstavlja središte duži od tačke  $b$  do tačke  $c$ .

- $\text{is\_intersection}(a, b, c, d, e)$  – tačka  $a$  predstavlja presek dve duži određene parovima tačaka  $b$  i  $c$ , to jest  $d$  i  $e$ .
- $\text{is\_equal}(a, b)$  – tačka  $a$  i tačka  $b$  su identične tačke.

### 3. Invarijante euklidske geometrije

Možemo primetiti da su sve prethodno nabrojane relacije invarijante u odnosu na operacije translacije i rotacije, to jest, neke tačke zadovoljavaju neku relaciju, i ako rotiramo ili transliramo sve tačke ravni, te iste tačke će i dalje zadovoljavati istu relaciju.

Matematički zapisano, ako je  $P$  ternarna relacija, i  $T$  operacija koja je kompozicija rotacije i translacije, onda za svake 3 tačke  $a, b, c$  važi:

$$P(a, b, c) \text{ AKKO } P(T(a), T(b), T(c))$$

Ovo svojstvo nam omogućava da izaberemo neku tačku iz skupa svih tačaka koje se pojavljuju u izrazu, i postavimo je u koordinatni početak, to jest da u izlaznoj formuli njene koordinate budu  $(0, 0)$ . Ova operacija odgovara translaciji za vektor  $AO$ , gde je  $A$  tačka koju hoćemo da fiksiramo u koordinatni početak, i tačka  $O$  prethodni koordinatni početak.

Štaviše možemo fiksirati i jednu koordinatu neke od preostalih tačaka na 0, što odgovara rotaciji oko koordinatnog početka, za ugao  $\angle xOB$ , tako da tačka  $B$  završi na  $x$  osi.

## 4. Implementacija

### 4.1. Parser

Parser je generisan koristeći generatore koda za `c++ flex` i `bison`.

Osim standardnih logičkih operacija, parser čita i specifične relacije, ali i ograničava unošenje nepoznatih relacija. Program je napisan da bude interaktivan, to jest korisnik unosi naredbe dok ne pozove naredbu *exit* koja okončava rad programa. Tokom parsiranja, u gramatici, relacije su grupisane po arnosti.

### 4.2. Translacija izraza

Sintaksno stablo koje je učitano uz pomoć pomoćnih alata sastoji se od podskupa hijerarhije klasa koja predstavlja sve moguće izraze. Postoje klase za aritmetičke izraze, koje se kreiraju tokom prvog obilaska stabla u cilju transformacije. Ovaj pristup nam omogućava da nakon zamene, određenih realnih promenljivih nulama, simplifikujemo neke izraze, kao na primer:

- $0 = 0$  se može uprostiti u logičku konstantu TRUE
- $c\_x - 0$  se može uprostiti u  $c\_x$
- $c\_x * 0$  se može uprostiti u konstantu 0.
- Standardna uprošćavanja koja uključuju logički operand nad dve vrednosti od kojih je jedna logička konstanta true.

Drugi obilazak stabla predstavlja ispisivanje uprošćenog izraza na izlaz.

#### 4.3. Uprošćavanje izraza zamenom određenih promenljivim nulom

Ova funkcionalnost je realizovana tako što se u statičkim promenljivama sačuvaju imena prve dve promenljive koje se pojavljuju tokom obilaska sintaksnog stabla, a tokom istog obilaska, svako pojavljivanje tih promenljivih se zamenjuje konstantom 0 u rezultujućem, modifikovanom sintaksnom stablu koje sadrži aritmetičketina.mastilovic@gmail.com izraze.

Po završetku svake naredbe, promenljive koje čuvaju imena varijabli koje treba fiksirati u centar koordinatnog sistema i na x osu se resetuju.

## 5. Korišćenje programa

Program se pokreće iz konzolne linije sa opcijama -h za pomoć, i -o ako želite da se u vašem izrazu izvrše “optimizacije izlaza”, to jest menjanje određenih koordinata vrednošću 0.

Nakon toga unose se naredbe u nizu razdvojene separatorom ; .