Spin Yapıya Sahip Reel Bott Manifoldları

Şule Kılıçaslan
Aslı Güçlükan İlhan

Dokuz Eylül Üniversitesi

02.09.2022

Reel Bott Manifold

- Her $j \in \{1, 2, ..., n\}$ için $B_j \longrightarrow B_{j-1}$, B_{j-1}'nin üzerindeki aşikar reel doğru demeti ile herhangi bir reel doğru demetinin Whitney toplamının projektivizasyonu olmak üzere

$$B_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow B_1 \longrightarrow \{.\}$$

dizisine, **reel Bott kulesi** denir.

- B_n:=Reel Bott Manifold

Bott Matrisi

Teorem (Choi-Masuda-Oum,2017)

B_n reel Bott manifoldu, P bir permütasyon matrisi ve D üst üçgensel bir matris olmak üzere

$$B = PDP^{-1}$$

şeklindeki B kare matrisi ile temsil edilebilir. Bu tipteki matrislere **reel Bott Matrisi** *denir.*

- $\mathfrak{B}(\mathrm{n}) :=$ bütün $n \times n$ Bott matrisleri kümesi
- $\mathrm{M(B)} :=$ B reel Bott matrisine karşılık gelen reel Bott manifoldu

  Örnek

  ❋ $B_1 : \mathbb{R}P^1 \cong S^1$

  ❋ B_2 : Torus $T^2 = M(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$, Klein Bottle $K^2 = M(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$

Dar Örtüler

$P =$ n boyutlu basit konveks politop

Tanım (Dar Örtü)

Eğer n-boyutlu pürüzsüz kapalı bir M manifoldunun yerel olarak standart $\mathbb{Z}_2^n$ etkisi altında yörünge uzayı P olursa bu manifolda P üzerine bir **dar örtü** *denir.*

P üzerindeki bir dar örtüyü $\pi : M \to P$ şeklinde gösterebiliriz.

Tanım (Davis-Januskiewicz Denklik Bağıntısı)

$\pi_1 : M_1 \to P$ *ve* $\pi_2 : M_2 \to P$, *P üzerindeki dar örtüler olsun.*

$\pi_2 \circ f = \pi_1$ *koşulunu sağlayan bir zayıf $\mathbb{Z}_2^n$-ekuvaryant homeomorfizması f varsa, M_1 ve M_2* **Davis-Januskiewicz denk***tir denir.*

- $F(P) = \{F_1, ..., F_m\} \longrightarrow P$'nin $n-1$ boyutlu yüzleri(facets) kümesi

Tanım (Karakteristik Fonksiyon)

$\lambda : F(P) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$ *fonksiyonu aşağıdaki tekil olmama (non-singularity):*

$$F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \langle \lambda(F_{i_1}), \ldots, \lambda(F_{i_n}) \rangle = \mathbb{Z}_2^n$$

koşulunu sağlıyorsa bu fonksiyona P üzerinde bir **karakteristik fonksiyon** *denir.*

$GL(n, \mathbb{Z}_2)$ genel lineer grubunun P üzerindeki karakteristik fonksiyonlar kümesine bileşkeyle etkisi serbest bir etkidir.

Teorem (Davis-Januszkiewicz,1991)

$GL(n, \mathbb{Z}_2)$'nun etkisinin yörünge uzayı ile P üzerindeki dar örtülerin D-J denklik sınıfları arasında birebir eşleme vardır.

λ, P'nin karakteristik fonksiyonu; Λ da P'nin fesetlerinin sıralanışından elde edilen $(n \times m)$ matris ve $\bigcap_{i=1}^{n} F_i \neq \emptyset$ ve $\{e_1, ..., e_n\}$ standard baz olsun. O zaman

$$\Lambda = (\lambda(F_1) \cdots \lambda(F_m)) = (I_n | A)$$

$I_n := (n \times n)$ birim matris
$A := (n \times (m - n))$ matris

$$\lambda(F_i) = \begin{cases} e_i, & i \leq n \\ \sum_j a_{ji} e_j & i > n. \end{cases}$$

I^n üzerindeki Dar Örtüler

- $P := I^n$ olmak üzere , I^n'nin (n-1)-boyutlu yüzleri sayısı *2n* olduğu için Λ matrisi $n \times 2n$, A matrisi ise $n \times n$ boyutludur.

- (n-1)-boyutlu yüzleri $F_j \cap F_{n+j} = \emptyset$ olacak şekilde isimlendirelim.

Sonuç (Choi,2008)

A matrisinin tüm esas minörleri 1'dir.

- $M(n) :=$ esas minörleri 1 olan tüm n boyutlu $\mathbb{Z}_2$ matrisleri

$$\left\{ I^n \text{ üzerindeki D-J sınıfları} \leftrightarrow M(n) \right\}$$

Dar örtüler ve Graflar arasındaki ilişki

Teorem (Choi,2010)

$$\left\{ \begin{array}{lcr} I^n \textit{üzerindeki dar örtülerin} & & \textit{n-köşeli etiketlenmiş} \\ & \longleftrightarrow & \\ \textit{D-J sınıfları} & & \textit{yönlü çevrimsiz çizgeler} \end{array} \right\}$$

Teorem (Choi,2010)

$\mathfrak{B}(n)$ kümesi içindeki bir A Bott matrisi, köşeleri $\{1, 2, ..., n\}$ olan yönlü çevrimsiz çizgenin (directed acyclic graph) komşuluk matrisi ile birebir eşlenir.

n	2	3	4	5	6	7	8
D_n	3	25	543	29281	3781503	1138779265	783702329343

Table: D_n, n-köşeli etiketlenmiş yönlü çevrimsiz graf sayısını temsil eder.

$$\left\{\begin{array}{l} I^n \text{ üzerindeki dar örtülerin} \\ \text{ D-J sınıfları} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{n-köşeli etiketlenmiş} \\ \text{yönlü çevrimsiz çizgeler} \end{array}\right\}$$

Dar Örtülerin Kohomoloji Halkaları

- P = basit konveks politop
- $A = [a_{ij}]_{n\times(m-n)} \in \mathfrak{B}(\mathsf{n})$
- $I = \langle x_{i_1} \cdots x_{i_r} | F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_r} = \emptyset \rangle$ olmak üzere

P'nin Stanley-Reisner halkası, $\mathbb{Z}_2[P] = \mathbb{Z}_2[x_1, \cdots, x_m]/I$'dir.

Teorem (Davis-Januszkiewicz)

$J = \langle x_i + \sum_{j=1}^{m-n} a_{ij} x_{n+j} \ | 1 \leq i \leq n \rangle$ *olmak üzere*
$H^*(M(A), \mathbb{Z}_2)$ *ile* $\mathbb{Z}_2[P]/J$ *arasında dereceli halka izomorfizması vardır.*

$\mathcal{I}^n$'nin Kohomoloji Halkası

- $P := \mathcal{I}^n$
- $M(A)$, $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in \mathfrak{B}(\mathrm{n})$

$$H^*(M(A), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[x_1, \cdots, x_{2n}] \Big/ \langle x_j \cdot x_{n+j} \rangle, \langle x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{n+j} \ \rangle$$

Stiefel-Whitney Sınıfı

• M := n boyutlu bir dar örtü

$w_k(M)$, M'nin k-ncı Stiefel-Whitney sınıfını temsil etmek üzere M 'nin Stiefel-Whitney sınıfı toplamını şu şekilde yazalım:

$$w(M) = 1 + w_1(M) + ... + w_n(M).$$

Teorem (Davis-Januszkiewicz)

$$w(M) = \prod_{i=1}^{m}(1 + x_i)$$

Stiefel-Whitney Sınıfı

P üzerindeki $M(A)$ dar örtüsünün birinci Stiefel-Whitney sınıfını şu şekilde ifade edebiliriz:

$$w_1(M) = \sum_{i=1}^{n} (1 + A_i \cdot A_i) \cdot x_{i+n} \quad mod(I).$$

Denklemdeki A_i, karşılık gelen A matrisinin i-inci sütununu temsil eder.

Sonuç

M dar örtüsü yönlendirilebilirdir ancak ve ancak $A_i \cdot A_i \equiv 1 \mod (2)$ ise.

Teorem (Güçlükan İlhan,Gürbüzer)

P üzerindeki M(A) dar örtüsünün ikinci Stiefel-Whitney sınıfı şu şekildedir:

$$w_2(M) = \sum_{i=1}^{m-n} \alpha_i \cdot x_{i+n}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq m-n} \beta_{ij} \cdot x_{i+n} \cdot x_{j+n} \ ,$$

$$\alpha_i = \binom{1 + A_i \cdot A_i}{2} \text{ ve } \beta_{ij} = (1 + A_i \cdot A_i)(1 + A_j \cdot A_j) + A_i \cdot A_j$$

Teorem (Güçlükan İlhan,Gürbüzer)

$M(A)$ reel Bott manifoldu Spin bir yapıya sahiptir ancak ve ancak aşağıdaki koşulları sağlarsa:

- $A_i \cdot A_i \equiv 1 \mod (2)$
- $A_i \cdot A_j + \frac{v_{ij} \cdot (A_i \cdot A_i + 1) + v_{ji} \cdot (A_j \cdot A_j + 1)}{2} \equiv 0 \mod (2)$

Örnek

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

İlk koşulu sağladığı için yönlendirilebilir; fakat ikinci koşulu koşulu sağlamadığı için bu matrise karşılık gelen Bott manifoldu Spin yapıya sahip değildir diyebiliriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu matris ise yukarıdaki teoremdeki iki koşulu da sağladığı için karşılık gelen Bott manifoldu için de Spin bir yapıya sahiptir diyebiliriz.

Bazı Gözlem ve Sonuçlar

n	dag	dag with spin	generated	spin	type
2	2	1	3	1	1
3	6	2	25	4	2
4	31	4	543	43	4
5	302	7	29281	256	7
6	5984	19	3781503	4381	19

dag = directed acyclic digraph

generated = labeled acyclic digraph

Referanslar

[1] M. Grossberg and Y. Karshon. Bott towers, complete integrability, and the extended character of representations, *Duke Math. J. 76* 23-58 (1994).

[2] Choi, S., Masuda, M., Suh, D. Y. (2010). QUASITORIC MANIFOLDS OVER A PRODUCT OF SIMPLICES Dedicated to Professor Takao Matumoto on his sixtieth birthday. In Osaka J. Math

[3] Choi, S., Masuda, M., Oum, S. (2010). Classification of real Bott manifolds and acyclic digraphs