Hence $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ is the required invertible matrix, where $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ is a diagonal matrix.

Example-28 Let $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ be a matrix. Find the eigenvalues and associated eigenvectors of B. Also find an invertible matrix P such that $P^{-1}BP$ is a diagonal matrix. [মনে কর, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ একটি ম্যাট্রিক্স। ইহার আইগেন মান ও সংশ্লিষ্ট আইগেন ভেক্টর নির্ণয় কর। P নামক বিপরীতায়ন ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর যেন $P^{-1}BP$ একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স হয়।]

[NUH '03, '04]

Solution The characteristic polynomial of B is

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda - 2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)\{(\lambda - 2)(\lambda - 4) + 1\} + 2\{-(\lambda - 4) - 1\} - 2\{1 - 1(\lambda - 2)\}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) - 2\lambda + 6 - 6 + 2\lambda$$

$$= \lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9$$

$$= \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda^2 + 6\lambda + 9\lambda - 9$$

$$= \lambda^2(\lambda - 1) - 6\lambda(\lambda - 1) + 9(\lambda - 1)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$$

Therefore, the characteristic equation of B is $(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2 = 0$

$$\therefore \lambda = 1, 3, 3.$$

So the eigenvalues of the matrix B are $\lambda = 1$ and 3.

Now, to find the eigenvectors $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ corresponding to λ, solve the homogeneous linear system represented by $(\lambda I - A)\mathbf{v} = 0$

i.e., $\begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\lambda-1)x - 2y - 2z = 0 \\ -x + (\lambda-2)y + z = 0 \quad \text{.............. (1)} \\ x - y + (\lambda-4)z = 0 \end{cases}$$

When $\lambda = 1$, we get from (1)

$$\begin{cases} -2y - 2z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad \text{.. (2)}$$

This system has nonzero solution. Here z is a free variable, so that only one independent solution of (2) exists. Let $z = 1$, then $x = 2, y = -1$.

So an eigenvector of B associated with the eigenvalue $\lambda = 1$ is $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

When $\lambda = 3$, we get from (1)

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \Rightarrow x - y - z = 0 \quad \text{.............. (3)} \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

This system has nonzero solution. Here y and z are free variables, so that only two independent solution of (2) exists. Let $y = s$, $z = t$; $s\,; t \in \mathbb{R}$ $(s \neq 0,\ t \neq 0)$. Then $x = s + t$.

Thus the solution of the above system is $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

So two independent eigenvectors of B associated with the eigenvalue $\lambda = 3$ are

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Here, the three independent eigenvectors are $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Let the invertable matrix $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, which diagonalizes B.

Now, $|P| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-0) - 1(-1-0) + 1(0-1)$

$$= 2 + 1 - 1 = 2 \neq 0$$

The co-factors of P are: $P_{11} = 1$, $P_{12} = 1$, $P_{13} = -1$,
$P_{21} = -1$, $P_{22} = 1$, $P_{23} = 1$,
$P_{31} = -1$, $P_{32} = -1$, $P_{33} = 3$.

$$\therefore\ P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Here, $P^{-1}BP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

Hence, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is the invertiable matrix where,

$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (Ans)

So two independent eigenvectors of B associated with the eigenvalue $\lambda = 3$ are

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Here, the three independent eigenvectors are $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Let the invertable matrix $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, which diagonalizes B.

$$\text{Now, } |P| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-0) - 1(-1-0) + 1(0-1)$$

$$= 2 + 1 - 1 = 2 \neq 0$$

The co-factors of P are: $P_{11} = 1$, $P_{12} = 1$, $P_{13} = -1$,

$P_{21} = -1$, $P_{22} = 1$, $P_{23} = 1$,

$P_{31} = -1$, $P_{32} = -1$, $P_{33} = 3$.

$$\therefore P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Here, } P^{-1}BP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D$$

Hence, $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is the invertiable matrix where,

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ (Ans)}$$

Theorem-2 : If S is a finite set which is the generator of $V(F)$, then any subset of S will be the basis of $V(F)$. [একটি সসীম সেট S যদি $V(F)$ এর সৃজক হয়, তবে S এর একটি উপসেট $V(F)$ এর ভিত্তি হবে।] [DUH '95]

Proof : Let $S = \{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n\}$ be the finite set which is linearly independent finite set. Then S will be the basis of $V(F)$, if S is linearly dependent then the vector $u_i \in S$ can be expressed as the linear combination of the preceding vectors $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_{i-1}$. Then the subset $S - \{\mathbf{u}_i\}$ will be the generator of $V(F)$.

If the subset $S - \{\mathbf{u}_i\}$ is linearly independent then it will be the basis of $V(F)$. Continuing this process, we will get a subset of S which is linearly independent and will be the generator of $V(F)$. So the subset of S is a basis of $V(F)$.

[মনে করি, $V(F)$ ভেক্টর জগতের একটি সসীম সেট $S = \{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n\}$ যা যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল। তাহলে S, $V(F)$ এর ভিত্তি হবে, যদি S যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল হয় তবে যে কোন ভেক্টর $u_i \in S$ কে তার পূর্ববর্তী ভেক্টর $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_{i-1}$ এর যোগাশ্রয়ী সমাবেশরূপে প্রকাশ করা যাবে, তাহলে উপসেট $S - \{\mathbf{u}_i\}$, $V(F)$ এর সৃজক হবে। অতএব $S - \{\mathbf{u}_i\}$ উপসেটটি যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হলে ইহা $V(F)$ এর ভিত্তি হবে। এইভাবে অগ্রসর হতে থাকলে S এর একটি উপসেট পাব যা যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হবে এবং $V(F)$ এর সৃজক হবে। অতএব S এর উপসেট $V(F)$ এর একটি ভিত্তি হবে।] [Proved]

Theorem-3 : Every basis of a finite dimensional vector space has the same number of vectors. [সসীম মাত্রার ভেক্টর জগতের প্রত্যেক ভিত্তিতে সমান সংখ্যক ভেক্টর থাকে।]

[NUH '12; RUH' 07, '09, '88, '91; DUH '90, '83 CUH '82, JUH '89]

Proof : Let $S = \{u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m\}$ and $T = \{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$ be two basis of finite dimensional vector space $V(F)$. We have to show that $m = n$. Since S and T be the basis of $V(F)$ then

(i) both S and T are the generator of $V(F)$

(ii) both S and T are linearly independent

Now if S is the generator of $V(F)$ and T is linearly independent. Then by Exchange lemma,

$$m \geq n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Similarly, if S is linearly independent and T is the generator of $V(F)$, we have from the same lemma

$$n \geq m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

From equation (1) and (2), we get $m = n$ [Proved]

[মনে করি, সসীম মাত্রার ভেক্টর জগত $V(F)$ এর দুইটি ভিত্তি $S = \{u_1, u_2, \ldots\ldots u_m\}$ এবং $T = \{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n\}$. আমাদের দেখাতে হবে যে $m = n$। যেহেতু উভয়ই $V(F)$ এর ভিত্তি, তাহলে

(i) S এবং T উভয়ই $V(F)$ এর সৃজক হবে।

(ii) S এবং T উভয়ই যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হবে।

এখন যদি S, $V(F)$ এর জাতক এবং T যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হয় তবে বিনিময় প্রতিজ্ঞা হতে পাই,

$m \geq n$ .... (1)

আবার যদি S যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল এবং T, $V(F)$ এর জাতক হয় তবে একই প্রতীজ্ঞা হতে পাই,

$n \geq m$ .... (2)

সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাই, $m = n$] [প্রমাণিত]

Theorem-4 : Let $V(F)$ be the n-dimensional vector space, then any set of $(n + 1)$ or more vectors is linearly dependent. [মনে করি $V(F)$, n-মাত্রিক ভেক্টর জগত, তাহলে যে কোন $(n + 1)$ সংখ্যক বা তার চেয়ে বেশি ভেক্টরের সেট যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল হবে।]

Proof : Let $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots\ldots\ldots, \mathbf{u}_n\}$ be a basis of $V(F)$ and let $T = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots, \mathbf{v}_r\}$ be a subset of $V(F)$, where $r > n$. We have to show that T is linearly dependent.

Let T be linearly independent. Then by Exchange Lemma, the number of vectors in S is greater or equal to the number of vectors of T.

i.e., $n \geq r$ which contradicts the hypothesis. So T can not be linearly independent. That is, T is linearly dependent.

[মনে করি, $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots\ldots, \mathbf{u}_n\}$, $V(F)$ এর একটি ভিত্তি এবং $T = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\ldots\ldots, \mathbf{v}_r\}$ $V(F)$ এর একটি উপসেট। আমাদের দেখাতে হবে যে, T যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল যেখানে $r > n$.

মনে করি, T যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল; তাহলে বিনিময় প্রতীজ্ঞা অনুসারে S এর ভেক্টর সংখ্যা T এর ভেক্টর সংখ্যার চেয়ে বড় বা সমান হবে। অর্থাৎ $n \geq r$ যা শর্ত বিরোধী। অতএব T যোগাশ্রয়ী অনির্ভরশীল হতে পারে না। অর্থাৎ T যোগাশ্রয়ী নির্ভরশীল।] [Proved]

Theorem-5 : If U and W be the two finite dimensional subspace of $V(F)$ then [যদি U এবং W, $V(F)$ এর দুইটি সসীম মাত্রার উপজগত হয়, তবে]

$\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$.

[NUH '10, '06, '96, '97; NU (Prel). '05; DUH '07, '92; RUH '05, '08; JNUH '05, '06, '12]

Proof : Since U and W are subspaces, $U \cap W$ will be the subspace of both U and W.

Let $\dim U = m$, $\dim W = n$ and $\dim (U \cap W) = r$. Let $\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_r\}$ be a basis of $(U \cap W)$. Now extend the basis of U and W in the form $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_{m-r}\}$ and $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r, w_1, w_2, \ldots\ldots, w_{n-r}\}$ respectively. So the union of the basis of U and W is A (say).

$A = \{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots u_{m-r}, w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, w_{n-r}\}$ .... (1)

A has exactly $r + m - r + n - r = m + n - r$ elements which proves the theorem.

Now we have to show that A is a basis of $U + W$.

Now since $\{v_i, u_j\}$ generates U and $\{v_i, w_k\}$ generates W, then the union $A = \{v_i, u_j, w_k\}$ will generate $(U + W)$.

Now we have to show that they are linearly independent.

Now $\forall\, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_{m-r}, z_1, z_2, \ldots\ldots\ldots, z_{n-r} \in F$,

Let
$$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots\ldots + x_rv_r + y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots\ldots\ldots + y_{m-r}u_{m-r}$$
$$+ z_1w_1 + z_2w_2 + \ldots\ldots + z_{n-r}w_{n-r} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\Rightarrow x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots\ldots + x_rv_r + y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots + y_{m-r}u_{m-r} = -z_1w_1 - z_2w_2 -$$
$$\ldots\ldots\ldots - z_{n-r}w_{n-r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

But L.H.S. of (3) is a vector of U and R.H.S. of (3) is a vector of W. This implies that both belongs to $(U \cap W)$.

Therefore for any scalars $t_1, t_2, \ldots\ldots\ldots, t_r \in F$

$$-z_1w_1 - z_2w_2 - \ldots\ldots - z_{n-r}w_{n-r} = t_1v_1 + t_2v_2 + \ldots\ldots\ldots + t_rv_r$$

$$\Rightarrow t_1v_1 + t_2v_2 + \ldots\ldots\ldots + t_rv_r + z_1w_1 + z_2w_2 + \ldots\ldots + z_{n-r}w_{n-r} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

But $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r, w_1, w_2, \ldots\ldots, w_{n-r}\}$ is a basis of W and is linearly independent.

$$\Rightarrow z_1 = z_2 = \ldots\ldots = z_{n-r} = t_1 = t_2 = \ldots\ldots\ldots = t_r = 0$$

Then (2) becomes
$$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots\ldots + x_rv_r + y_1u_1 + y_2u_2 + \ldots\ldots$$
$$+ y_{m-r}u_{m-r} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

But $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_{m-r}\}$ is a basis of U and so linearly independent.

Then $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_r = y_1 = y_2 = \ldots\ldots\ldots = y_{m-r} = 0$

$\Rightarrow A = \{v_i, u_j, w_k\}$ is linearly independent

$\Rightarrow A$ is a basis of $U + W$

$\Rightarrow \dim(U + W) = m + n - r$

$\therefore \dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ [Proved]

[যেহেতু U এবং W উপজগত, অতএব $(U \cap W)$, U এবং W উভয়েরই উপজগত হবে।

মনে করি, $\dim U = m$, $\dim W = n$, $\dim(U \cap W) = r$ এবং $\{v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r\}$, $(U \cap W)$ এর একটি ভিত্তি।

তাহলে $\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_r\}$, U এবং W এর ভিত্তি হবে।

U এবং W এর ভিত্তিকে বর্ধিত করে পাই,

U এর বর্ধিত ভিত্তি $\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_{m-r}\}$

W এর বর্ধিত ভিত্তি $\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_r, w_1, w_2, \ldots\ldots, w_{n-r}\}$

তাহলে U এবং W এর বর্ধিত ভিত্তির সংযোগ A (মনে করি)

$$A = \{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_r, u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_{m-r}, w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots, w_{n-r}\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

এখানে লক্ষণীয় যে A এর উপাদান সংখ্যা $= r + m - r + n - r$

যা সূত্রটি প্রমাণ করে।