Об ортонормированности системы собственных функций одной спектральной задачи

Введем основные пространства, которые нами будут использоваться. Пусть $x = (x_1, ..., x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, – открытая ограниченная (односвязная) область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $m \geq 0$ – целое число,

$$W_2^m(\Omega) = \left\{v|\ \partial_x^{|\alpha|}v \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq m\right\},\ \text{ где }\ \partial_x^{|\alpha|} = \partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_d}^{\alpha_d},\ |\alpha| = \sum_{j=1}^{d}\alpha_j,\ \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial_{x_j}},$$

$$\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega) = \left\{v|\ v \in W_2^m(\Omega),\ \partial_{\vec{n}}^j v = 0,\ j = 0, 1, 2..., m-1,\ \vec{n} - \text{ внешняя нормаль к } \partial\Omega\right\}.$$

В остальном, в обозначениях пространств мы будем следовать монографиям [17], [18], [19], и [20].

1 Постановка спектральной задачи

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, ..., x_d)|\ 0 < x_k < l,\ k = 1, ..., d\} \subset \mathbb{R}^d$ – d-мерный куб с ребром длины, равной l. Рассмотрим следующую спектральную задачу для дифференциального оператора четвертого порядка.

Задача 1.1.

$$\sum_{k=1}^{d}\partial_{x_k}^4 u(x) = \lambda^2(-\Delta)u(x),\ \ x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(x) = \partial_{\vec{n}}u(x) = 0,\ \ x \in \partial\Omega, \tag{1.2}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Введем следующие пространства:

Определение 1.1. *Обозначим через $V_1(\Omega)$ и $V_2(\Omega)$ гильбертовы пространства с соответствующими скалярными произведениями*

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}\ \forall\, u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{1.3}$$

$$((u, v)) \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{d}\left(\partial_{x_k}^2 u, \partial_{x_k}^2 v\right)_{L^2(\Omega)}\ \ \forall\, u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega), \tag{1.4}$$

и нормами

$$\|u\|_{V_1(\Omega)} = \sqrt{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2},\ \ \|u\|_{V_2(\Omega)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{d}\|\partial_{x_k}^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2}. \tag{1.5}$$

Определение 1.2. *Обозначим через $V_{1k}(0, l)$ и $V_{2k}(0, l)$ гильбертовы пространства с соответствующими скалярными произведениями*

$$(\alpha'(x_k), \beta'(x_k))_{L^2(0,l)}\ \forall\, \alpha(x_k), \beta(x_k) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, l),\ \ k = 1, ..., d, \tag{1.6}$$

$$((\alpha(x_k),\beta(x_k))) \stackrel{def}{=} (\alpha''(x_k),\beta''(x_k))_{L^2(0,l)} \;\; \forall\, \alpha(x_k),\beta(x_k) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l), \;\; k=1,...,d, \tag{1.7}$$

и нормами

$$\|\alpha(x_k)\|_{V_{1k}(0,l)} = \sqrt{\|\alpha'(x_k)\|^2_{L^2(0,l)}}, \;\; \|\alpha(x_k)\|_{V_{2k}(0,l)} = \sqrt{\|\alpha''(x_k)\|^2_{L^2(0,l)}}. \tag{1.8}$$

Очевидно, что нормы (1.5), (1.8) индуцируемые соответственно скалярными произведениями (1.3)–(1.4) и (1.6)–(1.7), определяют эквивалентные нормы соответственно в пространствах $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)$.

Предложение 1.1. *В спектральной задаче* (1.1)–(1.2) *оператор четвертого порядка является эллиптическим и обладает свойствами симметричности и положительной определенности в пространстве* $V_2(\Omega)$. *Поэтому, собственные значения* $\{\lambda_n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$ *этой задачи являются действительными и расположены на положительной полуоси. Причем, наименьшее собственное значение отделено от нуля, т.е.* $\lambda_1 \geq \delta > 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.2. *Спектральная задача* (1.1)–(1.2) *обладает совокупностью "обобщенных собственных функций"* $\{u_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$, *принадлежащая пространству* $V_2(\Omega)$, *образует ортонормированный базис в пространстве* $V_1(\Omega)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Спектральная задача* (1.1)–(1.2) *имеет следующее решение*

$$u_n(x) = X_{1n}(x_1)X_{2n}(x_2)...X_{dn}(x_d), \quad \lambda_n^2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.9}$$

где $X_{1n}(x_1) = \Phi_n(y)_{|y=x_1},\ X_{2n}(x_2) = \Phi_n(y)_{|y=x_2}, ..., X_{dn}(x_d) = \Phi_n(y)_{|y=x_d},$:

$$\begin{cases} \Phi_{2n-1}(y) = \sin^2\frac{\lambda_{2n-1}y}{2},\ \lambda_{2n-1}^2 = \left(\frac{2(2n-1)\pi}{l}\right)^2,\ \ n \in \mathbb{N}, \\ \Phi_{2n}(y) = [\lambda_{2n}l - \sin\lambda_{2n}l]\sin^2\frac{\lambda_{2n}y}{2} - \sin^2\frac{\lambda_{2n}l}{2}\left[\lambda_{2n}y - \sin\lambda_{2n}y\right], \\ \qquad\qquad \lambda_{2n}^2 = \left(\frac{2\nu_n}{l}\right)^2,\ \ n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1.10}$$

и $\{\nu_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *являются положительными корнями уравнения* $\tan\nu = \nu,\ n \in \mathbb{N}$.

Расположение собственных значений на положительной полуоси приведено на Figure 1.1 (здесь $l = 2$). Из Figure 1.1 имеем:

$$0 < \lambda_1 = \pi < \lambda_2 = \frac{3\pi}{2} - \varepsilon_1 < \lambda_3 = 2\pi < \lambda_4 = \frac{5\pi}{2} - \varepsilon_2$$

$$< \lambda_5 = 3\pi < \lambda_6 = \frac{7\pi}{2} - \varepsilon_3 < \lambda_7 = 4\pi < ...$$

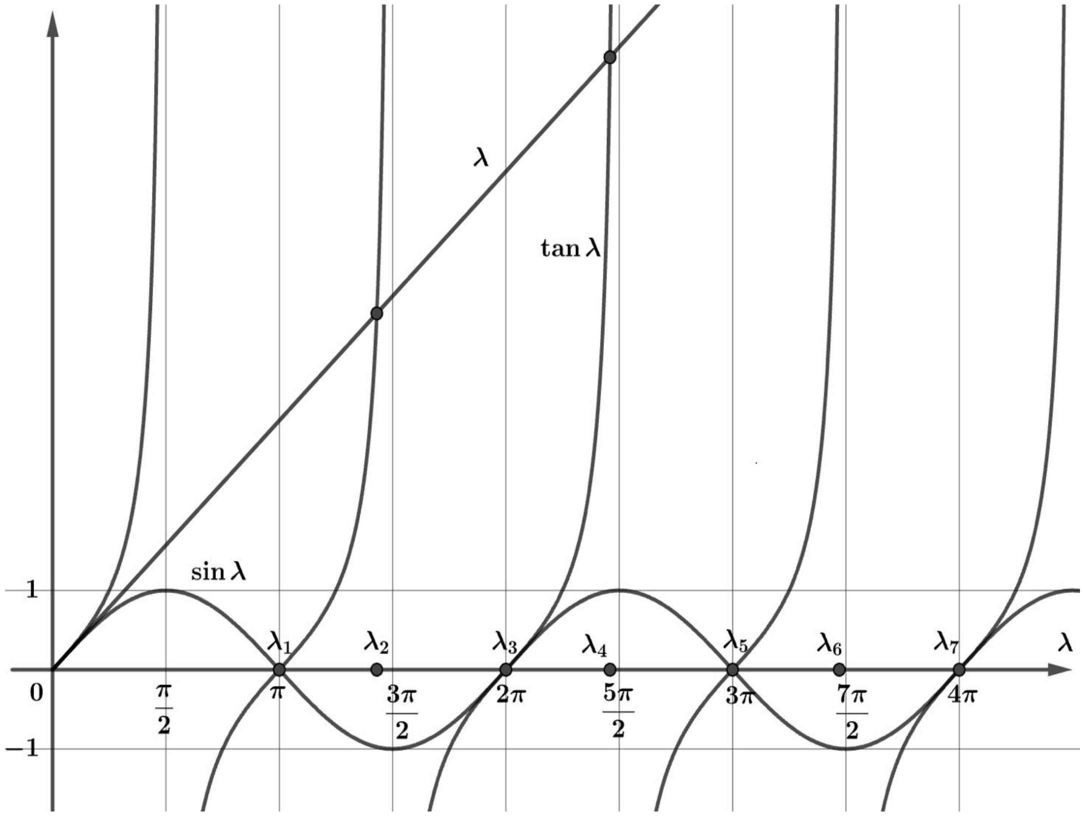

Figure 2.1. Положительные корни уравнений (при $l = 2$):
$\tan \nu_n = \nu_n, \ \ \nu_n = \frac{\lambda_n l}{2} = \lambda_n; \ \ \sin \lambda_n = 0, \ \ n \in \mathbb{N}.$

Далее, из теоремы 1.1 получаем:

Следствие 1.1. *Собственные значения* $\{\lambda_{2n}, \ n \in \mathbb{N}\}$ *упорядочены следующим образом*

$$0 < \lambda_{2n} = \frac{2\nu_n}{l} < \frac{(2n+1)\pi}{2}, \ \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

$$\lambda_{2n} = \frac{2\nu_n}{l} \to \frac{(2n+1)\pi}{2}, \ \ n \to \infty,$$

где $\{\nu_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ *являются положительными корнями уравнения* $\tan \nu = \nu$.

2 Об ортогональности системы собственных функций (1.10) в пространстве $V_{1j}(0, l)$ (1.6)

Для этой цели найдем производные от собственных функций (1.10):

$$X_{j,2n-1} = \sin^2 \frac{\lambda_{2n-1} x_j}{2}, \ j = 1, ..., d, \ \ \lambda_{2n-1}^2 = \left(\frac{2\,(2n-1)\,\pi}{l} \right)^2, \tag{2.1}$$

$$X_{j,2n}(x) = [\lambda_{2n} l - \sin \lambda_{2n} l] \sin^2 \frac{\lambda_{2n} x_j}{2} -$$

$$- \sin^2 \frac{\lambda_{2n} l}{2} \left[\lambda_{2n} x_j - \sin \lambda_{2n} x_j \right], \ j = 1, ..., d, \ \ \lambda_{2n}^2 = \left(\frac{2\nu_n}{l} \right)^2, \tag{2.2}$$

где ν_n являются положительными корнями уравнения

$$\tan \nu_n = \nu_n. \tag{2.3}$$

Из (2.1)-(2.2), учитывая уравнение (2.3), имеем

$$X'_{j,2n-1}(x_j) = \frac{\lambda_{2n-1}}{2} \tilde{X}'_{j,2n-1}(x_j), \tag{2.4}$$

где

$$\tilde{X}'_{j,2n-1}(x_j) = \sin \lambda_{2n-1} x_j, \tag{2.5}$$

$$X'_{j,2n}(x_j) = \frac{2}{l}(\nu_n)^3 \cos^2 \nu_n \tilde{X}'_{j,2n}(x_j), \tag{2.6}$$

где

$$\tilde{X}'_{j,2n}(x_j) = \nu_n \cdot \sin \frac{2\nu_n}{l} x_j - 2\sin^2 \frac{\nu_n x_j}{l}. \tag{2.7}$$

Заметим, что не обращая внимания на коэффициенты при функциях (2.4) и (2.6), нам достаточно изучить ортогональность системы функций (2.5) и (2.7).

Пусть $m \neq n$.

1^0. Покажем, что

$$\int_0^l \tilde{X}'_{j,2n-1}(x_j)\tilde{X}'_{j,2m-1}(x_j)dx_j = 0. \tag{2.8}$$

Действительно, имеем

$$\int_0^l \tilde{X}'_{j,2n-1}(x_j)\tilde{X}'_{j,2m-1}(x_j)dx_j = \int_0^l \sin \lambda_{2n-1} x_j \cdot \sin \lambda_{2m-1} x_j dx_j =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\lambda_{2n-1} - \lambda_{2m-1}} \sin\left(\lambda_{2n-1} - \lambda_{2m-1}\right) x_j - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda_{2n-1} + \lambda_{2m-1}} \sin\left(\lambda_{2n-1} + \lambda_{2m-1}\right) x_j \right] \Big|_{x_j=0}^{x_j=l} = 0.$$

2^0. Покажем, что

$$\int_0^l \tilde{X}'_{j,2n}(x_j)\tilde{X}'_{j,2m}(x_j)\, dx_j = 0. \tag{2.9}$$

Прежде всего, левую часть соотношения (2.9) запишем в виде:

$$\int_0^l \left[\nu_n \sin \frac{2\nu_n}{l} x - 2\sin^2 \frac{\nu_n x}{l}\right] \cdot \left[\nu_m \sin \frac{2\nu_m}{l} x - 2\sin^2 \frac{\nu_m}{l} x\right] dx = \sum_{k=1}^{4} I_k. \tag{2.10}$$

Далее, последовательно вычисляем интегралы из (2.10) $I_k,\ k = 1, ..., 4$. Имеем

$$I_1 = \int_0^l \left[\nu_n \sin \frac{2\nu_n}{l} x_j \cdot \nu_m \sin \frac{2\nu_m}{l} x_j\right] dx_j =$$

$$= \frac{\nu_n \nu_m}{2} \left[\frac{l}{2(\nu_n - \nu_m)} \sin 2(\nu_n - \nu_m) - \frac{l}{2(\nu_n + \nu_m)} \sin 2(\nu_n + \nu_m) \right] =$$

$$\frac{\nu_n \nu_m}{2} \left[\frac{l}{\nu_n - \nu_m} \cdot \frac{\nu_n - \nu_m}{1 + \nu_n \nu_m} \cos^2(\nu_n - \nu_m) - \frac{l}{\nu_n + \nu_m} \cdot \frac{\nu_n + \nu_m}{1 - \nu_n \nu_m} \cos^2(\nu_n + \nu_m) \right] =$$

$$\left\| \cos^2(\nu_n + \nu_m) = \frac{1}{1 + \tan^2(\nu_n - \nu_m)} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu_n + \nu_m}{1 - \nu_n \nu_m} \right)^2} = \frac{(1 - \nu_n \nu_m)^2}{1 + \nu_n^2 + \nu_m^2 + \nu_n^2 \nu_m^2} \right\|$$

$$= \frac{\nu_n \nu_m}{2} \left[\frac{l}{1 + \nu_n \nu_m} \frac{(1 + \nu_n \nu_m)^2}{1 + \nu_n^2 + \nu_m^2 + \nu_n^2 \nu_m^2} - \frac{l}{1 - \nu_n \nu_m} \frac{(1 - \nu_n \nu_m)^2}{1 + \nu_n^2 + \nu_m^2 + \nu_n^2 \nu_m^2} \right] =$$

$$= \frac{l \nu_n^2 \nu_m^2}{1 + \nu_n^2 + \nu_m^2 + \nu_n^2 \nu_m^2}.$$

Здесь и в дальнейшем мы учитываем уравнение (2.3).

Таким образом, для интеграла I_1 имеем

$$I_1 = \frac{l \nu_n^2 \nu_m^2}{1 + \nu_n^2 + \nu_m^2 + \nu_n^2 \nu_m^2}. \tag{2.11}$$

Вычисляем интеграл I_2. Имеем

$$I_2 = -2 \int_0^l \left[\nu_n \sin \frac{2\nu_n}{l} x_j \cdot \sin^2 \frac{\nu_m}{l} x_j \right] dx_j =$$

$$= -\nu_n \int_0^l \sin \frac{2\nu_n}{l} x_j \, dx_j + \nu_n \int_0^l \sin \frac{2\nu_n}{l} x_j \cdot \cos \frac{2\nu_m}{l} x_j \, dx_j = \frac{l}{2} \cos \frac{2\nu_n}{l} x_j \Big|_{x_j=0}^{x_j=l} +$$

$$+ \frac{\nu_n}{2} \int_0^l \left[\sin \frac{2(\nu_n + \nu_m)}{l} x_j + \sin \frac{2(\nu_n - \nu_m)}{l} x_j \right] dx_j =$$

$$\frac{l}{2} \cos \frac{2\nu_n}{l} x_j \Big|_{x_j=0}^{x_j=l} - \frac{\nu_n}{2} \cdot \frac{l}{2(\nu_n + \nu_m)} \cos \frac{2(\nu_n + \nu_m)}{l} x_j \Big|_{x_j=0}^{x_j=l} -$$

$$- \frac{\nu_n}{2} \cdot \frac{l}{2(\nu_n - \nu_m)} \cos \frac{2(\nu_n - \nu_m)}{l} x_j \Big|_{x_j=0}^{x_j=l} =$$

$$= \frac{l}{2} \cos 2\nu_n - \frac{l}{2} + \frac{l \nu_n}{4(\nu_n + \nu_m)} (1 - \cos 2(\nu_n + \nu_m)) +$$

$$+ \frac{l \nu_n}{4(\nu_n - \nu_m)} (1 - \cos 2(\nu_n - \nu_m)) =$$

$$= -l \frac{\tan^2 \nu_n}{1 + \tan^2 \nu_n} + \frac{l \nu_n}{2(\nu_n + \nu_m)} \cdot \frac{\tan^2(\nu_n + \nu_m)}{1 + \tan^2(\nu_n + \nu_m)} +$$

$$+ \frac{l \nu_n}{2(\nu_n - \nu_m)} \cdot \frac{\tan^2(\nu_n - \nu_m)}{1 + \tan^2(\nu_n - \nu_m)} =$$

$$\left\|\tan^2(\nu_n+\nu_m)=\frac{(\tan\nu_n+\tan\nu_m)^2}{(1-\tan\nu_n\tan\nu_m)^2}=\frac{(\nu_n+\nu_m)^2}{(1-\nu_n\nu_m)^2}\right\|$$

$$=-\frac{l\nu_n^2}{1+\nu_n^2}+\frac{l\nu_n}{2\,(\nu_n+\nu_m)}\cdot\frac{\frac{(\nu_n+\nu_m)^2}{(1-\nu_n\nu_m)^2}}{1+\frac{(\nu_n+\nu_m)^2}{(1-\nu_n\nu_m)^2}}+\frac{l\nu_n}{2\,(\nu_n-\nu_m)}\cdot\frac{\frac{(\nu_n-\nu_m)^2}{(1-\nu_n\nu_m)^2}}{1+\frac{(\nu_n-\nu_m)^2}{(1-\nu_n\nu_m)^2}}=$$

$$=-\frac{l\nu_n^2}{1+\nu_n^2}+\frac{l\nu_n}{2}\left[\frac{\nu_n+\nu_m}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2}+\frac{\nu_n-\nu_m}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2}\right]=$$

$$=-\frac{l\nu_n^2}{1+\nu_n^2}+\frac{l\nu_n^2}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2}=-\frac{l\nu_n^2\nu_m^2}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2}.$$

Таким образом, для интеграла I_2 имеем

$$I_2=-\frac{l\nu_n^2\nu_m^2}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2}. \tag{2.12}$$

Аналогично I_2 вычисляется выражение для I_3:

$$I_3=-\frac{l\nu_n^2\nu_m^2}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2}. \tag{2.13}$$

Осталось вычислить интеграл I_4, для которого получаем

$$I_4=\int\limits_0^l\left(1-\cos\frac{2\nu_n}{l}x_j\right)\left(1-\cos\frac{2\nu_m}{l}x_j\right)dx_j=$$

$$=l-\frac{l}{2\nu_m}\sin\frac{2\nu_m}{l}x_j\Big|_{x_j=0}^{x_j=l}-\frac{l}{2\nu_n}\sin\frac{2\nu_n}{l}x_j\Big|_{x_j=0}^{x_j=l}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^l\left[\cos\frac{2(\nu_n+\nu_m}{l}x_j+\cos\frac{2(\nu_n-\nu_m}{l}x_j\right]dx_j=$$

$$=l-\frac{l}{2\nu_m}\sin\frac{2\nu_m}{l}x_j\Big|_{x_j=0}^{x_j=l}-\frac{l}{2\nu_n}\sin\frac{2\nu_n}{l}x_j\Big|_{x_j=0}^{x_j=l}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2(\nu_n+\nu_m)}\sin\frac{2(\nu_n+\nu_m)}{l}x_j\Big|_{x_j=0}^{x_j=l}+\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2(\nu_n-\nu_m)}\sin\frac{2(\nu_n-\nu_m)}{l}x_j\Big|_{x_j=0}^{x_j=l}=$$

$$=l-\frac{l}{2\nu_m}\cdot\frac{2\nu_m}{1+\nu_m^2}-\frac{l}{2\nu_n}\cdot\frac{2\nu_n}{1+\nu_n^2}+$$

$$+\frac{l}{4(\nu_n+\nu_m)}\cdot\sin 2(\nu_n+\nu_m)+\frac{l}{4(\nu_n-\nu_m)}\cdot\sin 2(\nu_n-\nu_m)=$$

$$\left\|\sin 2(\nu_n+\nu_m)=\frac{2\tan(\nu_n+\nu_m)}{1+\tan^2(\nu_n+\nu_m)}=\right.$$

$$\left.=\frac{2(\nu_n+\nu_m)}{1-\nu_n\nu_m}\cdot\frac{1}{1+\frac{(\nu_n+\nu_m)^2}{(1-\nu_n\nu_m)^2}}=\frac{2(\nu_n+\nu_m)(1-\nu_n\nu_m)}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2}\right\|$$

$$= l - \frac{l}{1+\nu_m^2} - \frac{l}{1+\nu_n^2} + \frac{l}{4(\nu_n+\nu_m)} \cdot \frac{2(\nu_n+\nu_m)(1-\nu_n\nu_m)}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2} +$$

$$+ \frac{l}{4(\nu_n-\nu_m)} \cdot \frac{2(\nu_n-\nu_m)(1+\nu_n\nu_m)}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2} =$$

$$= l - \frac{2l+\nu_n^2+\nu_m^2}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2} + \frac{l}{2} \cdot \frac{(1-\nu_n\nu_m)}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2} +$$

$$+ \frac{l}{2} \cdot \frac{(1+\nu_n\nu_m)}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2} = \frac{l\nu_n^2\nu_m^2}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2}.$$

Таким образом, для интеграла I_4 имеем

$$I_4 = \frac{l\nu_n^2\nu_m^2}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2}. \tag{2.14}$$

Итак, окончательно с учетом (2.10)–(2.14) имеем

$$\sum_{k=1}^{4} I_k = \frac{l\nu_n^2\nu_m^2}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2} - \frac{l\nu_n^2\nu_m^2}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2} -$$

$$- \frac{l\nu_n^2\nu_m^2}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2} + \frac{l\nu_n^2\nu_m^2}{1+\nu_n^2+\nu_m^2+\nu_n^2\nu_m^2} = 0. \tag{2.15}$$

Справедливость условия ортогональности (2.9) нами установлена.

3^0. Покажем, что

$$\int_0^l \tilde{X}'_{j,2n-1}(x_j)\tilde{X}'_{j,2m}(x_j)\, dx_j = 0. \tag{2.16}$$

Действительно, прежде всего, из (2.16) получаем

$$\int_0^l \sin\lambda_{2n-1}x_j \left[\nu_m \sin\frac{2\nu_m}{l}x_j - 2\sin^2\frac{\nu_m}{l}x_j\right] dx_j = \sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}J_k.$$

Вычисляем интеграл J_1. Имеем

$$J_1 = \frac{\nu_m}{2}\int_0^l \left[\cos\left(\lambda_{2n-1} - \frac{2\nu_m}{l}\right)x_j - \cos\left(\lambda_{2n-1} + \frac{2\nu_m}{l}\right)x_j\right] dx_j =$$

$$= \frac{\nu_m}{2} \cdot \frac{l}{\lambda_{2n-1}l - 2\nu_m} \sin\left(\frac{\lambda_{2n-1}l - 2\nu_m}{l}\right)x_j\Big|_{x_j=0}^{x_j=l} -$$

$$- \frac{\nu_m}{2} \cdot \frac{l}{\lambda_{2n-1}l + 2\nu_m} \sin\left(\frac{\lambda_{2n-1}l + 2\nu_m}{l}\right)x_j\Big|_{x_j=0}^{x_j=l} =$$

$$= \frac{\nu_m}{2} \cdot \frac{l}{\lambda_{2n-1}l - 2\nu_m} \sin\left(\lambda_{2n-1}l - 2\nu_m\right) -$$

$$-\frac{\nu_m}{2}\cdot\frac{l}{\lambda_{2n-1}l+2\nu_m}\sin\left(\lambda_{2n-1}l+2\nu_m\right)=$$

$$\left\|\sin 2[(2n-1)\pi\pm\nu_m]=\frac{2\tan[(2n-1)\pi\pm\nu_m]}{1+\tan^2[(2n-1)\pi\pm\nu_m]}=\pm\frac{2\nu_m}{1+\nu_m^2}\right\|$$

$$\left\|\tan[(2n-1)\pi\pm\nu_m]=\frac{\tan(2n-1)\pi\pm\tan\nu_m}{1\mp\tan(2n-1)\pi\tan\nu_m}=\pm\tan\nu_m=\pm\nu_m\right\|$$

$$=-\frac{l}{\lambda_{2n-1}l-2\nu_m}\frac{\nu_m^2}{1+\nu_m^2}-\frac{l}{\lambda_{2n-1}l+2\nu_m}\frac{\nu_m^2}{1+\nu_m^2}=$$

$$=-\frac{l\nu_m^2}{1+\nu_m^2}\cdot\frac{2\lambda_{2n-1}l}{(\lambda_{2n-1}l)^2-4\nu_m^2}=\frac{l^2\lambda_{2n-1}\nu_m^2}{2(1+\nu_m^2)\left[\nu_m^2-\left(\frac{\lambda_{2n-1}l}{2}\right)^2\right]}.$$

Таким образом, для интеграла J_1 имеем

$$J_1=\frac{l^2\lambda_{2n-1}\nu_m^2}{2(1+\nu_m^2)\left[\nu_m^2-\left(\frac{\lambda_{2n-1}l}{2}\right)^2\right]}. \tag{2.17}$$

Вычисляем интеграл J_2. Имеем

$$J_2=\int_0^l\sin\lambda_{2n-1}x_j\left[1-\cos\frac{2\nu_m}{l}x_j\right]dx_j=-\frac{1}{\lambda_{2n-1}}\cos\lambda_{2n-1}x_j\Big|_{x_j=0}^{x_j=l}-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^l\left[\sin\left(\lambda_{2n-1}+\frac{2\nu_m}{l}\right)x_j+\sin\left(\lambda_{2n-1}-\frac{2\nu_m}{l}\right)x_j\right]dx_j=$$

$$=\frac{1}{\lambda_{2n-1}}\left[1-\cos\lambda_{2n-1}l\right]+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda_{2n-1}+\frac{2\nu_m}{l}}\cos\left(\lambda_{2n-1}+\frac{2\nu_m}{l}\right)x_j\Big|_{x_j=0}^{x_j=l}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda_{2n-1}-\frac{2\nu_m}{l}}\cos\left(\lambda_{2n-1}-\frac{2\nu_m}{l}\right)x_j\Big|_{x_j=0}^{x_j=l}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda_{2n-1}+\frac{2\nu_m}{l}}\left[\cos\left(\lambda_{2n-1}l+2\nu_m\right)-1\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\lambda_{2n-1}-\frac{2\nu_m}{l}}\left[\cos\left(\lambda_{2n-1}l-2\nu_m\right)-1\right]=$$

$$\left\|\cos(\lambda_{2n-1}l\pm 2\nu_m)=\frac{1-\tan^2\left(\frac{\lambda_{2n-1}l}{2}\pm\nu_m\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\lambda_{2n-1}l}{2}-\nu_m\right)}=\frac{1-\nu_m^2}{1+\nu_m^2}\right\|$$

$$=\left[\frac{1}{2\left(\lambda_{2n-1}+\frac{2\nu_m}{l}\right)}+\frac{1}{2\left(\lambda_{2n-1}-\frac{2\nu_m}{l}\right)}\right]\cdot\left(-\frac{2\nu_m^2}{1+\nu_m^2}\right)=$$

$$= -\frac{2l^2\lambda_{2n-1}\nu_m^2}{(1+\nu_m^2)\left[\lambda_{2n-1}^2 - \left(\frac{2\nu_m}{l}\right)^2\right]} = -\frac{l^2\lambda_{2n-1}\nu_m^2}{2(1+\nu_m^2)\left[\left(\frac{\lambda_{2n-1}l}{2}\right)^2 - \nu_m^2\right]}.$$

Таким образом, для интеграла J_2 имеем

$$J_2 = -\frac{l^2\lambda_{2n-1}\nu_m^2}{2(1+\nu_m^2)\left[\left(\frac{\lambda_{2n-1}l}{2}\right)^2 - \nu_m^2\right]}. \tag{2.18}$$

Итак, окончательно с учетом (2.17)–(2.18) имеем

$$\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}J_k = \frac{l^2\lambda_{2n-1}\nu_m^2}{2(1+\nu_m^2)\left[\nu_m^2 - \left(\frac{\lambda_{2n-1}l}{2}\right)^2\right]} - \frac{l^2\lambda_{2n-1}\nu_m^2}{2(1+\nu_m^2)\left[\nu_m^2 - \left(\frac{\lambda_{2n-1}l}{2}\right)^2\right]} = 0. \tag{2.19}$$

Таким образом, согласно соотношений (2.8), (2.9), (2.15), (2.16) и (2.19) мы устанавливаем ортогональность в пространстве $V_1(\Omega)$ системы функций (2.1)–(2.3), определяемых формулами (1.9)–(1.10) в теореме 1.1.

3 О нормировке системы собственных функций (1.10) в пространстве $V_1(\Omega)$ (1.3)

3.1 Нормировка производной $X'_{j,2n-1}(x_j)$, $x_j \in (0,l)$

Вычислим квадрат нормы функций (2.5) и (2.7) в пространстве $L^2(0,l)$.

Для функции (2.5) будем иметь:

$$\|\tilde{X}'_{j,2n-1}(x_j)\|^2_{L^2(0,l)} = \int_0^l \sin^2\lambda_{2n-1}x_j\,dx_j = \frac{l}{2}. \tag{3.1}$$

Из (3.1) для (2.4) соответственно получаем

$$\|X'_{j,2n-1}(x_j)\|^2_{L^2(0,l)} = \frac{\lambda_{2n-1}^2}{4}\|\tilde{X}'_{j,2n-1}(x_j)\|^2_{L^2(0,l)} = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{2l},$$

т.е., имеем

$$\|X'_{j,2n-1}(x_j)\|_{L^2(0,l)} = \frac{(2n-1)\pi}{\sqrt{2\,l}}. \tag{3.2}$$

С учетом (3.2) для нормированной функции $\bar{X}'_{j,2n-1}(x_j)$ получаем

$$\bar{X}'_{j,2n-1}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_{2n-1}x_j, \quad \|\bar{X}'_{j,2n-1}(x_j)\|_{L^2(0,l)} = 1. \tag{3.3}$$

Из (3.3), в свою очередь, для функции $\bar{X}_{j,2n-1}(x)$ получаем

$$\bar{X}_{j,2n-1}(x_j) = \frac{\sqrt{2l}}{(2n-1)\pi}\sin^2\frac{(2n-1)\pi x_j}{l}. \tag{3.4}$$

Таким образом, формулы (3.3)–(3.4) определяют в пространстве $V_{1j}(0,l)$ (1.6) искомую ортонормированную систему функций.

3.2 Нормировка производной $X'_{j,2n}(x_j)$, $x_j \in (0,l)$

Для функции (2.7)

$$\tilde{X}'_{j,2n}(x_j) = \nu_n \cdot \sin \frac{2\nu_n}{l} x_j - 2\sin^2 \frac{\nu_n x_j}{l}$$

будем иметь:

$$\|\tilde{X}'_{j,2n}(x_j)\|^2_{L^2(0,l)} = \int\limits_0^l \left[\nu_n \cdot \sin \frac{2\nu_n}{l} x_j + \cos \frac{2\nu_n}{l} x_j - 1\right]^2 dx_j = \frac{\nu_n^2\, l}{2}. \tag{3.5}$$

Действительно, используя равенства $\tan \nu_n = \nu_n$ и $\cos^{-2} \nu_n = 1 + \tan^2 \nu_n$, получаем

$$\|\tilde{X}'_{j,2n}(x_j)\|^2_{L^2(0,l)} = (1+\nu_n^2) \int\limits_0^l \left[\sin \nu_n \sin \frac{2\nu_n x_j}{l} + \cos \nu_n \cos \frac{2\nu_n x_j}{l} - \cos \nu_n\right]^2 dx_j =$$

$$= (1+\nu_n^2) \int\limits_0^l \left[\cos\left(\nu_n - \frac{2\nu_n x_j}{l}\right) - \cos \nu_n\right]^2 dx_j =$$

$$= (1+\nu_n^2) \int\limits_0^l \left[\cos^2 \nu_n + \cos^2\left(\nu_n - \frac{2\nu_n x_j}{l}\right) - 2\cos\left(\nu_n - \frac{2\nu_n x_j}{l}\right)\cos \nu_n\right] dx_j =$$

$$= l + (1+\nu_n^2) \int\limits_0^l \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\nu_n - \frac{4\nu_n x_j}{l}\right) - \cos\left(2\nu_n - \frac{2\nu_n x_j}{l}\right) - \cos \frac{2\nu_n x_j}{l}\right] dx_j =$$

$$= l + \frac{(1+\nu_n^2)l}{2} - \frac{3(1+\nu_n^2)l}{4}\sin 2\nu_n = \frac{\nu_n^2 l}{2},$$

где использованы формулы $\sin 2\nu_n = \frac{2\nu_n}{1+\nu_n^2}$ и $\tan \nu_n = \nu_n$.

Из (3.5) для (2.6) соответственно получаем

$$\|X'_{j,2n}(x_j)\|^2_{L^2(0,l)} = \frac{4\nu_n^6}{l^2(1+\nu_n^2)^2}\|\tilde{X}'_{j,2n}(x_j)\|^2_{L^2(0,l)} = \frac{4\nu_n^6}{l^2(1+\nu_n^2)^2} \cdot \frac{\nu_n^2 l}{2} = \frac{2\nu_n^8}{l(1+\nu_n^2)^2},$$

т.е., имеем

$$\|X'_{j,2n}(x_j)\|_{L^2(0,l)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\nu_n^4}{1+\nu_n^2}. \tag{3.6}$$

С учетом (3.6) для нормированной функции $\bar{X}'_{j,2n}(x_j)$ получаем

$$\bar{X}'_{j,2n}(x_j) = \sqrt{\frac{l}{2}} \cdot \frac{1+\nu_n^2}{\nu_n^4} X'_{j,2n}(x_j), \quad \|\bar{X}'_{j,2n}(x_j)\|_{L^2(0,l)} = 1, \tag{3.7}$$

где

$$X'_{j,2n}(x_j) = \frac{2\nu_n^3}{l(1+\nu_n^2)}\left[\nu_n \sin \frac{2\nu_n x_j}{l} - 2\sin^2 \frac{\nu_n x_j}{l}\right]. \tag{3.8}$$

Из (3.7)–(3.8), в свою очередь, для функции $\bar{X}_{j,2n}(x)$ получаем

$$\bar{X}'_{j,2n}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \frac{1}{\nu_n} \left[\nu_n \sin \frac{2\nu_n x_j}{l} - 2 \sin^2 \frac{\nu_n x_j}{l} \right], \tag{3.9}$$

$$\bar{X}_{j,2n}(x_j) = \sqrt{\frac{l}{2}} \cdot \frac{1}{\nu_n} \left[\frac{1}{\nu_n} \sin \frac{2\nu_n x_j}{l} - \frac{2}{l} x_j + 2 \sin^2 \frac{\nu_n x_j}{l} \right]. \tag{3.10}$$

Таким образом, формулы (3.9)–(3.10) определяют в пространстве $V_{1j}(0,l)$ (1.6) искомую ортонормированную систему функций.

3.3 Нормировка функций $\partial_{x_j} u_n(x) = X'_{j,2n-1}(x_j) \prod\limits_{k=1,\, k\neq j}^{d} X_{k,2n-1}(x_k)$ и $\partial_{x_j} u_n(x) = X'_{j,2n}(x_j) \prod\limits_{k=1,\, k\neq j}^{d} X_{k,2n}(x_k)$

Пусть Ω_j – сечения Ω при каждом фиксированном $x_j \in (0,l)$. Система функций $\{X'_{j,2n-1}(x_j),\ n \in \mathbb{N}\}$ и $\{X'_{j,2n}(x_j),\ n \in \mathbb{N}\}$ мы уже нормировали и показали, что она ортогональна. Нам остается нормализовать функцию для нечетных и четных индексов n:

$$u_{jn}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_d) = \prod_{k=1,\, k\neq j}^{d} X_{k,2n-1}(x_k). \tag{3.11}$$

$$u_{jn}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_d) = \prod_{k=1,\, k\neq j}^{d} X_{k,2n}(x_k). \tag{3.12}$$

1^0. Случай (3.11). Для этой цели мы сперва вычислим следующую норму:

$$\|X_{k,2n-1}(x_k)\|_{L^2(0,l)} = \left(\int_0^l |X_{k,2n-1}(x_k)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad k = 1, ..., j-1, j+1, ..., d. \tag{3.13}$$

Согласно (1.10) имеем

$$\|X_{k,2n-1}(x_k)\|^2_{L^2(0,l)} = \int_0^l \sin^4 \frac{\lambda_{2n-1} x_k}{2} dx_k = \frac{3l}{8},$$

т.е. для функции $u_{jn}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_d)$ (3.11) получаем

$$\| \prod_{k=1,\, k\neq j}^{d} X_{k,2n-1}(x_k) \|^2_{(L^2(0,l))^{d-1}} = \left(\frac{3l}{8} \right)^{d-1}. \tag{3.14}$$

Тогда нормированная функция $\partial_{x_j} \bar{u}_{jn}(x_1, ..., x_d)$ для $\partial_{x_j} u_{jn}(x_1, ..., x_d)$ будет определяться выражением (с учетом (3.2)–(3.3) и (1.9)):

$$\bar{X}'_{j,2n-1}(x_j) \bar{u}_{jn}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_d) =$$

$$= d^{-1/2}\frac{\sqrt{2l}}{(2n-1)\pi}\left(\sqrt{\frac{8}{3l}}\right)^{d-1}\partial_{x_j}u_n(x),\ \ j=1,...,d,\ \ n\in\mathbb{N}, \tag{3.15}$$

$$\|\bar{X}'_{j,2n-1}(x_j)\bar{u}_{jn}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_d)\|_{L^2(\Omega)} = d^{-1/2},\ \ j=1,...,d,\ \ n\in\mathbb{N}, \tag{3.16}$$

$$\|\bar{u}_n(x_1,...,x_d)\|^2_{V_1} = \sum_{j=1}^{d}\|\bar{X}'_{j,2n-1}(x_j)\bar{u}_{jn}(x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_d)\|^2_{L^2(\Omega)} = 1,\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Таким образом, для нечетных n имеем

$$\bar{u}_n(x_1,...,x_d) = d^{-1/2}\frac{\sqrt{2l}}{(2n-1)\pi}\left(\sqrt{\frac{8}{3l}}\right)^{d-1}\prod_{k=1}^{d}\sin^2\frac{\lambda_{2n-1}x_k}{2},\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{3.18}$$

2^0. <u>Случай (3.12)</u>. Для этой цели мы сперва вычислим следующую норму:

$$\|X_{k,2n}(x_k)\|_{L^2(0,l)} = \left(\int_0^l |X_{k,2n}(x_k)|^2 dx\right)^{1/2},\ \ k=1,...,j-1,j+1,...,d. \tag{3.19}$$

Согласно (1.10) имеем

$$\|X_{k,2n}(x_k)\|^2_{L^2(0,l)} = \int_0^l\left[(\lambda_{2n}l-\sin\lambda_{2n}l)\sin^2\frac{\lambda_{2n}x_k}{2} - \sin^2\frac{\lambda_{2n}l}{2}(\lambda_{2n}x_k-\sin\lambda_{2n}x_k)\right]^2 dx_k =$$

$$= \frac{\nu_n^4}{(1+\nu_n^2)^2}\int_0^l\left[2\nu_n\sin^2\frac{\nu_n x_k}{l} - \frac{2\nu_n x_k}{l} + \sin\frac{2\nu_n x_k}{l}\right]^2 dx_k =$$

$$= \frac{\nu_n^4}{(1+\nu_n^2)^2}\int_0^l\left[4\nu_n^2\sin^4\frac{\nu_n x_k}{l} + \frac{4\nu_n^2x_k^2}{l^2} + \sin^2\frac{2\nu_n x_k}{l} - \right.$$

$$-8\frac{\nu_n^2 x_k}{l}\sin^2\frac{\nu_n x_k}{l} + 4\nu_n\sin^2\frac{\nu_n x_k}{l}\sin\frac{2\nu_n x_k}{l} -$$

$$\left.-\frac{4\nu_n x_k}{l}\sin\frac{2\nu_n x_k}{l}\right]dx_k = \frac{\nu_n^4}{(1+\nu_n^2)^2}\sum_{m=1}^{6}K_m. \tag{3.20}$$

Вычислим каждый из интегралов $K_m, m=1,...,6$. Имеем

$$K_1 = 4\nu_n^2\int_0^l\sin^4\frac{\nu_n x_k}{l}dx_k = \nu_n^2\int_0^l\left[1-\cos\frac{2\nu_n x_k}{l}\right]^2 dx_k =$$

$$= \nu_n^2\int_0^l\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{4\nu_n x_k}{l} - 2\cos\frac{2\nu_n x_k}{l}\right]dx_k =$$

$$= \nu_n^2 \left[\frac{3l}{2} + \frac{l}{8\nu_n} \sin 4\nu_n - \frac{l}{\underline{\cancel{2}\nu_n}} \sin 2\nu_n \right] = \frac{\nu_n^2 l}{2} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{2}} + \cancel{3}\nu_n^2 + 3\nu_n^4}{(1+\nu_n^2)^2}, \tag{3.21}$$

где использовано равенство $\frac{1}{8} \sin 4\nu_n - \frac{1}{2} \sin 2\nu_n = \frac{\nu_n}{2(1+\nu_n^2)} \left[\frac{1-\nu_n^2}{1+\nu_n^2} - \overset{4}{\cancel{2}} \right]$.

$$K_2 = \frac{4\nu_n^2 l}{3}, \quad K_3 = \frac{l}{2} \cdot \frac{3\nu_n^2 + \nu_n^4}{(1+\nu_n^2)^2}. \tag{3.22}$$

$$K_4 = -\frac{8\nu_n^2}{l} \int\limits_0^l x_k \sin^2 \frac{\nu_n x_k}{l} dx_k = -\frac{4\nu_n^2}{l} \int\limits_0^l \left[x_k - \cos \frac{2\nu_n x_k}{l} \right] dx_k = -\frac{2\nu_n^4 l}{1+\nu_n^2}. \tag{3.23}$$

$$K_5 = 4\nu_n \int\limits_0^l \sin^2 \frac{\nu_n x_k}{l} \sin \frac{2\nu_n x_k}{l} dx_k =$$

$$= 2\nu_n \int\limits_0^l \left[1 - \cos \frac{2\nu_n x_k}{l} \right] \sin \frac{2\nu_n x_k}{l} dx_k = \frac{2l\nu_n^2(\cancel{2} + \nu_n^2)}{(1+\nu_n^2)^2}. \tag{3.24}$$

$$K_6 = -\frac{4\nu_n}{l} \int\limits_0^l x_k \sin \frac{2\nu_n x_k}{l} dx_k = -\frac{2\nu_n^2 l}{1+\nu_n^2}. \tag{3.25}$$

Итак, сумма интегралов K_m (3.21)–(3.25) дает нам согласно (3.20):

$$K_0^2(l, \nu_n) = \|X_{k,2n}(x_k)\|^2_{L^2(0,l)} = \frac{\nu_n^4}{(1+\nu_n^2)^2} \sum_{m=1}^{6} K_m = \frac{\nu_n^6 l(5\nu_n^4 + 39\nu_n^2 + 29)}{6(1+\nu_n^2)^4}. \tag{3.26}$$

Таким образом, для функции $\partial_{x_j} u_{jn}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_d)$ (3.12) получаем

$$\|u_{jn}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_d)\|_{(L^2(0,l))^{d-1}} = (K_0(l, \nu_n))^{d-1}. \tag{3.27}$$

Тогда нормированная функция $\partial_{x_j} \bar{u}_n(x_1, ..., x_d)$ для $\partial_{x_j} u_n(x_1, ..., x_d)$ будет определяться выражением (с учетом (3.2)–(3.3) и (1.9)):

$$\bar{X}'_{j,2n}(x_j)\bar{u}_{jn}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_d) = d^{-1/2} \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{1}{\nu_n} (K_0(l, \nu_n))^{-d+1} \partial_{x_j} u_n(x), \; j = 1, ..., d, \; n \in \mathbb{N}, \tag{3.28}$$

$$\|\bar{X}'_{j,2n}(x_j)\bar{u}_{jn}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_d)\|_{L^2(\Omega)} = d^{-1/2}, \;\; j = 1, ..., d, \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{3.29}$$

$$\sum_{j=1}^{d} \|\bar{X}'_{j,2n}(x_j)\bar{u}_{jn}(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_d)\|^2_{L^2(\Omega)} = 1, , \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{3.30}$$

Итак, для четных n имеем

$$\bar{u}_n(x_1, ..., x_d) = d^{-1/2} \sqrt{\frac{l}{2}} \frac{1}{\nu_n} [K_0(l, d)]^{-d+1} \prod_{k=1}^{d} \left[\frac{1}{\nu_n} \sin \frac{2\nu_n x_k}{l} - \frac{2}{l} x_k + 2 \sin^2 \frac{\nu_n x_k}{l} \right], \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{3.31}$$

Таким образом, формулы (3.1)–(3.4), (3.7)–(3.10), (3.15)–(3.17), (3.28)–(3.31) определяют в пространстве V_1 (1.3) искомую ортонормированную систему функций.

Сформулируем полученный результат в виде следствия к теореме 1.1.

Следствие 3.1. *Спектральная задача* (1.1)–(1.2) *имеет следующее решение*

$$\bar{u}_n(x_1,...,x_d) = d^{-1/2}\frac{\sqrt{2l}}{(2n-1)\pi}\left(\sqrt{\frac{8}{3l}}\right)^{d-1}\prod_{k=1}^{d}\sin^2\frac{\lambda_{2n-1}x_k}{2},\ \ n\in\mathbb{N}, \tag{3.32}$$

$$\bar{u}_n(x_1,...,x_d) = d^{-1/2}\sqrt{\frac{l}{2}}\frac{1}{\nu_n}\left[K_0(l,d)\right]^{-d+1}\prod_{k=1}^{d}\left[\frac{1}{\nu_n}\sin\frac{2\nu_n x_k}{l} - \frac{2}{l}x_k + 2\sin^2\frac{\nu_n x_k}{l}\right],\ \ n\in\mathbb{N}, \tag{3.33}$$

где

$$\begin{cases} \bar{X}_{j,2n-1}(x_j) = \frac{\sqrt{2l}}{(2n-1)\pi}\sin^2\frac{\lambda_{2n-1}x_j}{2},\ \ \lambda_{2n-1}^2 = \left(\frac{2(2n-1)\pi}{l}\right)^2,\ \ n\in\mathbb{N}, \\ \bar{X}_{j,2n}(x_j) = \sqrt{\frac{l}{2}}\cdot\frac{1}{\nu_n}\left[\frac{1}{\nu_n}\sin\frac{2\nu_n x_j}{l} - \frac{2}{l}x_j + 2\sin^2\frac{\nu_n x_j}{l}\right], \\ \qquad \lambda_{2n}^2 = \left(\frac{2\nu_n}{l}\right)^2,\ \ n\in\mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.34}$$

и $\{\nu_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ *являются положительными корнями уравнения* $\tan\nu = \nu,\ n\in\mathbb{N}$.

Причем, системы собственных функций (3.32)–(3.34) *составляет ортонормированный базис в пространстве* V_1 (1.3).

Заключение

В работе решена обобщенная спектральная задача для дифференциального оператора четвертого порядка в области Ω, которая имеет размерность: $\dim\{\Omega\} = d \geq 2$. В дальнейшем, предполагается использовать собственные функции обобщенной спектральной задачи для построения фундаментальной системы в пространстве соленоидальных функций. Заметим, что в работах [23] и [24] найдено решение спектральной задачи для бигармонического оператора в области Ω, представленной 3-D шаром.

Acknowledgments

The research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant BR20281002).

Список литературы

[1] O.A. Ladyzhenskaya; *Mathematical questions in the dynamics of a viscous incompressible fluid,* M.: Nauka, 1970. (in Russian) (English tansl. of 1st ed., The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach, New-York, 1963; rev. 1969.)

[2] J.-L. Lions; *Some methods for solving nonlinear boundary problems,* M.: Mir, 1972. 587 p. (in Russian).

[3] R. Temam; *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis,* M.: Mir, 1981. (in Russian).

[4] V. Novacu; *Introducere in Electrodinamica,* Bucuresti: Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1955. (in Romanian).

[5] R.A. Sharipov; *Classical Elrctrodynamics and Theory of Relativity,* Ufa: Bashkir State University, 1997. 163 p. (in Russian).

[6] S.K. Godunov; *Equations of Mathematical Physics,* M.: Nauka, 1971. 416 p.(in Russian).

[7] O.A. Ladyzhenskaya; *On a construction of basises in spaces of solenoidal vector-valued fields*// Zap. Nauchn. Sem. POMI, 2003, Vol. 306. P. 92–106 (in Russian).

[8] Р.С. Сакс; *Решение спектральной задачи для оператора ротор и оператора Стокса с периодическими краевыми условиями*// Зап. научн. сем. ПОМИ, 2004. Том 318. С.246–276.

[9] R.S. Saks; *Spectral Problems for the Curl and Stokes Operators*// Doklady Mathematics, 2007. Vol. 76, No. 2. P.724–728.

[10] R.S. Saks; *Cauchy problem for the Navier-Stokes equations. Fourier method*// Ufimskii Math. Journal, 2011. Vol. 3, No. 1, P. 53–79 (in Russian).

[11] H. Poincare; *Theorie des Tourbillons,* Georges Carre, Editeur, Paris, 1893. 211 p.

[12] H. Villat; *Lecons sur la theorie des tourbillons,* Gauthier Villars et C^{ie}, $Edieteurs$, Paris, 1930.

[13] P.G. Saffman; *Vortex Dynamics,* Cambridge University Press, 1992. XI+311 p.

[14] N.E. Kochin; *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления,* М., Наука, 1965.

[15] S.N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, V. N. Monakhov; *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей,* Новосибирск, Наука, 1983. 319 с.

[16] V. V. Kozlov; *Общая теория вихрей,* Изд. дом "Удмуртский университет", 1998. 238 с.

[17] O.A. Ladyzhenskaya; *Краевые задачи математической физики,* М.: Наука, 1973. 409 с. (in Russian).

[18] O.A. Ladyzhenskaya, N. N. Uraltseva; *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. 2-е издание,* М.: Наука, 1973. 576 с. (in Russian).

[19] S. L. Sobolev; *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. Third Edition,* AMS Providence, Rhode Island, 1991. VIII+287 p.

[20] R. A. Adams, J. J. F. Fournier; *Sobolev spaces. Second Edition,* Academic Press, Amsterdam, 2003. XXIV+305 p.

[21] М.И. Вишик; *О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений,* Матем. сб., 29(1951), с. 615–676.

[22] P.D. Lax, A.N. Milgram; *Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential equations,* Ann. Math. Studies, 33(1954), p. 167–190.

[23] M. T. Jenaliyev, A. M. Serik; *On the spectral problem for three-dimesional bi-Laplacian in the unit sphere,* Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series, No. 2(114), 2024, pp. 86–104.

[24] Muvasharkhan Jenaliyev, Akerke Serik and Madi Yergaliyev; *Navier–Stokes Equation in a Cone with Cross-Sections in the Form of 3D Spheres, Depending on Time, and the Corresponding Basis,* Mathematics, Volume 12, Issue 19, 2024, 3137. https://doi.org/10.3390/math12193137.