Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Уфимский государственный авиационный технический университет"

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

Дисциплина: Численные методы

Отчет по лабораторной работе № 3

Тема: «Прямые методы решения СЛАУ»

Группа МКН-316	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Султанов М.Ф.			
Принял	Гайнетдинова А.А.			

Уфа 2022

Цель работы: получить навык численного решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с использованием различных прямых методов.

Ход работы

Задача №1

1. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для решения СЛАУ методом Гаусса с выбором ведущего элемента.

2. С использованием написанной программы решить задачу о рациональной интерполяции: выполнить приближение функции $y(x)$, заданной таблично, рациональной функцией вида

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q_(x)}, \quad \deg P(x) \leq \deg Q(x) \qquad (1)$$

   При этом требуется определить значения $p = \deg P(x)$ и $q = \deg Q(x)$

3. Построить график интерполирующей функции и исходных данных.

Решение

Метод Гаусса решения СЛАУ $Ax = b$ состоит из двух этапов:

1 этап: прямой ход – приведение системы элементарными преобразованиями строк к треугольному виду (сверху вниз) с едининчными диагональными элементами.

2 этап: обратный ход – вычисление координат решения (снизу вверх)

$$x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{ij}x_j, \quad i = n-1, \ldots, 0$$

В ходе программной реализации по описанному алгоритму нельзя проводить исключения, если в ходе расчета на главной диагонали оказался нулевой элемент или элемент, достаточно близкий к нулю. Чтобы избежать этого каждый цикл всегда начинают с перестановки строк. Среди элементов столбца $a_{ij}, i \geq j$ находят главный, т.е. наибольший по модулю в текущем столбце, и перестановкой строк переводят его на главную диагональ, после чего делают исключения.

Приложением метода Гаусса является решение системы, появляющейся в ходе рациональной интерполяции. Пусть задана табличная функция с $n = 6$ точками (2).

$$
\begin{aligned}
f(x) = \{(-2.25, 0.29422), &\quad (-1.65, 0.18737),\\
(-1.05, -1.0215), &\quad (-0.45, -5.4471),\\
(-1.4440, 0.15), &\quad (2.5873, 0.75)\}
\end{aligned} \tag{2}
$$

Необходимо построить интерполяционный многочлен в виде (1). Пусть $\deg P = p, \deg Q = q, p + q + 1 = n, q > p$. Тогда (1) с условием интерполяции можно переписать в виде:

$$\frac{a_0 + a_1 x_i + \dots + a_p x_i^p}{b_0 + b_1 x_i + \dots b_q x^q} = y_i$$

Домножим обе части на знаменатель:

$$a_0 + a_1 x_i + \dots + a_p x_i^p = y_i(b_0 + b_1 x_i + \dots b_q x^q)$$

Многчлен $P(x)$ дает $p+1$ неизвестный коэффициент, многочлен $Q(x)$ дает $q+1$ неизвестный коэффициент. Получаем n уравнений с $n+1$ неизвестными. Пложим $b_0 = 1$ и получим СЛАУ:

$$a_0 + a_1 x_i + \dots a_p x_i^p - b_1 y_i x_i - \dots - b_{n-1-p} y_i x_i^{n-1-p} = y_i, \quad i = 0 \dots n-1$$

Пусть $p = 1, q = 4$, тогда полученная матрица примет вид:

$$
\begin{pmatrix}
1.00 & -2.25 & 0.66 & -1.49 & 3.35 & -7.54\\
1.00 & -1.65 & 0.31 & -0.51 & 0.84 & -1.39\\
1.00 & -1.05 & -1.07 & 1.13 & -1.18 & 1.24\\
1.00 & -0.45 & -2.45 & 1.10 & -0.50 & 0.22\\
1.00 & -2.25 & 0.66 & -1.49 & 3.35 & -7.54\\
1.00 & -1.65 & 0.31 & -0.51 & 0.84 & -1.39\\
1.00 & -1.05 & -1.07 & 1.13 & -1.18 & 1.24\\
1.00 & -0.45 & -2.45 & 1.10 & -0.50 & 0.22\\
1.00 & 0.15 & 0.22 & 0.03 & 0.00 & 0.00\\
1.00 & 0.75 & -1.94 & -1.46 & -1.09 & -0.82
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0.29\\ 0.19\\ -1.02\\ -5.45\\ -1.44\\ 2.59 \end{pmatrix}
$$

Решим её методом Гаусса, получим:

$$
\begin{pmatrix} a_0\\ a_1\\ b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} -1.52\\ -1.19\\ 1.59\\ -2.04\\ -3.88\\ -1.07 \end{pmatrix}
$$

Таким образом

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-1.52 - 1.19x}{1 + 1.59x - 2.04x^2 - 3.88x^3 - 1.07x^4} \tag{3}$$

Аналогично поступим при $p = 2, q = 3$. Получим функцию

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-2.09 + 2.33x + 2.70x^2}{1 + 1.27x - 0.85x^2 - 2.42x^3} \tag{4}$$

Графики функции (3) и (4) представлены на рисунках 1 и 2. Точками обозначены данные табличной функции (2).

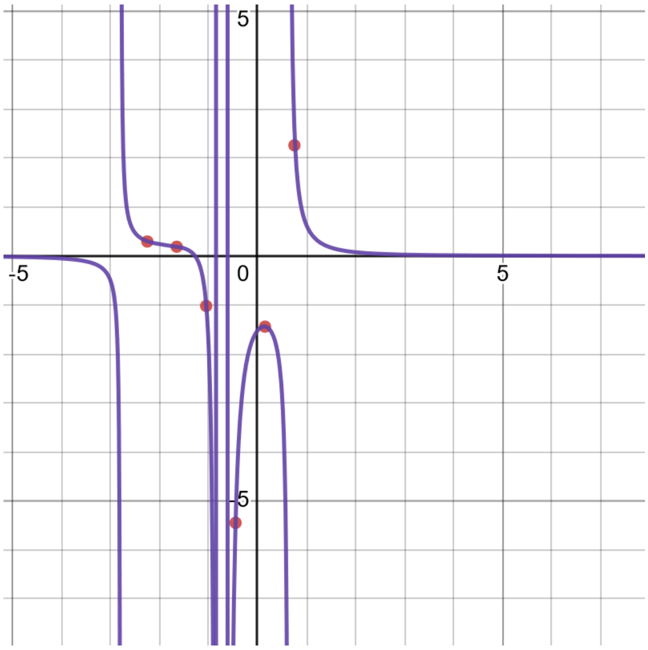

Рис. 1: График рационального интерполирования при $p = 1, q = 4$

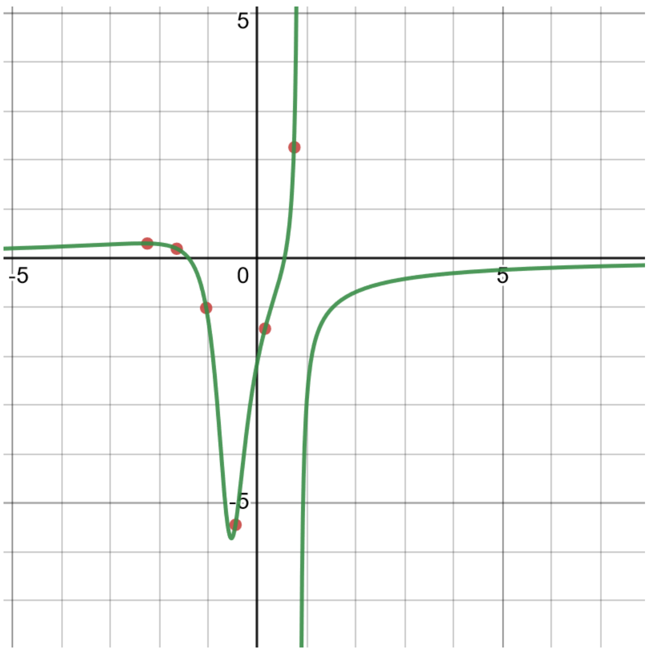

Рис. 2: График рационального интерполирования при $p = 2, q = 3$

Таким образом, наиболее оптимальным образом табличную функцию (2) приближает рациональная интерполяция, заданная формулой (4).

Задача №2

1. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для решения СЛАУ методом LU-разложения

2. Выполнить п. 2, п. 3 задачи 1

Решение

LU-разложение – это представление матрицы $A_{n\times n}$ в виде произведения двух матриц, $A = LU$, где L нижняя треугольная матрица, U верхняя треугольная матрица сединичной диагональю. Пусть дана СЛАУ и главные миноры матрицы A ненулевые. Элементы l_{ij} и u_{ij} определяются из условия:

$$\sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj} = a_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

Тогда их можно получить по формулам:

$$l_{i1} = a_{i1}, \quad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad 1 < i \le j$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kj} \quad 1 < i \le j$$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i} l_{jk}u_{ki}\right)$$

Затем система может быть представлена в виде двух СЛАУ с треугольными матрицами:

$$Ax = d \Rightarrow LUx = d \Rightarrow \begin{cases} Ux = y \\ Ly = d \end{cases}$$

Решаются обе системы подобно обратному ходу метода Гаусса.

При решении задачи рациональной интерполяции метод Гаусса и LU-разложение дают одинаковый результат.

LU-разложение требует примерно $\frac{2n^3}{3}$ операций, а колличество операций для вычисления нижне- и верхнетреугольных матриц пропорционально n. Таким образом, главное преимущество метода LU-разложения заключается в том, что явный вид вектора правой части b при решении СЛАУ используется только на заключительном этапе (в формулах прямого хода), а наиболее трудоемкие операции по вычислению самих матриц L и U вовсе не требуют знания вектора b. Таким образом, если решается серия СЛАУ с одной и той же матрицей A, но разными правыми частями b, то очень выгодно единожды вычислить LU-разложение матрицы A, а уже затем быстрой подстановкой решить каждую из конкретных систем.

Задача №3

1. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для решения СЛАУ с симметричной матрицей методом квадратного корня.

2. С использованием написанной программы решить задачу об аппроксимации функции из первой лабораторной работы, заданной на равномерной сетке из 20 узлов, многочленами степени $1 \le n \le 11$ с использованием метода наименьших квадратов.

3. Построить графики аппроксимирующих многочленов и исходных данных.

4. Определить степень многочлена, обеспечивающего наилучшее приближение (соответствующее наименьшему значению суммы квадратов отклонений значений многочлена в узлах сетки от исходных данных)

Решение

Разложение Холецкого — представление симметричной положительно определённой матрицы матрицы в виде: представление вида:

$$A = LL^T$$

где L – это нижняя треугольная матрица (нули сверху от диагонали), а транспонированная матрица L^T является верхней треугольной.

Однако удобно искать матрицу L по формулам:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \quad l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right) \quad j < i$$

Метод наименьших квадратов – метод аппроксимации основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от экспериментальных входных данных. Пусть заданы данные $\{x_i, y_i\}, i = 1 \ldots n$. Будем искать линейную аппроксимацию в виде $\tilde{y}_m = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$. Тогда,

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m \right) \right]^2$$

Необходимо минимизировать R^2, таким образом, нужно найти

$$\min_x ||Xa - y||^2$$

То есть линейная задача наименьших квадратов заключается в нахождении такого вектора a, называемого псевдорешением системы $Xa = y$, на котором достигается минимум.

Доказывается, что множество псевдорешений системы $Xa = y$ совпадает с множеством решений системы:

$$X^T Xa = X^T y \tag{5}$$

Матрица $X^T X$ является симметрической и её можно разложить по методу Холецкого.

По заданию исходной функцией являлась $f(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^2}$. По ней была получена следующая таблица данных на равномерной сетке:

$$\begin{array}{l} (0.00, 0.00), (0.10, 0.09), (0.19, 0.18), (0.29, 0.26) \\ (0.38, 0.32), (0.48, 0.36), (0.57, 0.39), (0.67, 0.41) \\ (0.76, 0.41), (0.86, 0.41), (0.95, 0.40), (1.05, 0.39) \\ (1.14, 0.37), (1.24, 0.35), (1.33, 0.33), (1.43, 0.32) \\ (1.52, 0.30), (1.62, 0.28), (1.71, 0.26), (1.81, 0.25) \end{array} \tag{6}$$

Подставив данные (6) в уравнение (5) получим решение (наилучшее при $n = 11$):

$$\begin{aligned} \tilde{y} =& 1.001159x^1 - 0.028163x^2 - 1.070042x^3 - \\ &- 1.279338x^4 + 5.134843x^5 - 5.992231x^6 + \\ &+ 3.674453x^7 - 1.229696x^8 + 0.177546x^9 + \\ &+ 0.008222x^{10} - 0.004054x^{11} \end{aligned} \tag{7}$$

Погрешность в худшем случае при этом составляет около $3 \cdot 10^{-6}$. График многочлена (7)приведен на рисунке 3.

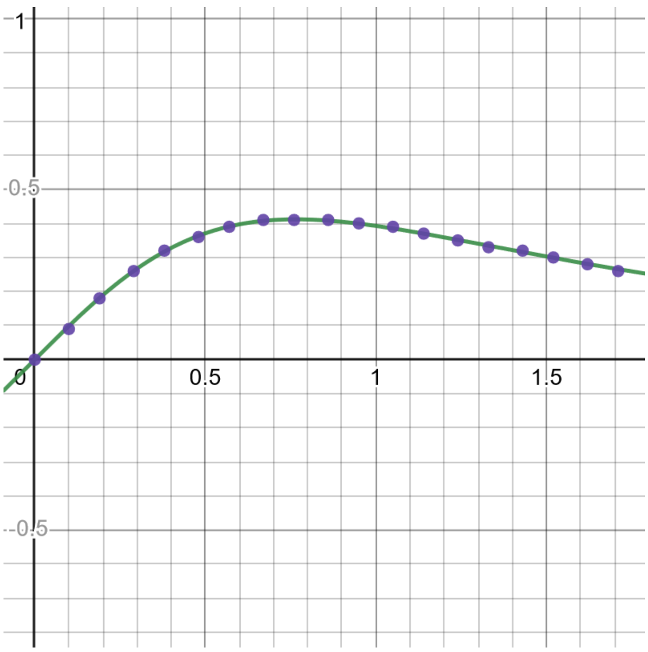

Рис. 3: График аппроксимации МНК при $n = 20, m = 12$

Задача №4

1. Написать вычислительную программу на языке программирования C++ для решения методом прогонки СЛАУ с 5-диагональной матрицей следующего вида:

$$\begin{pmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & 0 & & & & \\ 0 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & & & & \\ & & \vdots & & & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & & & & c_{n-2} & d_{n-2} & e_{n-2} \\ & & 0 & & & & \cdots & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ & & & & & & & a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$$

2. Для отладки программы написать генератор случайных вещественных матриц данного вида с диагональным преобладанием.

Решение

Система записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} c_0y_0 + d_0y_1 + e_0y_2 &= f_0 \\ b_1y_0 + c_1y_1 + d_1y_2 + e_1y_3 &= f_1 \\ a_2y_0 + b_2y_1 + c_2y_2 + d_2y_3 + e_2y_4 &= f_2 \\ &\dots \\ a_iy_{i-2} + b_iy_{i-1} + c_iy_i + d_iy_{i+1} + e_iy_{i+2} &= f_i \\ &\dots \\ a_{n-3}y_{n-5} + b_{n-3}y_{n-4} + c_{n-3}y_{n-3} + d_{n-3}y_{n-2} + e_{n-3}y_{n-1} &= f_{n-3} \\ a_{n-2}y_{n-4} + b_{n-2}y_{n-3} + c_{n-2}y_{n-2} + d_{n-2}y_{n-1} &= f_{n-2} \\ a_{n-1}y_{n-3} + b_{n-1}y_{n-2} + c_{n-1}y_{n-1} &= f_{n-1} \end{aligned}$$

Выразим все y_i в виде

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i y_{i+2} + \gamma_i$$

Тогда,

$$z_0 = c_0$$
$$\alpha_0 = \frac{-d_0}{z_0}$$
$$\beta_0 = \frac{-e_0}{z_0}$$
$$\gamma_0 = \frac{f_0}{z_0}$$
$$z_1 = b_1\alpha_0 + c_1$$
$$\alpha_1 = \frac{-(b_1\beta_0 + d_1)}{z_1}$$
$$\beta_1 = \frac{-e_1}{z_1}$$
$$\gamma_1 = \frac{f_1 - b_1\gamma_0}{z_1}$$

$$i \in [2, n)$$

$$z_i = a_i\alpha_{i-2}\alpha_{i-1} + a_i\beta_{i-2} + b_i\alpha_{i-1} + c_i$$
$$\alpha_i = \frac{-(a_i\alpha_{i-2}\beta_{i-1} + b_i\beta_{i-1} + d_i)}{z_i}$$
$$\beta_i = \frac{-e_i}{z_i}$$
$$\gamma_i = \frac{f_i - (a_i\alpha_{i-2}\gamma_{i-1} + a_i\gamma_{i-2} + b_i\gamma_{i-1})}{z_i}$$

Тогда можно выразить все y_i в обратном порядке

$$y_{n-2} = \alpha_{n-2}y_{n-1} + \gamma_{n-2}$$
$$y_{n-1} = \frac{f_{n-1} - (a_{n-1}\alpha_{n-3}\gamma_{n-2} + a_{n-1}\gamma_{n-3} + b_{n-1}\gamma_{n-2})}{a_{n-1}\alpha_{n-3}\alpha_{n-2} + a_{n-1}\beta_{n-3} + b_{n-1}\alpha_{n-2} + c_{n-1}}$$

$$i \in [n-3, 0]$$

$$y_i = \alpha_i y_{i+1} + \beta_i y_{i+2} + \gamma_i$$
$$y_0 = \frac{f_0 - d_0y_1 - e_0y_2}{c_0}$$

Для примера была сгенерирована система:

$$\begin{pmatrix} 7.00 & 2.00 & 8.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 3.00 & 10.00 & 5.00 & 2.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 8.00 & 2.00 & 2.00 & 3.00 & 2.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 8.00 & 10.00 & 7.00 & 10.00 & 6.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 6.00 & 10.00 & 10.00 & 10.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 8.00 & 2.00 & 3.00 & 4.00 & 3.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 4.00 & 5.00 & 2.00 & 7.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 8.00 & 1.00 & 4.00 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.00 \\ 2.00 \\ 4.00 \\ 8.00 \\ 10.00 \\ 5.00 \\ 2.00 \\ 10.00 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Вычисление системы (8) пятидиагональной прогонкой даёт результат:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.99 \\ 3.92 \\ -3.97 \\ -14.67 \\ 8.10 \\ 6.33 \\ 36.20 \\ -19.21 \end{pmatrix}$$

Аналогичный результат получается при использовании пакета Maple. Скриншот ноутбука продемонстрирован на рисунке 4.

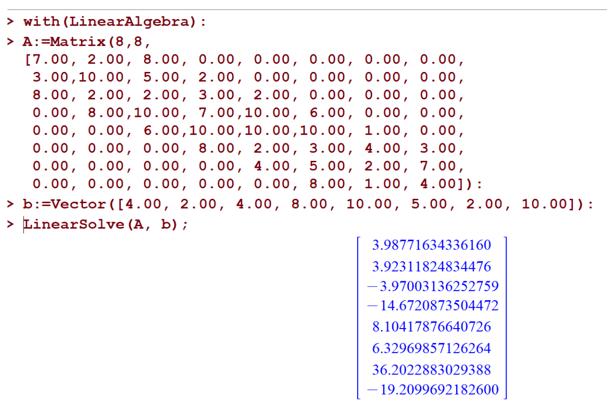

Рис. 4: Скриншот программы Maple 19 с решением задачи (8)

Вывод

В результате проделанной лабораторной работы был изучен теоретический материал необходимый для решения поставленных задач по численному решению систем линейных алгебраических уравнений с использованием различных прямых методов и для каждой поставленной задачи написана вычислительная программа на языке программирования C++.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Бином, 2018. – 636 с.

2. Калиткин Н.Н. Численные методы, 2-е издание: БХВ-Петербург, 2014. – 592 с.

3. Самарский А.А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб, пособие для вузов, — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.— 432 с.

Приложение

Весь код выложен в github-репозитории по ссылке:
`https://github.com/sultanovMF/Numerical-Methods-Lab`