СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является исследование свойств симметрии дробно-дифференциального обобщения уравнения Шредингера, полученное путем замены обычных производных на дробные производные Римана-Лиувилля и Маршо.

Для достижения данной цели необходимо выполнить задачи:

- Методами группового анализа в случае оператора Римана-Лиувилля
  - вывести формулы координат продолжения инфинитиземального генератора группы
  - решить определяющую систему и найти координаты допускаемых операторов
- В случае производных Маршо проверить наличие симметрий, полученных на предыдущем шаге, а также исследовать уравнение на наличие симметрии Галиллея.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ И МАРШО

Фундаментальное введение в теорию дробных прозводных можно найти в монографии [1]. В данной работе кратко приведем основные сведения о дробных производных Римана-Лиувилля и Маршо, необходимые для группового анализа дробно-дифференциальных уравнений.

Большинство доказательств приведенных ниже формул можно найти, например, в [2] и [3].

Рассмотрим функцию $f(x) \in L_1(a,b)$, где (a,b) конечный интервал.

Определение. Интегро-дифференциальное выражение

$$ {}_a\mathcal{D}_x^\alpha\,[f]\,(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-n+1}}d\xi \tag{1}$$

где $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ называется левосторонней дробной производной Римана-Лиувилля порядка α.

Определение. Интегро-дифференциальное выражение

$$ {}_x\mathcal{D}_b^\alpha\,[f]\,(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b \frac{f(\xi)}{(\xi-x)^{\alpha-n+1}}d\xi \tag{2}$$

где $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ называется правосторонней дробной производной Римана-Лиувилля порядка α.

Утверждение. При переходе к пределу $\alpha \to n, n \in \mathbb{N}$, дробные производные (1) и (2) переходят в производную целого порядка $f^{(n)}(x)$.

Утверждение. Если $f(x), g(x)$ аналитические функции, то справедливо обобщенное правило Лейбница:

$$ {}_x\mathcal{D}_b^\alpha\,[f(x)g(x)] = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}\,[f(x)]\,D_x^n\,[g(x)] \tag{3}$$

$$ {}_a\mathcal{D}_x^\alpha\,[f(x)g(x)] = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}\,[f(x)]\,D_x^n\,[g(x)] \tag{4}$$

где биномиальные коэффициенты определяются через гамма-функцию:

$$\binom{p}{q} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(p-q+1)}$$

Утверждение. Пусть $f(x) \in AC^n[a,b]$, тогда справедливы равенства:

$$ {}_x\mathcal{D}_b^\alpha\,[g(x)f'(x)] = (-1)^n\left({}_x\mathcal{D}_b^{\alpha+1}\,[g(x)f(x)]\right) - {}_x\mathcal{D}_b^\alpha\,\big[f(x)D_x\,[g(x)]\big] \tag{5}$$

$$
{}_{a}\mathcal{D}_{x}^{\alpha}\left[g(x)f'(x)\right] = {}_{a}\mathcal{D}_{x}^{\alpha+1}\left[g(x)f(x)\right] - {}_{a}\mathcal{D}_{x}^{\alpha}\left[f(x)D_{x}\left[g(x)\right]\right] \qquad (6)
$$

Теперь рассмотрим случай бесконечного интервала. Следуя [1], введем операторы дробной производной Маршо. Они оказывается очень удобными при обобщении операторов (1) и (2) на случай $x \in (-\infty, \infty)$. В той же монографии приведены условия, предъявляемые для функции, для которой будет определено применение оператора (см. теорему 5.9). Следует отметить то, что производные Маршо и Римана-Лиувилля в случае бесконечного интервала совпадают на достаточно широком классе функций.

Определение. Лево- и правосторонней дробной производной Маршо порядка $\alpha > 1$ будем называть операторы:

$$
\mathbb{D}_{+}^{\alpha}[f(x)] = \frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\int_{0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x-\xi)}{\xi^{1+\{\alpha\}}}d\xi \qquad (7)
$$

$$
\mathbb{D}_{-}^{\alpha}[f(x)] = \frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\int_{0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(x+\xi)}{\xi^{1+\{\alpha\}}}d\xi \qquad (8)
$$

Здесь $n = [\alpha], \alpha = n + \{\alpha\}$.

Утверждение. Производные маршо от константы равны нулю.

Для дальнейших вычислений нам потребуется формула:

$$
\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}[xf'(x)] = \mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}[f(x)] + x\mathbb{D}_{\pm}^{\alpha}[f'(x)] \qquad (9)
$$

1.2. АЛГОРИТМ ПОИСКА СИММЕТРИЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Подробно теория классического группового анализа изложена в [4]. Анализ в случае функции одной переменной с оператором дробной производной Римана-Лиувилля подробно рассмотрен в [3] и [2].

Алгоритм построения допускаемых генераторов группы симметрий дифференциального уравнения $F = F(t, x, u, \ldots, \varDelta_i, \ldots)$, где $\varDelta_i$ - некоторый оператор.

1. Рассматриваются инфинитезимальные операторы X вида:

$$
X = \xi^{t}(t,x,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^{x}(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta^{u}(t,x,u)\frac{\partial}{\partial u}
$$

2. Формула продолжения в общем виде:

$$
\zeta_{Lu} = L\left(\eta^{u} - \sum_{i=0}^{n}\xi^{i}u_{i}\right) + \sum_{i=0}^{n}\xi^{i}D_{i}\left[Lu\right] \qquad (10)
$$

3. Координаты допускаемых операторов ищутся из определяющего уравнения:

$$(\tilde{X}F)\Big|_{F=0} = 0$$

здесь $\tilde{X}$ - продолженный на необходимые производные оператор X.

В случае ДУЧП дробного порядка вида:

$$F(t, x, u, u_t, {}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u], {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u])$$

алгоритм требует некоторых изменений.

1. Рассматриваются инфинитезимальные операторы X вида:

$$X = \xi^t(t, x, u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^x(t, x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta^u(t, x, u)\frac{\partial}{\partial u}$$

где ξ^t и ξ^x такие, что допускается симметрия $x - a = 0$ и $x - b = 0$ (условие инвариантности оператора относительно замены переменных).

2. Формулы продолжений запишутся в виде:

$$\zeta_{\frac{\partial u}{\partial t}} = D_t [\eta^u] - u_t D_t \left[\xi^t\right] - u_x D_t [\xi^x] \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u]} = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha [\eta^u] + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{n-\alpha}{n+1} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [u] \, D_x^{n+1} [\xi^x] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [u_t] \, D_x^n \left[\xi^t\right] \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{{}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u]} = {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [\eta^u] + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n \frac{n-\alpha}{n+1} {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [u] \, D_x^{n+1} [\xi^x] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [u_t] \, D_x^n \left[\xi^t\right] \end{aligned} \tag{13}$$

Однако, расчет можно сильно упростить. Положим, что

$$\xi^x = \xi^x(t, x), \quad \xi^t = \xi^t(t, x), \quad \eta^u = \eta_0^u(t, x) + \eta_1^u u. \tag{14}$$

Такие однопараметрические группы преобразований с координатами (14) называются группами линейно-автономных преобразований.

Дробно-дифференциальные операторы не обладают свойством линеаризации. Это связано с их нелокальностью в отличие от операторов целочисленного дифференцирования. Поэтому нелинейные преобразования не могут преобразовывать линейный дробный оператор в оператор того же вида. На данный момент неизвестно ни одной симметрии дробно-дифференциальных уравнений, не являющейся линейно-автономной симметрией (подробнее см. [3] стр. 138).

В таких предоположениях координаты можно вычислить по формулам:

$$\zeta_{{}_a\mathcal{D}_x^\alpha[u]} = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha\left[\eta_0^u\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}[u]\left(D_x^n\left[\eta_1^u\right] + \frac{n-\alpha}{n+1}D_x^{n+1}\left[\xi^x\right]\right) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}[u_t]\,D_x^n\left[\xi^t\right] \tag{15}$$

$$\zeta_{{}_x\mathcal{D}_b^\alpha[u]} = {}_x\mathcal{D}_b^\alpha\left[\eta_0^u\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}[u]\left(D_x^n\left[\eta_1^u\right] + (-1)^n\frac{n-\alpha}{n+1}D_x^{n+1}\left[\xi^x\right]\right) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n{}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}[u_t]\,D_x^n\left[\xi^t\right] \tag{16}$$

3. Координаты допускаемых операторов ищутся из определяющего уравнения:

$$(\tilde{X}F)\Big|_{F=0} = 0$$

$$\tilde{X} = X + \zeta^0\frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta^1\frac{\partial}{\partial\,{}_a\mathcal{D}_x^\alpha[u]} + \zeta^2\frac{\partial}{\partial\,{}_x\mathcal{D}_b^\alpha[u]}$$

$\zeta^0, \zeta^1, \zeta^2$ определяются соответственно по формулам (11), (15), (16).

Данный алгоритм можно обобщить и на случай системы ДУЧП дробного порядка.

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. ПОИСК СИММЕТРИЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Рассматривается дробно-диффереациальное обобщение уравнение Шредингера:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha[\psi] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha[\psi], \quad \alpha\in(1,2), \quad t>0, \quad x\in[a,b] \tag{17}$$

Представим функцию $\psi(t,x)$ в виде:

$$\psi(t,x) = u(t,x) + iv(t,x)$$

Тогда (17) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha\,[v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha\,[v] \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\left({}_a\mathcal{D}_x^\alpha\,[u] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha\,[u]\right) \end{cases} \tag{18}$$

Инфинитезимальный генератор будем искать в виде:

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial u} + \vartheta\frac{\partial}{\partial v}$$

Тогда инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{X} = X + \left(\zeta^u\frac{\partial}{\partial u_t} + \rho^u\frac{\partial}{\partial({}_a\mathcal{D}_x^\alpha\,[u])} + \lambda^u\frac{\partial}{\partial({}_x\mathcal{D}_b^\alpha\,[u])}\right) + \\ + \left(\zeta^v\frac{\partial}{\partial v_t} + \rho^v\frac{\partial}{\partial({}_a\mathcal{D}_x^\alpha\,[v])} + \lambda^v\frac{\partial}{\partial({}_x\mathcal{D}_b^\alpha\,[v])}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

Координаты ζ^u, ζ^v будут иметь вид (11), ρ^u, ρ^v вид (15), а λ^u, λ^v соответственно вид (16).

Применим генератор (19) к системе (18):

$$\begin{cases} \zeta^u = \rho^v + \lambda^v \\ \zeta^v = -(\rho^u + \lambda^u) \end{cases} \tag{20}$$

Определяющая система примет следующий вид:

$$\begin{cases} uD_t[\mu_1] + D_t[\mu_0] + \left({}_a\mathcal{D}_x^\alpha[v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha[v]\right)\left(\mu_1 + D_t[\tau]\right) - D_x[u]\,D_t[\xi] = \\ \quad = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha[\vartheta_0] + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}[v]\left(D_x^n[\vartheta_1] + \dfrac{n-\alpha}{n+1}D_x^{n+1}[\xi]\right) + \\ \quad + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha[\vartheta_0] + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}[v]\left(D_x^n[\vartheta_1] + (-1)^n\dfrac{n-\alpha}{n+1}D_x^{n+1}[\xi]\right) + \\ \quad + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}\left[{}_a\mathcal{D}_x^\alpha[u] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha[u]\right]D_x^n[\tau] + \\ \quad + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n{}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}\left[{}_a\mathcal{D}_x^\alpha[u] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha[u]\right]D_x^n[\tau] \\ vD_t[\vartheta_1] + D_t[\vartheta_0] + \left({}_a\mathcal{D}_x^\alpha[u] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha[u]\right)\left(D_t[\tau] - \vartheta_1\right) - D_x[v]\,D_t[\xi] = \\ \quad = -{}_a\mathcal{D}_x^\alpha[\mu_0] - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}[u]\left(D_x^n[\mu_1] + \dfrac{n-\alpha}{n+1}D_x^{n+1}[\xi]\right) - \\ \quad - {}_x\mathcal{D}_b^\alpha[\mu_0] + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}[u]\left(D_x^n[\mu_1] + (-1)^n\dfrac{n-\alpha}{n+1}D_x^{n+1}[\xi]\right) + \\ \quad + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}\left[{}_a\mathcal{D}_x^\alpha[v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha[v]\right]D_x^n[\tau] + \\ \quad + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n{}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}\left[{}_a\mathcal{D}_x^\alpha[v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha[v]\right]D_x^n[\tau] \end{cases} \tag{21}$$

Расщепив систему (21) по u и v (первые слагаемые в каждой системе), можно сделать вывод о том, что $\mu_1 = \mu_1(x)$, $\vartheta_1 = \vartheta_1(x)$.

Если расщепить по ${}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}[v]$, то получим, что

$$D_x^n[\vartheta_1] + \frac{n-\alpha}{n+1}D_x^{n+1}[\xi] = 0 \tag{22}$$

Рассмотрим слагаемые (22) при $n = 1$ и $n = 2$:

$$D_x^1[\vartheta_1] + \frac{1-\alpha}{2}D_x^2[\xi] = 0 \tag{23}$$

$$D_x^2[\vartheta_1] + \frac{2-\alpha}{3}D_x^3[\xi] = 0 \tag{24}$$

Продифференцируем (23) по x и из полученного выражения вычтем (24), получим, что:

$$D_x^3[\xi] = 0 \Rightarrow \xi = Ax^2 + Bx + C \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24) получаем, что:

$$D_x^2[\vartheta_1] = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = Dx + E \tag{26}$$

Теперь расщепим по ${}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}[v]$ при $n > 0$, аналогично получаем:

$$D_x^1[\vartheta_1] - \frac{1-\alpha}{2} D_x^2[\xi] = 0 \tag{27}$$

$$D_x^2[\vartheta_1] + \frac{2-\alpha}{3} D_x^3[\xi] = 0 \tag{28}$$

Подставим (26) в (27), тогда:

$$D = (1-\alpha)A \tag{29}$$

Но, из (23):

$$D + (1-\alpha)A = 0 \Rightarrow D = -(1-\alpha)A \tag{30}$$

Значит, из (29) и (30) следует:

$$D = A = 0$$

Расщепим по ${}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}[u]$ при $n > 0$ (аналогично можно расмотреть ${}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}[u]$), получим:

$$D_x^1[\mu_1] - \frac{1-\alpha}{2} D_x^2[\xi] = 0$$

$$D_x^2[\mu_1] + \frac{2-\alpha}{3} D_x^3[\xi] = 0$$

Сравнивая с (27) и (28), заключаем:

$$\mu_1 = \vartheta_1 = E$$

Теперь расщепим по ${}_a\mathcal{D}_x^{\alpha}[v]$ и ${}_a\mathcal{D}_x^{\alpha}[u]$, получим равенства:

$$\mu_1 - D_t[\tau] = \vartheta_1 - \alpha D_x[\xi] \tag{31}$$

$$-\vartheta_1 + D_t[\tau] = -\mu_1 + \alpha D_x[\xi] \tag{32}$$

Откуда получаем, что:

$$\begin{aligned} D_t[\tau] = \alpha D_x[\xi] = \alpha B \\ \tau = \alpha B t + f(x) \end{aligned} \tag{33}$$

Расщепим теперь слагаемые вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}\left[{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha}[v] + {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha}[v]\right] D_x^n[\tau]$$

Тогда можно заключить, что:

$$D_x^n[\tau] = 0 \to D_x^1[\tau]\, s = f'(x) = 0 \to f(x) = F \equiv const$$

$$\tau = \alpha B t + F \tag{34}$$

Из оставшихся слагаемых получаем систему:

$$\begin{cases} D_t\left[\mu_0\right] = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha\left[\vartheta_0\right] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha\left[\vartheta_0\right] \\ D_t\left[\vartheta_0\right] = -{}_a\mathcal{D}_x^\alpha\left[\mu_0\right] - {}_x\mathcal{D}_b^\alpha\left[\mu_0\right] \end{cases} \tag{35}$$

Таким образом, функции μ_0 и ϑ_0 остаются произвольными функциями, удовлетворяющие системе (35), пораждая бесконечномерную группу преобразований.

Таким образом, получаем следующие инфинитезимальные генераторы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \tag{36}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{37}$$

$$X_3 = (u + \mu_0(t, x))\frac{\partial}{\partial u} + (v + \vartheta_0(t, x))\frac{\partial}{\partial v} \tag{38}$$

$$X_4 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} \tag{39}$$

Частным случаем (38) при $\mu_0 = v - u$ и $\vartheta_0 = -u - v$ будет преобразование вращения:

$$X = v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}$$

2.2. ПОИСК СИММЕТРИЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПРОИЗВОДНЫМИ МАРШО

Теперь рассмотрим дробно-дифференциальное обобщение уравнения Шредингера на всей числовой оси. Как уже было показано (см. теоретическую часть), для этого удобно переходить к производным Маршо. Уравнение принимает вид:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbb{D}_+^\alpha[\psi] + \mathbb{D}_-^\alpha[\psi], \quad \alpha \in (1, 2), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \tag{40}$$

Аналогично предыдущему пункту полагаем $\psi(t, x) = u(t, x) + iv(t, x)$ и приходим к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \quad \mathbb{D}_+^\alpha[v] + \mathbb{D}_-^\alpha[v] \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\left(\mathbb{D}_+^\alpha[u] + \mathbb{D}_-^\alpha[u]\right) \end{cases} \tag{41}$$

Общего алгоритма поиска симметрий для оператора дробной производной Маршо нет. Поэтому ограничимся лишь проверкой некоторых симметрий.

Инфинитезимальный генератор будем искать в виде:

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial u} + \vartheta\frac{\partial}{\partial v}$$

Тогда инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет вид:

$$\begin{aligned}\tilde{X} = X + \left(\zeta^u\frac{\partial}{\partial u_t} + \rho^u\frac{\partial}{\partial(\mathbb{D}_+^\alpha[u])} + \lambda^u\frac{\partial}{\partial(\mathbb{D}_-^\alpha[u])}\right) + \\ + \left(\zeta^v\frac{\partial}{\partial v_t} + \rho^v\frac{\partial}{\partial(\mathbb{D}_+^\alpha[v])} + \lambda^v\frac{\partial}{\partial(\mathbb{D}_-^\alpha[v])}\right)\end{aligned} \tag{42}$$

Координаты ζ^u, ζ^v будут определяться по формуле (11), остальные координаты представим в общем виде (10):

Применим оператор (42) к системе (41):

$$\begin{cases} D_t\left[\mu\right] - u_t D_t\left[\tau\right] - u_x D_t\left[\xi\right] = \\ \qquad =\mathbb{D}_-^\alpha[\vartheta - \xi v_x - \tau v_t] + \xi D_x\left[\mathbb{D}_-^\alpha[v]\right] + \tau D_t\left[\mathbb{D}_-^\alpha[v]\right] + \\ \qquad +\mathbb{D}_+^\alpha[\vartheta - \xi v_x - \tau v_t] + \xi D_x\left[\mathbb{D}_+^\alpha[v]\right] + \tau D_t\left[\mathbb{D}_+^\alpha[v]\right] \\ D_t\left[\vartheta\right] - v_t D_t\left[\tau\right] - v_x D_t\left[\xi\right] = \\ \qquad = -\left(\mathbb{D}_-^\alpha[\mu - \xi u_x - \tau u_t] + \xi D_x\left[\mathbb{D}_-^\alpha[u]\right] + \tau D_t\left[\mathbb{D}_-^\alpha[u]\right]\right) + \\ \qquad + -\left(\mathbb{D}_+^\alpha[\mu - \xi u_x - \tau u_t] + \xi D_x\left[\mathbb{D}_+^\alpha[u]\right] + \tau D_t\left[\mathbb{D}_+^\alpha[u]\right]\right) \end{cases} \tag{43}$$

Это не определяющая система, но для удобства будем в неё подставлять различные симметрии, а затем, если это будет необходимо, будем делать замену в силу исходной системы (41).

1. $\xi = 1, \tau = 0, \mu = 0, \vartheta = 0$. Поскольку производная Маршо от константы равна нулю, то данные координаты в явном виде обнуляют систему (43).

2. $\xi = 0, \tau = 1, \mu = 0, \vartheta = 0$. Аналогично предыдущему пункту.

3. $\xi = x, \tau = t, \mu = 0, \vartheta = 0$.

$$\begin{aligned}-u_t =&\mathbb{D}_-^\alpha[-xv_x - tv_t] + xD_x\left[\mathbb{D}_-^\alpha[v]\right] + tD_t\left[\mathbb{D}_-^\alpha[v]\right] + \\ &+\mathbb{D}_+^\alpha[-xv_x - tv_t] + xD_x\left[\mathbb{D}_+^\alpha[v]\right] + tD_t\left[\mathbb{D}_+^\alpha[v]\right]\end{aligned}$$

   В условиях существования производных Маршо от функций u, v можно поменять порядок интегрирования и дифференцирования. Тогда некоторые слагаемые сократятся:

$$-u_t =\mathbb{D}_-^\alpha[-xv_x] + x\mathbb{D}_-^\alpha[v_x] + \mathbb{D}_+^\alpha[-xv_x] + x\mathbb{D}_+^\alpha[v_x]$$

Используя формулу (8):

$$-u_t = -\mathbb{D}_-^{\alpha}[v] - x\mathbb{D}_-^{\alpha}[v_x] + x\mathbb{D}_-^{\alpha}[v_x] - \mathbb{D}_+^{\alpha}[v] - x\mathbb{D}_+^{\alpha}[v_x] + x\mathbb{D}_+^{\alpha}[v_x]$$

$$u_t = \mathbb{D}_-^{\alpha}[v]\mathbb{D}_+^{\alpha}[v]$$

В силу (41) получаем тождественное равенство. Аналогичное тождество получаем у второго уравнения системы (43).

4. $\xi = 0, \tau = 0, \mu = u, \vartheta = v$. После постановки в явном виде получаем систему (43).

5. $\xi = 0, \tau = 0, \mu = -v, \vartheta = u$. Аналогично получаем систему (43).

Таким образом, все основные симметрии, допускаемые уравнением (17) на конечном отрезке допускаются и в случае бесконечного интервала.

Заметим, однако, что в предельном случае $\alpha = 2$, то есть когда дробные производные переходят в классическую вторую производную,уравнение будет допускать аналог преобразования Галлилея при:

$$\xi = t, \tau = 0, \mu = \frac{1}{4}xv, \vartheta = -\frac{1}{4}xu$$

Попробуем проверить будет ли иметь место аналог такого преобразования в случае дробного порядка на бесконечном интервале. Положим:

$$\xi = t, \tau = 0$$

Подставим их в (43), получим:

$$\begin{cases} \mu_t - u_x = \mathbb{D}_+^{\alpha}[\vartheta] + \mathbb{D}_-^{\alpha}[\vartheta] \\ \vartheta_t - v_x = -\mathbb{D}_+^{\alpha}[\mu] - \mathbb{D}_-^{\alpha}[\mu] \end{cases}$$

По аналогии с предельным случаем $\alpha = 2$ положим $\mu = \beta xv, \vartheta = -\beta xu$. Тогда для первого уравнения системы:

$$u_x = \beta\left(\mathbb{D}_+^{\alpha-1}[u] + \mathbb{D}_-^{\alpha-1}[u]\right)$$

Данное равенство возможно только в случае целого $\alpha = 2$. При любом другом выборе μ и ϑ усложняется правая часть уравнения и не удается подобрать такие функции, чтобы получить необходимую допускаемую симметрию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения курсовой работы был проведен групповой анализ дробно-дифференциального уравнения Шредингера с производными Римана-Лиувилля, в ходе которого была найдена бесконечномерная алгебра операторов, среди которых есть операторы сдвига и однородного растяжения по времени и пространству.

Все данные операторы также допускаются дробно-дифференциальным уравнением Шредингера с производными Маршо, преобразование Галлилея в том виде, в котором допускается классическим уравнением, найдено не было.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

2. Касаткин А. А. Симметрии и точные решения уравнений с производными дробного порядка типа Римана–Лиувилля: Дисс. канд. физ.-мат. наук. 2013. УГАТУ. 118 с.

3. Лукащук, В. О., С. Ю. Лукащук. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка: основы классической теории и группового анализа. - Уфа: УГАТУ, 2022.

4. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.