СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ И МАРШО

1.2. АЛГОРИТМ ПОИСКА СИММЕТРИЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\varrho_{Lu} = L\left(\eta^u - \sum_{i=0}^{n} \xi^i u_i\right) + \sum_{i=0}^{n} \xi^i D_i \left[Lu\right] \tag{1}$$

Например, если $u = u(t,x)$, тогда по формуле (1) рассчитаем координаты продолжения необходимых в дальнейшем изложении операторов:

$$\varrho_{\frac{\partial u}{\partial t}} = D_t\left[\eta^u\right] - u_t D_t\left[\xi^t\right] - u_x D_t\left[\xi^x\right] \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \varrho_{{}_a\mathcal{D}_x^\alpha[u]} = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha\left[\eta^u\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{n-\alpha}{n+1}{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}\left[u\right] D_x^{n+1}\left[\xi^x\right] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}\left[u_t\right] D_x^{n}\left[\xi^t\right] \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \varrho_{{}_x\mathcal{D}_b^\alpha[u]} = {}_x\mathcal{D}_b^\alpha\left[\eta^u\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n\frac{n-\alpha}{n+1}{}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}\left[u\right] D_x^{n+1}\left[\xi^x\right] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n{}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}\left[u_t\right] D_x^{n}\left[\xi^t\right] \end{aligned} \tag{4}$$

Положим, что

$$\xi^x = \xi^x(t,x), \quad \xi^t = \xi^t(t,x), \quad \eta^u = \eta_0^u(t,x) + \eta_1^u u. \tag{5}$$

Такие однопараметрические группы преобразований с координатами (5) называются группами линейно-автономных преобразований.

Дробно-дифференциальные операторы не обладают свойством линеаризации. Это связано с их нелокальностью в отличие от операторов целочисленного дифференцирования. Поэтому нелинейные преобразования не могут преобразовывать линейный дробный оператор в оператор того же вида. На данный момент неизвестно ни одной симметрии дробно-дифференциальных уравнений, не являющейся линейно-автономной симметрией. (подробнее см. [2] стр. 138).

В таких предоположениях координаты можно вычислить по формулам:

$$\varrho_{{}_a\mathcal{D}_x^\alpha[u]} = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha\left[\eta_0^u\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}[u]\left(D_x^n\left[\eta_1^u\right] + \frac{n-\alpha}{n+1}D_x^{n+1}[\xi^x]\right) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}[u_t]\,D_x^n\left[\xi^t\right] \tag{6}$$

$$\varrho_{{}_x\mathcal{D}_b^\alpha[u]} = {}_x\mathcal{D}_b^\alpha\left[\eta_0^u\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}[u]\left(D_x^n\left[\eta_1^u\right] + (-1)^n\frac{n-\alpha}{n+1}D_x^{n+1}[\xi^x]\right) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n{}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}[u_t]\,D_x^n\left[\xi^t\right] \tag{7}$$

$$\mathbb{D}_\pm^\alpha[xf_x] = \mathbb{D}_\pm^\alpha[f] + x\mathbb{D}_\pm^\alpha[f_x] \tag{8}$$

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. ПОИСК СИММЕТРИЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Рассматривается дробно-диффереціальное обобщение уравнение Шредингера:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha[\psi] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha[\psi], \quad \alpha\in(1,2), \quad t>0, \quad x\in[a,b] \tag{9}$$

Представим функцию $\psi(t,x)$ в виде:

$$\psi(t,x) = u(t,x) + iv(t,x)$$

Тогда (9) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha[v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha[v] \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\left({}_a\mathcal{D}_x^\alpha[u] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha[u]\right) \end{cases} \tag{10}$$

Инфинитезимальный генератор будем искать в виде:

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial u} + \vartheta\frac{\partial}{\partial v}$$

Тогда инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет вид:

$$\tilde{X} = X + \left(\zeta^u \frac{\partial}{\partial u_t} + \rho^u \frac{\partial}{\partial({}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u])} + \lambda^u \frac{\partial}{\partial({}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u])}\right) + \\ + \left(\zeta^v \frac{\partial}{\partial v_t} + \rho^v \frac{\partial}{\partial({}_a\mathcal{D}_x^\alpha [v])} + \lambda^v \frac{\partial}{\partial({}_x\mathcal{D}_b^\alpha [v])}\right) \tag{11}$$

Координаты ζ^u, ζ^v будут иметь вид (2), ρ^u, ρ^v вид (6), а λ^u, λ^v соответственно вид (7).

Применим генератор (11) к системе (10):

$$\begin{cases} \zeta^u = \rho^v + \lambda^v \\ \zeta^v = -(\rho^u + \lambda^u) \end{cases} \tag{12}$$

Определяющая система примет следующий вид:

$$\begin{cases} uD_t [\mu_1] + D_t [\mu_0] + \left({}_a\mathcal{D}_x^\alpha [v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [v]\right) \left(\mu_1 + D_t [\tau]\right) - D_x [u] D_t [\xi] = \\ = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha [\vartheta_0] + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [v] \left(D_x^n [\vartheta_1] + \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{n+1} [\xi]\right) + \\ + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [\vartheta_0] + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [v] \left(D_x^n [\vartheta_1] + (-1)^n \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{n+1} [\xi]\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} \left[{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u]\right] D_x^n [\tau] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} \left[{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u]\right] D_x^n [\tau] \\ vD_t [\vartheta_1] + D_t [\vartheta_0] + \left({}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u]\right) \left(D_t [\tau] - \vartheta_1\right) - D_x [v] D_t [\xi] = \\ = -{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [\mu_0] - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [u] \left(D_x^n [\mu_1] + \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{n+1} [\xi]\right) - \\ - {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [\mu_0] + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [u] \left(D_x^n [\mu_1] + (-1)^n \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{n+1} [\xi]\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} \left[{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [v]\right] D_x^n [\tau] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} \left[{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [v]\right] D_x^n [\tau] \end{cases} \tag{13}$$

Расщепив систему (13) по u и v (первые слагаемые в каждой системе), можно сделать вывод о том, что $\mu_1 = \mu_1(x), \vartheta_1 = \vartheta_1(x)$.

Если расщепить по ${}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [v]$, то получим, что

$$D_x^n [\vartheta_1] + \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{n+1} [\xi] = 0 \tag{14}$$

Рассмотрим слагаемые (14) при $n = 1$ и $n = 2$:

$$D_x^1[\vartheta_1] + \frac{1-\alpha}{2} D_x^2[\xi] = 0 \tag{15}$$

$$D_x^2[\vartheta_1] + \frac{2-\alpha}{3} D_x^3[\xi] = 0 \tag{16}$$

Продифференцируем (15) по x и из полученного выражения вычтем (16), получим, что:

$$D_x^3[\xi] = 0 \Rightarrow \xi = Ax^2 + Bx + C \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16) получаем, что:

$$D_x^2[\vartheta_1] = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = Dx + E \tag{18}$$

Теперь расщепим по ${}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}[v]$ при $n > 0$, аналогично получаем:

$$D_x^1[\vartheta_1] - \frac{1-\alpha}{2} D_x^2[\xi] = 0 \tag{19}$$

$$D_x^2[\vartheta_1] + \frac{2-\alpha}{3} D_x^3[\xi] = 0 \tag{20}$$

Подставим (18) в (19), тогда:

$$D = (1-\alpha)A \tag{21}$$

Но, из (15):

$$D + (1-\alpha)A = 0 \Rightarrow D = -(1-\alpha)A \tag{22}$$

Значит, из (21) и (22) следует:

$$D = A = 0$$

Расщепим по ${}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n}[u]$ при $n > 0$ (аналогично можно расмотреть ${}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}[u]$), получим:

$$D_x^1[\mu_1] - \frac{1-\alpha}{2} D_x^2[\xi] = 0$$

$$D_x^2[\mu_1] + \frac{2-\alpha}{3} D_x^3[\xi] = 0$$

Сравнивая с (19) и (20), заключаем:

$$\mu_1 = \vartheta_1 = E$$

Теперь расщепим по ${}_a\mathcal{D}_x^{\alpha}[v]$ и ${}_a\mathcal{D}_x^{\alpha}[u]$, получим равенства:

$$\mu_1 - D_t[\tau] = \vartheta_1 - \alpha D_x[\xi] \tag{23}$$

$$-\vartheta_1 + D_t[\tau] = -\mu_1 + \alpha D_x[\xi] \tag{24}$$

Откуда получаем, что:

$$\begin{aligned} D_t\left[\tau\right] = \alpha D_x\left[\xi\right] = \alpha B \\ \tau = \alpha B t + f(x) \end{aligned} \tag{25}$$

Расщепим теперь слагаемые вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n}\left[{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha}\left[v\right] + {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha}\left[v\right]\right]D_x^n\left[\tau\right]$$

Тогда можно заключить, что:

$$D_x^n\left[\tau\right] = 0 \to D_x^1\left[\tau\right]s = f'(x) = 0 \to f(x) = F \equiv const$$

$$\tau = \alpha B t + F \tag{26}$$

Из оставшихся слагаемых получаем систему:

$$\begin{cases} D_t\left[\mu_0\right] = {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha}\left[\vartheta_0\right] + {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha}\left[\vartheta_0\right] \\ D_t\left[\vartheta_0\right] = -{}_a\mathcal{D}_x^{\alpha}\left[\mu_0\right] - {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha}\left[\mu_0\right] \end{cases} \tag{27}$$

Таким образом, функции μ_0 и ϑ_0 остаются произвольными функциями, удовлетворяющие системе (27), пораждая бесконечномерную группу преобразований.

Таким образом, получаем следующие инфинитезимальные генераторы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} \tag{28}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial t} \tag{29}$$

$$X_3 = (u + \mu_0(t,x))\frac{\partial}{\partial u} + (v + \vartheta_0(t,x))\frac{\partial}{\partial v} \tag{30}$$

$$X_4 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} \tag{31}$$

Частным случаем (30) при $\mu_0 = v - u$ и $\vartheta_0 = -u - v$ будет преобразование вращения:

$$X = v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}$$

2.2. ПОИСК СИММЕТРИЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПРОИЗВОДНЫМИ МАРШО

Теперь рассмотрим дробно-дифференциальное обобщение уравнения Шредингера на всей числовой оси. Как уже было показано (см. теоретическую часть), для того удобно переходить к производным Маршо. Уравнение принимает вид:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathbb{D}^{\alpha}_{+}[\psi] + \mathbb{D}^{\alpha}_{-}[\psi], \quad \alpha \in (1,2), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \tag{32}$$

Аналогично предыдущему пункту полагаем $\psi(t,x) = u(t,x) + iv(t,x)$ и приходим к системе:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \quad \mathbb{D}^{\alpha}_{+}[v] + \mathbb{D}^{\alpha}_{-}[v] \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\left(\mathbb{D}^{\alpha}_{+}[u] + \mathbb{D}^{\alpha}_{-}[u]\right) \end{cases} \tag{33}$$

Общего алгоритма поиска симметрий для оператора дробной производной Маршо нет. Поэтому ограничимся лишь проверкой некоторых симметрий.

Инфинитезимальный генератор будем искать в виде:

$$X = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial u} + \vartheta\frac{\partial}{\partial v}$$

Тогда инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{X} = X &+ \left(\zeta^u\frac{\partial}{\partial u_t} + \rho^u\frac{\partial}{\partial(\mathbb{D}^{\alpha}_{+}[u])} + \lambda^u\frac{\partial}{\partial(\mathbb{D}^{\alpha}_{-}[u])}\right) + \\ &+ \left(\zeta^v\frac{\partial}{\partial v_t} + \rho^v\frac{\partial}{\partial(\mathbb{D}^{\alpha}_{+}[v])} + \lambda^v\frac{\partial}{\partial(\mathbb{D}^{\alpha}_{-}[v])}\right) \end{aligned} \tag{34}$$

Координаты ζ^u, ζ^v будут определяться по формуле (2), остальные координаты представим в общем виде (1):

Применим оператор (34) к системе (33):

$$\begin{cases} D_t[\mu] - u_t D_t[\tau] - u_x D_t[\xi] = \\ \qquad = \mathbb{D}^{\alpha}_{-}[\vartheta - \xi v_x - \tau v_t] + \xi D_x\left[\mathbb{D}^{\alpha}_{-}[v]\right] + \tau D_t\left[\mathbb{D}^{\alpha}_{-}[v]\right] + \\ \qquad + \mathbb{D}^{\alpha}_{+}[\vartheta - \xi v_x - \tau v_t] + \xi D_x\left[\mathbb{D}^{\alpha}_{+}[v]\right] + \tau D_t\left[\mathbb{D}^{\alpha}_{+}[v]\right] \\ D_t[\vartheta] - v_t D_t[\tau] - v_x D_t[\xi] = \\ \qquad = \mathbb{D}^{\alpha}_{-}[\mu - \xi u_x - \tau u_t] + \xi D_x\left[\mathbb{D}^{\alpha}_{-}[u]\right] + \tau D_t\left[\mathbb{D}^{\alpha}_{-}[u]\right] + \\ \qquad + \mathbb{D}^{\alpha}_{+}[\mu - \xi u_x - \tau u_t] + \xi D_x\left[\mathbb{D}^{\alpha}_{+}[u]\right] + \tau D_t\left[\mathbb{D}^{\alpha}_{+}[u]\right] \end{cases} \tag{35}$$

Это не определяющая система, но для удобства будем в неё подставлять различные симметрии, а затем, если это будет необходимо, будем делать замену в силу исходной системы (33).

1. $\xi = 1, \tau = 0, \mu = 0, \vartheta = 0$. Поскольку производная Маршо от константы равна нулю, то данные координаты в явном виде обнуляют систему (35).

2. $\xi = 0, \tau = 1, \mu = 0, \vartheta = 0$. Аналогично предыдущему пункту.

3. $\xi = x, \tau = t, \mu = 0, \vartheta = 0$.

$$\begin{aligned}-u_t =& \mathbb{D}_-^\alpha[-xv_x - tv_t] + xD_x\left[\mathbb{D}_-^\alpha[v]\right] + tD_t\left[\mathbb{D}_-^\alpha[v]\right] + \\ &+ \mathbb{D}_+^\alpha[-xv_x - tv_t] + xD_x\left[\mathbb{D}_+^\alpha[v]\right] + tD_t\left[\mathbb{D}_+^\alpha[v]\right]\end{aligned}$$

В условиях существования производных Маршо от функций u, v можно поменять порядок интегрирования и дифференцирования. Тогда некоторые слагаемые сократятся:

$$-u_t = \mathbb{D}_-^\alpha[-xv_x] + x\mathbb{D}_-^\alpha[v_x] + \mathbb{D}_+^\alpha[-xv_x] + x\mathbb{D}_+^\alpha[v_x]$$

Используя формулу (8):

$$-u_t = -\mathbb{D}_-^\alpha[v] - x\mathbb{D}_-^\alpha[v_x] + x\mathbb{D}_-^\alpha[v_x] - \mathbb{D}_+^\alpha[v] - x\mathbb{D}_+^\alpha[v_x] + x\mathbb{D}_+^\alpha[v_x]$$

$$u_t = \mathbb{D}_-^\alpha[v]\mathbb{D}_+^\alpha[v]$$

В силу (33) получаем тождественное равенство. Аналогичное тождество получаем у второго уравнения системы (35).

4. $\xi = 0, \tau = 0, \mu = u, \vartheta = v$. После постановки в явном виде получаем систему (35).

5. $\xi = 0, \tau = 0, \mu = -v, \vartheta = u$. Аналогично получаем систему (35).

Таким образом, все основные симметрии, допускаемые уравнением (9) на конечном отрезке допускаются и в случае бесконечного интервала.

Заметим, однако, что в предельном случае $\alpha = 2$, то есть когда дробные производные переходят в классическую вторую производную,уравнение будет допускать аналог преобразования Галлилея при:

$$\xi = t, \tau = 0, \mu = \frac{1}{4}xv, \vartheta = -\frac{1}{4}xu$$

Попробуем проверить будет ли иметь место аналог такого преобразования в случае дробного порядка на бесконечном интервале. Положим:

$$\xi = t, \tau = 0$$

Подставим их в (35), для первого уравнения системы получим:

$$\mu_t - u_x = \mathbb{D}_+^{\alpha}[\vartheta] + \mathbb{D}_-^{\alpha}[\vartheta]$$

По аналогии с предельным случаем $\alpha = 2$ положим $\mu = \beta x v, \vartheta = -\beta x u$:

$$u_x = \beta \left(\mathbb{D}_+^{\alpha-1}[u] + \mathbb{D}_-^{\alpha-1}[u]\right)$$

Данное равенство возможно только в случае целого $\alpha = 2$. При любом другом выборе μ и ϑ усложняется правая часть уравнения и не удается подобрать такие функции, чтобы получить необходимую допускаемую симметрию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ы

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

2. Лукащук, В. О., С. Ю. Лукащук. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка: основы классической теории и группового анализа. - Уфа: УГАТУ, 2022.

3. Касаткин А. А. Симметрии и точные решения уравнений с производными дробного порядка типа Римана–Лиувилля: Дисс. канд. физ.-мат. наук. 2013. УГАТУ. 118 с.

4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.