

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уфимский университет науки и технологий»

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100										
90										
80										
70										
60										
50										
40										
30										
20										
10										
0										

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовой работе по дисциплине

«Теория разностных схем»

3952.336209.000 ПЗ

Группа МКН-316	Фамилия И.О.	Подпись	Дата	Оценка
Студент	Султанов М.Ф.			
Консультант	Лукащук С.Ю.			
Принял	Лукащук В.О.			

Уфа 2023

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уфимский университет науки и технологий»

Кафедра Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

ЗАДАНИЕ

на курсовую работу по дисциплине

«Теория разностных схем»

Студент: Султанов Мурат Фаритович

Группа: МКН-316

Консультант: Лукащук Станислав Юрьевич

1. Тема курсовой работы

Групповой анализ дробно-дифференциального обобщения уравнения Шредингера

2. Основное содержание

- 2.1. Провести групповой анализ дробно-дифференциального уравнения Шредингера с производными Римана-Лиувилля
- 2.2. Проверить, допускаются ли
- 2.3. Оформить пояснительную записку к курсовой работе.

3. Требования к оформлению материалов работы

3.1. Требования к оформлению пояснительной записки

Пояснительная записка к курсовой работе должна быть оформлена в соответствии с требованиями ГОСТ и содержать

- титульный лист,
- задание на курсовую работу,
- содержание,
- введение,
- заключение,
- список литературы,
- приложение, содержащее листинг разработанной программы, если таковая имеется.

Дата выдачи задания

"__" _____ 202_ г.

Дата окончания работы

"__" _____ 202_ г.

Консультант _____ Лукащук С.Ю.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1. Теоретическая часть	6
1.1. Основные сведения о дробных производных Римана-Лиувилля и Маршо	6
1.2. Алгоритм поиска симметрий дробно-дифференциальных уравнений	7
2. Практическая часть	9
2.1. Поиск симметрий дробно-дифференциального обобщения уравнения Шредингера с производными Римана-Лиувилля	9
2.2. Поиск симметрий дробно-дифференциального обобщения уравнения Шредингера с производными Маршо	13
Заключение	17
Список литературы	18

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является исследование свойств симметрии дробно-дифференциального обобщения уравнения Шредингера, полученное путем замены обычных производных на дробные производные Римана-Лиувилля и Маршо.

Для достижения данной цели необходимо выполнить задачи:

- Методами группового анализа в случае оператора Римана-Лиувилля
 - вывести формулы координат продолжения инфинитиземального генератора группы
 - решить определяющую систему и найти координаты допускаемых операторов
- В случае производных Маршо проверить наличие симметрий, полученных на предыдущем шаге, а также исследовать уравнение на наличие симметрии Галиллея.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ И МАРШО

Фундаментальное введение в теорию дробных производных можно найти в монографии [1]. В данной работе кратко приведем основные сведения о дробных производных Римана-Лиувилля и Маршо, необходимые для группового анализа дробно-дифференциальных уравнений.

Большинство доказательств приведенных ниже формул можно найти, например, в [2] и [3].

Рассмотрим функцию $f(x) \in L_1(a, b)$, где (a, b) конечный интервал.

Определение. Интегро-дифференциальное выражение

$${}_a\mathcal{D}_x^\alpha [f](x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{\alpha-n+1}} d\xi \quad (1)$$

где $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ называется левосторонней дробной производной Римана-Лиувилля порядка α .

Определение. Интегро-дифференциальное выражение

$${}_x\mathcal{D}_b^\alpha [f](x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{f(\xi)}{(\xi-x)^{\alpha-n+1}} d\xi \quad (2)$$

где $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ называется правосторонней дробной производной Римана-Лиувилля порядка α .

Утверждение. При переходе к пределу $\alpha \rightarrow n, n \in \mathbb{N}$, дробные производные (1) и (2) переходят в производную целого порядка $f^{(n)}(x)$.

Утверждение. Если $f(x), g(x)$ аналитические функции, то справедливо обобщенное правило Лейбница:

$${}_x\mathcal{D}_b^\alpha [f(x)g(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [f(x)] D_x^n [g(x)] \quad (3)$$

$${}_a\mathcal{D}_x^\alpha [f(x)g(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [f(x)] D_x^n [g(x)] \quad (4)$$

где биномиальные коэффициенты определяются через гамма-функцию:

$$\binom{p}{q} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(p-q+1)}$$

Утверждение. Пусть $f(x) \in AC^n[a, b]$, тогда справедливы равенства:

$${}_x\mathcal{D}_b^\alpha [g(x)f'(x)] = (-1)^n \left({}_x\mathcal{D}_b^{\alpha+1} [g(x)f(x)] \right) - {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [f(x)D_x [g(x)]] \quad (5)$$

$${}_a\mathcal{D}_x^\alpha [g(x)f'(x)] = {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha+1} [g(x)f(x)] - {}_a\mathcal{D}_x^\alpha [f(x)D_x [g(x)]] \quad (6)$$

Теперь рассмотрим случай бесконечного интервала. Следуя [1], введем операторы дробной производной Маршо. Они оказываются очень удобными при обобщении операторов (1) и (2) на случай $x \in (-\infty, \infty)$. В той же монографии приведены условия, предъявляемые для функции, для которой будет определено применение оператора (см. теорему 5.9). Следует отметить то, что производные Маршо и Римана-Лиувилля в случае бесконечного интервала совпадают на достаточно широком классе функций.

Определение. Лево- и правосторонней дробной производной Маршо порядка $\alpha > 1$ будем называть операторы:

$$\mathbb{D}_+^\alpha [f(x)] = \frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1 - \{\alpha\})} \int_0^\infty \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x - \xi)}{\xi^{1+\{\alpha\}}} d\xi \quad (7)$$

$$\mathbb{D}_-^\alpha [f(x)] = \frac{\{\alpha\}}{\Gamma(1 - \{\alpha\})} \int_0^\infty \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x + \xi)}{\xi^{1+\{\alpha\}}} d\xi \quad (8)$$

Здесь $n = [\alpha]$, $\alpha = n + \{\alpha\}$.

Утверждение. Производные маршо от константы равны нулю.

Для дальнейших вычислений нам потребуется ормула:

$$\mathbb{D}_\pm^\alpha [xf'(x)] = \mathbb{D}_\pm^\alpha [f(x)] + x\mathbb{D}_\pm^\alpha [f'(x)] \quad (9)$$

1.2. АЛГОРИТМ ПОИСКА СИММЕТРИЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Подробно теория классического группового анализа изложена в [4]. Анализ в случае функции одной переменной с оператором дробной производной Римана-Лиувилля подробно рассмотрен в [3] и [2].

Алгоритм построения допускаемых генераторов группы симметрий дифференциального уравнения $F = F(t, x, u, \dots, \Delta_i, \dots)$, где Δ_i - некоторый оператор.

1. Рассматриваются инфинитезимальные операторы X вида:

$$X = \xi^t(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta^u(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

2. Формула продолжения в общем виде:

$$\zeta_{Lu} = L \left(\eta^u - \sum_{i=0}^n \xi^i u_i \right) + \sum_{i=0}^n \xi^i D_i [Lu] \quad (10)$$

3. Координаты допускаемых операторов ищутся из определяющего уравнения:

$$(\tilde{X}F) \Big|_{F=0} = 0$$

здесь \tilde{X} - продолженный на необходимые производные оператор X .

В случае ДУЧП дробного порядка вида:

$$F(t, x, u, u_t, {}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u], {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u])$$

алгоритм требует некоторых изменений.

1. Рассматриваются инфинитезимальные операторы X вида:

$$X = \xi^t(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^x(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta^u(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

где ξ^t и ξ^x такие, что допускается симметрия $x - a = 0$ и $x - b = 0$ (условие инвариантности оператора относительно замены переменных).

2. Формулы продолжений запишутся в виде:

$$\zeta_{\frac{\partial u}{\partial t}} = D_t [\eta^u] - u_t D_t [\xi^t] - u_x D_t [\xi^x] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u]} = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha [\eta^u] + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{n-\alpha}{n+1} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [u] D_x^{n+1} [\xi^x] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [u_t] D_x^n [\xi^t] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \zeta_{{}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u]} = {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [\eta^u] + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n \frac{n-\alpha}{n+1} {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [u] D_x^{n+1} [\xi^x] - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [u_t] D_x^n [\xi^t] \end{aligned} \quad (13)$$

Однако, расчет можно сильно упростить. Положим, что

$$\xi^x = \xi^x(t, x), \quad \xi^t = \xi^t(t, x), \quad \eta^u = \eta_0^u(t, x) + \eta_1^u u. \quad (14)$$

Такие однопараметрические группы преобразований с координатами (14) называются группами линейно-автономных преобразований.

Дробно-дифференциальные операторы не обладают свойством линеаризации. Это связано с их нелокальностью в отличие от операторов

целочисленного дифференцирования. Поэтому нелинейные преобразования не могут преобразовывать линейный дробный оператор в оператор того же вида. На данный момент неизвестно ни одной симметрии дробно-дифференциальных уравнений, не являющейся линейно-автономной симметрией (подробнее см. [3] стр. 138).

В таких предположениях координаты можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned} \zeta_a \mathcal{D}_x^\alpha [u] = & {}_a \mathcal{D}_x^\alpha [\eta_0^u] + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a \mathcal{D}_x^{\alpha-n} [u] \left(D_x^n [\eta_1^u] + \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{n+1} [\xi^x] \right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a \mathcal{D}_x^{\alpha-n} [u_t] D_x^n [\xi^t] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \zeta_x \mathcal{D}_b^\alpha [u] = & {}_x \mathcal{D}_b^\alpha [\eta_0^u] + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_x \mathcal{D}_b^{\alpha-n} [u] \left(D_x^n [\eta_1^u] + (-1)^n \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{n+1} [\xi^x] \right) - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n {}_x \mathcal{D}_b^{\alpha-n} [u_t] D_x^n [\xi^t] \end{aligned} \quad (16)$$

3. Координаты допускаемых операторов ищутся из определяющего уравнения:

$$\begin{aligned} (\tilde{X}F) \Big|_{F=0} &= 0 \\ \tilde{X} &= X + \zeta^0 \frac{\partial}{\partial u_t} + \zeta^1 \frac{\partial}{\partial {}_a \mathcal{D}_x^\alpha [u]} + \zeta^2 \frac{\partial}{\partial {}_x \mathcal{D}_b^\alpha [u]} \end{aligned}$$

$\zeta^0, \zeta^1, \zeta^2$ определяются соответственно по формулам (11), (15), (16).

Данный алгоритм можно обобщить и на случай системы ДУЧП дробного порядка.

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. ПОИСК СИММЕТРИЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Рассматривается дробно-дифференциальное обобщение уравнение Шредингера:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = {}_a \mathcal{D}_x^\alpha [\psi] + {}_x \mathcal{D}_b^\alpha [\psi], \quad \alpha \in (1, 2), \quad t > 0, \quad x \in [a, b] \quad (17)$$

Представим функцию $\psi(t, x)$ в виде:

$$\psi(t, x) = u(t, x) + iv(t, x)$$

Тогда (17) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha [v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [v] \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -\left({}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u]\right) \end{cases} \quad (18)$$

Инфинитезимальный генератор будем искать в виде:

$$X = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial u} + \vartheta \frac{\partial}{\partial v}$$

Тогда инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{X} = X &+ \left(\zeta^u \frac{\partial}{\partial u_t} + \rho^u \frac{\partial}{\partial ({}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u])} + \lambda^u \frac{\partial}{\partial ({}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u])} \right) + \\ &+ \left(\zeta^v \frac{\partial}{\partial v_t} + \rho^v \frac{\partial}{\partial ({}_a\mathcal{D}_x^\alpha [v])} + \lambda^v \frac{\partial}{\partial ({}_x\mathcal{D}_b^\alpha [v])} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Координаты ζ^u, ζ^v будут иметь вид (11), ρ^u, ρ^v вид (15), а λ^u, λ^v соответственно вид (16).

Применим генератор (19) к системе (18):

$$\begin{cases} \zeta^u = \rho^v + \lambda^v \\ \zeta^v = -(\rho^u + \lambda^u) \end{cases} \quad (20)$$

Определяющая система примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & uD_t [\mu_1] + D_t [\mu_0] + ({}_a\mathcal{D}_x^\alpha [v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [v]) (\mu_1 + D_t [\tau]) - D_x [u] D_t [\xi] = \\
 & \quad = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha [\vartheta_0] + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [v] \left(D_x^n [\vartheta_1] + \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{n+1} [\xi] \right) + \\
 & \quad + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [\vartheta_0] + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [v] \left(D_x^n [\vartheta_1] + (-1)^n \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{n+1} [\xi] \right) + \\
 & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u]] D_x^n [\tau] + \\
 & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u]] D_x^n [\tau] \\
 & vD_t [\vartheta_1] + D_t [\vartheta_0] + ({}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [u]) (D_t [\tau] - \vartheta_1) - D_x [v] D_t [\xi] = \\
 & \quad = -{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [\mu_0] - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [u] \left(D_x^n [\mu_1] + \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{n+1} [\xi] \right) - \\
 & \quad - {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [\mu_0] + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [u] \left(D_x^n [\mu_1] + (-1)^n \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{n+1} [\xi] \right) + \\
 & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [v]] D_x^n [\tau] + \\
 & \quad + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (-1)^n {}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [v]] D_x^n [\tau]
 \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Расщепив систему (21) по u и v (первые слагаемые в каждой системе), можно сделать вывод о том, что $\mu_1 = \mu_1(x)$, $\vartheta_1 = \vartheta_1(x)$.

Если расщепить по ${}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [v]$, то получим, что

$$D_x^n [\vartheta_1] + \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{n+1} [\xi] = 0 \quad (22)$$

Рассмотрим слагаемые (22) при $n = 1$ и $n = 2$:

$$D_x^1 [\vartheta_1] + \frac{1-\alpha}{2} D_x^2 [\xi] = 0 \quad (23)$$

$$D_x^2 [\vartheta_1] + \frac{2-\alpha}{3} D_x^3 [\xi] = 0 \quad (24)$$

Продифференцируем (23) по x и из полученного выражения вычтем (24), получим, что:

$$D_x^3 [\xi] = 0 \Rightarrow \xi = Ax^2 + Bx + C \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24) получаем, что:

$$D_x^2 [\vartheta_1] = 0 \Rightarrow \vartheta_1 = Dx + E \quad (26)$$

Теперь расщепим по ${}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [v]$ при $n > 0$, аналогично получаем:

$$D_x^1 [\vartheta_1] - \frac{1-\alpha}{2} D_x^2 [\xi] = 0 \quad (27)$$

$$D_x^2 [\vartheta_1] + \frac{2-\alpha}{3} D_x^3 [\xi] = 0 \quad (28)$$

Подставим (26) в (27), тогда:

$$D = (1 - \alpha)A \quad (29)$$

Но, из (23):

$$D + (1 - \alpha)A = 0 \Rightarrow D = -(1 - \alpha)A \quad (30)$$

Значит, из (29) и (30) следует:

$$D = A = 0$$

Расщепим по ${}_x\mathcal{D}_b^{\alpha-n} [u]$ при $n > 0$ (аналогично можно рассмотреть ${}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [u]$), получим:

$$D_x^1 [\mu_1] - \frac{1-\alpha}{2} D_x^2 [\xi] = 0$$

$$D_x^2 [\mu_1] + \frac{2-\alpha}{3} D_x^3 [\xi] = 0$$

Сравнивая с (27) и (28), заключаем:

$$\mu_1 = \vartheta_1 = E$$

Теперь расщепим по ${}_a\mathcal{D}_x^\alpha [v]$ и ${}_a\mathcal{D}_x^\alpha [u]$, получим равенства:

$$\mu_1 - D_t [\tau] = \vartheta_1 - \alpha D_x [\xi] \quad (31)$$

$$-\vartheta_1 + D_t [\tau] = -\mu_1 + \alpha D_x [\xi] \quad (32)$$

Откуда получаем, что:

$$\begin{aligned} D_t [\tau] &= \alpha D_x [\xi] = \alpha B \\ \tau &= \alpha Bt + f(x) \end{aligned} \quad (33)$$

Расщепим теперь слагаемые вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_a\mathcal{D}_x^{\alpha-n} [{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [v] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [v]] D_x^n [\tau]$$

Тогда можно заключить, что:

$$D_x^n [\tau] = 0 \rightarrow D_x^1 [\tau] s = f'(x) = 0 \rightarrow f(x) = F \equiv const$$

$$\tau = \alpha Bt + F \quad (34)$$

Из оставшихся слагаемых получаем систему:

$$\begin{cases} D_t [\mu_0] = {}_a\mathcal{D}_x^\alpha [\vartheta_0] + {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [\vartheta_0] \\ D_t [\vartheta_0] = -{}_a\mathcal{D}_x^\alpha [\mu_0] - {}_x\mathcal{D}_b^\alpha [\mu_0] \end{cases} \quad (35)$$

Таким образом, функции μ_0 и ϑ_0 остаются произвольными функциями, удовлетворяющие системе (35), порождая бесконечномерную группу преобразований.

Следующие группы переносов:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \quad X = \frac{\partial}{\partial t}$$

Не допускаются системой (18), поскольку не удовлетворяют условию:

$$\xi|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad \tau|_{t=0} = 0$$

Таким образом, получаем следующие инфинитезимальные генераторы:

$$X_1 = (u + \mu_0(t, x)) \frac{\partial}{\partial u} + (v + \vartheta_0(t, x)) \frac{\partial}{\partial v} \quad (36)$$

$$X_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} \quad (37)$$

2.2. ПОИСК СИММЕТРИЙ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПРОИЗВОДНЫМИ МАРШО

Теперь рассмотрим дробно-дифференциальное обобщение уравнения Шредингера на всей числовой оси. Как уже было показано (см. теоретическую часть), для этого удобно переходить к производным Маршо. Уравнение принимает вид:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbb{D}_+^\alpha [\psi] + \mathbb{D}_-^\alpha [\psi], \quad \alpha \in (1, 2), \quad t > 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (38)$$

Аналогично предыдущему пункту полагаем $\psi(t, x) = u(t, x) + iv(t, x)$ и приходим к системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mathbb{D}_+^\alpha [v] + \mathbb{D}_-^\alpha [v] \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -(\mathbb{D}_+^\alpha [u] + \mathbb{D}_-^\alpha [u]) \end{cases} \quad (39)$$

Общего алгоритма поиска симметрий для оператора дробной производной Маршо нет. Поэтому ограничимся лишь проверкой некоторых симметрий.

Инфинитезимальный генератор будем искать в виде:

$$X = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial u} + \vartheta \frac{\partial}{\partial v}$$

Тогда инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{X} = X + & \left(\zeta^u \frac{\partial}{\partial u_t} + \rho^u \frac{\partial}{\partial (\mathbb{D}_+^\alpha[u])} + \lambda^u \frac{\partial}{\partial (\mathbb{D}_-^\alpha[u])} \right) + \\ & + \left(\zeta^v \frac{\partial}{\partial v_t} + \rho^v \frac{\partial}{\partial (\mathbb{D}_+^\alpha[v])} + \lambda^v \frac{\partial}{\partial (\mathbb{D}_-^\alpha[v])} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

Координаты ζ^u, ζ^v будут определяться по формуле (11), остальные координаты представим в общем виде (10):

Применим оператор (40) к системе (39):

$$\begin{cases} D_t [\mu] - u_t D_t [\tau] - u_x D_t [\xi] = \\ \quad = \mathbb{D}_-^\alpha [\vartheta - \xi v_x - \tau v_t] + \xi D_x [\mathbb{D}_-^\alpha[v]] + \tau D_t [\mathbb{D}_-^\alpha[v]] + \\ \quad + \mathbb{D}_+^\alpha [\vartheta - \xi v_x - \tau v_t] + \xi D_x [\mathbb{D}_+^\alpha[v]] + \tau D_t [\mathbb{D}_+^\alpha[v]] \\ D_t [\vartheta] - v_t D_t [\tau] - v_x D_t [\xi] = \\ \quad = - (\mathbb{D}_-^\alpha [\mu - \xi u_x - \tau u_t] + \xi D_x [\mathbb{D}_-^\alpha[u]] + \tau D_t [\mathbb{D}_-^\alpha[u]]) + \\ \quad + - (\mathbb{D}_+^\alpha [\mu - \xi u_x - \tau u_t] + \xi D_x [\mathbb{D}_+^\alpha[u]] + \tau D_t [\mathbb{D}_+^\alpha[u]]) \end{cases} \quad (41)$$

Это не определяющая система, но для удобства будем в неё подставлять различные симметрии, а затем, если это будет необходимо, будем делать замену в силу исходной системы (39).

1. $\xi = 1, \tau = 0, \mu = 0, \vartheta = 0$. Поскольку производная Маршо от константы равна нулю, то данные координаты в явном виде обнуляют систему (41).
2. $\xi = 0, \tau = 1, \mu = 0, \vartheta = 0$. Аналогично предыдущему пункту.
3. $\xi = x, \tau = t, \mu = 0, \vartheta = 0$.

$$\begin{aligned} -u_t = & \mathbb{D}_-^\alpha [-xv_x - tv_t] + x D_x [\mathbb{D}_-^\alpha[v]] + t D_t [\mathbb{D}_-^\alpha[v]] + \\ & + \mathbb{D}_+^\alpha [-xv_x - tv_t] + x D_x [\mathbb{D}_+^\alpha[v]] + t D_t [\mathbb{D}_+^\alpha[v]] \end{aligned}$$

В условиях существования производных Маршо от функций u, v можно поменять порядок интегрирования и дифференцирования. Тогда некоторые слагаемые сократятся:

$$-u_t = \mathbb{D}_-^\alpha [-xv_x] + x \mathbb{D}_-^\alpha [v_x] + \mathbb{D}_+^\alpha [-xv_x] + x \mathbb{D}_+^\alpha [v_x]$$

Используя формулу (8):

$$-u_t = -\mathbb{D}_-^\alpha[v] - x\mathbb{D}_-^\alpha[v_x] + x\mathbb{D}_-^\alpha[v_x] - \mathbb{D}_+^\alpha[v] - x\mathbb{D}_+^\alpha[v_x] + x\mathbb{D}_+^\alpha[v_x]$$

$$u_t = \mathbb{D}_-^\alpha[v]\mathbb{D}_+^\alpha[v]$$

В силу (39) получаем тождественное равенство. Аналогичное тождество получаем у второго уравнения системы (41).

4. $\xi = 0, \tau = 0, \mu = u, \vartheta = v$. После постановки в явном виде получаем систему (41).

5. $\xi = 0, \tau = 0, \mu = -v, \vartheta = u$. Аналогично получаем систему (41).

Таким образом, все основные симметрии, допускаемые уравнением (17) на конечном отрезке допускаются и в случае бесконечного интервала.

Заметим, однако, что в предельном случае $\alpha = 2$, то есть когда дробные производные переходят в классическую вторую производную, уравнение будет допускать аналог преобразования Галлилея при:

$$\xi = t, \tau = 0, \mu = \frac{1}{4}xv, \vartheta = -\frac{1}{4}xi$$

Попробуем проверить будет ли иметь место аналог такого преобразования в случае дробного порядка на бесконечном интервале. Положим:

$$\xi = t, \tau = 0$$

Подставим их в (41), получим:

$$\begin{cases} \mu_t - u_x = \mathbb{D}_+^\alpha[\vartheta] + \mathbb{D}_-^\alpha[\vartheta] \\ \vartheta_t - v_x = -\mathbb{D}_+^\alpha[\mu] - \mathbb{D}_-^\alpha[\mu] \end{cases}$$

По аналогии с предельным случаем $\alpha = 2$ положим $\mu = \beta xv, \vartheta = -\beta xi$. Тогда для первого уравнения системы:

$$u_x = \beta \left(\mathbb{D}_+^{\alpha-1}[u] + \mathbb{D}_-^{\alpha-1}[u] \right)$$

Данное равенство возможно только в случае целого $\alpha = 2$. При любом другом выборе μ и ϑ усложняется правая часть уравнения и не удастся подобрать такие функции, чтобы получить необходимую допускаемую симметрию.

Таким образом, найдены следующие симметрии:

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \\
X_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
X_3 &= t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} \\
X_4 &= u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \\
X_5 &= -v \frac{\partial}{\partial u} + u \frac{\partial}{\partial v}
\end{aligned}$$

Отметим, что в отличие от уравнения (17) с производными Римана-Лиувилля уравнение (38) с производными Маршо допускает группы переносов вдоль x и t .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения курсовой работы был проведен групповой анализ дробно-дифференциального уравнения Шредингера с производными Римана-Лиувилля, в ходе которого была найдена бесконечномерная алгебра операторов, среди которых есть операторы сдвига и однородного растяжения по времени и пространству.

Все данные операторы также допускаются дробно-дифференциальным уравнением Шредингера с производными Маршо, преобразование Галлилея в том виде, в котором допускается классическим уравнением, найдено не было.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
2. Касаткин А. А. Симметрии и точные решения уравнений с производными дробного порядка типа Римана–Лиувилля: Дисс. канд. физ.-мат. наук. 2013. УГАТУ. 118 с.
3. Лукашук, В. О., С. Ю. Лукашук. Обыкновенные дифференциальные уравнения дробного порядка: основы классической теории и группового анализа. - Уфа: УГАТУ, 2022.
4. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

ПЛАН-ГРАФИК

выполнения курсовой работы

обучающегося Султанова М.Ф.,

Наименование этапа работ	Трудоемкость выполнения, час.	Процент к общей трудоемкости выполнения	Срок предъявления консультанту
Получение и согласование задания	0,3	0,8	28 неделя
Знакомство с литературой по теме курсовой работы	2,7	7,5	29 неделя
Групповой анализ дробно-дифференциального уравнения Шредингера с производными Римана-Лиувилля	15	41,7	32
Проверка некоторых групп симметрий, допускаемых дробно-дифференциальным обобщением уравнения Шредингера с производными Маршо	10	27.8	34
Проверка допущения группы Галилея дробно-дифференциальным обобщением уравнения Шредингера с производными Маршо	5	13,82	35
Составление и оформление пояснительной записки и подготовка к защите	2,7	7,5	36 неделя
Защита	0,3	0,8	38 неделя
Итого	36	100	-