

1 Первообразные

Простейшие первообразные

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \in \mathbb{R}, n \neq -1; x \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C (n = -1, x \neq 0).$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1; x \in \mathbb{R});$
- $\int e^x dx = e^x + C.$
- $\int \cos x dx = \sin x + C (x \in \mathbb{R});$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C (x \in \mathbb{R});$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right);$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C (x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}).$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C (x^2 \pm a^2 > 0);$
- $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{a^2 + x^2} \right| + C.$
- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C (|x| \leq a);$
- $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C (x \neq \pm a)$
- $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases} (|x| < a);$
- $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C (x \in \mathbb{R});$
- $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C (x \in \mathbb{R});$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C (x \in \mathbb{R})$
- $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x + C (x \neq 0).$

Первообразные рациональных функций

- $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{a-b} \int \frac{(x+a) - (x+b)}{(x+a)(x+b)} dx$
- $\int \frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}$ подстановка $t = \frac{x+a}{x+b}$
- $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$ выделение в числителе выражения, равного производной знаменателя.
- $I_n = \int \frac{dz}{(a^2+z^2)^n} = \frac{z}{2a^2(n-1)(a^2+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}$

$$I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C$$

$$I_2 = \frac{z}{2a^2(a^2+z^2)^{n-1}} + \frac{1}{2a^2} I_1 = \frac{z}{2a^2(a^2+z^2)} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C.$$

$$I_3 = \frac{z}{4a^2(a^2+z^2)^2} + \frac{3}{4a^2} I_2 = \frac{z}{4a^2(a^2+z^2)^2} + \frac{3z}{8a^4(a^2+z^2)} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C$$

- Метод разбития на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами.

z здесь можно представлять как замену, проведенную, чтобы избавиться от полного квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом

A, B, C можно найти решив СЛНУ.

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

Подробнее есть страничка в википедии или в методичке Е.В. Хорошиловой "Неопределенный интеграл".

- Метод Остроградского: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$. Здесь $Q_2(x)$ представляет собой произведение всех неприводимых множителей многочлена $Q(x)$ без учёта кратности (то есть каждый неприводимый множитель многочлена $Q(x)$ встречается в разложении многочлена $Q_2(x)$ один раз), $Q_1(x)$ — произведение всех неприводимых множителей многочлена $Q(x)$ с пониженной на 1 кратностью (каждый неприводимый множитель многочлена $Q(x)$ кратности n встречается в разложении многочлена $Q_1(x)$ $n - 1$ раз).

Первообразные иррациональных функций

Здесь под $R(x, y)$ понимается рациональная функция двух аргументов, т.е. отношение двух алгебраических многочленов соответственно степеней n, m : $R(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$.

$$\int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx$$

$$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2}$$

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x}}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$$

- $\int R(x^m, \sqrt[n]{ax^m + b}) dx$ подстановка $t = \sqrt[n]{ax^m + b}$. При $m = 1$: $x = \frac{t^n - b}{a}$, $dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt$.
- $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ подстановка $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}$, $dx = \frac{(ad - bc)nt^{n-1}}{(a - ct^n)^2} dt$
- $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx$ подстановка $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где $n = \text{НОК}(q_1, q_2, \dots, q_k)$
- $\int (Ax + B) \sqrt{ax^2 + bx + c} dx$, $\int \frac{(Ax + B) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

В линейной части выразить производную квадратной и пихнуть под дифференциал.

- $\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Интегралы данного вида, где $P_n(x)$ — алгебраический многочлен n -й степени, находятся с помощью тождества

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен $(n - 1)$ -й степени с неопределёнными коэффициентами, λ — ещё один неопределённый коэффициент.

Дифференцируя это тождество и умножая на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, получим равенство двух многочленов:

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(ax^2 + bx + c) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax + b) + \lambda$$

из которого методом неопределённых коэффициентов можно определить коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ .

- $\int \frac{dx}{(x - a)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ подстановка $t = \frac{1}{x - a}$
- $\int \frac{dx}{(x^2 + a)^n \cdot \sqrt{bx^2 + c}}$ подстановка $t = (\sqrt{bx^2 + c})' = \frac{bx}{\sqrt{bx^2 + c}}$
- $\int \frac{xdx}{(x^2 + a)^n \cdot \sqrt{bx^2 + c}}$ подстановка $t = \sqrt{bx^2 + c}$
- $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R\left(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) dx$ и всякое такое решается тригонометрическими или гиперболическими подстановками.

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 + x^2}}$$

- Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ в общем случае могут вычисляться с помощью рационализирующих подстановок Эйлера.

1. $a > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$

$$x = \frac{c - t^2}{\pm 2t\sqrt{a} - b}, \quad dx = 2 \frac{\mp t^2 \sqrt{a} + bt \mp c \sqrt{a}}{(\pm 2t\sqrt{a} - b)^2} dt$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

2. $c > 0$: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$

$$x = \frac{\pm 2t\sqrt{c} - b}{a - t^2}, \quad dx = 2 \frac{\pm t^2 \sqrt{c} - bt \pm a \sqrt{c}}{(a - t^2)^2} dt$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

3. $b^2 - 4ac > 0$: $\sqrt{a(x - \lambda)(x - \mu)} = t(x - \lambda)$

$$x = \frac{ax_2 - x_1 t^2}{a - t^2}, \quad dx = 2 \frac{at(x_2 - x_1)}{(a - t^2)^2} dt$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$$

- Как доказал П.Л.Чебышёв, первообразная для функции $x^m(a + bx^n)^p$ является элементарной функцией только в следующих трёх случаях:

1. p - целое; подстановка $t = \sqrt[s]{x}$, где s - НОК знаменателей дробей m и n .

$$\int \frac{\sqrt{x} dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^2}$$

2. $\frac{m+1}{n}$ целое; подстановка $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$, где s - знаменатель дроби p .

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}$$

3. $\frac{m+1}{n} + p$ целое; подстановка $t = \sqrt[s]{ax^{-n} + b}$, где s - знаменатель дроби p

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^4}}$$

Первообразные тригонометрических функций

- Некоторые интересные подстановки:

$$- t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$$

$$- t = \operatorname{tg} x, \quad \sin x = \frac{l}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x}$$

- $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx = \dots = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x|$

$$\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a \sin x + b \cos x} dx$$

Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и его производной:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x = A(a \sin x + b \cos x) + B(a \cos x - b \sin x)$$

И методом неопределённых коэффициентов найдем A, B .

- $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$

Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и его производной:

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 = A(a \sin x + b \cos x + c) + B(a \cos x - b \sin x + c) + C$$

И методом неопределённых коэффициентов найдем A, B, C .

- $\int \sin^n(x) dx = -\frac{1}{n} \sin^{(n-1)}(x) \cos(x) + \frac{(n-1)}{n} \int \sin^{(n-2)} dx$

- $\int \cos^n(x) dx = \frac{1}{n} \cos^{(n-1)}(x) \sin(x) + \frac{(n-1)}{n} \int \cos^{(n-2)} dx$

- $\int \frac{dx}{\sin^n x} = I_n = -\int \frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$

- $\int \frac{dx}{\cos^n x} = K_n = \int \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2}$
- $\int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx \quad n \neq 1$
- $\int \operatorname{ctg}^n x dx = -\frac{1}{n-1} \operatorname{ctg}^{n-1} x - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx \quad n \neq 1$
- $\int \sin^n x \cos^m x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} x \cos^m x dx \quad m, n > 0$
- $\int \sin^n x \cos^m x dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n x \cos^{m-2} x dx \quad m, n > 0$

Спасибо Вам, Галина Ильясовна!

- $I_n = \int e^{\alpha x} \sin^n x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + n^2} \sin^{n-1} x (\alpha \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{\alpha^2 + n^2} I_{n-2}$
- $\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx))$
- $\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin(bx) + a \cos(bx))$
- $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{m+1}} = \frac{1}{2ma^2} \left[(2m-1) \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^m} + \frac{x}{(a^2 + x^2)^m} \right]$