Тригонометрия

Основные тригонометрические тождества

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\sin\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$
- $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
- $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
- $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1 \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Суммы углов

Доказательство с комплексными числами есть в конце файла

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Двойные и тройные углы

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$
- $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
- $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
- $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$

Произведение функций

- $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$
- $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
- $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$

Сумма функций

$\alpha = A+B, \quad \beta = A-B$, затем применить формулы суммы углов

- $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$
- $\cos\alpha \pm \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha \mp \beta}{2}$
- $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
- $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\pm\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$
- $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$

- $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\alpha + \arcsin\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

- $\sin x \pm \cos x = \pm\sqrt{2}\sin\left(x \pm \dfrac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{2}\cos\left(x \mp \dfrac{\pi}{4}\right)$

- $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

- $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

- $\sin^3\alpha = \dfrac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)$

- $\cos^3\alpha = \dfrac{1}{4}(3\cos\alpha + \cos 3\alpha)$

- $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Обратные тригонометрические фукнции

- $\sin\arccos x = \sqrt{1-x^2}$
- $\cos\arcsin x = \sqrt{1-x^2}$
- $\sin\operatorname{arctg} x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\cos\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\operatorname{tg}\arcsin x = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\operatorname{tg}\arccos x = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Сумма обратных триг. функций
$\arcsin x - \arcsin y = \arcsin x + \arcsin(-y)$ $\Sigma_{\sin} = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$
$\boxed{\arcsin x + \arcsin y =}$ $\begin{cases} \Sigma_{\sin}, & xy \leqslant 0, & x^2+y^2 \leqslant 1 \\ \pi - \Sigma_{\sin}, & x>0, y>0, & x^2+y^2>1 \\ -\pi - \Sigma_{\sin}, & x<0, y<0, & x^2+y^2>1 \end{cases}$
$\arccos x - \arccos y = -\pi + \arccos x + \arccos(-y)$ $\Sigma_{\cos} = \arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$
$\boxed{\arccos x + \arccos y =} \begin{cases} \Sigma_{\cos}, & x \geqslant -y \\ 2\pi - \Sigma_{\cos}, & x < -y \end{cases}$
$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-y)$ $\Sigma_{\operatorname{tg}} = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$
$\boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y =} \begin{cases} \Sigma_{\operatorname{tg}}, & & xy<1 \\ \pi + \Sigma_{\operatorname{tg}}, & x>0, & xy>1 \\ -\pi + \Sigma_{\operatorname{tg}}, & x<0, & xy>1 \end{cases}$

*

Таблицы углов

Таблица значений для стандартных углов									
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

Таблица значений для особых углов						
α	$\frac{\pi}{12} = 15°$	$\frac{\pi}{10} = 18°$	$\frac{\pi}{5} = 36°$	$\frac{3\pi}{10} = 54°$	$\frac{2\pi}{5} = 72°$	$\frac{5\pi}{12} = 75°$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$2+\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$2-\sqrt{3}$

Тригонометрия и комплексные числа

- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$$\begin{aligned}
\cos(\theta_1 + \theta_2) &= \operatorname{Re}\left(e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left((\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right) \\
&= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\theta_1 + \theta_2) &= \operatorname{Im}\left(e^{i(\theta_1+\theta_2)}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left((\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\right) \\
&= \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) &= e^{in\theta} \\
&= \left(e^{i\theta}\right)^n \\
&= (\cos\theta + i\sin\theta)^n
\end{aligned}
$$