Простейшие первообразные

- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C(n \in R, n \neq -1; x \in R)$
- $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C(n = -1, x \neq 0).$
- $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1; x \in R);$
- $\int e^x dx = e^x + C.$
- $\int \cos x dx = \sin x + C(x \in R);$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C(x \in R);$
- $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C\left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right);$
- $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C(x \neq \pi n, n \in Z).$
- $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C(x \neq \pm a)$
- $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \arctan\left(\dfrac{x}{a}\right) + C.$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases} (|x| < 1);$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \dfrac{x}{a} + C \\ -\arccos \dfrac{x}{a} + C \end{cases} (|x| < a);$
- $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C(x \in R);$
- $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C \quad (x \in R);$
- $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C(x \in R)$
- $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x + C(x \neq 0).$
- $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\left(x^2 \pm a^2 > 0\right);$
- $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \dfrac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C.$
- $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{x}{a} + C(|x| \leq a);$

Первообразные рациональных функций

- $\int \dfrac{dx}{(x+a)(x+b)} = \dfrac{1}{a-b} \int \dfrac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)(x+b)} dx$
- $\int \dfrac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n}$ подстановка $t = \dfrac{x+a}{x+b}$
- $\int \dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$ выделение в числителе выражения, равного производной знаменателя.
- $I_n = \int \dfrac{dz}{(a^2+z^2)^n} = \dfrac{z}{2a^2(n-1)\left(a^2+z^2\right)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}$

  $I_1 = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{z}{a} + C$

  $I_2 = \dfrac{z}{2a^2\left(a^2+z^2\right)^{n-1}} + \dfrac{1}{2a^2} I_1 = \dfrac{z}{2a^2\left(a^2+z^2\right)} + \dfrac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \dfrac{z}{a} + C.$

  $I_3 = \dfrac{z}{4a^2\left(a^2+z^2\right)^2} + \dfrac{3}{4a^2} I_2 = \dfrac{z}{4a^2\left(a^2+z^2\right)^2} + \dfrac{3z}{8a^4\left(a^2+z^2\right)} + \dfrac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \dfrac{z}{a} + C$

  z здесь можно представлять как замену, проведенную, чтобы избавиться от полного квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом

- Метод разбития на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами.

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

A, B, C можно найти решив СЛНУ.

Подробнее есть страничка в википедии или в методичке Е.В. Хорошиловой "Неопреденный интеграл".

- Метод Остроградского: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$. Здесь $Q_2(x)$ представляет собой произведение всех неприводимых множителей многочлена $Q(x)$ без учёта кратности (то есть каждый неприводимый множитель многочлена $Q(x)$ встречается в разложении многочлена $Q_2(x)$ один раз), $Q_1(x)$– произведение всех неприводимых множителей многочлена $Q(x)$ с пониженной на 1 кратностью (каждый неприводимый множитель многочлена $Q(x)$ кратности n встречается в разложении многочлена $Q_1(x)$ $n-1$ раз).

Первообразные иррациональных функций

Здесь нод $R(x, y)$ понимаегся рациональная функция двух аргументов, т.е. отношение двух алгебраических многочленов соответственно степеней n, m : $R(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_m(x, y)}$.

$\int \frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$

- $\int R(x^m, \sqrt[n]{ax^m + b})dx$ подстановка $t = \sqrt[n]{ax^m + b}$. При $m = 1$: $x = \frac{t^n - b}{a}$, $dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt$.

$\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{(2-x)^2}$

- $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ подставновка $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$., $x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}$, $dx = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}dt$

$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2 + \sqrt[6]{x}}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$

- $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_k}{q_k}}\right)dx$ подстановка $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, где $n = \mathrm{NOK}\,(q_1, q_2, \ldots, q_k)$

- $\int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}dx$, $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
  В линейной части выразить производную квадратной и пихнуть под дифференциал.

- $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$
  Интегралы данного вида, где $P_n(x)$ - алгебраический многочлен n-й степени, находятся с помощью тождества

$$\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

  где $Q_{n-1}(x)$– многочлен $(n-1)$-й степени с неопределёнными коэффициентами, λ - ещё один неопределённый коэффициент.

  Дифференцируя это тождество и умножая на $\sqrt{ax^2+bx+c}$, получим равенство двух многочленов:

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)\left(ax^2+bx+c\right) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b) + \lambda$$

  из которого методом неопределённых коэффициентов можно определить коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ.

- $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ посдтановка $t = \frac{1}{x-a}$

- $\int \frac{dx}{(x^2+a)^n \cdot \sqrt{bx^2+c}}$ подстановка $t = \left(\sqrt{bx^2+c}\right)' = \frac{bx}{\sqrt{bx^2+c}}$

- $\int \frac{xdx}{(x^2+a)^n \cdot \sqrt{bx^2+c}}$ подстановка $t = \sqrt{bx^2+c}$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$

- $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $\int R\left(x, \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)dx$ и всякое такое решается тригонометрическими или гиперболическими подстановками.

- Интегралы вида $\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ в общем случае могут вычисляться с помощью рационализирующих подстановок Эйлера.

  1. $a > 0:\ \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$ $\qquad \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

  $$x = \frac{c-t^2}{\pm 2t\sqrt{a}-b}, \quad dx = 2\frac{\mp t^2\sqrt{a}+bt\mp c\sqrt{a}}{(\pm 2t\sqrt{a}-b)^2}dt$$

  2. $c > 0:\ \sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}$ $\qquad \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

  $$x = \frac{\pm 2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}, \quad dx = 2\frac{\pm t^2\sqrt{c}-bt\pm a\sqrt{c}}{\left(a-t^2\right)^2}dt$$

  3. $b^2-4ac > 0:\ \sqrt{a(x-\lambda)(x-\mu)} = t(x-\lambda)$ $\qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

  $$x = \frac{ax_2-x_1t^2}{a-t^2}, \quad dx = 2\frac{at\,(x_2-x_1)}{\left(a-t^2\right)^2}dt$$

- Как доказал П.Л.Чебышёв, первообразная для функции $x^m\,(a+bx^n)^p$ является элементарной функцией только в следуюших трёх случаях:

  1. p - целое; подстановка $t = \sqrt[s]{x}$, где s - НОК знаменателей дробей m и n. $\qquad \int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2}$
  2. $\frac{m+1}{n}$ целое; подстановка $t = \sqrt[s]{a+bx^n}$, где s - знаменатель дроби p. $\qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$
  3. $\frac{m+1}{n}+p$ целое; подстановка $t = \sqrt[s]{ax^{-n}+b}$, где s - заменатель дроби p $\qquad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

Первообразные тригонометрических функций

- Некоторые интересные подстановки:

  – $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\qquad \int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$

  – $t = tgx, \quad \sin x = \frac{l}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$ $\qquad \int \frac{dx}{a\sin^2 x+b\sin x\cdot\cos x+c\cos^2 x}$

- $\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx = \cdots = Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|$

  $\int \frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx$

  Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и его производной:

  $$a_1\sin x+b_1\cos x = A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)$$

  И методом неопределённых коэффициентов найдем A, B.

- $\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx = Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|+C\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$

  Представим числитель в виде линейной комбинации знаменателя и его производной:

  $$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1 = A(a\sin x+b\cos x+c)+B(a\cos x-b\sin x+c)+C$$

  И методом неопределённых коэффициентов найдем A, B, C.

- $\int \sin^n(x)dx = -\frac{1}{n}\sin^{(n-1)}(x)\cos(x)+\frac{(n-1)}{n}\int \sin^{(n-2)}dx$

- $\int \cos^n(x)dx = \frac{1}{n}\cos^{(n-1)}(x)\sin(x)+\frac{(n-1)}{n}\int \cos^{(n-2)}dx$

- $\int \frac{dx}{\sin^n x} = I_n = -\int \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^n x} = K_n = \int \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2}$
- $\displaystyle\int \operatorname{tg}^n x dx \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx \quad n \neq 1$
- $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^n x dx = -\frac{1}{n-1} \operatorname{ctg}^{n-1} x - \int \operatorname{ctg}^{n-2} x dx \quad n \neq 1$
- $\displaystyle\int \sin^n x \cos^m x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} \int \sin^{n-2} x \cos^m x dx \quad m, n > 0$
- $\displaystyle\int \sin^n x \cos^m x dx = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} \int \sin^n x \cos^{m-2} x dx \quad m, n > 0$

Спасибо Вам, Галина Ильясовна!

- $\displaystyle I_n = \int e^{\alpha x} \sin^n x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + n^2} \sin^{n-1} x(\alpha \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{\alpha^2 + n^2} I_{n-2}$
- $\displaystyle\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin(bx) - b \cos(bx))$
- $\displaystyle\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b \sin(bx) + a \cos(bx))$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{m+1}} = \frac{1}{2ma^2} \left[(2m-1) \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^m} + \frac{x}{(a^2 + x^2)^m} \right]$