

TODO: сделать выжимку из всех pdf'ок снизу

## § 2. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1. Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y), \quad (1)$$

а также в виде

$$M(x)N(y) dx + P(x)Q(y) dy = 0. \quad (2)$$

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только  $x$ , в другую — только  $y$ , и затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные  $x$  и  $y$ , могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

**Пример.** Решить уравнение

$$x^2 y^2 y' + 1 = y. \quad (3)$$

Приводим уравнение к виду (2):

$$x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = y - 1; \quad x^2 y^2 dy = (y - 1) dx.$$

Делим обе части уравнения на  $x^2(y - 1)$ :

$$\frac{y^2}{y - 1} dy = \frac{dx}{x^2}.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{y^2}{y - 1} dy = \int \frac{dx}{x^2}; \quad \frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| = -\frac{1}{x} + C.$$

При делении на  $x^2(y - 1)$  могли быть потеряны решения  $x = 0$  и  $y - 1 = 0$ , т. е.  $y = 1$ . Очевидно,  $y = 1$  — решение уравнения (3), а  $x = 0$  — нет.

2. Уравнения вида  $y' = f(ax + by)$  приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой  $z = ax + by$  (или  $z = ax + by + c$ , где  $c$  любое).

В задачах **51—65** решить данные уравнения и для каждого из них построить несколько интегральных кривых. Найти

**97.** Найти атмосферное давление на высоте  $h$ , если на поверхности земли давление равно  $1 \text{ кг/см}^2$  и плотность воздуха  $0,0012 \text{ г/см}^3$ . Использовать закон Бойля—Мариотта, в силу которого плотность пропорциональна давлению (т. е. пренебречь изменением температуры воздуха с высотой).

**98.** Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает три витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен  $1/3$ , и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой  $10 \text{ кг}$ ?

**99.** В закрытом помещении объемом  $v \text{ м}^3$  находится открытый сосуд с водой. Скорость испарения воды пропорциональна разности между количеством  $q_1$  водяного пара, насыщающего  $1 \text{ м}^3$  воздуха при данной температуре, и количеством  $q$  водяного пара, имеющемся в  $1 \text{ м}^3$  воздуха в рассматриваемый момент (считаем, что температура воздуха и воды, а также величина площади, с которой происходит испарение, остаются неизменными). В начальный момент в сосуде было  $m_0$  грамм воды, а в  $1 \text{ м}^3$  воздуха  $q_0$  грамм пара. Сколько воды останется в сосуде через промежуток времени  $t$ ?

**100.** Масса ракеты с полным запасом топлива равна  $M$ , без топлива  $m$ , скорость истечения продуктов горения из ракеты равна  $c$ , начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха (формула Циолковского).

## § 4. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Однородные уравнения могут быть записаны в виде  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , а также в виде  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ , где  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  — однородные функции одной и той же степени<sup>1</sup>. Чтобы решить однородное уравнение, можно сделать замену  $y = tx$ , после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.

**Пример.** Решить уравнение  $x dy = (x + y) dx$ .

---

<sup>1</sup>Функция  $M(x, y)$  называется однородной функцией степени  $n$ , если для всех  $k > 0$  имеем  $M(kx, ky) \equiv k^n M(x, y)$ .

Это уравнение — однородное. Полагаем  $y = tx$ . Тогда  $dy = x dt + t dx$ . Подставляя в уравнение, получим

$$x(x dt + t dx) = (x + tx) dx; \quad x dt = dx.$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$dt = \frac{dx}{x}; \quad t = \ln|x| + C.$$

Возвращаясь к старому переменному  $y$ , получим  $y = x(\ln|x| + C)$ . Кроме того, имеется решение  $x = 0$ , которое было потеряно при делении на  $x$ .

2. Уравнение вида  $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$  приводится к однородному с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых  $ax + by + c = 0$  и  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ . Если же эти прямые не пересекаются, то  $a_1x + b_1y = k(ax + by)$ ; следовательно, уравнение имеет вид  $y' = F(ax + by)$  и приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой  $z = ax + by$  (или  $z = ax + by + c$ ), см. § 2, п. 2.

3. Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой  $y = z^m$ . Число  $m$  обычно заранее не известно. Чтобы его найти, надо в уравнении сделать замену  $y = z^m$ . Требуя, чтобы уравнение было однородным, найдем число  $m$ , если это возможно. Если же этого сделать нельзя, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

**Пример.** Дано уравнение  $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$ . После замены  $y = z^m$  уравнение примет вид  $2mx^4z^{2m-1}z' + z^{4m} = 4x^6$ . Это уравнение будет однородным в том случае, когда степени всех его членов равны между собой, т. е.  $4 + (2m - 1) = 4m = 6$ . Эти равенства удовлетворяются одновременно, если  $m = 3/2$ . Следовательно, уравнение можно привести к однородному заменой  $y = z^{3/2}$ .

Решить уравнения **101—129.**

**101.**  $(x + 2y) dx - x dy = 0.$

**102.**  $(x - y) dx + (x + y) dy = 0.$

**103.**  $(y^2 - 2xy) dx + x^2 dy = 0.$

**104.**  $2x^3y' = y(2x^2 - y^2).$

**105.**  $y^2 + x^2y' = xy y'.$

**106.**  $(x^2 + y^2)y' = 2xy.$

к кривой до касательной к траектории отсчитывается в отрицательном направлении.

$$\text{а) } y = x \ln Cx; \quad \text{б) } (x - 3y)^4 = Cxy^6.$$

**131.** Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

**132.** Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

**133.** При каких  $\alpha$  и  $\beta$  уравнение  $y' = ax^\alpha + by^\beta$  приводится к однородному с помощью замены  $y = z^m$ ?

**134\*.** Пусть  $k_0$  — корень уравнения  $f(k) = k$ . Показать, что:

1) если  $f'(k_0) < 1$ , то ни одно решение уравнения  $y' = f(y/x)$  не касается прямой  $y = k_0x$  в начале координат;

2) если  $f'(k_0) > 1$ , то этой прямой касается бесконечно много решений.

**135.** Начертить приближенно интегральные кривые следующих уравнений (не решая уравнений):

$$\begin{aligned} \text{а) } y' &= \frac{y(2y - x)}{x^2}; & \text{б) } y' &= \frac{2y^2 - x^2}{xy}; \\ \text{в) } y' &= \frac{2y^3 - x^2y}{2x^2y - x^3}; & \text{г*) } xy' &= y + \sqrt{y^2 + \frac{y^3}{x}}. \end{aligned}$$

Указание. Тангенс угла между лучом  $y = kx$  и пересекающей его интегральной кривой уравнения  $y' = f(y/x)$  равен  $(f(k) - k) / (1 + kf(k))$  (почему?). Для приближенного построения интегральных кривых надо исследовать знак этой дроби в зависимости от  $k$ .

## § 5. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

### 1. Уравнение

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (1)$$

называется линейным. Чтобы его решить, надо сначала решить уравнение

$$y' + a(x)y = 0 \quad (2)$$

(это делается путем разделения переменных, см. § 2) и в общем решении последнего заменить произвольную постоянную  $C$  на неизвестную функцию  $C(x)$ . Затем выражение, полученное для  $y$ , подставить в уравнение (1) и найти функцию  $C(x)$ .

2. Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимое переменное. Например, уравнение  $y = (2x + y^3)y'$ , в котором  $y$  является функцией от  $x$ , — нелинейное. Запишем его в дифференциалах:  $y \, dx - (2x + y^3) \, dy = 0$ . Так как в это уравнение  $x$  и  $dx$  входят линейно, то уравнение будет линейным, если  $x$  считать искомой функцией, а  $y$  — независимым переменным. Это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = y^2$$

и решается аналогично уравнению (1).

3. Чтобы решить уравнение Бернулли, т. е. уравнение

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad (n \neq 1),$$

надо обе его части разделить на  $y^n$  и сделать замену  $1/y^{n-1} = z$ . После замены получается линейное уравнение, которое можно решить изложенным выше способом. (Пример см. в [1], гл. I, § 4, п. 2, пример 10.)

4. Уравнение Риккати, т. е. уравнение

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x),$$

в общем случае не решается в квадратурах. Если же известно одно частное решение  $y_1(x)$ , то заменой  $y = y_1(x) + z$  уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли и таким образом может быть решено в квадратурах.

Иногда частное решение удастся подобрать, исходя из вида свободного члена уравнения (члена, не содержащего  $y$ ). Например, для уравнения  $y' + y^2 = x^2 - 2x$  в левой части будут члены, подобные членам правой части, если взять  $y = ax + b$ . Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при подобных членах, найдем  $a$  и  $b$  (если частное решение указанного вида существует, что вовсе не всегда бывает). Другой пример: для уравнения  $y' + 2y^2 = 6/x^2$  те же рассуждения побуждают нас искать частное решение в виде  $y = a/x$ . Подставляя  $y = a/x$  в уравнение, найдем постоянную  $a$ .

Решить уравнения **136—160**.

**136.**  $xy' - 2y = 2x^4$ .

**185\*.** Пусть в уравнении предыдущей задачи имеем  $a(t) \geq c > 0$  и пусть  $x_0(t)$  — решение с начальным условием  $x_0(0) = b$ . Показать, что для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что если изменить функцию  $f(t)$  и число  $b$  меньше, чем на  $\delta$  (т. е. заменить их на такую функцию  $f_1(t)$  и число  $b_1$ , что  $|f_1(t) - f(t)| < \delta$ ,  $|b_1 - b| < \delta$ ), то решение  $x_0(t)$  изменится при  $t \geq 0$  меньше, чем на  $\varepsilon$ . Это свойство решения называется устойчивостью по постоянно действующим возмущениям.

## § 6. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

### 1. Уравнение

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции  $F(x, y)$ . Это имеет место, если  $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ . Чтобы решить уравнение (1), надо найти функцию  $F(x, y)$ , от которой полный дифференциал  $dF(x, y) = F'_x dx + F'_y dy$  равен левой части уравнения (1). Тогда общее решение уравнения (1) можно написать в виде  $F(x, y) = C$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

**Пример.** Решить уравнение

$$(2x + 3x^2 y) dx + (x^3 - 3y^2) dy = 0. \quad (2)$$

Так как  $\frac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2 y) = 3x^2$ ,  $\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2$ , то уравнение (2) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию  $F(x, y)$ , полный дифференциал которой  $dF = F'_x dx + F'_y dy$  был бы равен левой части уравнения (2), т. е. такую функцию  $F$ , что

$$F'_x = 2x + 3x^2 y, \quad F'_y = x^3 - 3y^2. \quad (3)$$

Интегрируем по  $x$  первое из уравнений (3), считая  $y$  постоянным; при этом вместо постоянной интегрирования надо поставить  $\varphi(y)$  — неизвестную функцию от  $y$ :

$$F = \int (2x + 3x^2 y) dx = x^2 + x^3 y + \varphi(y).$$

Подставляя это выражение для  $F$  во второе из уравнений (3), найдем  $\varphi(y)$ :

$$(x^2 + x^3 y + \varphi(y))'_y = x^3 - 3y^2; \quad \varphi'(y) = -3y^2; \quad \varphi(y) = -y^3 + \text{const}.$$

Следовательно, можно взять  $F(x, y) = x^2 + x^3 y - y^3$ , и общее решение уравнения (2) будет иметь вид

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C.$$

## 2. Интегрирующим множителем для уравнения

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (4)$$

называется такая функция  $m(x, y) \neq 0$ , после умножения на которую уравнение (4) превращается в уравнение в полных дифференциалах. Если функции  $M$  и  $N$  в уравнении (4) имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно, то интегрирующий множитель существует. Однако нет общего метода для его отыскания (когда общее решение уравнения (4) неизвестно).

В некоторых случаях интегрирующий множитель можно найти с помощью приемов, изложенных в [1], гл. II, § 3, п. 3 или в [4], гл. 1, § 5. Для решения некоторых уравнений можно применять метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы:

$$\begin{aligned} d(xy) &= y dx + x dy, & d(y^2) &= 2y dy, \\ d\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{y dx - x dy}{y^2}, & d(\ln y) &= \frac{dy}{y} \text{ и т. п.} \end{aligned}$$

**Пример.** Решить уравнение

$$y dx - (4x^2 y + x) dy = 0. \quad (5)$$

Сначала выделяем группу членов, представляющую собой полный дифференциал. Так как  $y dx - x dy = -x^2 d(y/x)$ , то, деля уравнение (5) на  $-x^2$ , имеем

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + 4y dy = 0, \quad d\left(\frac{y}{x}\right) + d(2y^2) = 0.$$

Это — уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя непосредственно (приводить к виду (1) не нужно), получаем решение

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = C.$$



Кроме того, при делении на  $-x^2$  было потеряно решение  $x = 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Так как после деления уравнения (5) на  $-x^2$ , т. е. умножения на  $-1/x^2$ , получилось уравнение в полных дифференциалах, то интегрирующий множитель для уравнения (5) равен  $-1/x^2$ .

3. Если в уравнении (4) можно выделить полный дифференциал некоторой функции  $\varphi(x, y)$ , то иногда уравнение упрощается, если от переменных  $(x, y)$  перейти к переменным  $(x, z)$  или  $(y, z)$ , где  $z = \varphi(x, y)$ .

**П р и м е р ы.** 1) Решить уравнение  $y \, dx - (x^3 y + x) \, dy = 0$ .

Выделив полный дифференциал как в предыдущем примере, получим

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + xy \, dy = 0.$$

Перейдя к переменным  $z = y/x$  и  $y$ , получим уравнение

$$dz + \frac{y^2}{z} \, dy = 0,$$

которое легко решается.

2) Решить уравнение  $(xy + y^4) \, dx + (x^2 - xy^3) \, dy = 0$ .

Сгруппируем члены так, чтобы выделить полные дифференциалы

$$x(y \, dx + x \, dy) + y^3(y \, dx - x \, dy) = 0, \quad x \, d(xy) + y^5 \, d\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Разделив на  $x$  и сделав замену  $xy = u$ ,  $x/y = v$ , получим уравнение  $du + \frac{u^2}{v^3} \, dv = 0$ , которое легко решается.

В задачах **186—194** проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и решить их.

**186.**  $2xy \, dx + (x^2 - y^2) \, dy = 0$ .

**187.**  $(2 - 9xy^2)x \, dx + (4y^2 - 6x^3)y \, dy = 0$ .

**188.**  $e^{-y} \, dx - (2y + xe^{-y}) \, dy = 0$ .

**189.**  $\frac{y}{x} \, dx + (y^3 + \ln x) \, dy = 0$ .

**190.**  $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} \, dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} \, dy = 0$ .

$$213. y(x + y^2) dx + x^2(y - 1) dy = 0.$$

$$214. (x^2 - \sin^2 y) dx + x \sin 2y dy = 0.$$

$$215. x(\ln y + 2 \ln x - 1) dy = 2y dx.$$

$$216. (x^2 + 1)(2x dx + \cos y dy) = 2x \sin y dx.$$

$$217. (2x^3 y^2 - y) dx + (2x^2 y^3 - x) dy = 0.$$

$$218. x^2 y^3 + y + (x^3 y^2 - x) y' = 0.$$

$$219. (x^2 - y) dx + x(y + 1) dy = 0.$$

$$220. y^2(y dx - 2x dy) = x^3(x dy - 2y dx).$$

## § 7. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

1. Теорема существования и единственности решения уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

с начальным условием  $y(x_0) = y_0$ .

Пусть в замкнутой области  $R$  ( $|x - x_0| \leq a$ ,  $|y - y_0| \leq b$ ) функции  $f$  и  $f'_y$  непрерывны<sup>1</sup>. Тогда на некотором отрезке  $x_0 - d \leq x \leq x_0 + d$  существует единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ .

При этом можно взять  $d = \min \{a; \frac{b}{m}\}$ , где  $a$  и  $b$  указаны выше, а  $m$  — любое такое, что  $|f| \leq m$  в  $R$ .

Последовательные приближения, определяемые формулами

$$y_0(x) = y_0, \quad y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{k-1}(s)) ds, \quad k = 1, 2, \dots,$$

равномерно сходятся к решению на указанном отрезке.

**З а м е ч а н и е.** Для существования решения достаточно только непрерывности  $f(x, y)$  в области  $R$ , но при этом решение может не быть единственным.

---

<sup>1</sup>Требование непрерывности  $f'(y)$  можно заменить требованием ее ограниченности или условием Липшица:  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$ ,  $k = \text{const}$ .



всякое решение можно продолжить до выхода на границу этой области.

Если правая часть уравнения (1) или системы (3) в области  $\alpha < x < \beta$ ,  $|y| < \infty$  ( $\alpha$  и  $\beta$  могут быть конечными или бесконечными) непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x),$$

и функции  $a(x)$  и  $b(x)$  непрерывны, то всякое решение можно продолжить на весь интервал  $\alpha < x < \beta$ .

**221.** Построить последовательные приближения  $y_0, y_1, y_2$  к решению данного уравнения с данными начальными условиями:

а)  $y' = x - y^2, \quad y(0) = 0.$

б)  $y' = y^2 + 3x^2 - 1, \quad y(1) = 1.$

в)  $y' = y + e^{y-1}, \quad y(0) = 1.$

г)  $y' = 1 + x \sin y, \quad y(\pi) = 2\pi.$

**222.** Построить по два последовательных приближения (не считая исходного) к решениям следующих уравнений и систем:

а)  $y' = 2x + z, \quad z' = y; \quad y(1) = 1, \quad z(1) = 0.$

б)  $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x^2; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

в)  $y'' + y'^2 - 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

г)  $\frac{d^2x}{dt^2} = 3tx; \quad x(1) = 2, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=1} = -1.$

**223.** Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями:

а)  $y' = x + y^3, \quad y(0) = 0.$

б)  $y' = 2y^2 - x, \quad y(1) = 1.$

в)  $\frac{dx}{dt} = t + e^x, \quad x(1) = 0.$

г)  $\frac{dx}{dt} = y^2, \quad \frac{dy}{dt} = x^2, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2.$

3. Нахождение интегрирующего множителя. Из определения интегрирующего множителя имеем:

$$\frac{\partial (\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial (\mu N)}{\partial x},$$

или

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu, \quad (40)$$

или же, деля обе части равенства (40) на  $\mu$ ,

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (40')$$

Мы получили в виде (40) или (40') уравнение в частных производных для определения неизвестной функции  $\mu$ . Задача интегрирования такого уравнения в общем случае не проще, чем задача решения уравнения (33). Конечно, нам достаточно знать только одно частное решение уравнения (40); иногда, по каким-нибудь особенностям уравнения (40), удаётся найти такое частное решение, и тогда интеграция уравнения (33) сводится к квадратурам.

Рассмотрим, например, случай, когда существует интегрирующий множитель, являющийся функцией одного только  $x$ . В этом случае  $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ , и уравнение (40') обращается в такое:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \quad (41)$$

Ясно, что для существования интегрирующего множителя, не зависящего от  $y$ , необходимо и достаточно, чтобы правая часть была функцией одного  $x$ ; в таком случае  $\ln \mu$  найдётся квадратурой.

Пример 7.

$$\left( 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + (x^2 + y^2) dy = 0.$$

Здесь

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = 1, \quad \mu = e^x.$$

Уравнение

$$e^x \left( 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + e^x (x^2 + y^2) dy = 0$$

есть уравнение в точных дифференциалах. Интегрируем его:

$$\begin{aligned} U &= \int e^x \left( 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \right) dx + \varphi(y) = \\ &= y \int e^x (2x + x^2) dx + \frac{y^3}{3} e^x + \varphi(y) = ye^x \left( x^2 + \frac{y^2}{3} \right) + \varphi(y). \end{aligned}$$

Для нахождения  $\varphi(y)$  вычисляем  $\frac{\partial U}{\partial y}$  и приравниваем его  $\mu N$ :

$$e^x (x^2 + y^2) + \varphi'(y) = e^x (x^2 + y^2),$$

откуда

$$\varphi'(y) = 0,$$

и общий интеграл нашего уравнения есть

$$ye^x \left( x^2 + \frac{y^2}{3} \right) = C.$$

Рассмотрим частный случай интегрирующего множителя, зависящего только от  $x$ , когда  $N=1$ ; в этом случае уравнение имеет вид:

$$dy - f(x, y) dx = 0. \quad (42)$$

Уравнение (41) примет вид:  $\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ , с условием, что  $\frac{\partial f}{\partial y}$  есть функция одного  $x$ ,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \varphi(x);$$

в таком случае  $f(x, y)$  имеет вид:

$$f(x, y) = \varphi(x)y + \psi(x),$$

т. е. уравнение, написанное в виде (42) и допускающее интегрирующий множитель, зависящий только от  $x$ , есть уравнение линейное.

Из уравнения (41) имеем:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\varphi(x), \quad \mu = e^{-\int \varphi(x) dx}.$$

Переходя к обозначениям главы I для линейного уравнения, приходим к заключению:

*Линейное уравнение  $\frac{dy}{dx} + Py = Q$  имеет интегрирующий множитель  $\mu = e^{\int P dx}$ .*

Здесь мы имеем ещё один способ интегрирования линейного уравнения. Аналогично получим условие того, что дифференциальное уравнение допускает интегрирующий множитель, зависящий только от  $y$ , и самое выражение этого множителя.

**237\*.** При каких  $a$  каждое решение продолжается на бесконечный интервал  $-\infty < x < +\infty$

а) для уравнения  $y' = |y|^a$ ?

б) для уравнения  $y' = (y^2 + e^x)^a$ ?

в) для уравнения  $y' = |y|^{a-1} + |x\sqrt[3]{y}|^{2a}$ ?

г) для системы  $y' = (y^2 + z^2 + 2)^{-a}$ ,  $z' = y(1 + z^2)^a$ ?

**238\*.** Для следующих уравнений доказать, что решение с произвольным начальным условием  $y(x_0) = y_0$  существует при  $x_0 \leq x < +\infty$ :

а)  $y' = x^3 - y^3$ ,

б)  $y' = xy + e^{-y}$ .

**239\*.** Пусть на всей плоскости  $x, y$  функции  $f(x, y)$  и  $f'_y(x, y)$  непрерывны и  $f'_y(x, y) \leq k(x)$ , функция  $k(x)$  непрерывна. Доказать, что решение уравнения  $y' = f(x, y)$  с любым начальным условием  $y(x_0) = y_0$  существует при  $x_0 \leq x < +\infty$ .

**240\*.** Дана система в векторной записи  $y' = f(x, y)$ , удовлетворяющая условиям теоремы существования в окрестности каждой точки  $(x, y)$ . Пусть в области  $|y| > b$  при всех  $x$

$$y \cdot f(x, y) \leq k(x)|y|^2,$$

где  $y \cdot f$  — скалярное произведение, а функция  $k(x)$  непрерывна. Доказать, что решение с любым начальным условием  $y(x_0) = y_0$  существует при  $x_0 \leq x < +\infty$ .

## § 8. УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

1. Уравнения вида  $F(x, y, y') = 0$  можно решать следующими методами.

а) Разрешить уравнение относительно  $y'$ , т. е. из уравнения  $F(x, y, y') = 0$  выразить  $y'$  через  $x$  и  $y$ . Получится одно или несколько уравнений вида  $y' = f(x, y)$ . Каждое из них надо решить.

б) Метод введения параметра<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Здесь излагается простейший вариант этого метода. Более общий вариант см. [1], гл. III, § 3, п. 1.

Пусть уравнение  $F(x, y, y') = 0$  можно разрешить относительно  $y$ , т. е. записать в виде  $y = f(x, y')$ . Введя параметр

$$p = \frac{dy}{dx} = y', \quad (1)$$

получим

$$y = f(x, p). \quad (2)$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей равенства (2) и заменив  $dy$  через  $p dx$  (в силу (1)), получим уравнение вида

$$M(x, p) dx + N(x, p) dp = 0.$$

Если решение этого уравнения найдено в виде  $x = \varphi(p)$ , то, воспользовавшись равенством (2), получим решение исходного уравнения в параметрической записи:  $x = \varphi(p)$ ,  $y = f(\varphi(p), p)$ .

Уравнения вида  $x = f(y, y')$  решаются тем же методом.

**Пример.** Решить уравнение  $y = x + y' - \ln y'$ . Вводим параметр  $p = y'$ :

$$y = x + p - \ln p. \quad (3)$$

Берем полный дифференциал от обеих частей равенства и заменяем  $dy$  на  $p dx$  в силу (1):  $dy = dx + dp - \frac{dp}{p}$ ,  $p dx = dx + dp - \frac{dp}{p}$ . Решаем полученное уравнение. Переносим члены с  $dx$  влево, с  $dp$  — вправо:

$$(p - 1) dx = \frac{p - 1}{p} dp. \quad (4)$$

а) Если  $p \neq 1$ , то сокращаем на  $p - 1$ :

$$dx = \frac{dp}{p}, \quad x = \ln p + C.$$

Подставляя это в (3), получаем решение в параметрической записи:

$$x = \ln p + C, \quad y = p + C. \quad (5)$$

В данном случае можно исключить параметр  $p$  и получить решение в явном виде. Для этого из первого из уравнений (5) выражаем  $p$  через  $x$ , т. е.  $p = e^{x-C}$ . Подставляя это во второе уравнение, получаем искомое решение:

$$y = e^{x-C} + C. \quad (6)$$

б) Рассмотрим случай, когда в (4) имеем  $p = 1$ . Подставляя  $p = 1$  в (3), получаем еще решение

$$y = x + 1. \quad (7)$$



(Было бы ошибкой в равенстве  $p = 1$  заменить  $p$  на  $y'$  и, проинтегрировав, получить  $y = x + C$ .)

2. Решение  $y = \varphi(x)$  уравнения  $F(x, y, y') = 0$  называется *особым*, если через каждую его точку, кроме этого решения, проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, что и решение  $y = \varphi(x)$ , но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности этой точки<sup>1</sup>.

Если функция  $F(x, y, y')$  и производные  $\frac{\partial F}{\partial y}$  и  $\frac{\partial F}{\partial y'}$  непрерывны, то любое особое решение уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \quad (8)$$

удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \quad (9)$$

Поэтому, чтобы отыскать особые решения уравнения (3), надо исключить  $y'$  из уравнений (8) и (9). Полученное уравнение  $\psi(x, y) = 0$  называется уравнением *дискриминантной* кривой. Для каждой ветви дискриминантной кривой надо проверить, является ли эта ветвь решением уравнения (8), и если является, то будет ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения.

**Пример.** Найти особое решение уравнения

$$y = x + y' - \ln y'. \quad (10)$$

Дифференцируем обе части равенства по  $y'$ :

$$0 = 1 - \frac{1}{y'}. \quad (11)$$

Исключаем  $y'$  из уравнений (10) и (11). Из (11) имеем  $y' = 1$ ; подставляя это в (10), получаем уравнение дискриминантной кривой

$$y = x + 1. \quad (12)$$

Проверим, будет ли кривая особым решением. Для этого сначала проверяем, является ли она решением уравнения (10). Подставляя (12) в (10), получаем тождество  $x + 1 = x + 1$ . Значит, кривая (12) — решение.

---

<sup>1</sup>Это определение взято из [1]. Есть и другие определения, не равносильные этому.

Теперь проверим, является ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения. В п. 1 было найдено, что другие решения выражаются формулой (6). Пишем условия касания кривых  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ :

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \quad y'_1(x_0) = y'_2(x_0). \quad (13)$$

Для решений (6) и (12) эти условия принимают вид  $e^{x_0-C} + C = x_0 + 1$ ,  $e^{x_0-C} = 1$ . Из второго равенства имеем  $C = x_0$ ; подставляя это в первое равенство, получаем  $1 + x_0 = x_0 + 1$ . Это равенство справедливо при всех  $x_0$ . Значит, при каждом  $x_0$  решение (12) в точке с абсциссой  $x_0$  касается одной из кривых семейства (6), а именно той кривой, для которой  $C = x_0$ .

Итак, в каждой точке решение (12) касается другого решения (6), не совпадающего с ним. Значит, решение (12) — особое.

Если семейство решений записано в параметрическом виде, как в (5), то выполнение условий касания проверяется аналогично. При этом надо учесть, что  $y' = p$ .

3. Если семейство кривых  $\Phi(x, y, C) = 0$ , являющихся решениями уравнения  $F(x, y, y') = 0$ , имеет огибающую  $y = \varphi(x)$ , то эта огибающая является особым решением того же уравнения. Если функция  $\Phi$  имеет непрерывные первые производные, то для отыскания огибающей надо исключить  $C$  из уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

и проверить, будет ли полученная кривая огибающей, т. е. касаются ли ее в каждой точке кривые семейства. Эту проверку можно провести изложенным в конце п. 2 методом, используя условия касания (13).

В задачах **241—250** найти все решения данных уравнений; выделить особые решения (если они есть); дать чертеж.

**241.**  $y'^2 - y^2 = 0$ .

**242.**  $8y'^3 = 27y$ .

**243.**  $(y' + 1)^3 = 27(x + y)^2$ .

**245.**  $y^2(y'^2 + 1) = 1$ .

**245.**  $y'^2 - 4y^3 = 0$ .

**246.**  $y'^2 = 4y^3(1 - y)$ .

**247.**  $xy'^2 = y$ .

**245.**  $yy'^3 + x = 1$ .

**249.**  $y'^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$ .

$$407. \quad yy' + x = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2 + y^2}{x} \right)^2.$$

$$408. \quad y' = \left( \frac{3x + y^3 - 1}{y} \right)^2.$$

$$409. \quad \left( x\sqrt{y^2 + 1} + 1 \right) (y^2 + 1) dx = xy dy.$$

$$410. \quad (x^2 + y^2 + 1)yy' + (x^2 + y^2 - 1)x = 0.$$

$$411. \quad y^2(x - 1) dx = x(xy + x - 2y) dy.$$

$$412. \quad (xy' - y)^2 = x^2y^2 - x^4.$$

$$413. \quad xy y' - x^2 \sqrt{y^2 + 1} = (x + 1)(y^2 + 1).$$

$$414. \quad (x^2 - 1)y' + y^2 - 2xy + 1 = 0.$$

$$415. \quad y' \operatorname{tg} y + 4x^3 \cos y = 2x.$$

$$416. \quad (xy' - y)^2 = y'^2 - \frac{2yy'}{x} + 1.$$

$$417. \quad (x + y)(1 - xy) dx + (x + 2y) dy = 0.$$

$$418. \quad (3xy + x + y)y dx + (4xy + x + 2y)x dy = 0.$$

$$419. \quad (x^2 - 1) dx + (x^2y^2 + x^3 + x) dy = 0.$$

$$420. \quad x(y'^2 + e^{2y}) = -2y'.$$

## § 10. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1. Если в уравнение не входит искомая функция  $y$ , т. е. оно имеет вид  $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ , то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, входящих в уравнение, т. е. сделав замену  $y^{(k)} = z$ .

2. Если в уравнение не входит независимое переменное  $x$ , т. е. уравнение имеет вид  $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ , то порядок уравнения можно понизить, взяв за новое независимое переменное  $y$ , а за неизвестную функцию  $y' = p(y)$ .

**Пример.** Решить уравнение  $2yy'' = y'^2 + 1$ .

В уравнение не входит  $x$ . Полагаем  $y' = p(y)$ . Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p.$$

Подставляя  $y' = p$  и  $y'' = pp'$  в уравнение, получим  $2ypp' = p^2 + 1$ . Порядок уравнения понижен. Решив полученное уравнение, найдем  $p = \pm\sqrt{Cy - 1}$ . Следовательно,  $y' = \pm\sqrt{Cy - 1}$ . Из этого уравнения получим  $4(Cy - 1) = C^2(x + C_2)$ .

3. Если уравнение однородно относительно  $y$  и его производных, т. е. не меняется при одновременной замене  $y, y', y'', \dots$  на  $ky, ky', ky'', \dots$ , то порядок уравнения понижается подстановкой  $y' = yz$ , где  $z$  — новая неизвестная функция.

4. Порядок уравнения понижается, если оно является однородным относительно  $x$  и  $y$  в обобщенном смысле, т. е. не меняется от замены  $x$  на  $kx$ ,  $y$  на  $k^m y$  (при этом  $y'$  заменяется на  $k^{m-1}y'$ ,  $y''$  — на  $k^{m-2}y''$  и т. д.). Чтобы узнать, будет ли уравнение однородным, и найти число  $m$ , надо приравнять друг другу показатели степеней, в которых число  $k$  будет входить в каждый член уравнения после указанной выше замены. Например, в первый член уравнения  $2x^4y'' - 3y^2 = x^4$  после этой замены число  $k$  будет входить в степени  $4 + (m - 2)$ , во второй — в степени  $2m$ , в третий — в степени 4. Следовательно,  $m$  должно удовлетворять уравнениям

$$4 + (m - 2) = 2m = 4.$$

Отсюда  $m = 2$ . Если же полученные уравнения для  $m$  будут несовместными, то дифференциальное уравнение не является однородным в указанном смысле.

После того как число  $m$  найдено, надо сделать замену переменных  $x = e^t$ ,  $y = ze^{mt}$ , где  $z = z(t)$  — новая неизвестная функция, а  $t$  — новое независимое переменное. Получим уравнение, в которое не входит независимое переменное  $t$ . Порядок такого уравнения понижается одним из ранее рассмотренных способов.

5. Порядок уравнения легко понижается, если удастся преобразовать уравнение к такому виду, чтобы обе его части являлись полными производными по  $x$  от каких-нибудь функций. Например, пусть дано уравнение  $yy'' = y'^2$ . Деля обе части на  $yy'$ , получим  $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$ ;  $(\ln y')' = (\ln y)'$ ;  $\ln y' = \ln y + \ln C$ ;  $y' = yC$ . Порядок уравнения понижен.

Решить уравнения **421–450**.

**421.**  $x^2y'' = y'^2$ .

**422.**  $2xy'y'' = y'^2 - 1$ .