# 1 Обыкновенные дифференциальные уравнения

## 1.1 Уравнения, допускающие понижение порядка

Порядок ОДУ можно понизить, если оно:

- имеет вид $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)})$, тогда замена $y' = p(y)$
- имеет вид $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)})$, тогда замена $y^{(k)} = z$
- однородно относительно $y$ и его производных, тогда замена $y' = yz$
- однородно в обобщенном смысле, если оно не меняется от замены $x$ на $kx$, $y$ на $ky$, $y^{(s)}$ на $k^{m-s}y^{(s)}$. Чтобы найти $m$, надо приравнять друг другу показатели степеней, в которых $m$ будет входить в каждый член уравнения после указанной замены, т.е. $m$ должно удовлетворять каждому уравнению получившейся системы.

  $$2(kx)^4\left(k^{(m-2)}y''\right) - 3\left(k^m y\right)^2 = (kx)^4 \Rightarrow 4 + (m-2) = 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

  Затем сделать замену $x = e^t, y = ze^{mt}$, где $t$ новая независимая перменная, а $z(t)$ новая неизвестная функция.
- преобразуется к такому виду, чтобы обе части уравнения являются производными по $x$ от каких-нибудь функций. Не забыть константу интегрирования.

## 1.2 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Определитель Вронского:

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & \end{vmatrix}$$

Матрица Грама:

$$(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x) y_j(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Система из $n$ линейно независимых функций линейно независима, если определитель Вронского для системы функций равен нулю (необходимое, но не достаточное условие!), либо определитель матрица Грама равен нулю (необходимое и достаточное).

Рассмотрим ОДУ вида:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Для нахождения общего решения нужно записать характеристическое уравнение:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 y = 0$$

Затем найти все его корни, если:

- Корень вещественный кратности один, то $Ce^{\lambda x}$
- Корень вещественный кратности $k$, то $e^{\lambda x}(C_0 + C_1 x + \dots C_k x^k)$
- Корень комплексный кратности один, то $e^{Re(\lambda)}\cos(Im(\lambda))$ или $Ce^{Re(\lambda)}\sin(Im(\lambda))$. Если перед мнимой частью плюс, то косинус, иначе синус.
- Корень комплексный кратности $k$, то $e^{Re(\lambda)}\cos(Im(\lambda))(C_0 + C_1 x + \dots C_k x^k)$ или $e^{Re(\lambda)}\sin(Im(\lambda))(C_0 + C_1 x + \dots C_k x^k)$

Потом выписать общее решение для каждого корня.

Рассматрим неоднородное уравнение:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

- Если правая часть имеет специальный вид, то см. таблицу:

| № | Правая часть ДУ (2) | Корни характеристического уравнения | Виды частного решения $y_ч$ |
|---|---|---|---|
| I | $P_m(x)$ | $\lambda_j \neq 0, \quad j = 1, \dots, n$ | $\tilde{P}_m(x)$ |
| | | $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$ | $x^s \tilde{P}_m(x)$ |
| II | $P_m(x)e^{\alpha x}$ | $\lambda_j \neq \alpha, \quad j = 1, \dots, n$ | $\tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$ |
| | | $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = \alpha$ | $x^s \tilde{P}_m(x)e^{\alpha x}$ |
| III | $P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x$ | $\lambda_j \neq \pm i\beta, \quad j = 1, \dots, n$ | $\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x$, $k = \max(m, l)$ |
| | | $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = i\beta$, $\lambda_{s+1} = \dots = \lambda_{2s} = -i\beta$ | $x^s[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x]$, $k = \max(m, l)$ |
| IV | $e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x]$ | $\lambda_j \neq \alpha \pm i\beta, j = 1, \dots, n$ | $[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$, $k = \max(m, l)$ |
| | | $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = \alpha + i\beta$, $\lambda_{s+1} = \dots = \lambda_{2s} = \alpha - i\beta$ | $x^s[\tilde{P}_k(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_k(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$, $k = \max(m, l)$ |

- Также можно решить методом вариации постоянных через соответствующее однородное решение:

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x).$$

  И найти $C_i(x)$ через систему:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \dots + C_n'y_n = 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \dots + C_n'y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \dots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \dots + C_n'y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

- Уравнения Эйлера:

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

  Решаются через замену $x = e^t$, частные решения можно искать сразу в виде $y = x^k$.

### 1.2.1 Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Уравнений второго порядка:

$$y = \exp\left(-\int \frac{p(x)}{2} dx\right) z$$

Формула Остроградского-Лиувилля:

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{p_1(x)}{p_0(x)} \mathrm{d}x\right)$$