TODO: сделать выжимку из всех pdf'ок снизу

§ 2. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1. Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y), \tag{1}$$

а также в виде

$$M(x)N(y)\,\mathrm{d}x + P(x)Q(y)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{2}$$

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, в другую — только y, и затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль.

Пример. Решить уравнение

$$x^2y^2y' + 1 = y. \tag{3}$$

Приводим уравнение к виду (2):

$$x^2y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - 1; \qquad x^2y^2\,\mathrm{d}y = (y-1)\,\mathrm{d}x.$$

Делим обе части уравнения на $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y^2}{y-1}\,\mathrm{d}y = \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}; \qquad \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

При делении на $x^2(y-1)$ могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y - 1 = 0$, т. е. $y = 1$. Очевидно, $y = 1$ — решение уравнения (3), а $x = 0$ — нет.

2. Уравнения вида $y' = f(ax + by)$ приводятся к уравнениям с разделяющимися переменными заменой $z = ax+by$ (или $z = ax + by + c$, где c любое).

В задачах **51—65** решить данные уравнения и для каждого из них построить несколько интегральных кривых. Найти

97. Найти атмосферное давление на высоте h, если на поверхности земли давление равно 1 *кГ/см*^{2} и плотность воздуха 0,0012 *г/см*^{3}. Использовать закон Бойля—Мариотта, в силу которого плотность пропорциональна давлению (т. е. пренебречь изменением температуры воздуха с высотой).

98. Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает три витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен 1/3, и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой 10 *кГ*?

99. В закрытом помещении объемом v *м*^{3} находится открытый сосуд с водой. Скорость испарения воды пропорциональна разности между количеством q_1 водяного пара, насыщающего 1 *м*^{3} воздуха при данной температуре, и количеством q водяного пара, имеющемся в 1 *м*^{3} воздуха в рассматриваемый момент (считаем, что температура воздуха и воды, а также величина площади, с которой происходит испарение, остаются неизменными). В начальный момент в сосуде было m_0 грамм воды, а в 1 *м*^{3} воздуха q_0 грамм пара. Сколько воды останется в сосуде через промежуток времени t?

100. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива m, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна c, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха (формула Циолковского).

§ 4. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Однородные уравнения могут быть записаны в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, а также в виде $M(x,\ y)\,\mathrm{d}x + N(x,\ y)\,\mathrm{d}y = 0$, где $M(x,\ y)$ и $N(x,\ y)$ — однородные функции одной и той же степени[1]. Чтобы решить однородное уравнение, можно сделать замену $y = tx$, после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.

П р и м е р. Решить уравнение $x\,\mathrm{d}y = (x + y)\,\mathrm{d}x$.

[1]Функция $M(x,\ y)$ называется однородной функцией степени n, если для всех $k > 0$ имеем $M(kx,\ ky) \equiv k^n M(x,\ y)$.

Это уравнение — однородное. Полагаем $y = tx$. Тогда $\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}x$. Подставляя в уравнение, получим

$$x(x\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}x) = (x + tx)\,\mathrm{d}x; \quad x\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x.$$

Решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}; \quad t = \ln|x| + C.$$

Возвращаясь к старому переменному y, получим $y = x(\ln|x| + C)$. Кроме того, имеется решение $x = 0$, которое было потеряно при делении на x.

2. Уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$ приводится к однородному с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых $ax + by + c = 0$ и $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Если же эти прямые не пересекаются, то $a_1x + b_1y = k(ax + by)$; следовательно, уравнение имеет вид $y' = F(ax + by)$ и приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$ (или $z = ax + by + c$), см. § 2, п. 2.

3. Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой $y = z^m$. Число m обычно заранее не известно. Чтобы его найти, надо в уравнении сделать замену $y = z^m$. Требуя, чтобы уравнение было однородным, найдем число m, если это возможно. Если же этого сделать нельзя, то уравнение не приводится к однородному этим способом.

Пример. Дано уравнение $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$. После замены $y = z^m$ уравнение примет вид $2mx^4z^{2m-1}z' + z^{4m} = 4x^6$. Это уравнение будет однородным в том случае, когда степени всех его членов равны между собой, т. е. $4 + (2m - 1) = 4m = 6$. Эти равенства удовлетворяются одновременно, если $m = 3/2$. Следовательно, уравнение можно привести к однородному заменой $y = z^{3/2}$.

Решить уравнения **101—129**.

101. $(x + 2y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$.

102. $(x - y)\,\mathrm{d}x + (x + y)\,\mathrm{d}y = 0$.

103. $(y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$.

104. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.

105. $y^2 + x^2y' = xyy'$.

106. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$.

к кривой до касательной к траектории отсчитывается в отрицательном направлении.

$$\text{а) } y = x \ln Cx; \quad \text{б) } (x-3y)^4 = Cxy^6.$$

131. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

132. Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

133. При каких α и β уравнение $y' = ax^\alpha + +by^\beta$ приводится к однородному с помощью замены $y = z^m$?

134*. Пусть k_0 — корень уравнения $f(k) = k$. Показать, что:

1) если $f'(k_0) < 1$, то ни одно решение уравнения $y' = = f(y/x)$ не касается прямой $y = k_0 x$ в начале координат;

2) если $f'(k_0) > 1$, то этой прямой касается бесконечно много решений.

135. Начертить приближенно интегральные кривые следующих уравнений (не решая уравнений):

$$\text{а) } y' = \frac{y(2y-x)}{x^2}; \qquad \text{б) } y' = \frac{2y^2 - x^2}{xy};$$

$$\text{в) } y' = \frac{2y^3 - x^2 y}{2x^2 y - x^3}; \qquad \text{г*) } xy' = y + \sqrt{y^2 + \frac{y^3}{x}}.$$

Указание. Тангенс угла между лучом $y = kx$ и пересекающей его интегральной кривой уравнения $y' = f(y/x)$ равен $(f(k) - k)\,/\,(1 + kf(k))$ (почему?). Для приближенного построения интегральных кривых надо исследовать знак этой дроби в зависимости от k.

§ 5. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Уравнение

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{1}$$

называется линейным. Чтобы его решить, надо сначала решить уравнение

$$y' + a(x)y = 0 \tag{2}$$

(это делается путем разделения переменных, см. § 2) и в общем решении последнего заменить произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$. Затем выражение, полученное для y, подставить в уравнение (1) и найти функцию $C(x)$.

2. Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимое переменное. Например, уравнение $y = (2x + y^3)y'$, в котором y является функцией от x, — нелинейное. Запишем его в дифференциалах: $y\,\mathrm{d}x - (2x + y^3)\,\mathrm{d}y = 0$. Так как в это уравнение x и $\mathrm{d}x$ входят линейно, то уравнение будет линейным, если x считать искомой функцией, а y — независимым переменным. Это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{2}{y}x = y^2$$

и решается аналогично уравнению (1).

3. Чтобы решить уравнение Бернулли, т. е. уравнение

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad (n \neq 1),$$

надо обе его части разделить на y^n и сделать замену $1/y^{n-1} = z$. После замены получается линейное уравнение, которое можно решить изложенным выше способом. (Пример см. в [1], гл. I, § 4, п. 2, пример 10.)

4. Уравнение Риккати, т. е. уравнение

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x),$$

в общем случае не решается в квадратурах. Если же известно одно частное решение $y_1(x)$, то заменой $y = y_1(x) + z$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли и таким образом может быть решено в квадратурах.

Иногда частное решение удается подобрать, исходя из вида свободного члена уравнения (члена, не содержащего y). Например, для уравнения $y' + y^2 = x^2 - 2x$ в левой части будут члены, подобные членам правой части, если взять $y = ax + b$. Подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты при подобных членах, найдем a и b (если частное решение указанного вида существует, что вовсе не всегда бывает). Другой пример: для уравнения $y' + 2y^2 = 6/x^2$ те же рассуждения побуждают нас искать частное решение в виде $y = a/x$. Подставляя $y = a/x$ в уравнение, найдем постоянную a.

Решить уравнения **136—160**.

136. $xy' - 2y = 2x^4$.

185*. Пусть в уравнении предыдущей задачи имеем $a(t) \geqslant c > 0$ и пусть $x_0(t)$ — решение с начальным условием $x_0(0) = b$. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если изменить функцию $f(t)$ и число b меньше, чем на δ (т. е. заменить их на такую функцию $f_1(t)$ и число b_1, что $|f_1(t) - f(t)| < \delta$, $|b_1 - b| < \delta$), то решение $x_0(t)$ изменится при $t \geqslant 0$ меньше, чем на ε. Это свойство решения называется устойчивостью по постоянно действующим возмущениям.

§ 6. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

1. Уравнение

$$M(x,\ y)\,\mathrm{d}x + N(x,\ y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,\ y)$. Это имеет место, если $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$. Чтобы решить уравнение (1), надо найти функцию $F(x,\ y)$, от которой полный дифференциал $\mathrm{d}F(x,\ y) = F'_x\,\mathrm{d}x + F'_y\,\mathrm{d}y$ равен левой части уравнения (1). Тогда общее решение уравнения (1) можно написать в виде $F(x,\ y) = C$, где C — произвольная постоянная.

Пример. Решить уравнение

$$(2x + 3x^2y)\,\mathrm{d}x + (x^3 - 3y^2)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{2}$$

Так как $\dfrac{\partial}{\partial y}(2x + 3x^2y) = 3x^2$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3y^2) = 3x^2$, то уравнение (2) является уравнением в полных дифференциалах. Найдем функцию $F(x,\ y)$, полный дифференциал которой $\mathrm{d}F = F'_x\,\mathrm{d}x + F'_y\,\mathrm{d}y$ был бы равен левой части уравнения (2), т. е. такую функцию F, что

$$F'_x = 2x + 3x^2y, \quad F'_y = x^3 - 3y^2. \tag{3}$$

Интегрируем по x первое из уравнений (3), считая y постоянным; при этом вместо постоянной интегрирования надо поставить $\varphi(y)$ — неизвестную функцию от y :

$$F = \int (2x + 3x^2y)\,\mathrm{d}x = x^2 + x^3y + \varphi(y).$$

Подставляя это выражение для F во второе из уравнений (3), найдем $\varphi(y)$:

$$\left(x^2 + x^3 y + \varphi(y)\right)'_y = x^3 - 3y^2; \ \varphi'(y) = -3y^2; \ \varphi(y) = -y^3 + \mathrm{const}.$$

Следовательно, можно взять $F(x, y) = x^2 + x^3 y - y^3$, и общее решение уравнения (2) будет иметь вид

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C.$$

2. Интегрирующим множителем для уравнения

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{4}$$

называется такая функция $m(x, y) \not\equiv 0$, после умножения на которую уравнение (4) превращается в уравнение в полных дифференциалах. Если функции M и N в уравнении (4) имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно, то интегрирующий множитель существует. Однако нет общего метода для его отыскания (когда общее решение уравнения (4) неизвестно).

В некоторых случаях интегрирующий множитель можно найти с помощью приемов, изложенных в [1], гл. II, § 3, п. 3 или в [4], гл. 1, § 5. Для решения некоторых уравнений можно применять метод выделения полных дифференциалов, используя известные формулы:

$$\mathrm{d}(xy) = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y, \qquad \mathrm{d}(y^2) = 2y\,\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}, \quad \mathrm{d}(\ln y) = \frac{\mathrm{d}y}{y} \ \text{и т. п.}$$

Пример. Решить уравнение

$$y\,\mathrm{d}x - (4x^2 y + x)\,\mathrm{d}y = 0. \tag{5}$$

Сначала выделяем группу членов, представляющую собой полный дифференциал. Так как $y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = -x^2\,\mathrm{d}(y/x)$, то, деля уравнение (5) на $-x^2$, имеем

$$\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) + 4y\,\mathrm{d}y = 0, \qquad \mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) + \mathrm{d}(2y^2) = 0.$$

Это — уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя непосредственно (приводить к виду (1) не нужно), получаем решение

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = C.$$

Кроме того, при делении на $-x^2$ было потеряно решение $x = 0$.

З а м е ч а н и е. Так как после деления уравнения (5) на $-x^2$, т. е. умножения на $-1/x^2$, получилось уравнение в полных дифференциалах, то интегрирующий множитель для уравнения (5) равен $-1/x^2$.

3. Если в уравнении (4) можно выделить полный дифференциал некоторой функции $\varphi(x,\ y)$, то иногда уравнение упрощается, если от переменных $(x,\ y)$ перейти к переменным $(x,\ z)$ или $(y,\ z)$, где $z = \varphi(x,\ y)$.

П р и м е р ы. 1) Решить уравнение $y\,\mathrm{d}x - (x^3 y + x)\,\mathrm{d}y = 0$.

Выделив полный дифференциал как в предыдущем примере, получим

$$\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) + xy\,\mathrm{d}y = 0.$$

Перейдя к переменным $z = y/x$ и y, получим уравнение

$$\mathrm{d}z + \frac{y^2}{z}\,\mathrm{d}y = 0,$$

которое легко решается.

2) Решить уравнение $(xy + y^4)\,\mathrm{d}x + (x^2 - xy^3)\,\mathrm{d}y = 0$.

Сгруппируем члены так, чтобы выделить полные дифференциалы

$$x(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) + y^3(y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y) = 0, \quad x\,\mathrm{d}(xy) + y^5\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Разделив на x и сделав замену $xy = u$, $x/y = v$, получим уравнение $\mathrm{d}u + \dfrac{u^2}{v^3}\,\mathrm{d}v = 0$, которое легко решается.

В задачах **186—194** проверить, что данные уравнения являются уравнениями в полных дифференциалах, и решить их.

186. $2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = 0$.

187. $(2 - 9xy^2)x\,\mathrm{d}x + (4y^2 - 6x^3)y\,\mathrm{d}y = 0$.

188. $\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x - (2y + x\mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{d}y = 0$.

189. $\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x + (y^3 + \ln x)\,\mathrm{d}y = 0$.

190. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}\,\mathrm{d}x - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}\,\mathrm{d}y = 0$.

213. $y(x+y^2)\,\mathrm{d}x + x^2(y-1)\,\mathrm{d}y = 0.$

214. $(x^2 - \sin^2 y)\,\mathrm{d}x + x\sin 2y\,\mathrm{d}y = 0.$

215. $x(\ln y + 2\ln x - 1)\,\mathrm{d}y = 2y\,\mathrm{d}x.$

216. $(x^2+1)(2x\,\mathrm{d}x + \cos y\,\mathrm{d}y) = 2x\sin y\,\mathrm{d}x.$

217. $(2x^3y^2 - y)\,\mathrm{d}x + (2x^2y^3 - x)\,\mathrm{d}y = 0.$

218. $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0.$

219. $(x^2 - y)\,\mathrm{d}x + x(y+1)\,\mathrm{d}y = 0.$

220. $y^2(y\,\mathrm{d}x - 2x\,\mathrm{d}y) = x^3(x\,\mathrm{d}y - 2y\,\mathrm{d}x).$

§ 7. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

1. Теорема существования и единственности решения уравнения

$$y' = f(x,\ y) \tag{1}$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Пусть в замкнутой области R $(|x - x_0| \leqslant a,\ |y - y_0| \leqslant b)$ *функции* f *и* f'_y *непрерывны*[1]. *Тогда на некотором отрезке* $x_0 - d \leqslant x \leqslant x_0 + d$ *существует единственное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее начальному условию* $y(x_0) = y_0$.

При этом можно взять $d = \min\left\{a;\ \frac{b}{m}\right\}$, где a и b указаны выше, а m — любое такое, что $|f| \leqslant m$ в R.

Последовательные приближения, определяемые формулами

$$y_0(x) = y_0,\quad y_k(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s,\ y_{k-1}(s))\,\mathrm{d}s,\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

равномерно сходятся к решению на указанном отрезке.

Замечание. Для существования решения достаточно только непрерывности $f(x,\ y)$ в области R, но при этом решение может не быть единственным.

---

[1]Требование непрерывности $f'(y)$ можно заменить требованием ее ограниченности или условием Липшица: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant k|y_1 - y_2|$, $k = \mathrm{const}$.

2. Система уравнений

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \end{cases} \tag{2}$$

в векторных обозначениях записывается так:

$$y' = f(x,\ y), \tag{3}$$

где $y = (y_1,\ \ldots,\ y_n)$ и $f = (f_1,\ \ldots,\ f_n)$ — векторы. Непрерывность вектор-функции f означает непрерывность всех функций $f_1,\ \ldots,\ f_n$, а вместо $\frac{\partial f}{\partial y}$ рассматривается матрица из частных производных $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, $i,\ k = 1,\ \ldots, n$.

Теорема существования и единственности решения и все утверждения п. 1 остаются справедливыми и для системы, записанной в виде (3). При этом $|y|$ означает длину вектора y: $|y| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$.

3. Теорема существования и единственности решения для уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}). \tag{4}$$

Пусть в области D функция f и ее частные производные первого порядка по y, y', $\ldots$, $y^{(n-1)}$ непрерывны, и точка $(x_0,\ y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)})$ лежит внутри D. Тогда при начальных условиях

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

уравнение (4) *имеет единственное решение.*

Уравнение (4) можно свести к системе вида (2), если ввести новые неизвестные функции по формулам $y = y_1$, $y' = y_2$, $y'' = y_3$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = y_n$. Тогда уравнение (4) сводится к системе

$$y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ \ldots,\ y_{n-1}' = y_n,\ y_n' = f(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n),$$

которая является частным случаем системы (2) и к которой применимы все утверждения п. 2.

4. Продолжение решений. Во многих случаях решение уравнения (1) или системы (2) существует не только на отрезке, указанном в п. 1, но и на бо́льшем отрезке.

Если уравнение (1) или система (2) удовлетворяет условиям теоремы существования в замкнутой ограниченной области, то всякое решение можно продолжить до выхода на границу этой области.

Если правая часть уравнения (1) или системы (3) в области $\alpha < x < \beta$, $|y| < \infty$ (α и β могут быть конечными или бесконечными) непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|f(x,\ y)| \leqslant a(x)|y| + b(x),$$

и функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны, то всякое решение можно продолжить на весь интервал $\alpha < x < \beta$.

221. Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данного уравнения с данными начальными условиями:

а) $y' = x - y^2,\ \ y(0) = 0.$

б) $y' = y^2 + 3x^2 - 1,\ \ y(1) = 1.$

в) $y' = y + \mathrm{e}^{y-1},\ \ y(0) = 1.$

г) $y' = 1 + x\sin y,\ \ y(\pi) = 2\pi.$

222. Построить по два последовательных приближения (не считая исходного) к решениям следующих уравнений и систем:

а) $y' = 2x + z,\ \ z' = y;\quad y(1) = 1,\quad z(1) = 0.$

б) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x^2;\quad x(0) = 1,\quad y(0) = 2.$

в) $y'' + {y'}^2 - 2y = 0;\qquad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0.$

г) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 3tx;\qquad x(1) = 2,\quad \left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} = -1.$

223. Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями:

а) $y' = x + y^3,\ \ y(0) = 0.$

б) $y' = 2y^2 - x,\ \ y(1) = 1.$

в) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t + \mathrm{e}^x,\ \ x(1) = 0.$

г) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y^2,\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x^2,\ \ x(0) = 1,\ \ y(0) = 2.$

3. Нахождение интегрирующего множителя. Из определения интегрирующего множителя имеем:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

или

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu, \tag{40}$$

или же, деля обе части равенства (40) на μ,

$$N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{40'}$$

Мы получили в виде (40) или (40′) уравнение в частных производных для определения неизвестной функции μ. Задача интегрирования такого уравнения в общем случае не проще, чем задача решения уравнения (33). Конечно, нам достаточно знать только одно частное решение уравнения (40); иногда, по каким-нибудь особенностям уравнения (40), удаётся найти такое частное решение, и тогда интеграция уравнения (33) сводится к квадратурам.

Рассмотрим, например, случай, когда существует интегрирующий множитель, являющийся функцией одного только x. В этом случае $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$, и уравнение (40′) обращается в такое:

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{41}$$

Ясно, что для существования интегрирующего множителя, не зависящего от y, необходимо и достаточно, чтобы правая часть была функцией одного x; в таком случае $\ln\mu$ найдётся квадратурой.

Пример 7.

$$\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+(x^2+y^2)\,dy=0.$$

Здесь

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2x+x^2+y^2-2x}{x^2+y^2}=1.$$

Следовательно,

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=1,\quad \mu=e^x.$$

Уравнение

$$e^x\left(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}\right)dx+e^x(x^2+y^2)\,dy=0$$

есть уравнение в точных дифференциалах. Интегрируем его:

$$U = \int e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \varphi(y) =$$
$$= y\int e^x(2x + x^2)\,dx + \frac{y^3}{3}e^x + \varphi(y) = ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) + \varphi(y).$$

Для нахождения $\varphi(y)$ вычисляем $\frac{\partial U}{\partial y}$ и приравниваем его μN:

$$e^x(x^2 + y^2) + \varphi'(y) = e^x(x^2 + y^2),$$

откуда

$$\varphi'(y) = 0,$$

и общий интеграл нашего уравнения есть

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C.$$

Рассмотрим частный случай интегрирующего множителя, зависящего только от x, когда $N = 1$; в этом случае уравнение имеет вид:

$$dy - f(x, y)\,dx = 0. \tag{42}$$

Уравнение (41) примет вид: $\frac{d\ln\mu}{dx} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, с условием, что $\frac{\partial f}{\partial y}$ есть функция одного x,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \varphi(x);$$

в таком случае $f(x, y)$ имеет вид:

$$f(x, y) = \varphi(x)y + \psi(x),$$

т. е. *уравнение*, написанное в виде (42) *и допускающее интегрирующий множитель, зависящий только от* x, *есть уравнение линейное*.

Из уравнения (41) имеем:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = -\varphi(x), \quad \mu = e^{-\int\varphi(x)\,dx}.$$

Переходя к обозначениям главы I для линейного уравнения, приходим к заключению:

Линейное уравнение $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ *имеет интегрирующий множитель* $\mu = e^{\int P\,dx}$.

Здесь мы имеем ещё один способ интегрирования линейного уравнения. Аналогично получим условие того, что дифференциальное уравнение допускает интегрирующий множитель, зависящий только от y, и самое выражение этого множителя.

237*. При каких a каждое решение продолжается на бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$

а) для уравнения $y' = |y|^a$?

б) для уравнения $y' = (y^2 + e^x)^a$?

в) для уравнения $y' = |y|^{a-1} + \left|x\sqrt[3]{y}\right|^{2a}$?

г) для системы $y' = (y^2 + z^2 + 2)^{-a}$, $z' = y(1 + z^2)^a$?

238*. Для следующих уравнений доказать, что решение с произвольным начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует при $x_0 \leqslant x < +\infty$:

а) $y' = x^3 - y^3$, б) $y' = xy + e^{-y}$.

239*. Пусть на всей плоскости x, y функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны и $f'_y(x, y) \leqslant k(x)$, функция $k(x)$ непрерывна. Доказать, что решение уравнения $y' = f(x, y)$ с любым начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует при $x_0 \leqslant x < +\infty$.

240*. Дана система в векторной записи $y' = f(x, y)$, удовлетворяющая условиям теоремы существования в окрестности каждой точки (x, y). Пусть в области $|y| > b$ при всех x

$$y \cdot f(x, y) \leqslant k(x)|y|^2,$$

где $y \cdot f$ — скалярное произведение, а функция $k(x)$ непрерывна. Доказать, что решение с любым начальным условием $y(x_0) = y_0$ существует при $x_0 \leqslant x < +\infty$.

§ 8. УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

1. Уравнения вида $F(x, y, y') = 0$ можно решать следующими методами.

а) Разрешить уравнение относительно y', т. е. из уравнения $F(x, y, y') = 0$ выразить y' через x и y. Получится одно или несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$. Каждое из них надо решить.

б) Метод введения параметра[1].

[1] Здесь излагается простейший вариант этого метода. Более общий вариант см. [1], гл. III, § 3, п. 1.

Пусть уравнение $F(x,\, y,\, y')=0$ можно разрешить относительно y, т. е. записать в виде $y=f(x,\, y')$. Введя параметр

$$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y', \tag{1}$$

получим

$$y=f(x,\, p). \tag{2}$$

Взяв полный дифференциал от обеих частей равенства (2) и заменив $\mathrm{d}y$ через $p\,\mathrm{d}x$ (в силу (1)), получим уравнение вида

$$M(x,\, p)\,\mathrm{d}x+N(x,\, p)\,\mathrm{d}p=0.$$

Если решение этого уравнения найдено в виде $x=\varphi(p)$, то, воспользовавшись равенством (2), получим решение исходного уравнения в параметрической записи: $x=\varphi(p)$, $y=f(\varphi(p),\, p)$.

Уравнения вида $x=f(y,\, y')$ решаются тем же методом.

Пример. Решить уравнение $y=x+y'-\ln y'$. Вводим параметр $p=y'$:

$$y=x+p-\ln p. \tag{3}$$

Берем полный дифференциал от обеих частей равенства и заменяем $\mathrm{d}y$ на $p\,\mathrm{d}x$ в силу (1): $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x+\mathrm{d}p-\frac{\mathrm{d}p}{p}$, $\quad p\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}x+\mathrm{d}p-\frac{\mathrm{d}p}{p}$. Решаем полученное уравнение. Переносим члены с $\mathrm{d}x$ влево, с $\mathrm{d}p$ — вправо:

$$(p-1)\,\mathrm{d}x=\frac{p-1}{p}\mathrm{d}p. \tag{4}$$

а) Если $p\neq 1$, то сокращаем на $p-1$:

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}p}{p},\ \ x=\ln p+C.$$

Подставляя это в (3), получаем решение в параметрической записи:

$$x=\ln p+C,\ \ y=p+C. \tag{5}$$

В данном случае можно исключить параметр p и получить решение в явном виде. Для этого из первого из уравнений (5) выражаем p через x, т. е. $p=\mathrm{e}^{x-C}$. Подставляя это во второе уравнение, получаем искомое решение:

$$y=\mathrm{e}^{x-C}+C. \tag{6}$$

б) Рассмотрим случай, когда в (4) имеем $p=1$. Подставляя $p=1$ в (3), получаем еще решение

$$y=x+1. \tag{7}$$

(Было бы ошибкой в равенстве $p = 1$ заменить p на y' и, проинтегрировав, получить $y = x + C$.)

2. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется *особым*, если через каждую его точку, кроме этого решения, проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, что и решение $y = \varphi(x)$, но не совпадающее с ним в сколь угодно малой окрестности этой точки[1].

Если функция $F(x, y, y')$ и производные $\frac{\partial F}{\partial y}$ и $\frac{\partial F}{\partial y'}$ непрерывны, то любое особое решение уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \tag{8}$$

удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{9}$$

Поэтому, чтобы отыскать особые решения уравнения (3), надо исключить y' из уравнений (8) и (9). Полученное уравнение $\psi(x, y) = 0$ называется уравнением *дискриминантной* кривой. Для каждой ветви дискриминантной кривой надо проверить, является ли эта ветвь решением уравнения (8), и если является, то будет ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения.

Пример. Найти особое решение уравнения

$$y = x + y' - \ln y'. \tag{10}$$

Дифференцируем обе части равенства по y':

$$0 = 1 - \frac{1}{y'}. \tag{11}$$

Исключаем y' из уравнений (10) и (11). Из (11) имеем $y' = 1$; подставляя это в (10), получаем уравнение дискриминантной кривой

$$y = x + 1. \tag{12}$$

Проверим, будет ли кривая особым решением. Для этого сначала проверяем, является ли она решением уравнения (10). Подставляя (12) в (10), получаем тождество $x + 1 = x + 1$. Значит, кривая (12) — решение.

[1] Это определение взято из [1]. Есть и другие определения, не равносильные этому.

Теперь проверим, является ли это решение особым, т. е. касаются ли его в каждой точке другие решения. В п. 1 было найдено, что другие решения выражаются формулой (6). Пишем условия касания кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y_1(x_0) = y_2(x_0), \ y_1'(x_0) = y_2'(x_0). \qquad (13)$$

Для решений (6) и (12) эти условия принимают вид $e^{x_0 - C} + C = x_0 + 1$, $e^{x_0 - C} = 1$. Из второго равенства имеем $C = x_0$; подставляя это в первое равенство, получаем $1 + x_0 = x_0 + 1$. Это равенство справедливо при всех x_0. Значит, при каждом x_0 решение (12) в точке с абсциссой x_0 касается одной из кривых семейства (6), а именно той кривой, для которой $C = x_0$.

Итак, в каждой точке решение (12) касается другого решения (6), не совпадающего с ним. Значит, решение (12) — особое.

Если семейство решений записано в параметрическом виде, как в (5), то выполнение условий касания проверяется аналогично. При этом надо учесть, что $y' = p$.

3. Если семейство кривых $\Phi(x, y, C) = 0$, являющихся решениями уравнения $F(x, y, y') = 0$, имеет огибающую $y = \varphi(x)$, то эта огибающая является особым решением того же уравнения. Если функция Φ имеет непрерывные первые производные, то для отыскания огибающей надо исключить C из уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

и проверить, будет ли полученная кривая огибающей, т. е. касаются ли ее в каждой точке кривые семейства. Эту проверку можно провести изложенным в конце п. 2 методом, используя условия касания (13).

В задачах **241—250** найти все решения данных уравнений; выделить особые решения (если они есть); дать чертеж.

241. $y'^2 - y^2 = 0$.

242. $8y'^3 = 27y$.

243. $(y' + 1)^3 = 27(x + y)^2$.

245. $y^2(y'^2 + 1) = 1$.

245. $y'^2 - 4y^3 = 0$.

246. $y'^2 = 4y^3(1 - y)$.

247. $xy'^2 = y$.

245. $yy'^3 + x = 1$.

249. $y'^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$.

407. $yy' + x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)^2.$

408. $y' = \left(\dfrac{3x+y^3-1}{y}\right)^2.$

409. $\left(x\sqrt{y^2+1}+1\right)(y^2+1)\,\mathrm{d}x = xy\,\mathrm{d}y.$

410. $(x^2+y^2+1)yy' + (x^2+y^2-1)x = 0.$

411. $y^2(x-1)\,\mathrm{d}x = x(xy+x-2y)\,\mathrm{d}y.$

412. $(xy'-y)^2 = x^2y^2 - x^4.$

413. $xyy' - x^2\sqrt{y^2+1} = (x+1)(y^2+1).$

414. $(x^2-1)y' + y^2 - 2xy + 1 = 0.$

415. $y'\operatorname{tg} y + 4x^3\cos y = 2x.$

416. $(xy'-y)^2 = {y'}^2 - \dfrac{2yy'}{x} + 1.$

417. $(x+y)(1-xy)\,\mathrm{d}x + (x+2y)\,\mathrm{d}y = 0.$

418. $(3xy+x+y)y\,\mathrm{d}x + (4xy+x+2y)x\,\mathrm{d}y = 0.$

419. $(x^2-1)\,\mathrm{d}x + (x^2y^2+x^3+x)\,\mathrm{d}y = 0.$

420. $x({y'}^2 + \mathrm{e}^{2y}) = -2y'.$

§ 10. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

1. Если в уравнение не входит искомая функция y, т. е. оно имеет вид $F(x,\, y^{(k)},\, y^{(k+1)},\, \ldots,\, y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, входящих в уравнение, т. е. сделав замену $y^{(k)} = z$.

2. Если в уравнение не входит независимое переменное x, т. е. уравнение имеет вид $F(y,\, y',\, y'',\, \ldots,\, y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новое независимое переменное y, а за неизвестную функцию $y' = p(y)$.

Пример. Решить уравнение $2yy'' = {y'}^2 + 1$.

В уравнение не входит x. Полагаем $y' = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{\mathrm{d}(y')}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p'p.$$

Подставляя $y' = p$ и $y'' = pp'$ в уравнение, получим $2ypp' = p^2 + 1$. Порядок уравнения понижен. Решив полученное уравнение, найдем $p = \pm\sqrt{Cy - 1}$. Следовательно, $y' = \pm\sqrt{Cy - 1}$. Из этого уравнения получим $4(Cy - 1) = C^2(x + C_2)$.

3. Если уравнение однородно относительно y и его производных, т. е. не меняется при одновременной замене y, y', y'', ... на ky, ky', ky'', ..., то порядок уравнения понижается подстановкой $y' = yz$, где z — новая неизвестная функция.

4. Порядок уравнения понижается, если оно является однородным относительно x и y в обобщенном смысле, т. е. не меняется от замены x на kx, y на $k^m y$ (при этом y' заменяется на $k^{m-1}y'$, y'' — на $k^{m-2}y''$ и т. д.). Чтобы узнать, будет ли уравнение однородным, и найти число m, надо приравнять друг другу показатели степеней, в которых число k будет входить в каждый член уравнения после указанной выше замены. Например, в первый член уравнения $2x^4y'' - 3y^2 = x^4$ после этой замены число k будет входить в степени $4 + (m - 2)$, во второй — в степени $2m$, в третий — в степени 4. Следовательно, m должно удовлетворять уравнениям

$$4 + (m - 2) = 2m = 4.$$

Отсюда $m = 2$. Если же полученные уравнения для m будут несовместными, то дифференциальное уравнение не является однородным в указанном смысле.

После того как число m найдено, надо сделать замену переменных $x = \mathrm{e}^t$, $y = z\mathrm{e}^{mt}$, где $z = z(t)$ — новая неизвестная функция, а t — новое независимое переменное. Получим уравнение, в которое не входит независимое переменное t. Порядок такого уравнения понижается одним из ранее рассмотренных способов.

5. Порядок уравнения легко понижается, если удается преобразовать уравнение к такому виду, чтобы обе его части являлись полными производными по x от каких-нибудь функций. Например, пусть дано уравнение $yy'' = y'^2$. Деля обе части на yy', получим $\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$; $(\ln y')' = (\ln y)'$; $\ln y' = \ln y + \ln C$; $y' = yC$. Порядок уравнения понижен.

Решить уравнения **421–450**.

421. $x^2y'' = y'^2$.

422. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.