СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЕЙСМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ЗАТУХАНИЕМ

На практике сейсмические среды с эффектом затухания описываются линейной теорией вязкоупругости. Эта теория учитывает как упругие, так и вязкие свойства материалов, позволяя более точно моделировать поведение материалов под воздействием сейсмических нагрузок. Подробную информацию можно найти в книгах [1, 2, 3, 4], здесь же ограничимся приведением основных формул и математических формулировок в контексте задачи распространения волн.

Будем рассматривать инфинитезимальные напряжения (ε_{ij}) и малые перемещения (u_{ij}). В этом случае они будут связаны уравнением:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{1}$$

Также будем считать, что история деформаций ($\varepsilon_{ij}(t)$) предполагается непрерывной, а функционал преобразующий историю изменения деформаций ($\varepsilon_{ij}(t)$) в соответствующую историю изменения напряжений ($\sigma_{ij}(t)$) предполагается линейным (подробнее см. [1])

Тогда в самом общем виде этот функционал, который будем называть определяющим уравнением, записывается следующим образом:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{ijkl}(t-s)\frac{\partial \varepsilon_{kl}(s)}{\partial s} ds = G_{ijkl}(t) * \frac{\partial \varepsilon_{kl}(t)}{\partial t}, \tag{2}$$

где $G_{ijkl}(t)$ ныывается релаксационным тензором, причем компоненты тензора G_{ijkl} равны нулю при $t < 0$.

Такая запись определяющего соотношения позволяет увидеть, что оно удовлетворяет двум фундаментальным гипотезам теории линейной вязкоупругости:

1. инвариантность по отношению к переносу по времени;
2. принцип причинности (отклик системы на возмущение зависит только от предыдущих событий во времени).

Поскольку σ_{ij} и ε_{ij} являются симметричными тензорами, то G_{ijkl} также симметричный тензор: $G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk}$.

Для изотропной среды функция релаксация имеет вид:

$$G_{ijkl}(t) = \frac{1}{3}\left(G_b(t) - G_s(t)\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}G_s\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{3}$$

где G_s и G_b пространственно независимые релаксационные функции, характеризующие сдвиговые и объемные свойства материала при соответствующих деформациях; δ_{ij} – символ Кронекера;

Часто уравнение (3) переписывают в терминах, аналогичных константам Ламе из классической теории упругости. Для этого можно сделать

замену:
$$\hat{M}(t) = \frac{G_s(t)}{2}, \tag{4}$$
$$\hat{\Lambda}(t) = \frac{G_k(t) - G_s(t)}{3}, \tag{5}$$
$$\hat{\Pi}(t) = \hat{\Lambda}(t) + 2\hat{M}(t). \tag{6}$$

По аналогии с классической теорией упругости можно показать, что Π является функцией релаксации для S волн, а M функция релаксации для P волн, а $\lambda = \pi - 2\mu$, где $\lambda,\ \pi,\ \mu -$ аналоги констант Ламе.

Подставив (4), (5) в соотношение (3) получим:

$$G_{ijkl}(t) = \hat{\Lambda}(t)\ \delta_{ij}\delta_{kl} + \hat{M}(t)\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{7}$$

а (2) перепишется в виде, похожим на упругий закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\ \hat{\Lambda} * \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + 2\hat{M} * \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}. \tag{8}$$

Для модели стандартного линейного тела (см. [2, 3]), используя τ-метод (см. [6]), выводятся функции $M(t)$ и $\Pi(t)$ в виде:

$$\hat{M} = \mu\left[1 + \tau^S \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] H(t) = M(t)H(t), \tag{9}$$

$$\hat{\Pi} = \pi\left[1 + \tau^P \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] H(t) = \Pi(t)H(t), \tag{10}$$

где $H(t)$ функция Хэвисайда. Также введем обозначение:

$$\Lambda = \Pi - 2M \tag{11}$$

Тогда уравнение (8) можно переписать в виде:

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij}\int_0^t \Lambda(t-s)\ \frac{d\varepsilon_{kk}(s)}{ds}ds + 2\int_0^t M(t-s)\ \frac{d\varepsilon_{ij}(s)}{ds}ds. \tag{12}$$

Теперь выведем дифференциальное уравнение движения в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка.

Проинтегрируем по частям (12):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) =\ &\delta_{ij}\Lambda(0)\ \varepsilon_{kk}(t) + \delta_{ij}\int_0^t \frac{\partial \Lambda(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds + \\ &+2M(0)\ \varepsilon_{ij}(t) + 2\int_0^t \frac{\partial M(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds.\end{aligned} \tag{13}$$

Продифференцируем (13) по t:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} = \delta_{ij}\Lambda(0)\ \frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial t} + \delta_{ij}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\Lambda(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds + \\ +2M(0)\ \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t} + 2\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial M(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds \tag{14}$$

Заметим, что:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{\mu}{\tau}\tau^S \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),\ \text{и}\ \frac{d^nM}{d^nt} = (-1)^{n-1}\frac{1}{\tau^{n-1}}\frac{dM}{dt},\ n \geq 2. \tag{15}$$

Аналогично,

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{\pi}{\tau}\tau^P \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\ \text{и}\ \frac{d^n\Pi}{d^nt} = (-1)^{n-1}\frac{1}{\tau^{n-1}}\frac{d\Pi}{dt},\ n \geq 2. \tag{16}$$

Введем новые переменные:

$$r_{ij} = \delta_{ij}\ \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\Lambda(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds + 2\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial M(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds = \\ = \delta_{ij}\left[\ \frac{d\Lambda}{dt}\Big|_{t=0}\ \varepsilon_{kk}(t) + \int_0^t \frac{\partial^2\Lambda(t-s)}{\partial^2 s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right] + \\ + 2\left[\frac{dM}{dt}\Big|_{t=0}\varepsilon_{ij} + \int_0^t \frac{\partial^2 M(t-s)}{\partial^2 s}\varepsilon_{ij}(s)ds\right].$$

Используя (15) и (16) можно записать:

$$r_{ij} = \delta_{ij}\left[\ \frac{d\Lambda}{dt}\Big|_{t=0}\ \varepsilon_{kk}(t) - \frac{1}{\tau}\int_0^t \frac{\partial\Lambda(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right] + \\ + 2\left[\frac{dM}{dt}\Big|_{t=0}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{\tau}\int_0^t \frac{\partial M(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds\right]. \tag{17}$$

Продифференцируем (17) по времени:

$$\frac{dr_{ij}}{dt} = \delta_{ij}\left[\ \frac{d\Lambda}{dt}\Big|_{t=0}\ \frac{d\varepsilon_{kk}}{dt}(t) - \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\Lambda(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right] + \\ + 2\left[\frac{dM}{dt}\Big|_{t=0}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial M(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds\right].$$

Теперь имеем два случая:

$$1.\ i = j \Rightarrow \tau\frac{dr_{ii}}{dt} = -\left(\pi\tau^P - 2\mu\tau^S\right)\frac{d\varepsilon_{kk}}{dt} - 2\mu\tau^S\frac{d\varepsilon_{ii}}{dt} - r_{ii} \\ 2.\ i \neq j \Rightarrow \tau\frac{dr_{ij}}{dt} = -2\mu\tau^S\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - r_{ij} \tag{18}$$

Переменные r_{ij} отвечают за историю процесса, поэтому называются функциями памяти. Благодаря им уравнение (14) будет иметь вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \delta_{ij}\left(\pi(\tau^P+1) - 2\mu(\tau^S+1)\right)\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + 2\mu(\tau^S+1)\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + r_{ij} \qquad (19)$$

Запишем уравнение баланса импульса для сплошной среды:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad \text{или} \quad \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \qquad (20)$$

где u_i, v_i компоненты векторов перемещения и скорости перемещения, σ_{ij} компонент симметричного тензора напряжения, f_i компонент вектора внешних массовых сил, ρ плотность среды.

Таким образом, подставив в (18), (19) продифференцированное по времени соотношение (1), будем иметь замкнутую систему дифференциальных уравнений (18), (19) и (20), описывающую движение в вязкоупругой среде. Эту систему можно представить в следующим виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{22} \\ r_{33} \\ r_{23} \\ r_{12} \\ r_{12} \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

$$\tau\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{22} \\ r_{33} \\ r_{23} \\ r_{12} \\ r_{12} \end{pmatrix} = -A_2\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{22} \\ r_{33} \\ r_{23} \\ r_{12} \\ r_{12} \end{pmatrix}, \qquad (23)$$

Заменив в (18), (19) значение π на $\lambda+2\mu$, можно заметить, что матрицы A_1 и A_2 имеют вид:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i^P & a_i & a_i & 0 & 0 & 0 \\ a_i & a_i^P & a_i & 0 & 0 & 0 \\ a_i & a_i & a_i^P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_i^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_i^S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_i^S \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} a_1^P &= (\lambda+2\mu)(1+\tau^P) \\ a_1^S &= \mu(1+\tau^S) \\ a_i &= a_i^P - 2a_i^S \\ a_2^P &= (\lambda+2\mu)\tau^P \\ a_2^S &= \mu\tau^S \end{aligned} \tag{24}$$

РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ. СХЕМА НА СМЕЩЕННОЙ СЕТКЕ

В работах [5, 7] для аппроксимации системы ДУЧП (21), (22), (23) используются схема на основе следующих разностных аппроксимаций:

$$D_t[f]_{I,J,K}^N = \frac{f_{I,J,K}^{N+1/2} - f_{I,J,K}^{N-1/2}}{dt} = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{I,J,K}^N + O(dt^2) \tag{25}$$

$$A_t[f]_{I,J,K}^{N+1/2} = \frac{f_{I,J,K}^{N+1/2} + f_{I,J,K}^{N-1/2}}{2} = f_{I,J,K}^N + O(dt^2) \tag{26}$$

$$D_1[f]_{I,J,K}^N = \sum_{m=1}^M \alpha_m \frac{f_{I+m-1/2,J,K}^N - f_{I-m+1/2,J,K}^N}{h_1} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{I,J,K}^N + O(h_1^{2m}). \tag{27}$$

В этих обозначениях индексы, написанные заглавными буквами, могут быть как целыми, так и полуцелыми, dt шаг временой сетки, h_1, h_2, h_3 шаги пространственной сетки. Дополнительный параметр M определяет длину шаблона и коэффициенты α_m используются для достижения необходимого порядка аппроксимации. Значения вплоть до 10 порядка аппроксимации приведены в таблице 1. Программа для расчета данных коэффициентов для любого M приведена в приложении.

M	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4
1	1.0				
2	9/8	-1/24			
3	75/64	-25/384	3/640		
4	1125/1024	-245/3072	49/5120	-5/7168	
5	19845/16384	-735/8192	567/40960	-405/229376	35/294912

Таблица 1: Коэффициенты аппроксимации (27) для различных M

Аналогично (27) можно ввести аппроксимации и для других пространственных перменных.

Тогда разностный аналог для системы (21), (22), (23) будет иметь следующий вид:

$$\rho D_t[u_1]^{n-1/2}_{I,J,K} = D_1[\sigma_{11}]^{n-1/2}_{I,J,K} + D_2[\sigma_{12}]^{n-1/2}_{I,J,K} + D_3[\sigma_{13}]^{n-1/2}_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i+1/2, j, k\},$$
$$\rho D_t[u_2]^{n-1/2}_{I,J,K} = D_1[\sigma_{12}]^{n-1/2}_{I,J,K} + D_2[\sigma_{22}]^{n-1/2}_{I,J,K} + D_3[\sigma_{23}]^{n-1/2}_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i, j+1/2, k\},$$
$$\rho D_t[u_3]^{n-1/2}_{I,J,K} = D_1[\sigma_{13}]^{n-1/2}_{I,J,K} + D_2[\sigma_{23}]^{n-1/2}_{I,J,K} + D_3[\sigma_{13}]^{n-1/2}_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i, j, k+1/2\},$$

$$D_t[\sigma_{11}]^n_{I,J,K} = p_1^P D_1[u_1]^n_{I,J,K} + p_1^d D_2[u_2]^n_{I,J,K} + p_1^d D_3[u_3]^n_{I,J,K} + \sum_{l=1}^{L} A_t[r_{1,l}]^n_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i, j, k\},$$

$$D_t[\sigma_{22}]^n_{I,J,K} = p_1^P D_1[u_1]^n_{I,J,K} + p_1^d D_2[u_2]^n_{I,J,K} + p_1^d D_3[u_3]^n_{I,J,K} + \sum_{l=1}^{L} A_t[r_{1,l}]^n_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i, j, k\},$$

$$D_t[\sigma_{33}]^n_{I,J,K} = p_1^P D_1[u_1]^n_{I,J,K} + p_1^d D_2[u_2]^n_{I,J,K} + p_1^d D_3[u_3]^n_{I,J,K} + \sum_{l=1}^{L} A_t[r_{1,l}]^n_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i, j, k\},$$

$$D_t[\sigma_{23}]^n_{I,J,K} = p_1^S D_3[u_2]^n_{I,J,K} + p_1^S D_2[u_3]^n_{I,J,K} + \sum_{l=1}^{L} A_t[r_{23,l}]^n_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i, j+1/2, k+1/2\},$$

$$D_t[\sigma_{13}]^n_{I,J,K} = p_1^S D_1[u_3]^n_{I,J,K} + p_1^S D_3[u_1]^n_{I,J,K} + \sum_{I=1}^{L} A_t[r_{13,l}]^n_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i+1/2, j, k+1/2\},$$

$$D_t[\sigma_{12}]^n_{I,J,K} = p_1^S D_2[u_1]^n_{I,J,K} + p_1^S D_1[u_2]^n_{I,J,K} + \sum_{l=1}^{L} A_t[r_{12,l}]^n_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i+1/2, j+1/2, k\},$$
$$\tau D_t[r_{11}]^n_{I,J,K} = -p_2^P D_1[u_1]^n_{I,J,K} - p_2^d D_2[u_2]^n_{I,J,K} - p_2^d D_3[u_3]^n_{I,J,K} - A_t[r_{11}]^n_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i, j, k\},$$
$$\tau D_t[r_{22}]^n_{I,J,K} = -p_2^d D_1[u_1]^n_{I,J,K} - p_2^P D_2[u_2]^n_{I,J,K} - p_2^d D_3[u_3]^n_{I,J,K} - A_\ell[r_{22}]^n_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i, j, k\},$$
$$\tau D_t[r_{33}]^n_{I,J,K} = -p_2^d D_1[u_1]^n_{I,J,K} - p_2^d D_2[u_2]^n_{I,J,K} - p_2^P D_3[u_3]^n_{I,J,K} - A_t[r_{32}]^n_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i, j, k\},$$

$$\tau D_t[r_{23}]^n_{t,J,K} = -p^S_2 D_3[u_2]^n_{t,J,K} - p^S_2 D_2[u_3]^n_{t,J,K} - A_t[r_{23}]^n_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i, j+1/2, k+1/2\},$$
$$\tau D_t[r_{13}]^n_{I,J,K} = -p^S_2 D_1[u_3]^n_{I,J,K} - p^S_2 D_3[u_1]^n_{I,J,K} - A_t[r_{13}]^n_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i+1/2, j, k+1/2\},$$
$$\tau D_t[r_{12}]^n_{I,J,K} = -p^S_2 D_2[u_1]^n_{I,J,K} - p^S_2 D_1[u_2]^n_{I,J,K} - A_t[r_{12}]^n_{I,J,K},$$
$$\text{где } \{I,J,K\} = \{i+1/2, j+1/2, k\}.$$

В [5] приведено число Куранта для вышеприведенной схемы:

$$c_p^{\text{Umax}} \cdot dt \cdot \sqrt{\frac{1}{dx^2} + \frac{1}{dy^2} + \frac{1}{dz^2}} < 1, \tag{28}$$

где c_p^{Umax} константа, задающее начальное распеделение скорости P-волн в вакууме.

Для двумерного случая программная реализация схемы на языке Julia приведена в приложении.

ПОГЛОЩАЮЩИЙ ГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ДЛЯ СХЕМЫ НА СМЕЩЕННОЙ СЕТКЕ

Для численного исследования задач распространения волны в неграниченной области используется техника идеально поглощающих слоев, называемых PML (perfectly matched layer). Схема показана на рисунке 1.

Классический подход к построению PML для системы уравнений типа (21), (22), (23) рассмотрен в статье [8]. Однако, существует подход (см., например, [9]), в котором приводится формулировка, требующая значетельно меньше памяти, но эквивалентная классическому подходу в математическом смысле. Такой подход получил название сверточного идеально поглощающего слоя CPML (convolutional PML).

Его суть заключается в замене пространственной производной:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \to \frac{1}{\kappa_{x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} + \psi_{x_i}, \tag{29}$$

а функция ψ_{x_i} (в районе $x_i = 0$) определяется с помощью следующей цепочки уравнений (подробнее см. [9]):

$$\psi^n_{x_i}(f) = b_{x_i} \psi^{n-1}_{x_i}(f) + a_{x_i} \left(\partial_{x_i} f\right)^{n-1/2}, \tag{30}$$

$$b_{x_i} = e^{-(d/\kappa_{x_i} + \alpha_{x_i})\Delta t}, \tag{31}$$

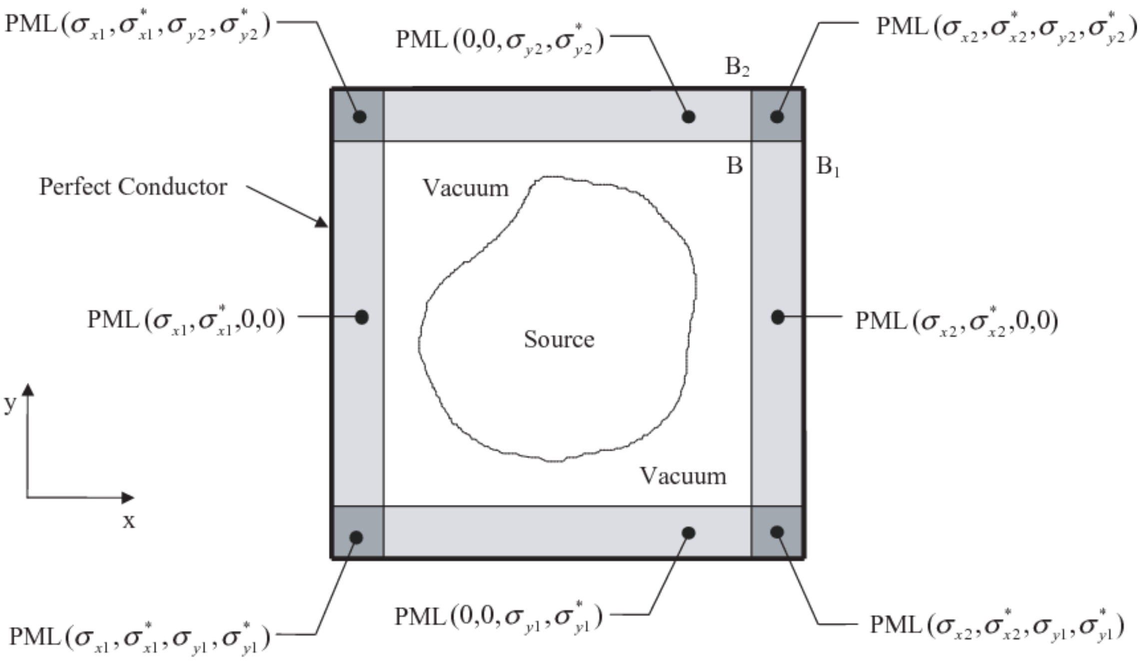

Рис. 1: Схема идеально поглощающего слоя

$$a_{x_i} = \frac{d_{x_i}}{\kappa_{x_i}(d_{x_i} + \kappa_{x_i}\alpha(x_i))}(b_{x_i} - 1), \tag{32}$$

$$d(x_i) \ = \ d_0 \left(1 - \frac{x_i}{L}\right)^2 \tag{33}$$

$$d_0 = -\frac{3c_p^{\mathrm{Umax}} \log(R_c)}{2L} \tag{34}$$

$$\kappa_{x_i} = 1 + (\kappa_{\max} - 1)\left(1 - \frac{x_i}{L}\right)^2 \tag{35}$$

$$\alpha(x_i) = \alpha_{\max}\left(\frac{x_i}{L}\right)^2 \tag{36}$$

Здесь Δt шаг про времени, L - размер PML области, c_p^{Umax} константа, задающее начальное распеделение скорости P-волн в вакууме, R_c - теоретический коэффициент отражения от границы слоя $\kappa_{\max}$ и $\alpha_{\max}$ определяются произвольно и требуют дополнительного изучения.

На противоположном от $x_i = 0$ конце расчетной области (31)-(36) задаются аналогично, но в обратном направлении. Подробная программная реализация в двумерном случае приведена в приложении.

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен ; пер. с англ. М. И. Рейтмана ; под ред. Г. С. Шапиро, 1974. - 338 с

2. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity

3. Wave in real solid

4. Viscoelastic waves and rays in layered media

5. T. Bohlen, "Parallel 3-D viscoelastic finite difference seismic modelling," Comput. Geosci. 28, 887–899

6. Blanch, J. O., Robertsson, J. O. A., Symes, W. W. (1995). Modeling of a constantQ: Methodology and algorithm for an efficient and optimally inexpensive viscoelastic technique. (2002).

7. A. R. Levander, "Fourth-order finite-difference P-SV seismograms,

8. Collino, F. Tsogka, C., 2001. Application of the PML absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media, Geophysics, 66(1), 294–307.

9. Martin, R., Komatitsch, D. (2009). An unsplit convolutional perfectly matched layer technique improved at grazing incidence for the viscoelastic wave equation.