СОДЕРЖАНИЕ

Список литературы 7

ВВЕДЕНИЕ

УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЕЙСМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ЗАТУХАНИЕМ

На практике сейсмические среды с эффектом затухания описываются линейной теорией вязкоупругости. Эта теория учитывает как упругие, так и вязкие свойства материалов, позволяя более точно моделировать поведение материалов под воздействием сейсмических нагрузок. Подробную информацию можно найти в книгах [1, 2, 3, 4], здесь же ограничимся приведением основных формул и математических формулировок в контексте задачи распространения волн.

Будем рассматривать инфинитезимальные напряжения (ε_{ij}) и малые перемещения (u_{ij}). В этом случае они будут связаны уравнением:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{1}$$

Также будем считать, что история деформаций ($\varepsilon_{ij}(t)$) предполагается непрерывной, а функционал преобразующий историю изменения деформаций ($\varepsilon_{ij}(t)$) в соответствующую историю изменения напряжений ($\sigma_{ij}(t)$) предполагается линейным (подробнее см. [1])

Тогда в самом общем виде этот функционал, который будем называть определяющим уравнением, может быть записывается следующим образом:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{ijkl}(t-s)\frac{\partial \varepsilon_{kl}(s)}{\partial s}ds = G_{ijkl}(t) * \frac{\partial \varepsilon_{kl}(t)}{\partial t}, \tag{2}$$

где $G_{ijkl}(t)$ ныызывается релаксационным тензором, причем компоненты тензора G_{ijkl} равны нулю при $t < 0$.

Такая запись определяющего соотношения позволяет увидеть, что оно удовлетворяет двум фундаментальным гипотезам теории линейной вязкоупругости:

1. инвариантность по отношению к переносу по времени;
2. принцип причинности (отклик системы на возмущение зависит только от предыдущих событий во времени).

Поскольку σ_{ij} и ε_{ij} являются симметричными тензорами, то G_{ijkl} также симметричный тензор: $G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk}$.

Для изотропной среды функция релаксация имеет вид:

$$G_{ijkl}(t) = \frac{1}{3}\left(G_b(t) - G_s(t)\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}G_s\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{3}$$

где G_s и G_b пространственно независимые релаксационные функции, характеризующие сдвиговые и объемные свойства материала при соответствующих деформациях; δ_{ij} – символ Кронекера;

Часто уравнение (3) переписывают в терминах, аналогичных константам Ламе из классической теории упругости. Для этого можно сделать замену:

$$\mu(t) = \frac{G_s(t)}{2}, \tag{4}$$

$$k(t) = \frac{G_b(t)}{3}, \tag{5}$$

$$\lambda(t) = \frac{G_k(t) - G_s(t)}{3} = k(t) - \frac{2}{3}\mu(t). \tag{6}$$

Тогда подставив (4), (5), (6) в соотношение (3) получим:

$$G_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{7}$$

В нотации Фойгта тензор релаксации (7) будет иметь такой же вид, как и в классической теории упругости:

$$G = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{array}\right)$$

Подставим (7) в (2) получим следующее выражение, похожее на упругий закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\ \lambda * \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + 2\mu * \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \tag{8}$$

Для модели стандартного линейного тела (см. [2, 3]), используя τ-метод (см. [5]), выводятся функции $\mu(t)$ и $k(t)$ в виде:

$$\mu(t) = M_s\left[1 - \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]H(t) = \hat{\mu}(t)\ H(t), \tag{9}$$

$$k(t) = M_b\left[1 - \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]H(t) = \hat{k}(t)\ H(t), \tag{10}$$

где $H(t)$ функция Хэвисайда.

Также введем следующее обозначение:

$$\hat{\lambda}(t) = \hat{k}(t) - \frac{2}{3}\hat{\mu}(t) \tag{11}$$

Тогда уравнение (8) можно переписать в виде:

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij}\int_0^t \hat{\lambda}(t-s)\ \frac{\partial \varepsilon_{kk}(s)}{\partial s}ds + 2\int_0^t \hat{\mu}(t-s)\ \frac{\partial \varepsilon_{ij}(s)}{\partial s}ds \tag{12}$$

Теперь выведем дифференциальное уравнение движения в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка.

Проинтегрируем по частям (12):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) = \ & \delta_{ij}\left\{\hat{\lambda}(0)\ \varepsilon_{kk}(t) + \int_0^t \frac{\partial\hat{\lambda}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right\} + \\ & +2\left\{\hat{\mu}(0)\ \varepsilon_{ij}(t) + \int_0^t \frac{\partial\hat{\mu}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds\right\}\end{aligned} \tag{13}$$

Продифференцируем (13) по t:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} = \ & \delta_{ij}\left\{\hat{\lambda}(0)\ \frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial t} + \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\hat{\lambda}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right\} + \\ & +2\left\{\hat{\mu}(0)\ \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\hat{\mu}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds\ \right\}\end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что:

$$\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial t} = \frac{M_s}{\tau}\left[1-\frac{\tau_s}{\tau}\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),\ \text{причем}\ \frac{\partial^n\hat{\mu}}{\partial^n t} = (-1)^{n-1}\frac{1}{\tau^{n-1}}\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial t},\ n \geq 2. \tag{15}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial\hat{k}}{\partial t} = \frac{M_b}{\tau}\left[1-\frac{\tau_b}{\tau}\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\ \text{и}\ \frac{\partial^n\hat{k}}{\partial^n t} = (-1)^{n-1}\frac{1}{\tau^{n-1}}\frac{\partial\hat{k}}{\partial t},\ n \geq 2. \tag{16}$$

Введем новые переменные:

$$\begin{aligned}r_{ij} &= \delta_{ij}\ \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\hat{\lambda}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds + 2\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\hat{\mu}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds = \\ &= \delta_{ij}\left[\left.\frac{d\hat{\lambda}}{dt}\right|_{t=0}\ \varepsilon_{kk}(t) + \int_0^t \frac{\partial^2\hat{\lambda}(t-s)}{\partial^2 s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right] + \\ &+ 2\left[\left.\frac{d\hat{\mu}}{dt}\right|_{t=0}\varepsilon_{ij} + \int_0^t \frac{\partial^2\hat{\mu}(t-s)}{\partial^2 s}\varepsilon_{ij}(s)ds\right].\end{aligned}$$

Используя (15) и (16) можно записать:

$$\begin{aligned}r_{ij} = \delta_{ij}&\left[\left.\frac{d\hat{\lambda}}{dt}\right|_{t=0}\ \varepsilon_{kk}(t) - \frac{1}{\tau}\int_0^t \frac{\partial\hat{\lambda}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right] + \\ &+ 2\left[\left.\frac{d\hat{\mu}}{dt}\right|_{t=0}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{\tau}\int_0^t \frac{\partial\hat{\mu}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds\right].\end{aligned} \tag{17}$$

Продифференцируем (17) по времени:

$$\begin{aligned}\frac{dr_{ij}}{dt} = \delta_{ij}&\left[\left.\frac{d\hat{\lambda}}{dt}\right|_{t=0}\ \frac{d\varepsilon_{kk}}{dt}(t) - \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\hat{\lambda}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right] + \\ &+ 2\left[\left.\frac{d\hat{\mu}}{dt}\right|_{t=0}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\hat{\mu}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds\right].\end{aligned}$$

Теперь имеем два случая:

$$
\begin{aligned}
&1.\ i = j \Rightarrow \frac{dr_{ii}}{dt} = \left(\frac{M_b}{\tau}\left[1 - \frac{\tau_b}{\tau}\right] - \frac{2}{3}M_s\left[1 - \frac{\tau_s}{\tau}\right]\right)\frac{d\varepsilon_{kk}}{dt} + \\
&\qquad + \frac{2M_s}{\tau}\left[1 - \frac{\tau_s}{\tau}\right]\frac{d\varepsilon_{ii}}{dt} - \frac{1}{\tau}r_{ii} \\
&2.\ i \neq j \Rightarrow \frac{dr_{ij}}{dt} = \frac{2M_s}{\tau}\left[1 - \frac{\tau_s}{\tau}\right]\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \frac{1}{\tau}r_{ij}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Переменные r_{ij} отвечают за историю процесса, поэтому и называются функциями памяти. Если бы они равнялись нулю, то мы бы получили классическое формулы из теории упругости.

В таком случае уравнение (14) будет иметь вид:

$$
\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \delta_{ij}\left(M_b\frac{\tau_b}{\tau} - \frac{2}{3}M_s\frac{\tau_s}{\tau}\right)\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + 2M_s\frac{\tau_s}{\tau}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + r_{ij} \tag{19}
$$

Запишем уравнение баланса импульса для сплошной среды:

$$
\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad \text{или} \quad \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \tag{20}
$$

где u_i, v_i компоненты векторов перемещения и скорости перемещения, σ_{ij} компонент симметричного тензора напряжения, f_i компонент вектора внешних массовых сил, ρ плотность среды.

Таким образом, имеем замкнутую систему дифференциальных уравнений (18), (19) и (20), которая описывает движение в вязкоупругой среде.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен ; пер. с англ. М. И. Рейтмана ; под ред. Г. С. Шапиро, 1974. - 338 с
2. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity
3. Wave in real solid
4. Viscoelastic waves and rays in layered media
5. T. Bohlen, “Parallel 3-D viscoelastic finite difference seismic modelling,” Comput. Geosci. 28, 887–899 (2002).