## СОДЕРЖАНИЕ


Список литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

# ВВЕДЕНИЕ

## УРАВНЕНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЕЙСМИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ЗАТУХАНИЕМ

На практике сейсмические среды с эффектом затухания описываются линейной теорией вязкоупругости. Эта теория учитывает как упругие, так и вязкие свойства материалов, позволяя более точно моделировать поведение материалов под воздействием сейсмических нагрузок. Подробную информацию можно найти в книгах [1, 2, 3, 4], здесь же ограничимся приведением основных формул и математических формулировок в контексте задачи распространения волн.

Будем рассматривать инфинитезимальные напряжения ($\varepsilon_{ij}$) и малые перемещения ($u_{ij}$). В этом случае они будут связаны уравнением:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{1}$$

Также будем считать, что история деформаций ($\varepsilon_{ij}(t)$) предполагается непрерывной, а функционал преобразующий историю изменения деформаций ($\varepsilon_{ij}(t)$) в соответствующую историю изменения напряжений ($\sigma_{ij}(t)$) предполагается линейным (подробнее см. [1])

Тогда в самом общем виде этот функционал, который будем называть определяющим уравнением, может быть записывается следующим образом:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{ijkl}(t-s)\frac{\partial \varepsilon_{kl}(s)}{\partial s}ds = G_{ijkl}(t) * \frac{\partial \varepsilon_{kl}(t)}{\partial t}, \tag{2}$$

где $G_{ijkl}(t)$ нызывается релаксационным тензором, причем компоненты тензора $G_{ijkl}$ равны нулю при $t < 0$.

Такая запись определяющего соотношения позволяет увидеть, что оно удовлетворяет двум фундаментальным гипотезам теории линейной вязкоупругости:

1. инвариантность по отношению к переносу по времени;
2. принцип причинности (отклик системы на возмущение зависит только от предыдущих событий во времени).

Поскольку $\sigma_{ij}$ и $\varepsilon_{ij}$ являются симметричными тензорами, то $G_{ijkl}$ также симметричный тензор: $G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk}$.

Для изотропной среды функция релаксация имеет вид:

$$G_{ijkl}(t) = \frac{1}{3}\left(G_b(t) - G_s(t)\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}G_s\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \tag{3}$$

где $G_s$ и $G_b$ пространственно независимые релаксационные функции, характеризующие сдвиговые и объемные свойства материала при соответствующих деформациях; $\delta_{ij}$ – символ Кронекера;

Часто уравнение (3) переписывают в терминах, аналогичных константам Ламе из классической теории упругости. Для этого можно сделать замену:

$$\mu(t) = \frac{G_s(t)}{2}, \tag{4}$$

$$k(t) = \frac{G_b(t)}{3}, \tag{5}$$

$$\lambda(t) = \frac{G_k(t) - G_s(t)}{3} = k(t) - \frac{2}{3}\mu(t). \tag{6}$$

Тогда подставив (4), (5), (6) в соотношение (3) получим:

$$G_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \tag{7}$$

В нотации Фойгта тензор релаксации (7) будет иметь такой же вид, как и в классической теории упругости:

$$G = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{array}\right)$$

Подставим (7) в (2) получим следующее выражение, похожее на упругий закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\ \lambda * \frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial t} + 2\mu * \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t} \tag{8}$$

Для модели стандартного линейного тела (см. [2, 3]), используя $\tau$-метод (см. [5]), выводятся функции $\mu(t)$ и $k(t)$ в виде:

$$\mu(t) = M_s\left[1 - \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]H(t) = \hat{\mu}(t)\ H(t), \tag{9}$$

$$k(t) = M_b\left[1 - \left(1 - \frac{\tau_b}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]H(t) = \hat{k}(t)\ H(t), \tag{10}$$

где $H(t)$ функция Хэвисайда.

Также введем следующее обозначение:

$$\hat{\lambda}(t) = \hat{k}(t) - \frac{2}{3}\hat{\mu}(t) \tag{11}$$

Тогда уравнение (8) можно переписать в виде:

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij}\int_0^t \hat{\lambda}(t-s)\ \frac{\partial\varepsilon_{kk}(s)}{\partial s}ds + 2\int_0^t \hat{\mu}(t-s)\ \frac{\partial\varepsilon_{ij}(s)}{\partial s}ds \tag{12}$$

Теперь выведем дифференциальное уравнение движения в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка.

Проинтегрируем по частям (12):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) = \ & \delta_{ij}\left\{\hat{\lambda}(0)\ \varepsilon_{kk}(t) + \int_0^t \frac{\partial\hat{\lambda}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right\} + \\ & +2\left\{\hat{\mu}(0)\ \varepsilon_{ij}(t) + \int_0^t \frac{\partial\hat{\mu}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds\right\}\end{aligned} \tag{13}$$

Продифференцируем (13) по $t$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial t} = \ & \delta_{ij}\left\{\hat{\lambda}(0)\ \frac{\partial\varepsilon_{kk}}{\partial t} + \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\hat{\lambda}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right\} + \\ & +2\left\{\hat{\mu}(0)\ \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\hat{\mu}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds\ \right\}\end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что:

$$\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial t} = \frac{M_s}{\tau}\left[1-\frac{\tau_s}{\tau}\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),\ \text{причем}\ \frac{\partial^n\hat{\mu}}{\partial^n t} = (-1)^{n-1}\frac{1}{\tau^{n-1}}\frac{\partial\hat{\mu}}{\partial t},\ n \geq 2. \tag{15}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial\hat{k}}{\partial t} = \frac{M_b}{\tau}\left[1-\frac{\tau_b}{\tau}\right]\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\ \text{и}\ \frac{\partial^n\hat{k}}{\partial^n t} = (-1)^{n-1}\frac{1}{\tau^{n-1}}\frac{\partial\hat{k}}{\partial t},\ n \geq 2. \tag{16}$$

Введем новые переменные:

$$\begin{aligned}r_{ij} &= \delta_{ij}\ \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\hat{\lambda}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds + 2\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\hat{\mu}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds = \\ &= \delta_{ij}\left[\ \frac{d\hat{\lambda}}{dt}\Big|_{t=0}\ \varepsilon_{kk}(t) + \int_0^t \frac{\partial^2\hat{\lambda}(t-s)}{\partial^2 s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right] + \\ &+ 2\left[\frac{d\hat{\mu}}{dt}\Big|_{t=0}\varepsilon_{ij} + \int_0^t \frac{\partial^2\hat{\mu}(t-s)}{\partial^2 s}\varepsilon_{ij}(s)ds\right].\end{aligned}$$

Используя (15) и (16) можно записать:

$$\begin{aligned}r_{ij} = \delta_{ij}\left[\ \frac{d\hat{\lambda}}{dt}\Big|_{t=0}\ \varepsilon_{kk}(t) - \frac{1}{\tau}\int_0^t \frac{\partial\hat{\lambda}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right] + \\ + 2\left[\frac{d\hat{\mu}}{dt}\Big|_{t=0}\varepsilon_{ij} - \frac{1}{\tau}\int_0^t \frac{\partial\hat{\mu}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds\right].\end{aligned} \tag{17}$$

Продифференцируем (17) по времени:

$$\begin{aligned}\frac{dr_{ij}}{dt} = \delta_{ij}\left[\ \frac{d\hat{\lambda}}{dt}\Big|_{t=0}\ \frac{d\varepsilon_{kk}}{dt}(t) - \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\hat{\lambda}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{kk}(s)ds\right] + \\ + 2\left[\frac{d\hat{\mu}}{dt}\Big|_{t=0}\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \frac{1}{\tau}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{\partial\hat{\mu}(t-s)}{\partial s}\varepsilon_{ij}(s)ds\right].\end{aligned}$$

Теперь имеем два случая:

$$
\begin{aligned}
&1.\ i = j \Rightarrow \frac{dr_{ii}}{dt} = \left(\frac{M_b}{\tau}\left[1 - \frac{\tau_b}{\tau}\right] - \frac{2}{3}M_s\left[1 - \frac{\tau_s}{\tau}\right]\right)\frac{d\varepsilon_{kk}}{dt} + \\
&\qquad + \frac{2M_s}{\tau}\left[1 - \frac{\tau_s}{\tau}\right]\frac{d\varepsilon_{ii}}{dt} - \frac{1}{\tau}r_{ii} \\
&2.\ i \neq j \Rightarrow \frac{dr_{ij}}{dt} = \frac{2M_s}{\tau}\left[1 - \frac{\tau_s}{\tau}\right]\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} - \frac{1}{\tau}r_{ij}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Переменные $r_{ij}$ отвечают за историю процесса, поэтому называются функциями памяти. Если бы они равнялись нулю, то мы бы получили классическое формулы из теории упругости.

Наконец, введя функции памяти, уравнение (14) будет иметь вид:

$$
\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \delta_{ij}\left(M_b\frac{\tau_b}{\tau} - \frac{2}{3}M_s\frac{\tau_s}{\tau}\right)\frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} + 2M_s\frac{\tau_s}{\tau}\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + r_{ij} \tag{19}
$$

Запишем уравнение баланса импульса для сплошной среды:

$$
\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial^2 t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad \text{или} \quad \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \tag{20}
$$

где $u_i, v_i$ компоненты векторов перемещения и скорости перемещения, $\sigma_{ij}$ компонент симметричного тензора напряжения, $f_i$ компонент вектора внешних массовых сил, $\rho$ плотность среды.

Таким образом, подстав в (18), (19) продифференцированное по времени соотношение (1), будем иметь замкнутую систему дифференциальных уравнений (18), (19) и (20), описывающую движение в вязкоупругой среде.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен ; пер. с англ. М. И. Рейтмана ; под ред. Г. С. Шапиро, 1974. - 338 с

2. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity

3. Wave in real solid

4. Viscoelastic waves and rays in layered media

5. T. Bohlen, “Parallel 3-D viscoelastic finite difference seismic modelling,” Comput. Geosci. 28, 887–899 (2002).