Султанов Артур, Р3213

$$f(x) = \frac{1}{x} + e^x$$
$$x_1 = 1; \quad \Delta x = 1$$
$$\varepsilon_1 = 0.000001; \quad \varepsilon_2 = 0.000001$$

1. Задать начальную точку $x_1 = 1.0$, длина шага $\Delta x = 0.5$, относительная точность изменения функции $\varepsilon_1 = 0.000001$, относительная точность изменения координаты $\varepsilon_2 = 0.000001$.

2. Вычислить значение второй точки $x_2 = x_1 + \Delta x = 1.5$.

3. Вычислить значение функции в точках x_1 и x_2: $f(x_1) = 3.718, f(x_2) = 5.148$

4. Сравнвить значения функции в точках x_1 и x_2: $f(x_1) \leq f(x_2)$, и рассчитать третью точку: $x_3 = x_1 - \Delta x = 1 - 0.5 = 0.5$

5. Вычислить значение функции в точке x_3: $f(x_3) = 3.649$

6. Найти $F_{min} = min(f_1, f_2, f_3)$ и $x_{min} = x_i : F_{min}$:

$F_{min} = min(3.718, 5.148, 3.649) = 3.649, x_{min} = 0.500$

7. Вычислить точку минимума $\overline{x}$ квадратичного интерполяционного полинома.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{2}\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{(2.25 - 0.25)3.718 + (0.25 - 1)5.148 + (1 - 2.25)3.649}{(1.5 - 0.5)3.718 + (0.5 - 1)5.148 + (1 - 1.5)3.649} = \\ &= 0.724\end{aligned}$$

8. Проверим условие окончания

$$\left|\frac{F_{min} - f(\overline{x})}{f(\overline{x})}\right| = 0.059458$$

$$\left|\frac{x_{min} - \overline{x}}{\overline{x}}\right| = 0.309808$$

$$0.059458 > \varepsilon_1 = 0.000001;$$
$$0.309808 > \varepsilon_2 = 0.000001;$$

Условие окончания расчета не выполнено.

Определить и расположить новые расчетные точки в порядке возрастания.

Получаем: $x_1 = 0.500, x_2 = 0.724, x_3 = 1.000$.

Значения функций в этих точках равны: $f(x_1) = 3.649, f(x_2) = 3.444, f(x_3) = 3.718$

Продолжить расчет. Перейти к шагу 6.

6. Найти $F_{min} = min(f_1, f_2, f_3)$ и $x_{min} = x_i : F_{min}$:

$F_{min} = min(3.649, 3.444, 3.718) = 3.444, x_{min} = 0.724$

7. Вычислить точку минимума $\overline{x}$ квадратичного интерполяционного полинома.

$$\overline{x} = \frac{1}{2}\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(0.525 - 1.000)3.649 + (1.000 - 0.250)3.444 + (0.250 - 0.525)3.718}{(0.724 - 1.000)3.649 + (1.000 - 0.500)3.444 + (0.500 - 0.724)3.718} =$$
$$= 0.732$$

8. Проверим условие окончания

$$\left|\frac{F_{min} - f(\overline{x})}{f(\overline{x})}\right| = 0.000393$$

$$\left|\frac{x_{min} - \overline{x}}{\overline{x}}\right| = 0.010023$$

$$0.000393 > \varepsilon_1 = 0.000001;$$
$$0.010023 > \varepsilon_2 = 0.000001;$$

Условие окончания расчета не выполнено.

Определить и расположить новые расчетные точки в порядке возрастания.

Получаем: $x_1 = 0.500, x_2 = 0.724, x_3 = 0.732$.

Значения функций в этих точках равны: $f(x_1) = 3.649, f(x_2) = 3.444, f(x_3) = 3.445$

Продолжить расчет. Перейти к шагу 6.

6. Найти $F_{min} = min(f_1, f_2, f_3)$ и $x_{min} = x_i : F_{min}$:

$F_{min} = min(3.649, 3.444, 3.445) = 3.444, x_{min} = 0.724$

7. Вычислить точку минимума $\overline{x}$ квадратичного интерполяционного полинома.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{2}\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{(0.525 - 0.535)3.649 + (0.535 - 0.250)3.444 + (0.250 - 0.525)3.445}{(0.724 - 0.732)3.649 + (0.732 - 0.500)3.444 + (0.500 - 0.724)3.445} = \\ &= 0.709\end{aligned}$$

8. Проверим условие окончания

$$\left|\frac{F_{min} - f(\overline{x})}{f(\overline{x})}\right| = 0.000457$$

$$\left|\frac{x_{min} - \overline{x}}{\overline{x}}\right| = 0.022370$$

$$\begin{aligned}0.000457 > \varepsilon_1 = 0.000001;\\ 0.022370 > \varepsilon_2 = 0.000001;\end{aligned}$$

Условие окончания расчета не выполнено.

Определить и расположить новые расчетные точки в порядке возрастания.

Получаем: $x_1 = 0.500, x_2 = 0.709, x_3 = 0.724$.

Значения функций в этих точках равны: $f(x_1) = 3.649, f(x_2) = 3.442, f(x_3) = 3.444$

Продолжить расчет. Перейти к шагу 6.

6. Найти $F_{min} = min(f_1, f_2, f_3)$ и $x_{min} = x_i : F_{min}$:

$F_{min} = min(3.649, 3.442, 3.444) = 3.442, x_{min} = 0.709$

7. Вычислить точку минимума $\overline{x}$ квадратичного интерполяционного полинома.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{2}\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{(0.502 - 0.525)3.649 + (0.525 - 0.250)3.442 + (0.250 - 0.502)3.444}{(0.709 - 0.724)3.649 + (0.724 - 0.500)3.442 + (0.500 - 0.709)3.444} = \\ &= 0.706\end{aligned}$$

8. Проверим условие окончания

$$\left|\frac{F_{min} - f(\overline{x})}{f(\overline{x})}\right| = 0.000020$$

$$\left|\frac{x_{min} - \overline{x}}{\overline{x}}\right| = 0.003261$$

$$0.000020 > \varepsilon_1 = 0.000001;$$
$$0.003261 > \varepsilon_2 = 0.000001;$$

Условие окончания расчета не выполнено.

Определить и расположить новые расчетные точки в порядке возрастания.

Получаем: $x_1 = 0.500, x_2 = 0.706, x_3 = 0.709$.

Значения функций в этих точках равны: $f(x_1) = 3.649, f(x_2) = 3.442, f(x_3) = 3.442$

Продолжить расчет. Перейти к шагу 6.

6. Найти $F_{min} = min(f_1, f_2, f_3)$ и $x_{min} = x_i : F_{min}$:

$F_{min} = min(3.649, 3.442, 3.442) = 3.442, x_{min} = 0.706$

7. Вычислить точку минимума $\overline{x}$ квадратичного интерполяционного полинома.

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{2}\frac{(x_2^2 - x_3^2)f_1 + (x_3^2 - x_1^2)f_2 + (x_1^2 - x_2^2)f_3}{(x_2 - x_3)f_1 + (x_3 - x_1)f_2 + (x_1 - x_2)f_3} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{(0.499 - 0.502)3.649 + (0.502 - 0.250)3.442 + (0.250 - 0.499)3.442}{(0.706 - 0.709)3.649 + (0.709 - 0.500)3.442 + (0.500 - 0.706)3.442} = \\ &= 0.704\end{aligned}$$

8. Проверим условие окончания

$$\left|\frac{F_{min} - f(\overline{x})}{f(\overline{x})}\right| = 0.000008$$

$$\left|\frac{x_{min} - \overline{x}}{\overline{x}}\right| = 0.002762$$

$$0.000008 > \varepsilon_1 = 0.000001;$$
$$0.002762 > \varepsilon_2 = 0.000001;$$

Условие окончания расчета не выполнено.

Определить и расположить новые расчетные точки в порядке возрастания.

Получаем: $x_1 = 0.500, x_2 = 0.704, x_3 = 0.706$.

Значения функций в этих точках равны: $f(x_1) = 3.649, f(x_2) = 3.442, f(x_3) = 3.442$

Продолжить расчет. Перейти к шагу 6.

Код метода

```
from typing import Callable, Optional


def quadratic_polynom_min(
    x1: float,
    x2: float,
    x3: float,
    f_x1: float,
    f_x2: float,
    f_x3: float,
) -> Optional[float]:
    down = (x2 - x3) * f_x1 + (x3 - x1) * f_x2 + (x1 - x2) * f_x3

    if down == 0:
        return None

    up = (x2 ** 2 - x3 ** 2) * f_x1 + (x3 ** 2 - x1 ** 2) * f_x2 + (x1 ** 2 - 

    return 0.5 * (up / down)


def solve(
    f_derivatives: list[Callable[[float], float]],
    _a: float,
    _b: float,
    e: float,
```

```
) -> tuple[float, float]:
    f = f_derivatives[0]

    x_result = 0
    f_result = 0

    # Шаг 1
    DELTA_X = (_b - _a) / 2
    EPS_1 = e
    EPS_2 = e
    x1 = (_a + _b) / 2
    x2 = 0
    x3 = 0

    skip_to_step_6 = False

    while True:
        if not skip_to_step_6:
            # Шаг 2
            x2 = x1 + DELTA_X

            # Шаг 3
            f_x1 = f(x1)
            f_x2 = f(x2)

            # Шаг 4
            if f_x1 > f_x2:
                x3 = x1 + 2 * DELTA_X
            else:
                x3 = x1 - DELTA_X

            # Шаг 5
            f_x3 = f(x3)

        skip_to_step_6 = False

        # Шаг 6
        x_min, f_min = min(
            (x1, f_x1),
```

```
        (x2, f_x2),
        (x3, f_x3),
        key=lambda pair: pair[1],
    )

    # Шаг 7
    x__ = quadratic_polynom_min(x1, x2, x3, f_x1, f_x2, f_x3)
    if x__ is None:
        x1 = x_min
        # Переход к шагу 2
        continue
    f_x__ = f(x__)

    # Шаг 8
    criteria1 = abs((f_min - f_x__) / f_x__)
    cond1 = criteria1 < EPS_1
    criteria2 = abs((x_min - x__) / x__)
    cond2 = criteria2 < EPS_2

    if cond1 and cond2:
        # Завершение поиска
        x_result = x__
        f_result = f_x__
        break

    # Одно из условий не выполняется и x__ в [x1, x3]
    if min(x1, x3) <= x__ <= max(x1, x3):
        new_x2, _ = min(
            (x_min, f(x_min)),
            (x__, f_x__),
            key=lambda pair: pair[1],
        )
        other, _ = max(
            (x_min, f(x_min)),
            (x__, f_x__),
            key=lambda pair: pair[1],
        )
        new_x1 = max(x for x in (x1, x2, x3, other) if x < new_x2)
        new_x3 = min(x for x in (x1, x2, x3, other) if x > new_x2)
```

```
            x1, x2, x3 = new_x1, new_x2, new_x3
            f_x1, f_x2, f_x3 = f(x1), f(x2), f(x3)
            # Переход к шагу 6
            skip_to_step_6 = True
            continue
        # Одно из условий не выполняется и x__ не в [x1, x3]
        else:
            x1 = x__
            # Переход к шагу 2
            continue

    return x_result, f_result
```

Результат работы:

```
x_m = 0.7034676370247065
y_m = f(x_m) = 3.4422772944951525
```