Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Практическая работа №2

по дисциплине

«Теория вероятностей»

Вариант 13

Выполнил:

Студент группы P3213

Султанов А.Р.

Проверила:

Селина Е.Г.

г. Санкт-Петербург

2024г.

Задание

Решить задачу четырьмя методами: методом половинного деления, методом золотого сечения, методом хорд и методом Ньютона. По 5 шагов каждого метода выполнить вручную + написать программу по каждому методу на одном из языков программирования.

$f(x) = \frac{1}{x} + e^{x}$, $|a, b| = |0.5, 1.5|$, $\varepsilon = 0.001$

Расчеты

Метод половинного деления

Исходный код:

```
from typing import Callable

def solve(
    f_derivatives: list[Callable[[float], float]],
    _a: float,
    _b: float,
    e: float,
) -> tuple[float, float]:
    f = f_derivatives[0]

    a = _a
    b = _b

    while True:
        # Шаг 1
        x1 = (a + b - e) / 2
        x2 = (a + b + e) / 2

        # Шаг 2
        y1 = f(x1)
        y2 = f(x2)

        # Шаг 3
        if y1 > y2:
            a = x1
        else:
            b = x2

        # Шаг 4
        if b - a <= 2 * e:
            break

    # Шаг 5
    x_m = (a + b) / 2
    y_m = f(x_m)
```

```
return x_m, y_m
```

Итериция 1:

1. $x_1 = (a + b - \varepsilon)/2 = 0.9995,\ x_2 = (a + b + \varepsilon)/2 = 1.0005$

2. $y_1 = f(x_1) = 3.717423,\ y_2 = f(x_2) = 3.719142$

3. $3.717423 < 3.719142 \Rightarrow b = x_2 = 1.0005$

4. $b - a = 1.0005 - 0.5 = 0.5005,\ 2 * \varepsilon = 0.0002$, значит,

$b - a > 2 * \varepsilon \Rightarrow$ переходим к пункту 1

Итерация 2:

5. $x_1 = (a + b - \varepsilon)/2 = x1 = 0.74975$

$x_2 = (a + b + \varepsilon)/2 = 0.75075$

6. $y_1 = f(x_1) = 3.450249,\ y_2 = f(x_2) = 3.450590$

7. $3.450249 < 3.450590 \Rightarrow b = x_2 = 0.75075$

8. $b - a = 0.25075,\ 2 * \varepsilon = 0.0002$, значит,

$b - a > 2 * \varepsilon \Rightarrow$ переходим к пункту 1

Итерация 3:

9.

$x_1 = (a + b - \varepsilon)/2 = 0.624875,\ x_2 = (a + b + \varepsilon)/2 = 0.625875$

10. $y_1 = f(x_1) = 3.468333,\ y_2 = f(x_2) = 3.467645$

11. $3.468333 > 3.467645 \Rightarrow a = x_1 = 0.624875$

12. $b - a = 0.125875,\ 2 * \varepsilon = 0.0002$, значит,

$b - a > 2 * \varepsilon \Rightarrow$ переходим к пункту 1

Итерация 4:

13.

$x_1 = (a + b - \varepsilon)/2 = 0.687313,\ x_2 = (a + b + \varepsilon)/2 = 0.688312$

14. $y_1 = f(x_1) = 3.443307$, $y_2 = f(x_2) = 3.443182$

15. $3.443307 > 3.443182 \Rightarrow a = x_1 = 0.687313$

16. $b - a = 0.0634375$, $2 * \varepsilon = 0.0002$, значит, $b - a > 2 * \varepsilon \Rightarrow$ переходим к пункту 1

Итерация 5:

17. $x_1 = (a + b - \varepsilon)/2 = 0.718531$, $x_2 = (a + b + \varepsilon)/2 = 0.719531$

18. $y_1 = f(x_1) = 3.443146$, $y_2 = f(x_2) = 3.443264$

19. $3.443146 < 3.443264 \Rightarrow b = x_2 = 0.719531$

20. $b - a = 0.032219$, $2 * \varepsilon = 0.0002$, значит, $b - a > 2 * \varepsilon \Rightarrow$ переходим к пункту 1

Метод золотого сечения

Исходный код:

```
from typing import Callable

GOLDEN_RATIO_1 = 0.382
GOLDEN_RATIO_2 = 0.618

def solve(
    f_derivatives: list[Callable[[float], float]],
    _a: float,
    _b: float,
    e: float,
) -> tuple[float, float]:
    f = f_derivatives[0]

    a = _a
    b = _b
    x1 = a + GOLDEN_RATIO_1 * (b - a)
    x2 = a + GOLDEN_RATIO_2 * (b - a)
```

```
    while True:
        # Шаг 1
        # Шаг 2
        if f(x1) < f(x2):
            b = x2
            x2 = x1
            x1 = a + GOLDEN_RATIO_1 * (b - a)
        else:
            a = x1
            x1 = x2
            x2 = a + GOLDEN_RATIO_2 * (b - a)

        # Шаг 3
        if (b - a) < e * 2:
            break

    # Шаг 4
    x_m = (a + b) / 2
    y_m = f(x_m)

    return x_m, y_m
```

Итерация 1:

1.

$$x_1 = a + 0.382 * (b - a) = 0.5 + 0,382 * (1.5 - 0.5) = 0.882$$

$$x_2 = a + 0.618 * (b - a) = 0.5 + 0,618 * (1.5 - 0.5) = 1.118$$

2. $f(x_1) = 3.549513, f(x_2) = 3.953185$

$3.549513 < 3.953185 \Rightarrow [a, x_2],\ b = x_2 = 1.118$

3. $b - a = 1.118 - 0.5 = 0.618$

$0,618 > 0.002 \Rightarrow$ возвращаемся к шагу 1

Итерация 2:

4. $x_1 = a + 0.382 * (b - a) = 0.736076$

$x_2 = a + 0.618 * (b - a) = 0.881924$

5. $f(x_1) = 3.446283, f(x_2) = 3.549427$

$3.446283 < 3.549427 \Rightarrow [a, x_2],\ b = x_2 = 0.881924$

6. $b - a = 0.381924$

$0.381924 > 0.002 \Rightarrow$ возвращаемся к шагу 1

Итерация 3:

7. $x_1 = a + 0.382 * (b - a) = 0.645895$

$x_2 = a + 0.618 * (b - a) = 0.736029$

8. $f(x_1) = 3.455933, f(x_2) = 3.446271$

$3.455933 > 3.446271 \Rightarrow [x_1, b],\ a = x_1 = 0.645895$

9. $b - a = 0.236029$

$0.236029 > 0.002 \Rightarrow$ возвращаемся к шагу 1

Метод хорд

Исходный код:

```
from typing import Callable

def solve(
    f_derivatives: list[Callable[[float], float]],
    _a: float,
    _b: float,
    e: float,
) -> tuple[float, float]:
    f = f_derivatives[0]
    f_derivative_1 = f_derivatives[1]

    a = _a
    b = _b
    fd1a = f_derivative_1(a)
    fd1b = f_derivative_1(b)

    while True:
        # Шаг 1
        x = a - (fd1a / (fd1a - fd1b)) * (a - b)
        fd1x = f_derivative_1(x)
```

```
        # Шаг 2
        if abs(fd1x) <= e:
            return x, f(x)

        # Шаг 3
        if fd1x > 0:
            b = x
            fd1b = f_derivative_1(b)
        else:
            a = x
            fd1a = f_derivative_1(a)
```

Итерация 1:

1. $\overline{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b) = 0.868047$
2. $|f'(\overline{x})| = 1.055125,\ \varepsilon = 0.001, |f'(\overline{x})| > \varepsilon \Rightarrow$ переход к шагу 3
3. $f'(\overline{x}) = 1.055125 > 0 \Rightarrow b = \overline{x} = 0.868047$. Возврат к шагу 1

Итерация 2

4. $\overline{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b) = 0.754046$
5. $|f'(\overline{x})| = 0.366829,\ \varepsilon = 0.001, |f'(\overline{x})| > \varepsilon \Rightarrow$ переход к шагу 3
6. $f'(\overline{x}) = 0.366829 > 0 \Rightarrow b = \overline{x} = 0.75404$. Возврат к шагу 1

Итерация 3

7. $\overline{x} = a - \frac{f'(a)}{f'(a) - f'(b)}(a - b) = 0.719760$
8. $|f'(\overline{x})| = 0.123643,\ \varepsilon = 0.001, |f'(\overline{x})| > \varepsilon \Rightarrow$ переход к шагу 3
9. $f'(\overline{x}) = 0.123643 > 0 \Rightarrow b = \overline{x} = 0.719760$. Возврат к шагу 1

Метод Ньютона

Исходный код:

```
from typing import Callable

def solve(
    f_derivatives: list[Callable[[float], float]],
```

```
    _a: float,
    _b: float,
    e: float,
) -> tuple[float, float]:
    f = f_derivatives[0]
    f_derivative_1 = f_derivatives[1]
    f_derivative_2 = f_derivatives[2]

    a = _a
    b = _b

    # Шаг 1
    x = (a + b) / 2

    while True:
        # Шаг 2
        fd1x = f_derivative_1(x)
        fd2x = f_derivative_2(x)
        x = x - (fd1x / fd2x)

        # Шаг 3
        if abs(f_derivative_1(x)) <= e:
            return x, f(x)
```

Итерация 1:

1. $x_0 = (a + b)/2 = 1.0$

2. $x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 0.635825$

3. $|f'(x_1)| = 0.584997,\ \varepsilon = 0.001$

$|f'(x_1)| > \varepsilon$, продолжаем вычисления

Итерация 2:

4. $x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 0.696325$

5. $|f'(x_2)| = 0.056046,\ \varepsilon = 0.001$

$|f'(x_2)| > \varepsilon$, продолжаем вычисления

Итерация 3:

6. $x_3 = x_2 - \frac{f'(x_2)}{f''(x_2)} = 0.703393$

7. $|f'(x_3)| = 0.000579,\ \varepsilon = 0.001$

$|f'(x_3)| < \varepsilon$, заканчиваем вычисления, ответ:

$x_m = 0.703393,\ y_m = f(x_m) = 3.442277$