



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Ярылгасимов Султан Галиевич
Мониторинг рыночной цены риска по статистической финансовой информации

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Борисов Андрей Владимирович

Москва, 2023

Оглавление

1	Введение	3
1.1	Актуальность	3
1.2	Цель и задачи работы	4
2	Теоретическая часть	6
2.1	Краткий обзор стохастических моделей эволюции цен финансовых инструментов	6
2.2	Математическая модель финансовой системы и поста- новка задачи оценивания	15
3	Практическая часть	20
3.1	Алгоритмическое обеспечение	20
3.2	Метод решения задачи оптимальной фильтрации по дискретизованным наблюдениям	21
3.3	Численный метод решения задачи оптимальной филь- трации по наблюдениям, полученным в случайные мо- менты времени	22
3.4	Численные эксперименты	25
4	Выводы	42
5	Заключение	44
	Список литературы	46

1. Введение

1.1. Актуальность

В современных условиях финансовые рынки становятся все более сложными и динамичными. Одной из ключевых проблем, с которой сталкиваются участники рынка, является необходимость эффективно управлять рисками. В текущей работе, будем понимать риск как вероятность возникновения неблагоприятных событий или потерь, связанных с некоторой деятельностью или инвестициями. В экономике и финансах риск определяется как неопределенность относительно будущих доходов или потерь, связанных с определенными инвестиционными решениями [1].

Знание риска имеет важное значение для принятия решений о распределении ресурсов и инвестиционной стратегии. Инвесторы и менеджеры должны знать риск, чтобы принимать обоснованные решения о том, какие инвестиции следует сделать и какое количество ресурсов выделить на каждую из них. Знание риска также помогает инвесторам оценивать потенциальную доходность инвестиций и рассчитывать оптимальные портфели.

Оценка риска важна, потому что риск сам по себе не доступен прямому наблюдению, и его необходимо оценивать и моделировать. Более точные и надежные оценки риска позволяют более эффективно управлять рисками и повышать доходность инвестиций.

В задаче оценки риска важное место занимает понятие рыночной цены риска (market price of risk). Рыночная цена риска - это мера, которая отражает связь между риском и ожидаемой доходностью финансового актива. Она показывает, какая должна быть дополнительная премия (в виде доходности) для инвесторов, чтобы они были готовы взять на себя дополнительный риск [2]. Таким образом, рыночная цена риска показывает, какая компенсация требуется для того, чтобы инвесторы были готовы взять на себя риск вместо того, чтобы вложить свои средства в более безрисковые активы.

Понятие рыночной цены риска широко используется в финансовых моделях оценки ценности активов, таких как капитализация акций, оценка опционов и другие финансовые инструменты. Она позволяет оценить вероятность того, что инвесторы будут получать доходность, превышающую безрисковую ставку, учитывая возможный уровень риска.

В связи с этим, актуальность исследования заключается в том, что оно позволяет разработать новый подход к мониторингу рыночной цены риска на основе статистической финансовой информации. Данный подход позволяет существенно повысить точность оценки риска и управление им, что особенно важно для участников рынка, которые оперируют большими объемами средств.

Таким образом, исследование “Мониторинг рыночной цены риска по статистической финансовой информации” является актуальным и перспективным, так как позволяет разработать новый подход к мониторингу рыночной цены риска, основанный на статистическом анализе финансовых данных. Результаты данного исследования могут быть использованы для улучшения управления рисками на финансовых рынках и повышения эффективности финансовых операций.

1.2. Цель и задачи работы

Цель данной выпускной квалификационной работы заключается в разработке методов и алгоритмов оценивания рыночной цены риска на основе разнородной статистической информации. Для достижения этой цели, необходимо решить следующие задачи:

- 1) Провести краткий обзор существующих математических моделей финансовых рынков, чтобы определить основные принципы и методы, которые будут использоваться в дальнейшей работе.
- 2) Выбрать математическую модель неполного рынка со марковским скачкообразным внешним фактор-процессом, которая будет использоваться для оценки риска на основе статистической информации.
- 3) Сформулировать и решить задачу оценивания рыночной цены риска как задачу оптимальной фильтрации. Это позволит использовать методы оптимальной фильтрации для оценки риска на основе разнородной статистической информации.
- 4) Разработать комплекс алгоритмов численной фильтрации рыночной цены риска по разнородной статистической информации. Это позво-

лит эффективно использовать статистическую информацию для оценки риска на финансовых рынках.

- 5) С помощью комплекса численных экспериментов выполнить сравнительный численный анализ качества оценивания рыночной цены риска в зависимости от доступной статистической информации. Это позволит оценить эффективность разработанных методов и алгоритмов в реальных условиях и определить, насколько они могут быть полезны для управления рисками на финансовых рынках.

2. Теоретическая часть

2.1. Краткий обзор стохастических моделей эволюции цен финансовых инструментов

В литературе представлено немалое количество стохастических моделей для финансовых инструментов в непрерывном времени. В этом разделе мы разберем некоторые из них, которые важны для дальнейшей работы.

Диффузионные модели эволюции процентных ставок, стоимостей акций и облигаций

Для описания диффузионных моделей обратимся к работе [3].

Модель банковского счета $B = (B_n)_{n \geq 0}$ является наиболее простой моделью, в которой мы можем столкнуться со случайными процентными ставками $r_n = \frac{\Delta B_n}{B_{n-1}}$. Естественный “непрерывный” аналог данного отношения задается как $dB_t = r(t)B_t dt$, где $r = (r(t))_{t \geq 0}$ и $B = (B_t)_{t \geq 0}$. Из этого уравнения можем вывести, что:

$$r(t) = (\ln B_t)'$$

$$B(t) = B_0 \exp \left(\int_0^t r(s) ds \right).$$

Понятие процентной ставки играет важную роль при определении эволюции стоимости облигаций “опосредованно”. “Опосредованным подходом” называется задание динамики стоимостей облигаций как $P(t, T) = F(t; r(t); T)$, где $r = (r(t))_{t \geq 0}$ – некоторая “процентная ставка”. Это обстоятельство объясняет, почему существует большое количество разнообразных моделей процентных ставок, описываемых диффузионными уравнениями следующего вида:

$$dr(t) = a(t, r(t))dt + b(t, r(t))dW_t \quad (2.1)$$

или моделями типа “диффузия со скачками”:

$$dr(t) = a(t, r(t))dt + b(t, r(t))dW_t + \int c(t, r(t-), x) (\mu(dt, dx) - \nu(dt, dx)), \quad (2.2)$$

где

- $\mu = \mu(dt, dx)$ – случайная пуассоновская мера на $\mathbb{R}_t \times E \times \mathbb{R}^d$.
- $\nu = \nu(dt, dx)$ – ее компенсатор.
- $a(t, r(t))$ – измеримая функция на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ (мгновенный снос).
- $b(t, r(t))$ – измеримая функция на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ (мгновенная волатильность).
- W_t – стандартное броуновское движение.

Ниже мы приведем несколько популярных моделей процентных ставок, которые относятся к классу диффузионных моделей 2.1, в которых используется стандартный винеровский процесс (броуновское движение) $W = (W_t)_{t \geq 0}$, заданный на стохастическом базисе $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$.

1) Модель Мертона

$$dr(t) = \alpha dt + \gamma dW_t.$$

2) Модель Васичека

$$dr(t) = (\alpha - \beta r(t))dt + \gamma dW_t.$$

3) Модель Дотхана

$$dr(t) = \alpha r(t)dt + \gamma r(t)dW_t.$$

4) Модель Кокса, Ингерсолла и Росса

$$dr(t) = \beta (r(t))^{3/2} dW_t,$$

$$dr(t) = (\alpha - \beta r(t))dt + \gamma (r(t))^{1/2} dW_t.$$

5) Модель Хо и Ли

$$dr(t) = \alpha(t)dt + \gamma dW_t.$$

6) Модель Блэка, Дермана и Толя

$$dr(t) = \alpha(t)r(t)dt + \gamma(t)dW_t.$$

7) Модель Халла и Уайта

$$dr(t) = (\alpha(t) - \beta(t)r(t))dt + \gamma(t)dW_t,$$

$$dr(t) = (\alpha(t) - \beta(t)r(t))dt + \gamma(t)(r(t))^{1/2}dW_t.$$

8) Модель Блэка и Карасинского

$$dr(t) = r(t)(\alpha(t) - \beta(t) \ln r(t))dt + \gamma(t)r(t)dW_t.$$

9) Модель Зандмана и Зондермана

$$r(t) = \ln(1 + \xi(t)),$$

$$d\xi(t) = \xi(t)(\alpha(t)dt + \gamma(t)dW_t).$$

Первой моделью для описания стоимости акций $S = (S_t)_{t \geq 0}$ была линейная модель Л. Башелье:

$$S_t = S_0 + \mu_t \sigma W_t. \quad (2.3)$$

Хотя использование математического аппарата теории вероятностей для анализа финансового рынка было принципиальным шагом в этой области, с самого начала было очевидно, что модель имеет множество недостатков. Один из них заключается в том, что величины S_t , которые по смыслу являются стоимостью акций, могут принимать отрицательные значения.

Следующим важным шагом в развитии теории было предложение Самуэльсона описывать стоимости акций с помощью геометрического (или экономического) броуновского движения, что решало некоторые проблемы, связанные со старой моделью:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}. \quad (2.4)$$

Иначе говоря, Самуэльсон предлагал считать, что не стоимости S_t , а логарифм этих стоимостей подчиняются линейной модели типа 2.3:

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}t \right) + \sigma W_t.$$

Из формулы Ито следует, что

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t).$$

Тем самым, можно переписать это выражение как:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (2.5)$$

Представление 2.5 интересно сравнить с выражением для банковского счета $B = (B_t)_{t \geq 0}$, подчиняющегося:

$$dB_t = r B_t dt \quad (2.6)$$

с постоянной процентной ставкой $r > 0$.

Если финансовый рынок состоит из банковского счета и акцией подчиняющихся уравнениям 2.5 и 2.6 соответственно, то будем говорить, что мы имеем дело со стандартной диффузионной (B, S) -моделью Блэка-Мертон-Шоулса или стандартным диффузионным (B, S) -рынком.

Одно из напрашивающихся усовершенствований состоит в рассмотрении моделей, в которых постоянные r, μ, σ заменяется на детерминированные или случайные функции $r(t), \mu(t), \sigma(t)$:

$$dB_t = r(t) B_t dt, \quad (2.7)$$

$$dS_t = S_t (\mu(t) dt + \sigma(t) dW_t). \quad (2.8)$$

Модели со стохастической волатильностью

Необходимость усложнения моделей вызвана тем, что модели со стохастической волатильностью и скачками (будут рассмотрены далее) лучше улавливают тяжелые хвосты распределений финансовых показателей [2], что повсеместно встречается при их изучении. Так, основной причиной развития моделей со стохастической волатильностью стала так называемая улыбка волатильности (smile effect), которая не объясняется стандартной (B, S) -моделью [4].

Пусть $\mathbb{C} = \mathbb{C}(\sigma, T, K)$ - рациональная стоимость стандартного опциона колла Европейского типа с функцией выплаты $f_t = \max(S_T - K, 0)$, полученная с помощью уравнения Блэка-Шоулса [5]. Здесь, σ – волатильность, T – момент исполнения, K - цена исполнения. Так же, пусть нам известна реальная стоимость $\hat{\mathbb{C}}(T, K)$. Тогда, найдем величину $\hat{\sigma}(T, K)$ (предполагаемая (implied) волатильность) как решение уравнения

$$\mathbb{C}(\sigma, T, K) = \mathbb{C}(\hat{T}, K).$$

При экспериментальном изучении значения предполагаемой волатильности, удалось выявить некоторые недостатки в исходной модели:

- При фиксированном K величина $\hat{\sigma}(T, K)$ меняется с изменением T .
- При фиксированном T величина $\hat{\sigma}(T, K)$ меняется с изменением K , причем будучи функцией выпуклой вниз (из чего и происходит название “улыбка волатильности”).

Для учета первого эффекта Р. Мертон предложил в стандартной модели считать $\mu = \mu(t)$, $\sigma = \sigma(t)$. Второй же эффект оказывается более деликатным и для его объяснения вводятся упомянутые усложнения моделей. Наиболее прозрачной является модель, предложенная Дюпири:

$$dS_t = S_t (\mu(t)dt + \sigma(S_t, t)dW_t).$$

Удачным примером использования стохастической волатильности можно назвать модель Л. Хестона [6]. Она позволяет учитывать положительную, отрицательную и нулевую корреляцию между ценами спот базового актива и их волатильностью. Более того, в отличие от других моделей, оценить рациональную цену достаточно просто и Хестон указал явную формулу подобно той, что указана в работе Блэка и Шоулса.

Модель Хестона предполагает, что цена базового актива подчиняется следующему уравнению:

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S dt + \sqrt{v(t)} S dW_t^1, \\ d\sqrt{v(t)} &= -\beta \sqrt{v(t)} dt + \delta dW_t^2. \end{aligned}$$

Уравнение для волатильности можно переписать в виде:

$$dv(t) = k (\theta - v(t)) dt + \sigma \sqrt{v(t)} dW_t^2.$$

Здесь, W_t^1 и W_t^2 – стандартные винеровские процессы с корреляцией $\rho dt = \text{cov}(dW_1 dW_2)$, k – процентное смещение, θ – произвольный случайный уровень.

Еще одной моделью со стохастической волатильностью, которая может описывать улыбку волатильности на рынке производных финансовых инструментов, является модель SABR (Stochastic alpha, beta, rho)[7], названная так из-за параметров модели. Данная модель описывает форвардные процентные ставки F .

$$\begin{aligned} dF_t &= \Sigma_t C(F_t) dW_t^1, \\ d\Sigma_t &= \nu \Sigma_t dW_t^2. \end{aligned}$$

Здесь,

- W_t^1 и W_t^2 – стандартные винеровские процессы с корреляцией ρ ($\text{cov}(dW_1 dW_2) = \rho dt$);
- Σ_t – стохастическая волатильность для F_t .
- ν – волатильность Σ_t (так называемая, “волга”).
- $C(x)$ – гладкая функция, определенная на $x > 0$, такая что $\int_0^K \frac{du}{C(u)} < \infty$ для всех $K > 0$.

Выбор функции $C(x)$ сводит данную модель к другим моделям со стохастической волатильностью. Например, к модели CEV при $C(x) = x^\beta, 0 \leq \beta \leq 1$ или же к стохастической смещенной логнормальной модели (stochastic shifted lognormal model) при $C(x) = x + a, a > 0$.

Непрерывные модели со скачками

Кокс и Росс [8] так же взяли за основу модель Блэка-Шоулса. Однако, они заметили, что новая информация поступает в качестве дискретных скачков, а не непрерывных потоков, поэтому они отвергли предположение о диффузионном процессе и предложили следующую модель:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + (k - 1)d\Pi, \quad (2.9)$$

где Π – пуассоновский процесс, который принимает значение 0 с вероятностью $1 - \lambda dt$ и значение 1 с вероятностью λdt . λ – параметр интенсивности процесса, $k - 1$ – амплитуда скачка. Из 2.9 видим, что если скачка не происходит, то S_t движется с экспоненциальной скоростью μ , а если скачок произошел, то S_t меняется на величину $(k - 1)S_t$, то есть $S_t + (1 - k)S_t = kS_t$.

Однако, мы можем не отказываться от волатильности в пользу скачков, и даже, более того, можем использовать стохастическую волатильность вместе со скачками, амплитуда которых так же случайна. Например, в качестве такой модели можем привести модель, указанную в [9] для описания цены опционов на немецкую марку:

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= (\mu - \lambda \bar{k}) dt + \sqrt{V} dW_t^1 + k d\Pi, \\ dV &= (\alpha - \beta V) dt + \sigma_v \sqrt{V} dW_t^2.\end{aligned}$$

Здесь:

- W_t^1 и W_t^2 – стандартные винеровские процессы с корреляцией ρ ($cov(dW_1 dW_2) = \rho dt$);
- Π – пуассоновский процесс, который принимает значение 0 с вероятностью $1 - \lambda dt$ и значение 1 с вероятностью λdt .
- λ – параметр интенсивности процесса.
- $\ln(1 + k) \sim N\left(\ln(1 + \bar{k}) - \frac{1}{2}\delta^2, \delta^2\right)$.
- μ – мгновенная процентная ставка.
- k – случайный процентный переход, зависящий от скачка.

Среди моделей со скачками, модели со скрытым марковским процессом являются наиболее интересными для текущей работы. В этой модели предполагается, что экономика может находиться в различных состояниях, в каждой из которых рынок ведет себя по-разному. В [10] введен процесс, определяющий состояние экономики, Z_t и индикаторы этих состояний как $I_t^j = \mathbb{1}_{Y_t=j}$, $j = \overline{1, n}$, где n – количество состояний экономики. Для каждой из этих состояний задана процентная ставка r_j . Так, модель может быть записана в следующем виде:

$$dS_t = S_t r_t dt = \sum_{j=1}^n r^j I_t^j dt.$$

В данной работе, мы будем иметь дело с усложненной моделью такого типа, где будем предполагать, что в зависимости от состояния экономики, будут меняться сносы и волатильности процентной ставки. Подробнее, целевая модель описана в 2.2.

Определение рыночной цены риска для аффинных моделей

Многие из моделей, приведенных здесь, могут быть обобщены как аффинные модели, что позволяет ввести понятие рыночной цены риска (Market Price of Risk). Сделаем это аналогично с [11].

Определение 2.1. Назовем аффинной моделью следующее представление процессов процентной ставки:

- Процентная ставка r_t является аффинной функцией:

$$r_t = d_0 + d_1 S_t,$$

где d_0, d_1 – константы, а S_t – цена базового финансового актива.

- S_t подчиняется диффузионному процессу:

$$dS_t = \mu^P(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t^P,$$

где $\mu^P(S_t)$ – мгновенный снос, $\sigma(S_t)$ – внутренняя волатильность, W_t^P – стандартный винеровский процесс относительно меры P .

- Мгновенный снос (относительно меры P) является аффинной функцией:

$$\mu^P(S_t) = a^P + b^P S_t,$$

где a^P, b^P – константы.

- Внутренняя волатильность является аффинной функцией:

$$\sigma^2(S_t) = \alpha + \beta S_t,$$

где α, β – константы.

- Существует мера Q , эквивалентная P , такая что S_t – диффузионный процесс относительно Q :

$$dS_t = \mu^Q(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t^Q,$$

где W_t^Q – стандартный винеровский процесс относительно меры Q , а $\mu^Q(S_t)$ так же является аффинной функцией:

$$\mu^Q(S_t) = a^Q + b^Q S_t,$$

где a^Q, b^Q – константы.

Мы можем рассматривать существование эквивалентной меры Q путем указания рыночной цены риска $\theta(S_t)$, которая удовлетворяет равенству:

$$\sigma(S_t)\theta(S_t) = \mu^P(S_t) - \mu^Q(S_t). \quad (2.10)$$

Более того, согласно теореме Гирсанова, винеровские процессы W_t^P и W_t^Q связаны как:

$$dW_t^Q = \theta(S_t)dt + dW_t^P.$$

Рассмотрим значение рыночной цены риска для некоторых конкретных моделей. Например, для следующей модели:

$$\begin{aligned} r_t &= d_0 + d_1 S_t, \\ dS_t &= b^P S_t dt + dW_t^P, \\ dS_t &= (a^Q + b^Q S_t) dt + dW_t^Q \end{aligned}$$

можем определить рыночную цену риска из уравнения 2.10 как:

$$\theta_t = \frac{\mu^P(S_t) - \mu^Q(S_t)}{\sigma(S_t)} = -a^Q + (b^P - b^Q)S_t = \theta_0 + \theta_1 S_t,$$

а если рассмотреть модель:

$$\begin{aligned} r_t &= d_0 + d_1 S_t, \\ dS_t &= (a^P + b^P S_t) dt + \sqrt{S_t} dW_t^P, \\ dS_t &= (a^Q + b^Q S_t) dt + \sqrt{S_t} dW_t^Q, \end{aligned}$$

то можно найти, что рыночная цена риска имеет вид:

$$\theta_t = \frac{\mu^P(S_t) - \mu^Q(S_t)}{\sigma(S_t)} = \frac{a^P - a^Q}{\sqrt{S_t}} + (b^P - b^Q) \sqrt{S_t} = \frac{\theta_0}{\sqrt{S_t}} + \theta_1 \sqrt{S_t}.$$

2.2. Математическая модель финансовой системы и постановка задачи оценивания

Описание математической модели финансовой системы

В данной работе на отрезке времени $[0, T]$ рассматривается финансовая система, состоящая из базового финансового инструмента S . Эволюция цены базового актива определяется на базисе с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]})$ как наблюдаемый случайный процесс S_t - единственное сильное решение стохастического дифференциального уравнения

$$dS_t = S_t a(t, Z_t) dt + S_t \sigma(t, Z_t) dW_t, \quad t \in (0, T], S_0 \sim \pi_0^S, \quad (2.11)$$

где

- $S_0 - \mathcal{F}_0$ – измеримое начальное условие.
- $W_t \in \mathbb{R} - \mathcal{F}_t$ – согласованный стандартный винеровский процесс.
- $a(\cdot, \cdot), \sigma(\cdot, \cdot)$ – функции мгновенного сноса и внутренней волатильности базового инструмента S .
- $Z_t - \mathcal{F}_t$ - согласованный ненаблюдаемый (скрытый) процесс, описывающий действие на финансовую систему неконтролируемых внешних факторов.
- π_0^S – начальное распределение.

В 2.11 $Z_t = \text{col}(Z_t^1, \dots, Z_t^l) \in \mathbb{S}^L = \{e_1, \dots, e_l\}$ является неоднородным марковский скачкообразным процессом (МСП) с конечным множеством состояний - набором координатных ортонормированных базисов евклидова пространства \mathbb{R}^L . Будем считать известными матрицу интенсивности переходов $\Lambda(\cdot)$ и начальное распределение π_0^Z . Дополнительно, сделаем предположение о строгой положительности всех компонент Z на $[0, T]$. Из [12] знаем, что Z_t - единственное сильное решение стохастический дифференциальной системы уравнений

$$dZ_t = \Lambda^T Z_t dt + dM_t, \quad t \in (0, T], Z_0 \sim \pi_0^Z, \quad (2.12)$$

где $M_t = \text{col}(M_t^1, \dots, M_t^L) \in \mathbb{R}^L$ – некоторый \mathcal{F}_t -согласованный мартингал.

Для рассматриваемой финансовой системы предполагается отсутствие возможности арбитража, а также существование на измеримом пространстве (Ω, \mathcal{F}) доминирующей мартингальной меры Q , $Q \sim P$, удовлетворяющей следующим условиям:

- 1) Процесс M_t является мартингалом относительно меры Q .
- 2) Относительно Q процесс S_t является единственным сильным решением стохастической дифференциальной системы уравнений

$$dS_t = r_t S_t dt + S_t \sigma(t, Z_t) dW_t^Q, \quad t \in (0, T], S_0 \sim \pi_0(s), \quad (2.13)$$

в которой процесс $W_t^Q \in \mathbb{R}$ является \mathcal{F}_t -согласованным стандартным винеровским процессом относительно меры Q .

Согласно обобщенной теореме Гирсанова [13] винеровский процесс W_t^Q связан с исходным W_t равенством

$$dW_t^Q = \theta_t dt + dW_t, \quad (2.14)$$

где $\theta_t \in \mathbb{R}$ - недоступный наблюдению \mathcal{F}_t -согласованный процесс рыночной цены риска (Market Price of Risk, MPR).

Данный рынок является неполным, что означает существование нескольких мартингальных вероятностных мер. Знание преобладающей мартингальной вероятностной меры Q эквивалентно знанию MPR θ_t и позволяет решать различные финансовые задачи, включая построение хеджирующего портфеля. Однако MPR невозможно получить напрямую, и доступна лишь при наличии информации, описываемой σ -алгеброй наблюдений $O_t = \sigma\{S_u : 0 \leq u \leq t\}$. В такой ситуации естественным является поиск условного среднего MPR относительно имеющихся наблюдений: $\hat{\theta}_t = E_P\{\theta_t | O_t\}$.

Сведение задачи определения цены риска к задаче оптимальной фильтрации

Из 2.11, 2.13, 2.14 можно определить связь между функциями r, a, σ с одной стороны и MPR θ с другой. Подстановкой 2.14 в 2.13 можно получить другой вид стохастической дифференциального уравнения 2.11, которое

является представлением специального семимартингала и в силу его единственности

$$S_t a(t, Z_t) = r_t S_t + S_t a(t, Z_t) \sigma(t, Z_t) \theta_t$$

верно P - п.н. почти везде по мере Лебега на $[0, T]$. Так как $S_t > 0$, можем получить представление:

$$\sigma(t, Z_t) \theta_t = a(t, Z_t) - r_t. \quad (2.15)$$

Далее, используя $Z_t \in \mathbb{S}^L$, представим функции a и σ как:

$$\begin{aligned} a(t, Z_t) &= \sum_{l=1}^L Z_t^l a^l(t), \\ \sigma(t, Z_t) &= \sum_{l=1}^L Z_t^l \sigma^l(t), \end{aligned}$$

где $\{a^l(t)\}_{l=1, \bar{L}}$ и $\{\sigma^l(t)\}_{l=1, \bar{L}}$ - наборы известных неслучайных функций, иначе “алфавиты” мгновенных сносов и внутренних волатильностей: $a^l(t) = a(t, e_l)$, $\sigma^l(t) = \sigma(t, e_l)$. В этом случае, можем переписать 2.15 в следующем виде:

$$\sum_{l=1}^L Z_t^l \sigma^l(t) \theta_t = \sum_{l=1}^L Z_t^l a^l(t) - r_t, \quad (2.16)$$

откуда в силу $\pi^Z(t) > 0$ следует, что MPR θ имеет вид

$$\theta_t = \sum_{l=1}^L Z_t^l (\sigma^l(t))^{-1} (a^l(t) - r_t), \quad (2.17)$$

Таким образом, MPR θ_t является линейным преобразованием МСП Z_t . Тем самым, определение θ_t в описанной финансовой системе сводится к решению задачи оптимальной фильтрации состояний МСП Z , описываемыми стохастической дифференциальной системой уравнений 2.12, по наблюдениям S .

В исследовании мы будем рассматривать два типа наблюдений: дискретизованные наблюдения и наблюдения, поступающие в случайные моменты времени. По этой причине, необходимо построить и решить задачу оптимальной фильтрации для каждого из этих случаев.

Дискретизованные по времени наблюдения

В случае, если S_t поступают в качестве дискретизованных наблюдений, то можем записать систему наблюдений следующим образом:

$$dS_t = S_t a(t, Z_t) dt + S_t \sigma(t, Z_t) dW_t, \quad t \in (0, T], S_0 \sim \pi_0^S, \quad (2.18)$$

$$dZ_t = \Lambda^T Z_t dt + dM_t, \quad t \in (0, T], Z_0 \sim \pi_0^Z, \quad (2.19)$$

$$\tilde{S}_{n+1} = \tilde{S}_n + \tilde{S}_n a(t_n, Z_{t_n}) \delta_d + \tilde{S}_n \sigma(t_n, Z_{t_n}) \sqrt{\delta_d} V_n, \quad n = \overline{1, N}, \tilde{S}_0 \sim \pi_0^S. \quad (2.20)$$

Здесь:

- (2.18), (2.19) – уравнения динамики, аналогичные с (2.11) и (2.12) соответственно.
- (2.20) – модель наблюдений, полученная аппроксимацией Эйлера-Маруямы решения СДУ [14].
- V_n – стандартный гауссовский дискретный белый шум.
- δ_d – параметр дискретизации для наблюдений.
- $N = T/\delta_d$.
- $t_n = n\delta_d, n = \overline{0, N}$.

Наблюдения, поступающие в случайные моменты времени

Дискретизации наблюдений могло бы быть достаточно, однако настоящие данные, поступающие с рынка ценных бумаг, предоставляются в виде потока исполнения сделок. Предположим, что времена $\Delta_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ между сделками независимы между собой и их распределения $\tilde{P}(Z_t)$ зависят от скрытого марковского скачкообразного процесса Z_t . Тогда систему наблюдений запишем как:

$$dS_t = S_t a(t, Z_t) dt + S_t \sigma(t, Z_t) dW_t, \quad t \in (0, T], S_0 \sim \pi_0^S, \quad (2.21)$$

$$dZ_t = \Lambda^T Z_t dt + dM_t, \quad t \in (0, T], Z_0 \sim \pi_0^Z, \quad (2.22)$$

$$\Delta_n \sim \tilde{P}(Z_{\tau_{n-1}}), \quad \tau_n < T \quad (2.23)$$

$$\tilde{S}_{n+1} = \tilde{S}_n + \tilde{S}_n a(\tau_n, Z_{\tau_n}) \Delta_n + \tilde{S}_n \sigma(\tau_n, Z_{\tau_n}) \sqrt{\Delta_n} V_n, \quad \tilde{S}_0 \sim \pi_0^S, \quad (2.24)$$

Здесь:

- (2.21), (2.22) – уравнения динамики,
- (2.23), (2.24) – модель наблюдений,
- V_n – стандартный гауссовский дискретный белый шум.

3. Практическая часть

3.1. Алгоритмическое обеспечение

Используемый метод моделирования состояний динамики

В текущей работе будут использованы смоделированные данные, а не настоящая информация, поступающая с рынка, поэтому важно привести методы, которыми будут моделированы состояния динамики. Очевидно, что на ЭВМ мы не можем достигнуть непрерывности случайных процессов Z_t и S_t , которые мы предполагали непрерывными в теоретической части. Однако, выбрав достаточно малый шаг дискретизации δ на отрезке $[0, T]$ можем сделать эти наблюдения приближенными к непрерывным. Для этого, будем использовать следующие алгоритмы моделирования наблюдений.

Возьмем шаг дискретизации δ (Общий для МСП и цен базового актива). Далее, будем считать, что известно начальное распределение π_0^Z и матрица интенсивности переходов Λ известна и стационарна. Тогда, можем моделировать траекторию Z_n следующим образом:

$$Z_{n+1} \sim P_n, \quad Z_0 \sim \pi_0^Z, n = \overline{1, N}, \quad (3.1)$$

где дискретное распределение P_n задается как $P_n(Z = e_l) = ((I + \delta * \Lambda)Z_n)_l$, I – единичная матрица размерности L , $N = T/\delta$, π_0^Z – начальное распределение.

Для моделирования наблюдений S_t , воспользуемся аппроксимацией Эйлера-Маруямы решения СДУ:

$$S_{n+1} = S_n + S_n a(t_n, Z_n) \delta + S_n \sigma(t_n, Z_n) \sqrt{\delta} V_n, \quad n = \overline{1, N}, S_0 \sim \pi_0^S, \quad (3.2)$$

где $t_n = T \times \frac{n}{N}$, V_n – стандартный гауссовский дискретный белый шум, $N = T/\delta$.

Используемый метод моделирования дискретизованных наблюдений

Напомним, что за Z_t мы не наблюдаем и можем оценивать его состояние лишь по S_t , которое напрямую зависит от текущего состояния МСП. Метод дискретизации S_t приведен в 3.2, но наблюдения должны быть дискретизованными по отношению к непрерывной величине S_t . Можно добиться этого, выбрав такой δ_d , что $\delta_d \gg \delta$. Тогда алгоритм моделирования дискретизован-

ных наблюдений \tilde{S}_n выглядит следующим образом:

$$\tilde{S}_n = S_{n \times \frac{\delta_d}{\delta}}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (3.3)$$

Здесь, $N = T/\delta_d$.

Используемый метод моделирования наблюдений, поступающих в случайные моменты времени

Дополнительно к предположению о распределении времени между сделками, сделанному в 2.2, возьмем, что для каждого состояния МСП $Z_t = e_l$ нам даны моментные характеристики промежутков между продажами δ^l : $m_l = E[\delta^l]$, $D_l = D[\delta^l]$. Важно заметить, что при известном среднем времени между сделками m_l важно обеспечить $\delta \ll \min_{l \in L} m_l$ для сохранения относительной непрерывности наблюдений и для того, чтобы дискретизации не получились слишком “грубыми”.

Тогда, случайные моменты времени, моделируются следующим алгоритмом:

$$\begin{aligned} \Delta_n &\sim \tilde{P}(Z_{\tau_{n-1}}), \tau_n < T, \\ \tilde{S}_n &= S_{\tau_n}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2. Метод решения задачи оптимальной фильтрации по дискретизованным наблюдениям

В случае, когда нам доступны лишь дискретизованные наблюдения, предлагается использовать алгоритм фильтрации, описанный в [15]. Зададим параметр дискретизации для фильтрации δ_f .

1) Начальное условие:

$$\hat{Z}_0 = \pi_0.$$

2) Шаг прогноза:

$$\bar{Z}_n = P^T \hat{Z}_{n-1},$$

где $P = I + \delta_f \Lambda$, а I - единичная матрица размерности L .

3) Шаг коррекции:

$$\hat{Z}_n = \frac{1}{\mathbf{1}_{\kappa_n} \bar{Z}_n} \kappa_n \bar{Z}_n,$$

$$\kappa_n = \text{diag} \left(\mathcal{N}(S_n - S_{n-1}, \delta_f a_1, \delta_f \sigma_1), \dots, \mathcal{N}(S_n - S_{n-1}, \delta_f a_L, \delta_f \sigma_L) \right),$$

где $\mathcal{N}(y, m, K)$ – плотность гауссовского распределения со средним m и невырожденной ковариационной матрицей K .

3.3. Численный метод решения задачи оптимальной фильтрации по наблюдениям, полученным в случайные моменты времени

Так как частота торгов высока, то для обработки большого объема доступной информации можно использовать робастные алгоритмы субоптимальной фильтрации, которые были представлены в работе [16]. Для реализации таких алгоритмов необходимо использовать не исходные данные, а результаты их усреднения на интервалах времени длиной Δ , а также диффузионную аппроксимацию мультивариантного точечного процесса. Для этого мы рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Рассмотрим эволюцию цен базового актива, предполагая, что состояние МСП $Z_t = e^l$ постоянно:

$$dS_t = a^l(t) S_t dt + \sigma^l(t) S_t dW_t, S(0) = S_0.$$

Для этого стохастического дифференциального уравнения известно аналитическое решение:

$$S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \left(a^l(u) - \frac{(\sigma^l(u))^2}{2} \right) du + \int_0^t \sigma^l(u) dW_u \right).$$

Отсюда следует, что приращение цен между последовательными продажами:

$$Q_i = \left(a_i - \frac{\sigma_l^2}{2} \right) \delta_i + \sigma_l \sqrt{\delta_i} V_i,$$

где $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – стандартный гауссовский дискретный белый шум.

Рассмотрим асимптотическое распределение при $t \rightarrow \infty$ вектора

$$U_t = \begin{bmatrix} \sum_{i:\tau_i \leq t} 1 \\ \sum_{i:\tau_i \leq t} Q_i \end{bmatrix}.$$

Для этого используем подход из [16]

Каждая из компонент вектора U_t представляет собой сумму случайного числа случайных слагаемых $R_i = \begin{bmatrix} R_i^1 \\ R_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Q_i \end{bmatrix}$. Построим из этих слагаемых следующие случайные векторы

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta_i}{m_l} E[R_i^1] \\ Q_i - \frac{\delta_i}{m_l} E[R_i^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta_i}{m_l} \\ Q_i - \frac{\delta_i}{m_l} \left(a_l - \frac{\sigma_l^2}{2} \right) m_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\delta_i}{m_l} \\ \sigma_l \sqrt{\delta} V_i \end{bmatrix}$$

Эти векторы являются центрированными и имеют ковариационную матрицу $K_l^\Gamma = \text{cov}(\Gamma, \Gamma) = \text{diag} \left(\frac{D_l}{(m_l)^2}, (\sigma_l)^2 m_l \right)$. Согласно центральной предельной теореме для обобщенных процессов восстановления [17] верна следующая слабая сходимость

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \left(U_t - \frac{t}{m_l} \begin{bmatrix} 1 \\ \left(a_l - \frac{\sigma_l^2}{2} \right) m_l \end{bmatrix} \right) \xrightarrow{Law} \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{m_l} K_l^\Gamma \right).$$

Отсюда получаем, что при достаточно большом значении t распределение вектора $\sqrt{t}U_t$ близко к

$$\mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{t}}{m_l} \\ \left(a_l - \frac{\sigma_l^2}{2} \right) \sqrt{t} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{D_l}{(m_l)^3} & 0 \\ 0 & \sigma_l^2 m_l \end{bmatrix} \right).$$

Предложенный алгоритм будет обеспечивать достаточную точность оценки в условиях, описанных в предыдущем разделе, и при сохранении однородности марковского случайного процесса: $\Lambda(t) = \Lambda$. Дополнительно предполагается, что можно выбрать шаг временной дискретизации Δ таким образом, что вероятность скачков МСП на этом интервале будет невелика, а число сделок на нем будет достаточно велико, независимо от текущего состояния МСП Z_t . Матрица переходных вероятностей МСП на этом интервале будет равна $P = \exp(\Delta\Lambda)$.

$$\max_{0 \leq l \leq L} m_l \ll \Delta \ll \frac{1}{\max_{0 \leq l \leq L} |\lambda_{ll}|}$$

В алгоритме фильтрации будем использовать L гауссиан $\mathcal{N}(u, \mu_l, \kappa_l)$ с векторами средних μ_l и матрицами ковариаций κ_l :

$$\mu_l = \left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{\Delta}}{m_l} \\ \left(a_l - \frac{\sigma_l^2}{2} \right) \sqrt{\Delta} \end{array} \right], \kappa_l = \left[\begin{array}{cc} \frac{D_l}{(m_l)^3} & 0 \\ 0 & \sigma_l^2 m_l \end{array} \right]. \quad (3.5)$$

На интервалах дискретизации наблюдений $[t_{j-1}, t_j], t_j = j\Delta$, поступающие в случайные моменты времени наблюдения $\{\tau_i\}, \{S_{\tau_i}\}$ агрегируются следующим образом:

$$U_j = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[\begin{array}{c} \sum_{i:t_{j-1} < \tau_{i-1} < \tau_i \leq t_j} 1 \\ \sum_{i:t_{j-1} < \tau_{i-1} < \tau_i \leq t_j} \ln \left(\frac{S_{\tau_i}}{S_{\tau_{i-1}}} \right) \end{array} \right]. \quad (3.6)$$

Тем самым, можем записать алгоритм вычисления оценок \hat{Z}_{t_j} следующим образом:

1) Начальное условие:

$$\hat{Z}_0 = \pi_0.$$

2) Шаг прогноза:

$$\bar{Z}_{t_j} = P^T \hat{Z}_{t_{j-1}},$$

где $P = I + \delta_f \Lambda$, а I - единичная матрица размерности L .

3) Шаг коррекции $\left(\hat{Z}_{t_j} = \text{col} \left(\hat{Z}_{t_j}^1, \dots, \hat{Z}_{t_j}^L \right) \right)$:

$$\hat{Z}_{t_j}^l = \frac{\bar{Z}_{t_j}^l \mathcal{N}(U_j, \mu_l, \kappa_l)}{\sum_{k=1}^L \bar{Z}_{t_j}^k \mathcal{N}(U_j, \mu_k, \kappa_k)}, \quad l = \overline{1, L},$$

где $\mathcal{N}(Y, m, K)$ – плотность многомерного гауссовского распределения с вектором средних m и невырожденной ковариационной матрицей K .

3.4. Численные эксперименты

Описание численного примера

Для проведения численного эксперимента, смоделируем данные для рынка, имеющего следующие заданные параметры:

- $T = 1$ – время. Выберем 1 год, что равно 250 торговым дням, каждый по 8 часов.
- $\delta = 10^{-7}$ – параметр дискретизации для моделирования состояний МСП Z_t и цен базового актива S_t .
- $\delta_d = 10^{-4}$ – параметр дискретизации для моделирования дискретизованных наблюдений.
- $\Delta = 10^{-4}$ (12 минут) – параметр “окна” для усреднения данных, поступающих в случайные моменты времени.
- $\delta_f = 10^{-7}$ – параметр дискретизации фильтрации.
- Λ – матрица интенсивностей переходов.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -12.5 & 12.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & -250 & 250 \\ 40 & 0 & 10 & -50 \end{bmatrix}$$

Будем иметь в виду 4 состояния рынка: рост, состояние перед паникой, паника, рецессия. Средние продолжительности: рост - 20 дней, перед паникой - 2 часа, паника - 1 день, рецессия - 5 дней.

- $a = [0.07, 0.03, 0.02, 0.025]$ - “алфавит” значений мгновенного сноса.
- $\sigma = [0.1, 0.5, 0.6, 0.3]$ - “алфавит” значений внутренней волатильности.
- Распределение Вейбулла выбрано для моделирования наблюдений, поступающих в случайные моменты времени потому, что оно хорошо приближает реальное распределение времени между сделками [18].
- $k = [1, 1.2, 1.2, 1.4]$ – “алфавит” коэффициентов формы для распределения Вейбулла.

- $\lambda = [6 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}, 5.5 \times 10^{-6}, 7 \times 10^{-6}]$ – “алфавит” коэффициентов масштаба для распределения Вейбулла.

Результаты моделирования динамики и наблюдений

Используя алгоритмы 3.1, 3.2, 3.3 и 3.4 смоделируем состояние системы(рис. 1) и наблюдения(рис. 2). Для наглядности, так же, покажем, как выглядят наблюдения за сделками в первые 30 минут (рис. 3).

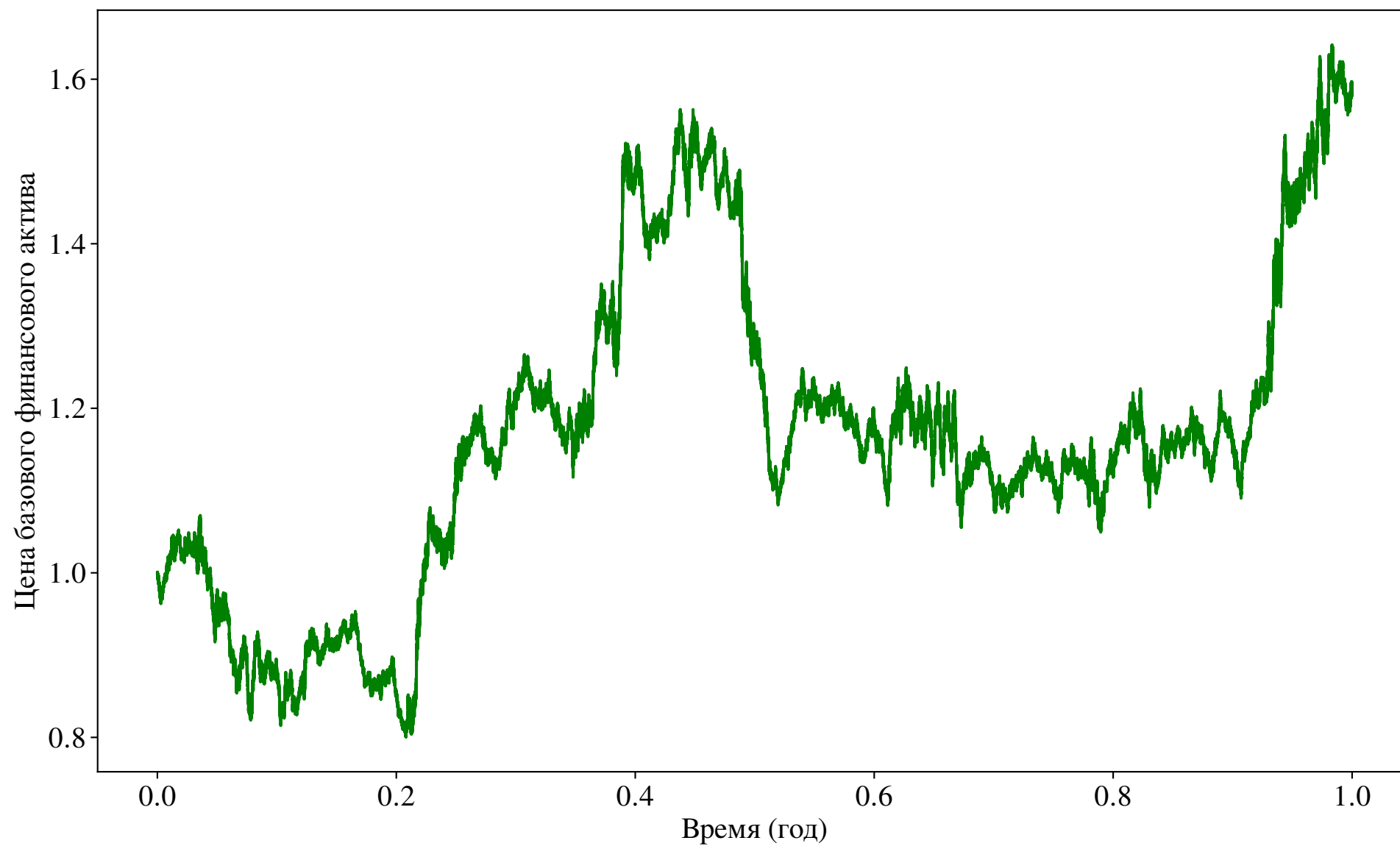


Рис. 1: Смоделированная траектория цены акции

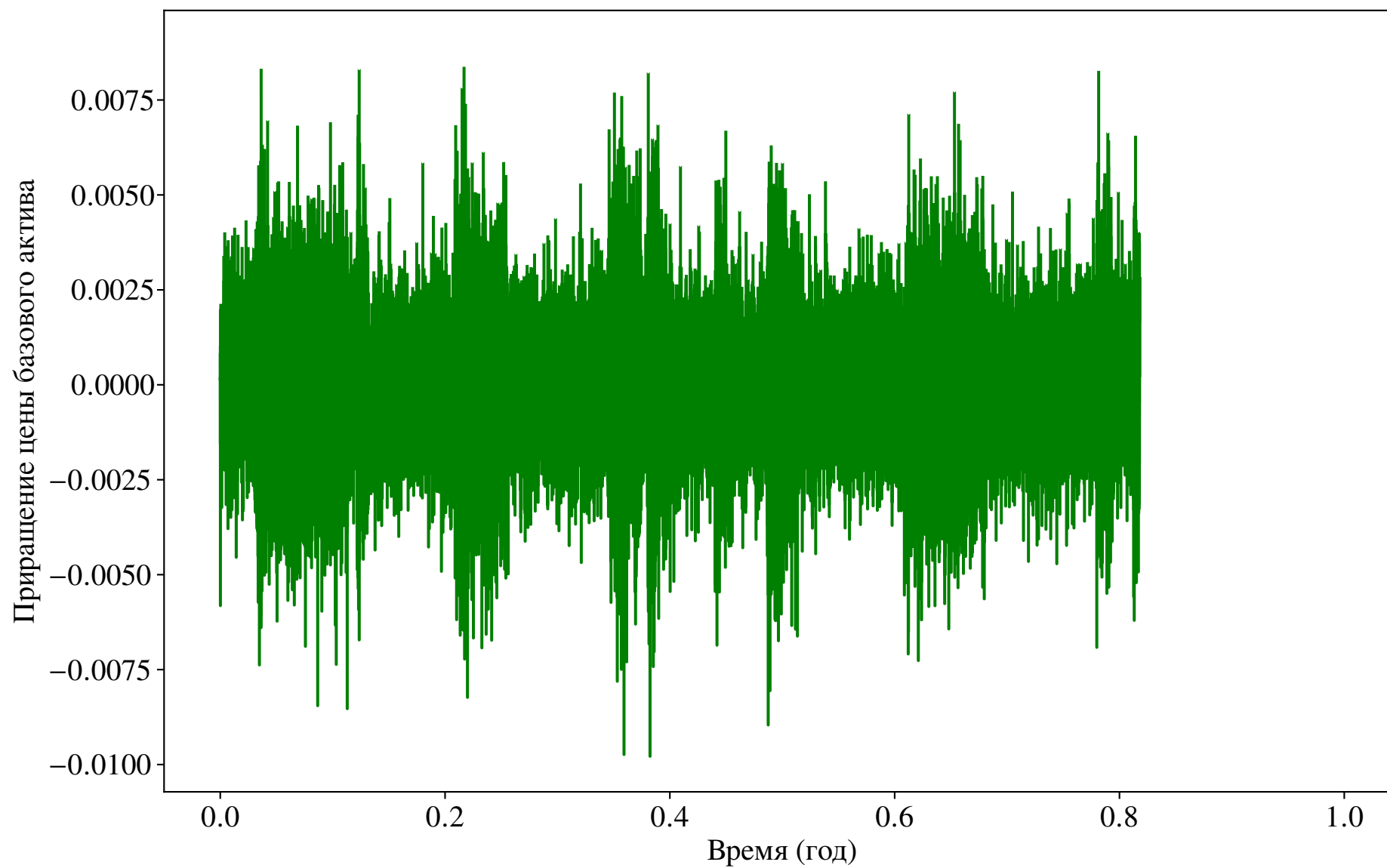


Рис. 2: Смоделированный поток цен сделок

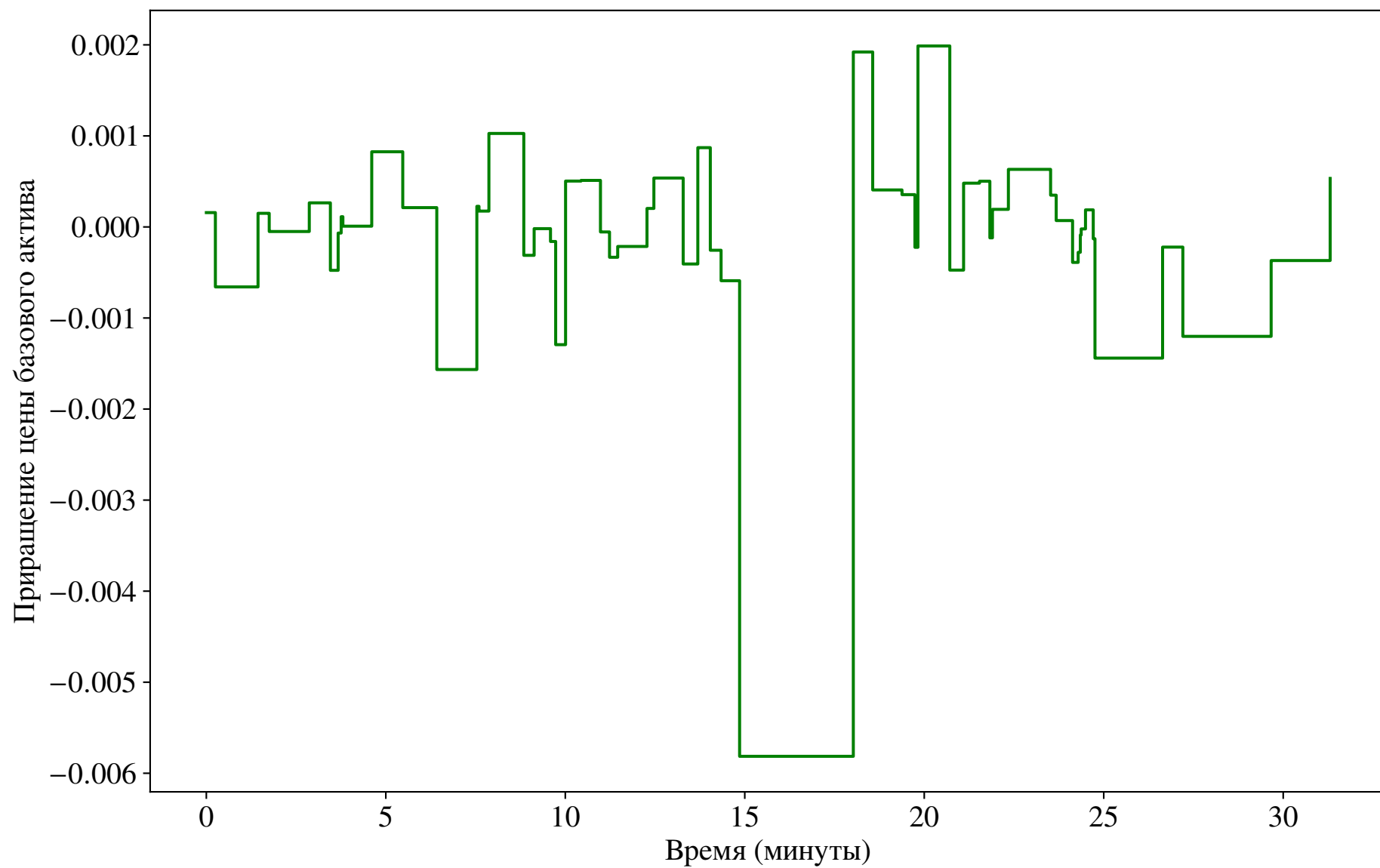


Рис. 3: Смоделированный поток цен сделок в первые 30 минут

Результаты оценивания по дискретизованным наблюдениям

Применив алгоритм фильтрации для дискретизированных наблюдений, можно получить оптимальные оценки состояния МСП, показанные на рисунке 4. Для более детального рассмотрения, вместе с результатами за весь год, приблизим на участок с высокой интенсивностью переходов, соответствующий 12.5 дням (рис. 5). На этих рисунках можем рассмотреть то, как фильтр “справляется” с различными состояниями в отдельности. Для этого, показаны условные вероятности состояний \hat{Z}_n^l , оценка и действительное значение. Здесь, в качестве оценки берется наиболее вероятное состояние, то есть: $\hat{Z}_n = \underset{l \in \{1, \dots, L\}}{\operatorname{argmax}} \hat{Z}_n^l$.

Для сравнения результатов, полезно вывести матрицу ошибок (матрицу неточностей), то есть таблицу, которая позволяет визуализировать эффективность алгоритма классификации путем сравнения прогнозируемого значения целевой переменной с ее фактическим значением. Столбцы матрицы представляют наблюдения в прогнозируемом состоянии, а строки — наблюдения в фактическом состоянии. Эту матрицу

$$\left(\frac{t_{ij}}{\sum_{i=1}^L t_{ij}} \right)_{i=1, j=1}^{L, L}, \quad (3.7)$$

где

$$t_{ij} = \delta_f \sum_{n=1}^N \mathbb{1}\{Z_n = e_i\} \mathbb{1}\{\hat{Z}_n = e_j\}, \quad (3.8)$$

можно видеть в виде таблицы 1, где пересечение i -строки и j -столбца является долей предсказания оценки j при нахождении в состоянии i от всего времени нахождения в состоянии i . Эта таблица усреднена по 1000 траекторий.

Дополнительно, в таблице 2 выведены среднеквадратические отклонения состояний S и среднеквадратические отклонения ошибок оценок S_e :

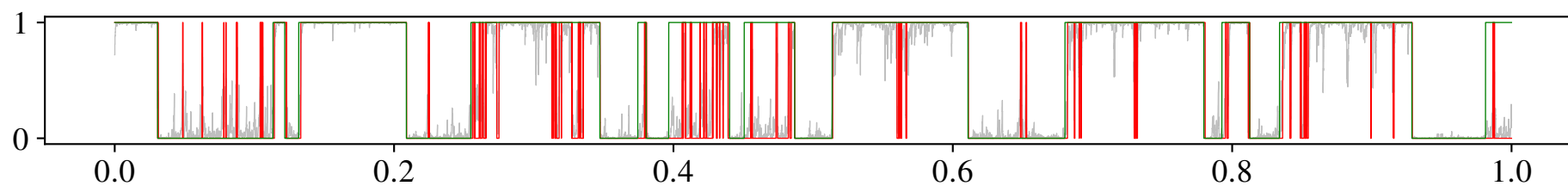
$$S = \sqrt{\frac{1}{\hat{N} * N - 1} \sum_{i=1}^{\hat{N}} \sum_{n=1}^N \hat{Z}_n^{(i)} - \hat{Z}_{cp}}, \quad (3.9)$$

$$S_e = \sqrt{\frac{1}{\hat{N} * N - 1} \sum_{i=1}^{\hat{N}} \sum_{n=1}^N \hat{\Delta}_n^{(i)} - \hat{\Delta}_{cp}},$$

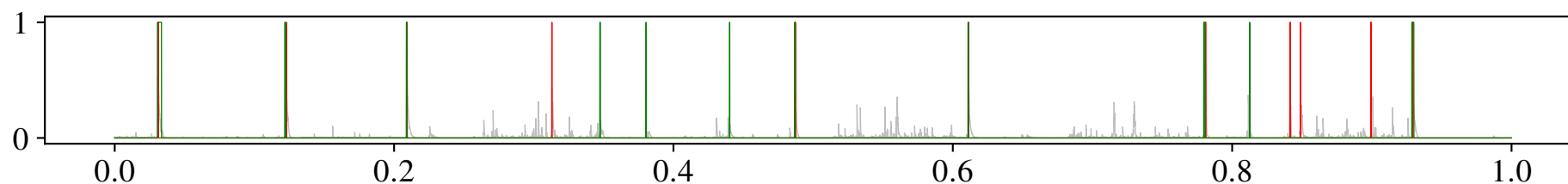
где

- $\hat{N} = 1000$ – количество траекторий,
- $\hat{Z}_{cp} = \frac{1}{\hat{N}_{*N}} \sum_{i=1}^{\hat{N}} \sum_n^N \hat{Z}_n^{(i)},$
- $\hat{\Delta}_n^{(i)} = \hat{Z}_n^{(i)} - Z_n^{(i)},$
- $\hat{\Delta}_{cp} = \frac{1}{\hat{N}_{*N}} \sum_{i=1}^{\hat{N}} \sum_n^N \hat{\Delta}_n^{(i)}.$

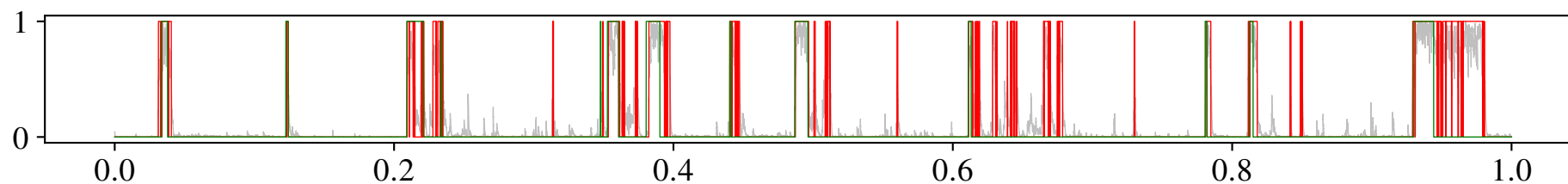
На этих же 1000 траекторий, фильтр показал среднюю точность равную 80.6%.



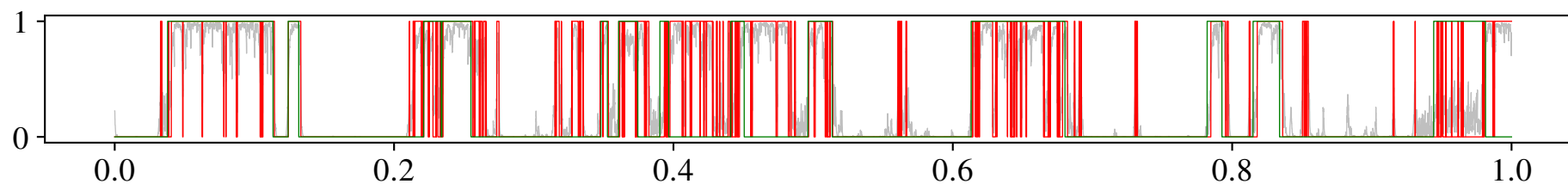
(a) 1-состояние (“Рост”)



(b) 2-состояние (“Перед паникой”)

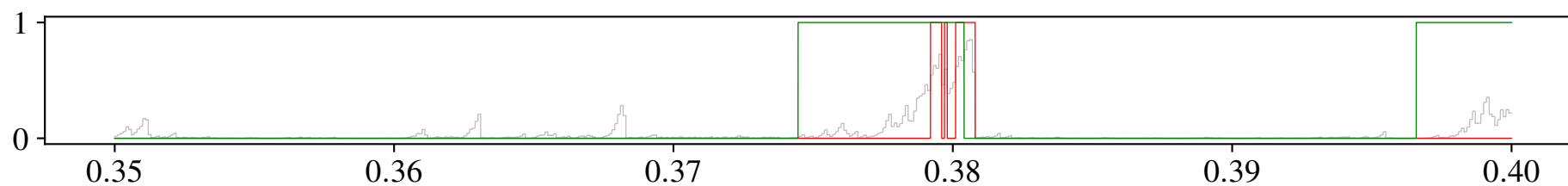


(c) 3-состояние (“Паника”)

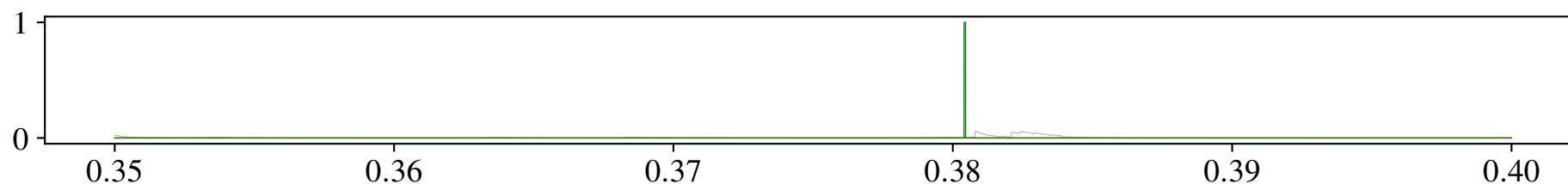


(d) 4-состояние (“Рецессия”)

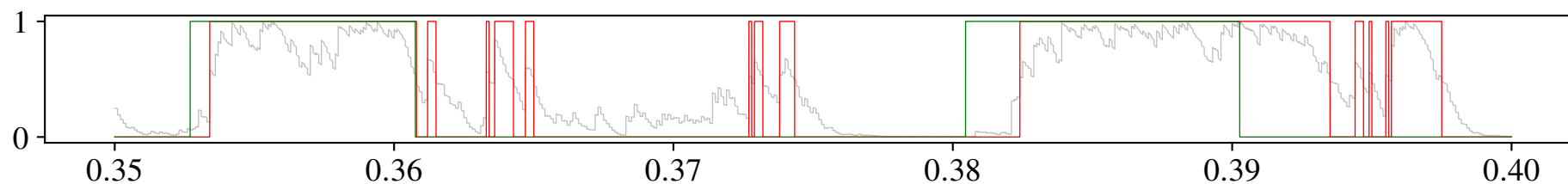
Рис. 4: Результат фильтрации по дискретизованным наблюдениям. Зеленым указано действительное значение, красным – оценка, серым – условная вероятность состояния. По оси абсцисс указано время в годах



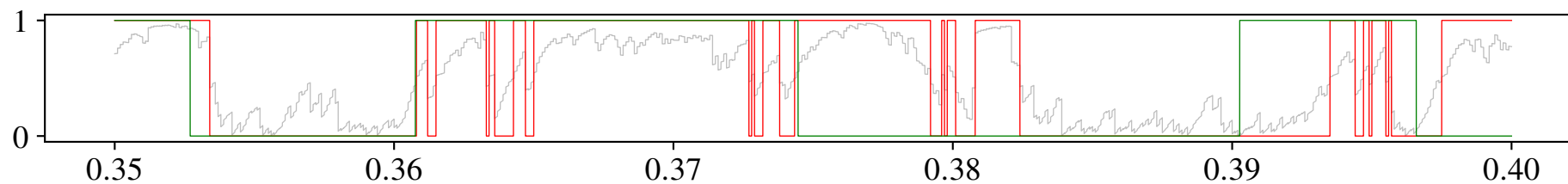
(a) 1-состояние ("Рост")



(b) 2-состояние ("Перед паникой")



(c) 3-состояние ("Паника")



(d) 4-состояние ("Рецессия")

Рис. 5: Результат фильтрации по дискретизованным наблюдениям на меньшем интервале. Зеленым указано действительное значение, красным – оценка, серым – условная вероятность состояния. По оси абсцисс указано время в годах

Таблица 1: Матрица ошибок для оценки по дискретизированным наблюдениям

		Оценка			
		1	2	3	4
Истина	1	87.97532%	0.08486%	0.48258%	11.45723%
	2	50.8857%	7.25112%	27.86252%	14.00065%
	3	12.28458%	1.48509%	55.97456%	30.25578%
	4	19.48695%	0.05343%	17.01954%	63.44008%

Таблица 2: Среднеквадратические отклонения состояний и ошибок оценок (дискретизованные наблюдения)

		СКО состояний	СКО ошибок
Состояние	1	0.44836	0.38635
	2	0.03729	0.09294
	3	0.23364	0.23394
	4	0.3808	0.42287

Результаты оценивания по наблюдениям, полученным в случайные моменты времени

Применив агрегацию результатов сделок, имевших место в случайные моменты времени и алгоритм рабостной фильтрации, описанные в разделе 3.3, мы можем оптимально оценить в каком состоянии находится система. Выведем для этих результатов графики аналогично случаю с дискретными наблюдениями:

- Оценку состояний, условную вероятность состояний $\hat{Z}_{t_j}^L$ и действительное значение можем увидеть на рисунке 6. Приближение на участок равный 12.5 дням для них выведен на рисунке 7. Здесь, в качестве оценки берем так же наиболее вероятное состояние: $\hat{X}_{t_j} = \operatorname{argmax}_{l \in \{1, \dots, L\}} \hat{Z}_{t_j}^l$.
- Матрица ошибок, посчитанная аналогично формулам 3.7 - 3.8, указана в таблице 3.
- Среднеквадратические отклонения для состояний и ошибок оценок, которые посчитаны по формулам 3.9, указаны в таблице 4.
- Средняя точность на 1000 траекторий: 97.1%.

Помимо этого, для понимания сложности оценки, так же интересно посмотреть на распределение смеси агрегированных наблюдений, поступающих в случайные моменты времени, на основе которой фильтр строил оценки. Так, показаны следующие три рисунка:

- 1) На рисунке 8 мы видим смесь гауссовских распределений:

$$f(Y) = \sum_{l=1}^L \pi_l \mathcal{N}(Y, \mu_l, \kappa_l),$$

где μ_l, κ_l аналогичны представленным в 3.5, а $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_L)$ – стационарное распределение, полученное использованием матрицы интенсивности переходов Λ . Так же, на графике показана гистограмма значений U_j , указанная в 3.6. Гистограмма построена на данных, параметры которых аналогичны указанным в 3.4, но информация смоделирована на 5 лет, то есть $T = 5$.

- 2) На рисунке 9 показана одномерная смесь гауссовских распределений для агрегированного количества сделок:

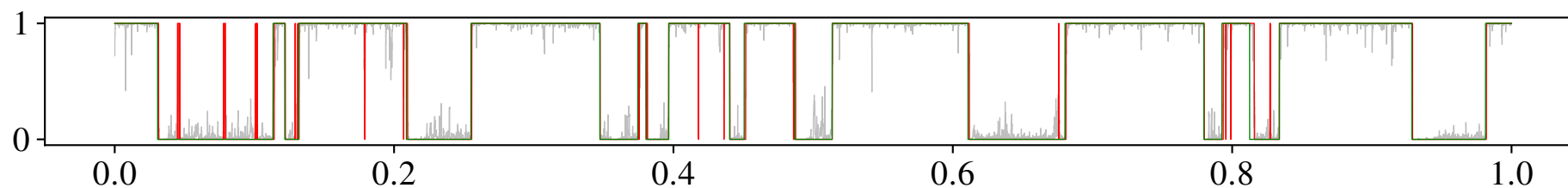
$$f(y) = \sum_{l=1}^L \pi_l \mathcal{N}\left(y, \frac{\sqrt{\Delta}}{m_l}, \frac{D_l}{(m_l)^3}\right),$$

а так же гистограмма значений $\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i:t_{j-1} < \tau_{j-1} < \tau_i} \ln \frac{S_{\tau_i}}{S_{\tau_{i-1}}}$, полученная так же на данных, смоделированных на 5 лет.

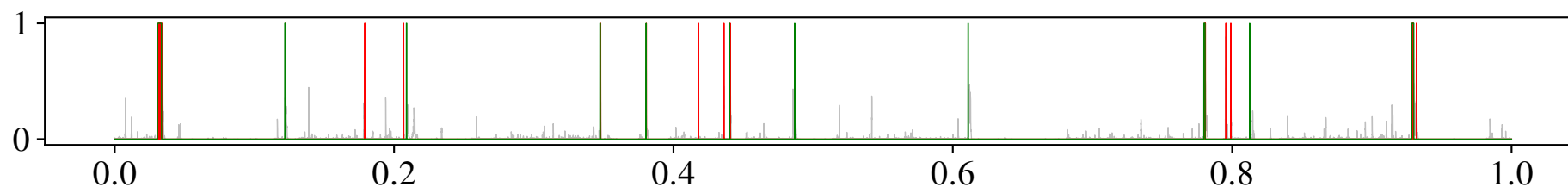
- 3) На рисунке 10 показана одномерная смесь гауссовских распределений для агрегированных приращений:

$$f(y) = \sum_{l=1}^L \pi_l \mathcal{N}\left(y, \left(a_l - \frac{\sigma_l^2}{2}\right) \sqrt{\Delta}, \sigma_l^2 m_l\right),$$

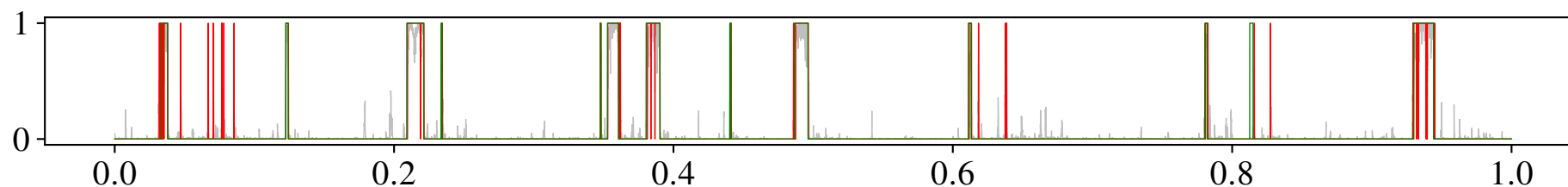
а так же гистограмма значений $\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i:t_{j-1} < \tau_{j-1} < \tau_i} \ln \left(\frac{S_{\tau_i}}{S_{\tau_{i-1}}}\right)$, полученная так же на данных, смоделированных на 5 лет.



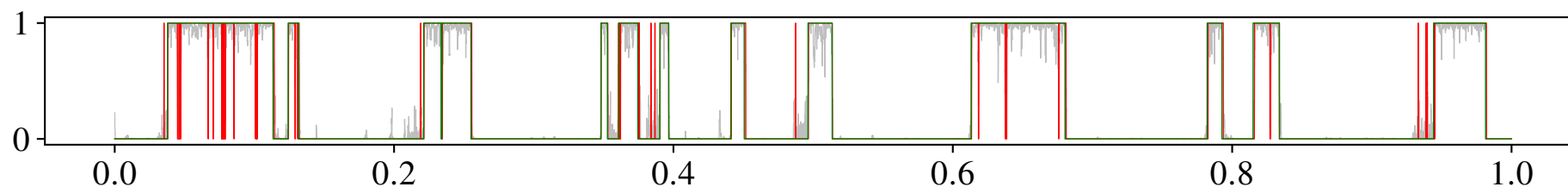
(a) 1-состояние ("Рост")



(b) 2-состояние ("Перед паникой")

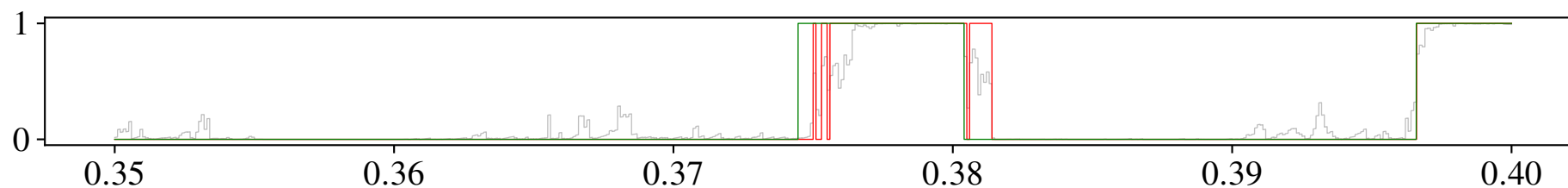


(c) 3-состояние ("Паника")

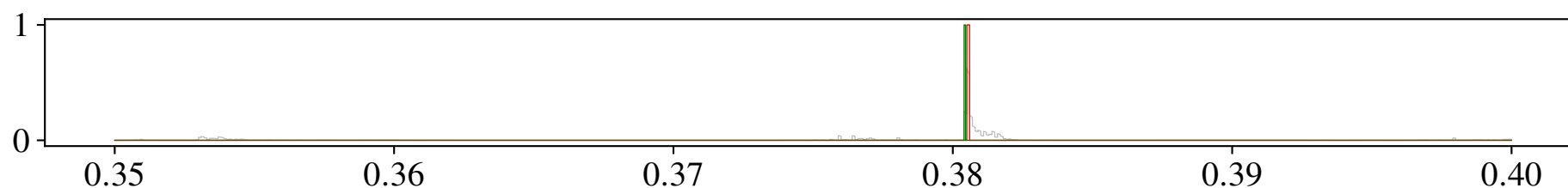


(d) 4-состояние ("Рецессия")

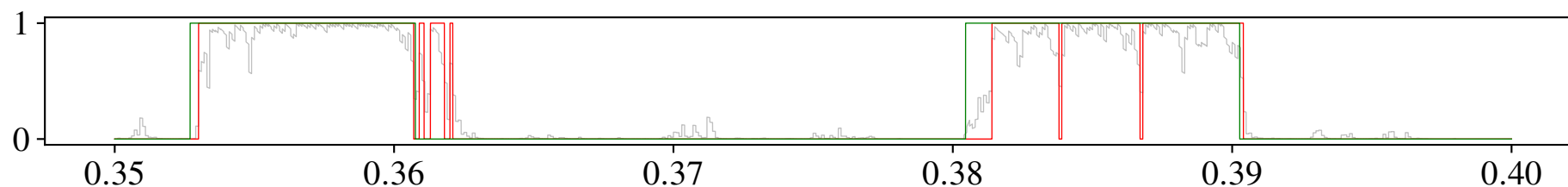
Рис. 6: Результат фильтрации по наблюдениям, поступающим в случайные моменты времени. Зеленым указано действительное значение, красным – оценка, серым – условная вероятность состояния. По оси абсцисс указано время в годах



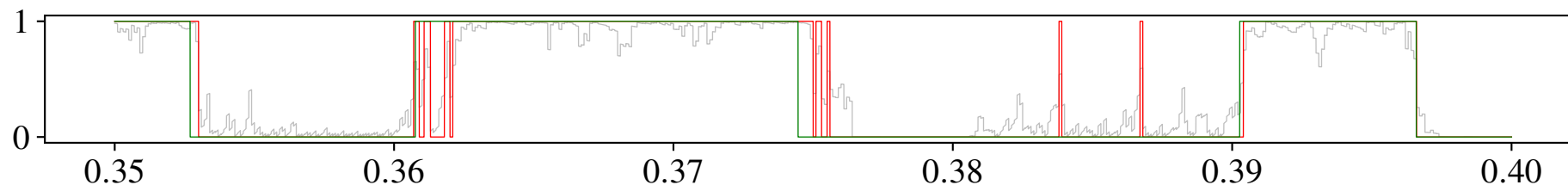
(a) 1-состояние ("Рост")



(b) 2-состояние ("Перед паникой")



(c) 3-состояние ("Паника")



(d) 4-состояние ("Рецессия")

Рис. 7: Результат фильтрации по наблюдениям, поступающим в случайные моменты времени, на меньшем интервале. Зеленым указано действительное значение, красным – оценка, серым – условная вероятность состояния. По оси абсцисс указано время в годах

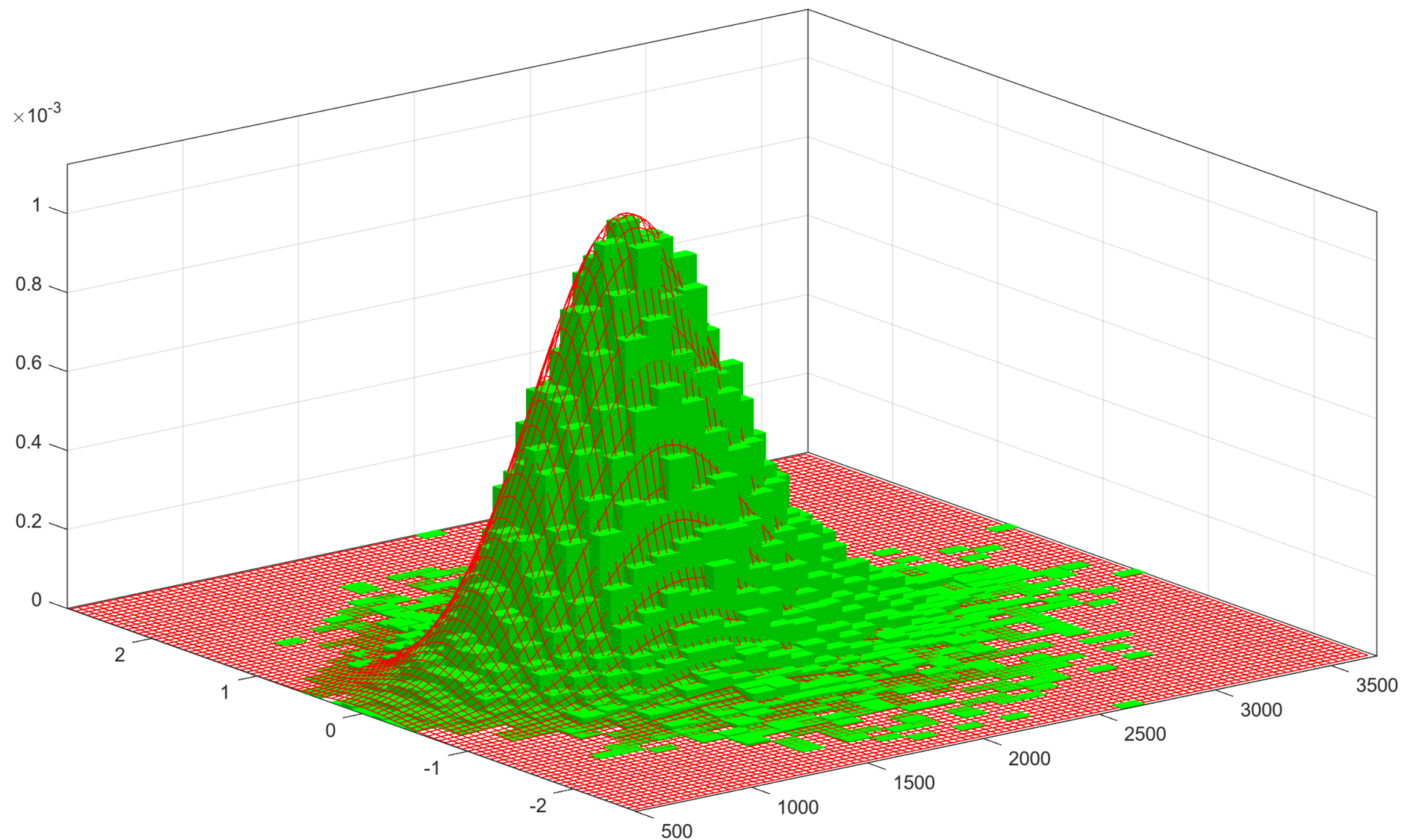


Рис. 8: Двумерная смесь гауссиан агрегированных наблюдений, поступающих в случайные моменты времени. Красным указана теоритическая смесь гауссиан, зеленым – гистограмма

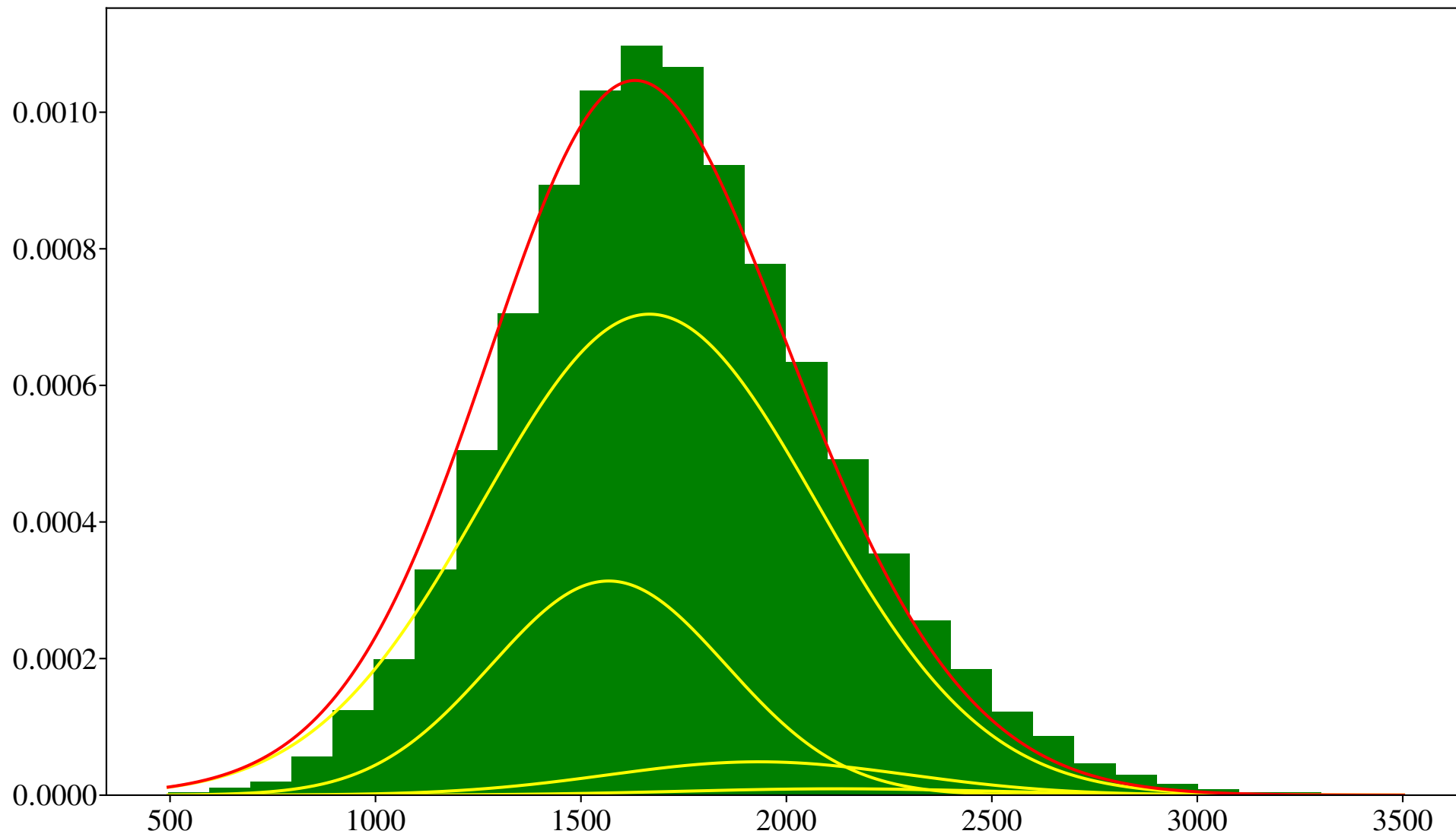


Рис. 9: Смесь гауссиан агрегированного количества сделок. Красным указана теоритическая смесь гауссиан, зеленым – гистограмма, желтым – гауссианы компонент смеси, умноженные на вероятности

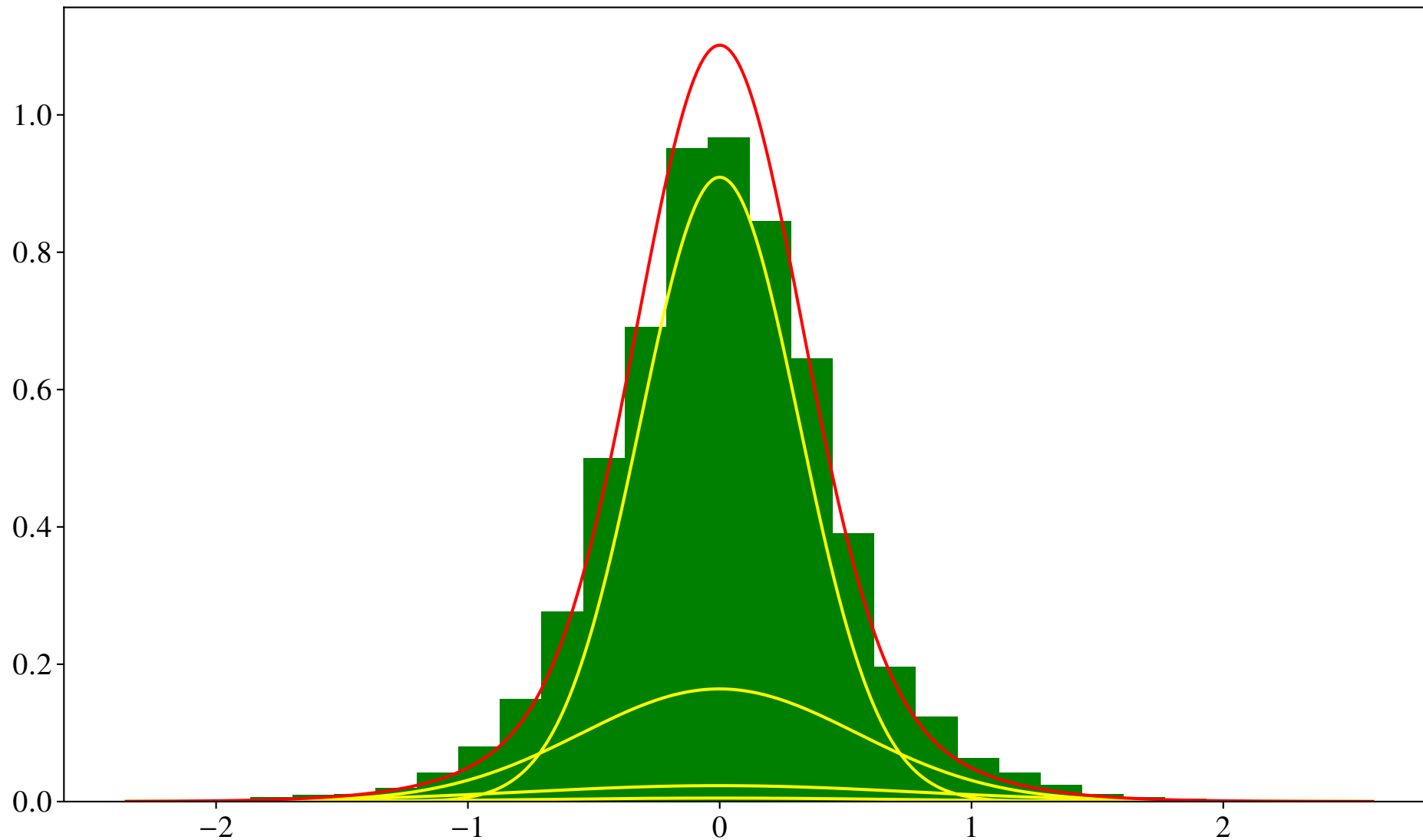


Рис. 10: Смесь гауссиан агрегированных приращений. Красным указана теоритическая смесь гауссиан, зеленым – гистограмма, желтым – гауссианы компонент смеси, умноженные на вероятности

Таблица 3: Матрица ошибок для оценки по наблюдениям в случайные моменты времени

		Оценка			
		1	2	3	4
Истина	1	98.71208%	0.1081%	0.11217%	1.06765%
	2	28.59541%	47.53211%	23.53875%	0.33373%
	3	2.1718%	5.49945%	88.18646%	4.14229%
	4	1.91466%	0.02275%	2.7887%	95.27389%

Таблица 4: Среднеквадратические отклонения состояний и ошибок оценок (наблюдения в случайные моменты времени)

		СКО состояний	СКО ошибок
Состояние	1	0.42972	0.11798
	2	0.0652	0.07788
	3	0.18306	0.10135
	4	0.38949	0.12524

4. Выводы

Основываясь на результатах численного эксперимента, можно сделать следующие выводы:

- 1) Разработанные алгоритмы фильтрации успешно справляются с определением состояния скрытой марковской цепи финансового рынка. В частности, суммируя диагональные элементы таблиц 1 и 3, можем видеть, что точность оценки составляет 80.6% по дискретизированным наблюдениям и 97.1% по наблюдениям в случайные моменты времени. Это говорит о том, что первый фильтр неправильно определяет состояние примерно в 48,5 торговых днях в год, а второй – в 7,5 днях.
- 2) Как показали результаты эксперимента, фильтрация по наблюдениям в случайные моменты времени показывает более точный результат. Это связано с тем, что не только цены сделок, но и время между сделками несут в себе статистическую информацию о скрытом состоянии рынка. Можем убедиться в этом, сравнивая рисунки 9 и 10. Действительно, количество сделок в фиксированный период времени имеет более разнообразное распределение, что позволяет фильтру лучше определять то или иное состояние.
- 3) Определение коротких состояний является особенно важным в финансовом анализе. Более того, состояние “перед паникой” (второе состояние) и “паника” (третье состояние) могут иметь особое значение. Результаты эксперимента показали, что второй фильтр лучше оценивает короткие состояния марковского скрытого процесса чем первый фильтр. Можем найти подтверждения этому в таблицах 2 и 4, по которым видно, что первый фильтр оценивает верно состояние перед паникой в 7.3% случаев, а состояние паники в 56.0% случаев. В это же время, фильтр, строящий свои оценки по наблюдениям, получаемым в случайные моменты времени верно оценивает состояния перед паникой и панику в 47.5% и 88.2% случаях соответственно. Кроме того, мы можем наглядно это увидеть, сравнивая рисунки 5с и 7с, где в самом начале первый фильтр даже не реагирует на наступление состояния “перед паникой”.

- 4) Сравнивая таблицы 2 и 4, видим, что точность фильтра, работающего на наблюдениях, поступающих в случайные моменты времени, обладает меньшим стандартным отклонением ошибок по всем компонентам из-за чего можно сделать вывод, что он является более стабильным.
- 5) Так же важно обратить внимание на то, как быстро фильтр реагирует на смену состояния системы. Так, сравнивая поведения оценок за весь период времени и на меньших интервалах, можем сделать вывод, что фильтр, оценивающий состояние по наблюдениям, поступающим в случайные моменты времени, реагирует на смену состояния быстрее. В частности, можем увидеть это сравнивая рисунки 5с и 7с, где на участке после 0.37 части года, второй фильтр гораздо быстрее обнаруживает, что система оказалась в состоянии 1 (состояние “роста”).

5. Заключение

В ходе исследования были достигнуты цели, которые ставились перед собой в разделе 1.2:

- 1) Был проведен краткий обзор существующих математических моделей финансовых рынков на основе литературы и были даны основные определения, принципы и методы, которые были использованы в настоящей работе. Обзор коснулся таких семейств моделей как диффузионные модели, модели со стохастической волатильностью, непрерывные модели со скачками и аффинные модели, использующие рыночную цену риска.
- 2) Среди приведенных моделей была выбрана модель с марковским скачкообразным процессом. Выбор был обоснован практической и теоритической успешностью применения данной модели для описания неполных финансовых рынков.
- 3) В рамках выбранной модели, сформулирована задача определения рыночной цены риска и она была сведена к задаче оптимальной фильтрации, что позволила использовать методы оптимальной фильтрации на основе разнородной статистической финансовой информации.
- 4) Были разработаны алгоритмы оптимальной фильтрации для двух типов данных: для дискретизованной цены базового финансового инструмента и для потока сделок, то есть данных поступающих в случайные моменты времени. Разработанные алгоритмы позволяют эффективно использовать поступающую информацию и оценивать состояния системы, а следовательно и рыночную цену риска в текущий момент для финансового рынка.
- 5) Для сравнения двух фильтров были проведены численные эксперименты с данными, которые были смоделированы в виде тех, что поступают от настоящего рынка. Данные эксперименты позволили сделать выводы о преимуществах и недостатках того или иного алгоритма, что позволило сделать предположения об их применимости в реальных условиях.

Как было отмечено, данные, использованные в экспериментах, могут отличаться для настоящего рынка, и следующие исследования могут быть

направлены на определение этих параметров и последующего применения разработанных методов на данных, поступающих от настоящего рынка. Более того, работа охватывает не все типы статистической финансовой информации, поступающей от рынка, и дальнейшие исследования могут быть направлены на разработку алгоритмов фильтрации при наличии данных о производных финансовых инструментах.

Таким образом, полученные результаты могут иметь практическую ценность для оценки рисков на финансовых рынках и могут быть использованы в дальнейших исследованиях в области исследования статистической финансовой информации.

Список литературы

1. *Brealey R., Myers S., Allen F.* Principles of Corporate Finance. — 7th. — New York, USA : McGraw-Hill, 2003.
2. *Piazzesi M.* Affine Term Structure Models //. — 2010.
3. *Ширяев А.* Основы стохастической финансовой математики. Том 1. — ФАЗИС, 1998.
4. *Ширяев А.* Основы стохастической финансовой математики. Том 2. — ФАЗИС, 1998.
5. *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. — 1973. — Т. 81, № 3. — С. 637—654.
6. *Heston S.* A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options // The Review of Financial Studies. — 1993. — Т. 6, № 2. — С. 327—343.
7. *Hagan P., Lesniewski A., Woodward D.* Probability Distribution in the SABR Model of Stochastic Volatility // Large Deviations and Asymptotic Methods in Finance. — Springer International Publishing, 2015. — С. 1—35.
8. *Cox J. C., Ross S. A.* The valuation of options for alternative stochastic processes // Journal of Financial Economics. — 1976. — Т. 3, № 1. — С. 145—166.
9. *Bates D. S.* Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options // The Review of Financial Studies. — 2015. — Июнь. — Т. 9, № 1. — С. 69—107.
10. *Turra M.* A Continious-Time Markov Chain Approach To Financial Modelling: Analysis And Applications // International journal of pure and applied mathematics. — 2016. — Т. 109. — С. 1029—1054.

11. *Cheridito P., Filipović D., Kimmel R. L.* Market price of risk specifications for affine models: Theory and evidence // *Journal of Financial Economics*. — 2007. — Т. 83, № 1. — С. 123—170.
12. *Elliott R., Moore J., Aggound L.* Hidden Markov Models: Estimation and Control. — Springer, 2010.
13. *Cohen S., Elliott R.* Stochastic Calculus and Applications. — Birkhauser, 2015.
14. *Kloeden P., Platten E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1992.
15. *Борисов А.* L1-оптимальная фильтрация марковских скачкообразных процессов II: численный анализ конкретных схем // *Автоматика и телемеханика*. — 2020. — Т. 12. — С. 123—125.
16. *Борисов А.* Алгоритм робастной фильтрации марковских скачкообразных процессов по высокочастотным считающим наблюдениям // *Автоматика и телемеханика*. — 2020. — Т. 4. — С. 3—20.
17. *Smith W.* Regenerative stochastic processes // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. — 1955. — Т. 232. — С. 6—31.
18. *Politi M., Scalas E.* Fitting the empirical distribution of intertrade durations // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2007. — Т. 387. — С. 2025—2034.