Мониторинг рыночной цены риска по статистической финансовой информации

Ярылгасимов С.Г.

7 июня 2023 г.

Введение

Рыночная цена риска - это мера, которая отражает связь между риском и ожидаемой доходностью финансового актива. Она показывает, какая должна быть дополнительная премия (в виде доходности) для инвесторов, чтобы они были готовы взять на себя дополнительный риск [1]. Таким образом, рыночная цена риска показывает, какая компенсация требуется для того, чтобы инвесторы были готовы взять на себя риск вместо того, чтобы вложить свои средства в более безрисковые активы.

Математическая модель финансовой системы

$$dS_t = S_t a(t, Z_t)dt + S_t \sigma(t, Z_t)dW_t, \qquad t \in (0, T], S_0 \sim \pi_0^S, \qquad (2.1)$$

- S_0 – $\mathcal{F}_0$ – измеримое начальное условие.
- $W_t \in \mathbb{R}$ – $\mathcal{F}_t$ – согласованный стандартный винеровский процесс.
- $a(\cdot, \cdot), \sigma(\cdot, \cdot)$ – функции мгновенного сноса и внутренней волатильности базового инструмента S.
- Z_t – $\mathcal{F}_t$ - согласованный ненаблюдаемый (скрытый) процесс, описывающий действие на финансовую систему неконтролируемых внешних факторов.
- π_0^S – начальное распределение.

Марковский скачкообразный процесс

$Z_t = \mathrm{col}(Z_t^1, \ldots, Z_t^l) \in \mathbb{S}^L = \{e_1, \ldots, e_l\}$ является неоднородным марковский скачкообразным процессом (МСП). Будем считать известными матрицу интенсивности переходов $\Lambda(\cdot)$ и начальное распределение π_0^Z. Дополнительно, сделаем предположение о строгой положительности всех компонент Z на $[0, T]$. Из [2] знаем, что Z_t - единственное сильное решение стохастический дифференциальной системы уравнений

$$dZ_t = \Lambda^T Z_t dt + dM_t, \qquad t \in (0, T], Z_0 \sim \pi_0^Z, \tag{2.2}$$

где $M_t = \mathrm{col}(M_t^1, \ldots, M_t^L) \in \mathbb{R}^L$ – некоторый $\mathcal{F}_t$ - согласованный мартингал.

Рыночная цена риска

Согласно обобщенной теореме Гирсанова [3] винеровский процесс W_t^Q связан с исходным W_t равенством

$$dW_t^Q = \theta_t dt + dW_t, \qquad (2.3)$$

где $\theta_t \in \mathbb{R}$ - недоступный наблюдению $\mathcal{F}_t$-согласованный процесс рыночной цены риска (Market Price of Risk, MPR).

Задача определения MPR в виде задачи оптимальной фильтрации

$$\theta_t = \sum_{l=1}^{L} Z_t^l (\sigma^l(t))^{-1} (a^l(t) - r_t), \tag{2.4}$$

Таким образом, MPR θ_t является линейным преобразованием МСП Z_t. Тем самым, определение θ_t в описанной финансовой системе сводится к решению задачи оптимальной фильтрации состояний МСП Z, описываемыми стохастической дифференциальной системой уравнений, по наблюдениям S.

Метод решения задачи оптимальной фильтрации по дискретизованным наблюдениям

1. Начальное условие:

$$\hat{Z}_0 = \pi_0.$$

2. Шаг прогноза:

$$\bar{Z}_n = P^T \hat{Z}_{n-1},$$

где $P = I + \delta_f \Lambda$, а I - единичная матрица размерности L.

3. Шаг коррекции:

$$\hat{Z}_n = \frac{1}{1\kappa_n \bar{Z}_n} \kappa_n \bar{Z}_n,$$

$$\kappa_n = \mathrm{diag}\left(\mathcal{N}(S_n - S_{n-1}, \delta_f a_1, \delta_f \sigma_1), \ldots, \mathcal{N}\left(S_n - S_{n-1}, \delta_f a_L, \delta_f \sigma_L\right)\right),$$

Численный метод решения задачи оптимальной фильтрации по наблюдениям, полученным в случайные моменты времени

На интервалах дискретизации наблюдений $[t_{j-1}, t_j], t_j = j\Delta$, поступающие в случайные моменты времени наблюдения $\{\tau_i\}, \{S_{\tau_i}\}$ агрегируются следующим образом:

$$U_j = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[\frac{\sum_{i:t_{j-1}<\tau_{i-1}<\tau_i\le t_j} 1}{\sum_{i:t_{j-1}<\tau_{i-1}<\tau_i\le t_j} \ln\left(\frac{S_{\tau_i}}{S_{\tau_{i-1}}}\right)} \right]. \tag{3.1}$$

В алгоритме фильтрации будем использовать L гауссиан $\mathcal{N}(u, \mu_l, \kappa_l)$ с векторами средних μ_l и матрицами ковариаций κ_l:

$$\mu_l = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{m_l} \\ \left(a_l - \frac{\sigma_l^2}{2}\right)\sqrt{\Delta} \end{bmatrix}, \kappa_l = \begin{bmatrix} \frac{D_l}{(m_l)^3} & 0 \\ 0 & \sigma_l^2 m_l \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Численный метод решения задачи оптимальной фильтрации по наблюдениям, полученным в случайные моменты времени

1. Начальное условие:

$$\hat{Z}_0 = \pi_0.$$

2. Шаг прогноза:

$$\bar{Z}_{t_j} = P^T \hat{Z}_{t_{j-1}},$$

где $P = I + \delta_f \Lambda$, а I - единичная матрица размерности L.

3. Шаг коррекции $\left(\hat{Z}_{t_j} = \mathrm{col}\left(\hat{Z}^1_{t_j}, \dots, \hat{Z}^L_{t_j}\right)\right)$:

$$\hat{Z}^l_{t_j} = \frac{\bar{Z}^l_{t_j} \mathcal{N}(U_j, \mu_l, \kappa_l)}{\sum_{k=1}^{L} \bar{Z}^l_{t_j} \mathcal{N}(U_j, \mu_k, \kappa_k)}, \qquad l = \overline{1, L},$$

Описание численного примера

Для проведения численного эксперимента, смоделируем данные для рынка, имеющего следующие заданные параметры:

- T = 1 – время. Выберем 1 год, что равно 250 торговым дням, каждый по 8 часов.
- Λ – матрица интенсивностей переходов.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -12.5 & 12.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1000 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & -250 & 250 \\ 40 & 0 & 10 & -50 \end{bmatrix}$$

Будем иметь в виду 4 состояния рынка: рост, состояние перед паникой, паника, рецессия. Средние продолжительности: рост - 20 дней, перед паникой - 2 часа, паника - 1 день, рецессия - 5 дней.

Описание численного примера

- $a = [0.07, 0.03, 0.02, 0.025]$ - “алфавит” значений мгновенного сноса.
- $\sigma = [0.1, 0.5, 0.6, 0.3]$ - “алфавит” значений внутренней волатильности.
- Распределение Вейбулла выбрано для моделирования наблюдений, поступающих в случайные моменты времени потому, что оно хорошо приближает реальное распределение времени между сделками [4].
- $k = [1, 1.2, 1.2, 1.4]$ – “алфавит” коэффициентов формы для распределения Вейбулла.
- $\lambda = [6 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}, 5.5 \times 10^{-6}, 7 \times 10^{-6}]$ – “алфавит” коэффициентов масштаба для распределения Вейбулла.

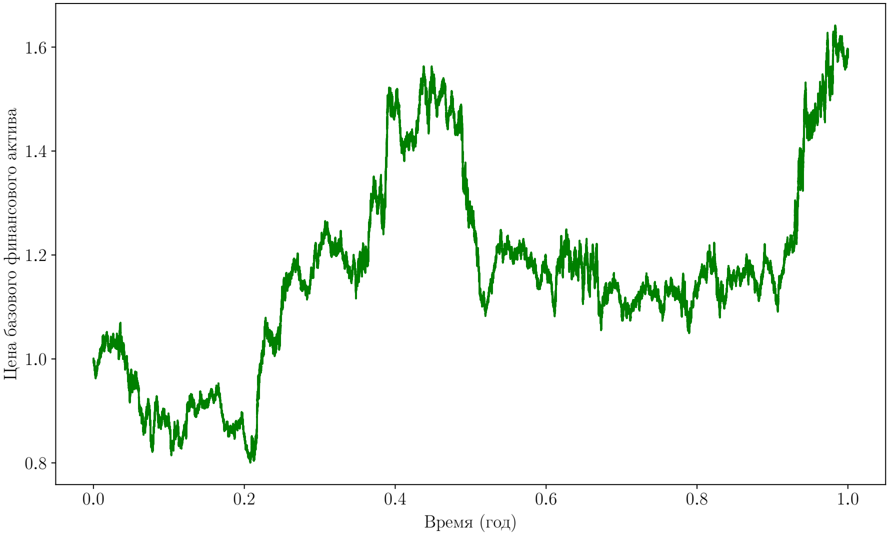

Рис.: Смоделированная траектория цены акции

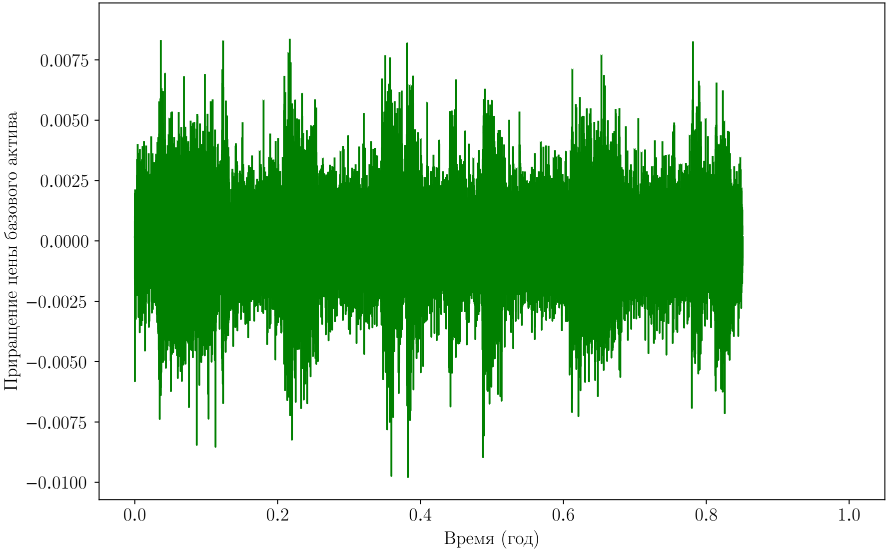

Рис.: Смоделированный поток цен сделок

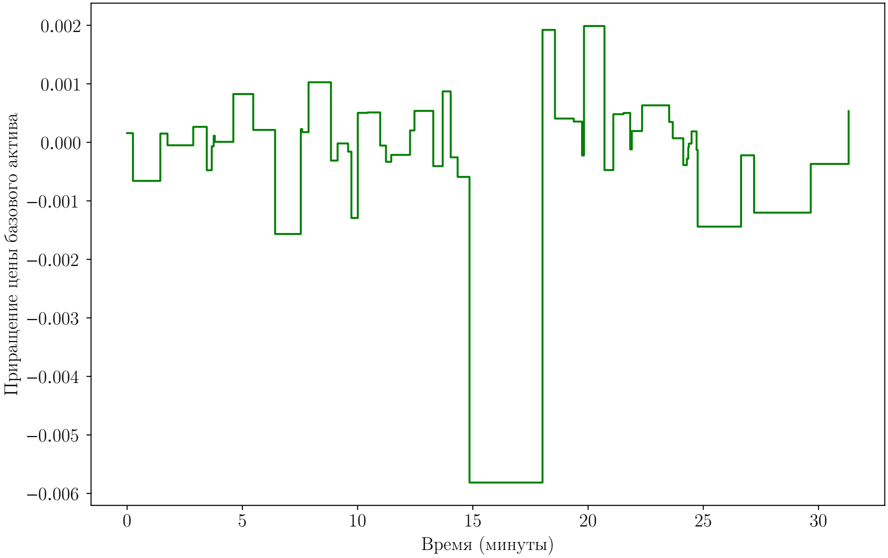

Рис.: Смоделированный поток цен сделок в первые 30 минут

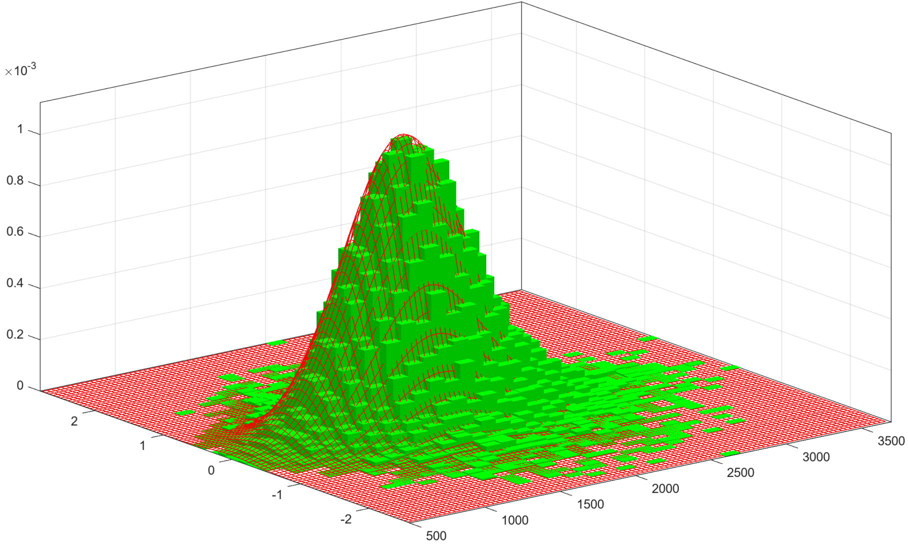

Рис.: Двумерная смесь гауссиан агрегированных наблюдений, поступающих в случайные моменты времени. Красным указана теоритическая смесь гауссиан, зеленым – гистограмма

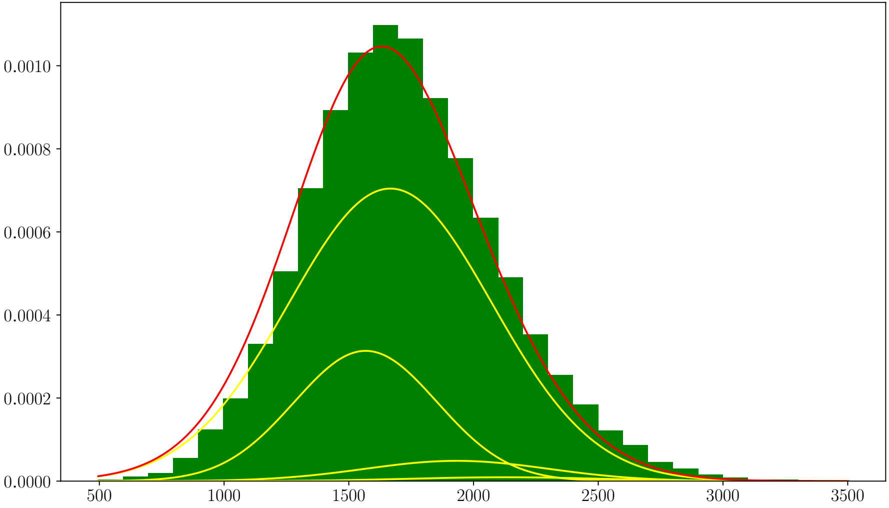

Рис.: Смесь гауссиан агрегированного количества сделок. Красным указана теоритическая смесь гауссиан, зеленым – гистограмма, желтым – гауссианы компонент смеси, умноженные на вероятности

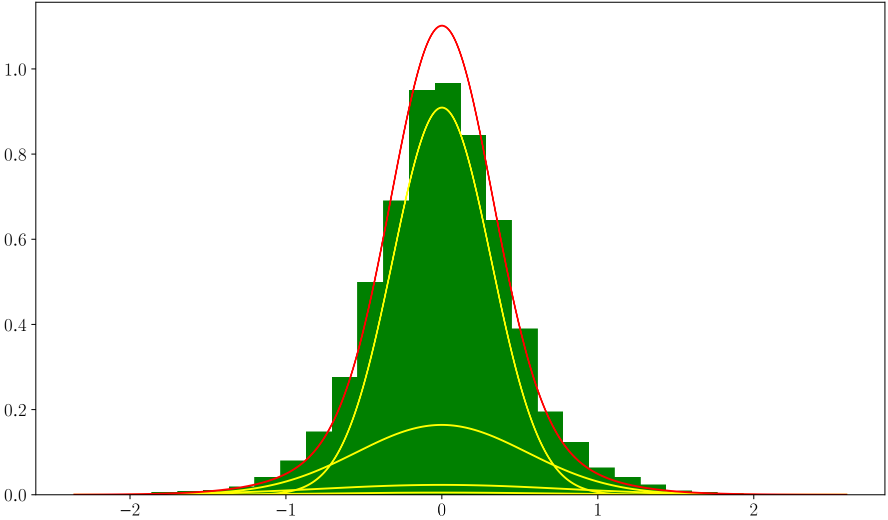

Рис.: Смесь гауссиан агрегированных приращений. Красным указана теоритическая смесь гауссиан, зеленым – гистограмма, желтым – гауссианы компонент смеси, умноженные на вероятности

Сравнение точностей

Истина \ Оценка	1	2	3	4
1	87.98%	0.08%	0.48%	11.5%
2	50.89%	7.25%	27.86%	14.00%
3	12.28%	1.49%	55.97%	30.26%
4	19.49%	0.05%	17.02%	63.44%

Истина \ Оценка	1	2	3	4
1	98.71%	0.11%	0.11%	1.07%
2	28.60%	47.53%	23.54%	0.33%
3	2.17%	5.50%	88.19%	4.14%
4	1.91%	0.02%	2.79%	95.27%

Сравнение результатов фильтрации

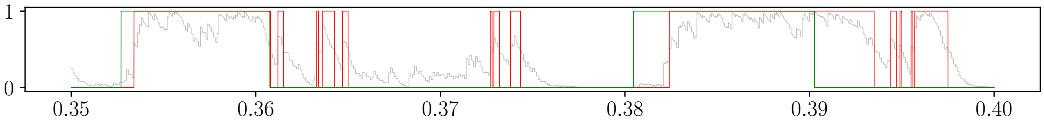

Рис.: Фильтрация 3-состояния ("паника") по дискретизованным наблюдениям

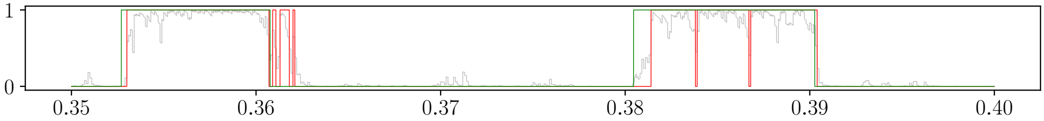

Рис.: Фильтрация 3-состояния ("паника") по наблюдениям, поступающим в случайные моменты времени

Заключение

- Поставленные цели и результаты.
- Дальнейшие направления исследования.
- Практическая ценность.

Список литературы

- Piazzesi M. — Affine Term Structure Models. — //. — 2010.
- Elliott R., Moore J., Aggound L. — Hidden Markov Models: Estimation and Control. — Springer, 2010.
- Cohen S., Elliott R. — Stochastic Calculus and Applications. — Birkhauser, 2015.
- Politi M., Scalas E. — Fitting the empirical distribution of intertrade durations. — // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2007. — T. 387. — C. 2025—2034.