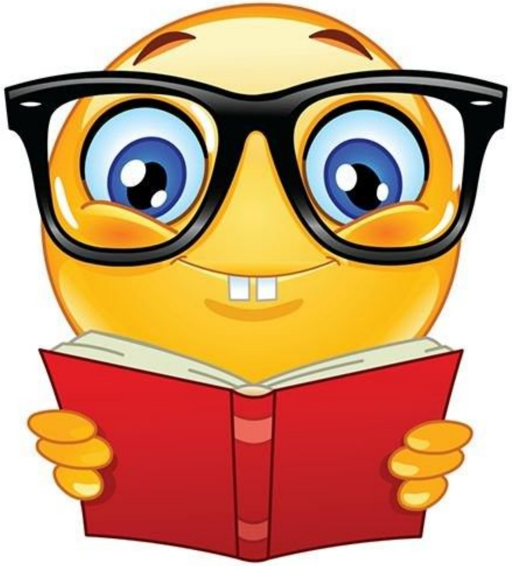
Matemáticas Discretas

Principios fundamentales de conteo

Alejandra Torres Manotas

Fundación Universitaria Konrad Lorenz



Parte I.

Teoría de la combinatoria.

Principio de la suma.

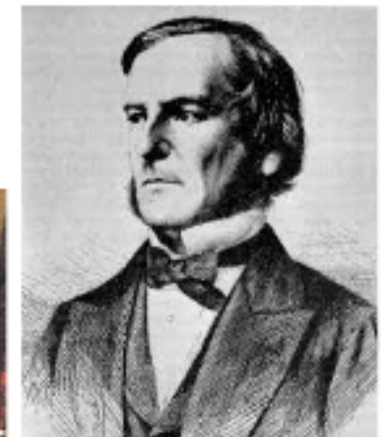
El objetivo es contar todos los modos posibles en que un número dado de objetos puede mezclarse, de manera que estemos seguros que no hemos omitido ninguna de las posibilidades, o considerado posibilidades de más.

Blaise Pascal
(1623-1662)

Fermat
(1601-1665)

Leibniz
(1646-1716)

Euler (1707-1786)



George Boole
(1815-1864)

Algunos personajes en el nacimiento de la Teoría de la combinatoria.

Ejemplo 1: Determinar la cantidad de enteros entre 1 y 50 que son multiplos de 7 o multiplos de 11.

Unión

Veamos primero cuales son los conjuntos principales:

$|M_7| = 7$

$$M_7 = \{x \in \mathbf{Z} : x = 7y, y \in \mathbf{Z}\} = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\},$$

$$M_{11} = \{x \in \mathbf{Z} : x = 11y, y \in \mathbf{Z}\} = \{11, 22, 33, 44\}. \quad |M_{11}| = 4$$

Entonces, cuánto es $|M_7 \cup M_{11}|$. $= |M_7| + |M_{11}| - |\underbrace{M_7 \cap M_{11}}_{=0}|$

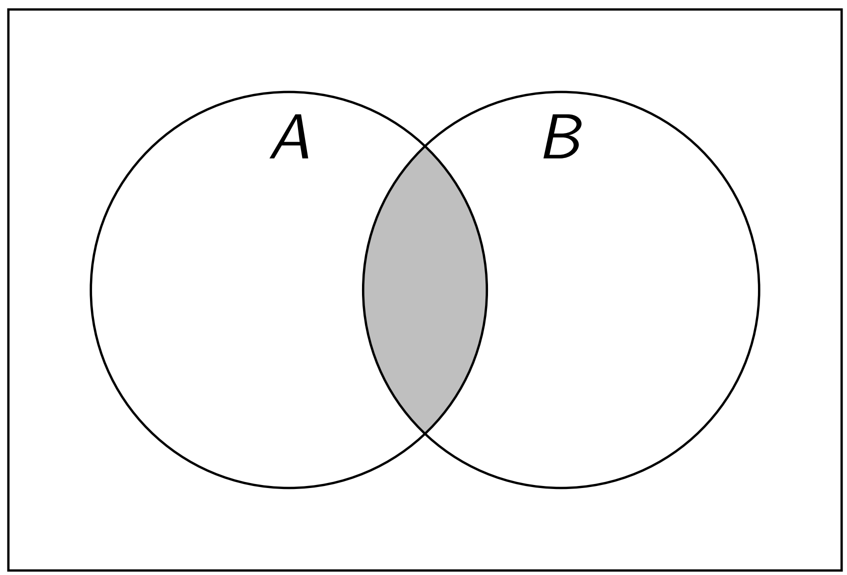
$\underset{11}{\shortparallel}$

$\{7, 14, 11, 21, 22, 28, 33, 35, 42, 44, 49\}$

Cardinal de la unión de dos conjuntos

Sean A y B conjuntos. El cardinal de la unión de A y B se define como:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



¿Qué sucede si A y B son disjuntos? $|A \cup B| = |A| + |B|$

PRIMERA FORMALIZACIÓN DEL PRINCIPIO DE LA SUMA.

Principio de la suma:

Sean A_1, A_2 y A_3 conjuntos tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_3 \cap A_2 = \emptyset$ y $A_1 \cap A_3 = \emptyset$, entonces el cardinal de la unión será:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|.$$

Usualmente usamos este principio cuando queremos resolver problemas en combinatoria dividiendo el resultado en varios resultados más pequeños y disjuntos, con el objeto de analizar cada uno de ellos por separado.

Divide y vencerás.

Ejemplo 2: Un jugador de atetísmos dijo, que los dos números (dígitos) de su camisa cumplen que el primero es impar y el segundo es menor que el primero, tal que el número completo es divisible entre 3.

¿Cuántos números con estas características hay?

$|M_1 \cup M_3 \cup M_5 \cup M_7 \cup M_9| = 8$

Primero definamos la partición dada por los posibles valores para el primer dígito en la camiseta. El conjunto de dígitos impares es $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

La partición estará dada por 5 conjuntos cada uno con la caracteristicas que dado $x \in D$, M_x será el conjunto de números de dos cifras n tal que el segundo dígito es menor que x, y $n \equiv 0 (mod 3)$.

$n = \boxed{\quad}\boxed{\quad}$

$|D| = 5$

Dígitos
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

∗ $n \div 3$ Residuo es 0. $(n \equiv r \mod 3)$

$$M_1 = \{ \boxed{1 \mid x} : x < 1 \text{ y } 1x \,\%\, 3 = 0 \} = \emptyset \qquad |M_1| = 0$$

$$M_3 = \{ \boxed{3 \mid x} : x < 3 \text{ y } 3x \,\%\, 3 = 0 \} = \{30\} \qquad |M_3| = 1$$

$$M_5 = \{ \boxed{5 \mid x} : x < 3 \text{ y } 5x \,\%\, 3 = 0 \} = \{54, 51\} \qquad |M_5| = 2.$$

$$M_7 = \{ \boxed{7 \mid x} : x < 7 \text{ y } 7x \,\%\, 3 = 0 \} = \{75, 72\}. \qquad |M_7| = 2$$

$$M_9 = \{ \boxed{9 \mid x} : x < 9 \text{ y } 9x \,\%\, 3 = 0 \} = \{96, 93, 90\} \qquad |M_9| = 3$$

Principio de la suma o principio del conteo disjunto

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos disjuntos dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Nota: Tendremos $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ son las particiones de X.

Dos formas de interpretar los problemas relacionados con el principio de la suma: S

Espacio muestral

- Sean $\boxed{E_1, E_2, \ldots, E_n}$ **eventos que no suceden de forma simultánea**. Cada evento E_i ocurre de e_i formas diferentes. Entonces

$$E_1 \text{ o } E_2 \text{ o } \ldots \text{ o } E_n,$$

  puede ocurrir de $e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n$ formas diferentes.

- **Seleccionar objetos, cada uno de una caja distinta**. Si cada selección tiene una ocurrencia e_i, entonces elegir un objeto de la caja uno o de la caja tres o de alguna de las otras cajas se puede hacer de $e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n$ formas diferentes.

Probabilidad que ocurra E_5 es $\dfrac{e_5}{|S|}$

Parte II.

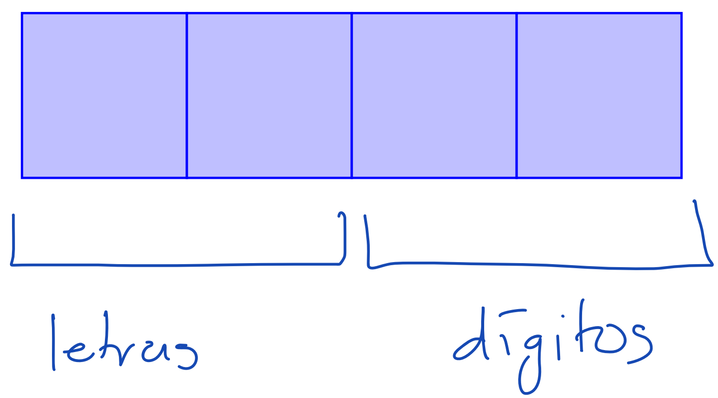
Principio del producto.

Problemas mixtos.

Ejemplo 3: Una empresa de fabricación de placas de autos quiere saber cuántas posibles placas puede realizar con dos letras seguidas de 2 dígitos, para cada uno de los siguientes casos:

Caso 1: Las letras sea vocales, y solo tenga dígitos pares.
Caso 2: Que se repitan las letras y los dígitos.
Caso 3: Que no se repitan las letras ni los dígitos.

$|L| = 26$



$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$|D| = 10$

Caso 3:

26	25	10	9

Caso 2:

26	1	10	1

260 posibles placas.

Caso 1:

5	5	5	5

$V \subseteq L$

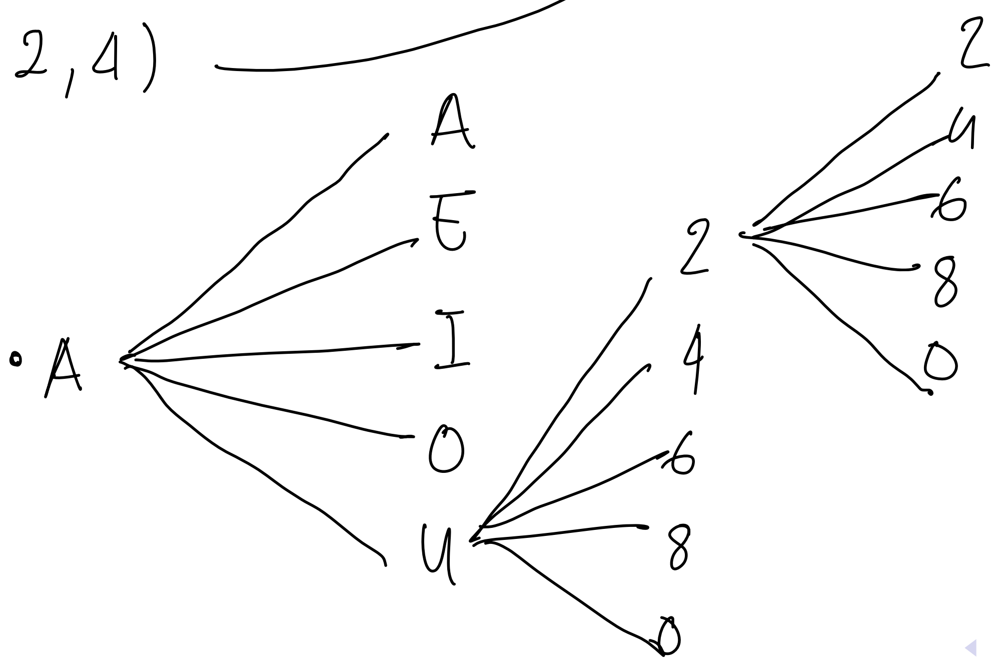
$|V| = 5$

$P \subseteq D$

$|P| = 5$

$|V \times V \times P \times P| = 5^4 = 625$

$(A, U, 2, 4)$



Primera formalización:

Principio del producto

Sean A_1 y A_2 conjuntos finitos. Entonces $|A_1 \times A_2| = |A_1||A_2|$.

Utilice el principio de la multiplicación cuando tenga un proceso paso por paso para construir una actividad

‘

Demostración:

Hipótesis: Sea C una actividad cualquiera dividida en dos etapas, la primera

$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3, .., a_n\},$$

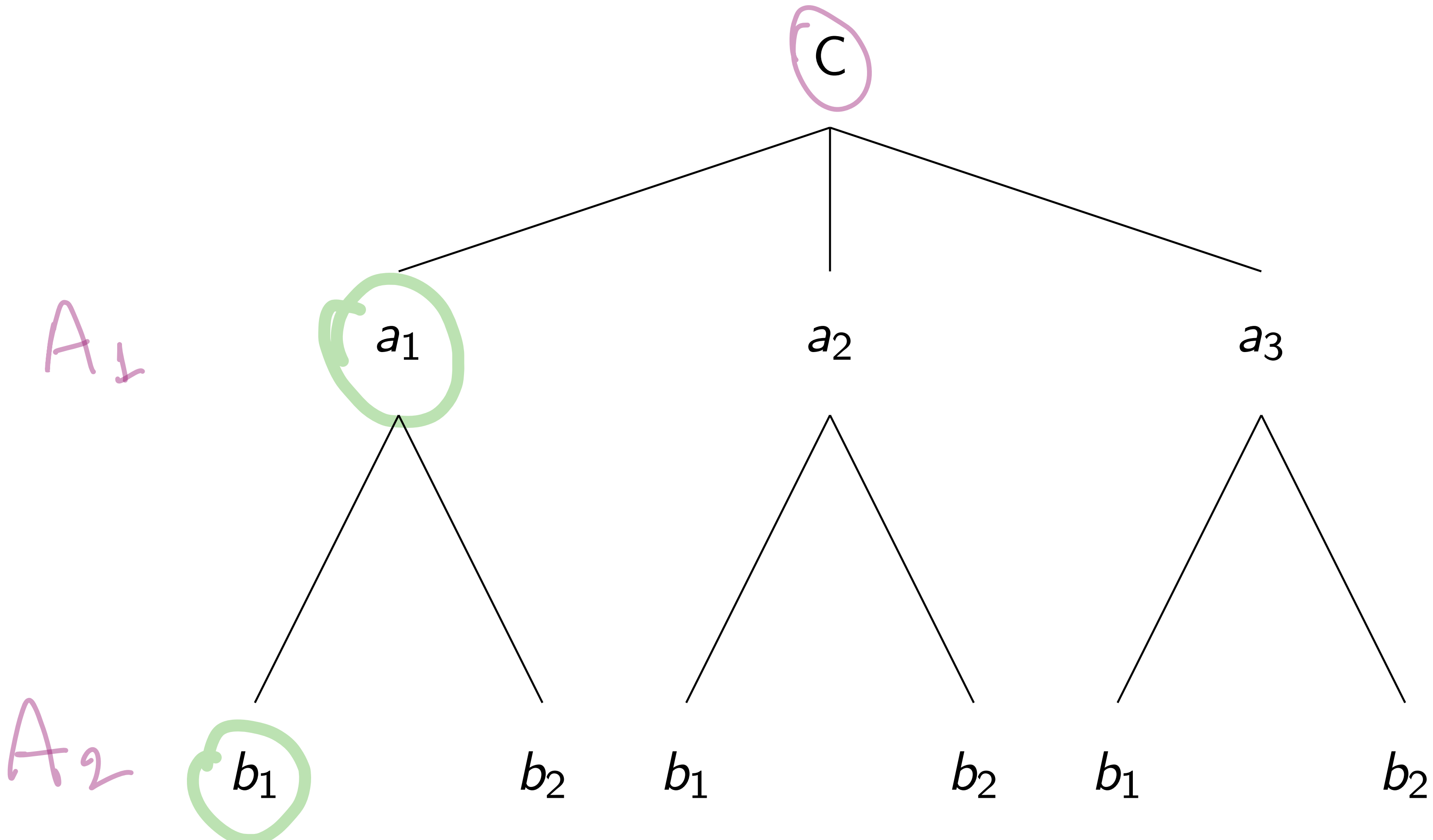
y la segunda

$$A_2 = \{b_1, b_2, ..., b_m\},$$

tales que estas etapas tienen $|A_1| = n$ y $|A_2| = m$, maneras de realizarse, respectivamente.

Tesis: Entonces la actividad C tiene $|A_1 \times A_2| = nm$ maneras de realizarse.

Representación en **diagrama de árbol** para $n = 3$ y $m = 2$. Por lo tanto las etapas en las que se puede hacer la actividad A_1 son $\{a_1, a_2, a_3\}$ y la actividad A_2 son $\{b_1, b_2\}$.



$(a_1, b_1) \in C$

¿Cuáles son todas esas maneras de realizar la actividad para el ejemplo?

$$\{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$$

¿En otras palabras esto es?

$$A_1 \times A_2 = (\{a_1\} \times A_2) \cup (\{a_2\} \times A_2) \cup (\{a_3\} \times A_2)$$

En general tendremos para dos conjuntos lo siguiente:

$$A_1 \times A_2 = \bigcup_{i=1}^{3} (\{a_i\} \times A_2) \Rightarrow |A_1 \times A_2| = \sum_{i=1}^{3} \boxed{\overbrace{|(\{a_i\} \times A_2)|}^{\text{2 elemento}}}. = 2 \cdot 3 = 6$$

En general tenemos que si $|A_1| = n$ **y** $|A_2| = m$ **entonces**

$$|A_1 \times A_2| = \sum_{i=1}^{n} \boxed{\overbrace{|(\{a_i\} \times A_2)|}^{\text{m elementos}}} = \sum_{i=1}^{n} (m) = nm. = |A_1||A_2|$$

Principio del producto

Sean $A_1, A_2, ..., A_k$ conjuntos finitos. Entonces

$$\left|\prod_{i=1}^{k} A_i\right| = |A_1 \times A_2 \times ... \times A_k| = |A_1|\,|A_2| ... |A_k| = \prod_{i=1}^{k} |A_i| .$$

Productoria.

Dos formas de interpretar los problemas relacionados con el principio de la suma:

- Si los eventos $E_1, E_2, ..., E_n$ suceden de $e_1, e_2, e_3, .., e_n$ formas, respectivamente. Entonces **la secuencia de eventos**, primero E_1 luego E_2, y de esa forma hasta llegar a E_n puede ocurrir de $e_1 * e_2 * ... * e_n$ formas diferentes.
- Si un objeto o_1 puede ser seleccionado de ~~de~~ e_1 formas diferentes, un segundo objeto o_2 puede ser seleccionado de e_2 formas diferentes, y de esta forma hasta elegir el n-écimo objeto o_n de e_n formas diferentes. Entonces **la selección de objetos en un orden establecido** $(o_1, o_2, ..., o_n)$ puede realizarse de $e_1 * e_2 * ... * e_n$ formas diferentes.