Problemas de repaso. Conjuntos.

Alejandra Torres Manotas

3 de marzo de 2021

Representación de conjuntos

Punto 1: Escriba los siguiente conjuntos por extensión:

- El conjunto de las vocales.
- $\{x \in \mathbb{N} : 10 \leq x \leq 20$ y x es divisible por $3\}$.
- El conjunto de todos los números naturales que dejan un residuo de 1 al dividir por 5.

Punto 2: Escriba los siguientes conjuntos por comprensión:

- $\{4, 8, 12, 16, 20\}$,
- $\{000, 001, 101, 011, 100, 101, 110, 111\}$,
- $\{1, 4, 9, 16, ...\}$.

Punto 1: Sea $A = \{1, \{1\}, \{2\}, 3\}$ un conjunto. Determine cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera y cuál es falsa. Justifique su respuesta.

- $1 \in A$,
- $\{3\} \in A$,
- $\{1\} \subset A$,
- $\{3\} \subset A$,
- $\{\{1\}\} \subset A$,
- $\emptyset \subset A$.

Operaciones de conjuntos

Punto 1: Establezca el universo como $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Sean $A = \{1, 4, 7, 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 4, 6, 8\}$ conjuntos. Liste los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

- $A \cup B$,
- $A \cap B$,
- $\overline{A}$,
- $B \cap \emptyset$,
- $B \cap U$,
- $\overline{A \cap B} \cup C$,
- $A \cap \overline{B}$.

Punto 2: Pruebe las siguientes igualdades

- Ley asociativa:
    - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
    - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- Ley distributiva:
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Ley de acotación: Sea U el conjunto universal.
    - $A \cup U = U$,
    - $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- Ley de involución: $\overline{\overline{A}} = A$.

Problema 1:
En una biblioteca pública se hizo una encuesta a chicos de colegio, que iban a una visita guiada, por sus preferencias en literatura. Se identificó que los tres géneros principales en la encuesta fueron: **“novelas de ficción”**, **“novelas de aventura”** y **“novelas de misterio”.**
Estos son los resultados de la encuesta: 29 de los chicos dijeron que preferían las novelas de ficción, 14 que preferían las novelas de aventura y 17 que preferían las novelas de misterio. Además, la cantidad de chicos que prefieren únicamente las novelas de misterio es 5 veces el número de chicos que prefieren solamente las novelas de aventura y las novelas de misterio. Y el número de chicos que prefieren únicamente las novelas de aventura es 4 veces el número de personas que prefieren solamente las novelas de aventura y las novelas de misterio.

También, hay 20 chicos que prefieren únicamente las novelas de ficción. Y los chicos que prefieren un genero distinto a los destacados aquí es el mismo que el número de chicos que tienen preferencia por dos géneros literarios. Finalmente, se encontró que entre los chicos encuestados no había quienes prefirieran los tres géneros literarios.

a. ¿Cuál es el total de chicos encuestados?
b. ¿Cuántos chicos prefieren solo dos de los tres géneros literarios o ninguno de los géneros destacados?
c. ¿Cuántos chicos prefieren las novelas de aventura, pero no las novelas de ficción o las novelas misterio?
d. ¿Cuántos chicos prefieren solo dos de los géneros destacados en la encuesta?
e. ¿Cuántos chicos prefieren las novelas de ficción y las novelas de misterio, o las novelas de aventura y las novelas de misterio?

Problema 2:

En una empresa se estudiaron las inversiones hechas durante el año 2020. Las inversiones de ese año fueron hechas en los proyectos **A, B** y **C** (se denominan de esta forma para no poner en evidencia a los socios inversionistas). Dado que algunas actividades realizadas en los proyectos tenían fines en común existen montos económicos compartidos entre las tres inversiones.

Los resultados del estudio fueron los siguientes: El total de dinero dispuesto por la empresa para las inversiones de ese año fue de 53 millones. El total de dinero invertido en el proyecto B son 33 millones, y la cantidad de dinero invertida para actividades realizadas solo por dos proyectos al tiempo es 36 millones. Además, la cantidad invertida en las actividades realizadas por los tres proyectos corresponde a la mitad de la cantidad invertida solo en actividades realizadas en el proyecto A.

También, tres veces el dinero invertido para las actividades solo del proyecto C correspondes a las actividades realizadas únicamente por los proyectos A y B, y el dinero usado para las actividades realizadas solo por los proyectos B y C es el doble del dinero usado para las actividades realizadas únicamente por los proyectos A y C. Finalmente, el proyecto B no usó dinero para actividades realizadas unicamente por el. Para terminar es importante aclarar que el dinero dispuesto paras las inversiones fue usado en su totalidad.

a. ¿Cuánta fue la cantidad de dinero invertida en actividades realizadas por los tres proyectos al tiempo?
b. ¿Cuánto dinero no fue usado?
c. ¿Cuánto es el total de la inversión para los tres proyectos?
d. ¿Cuánta es la inversión total del proyecto C?
e. ¿Cuánta es la inversión total del proyecto B?

Producto cartesiano

Punto 1: Sea $X = \{1, 2\}$ y $Y = \{a, b, c\}$. Liste los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

a. $X \times Y$,

b. $Y \times X$,

c. $X \times X$,

d. $Y \times Y$,

Punto 2: En cada caso diga si la aformación es verdadera, pruebela; o de otra manera, dé un contraejemplo. Sean X, Y, Z subconjuntos de un conjunto universal U. Y suponga que el universo para productos cartesianos es $U \times U$.

a. $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$,
b. $X \cap (Y \times Z) = (X \cap Y) \times (X \cap Z)$,
c. $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$,
d. $X \times \emptyset = \emptyset$.

Conjunto potencia

Punto 1: Liste todos los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

a. $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\emptyset\right)\right)$

b. $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\{\emptyset\}\right)\right)$

Punto 2: Pruebe que $\cap \{A|A \in \mathcal{P}(E)\} = \emptyset$ Donde E es un conjunto arbitrario.

Pista: Antes de demostrarlo para cualquier conjunto verifiquelo para conjuntos en particular.

Punto 3: ¿Cuál es el cardinal de los siguientes conjuntos?

a. $\mathcal{P}\left(\{a, b, \{a, b\}\}\right)$

b. $\mathcal{P}\left(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\}\right)$

c. $\mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(\emptyset\right)\right)$

Relaciones entre conjuntos

Punto 1: Dibuje el grafo de las siguientes relaciones:

- La relación $R = \{(1,2); (2,1); (3,3); (1,1); (2,2)\}$ sobre $X = \{1,2,3\}$.
- La relación $R = \{(1,2); (2,3); (3,4); (4,1)\}$ sobre $X = \{1,2,3,4\}$.

Punto 2: Escriba la matriz que representa a cada una de las siguientes relaciones:

- Sea R una relación sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ definida como $(x, y) \in R$ si y solo si $x^2 \geq y$.
- Sea R Una relación del conjunto X de planetas al conjunto $\mathbb{Z}$, definida como $(x, y) \in R$ si y sólo si x está en la posición y con respecto al Sol. Por ejemplo, la Tierra está ubicada en la posición 3 con respecto al Sol.

Punto 3: Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Cada uno de los siguientes subconjuntos de $A \times A$ definen una relación sobre A. ¿Estos subconjuntos cumplen ser relaciones reflexivas, simétricas, antisimétricas o transitivas? Justifique su respuesta.

- $C = \{(1, 2); (2, 3); (3, 1)\}$.
- $D = \{(1, 1); (1, 2); (2, 2); (2, 3); (3, 3); (1, 3)\}$.

Punto 4: Sea A un conjunto, y piense en $\subseteq$ como una relación definida sobre $\mathcal{P}(A)$, es decir,

$$R = \{(X, Y) : X \subseteq Y\}.$$

¿Esta es una relación de equivalencia o una relación de orden? Justifica tu respuesta.

Punto 5: Determine si cada una de las siguientes relaciones es una relación de equivalencia sobre $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, y si lo es liste todas las clases de equivalencia.

a. $A = \{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (1, 3); (3, 1); (3, 4); (4, 3)\}$.
b. $B = \{(x, z) : 1 \leq x \leq 5 \text{ y } 1 \leq z \leq 5\}$.

Punto 6: ¿Cuáles de las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$ son una partición de $[0, \infty)$?

- $H = \{[n-1, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- $G = \{[x-1, x)\}_{x\in[0,\infty)}$.
- $F = \{\{x\}\}_{x\in[0,\infty)}$.
- $I = \{[n-1, n+1)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- $J = \{[0, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- $K = \{[2^{n-1}-1, 2^n-1)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Punto 7: Para cada una de las siguientes relaciones, describa la correspondiente relación de equivalencia.

a. Let E be the partition of $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ defined by $E = \{\{1, 5\}, \{2, 3, 4\}\}$.

b. Let W be the partition of $\mathbb{R}$ defined by $W = \{[n, n + 2) | n \text{ is an even integer}\}$.

Nota: Esta descripción puede partir de conjunto por extensión correspondiente a la relación o la representación gráfica de la misma.

Punto 8: Sea R Una relación de equivalencia A, y sea $\{R_a\}_{a\in A}$ su conjunto cociente. Pruebe que:

a. $\bigcup_{a\in A} R_a = A$,
b. Si $(a,b) \in R$ entonces $R_a = R_b$,
c. Si $(a,b) \notin R$ entonces $R_a \cap R_b = \emptyset$.