Matemáticas Discretas

Combinaciones

Alejandra Torres Manotas

Fundación Universitaria Konrad Lorenz

May 5, 2023

¿Qué hemos hecho hasta el momento?

$\{a, e, i, o, u\}$ $\quad 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$

$\{m, o, t, o, m, e\}$ $\quad 4!/2$

Dado un **Problema** tenemos las siguientes preguntas por hacer:

1. ¿Qué principio aplicar?
   a. ¿Nuestro problema se puede dividir en problemas más sencillos? Principio de la suma.
   b. ¿Es una actividad paso a paso? Principio del producto.
2. ¿Qué técnica de conteo aplicar?
   a. ¿Importa el orden? Si (Permutaciones)
   b. ¿Hay elementos repetidos?
   c. ¿Cuántos elementos hay en los conjunto base? n
   d. ¿Cuántos elementos tomamos del conjunto base? r

$$\frac{6!}{2 \cdot 3!}$$

$_nP_r$ $\quad P(n,r)$

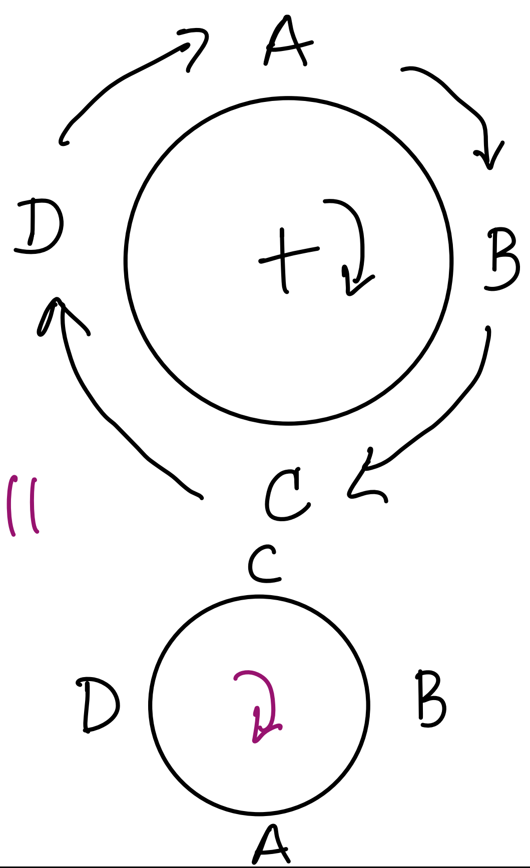
r - permutaciones de n elementos

$\boxed{5}\ \boxed{4}\ \boxed{3} \Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \left(\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1}\right) = \frac{5!}{(5-3)!}$

Teorema (Permutaciones no lineales)

Consideremos n objetos distintos en un círculo. Existen $\boxed{(n-1)!}$ permutaciones de dichos objetos.

$(4-1)! = 3!$



A B C D = D A B C

4 ordenes repetido

4 ordenes iguales

Teorema (Permutaciones no lineales)

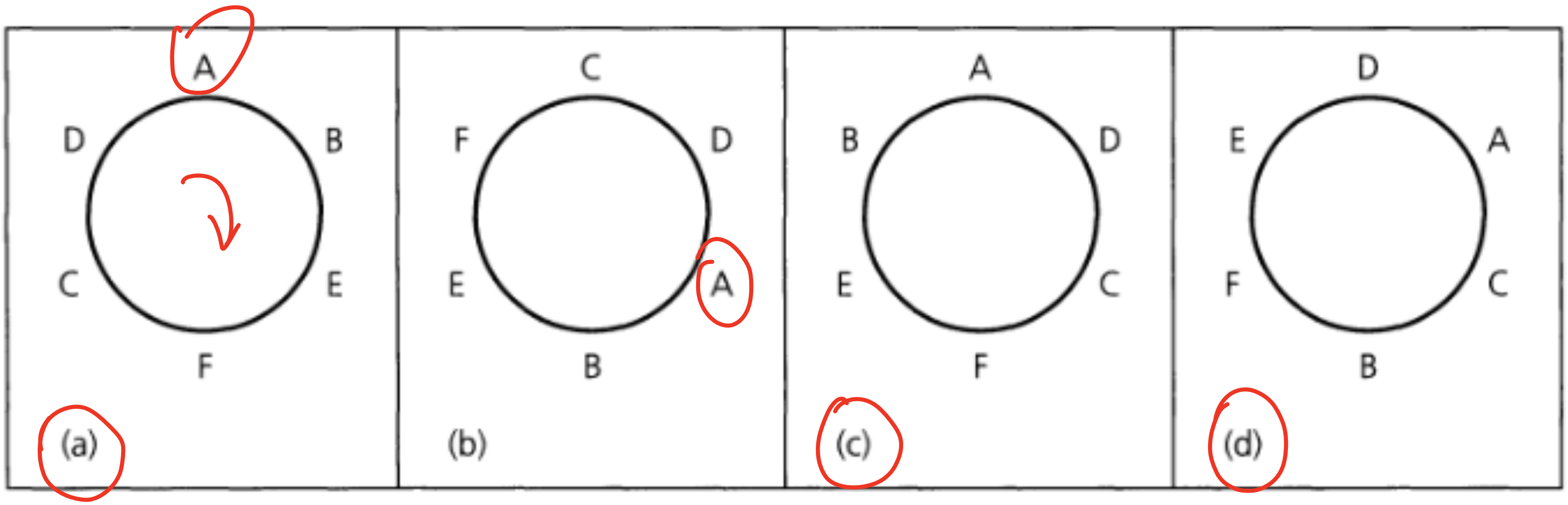
Consideremos n objetos distintos en un círculo. Existen $(n-1)!$ permutaciones de dichos objetos.

4 A − D

Ejemplo 4: ~~Seis~~ personas etiquetadas con las letras ~~$A - F$~~ están sentadas alrededor de una mesa circular.
¿De cuántas formas distintas pueden ser ubicadas estas personas?

Tenga en cuenta que dos ubicaciones se consideran iguales si están dadas por una rotación.

Permutaciones



$a \neq c \quad a \neq d$

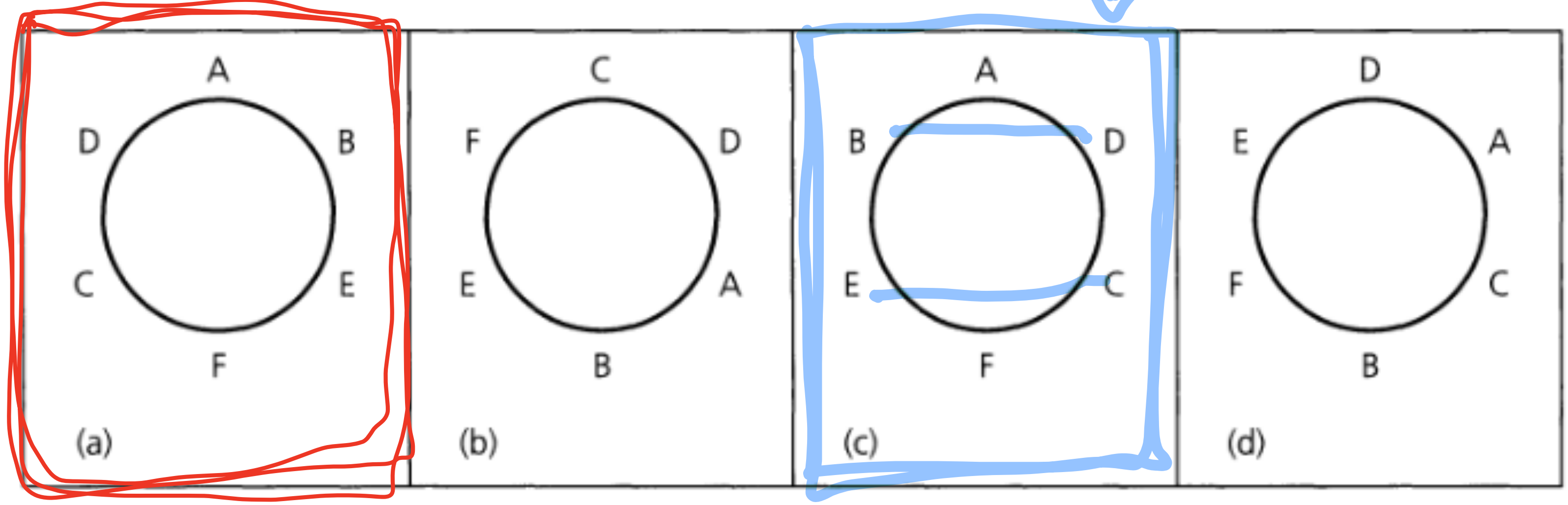
Permutaciones

$a = c = d$

ABEFCD = BEFCDA = EFCDAB

≠ AEBFCD

$6 \cdot 2$



- ¿Cuántos arreglos repetidos hay por cada orden distinto? $6 \boxed{(\times)}$
- Si no fuera un arreglo circular sino lineal. ¿En cuántas formas se puede órdenar?

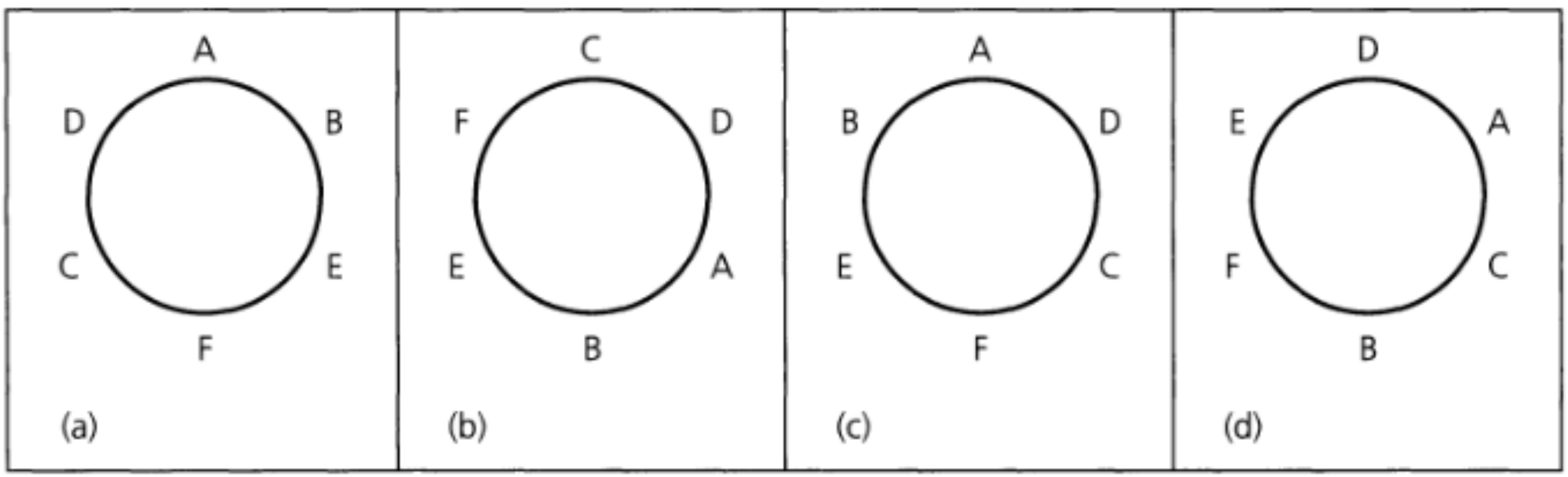
$\{A, B, E, F, C, D\}$

$6!$

Permutaciones

Si llamamos a x como los posibles ordenes circulares, entonces tendrémos la siguiente ecuación $6x = 6!$ Por lo tanto, los arreglos circulares vendrán dados de la forma $\boxed{x = \frac{6!}{6}}$.

$$= \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{\cancel{6}} = 5! = (6-1)!$$



Las personas pueden ser ubicadas de 5! formas diferentes.

$$4! = 4(x)$$

$$x = \frac{4!}{4} = 3!$$

Ejemplo 1: Un grupo de cinco estudiantes han decidido hablar con el director del programa de matemáticas para que ofrezcan más cursos de matemáticas discretas, y el director ha dicho que hablará solo con tres de los estudiantes.

¿De cuántas maneras pueden estos cinco estudiantes elegir tres de ellos para hablar con el director del departamento?

$\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

$(P_1, P_2, P_3) \neq (P_3, P_1, P_2)$ Ordenar $\{P_1, P_2, P_3\}$ da elementos iguales.

Veamos ahora cómo se calcula esto sin listar los elementos. Para ello, haremos los pasos siguientes:

$\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

1. ¿De cuántas formas podemos elegir tres estudiantes de un conjunto de cinco, teniendo en cuenta el orden? (quién va primero, quién de segundo y quién de tercero)

   $\underbrace{\square\ \square\ \square}_{\text{ordenados.}}$

   $\rightarrow P(5,3) = \frac{5!}{2!}$

2. Dada la elección de esos tres estudiantes. ¿De cuántas formas pueden ser organizados?

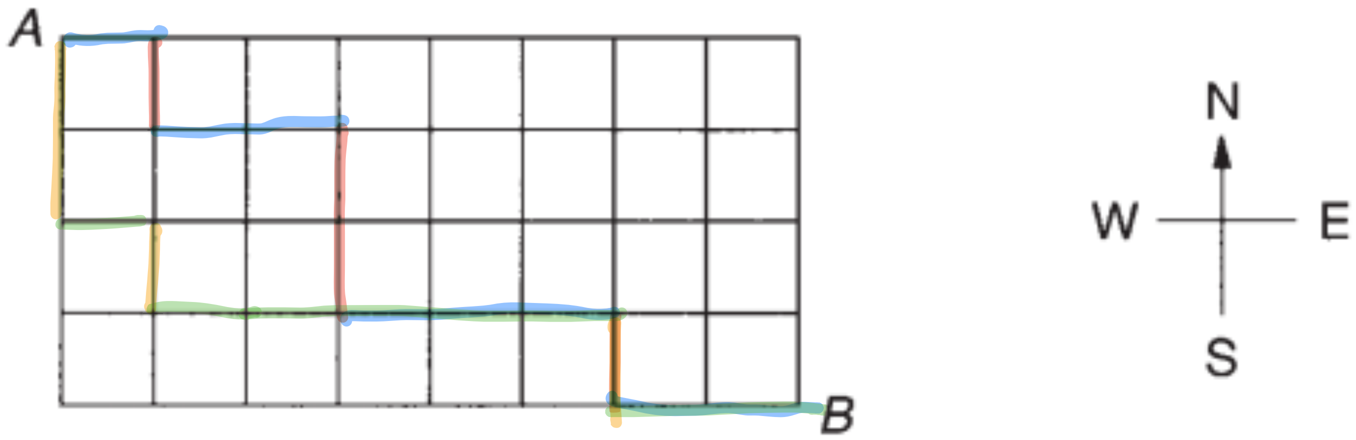
   $\rightarrow \{P_1, P_2, P_3\}$ $3!$

3. Quitemos lo repetido.

$$\boxed{\frac{5!}{2!\,3!}}$$

No hay orden

Ejemplo 2: Un motociclista quiere viajar desde A hasta B usando la cuadrícula de la calle dada por la siguiente imagen

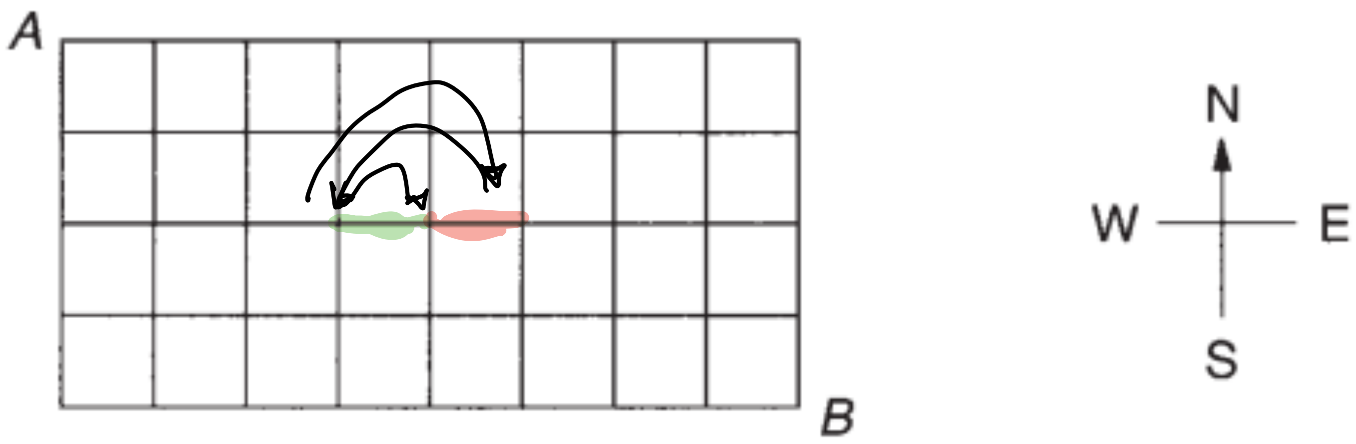


¿De cuántas formas se puede realizar este viaje si no es permitido retroceder en ninguna calle?

Un ejemplo de viaje puede ser: ESSEEESESEEE.

El problema se convierte en ver cómo ordenar 4 calles al sur y 8 calles al este, es decir, ordenar 12 calles. Entonces, esto es lo mismo que estudiar alguno de los siguientes problemas:

- ¿Cómo elegir 4 calles de 12 posibles para ir al sur?
- ¿Cómo elegir 8 calles de 12 posibles para ir al este?



Ya que al elegir alguna de las opciones de calles, las restantes solo tiene una forma de ubicarse.

También recordemos que son exactamente iguales los siguientes caminos dados por ejemplo dado:

Orden

Diferentes → ESSEEESESEEE,
ESSEEESESEEE. ← Iguales.

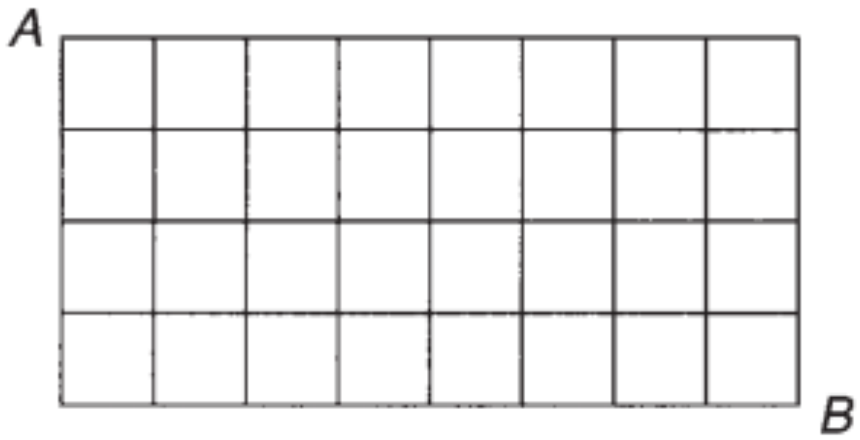
No orden

① Con orden cuántos trayectos tengo de A a B?
De formas puedo elegir 4 elementos de un conjunto de 12 teniendo en cuenta el orden?

$$P(12,4) = \frac{12!}{8!}$$

② Quitar lo repetido $\frac{12!}{8!\,4!}$ ✓

Ejemplo 2: Un motociclista quiere viajar desde A hasta B usando la cuadrícula de la calle dada por la siguiente imagen



¿De cuántas formas puede realizar este viaje si no es permitido retroceder en ninguna calle?

Ans: El motociclista puede hacer el viale de $\boxed{495}$ formas.

Combinaciones

Sin orden $\{P_1, P_2, P_3\} = \{P_2, P_1, P_3\}$

Definición

Una combinación de n objetos tomando r objetos a la vez es una selección sin orden de estos r objetos.

Nota: ${}_nC_r = \binom{n}{r}$

- Denotaremos por $C(n, r)$ al número de r-combinaciones de n objetos distintos.
- Nota: Sea S un conjunto de cardinalidad n. $C(n, r)$ será el número de subconjuntos de S con cardinalidad r.

20 elementos $= |X|$

$Y \subset X$ tq $|Y| = 5$

¿Cuántos Ys puedo tomar?

$C(20,5) = \frac{20!}{5!\,15!} \neq P(20,5)$

Combinaciones

n elementos son distintos

Teorema

El conteo de r-combinaciones de n elementos sin repetición estará dado por

$$C(n,r) = \boxed{\frac{P(n,r)}{r!}} = \boxed{\frac{n!}{r!\,(n-r)!}} = \boxed{\binom{n}{r}}.$$

Donde $C(n,r) = \binom{n}{r}$ se lee como n combinado r.

Combinaciones

Demostración:

Primero, tomemos las r-permutaciones de n elementos $P(n, r)$.

Obs. En esta cuenta estamos tomando arreglos, de r elementos, que en términos de combinaciones son iguales, ya que contienen los mismos elementos solo que en orden diferente.

Segundo, contemos las r-permutaciones de r elementos, esto nos da un total de $r!$ arreglos que estamos contando de más.

$^{P}orlotanto, paraobtenersolounodecadaunodeesosarreglosrepetidostomamos$
$\frac{P(n,r)}{r!}$, lo que nos de todas las posibles r-combinaciones de n elementos.

Ejemplo 3: En la clase de primer año de una secundaria hay 30 mujeres y 35 hombres, en la clase de último año hay 25 mujeres y 20 hombres. ¿En cuántas formas se puede elegir un comite de 10 personas, formado por 5 mujeres de cualquiera de los dos años y 3 estudiantes de primer año?

Primero veremos cuáles son todas las posibilidades para formar el comité con las condiciones dadas por el problema, es decir, que sean 3 estudiantes de primer año y 5 mujeres de cualquiera de los dos años.

Primer curso		Último curso	
Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres
0	3	5	2
1	2	4	3
2	1	3	4
3	0	2	5

30	35	25	20
Primer curso		**Último curso**	
Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres
0	3	5	2
1	2	4	3
2	1	3	4
3	0	2	5

→ Comité.

$C(30,0) \times C(35,3) \times C(25,5) \times C(20,2)$

$C(30,1) \times C(35,2) \times C(25,4) \times C(20,3)$

$C(30,2) \times C(35,1) \times C(25,3) \times C(20,4)$

$+ \; C(30,3) \times C(35,0) \times C(25,2) \times C(20,5)$

Ejemplo 4: En países que ya hacen parte de la Unión Eurepa, 17 lenguas son habladas por al menos 10 millones de personas. Para cuales quiera dos de estas lenguas, la Comisión Europea contrata un interprete que pueda traducir documentos de un idioma a otro. Un periodista notó recientemente que cuando fueron admitido los últimos países a la Unión, 22 lenguas son habladas por al menos 10 millones de personas. Por lo que, más de 100 nuevos interpretes tienen que ser contratados. ¿Es verdad?

* Un interprete no trabaja en dos pares de idiomas diferentes.

¿$C(22,2) - C(17,2) \gtrsim 100$?

Falso

¿Preguntas?