Matemáticas Discretas

Permutaciones

Alejandra Torres Manotas

Fundación Universitaria Konrad Lorenz

April 4, 2021

¡Calentamiento!

En el lenguaje de programación C++, el nombre de una variable comienza con una letra o el carácter (_), y es seguido de caracteres como letras, dígitos o (_). Las letras en mayúscula y en minúscula son consideradas como caracteres distintos.

1. ¿Cuántos nombres de variables con seis caracteres pueden ser formados en $C++$?,
2. ¿Cuántos nombres de variables hay con máximo cinco caracteres pueden ser formados?
3. ¿Cuántos nombres de variables hay con máximo cinco caracteres, si el nombre de cada variable puede leerse igual en cualquier sentido? Por ejemplo, **kayak** y **T55T** están dentro del conteo, pero **Kayak** no está.

¿Cuántos nombres de variables con seis caracteres pueden ser formados en $C++$?,

$$\boxed{53}\ \boxed{63}\ \boxed{63}\ \boxed{63}\ \boxed{63}\ \boxed{63}$$

$$\underbrace{\text{letra, (-)}}_{53} \qquad \underbrace{\text{letra, dígito, (-)}}_{63}$$

Letras 52

Símbo 1

Dígitos 10

Respuesta: $53 \cdot 63^5$

¿Cuántos nombres de variables hay con máximo cinco caracteres ~~pueden ser formados~~?

$A_1 := \square$ $\quad \underline{53 \cdot 1}$

$A_2 := \square \; \square$ $\quad \underline{53 \cdot 63}$ $\quad \rightarrow$ Principio del producto

$A_3 := \square \; \square \; \square$ $\quad 53 \cdot 63^2$

$A_4 := \square \; \square \; \square \; \square$ $\quad 53 \cdot 63^3$

$A_5 := \square \; \square \; \square \; \square \; \square$ $\quad 53 \cdot 63^4$

$$\sum_{i=1}^{5} |A_5| = 53 \left[1 + 63 + 63^2 + 63^3 + 63^4 \right]$$ Principio de la suma.

¿Cuántos nombres de variables hay con máximo cinco caracteres, si el nombre de cada variable puede leerse igual en cualquier sentido? Por ejemplo, **kayak** y **T55T** están dentro del conteo, pero **Kayak** no está.

53 63 63 1 1

Respuesta : $53 \cdot 63^2$

$A = \{a, b, c\}$

abc acb
bca cab
cba
bac

Definición

Un arreglo formado por los elementos de un conjunto dispuestos en un órden particular se llama **permutación** del conjunto.

¿Cuántas permutaciones del conjunto formado por n elementos hay?

$n!$

$\underline{n} \quad \underline{n-1} \quad \underline{n-2} \quad \underline{n-3} \quad \dots \quad \underline{2} \quad \underline{1} = n!$

Ejemplo 1: ¿Cuántos anagramas (o permutación de letras) de las siguientes palabras existen?

a. Libro

$A = \{L, i, b, r, o\}$

Hay $5!$ anagramas

matematicas

$$\frac{11!}{3 \cdot 2 \cdot 2}$$

b. Permutar

$B = \{p, e, r, m, u, t, a, r\}$

$8! \rightarrow$ Permutar ✓ X

Permutar ✓

$7!$

↳ Permuta

Pemutar

$$\boxed{\frac{8!}{2}}$$

anagramas

c. Diferencial

Diferencial Diferencial

Diferencia

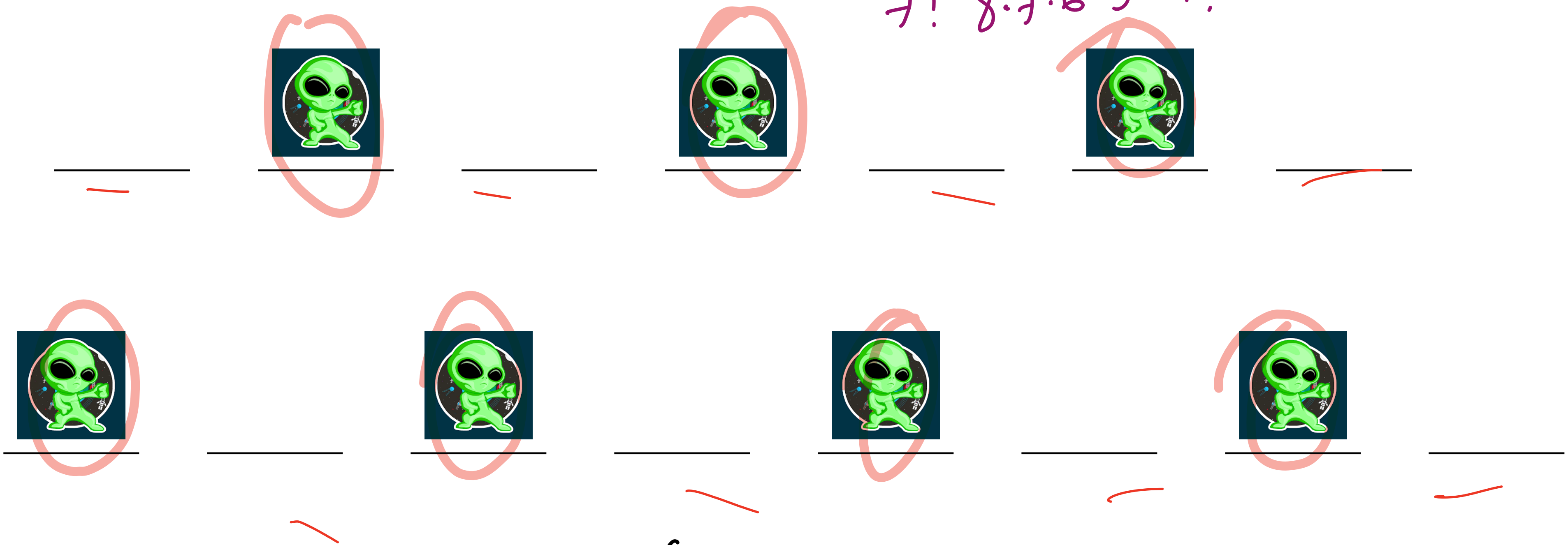
$C = \{d, i, f, e, r, e, n, c, i, a, l\}$

$$\frac{11!}{2 \cdot 2}$$

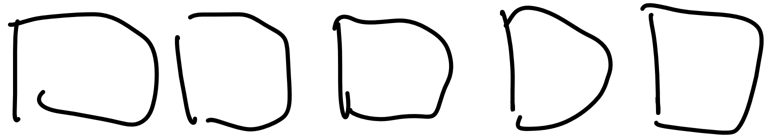
Ejemplo 2: ¿De cuántas maneras pueden hacer fila ~~cola~~ siete marcianos y cinco venusinos si dos venusinos no se paran juntos?

C $\boxed{7!}$ $\boxed{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}$ $\Rightarrow$ La actividad C se hace de $7!\ 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$.

~~7!~~



8 cosa, espacios   5 cajas Venusinos

 $= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

- ¿Cuántas formas se pueden colocar los marcianos en esas siete posiciones?

$7!$

- ¿De cuántas formas puedo colocar los 5 venucinos en las 8 posiciones restantes?

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

Respuesta: $7!\,(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) = 7! \cdot \frac{8!}{3!}$

$n \geq r$

Definición

Una permutación de n objetos, tomando r objetos al tiempo es una selección ordenada o arreglo de esos r objetos.

Problema 1: Supongamos que queremos seleccionar de un conjunto de n elementos r de ellos. Además, queremos colocarlos en cierto orden. ¿En cuántas formas es posible hacer esto?

Definición

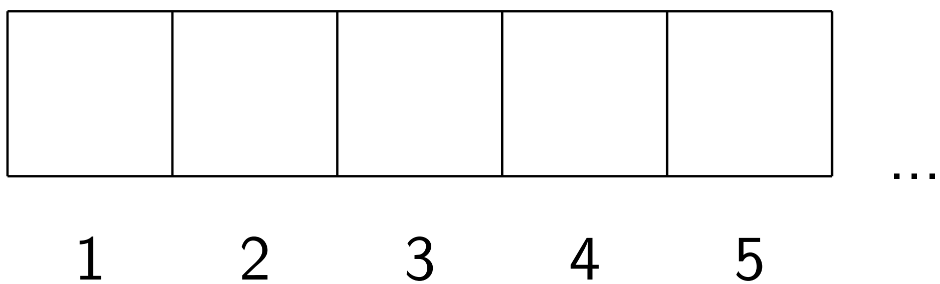
Una permutación de n objetos, tomando r objetos al tiempo es una selección ordenada o arreglo de esos r objetos.

Problema 1: Supongamos que queremos seleccionar de un conjunto de n elementos r de ellos. Además, queremos colocarlos en cierto orden. ¿En cuántas formas es posible hacer esto?

Consideremos r entradas de un arreglo y n elementos $\boxed{\{a_1, a_2, .., a_n\}}$:

n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	$n-4$	...	$n-(r-2)$	$n-(r-1) = n-r+1$
1	2	3	4	5	$r-2$	$r-1$	r

1. ¿De cuántas formas puedo colocar los n elementos en la casilla 1?
2. ¿De cuántas formas puedo colocar los $n-1$ elementos restantes en la casilla 2? ...



$p-1$. ¿De cuántas formas puedo colocar los elementos restantes en la casilla $p-1$?

p. ¿De cuántas formas puedo colocar los elementos restantes en la casilla p?

n	$n-1$	$n-2$	$\ldots$		
1	2	3		$p-1$	p

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1}$

Tomemos $p = r$, entonces en la posición r hay $n - r + 1$ formas de colocar $n - r + 1$ elementos, y aplicando el principio del producto tendremos que :

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \cdot \frac{(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

son las formas de seleccionar r elementos de un conjunto de n elementos.

a b c d

abcd
abdc ≠

$\boxed{a}$ $\boxed{b}$

Finalmente,

$$\boxed{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.}$$

→ Total

→ Repetida.

$\frac{8!}{3!} = P(8,5)$ 5-permutacion de 8 elementos

Teorema

Sea n el número de elementos de un conjunto, los cuales queremos ordenar en r espacios. Entonces, el número de formas de hacer este ordenamiento o **las r-permutaciones de n elementos sin repetición**, denotado por $P(n,r)$, es:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Demostración: Ver solución del problema anterior.

Permutaciones

Ejemplo 3: ¿Cuántos números de 6 dígitos sin repetir dígitos hay tales que ningún dígito es 0, y los dígitos 1 y 2 no aparecen de forma consecutiva en algún orden?

$\square\square\square\square\square\square$

$\cancel{12}\ 3\ 4\ 5\ 6$

$\text{Dígitos } D = \{\cancel{0}, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

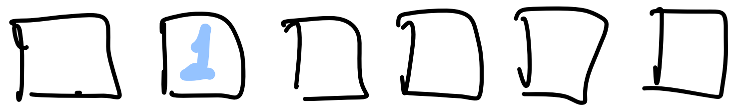
$|D| = 9$

$A_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{no tiene dígitos } 1 \text{ y } 2\}$

$|D_1| = 7 = |D| - 2$

$|A_1| = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$

$A_2 = \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{esta el 1 y no el 2 como dígito} \}$



¿Cuántas forma puedo colocar al 1? 6 formas.

¿Cuantas formas puedo colocar los digitos restantes?

$$P(7,5) = \frac{7!}{2!}$$

$$|A_2| = 6 \cdot \frac{7!}{2!} = 3(7!)$$

$A_3 = \overline{A_2}$ $\quad |A_3| = 3(7!)$

$A_4 = \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{aparecen el 1 y el 2} \}$

$B_1 = \{ n \in \mathbb{N} \mid 1 \text{ esta al inicio o al final} \}$

$\boxed{1}\ \boxed{}\ \underbrace{\boxed{}\ \boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{}}$

7

de 4 formas puedo colocar el 2.

$P(6,3) = \frac{6!}{3!}$

$* \quad 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \frac{6!}{3!} = P(8,5)$

$|B_1| = P(8,5)$

$* \quad 2 \cdot 4 \cdot P(7,4) = 2 \cdot 4 \cdot \frac{7!}{3!} = 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

$= (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) = P(8,5).$

$$B_2 = \{ n \in \mathbb{N} \mid \text{el 1 no esta en los extremos} \}$$

$$5 \cdot 4 = P(5,2)$$

C_1: 1 ... 1 → 1 está en el subextremo

$$2 \cdot 7 \cdot \underbrace{7 \cdot 6}_{P(7,2)}$$

$$|C_1| = 2 \cdot \underset{P(7,2)}{7} \cdot P(5,2)$$

C_2: X ... X, 1 → 1 está en el subcentro

$$2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 = 2 \cdot 6\, P(7,2)$$

$$|C_2| = 2 \cdot 6 \cdot P(7,2) \cdot P(5,2)$$

$$|B_2| = |C_1| + |C_2| = 2\, P(7,2)\, P(5,2) \left[\overbrace{6+7}^{13} \right]$$

$$|A_1| + \underbrace{|A_2| + |A_3|} + \overbrace{|A_4|}^{|B_1| + |B_2|}$$

$$= 7! + \boxed{2 \cdot 3} \cdot 7! + P(8,5) + 26\, P(7,2)P(5,2)$$

$$= 7!\,(7) + P(8,5) + 26\, P(7,2)\,P(5,2)$$

Teorema (Permutaciones no lineales)

Consideremos n objetos distintos en un círculo. Existen $(n-1)!$ permutaciones de dichos objetos.

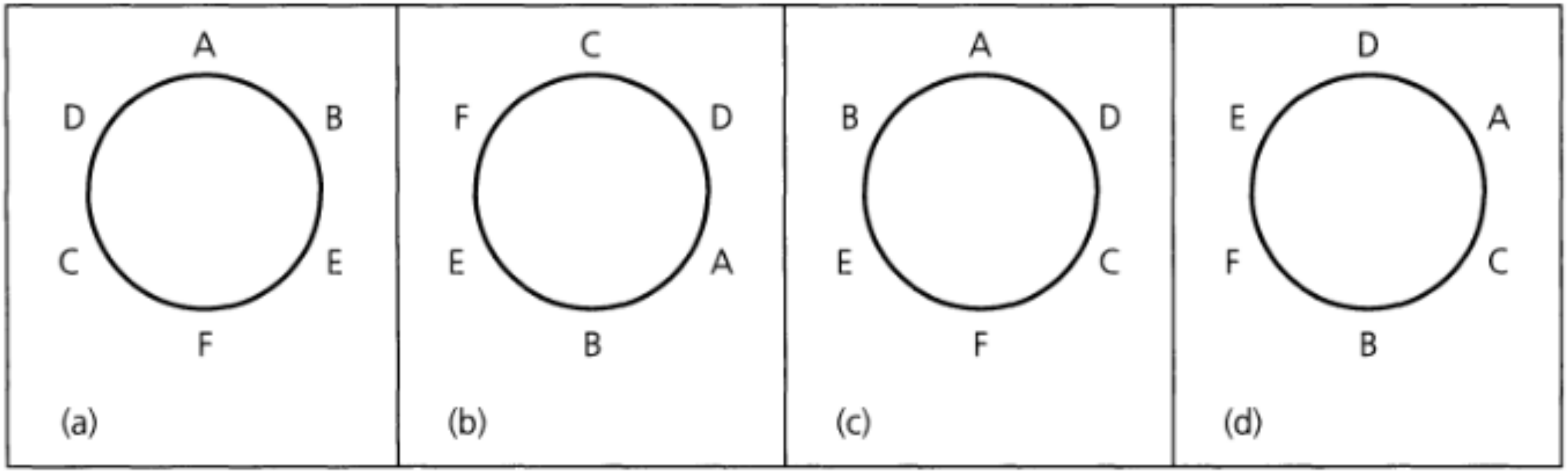
Teorema (Permutaciones no lineales)

Consideremos n objetos distintos en un círculo. Existen $(n-1)!$ permutaciones de dichos objetos.

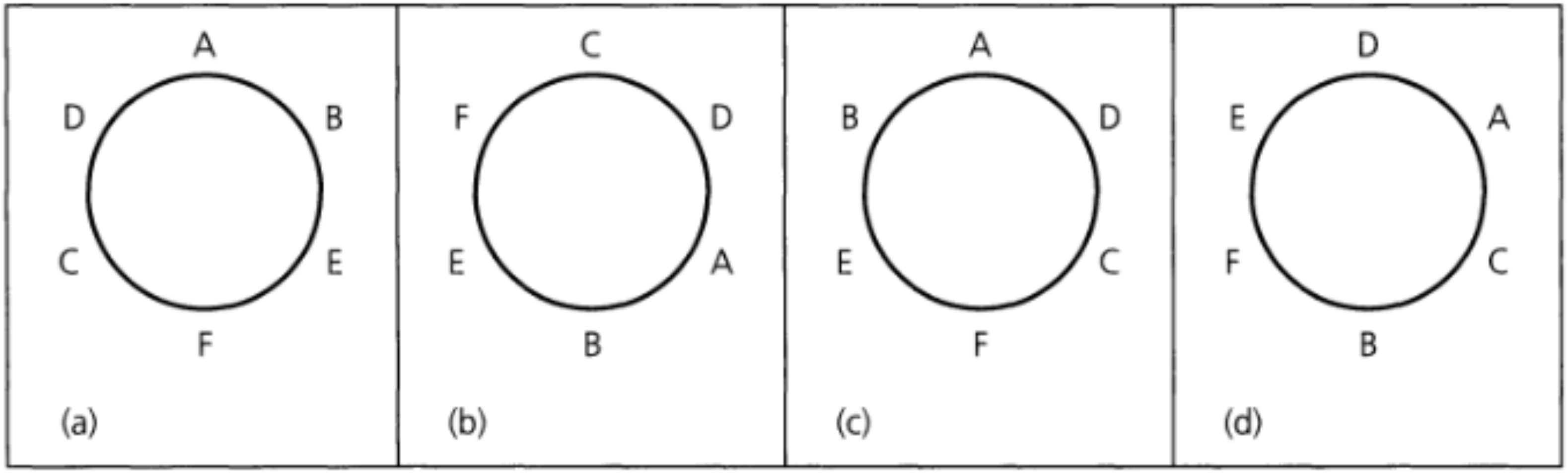
Ejemplo 4: Seis personas etiquetadas con las letras $A - F$ están sentadas alrededor de una mesa circular.
¿De cuántas formas distintas pueden ser ubicadas estas personas?

Tenga en cuenta que dos ubicaciones se consideran iguales si están dadas por una rotación.

Permutaciones



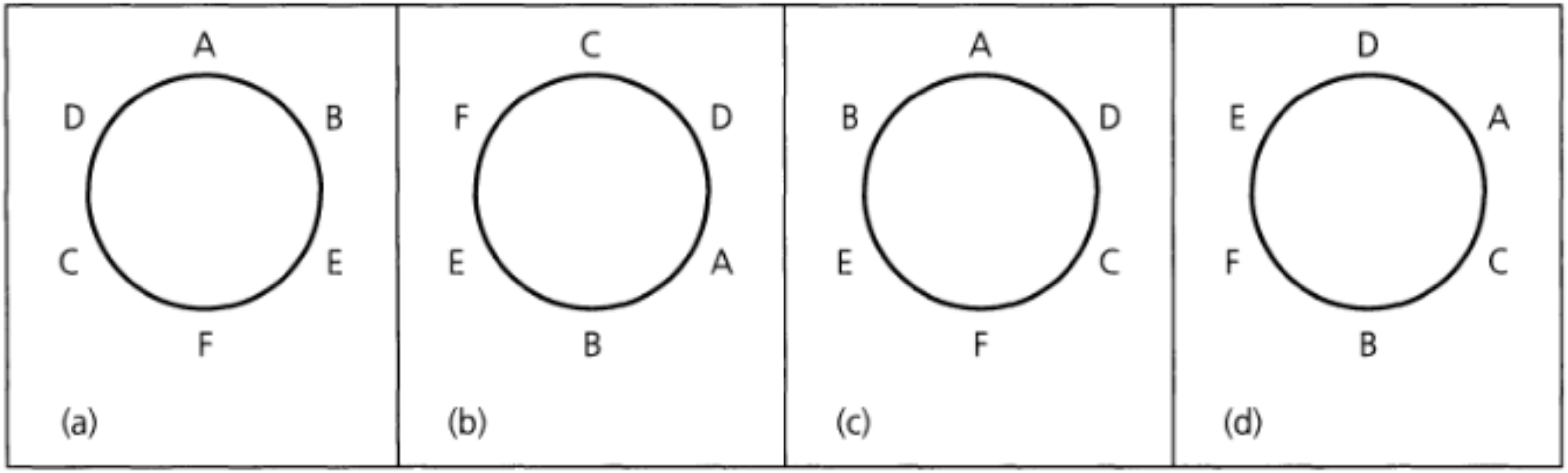
Permutaciones



- ¿Cuántos arreglos repetidos hay por cada orden distinto?
- Si no fuera un arreglo circular sino lineal. ¿En cuántas formas se puede órdenar?

Permutaciones

Si llamamos a x como los posibles ordenes circulares, entonces tendrémos la siguiente ecuación $6x = 6!$ Por lo tanto, los arreglos circulares vendrán dados de la forma $x = \frac{6!}{6}$.



Las personas pueden ser ubicadas de 5! formas diferentes.

¿Preguntas?