《数值分析》之

函数逼近

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

https://faculty.ustc.edu.cn/yxu

- Lambert于1770年给出：

$$\arctan x = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{4x^2}{5+\cfrac{9x^2}{7+\cfrac{16x^2}{9+\cdots}}}}}, \quad |x|<1$$

也写作

$$\arctan x = \frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{3+}\,\frac{4x^2}{5+}\,\frac{9x^2}{7+}\,\frac{16x^2}{9+}\cdots, \quad |x|<1$$

渐近分式

- 在连分式中第n项后终止的表达式$f_n(x)$称为原连分式的n次渐近分式，如对前例，

$$f_n(x) = \frac{x}{1+} \frac{x^2}{3+} \frac{4x^2}{5+} \cdots \frac{(n-1)^2 x^2}{2n-1}$$

- 渐近效果示例：$x = 1/\sqrt{3}$, $\arctan x = \pi/6 \approx 0.5235987756$, $f_2(x) = 0.519615$, $f_3(x) = 0.523892$, $f_4(x) = 0.523577$, $f_5(x) = 0.523600$, $f_6(x) = 0.523599$, $f_7(x) = 0.523599$

- 连分式的计算不像无穷级数的计算那样简单，后者只需要用部分和代替即可，而部分和的计算很容易形成递归形式
- 连分式：$C = \frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \frac{a_3}{b_3+} \cdots$ 是由序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 确定的
- 令
$$C_n = \frac{a_1}{b_1+} \frac{a_2}{b_2+} \frac{a_3}{b_3+} \cdots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}+} \frac{a_n}{b_n}$$
则C_n为给定连分式的一个近似。我们的目标是找到一个计算C_n的渐近公式

- 定义

$$\begin{cases} A_0 = 0, \quad A_1 = a_1 \\ A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} \quad n \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_0 = 1, \quad B_1 = b_1 \\ B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} \quad n \geqslant 2 \end{cases}$$

则

$$C_n = \frac{A_n}{B_n}$$

级数到连分式的转换

- 数学中许多重要的特殊函数都有连分式展开。

Theorem

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x_k}=\frac{1}{x_1-}\frac{x_1^2}{x_1+x_2-}\frac{x_2^2}{x_2+x_3-}\cdots\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n-}\cdots$$

证明：归纳法。 □

- 连分式的表示是不唯一的