第四次习题课

一些东西习题课上没来得及讲，文件内容比习题课多一点

1. 第四次作业参考答案

习题 4.1 令 $G=\{(a,b)|a\in\mathbb{R}^\times, b\in\mathbb{R}\}$, 乘法定义为 $(a,b)(c,d)=(ac,ad+b)$, 证明:

(1) $K=\{(1,b)|b\in\mathbb{R}\}\lhd G$ 且 $G/K\cong\mathbb{R}^\times$;

(2) $H=\{(a,0)|a\in\mathbb{R}^\times\}$ 是否为 G 正规子群.

证明：(1) $(1,0)\in K\neq\varnothing, \forall (1,a),(1,b)\in K, (1,a)(1,b)^{-1}=(1,a)(1,-b)=(1,a-b)\in K$.

故 $K\lhd G$.

任取 $(a,b)\in G,(1,x)\in K,(a,b)(1,x)(a,b)^{-1}=(a,ax+b)(\frac{1}{a},-\frac{b}{a})=(1,ax)\in K$.

故 $K\lhd G$.

$(a,b),(c,d)\in G,(a,b)K=(c,d)K \iff (a,b)(c,d)^{-1}=(\frac{a}{c},b-\frac{ad}{c})\in K \iff a=c$.

因此 $G/K=\{(a,0)K|a\in\mathbb{R}^\times\}$. 令 $f:G/K\to\mathbb{R}^\times,(a,0)K\mapsto a$, 则 f 良定且为双射.

而 $f((a,0)K(b,0)K)=f((ab,0)K)=ab=f((a,0)K)f((b,0)K), f$ 为同态, 故为同构.

(2) 不是, 因为 $(1,1)(2,0)(1,1)^{-1}=(2,1)(1,-1)=(2,-1)\notin H$.

注：布置这一题时 (周三) 尚未学到同态基本定理, 第一问用同态基本定理更方便.
此外, 第一问有同学只构造了双射没说是同态, 这是不行的.

习题 4.2 证明:

(1) 群 G 的中心 $Z(G)\lhd G$;
(2) 设 $H\leqslant G$, 且 $[G:H]=2$, 则 $H\lhd G$.

证明：(1) $1\in Z(G)\neq\varnothing$.

$\forall g,h\in Z(G),x\in G, gh^{-1}x=gh^{-1}hxh^{-1}=gxh^{-1}=xgh^{-1}, gh^{-1}\in Z(G)\leqslant G$.

任取 $g\in G, gZ(G)=\{ga|a\in Z(G)\}=\{ag|g\in Z(G)\}=Z(G)g$, 故 $Z(G)\lhd G$.

(2) 设 $g\in G$, 若 $g\in H$, 则 $gH=H=Hg$.

否则 $gH\neq H, Hg\neq H$. 但 $[G:H]=2, G=H\sqcup gH=H\sqcup Hg$, 故 $gH=Hg$, 得证.

注：这依赖于左陪集个数等于右陪集个数这一事实, 证明 $aH \mapsto Ha^{-1}$ 是良定的双射即可.

习题 4.3 令 G 为群, 证明若 $G/Z(G)$ 为循环群, 则 G 为交换群.

证明：设 $G/Z(G) =< \bar{g} >=< gZ(G) >, g \in G$.

则 $\forall x, y \in G, \exists m, n \in \mathbb{N}, a, b \in Z(G), x = g^m a, y = g^n b$. 于是

$$xy = g^m a g^n b = g^m g^n ab = g^{m+n} ab = g^{n+m} ba = yx.$$

由 x, y 的任意性知 G 为交换群.

注：直接证 $G/Z(G)$ 是平凡群也是可行的证法. 等价类一般记作 $\bar{g}$ 或 $[g]$.

习题 4.4 设 $f : G \to H$ 为群同态, $M \leqslant G$.

证明 $f^{-1}(f(M)) = \ker(f)M = \{km | k \in \ker(f), m \in M\}$.

证明： $\forall g \in G$, 有

$$\begin{aligned}
g \in f^{-1}(f(M)) &\iff f(g) \in f(M) \\
&\iff \exists m \in M, f(g) = f(m) \\
&\iff \exists m \in M, f(gm^{-1}) = f(g)f(m^{-1}) = 1_H \\
&\iff \exists m \in M, gm^{-1} \in \ker(f) \\
&\iff \exists m \in M, k \in \ker(f), gm^{-1} = k, g = km \\
&\iff g \in \ker(f)M.
\end{aligned}$$

因此 $f^{-1}(f(M)) = \ker(f)M$.

习题 4.5 令 G 为群, 对于 $x \in G$, 定义 $f_x : G \to G$ 为 $f_x(g) = xgx^{-1}$, 证明:

(1) $f_x \in \mathrm{Aut}(G)$, 称为内自同构;

(2) $\mathrm{Inn}(G) \coloneqq \{f_x | x \in G\} \leqslant \mathrm{Aut}(G)$;

(3) $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$.

证明：(1) 任取 $x \in G$.

$\forall g \in G, f_x(x^{-1}gx) = xx^{-1}gxx^{-1} = g, f_x$ 满.

$\forall g, h \in G, f_x(g) = f_x(h) \iff xgx^{-1} = xhx^{-1} \iff g = h, f_x$ 单.

$\forall g, h \in G, f_x(gh) = xghx^{-1} = xgx^{-1}xhx^{-1} = f_x(g)f_x(h), f_x$ 为同态.

故 $f_x \in \mathrm{Aut}(G)$.

(2)$f_{1_G} \in \mathrm{Inn}(G) \neq \varnothing$, 设 $x, y \in G$.

$\forall g\in G, f_x\circ f_y(g)=x(ygy^{-1})x^{-1}=xyg(xy)^{-1}=f_{xy}(g)$. 故 $f_x\circ f_y=f_{xy}\in \mathrm{Inn}(G)$.

而 $\forall g\in G, f_{x^{-1}}\circ f_x(g)=x^{-1}(xgx^{-1})x=g$, 知 $f_{x^{-1}}\circ f_x=\mathrm{id_G}$, 故 $f_x^{-1}=f_{x^{-1}}\in \mathrm{Inn}(G)$.

因此 $\mathrm{Inn}(G)\leqslant \mathrm{Aut}(G)$.

(3) 考虑 $\varphi: G\to \mathrm{Aut}(G), x\mapsto f_x$, 则 $\mathrm{im}(\varphi)=\mathrm{Inn}(G)$.

由于 $\forall x,y\in G$, 由 (2) 的过程知 $\varphi(xy)=f_{xy}=f_x\circ f_y=\varphi(x)\varphi(y)$, 可知 φ 为群同态.

注意对 $g,h\in G, gh=hg \iff ghg^{-1}=h$, 有

$\ker(\varphi)=\{x\in G|f_x=\mathrm{id_G}\}=\{x\in G|\forall g\in G, xgx^{-1}=g\}=Z(G)$.

由同态基本定理, $G/Z(G)=G/\ker(\varphi)\cong \mathrm{im}(\varphi)=\mathrm{Inn}(G)$.

注: $f_{1_G}=\mathrm{id}_G$ 在 (2) 中并未明说, 但过程中已经了然. 有时也记 $gxg^{-1}=x^g$, 易见 $x^gy^g=(xy)^g$.

对于 $S_n(n\geqslant 3)$ 而言,$Z(S_n)=1$ 从而 $\mathrm{Inn}(S_n)\cong S_n$, 以后可以证明, 若还有 $n\neq 6$, 则 S_n 只有内自同构, 于是 $\mathrm{Aut}(S_n)\cong S_n$. 而 $\mathrm{Aut}(S_6)\cong \mathbb{Z}_2\ltimes S_6$, S_6 有外自同构.

习题 4.6 令 $U_n\subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 为 n 阶酉方阵群, $SU_n=\{A\in U_n|\det(A)=1\}$, 证明: $U_n/SU_n\cong S^1$.

证明: 记 $\det: U_n\to\mathbb{C}, A\mapsto \det(A)$, 则 $\forall A,B\in U_n, \det(AB)=\det(A)\det(B)$ 知 $\det$ 为同态.

$U_n=\{A\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})|A\bar{A}^T=I_n\}$, 而 $\det(\bar{A}^T)=\overline{\det(A^T)}=\overline{\det(A)}$,

从而 $\forall A\in U_n, |\det(A)|^2=\det(A)\det(\bar{A}^T)=\det(A\bar{A}^T)=\det(I_n)=1, \det(A)\in S^1$.

而 $\forall z\in S^1, |z|=1, z\bar{z}=|z|^2=1$,

从而令 $A=\mathrm{diag}(z,1,\cdots,1), \bar{A}^T=\mathrm{diag}(\bar{z},1,\cdots,1), A\bar{A}^T=\mathrm{diag}(z\bar{z},1,\cdots,1)=I_n$,

于是 $A\in U_n$, 且 $\det(A)=z$. 因此 $\mathrm{im}(\det)=S^1$.

而 $\ker(\det)=\{A\in U_n|\det(A)=1\}=SU_n$,

由同态基本定理,$U_n/SU_n=U_n/\ker(\det)\cong\mathrm{im}(\det)=S^1$.

2. 补充习题

补充题 4.1 群同态下, 子群的原像是子群, 正规子群的原像是正规子群.

证明: 设 $f: G\to H$ 为群同态. 设 $M\leqslant H$, 则 $1_M=1_H$, 于是

$1_G\in\ker(f)=f^{-1}(1_H)\subseteq f^{-1}(M)\neq\varnothing$. 而 $\forall x,y\in f^{-1}(M)$, 有

$f(x)\in M, f(y^{-1})=f(y)^{-1}\in M$, 于是 $f(xy^{-1})=f(x)f(y)^{-1}\in M, xy^{-1}\in f^{-1}(M)$.

因此 $f^{-1}(M)\leqslant G$.

设 $M \lhd G$, 则 $\forall g \in G, x \in f^{-1}(M), f(gxg^{-1}) = f(g)f(x)f(g)^{-1} \in f(g)Mf(g)^{-1} = M$.

于是 $gxg^{-1} \in f^{-1}(M)$, 由 g, x 任意性知 $f^{-1}(M) \lhd G$.

补充题 4.2 设 $f: G \to H, g: H \to K$ 为群同态, 求 $\ker(g \circ f)$.

解： $\ker(g \circ f) = \{a \in G | g(f(a)) = 1_K\} = \{a \in G | f(a) \in \ker(g)\} = f^{-1}(\ker(g))$.

注：由上一题, 它是 G 的正规子群.

补充题 4.3 设 $H \lhd G, K \leqslant G$ 为群, 证明:

(1) $HK \leqslant G$;

(2) 若 $K \lhd G$, 则 $HK \lhd G$;

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $H \cap K = \{1\}$, 则 $\forall h \in H, k \in K, hk = kh$, 且 $HK \cong H \times K$.

证明：(1) $H \lhd G$, 从而 $\forall h \in H, k \in K, h_1 = k^{-1}hk \in H, h_2 = khk^{-1} \in H$, 于是

$hk = kh_0 \in KH, kh = h_2k \in HK$, 于是 $HK = KH$, 由第二次作业的补充题 2.5 得证.

(2)$\forall g \in G, h \in H, k \in K, ghg^{-1} \in H, gkg^{-1} \in K$, 从而

$ghkg^{-1} = (ghg^{-1})(gkg^{-1}) \in HK$, 因此 $HK \lhd G$.

(3)$\forall h \in H, k \in K, hkh^{-1} \in K, khk^{-1} \in H$, 于是

$hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} = h(khk^{-1}) \in H \cap K = \{1\}, hk = kh$.

考虑 $f: H \times K \to HK, (h, k) \mapsto hk$, 则 f 是满射, 并且 $\forall h_1, h_2 \in H, k_1, k_2 \in K$, 有

$f((h_1, k_1)(h_2, k_2)) = f((h_1h_2, k_1k_2)) = h_1h_2k_1k_2 = h_1k_1h_2k_2 = f((h_1, k_1))f((h_2, k_2))$,

从而 f 为同态.

而 $(1, 1) \in \ker(f) = \{(h, k) | hk = 1\} \subseteq \{(h, k) | h, k \in H \cap K\} = \{(1, 1)\}$,

从而 $\ker(f) = \{(1, 1)\}, f$ 为单同态从而为同构.

注：由 (1) 我们可以定义内半直积的概念. 学过正规化子后,(1) 所需的条件可以进一步弱化.

特别地, 如果 $H \lhd G, K \lhd G, H \cap K = \{1\}, HK = G$, 则 $G \cong H \times K$.

此时, 称 G 为 H 和 K 的 **(内) 直积**.

补充题 4.4 设 $f: G \to H$ 为群同态, $M \lhd G$, 则 $N = f(M) \lhd f(G) =: K, G/(\ker(f)M) \cong K/N$.

证明： $\forall k\in K, n\in N, \exists g\in G, m\in M, k=f(g), n=f(m)$, 而 $gmg^{-1}\in M$, 故

$knk^{-1}=f(gmg^{-1})\in N$.

记 $\pi: K\to K/N$ 为自然的满同态, 则 $\bar{f}=\pi\circ f: G\to K/N$ 为满同态.

$\ker\pi=N$, 由 $\ker(\bar{f})=f^{-1}(N)=f(f^{-1}(M))=\ker(f)M$.

前面已经证明两个正规子群的乘积是正规子群, 由同态基本定理即得证.

注：假设 f 是满同态, 则证得正规子群在满同态下的像还是正规子群. 正规子群的像之所以一般不是正规子群, 正是因为陪域相比于同态的像太大了, 而陪域的原像是整个定义域, 正规子群原像正规.

若 f 为同构, 则 $G/M\cong H/N$.(再令 $G=H$) 即得 (自) 同构把正规子群映到正规子群.

注意我们有如下事实: 设 $H\leqslant G$ 为群, $f: G\to K$ 是一个群同态, 则 $f|_H: H\to K$(或者映到 $f(H)$) 为群同态 (仍可记为 f). 特别地, 若 f 为同构, 则 $f: H\to f(H)$ 为群同构.

补充题 4.5 设 G, H 为群, $G\times H$ 为二者的直积. 则

(1) $G\cong G\times\{1_H\}\lhd G\times H$, 且 $(G\times H)/(G\times\{1_H\})\cong H$;

(2) $Z(G\times H)=Z(G)\times Z(H)$;

(3) $G\times H$ 是 Abel 群 $\iff$ G 和 H 均为 Abel 群.

证明： (1) 直接验证 $f: G\to G\times\{1_H\}, g\mapsto(g, 1_H)$ 为同构.

令 $\pi: G\times H\to H, (g,h)\mapsto h$, 可以验证它是同态, 且 $\ker(\pi)=G\times\{1_H\}$.

(2)
$$\begin{aligned}Z(G\times H)&=\{(g,h)\in G\times H|(gx,hy)=(xg,yh),\forall(x,y)\in G\times H\}\\&=\{(g,h)\in G\times H|gx=xg, hy=yh,\forall x\in G, y\in H\}\\&=Z(G)\times Z(H).\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}G\times H\text{是 Abel 群}&\iff G\times H=Z(G\times H)\\&\iff G\times H=Z(G)\times Z(H)\\&\iff G=Z(G)\text{且}H=Z(H)\\&\iff G\text{和}H\text{均为 Abel 群}.\end{aligned}$$

注：在此情形下, 我们可以把 $G\times\{1\}$ 与 G 等同. 本题可以推广到任意多的情况.

补充题 4.6 4 阶群是 Abel 群且只有两种: $\mathbb{Z}_4$ 和 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

证明：若 4 阶群 G 中有 4 阶元, 则 $G\cong\mathbb{Z}_4$.

否则 G 中除单位元外均为 2 阶元, 记为 a,b,c.

由于群中元素可逆, 只能 $ab=ba=c, ac=ca=b, ab=ba=c, G$ 为 Abel 群.

于是 $<a> \lhd G, <b> \lhd G, <a> \cap <b> = \{1\}, G = <a><b>$.

于是 $G \cong <a> \times <b> \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

注： Abel 群的子群都是正规子群. Klein 四元群 $K_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

补充题 4.7 举例说明:

(1) 设 G 为群,$G/Z(G)$ 为 Abel 群, 但 G 可以不是 Abel 群;

(2) 设 G, H 为群, $M \lhd G, N \lhd H, G \cong H, M \cong N$, 但 $G/M \ncong H/N$;

(3) 设 G, H 为群, $M \lhd G, N \lhd H, M \cong N, G/M \cong H/N$, 但 $G \ncong N$.

解： (1) 设 $D_{2n} = <r, s | s^2 = 1, r^n = 1, srs = r^{-1}>$ 为二面体群.

其中 r 表示绕原点顺时针旋转 $\frac{2\pi}{n}$, s 表示关于直线 $y = x\tan\frac{2\pi}{n}$ 反射.

$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 为四元数群, 其中 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

则 D_8 与 Q_8 均为非 Abel 群, 但 $Z(D_8) = \{1, r^2\}, Z(Q_8) = \{\pm 1\}$.

$D_8/Z(D_8)$ 与 $Q_8/Z(Q_8)$ 均为 4 阶群从而为 Abel 群.

更进一步地, 它们不是循环群故都同构于 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(2) $2\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}, 3\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$, 且 $2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \cong 3\mathbb{Z}$, 但 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

(3) $\mathbb{Z}_2 \cong M := \{\bar{0}, \bar{2}\} \lhd \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \cong N := \mathbb{Z}_2 \times \{\bar{0}\} \lhd \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, 则

$\mathbb{Z}_4/M \cong \mathbb{Z}_2 \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)/N$, 但 $\mathbb{Z}_4 \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

$D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$, 有 $s, r^2, srsr^3$ 这 4 个 2 阶元, 而 Q_8 中二阶元只有 -1.

于是 $D_8 \ncong Q_8$, 但 $Z(D_8) \cong \mathbb{Z}_2 \cong Z(Q_8)$, 且 $D_8/Z(D_8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong Q_8/Z(Q_8)$.

补充题 4.8 设 G 为群, 集合 H 上定义有二元运算 $\cdot$. 若存在满射 $f : G \to H$ 使得 $\forall a, b \in G, f(ab) = f(a)f(b)$, 则 $(H, \cdot)$ 是群.

证明： 设 $e = f(1_G), \forall h, h_i \in H, i = 1, 2, 3, \exists g, g_i \in G, i = 1, 2, 3, h = f(g), h_i = f(g_i)$.

于是 $eh = f(1_G g) = f(g) = h = f(g 1_G) = he$, 以及

$$\begin{aligned}
(h_1h_2)h_3 &= (f(g_1)f(g_2))f(g_3) \\
&= f(g_1g_2)f(g_3) \\
&= f((g_1g_2)g_3) \\
&= f(g_1(g_2g_3)) \\
&= f(g_1)f(g_2g_3) \\
&= f_(g_1)(f(g_2)f(g_3)) \\
&= h_1(h_2h_3).
\end{aligned}$$

又令 $h^{-1}=f(g^{-1})$, 则 $h^{-1}h=f(g^{-1}g)=f(1_G)=e=f(gg^{-1})=hh^{-1}$.
因此 H 是群.

注: 对于一般的带有一个二元运算的集合也可定义同态, 以上说明了一般情形下的“群的同态像是群”.

3. 其他补充

(1) 特征子群

定义 4.1 设 G 为群, $H \leqslant G$ 使得 $\forall f \in \mathrm{Aut}(G), f(H) \subseteq H$, 称 H 为 G 的**特征子群** (characteristic subgroup), 记作 $H \text{ char } G$.

命题 4.1 设 $H \text{ char } G, f \in \mathrm{Aut}(G)$, 则 $f(H)=H$.

证明: $f, f^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$, 故 $f(H) \subseteq H, f^{-1}(H) \subseteq H$.

于是 $H \subseteq f(H)$, 得 $f(H)=H$.

补充题 4.9 举例说明设 G 为群, $H \leqslant G$, 可能存在 $f \in \mathrm{Aut}(G), f(H)<H$. 举例说明 f 要求在 $\mathrm{Inn}(G)$ 时也不对.

解: 考虑 $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Q}, f$ 为乘以 2 的自同构, 则 $f(\mathbb{Z})=2\mathbb{Z}<\mathbb{Z}$.

设 $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & n \\ 0 & 1\end{pmatrix}: n \in \mathbb{Z}\right\} \leqslant \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$, 取 $A=\operatorname{diag}(2,1)$,
则 $AGA^{-1}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2n \\ 0 & 1\end{pmatrix}: n \in \mathbb{Z}\right\}<G$.

注: 结论对有限群当然成立, 数元素个数即可. 正规子群和特征子群之所以可以用包含于推等于, 是因为条件要求的分别是所有的内自同构和自同构.

命题 4.2 证明正规子群的特征子群是正规子群.

证明: 沿用习题 4.5. 设 $K \text{ char } H \lhd G$, 对 $g \in G, f_g$ 限制在 H 上是自同构, 从而保持 K 不变.

注: 正规子群是在 $\mathrm{Inn}(G)$ 作用 (也即 G 的共轭作用) 下不变的子群, 特征子群则是在整个 $\mathrm{Aut}(G)$ 作用下不变的子群.

可见特征子群也是正规子群, 由于正规子群可以写为共轭类的并, 特征子群当然也可以.

命题 4.3 循环群的子群都是特征子群.

证明：对于 $\mathbb{Z}, \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \{-1, 1\}$, $\mathbb{Z}$ 的子群 $m\mathbb{Z}$ 当然在 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ 的作用下保持不变.

对于 $\mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}_+$, 它的子群是循环群 $< \bar{k} >, \mathrm{ord}(k)|n$,

而对 $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n), \exists m, (m, n) = 1, \forall x \in \mathbb{Z}_n, f(x) = x^m$, 于是 $f(< \bar{k} >) =< \bar{k}^m >=< \bar{k} >$.

命题 4.4 设 G 为群, $H \lhd G, f \in \mathrm{Aut}(G)$, 则 $f(H) \lhd G$.

证明：注意群的同态像是群, 故 $f(H) \leqslant G$.

$\forall a \in G, k = f(h) \in K, h \in H$, 令 $b = f^{-1}(a), aka^{-1} = f(bhb^{-1}) \in f(H)$, 得证.

补充题 4.10 举例说明:

(1) 正规子群的正规子群未必是正规子群;

(2) 特征子群的正规子群未必是正规子群;

(3) 正规子群的特征子群未必是特征子群;

(4) 正规子群未必是特征子群, 正规子群的正规子群即使是正规子群也未必是特征子群;

(5) 子群的特征子群未必是正规子群;

(6) Abel 群的子群未必是特征子群.

解： (1) $\{1, (12)(34)\} \lhd K_4 \lhd S_4$, 但 $\{1, (12)(34)\}$ 不是 S_4 的正规子群 (不包含整个共轭类).

(2) 事实上 S_4 只有内自同构,(1) 中的例子即可.

(3)$\mathbb{Z}_4 \times \{\bar{1}\}$ 为 $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ 的正规子群, 它有非平凡的特征子群.

但是考虑将 $(\bar{a}, \bar{b})$ 映为 $(\bar{b}, \bar{a})$ 的自同构即可得知, 上述子群当然不是特征子群.

(4) 例子同 (3);

(5) 取子群的特征子群为这个子群为本身即可;

(6) 例子同 (3).

(2) 换位子群

定义 4.2 设 G 是群.

(1) 对 $x, y \in G$, 称 $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ 是 x 和 y 的**换位子** (或**交换子**)(commutator).

(2) 对 A, B 为 G 的非空子集, 记 $[A, B] =< [a, b] | a \in A, b \in B >$ 是由 A 和 B 中元素的换位子生成的 G 的子群;

(3) 记 $G' = [G, G]$ 称为 G 的**换位子群** (commutator (sub)group) 或**导群** (derived group).

注：换位子可以衡量两个元素是否交换, 群中只有一个运算但是可逆, 定义的换位子不像矩阵的李括号那样. 换位子群和群的中心都可以衡量群的交换性, G 是 Abel 群当且仅当 $Z(G) = G$ 当且仅当 $G' = \{1\}$.

命题 4.5 设 G 是群, $x, y \in G, f \in \mathrm{Aut}(G)$, 则

(1) $xy = [x, y]yx = yx[x^{-1}, y^{-1}]$;

(2)$f[x, y] = [f(x), f(y)]$.

证明：直接验证即可.

命题 4.6 设 G 是群, H char G, K char G, 则 $[H, K]$ char G.

证明：任取 $f \in \mathrm{Aut}(G)$.

$\forall x \in [H, K], \exists h_1, \cdots h_r \in H, k_1 \cdots k_r \in K, x = \prod\limits_{i=1}^{r} [h_i, k_i]$.

由于 H char G, K char $G, f(h_i) \in H, f(k_i) \in K, \forall i = 1, \cdots, r$.

因此 $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{r} [f(h_i), f(k_i)] \in [H, K]$. 由 x 和 f 任意性即得.

注：将特征子群全部换为正规子群也成立, 两个命题互有强弱, 但证明是类似的.

命题 4.7 设 G 是群, 则 $Z(G)$ char G, G' char G, 且 G/G' 是 Abel 群.

证明：任取 $f \in \mathrm{Aut}(G)$.

$\forall a \in Z(G), g \in G, f(a)g = f(af^{-1}g) = f(f^{-1}ga) = gf(a), f(a) \in Z(G)$.

于是 $f(Z(G)) \subseteq Z(G)$, 由 f 任意性知 $Z(G)$ char G.

根据前一命题，由于 G char $G, G' = [G, G]$ char G.

对 $x, y \in G, xG'yG' = xyG' = yx[x^{-1}, y^{-1}]G' = yxG' = yG'xG'$. 得证.

命题 4.8 设 G 是群, 记 $G^0 = G^{(0)} = G$, 对 $i \geqslant 1$, 记 $G^i = [G, G^{i-1}], G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}, G^i$ char $G, G^{(i)}$ char G.

证明： 这是前面命题的直接推论.

注： 由此可知 G^n 和 $G^{(n)}$ 都是正规子群, 以后我们可以以此定义降中心列和导出列, 并分别给出幂零群和可解群的一种等价定义.

TO BE CONTINUED