2024 春近世代数作业

1 第一次作业

Exercise 1.1 对任意集合 X，我们用 Id_X 表示 X 到自身的恒等映射。设 $f : A \to B$ 为集合间的映射，A 是非空集合，试证:

(1). f 是单射 $\Leftrightarrow$ 存在 $g : B \to A$，使得 $g \circ f = Id_A$

(2). f 是满射 $\Leftrightarrow$ 存在 $h : B \to A$，使得 $f \circ h = Id_B$

(3). f 是双射 $\Leftrightarrow$ 存在唯一的 $g : B \to A$，使得 $g \circ f = Id_A$，$f \circ g = Id_B$

Exercise 1.2 证明容斥原理:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_n\} \subset \{1,\ldots,n\}} |A_{i_j} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$$

hint: 对 n 归纳

Exercise 1.3 令 G 为实数对 $(a, b), a \neq 0$ 的集合, 在 G 上定义 $(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$，试证 G 为群

Exercise 1.4 令 G 为所有秩不大于 r 的 n 阶复方阵的集合，试证在矩阵乘法下，G 构成半群

Exercise 1.5 设 G 是一个半群，若:

(1). G 中含有左幺元 e，即任意 $x \in G$，有 $ex = x$

(2). G 的每个元素 x 都有左逆元 x^{-1}，使得 $x^{-1}x=e$ 试证 G 为群

Exercise 1.6 举例：

(1). 举出一个含幺半群的例子，其中存在元素有左逆元但是没有右逆元

(2). 举出一个含幺半群的例子，其中存在元素有无数个左逆元

2 第二次作业

2.1 周三

Exercise 2.1 判断下面哪些 *2* 阶实方阵集合在矩阵乘法意义下构成群：

(1). $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$，$ac\neq b^2$

(2). $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & a \end{smallmatrix}\right)$，$a^2\neq bc$

(3). $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$，$ac\neq 0$

(4). $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$，$a,b,c,d\in\mathbb{Z}$，$ad\neq bc$

Exercise 2.2 定义 $GL_n(\mathbb{R})$ 上运算 $[A,B]=AB-BA$，则 $(GL_n(\mathbb{R}),[\cdot,\cdot])$ 是否构成群。

Exercise 2.3 设 $m,n\in\mathbb{N}^+$，$X\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，令
$G=\{(A,B)|A\in GL_m(\mathbb{R}),B\in GL_n(\mathbb{R})\}$，$H=\{(A,B)\in G|AXB=X\}$

(1). G 上定义乘法 $(A_1,B_1)\cdot(A_2,B_2)=(A_1A_2,B_2B_1)$，则 $(G,\cdot)$ 为群，验证 H 为 G 子群

(2). 设 $m,n=2$，G 上定义乘法 $(A_1,B_1)\circ(A_2,B_2)=(A_1A_2,B_1B_2)$，则 $(G,\circ)$ 为群，验证若 $X=I_2$，则 H 不为 G 子群，若 $X=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，则 H 为 G 子群。

2.2 周五

Exercise 2.4

(1). 证明有理数加法群 $(\mathbb{Q},+)$ 和乘法群 $\mathbb{Q}^{\times}$ 不同构。

(2). 对于群 $(G,\cdot)$，定义它的反群为 $(G^{op},\circ)$，其中 G^{op} 作为集合与 G 中元素相同，G^{op} 上面的运算定义为 $a\circ b \coloneqq ba$，证明 G 与 G^{op} 同构。

Exercise 2.5 群 G 的自同构 f 称为没有不动点的自同构，是指任意 $1\neq g\in G$，有 $f(g)\neq g$。证明如果有限群 G 具有一个没有不动点的自同构 f 且 $f^2=1$，则 G 一定是奇数阶 $Abel$ 群。

Exercise 2.6 令 V 为 n 维 $\mathbb{Q}$ 线性空间，证明 $Aut(V,+)=GL_n(\mathbb{Q})$。

3 第三次作业

3.1 周三

Exercise 3.1 令 $G=SL_2(\mathbb{Z})=\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)|ad-bc=1,a,b,c,d\in\mathbb{Z}\}$，$S=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$，$T=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$，证明 $G=<S,T>$。

Exercise 3.2 设 G 为有限交换群，证明 $g\to g^k$ 为 G 的自同构 $\Leftrightarrow k$ 与 $|G|$ 互素。

Exercise 3.3 令 G，H 为群，定义 $G\times H=\{(g,h)|g\in G,h\in H\}$，上面带有乘法 $(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1g_2,h_1h_2)$，验证下面的群是否为循环群:

(1). $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

(2). $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

(3). $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

3.2 周五

Exercise 3.4 令 G 为 n 阶有限群，若对 n 的每个因子 m，G 中至多只有一个 m 阶子群，则 G 为循环群。

Exercise 3.5 设 H 和 K 分别是有限群 G 的两个子群，$HgK = \{hgk | h \in H, k \in K\}$。试证：

(1). $|HgK| = |H| \cdot [K : g^{-1}Hg \cap K]$

(2). 对所有 $x, y \in G$，HxK 和 HyK 要么相同，要么不交。

Exercise 3.6

(1). 设 G 为有限交换群，证明 $\prod\limits_{g \in G} g = \prod\limits_{a \in G, a^2 = 1} a$

(2). 证明 *Wilson* 定理：若 p 为素数，则 $(p-1)! \equiv -1 \ mod \ p$

4 第四次作业

4.1 周三

Exercise 4.1 令 $G = \{(a, b) | a \in \mathbb{R}^{\times}, b \in \mathbb{R}\}$，乘法定义为 $(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$，证明：

(1). $K = \{(1, b) | b \in \mathbb{R}\} \triangleleft G$ 且 $G/K \cong \mathbb{R}^{\times}$

(2). $H = \{(a, 0) | a \in \mathbb{R}^{\times}\}$ 是否为 G 正规子群

Exercise 4.2 证明：

(1). 群 G 的中心 $Z(G) \triangleleft G$

(2). 设 $H \leq G$，且 $[G : H] = 2$，则 $H \triangleleft G$

Exercise 4.3 令 G 为群，证明若 $G/Z(G)$ 为循环群，则 G 为交换群。

4.2 周五

Exercise 4.4 设 $f : G \to H$ 为群同态，$M \le G$，证明 $f^{-1}(f(M)) = \ker(f)M := \{km|k \in \ker(f), m \in M\}$。

Exercise 4.5 令 G 为群，对于 $x \in G$，定义 $f_x : G \to G$ 为 $f_x(g) = xgx^{-1}$，证明：

(1). $f_x \in Aut(G)$，称为内自同构

(2). $Inn(G) = \{f_x|x \in G\} \le Aut(G)$

(3). $G/Z(G) \cong Inn(G)$

Exercise 4.6 令 $U_n \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ 为 n 阶酉方阵群，$SU_n = \{A \in U_n| \det(A) = 1\}$，证明 $U_n/SU_n \cong S^1$

5 第五次作业

5.1 周三

Exercise 5.1 将以下置换写成不相交轮换的积

(1). $(456)(567)(761)$

(2). $(257)(47)(571)$

(3). $(35)(572)(346)$

Exercise 5.2 当 $n \ge 3$ 时，证明 $n-2$ 个 3 轮换 $(123), (124), \ldots, (12n)$ 是 A_n 的生成元。

Exercise 5.3

(1). 当 $n \ge 3$ 时，令 $\sigma = (12\ldots n) \in S_n$，证明 $C_{S_n}(\sigma) := \{\tau \in S_n|\tau\sigma = \sigma\tau\} =< \sigma >$

(2). 当 $n \ge 3$ 时，证明 $Z(S_n) = 1$

5.2 周五

Exercise 5.4 在 A_4 中，验证 (123) 和 (132) 不共轭。

Exercise 5.5

(1). 对于 $n \geq 2$，考虑 S_n 在 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 上的置换作用，证明 $H \coloneqq \{g \in S_n | gn = n\} \cong S_{n-1}$

(2). 对于 $n \geq 2$，证明 (12) 和 $(12 \ldots n)$ 为 S_n 的一组生成元。
hint: 对 n 归纳，考虑生成元。

Exercise 5.6

(1). 令 G 为群，$H \leq G$ 且 $[G : H] = 2$，证明对任意 $g \in G$，$g^2 \in H$

(2). 证明当 $n \geq 2$ 时，A_n 是 S_n 唯一的指数为 2 的子群
hint: 结合 (1)，考虑 3 轮换作为生成元