

# 《数值分析》之

## 函数逼近

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

<https://faculty.ustc.edu.cn/yxu>

# 向量范数

## 向量范数定义

映射:  $\|\cdot\|: R^n \rightarrow [0, +\infty)$  满足:

- ① 非负性:  $\forall x \in R^n, \|x\| \geq 0, x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0.$
- ② 齐次性:  $\forall x \in R^n, a \in R, \|ax\| = |a|\|x\|$
- ③ 三角不等式:  $\forall x, y \in R^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

称该映射为向量的一种范数.

## 常见向量范数

- ① 1范数:  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- ② 2范数:  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
- ③  $\infty$ 范数:  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$

## 范数的等价性

设 $R_1(x)$ 和 $R_2(x)$ 为任意两种范数，则存在与 $x$ 无关的正常数 $C_1$ 和 $C_2$ ，使得

$$C_1 R_2(x) \leq R_1(x) \leq C_2 R_2(x), \quad \forall x \in R^n$$

## 常用范数的等价关系

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

## 离散内积

定义：函数 $f$ ,  $g$ 的关于离散点列 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的离散内积为：

$$(f, g)_h = \sum_{i=0}^n f(x_i)g(x_i)$$

## 离散范数

定义：函数 $f$ 的离散范数为

$$\|f\|_h = \sqrt{(f, f)_h}$$

该种内积，范数的定义与向量的2范数一致。

还可以定义函数的离散范数为：

$$\|f\|_h = \max_{1 \leq i \leq n} \{f(x_i)\}, \quad \|f\|_h = \sum_{i=1}^n |f(x_i)|$$

- 给出一组离散点，确定一个函数逼近原函数
- 离散数据通常是由观察或者测试得到的，不可避免会有误差
- 需要一种新的逼近原函数的手段：
  - ① 不要求过所有的点（可以消除误差影响）
  - ② 尽可能表现数据的趋势，靠近这些点
- 需要在给定函数空间 $\Phi$ 上找到函数 $\phi$ ，使得 $\phi$ 到 $f$ 的距离最小。函数 $\phi(x)$ 称为 $f(x)$ 在空间 $\Phi$ 上的拟合曲线。
- 曲线拟合在实际中有广泛的应用，特别是在实验、统计等方面。
  - ① 根据实验或观察得到数据，将数据在平面上标出，然后确定拟合曲线的类型
  - ② 拟合曲线的类型已知，需要确定曲线的具体参数

# 曲线拟合的最小二乘问题

## 定义

$f(x)$ 为定义在区间 $[a, b]$ 上的函数,  $\{x_i\}_{i=0}^m$ 为区间上 $m+1$ 个互不相同的点,  $\Phi$ 为给定的某一函数类。求 $\Phi$ 上的函数 $\phi(x)$ 满足 $f(x)$ 和 $\phi(x)$ 在给定的 $m+1$ 点上的距离最小, 如果这种距离取为2-范数的话, 称为最小二乘问题。即: 求 $\phi(x) \in \Phi$ , 使得

$$R_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^m (\phi(x_i) - f(x_i))^2}$$

最小。

# 最小二乘问题的求解

设  $\Phi = \text{span}\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ,

$$\phi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

则最小二乘问题为

$$\|f(x) - (a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) \cdots + a_n\varphi_n(x))\|_h$$

关于系数  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  最小。

# 最小二乘问题的求解

$$\begin{aligned}& \|f(x) - (a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) \cdots + a_n\varphi_n(x))\|_h^2 \\&= \|f\|_h^2 - 2(f, a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) \cdots + a_n\varphi_n(x))_h \\&\quad + \|a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) \cdots + a_n\varphi_n(x)\|_h^2 \\&= \|f\|_h^2 - 2 \sum_{k=0}^n a_k (f, \varphi_k)_h + \sum_{i,k=0}^n a_i a_k (\varphi_i, \varphi_k)_h \\&= Q(a_0, a_1, \cdots, a_n)\end{aligned}$$

由于它关于系数 $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ 最小, 因此有

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial a_i} &= 0, \quad i = 0, 1, \cdots, n \\ \text{i.e.} \quad \sum_{k=0}^n a_k (\varphi_i, \varphi_k)_h &= (f, \varphi_i)_h, \quad i = 0, 1, \cdots, n\end{aligned}$$



# 最小二乘问题的求解

写成矩阵形式有：

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0)_h & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n)_h \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0)_h & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n)_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0)_h \\ \vdots \\ (f, \varphi_n)_h \end{pmatrix}$$

称为拟合曲线的法方程。由 $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ 的线性无关性，知道该方程存在唯一解。

## 注

法方程的系数矩阵是病态的，即在实际求解中，舍入误差会引起解的较大误差，因此在计算机上可用双精度计算。

## 线性拟合

取 $\Phi$ 为线性多项式空间，函数空间的基为 $\{1, x\}$ ，拟合曲线为 $y = a + bx$ ，则法方程为

$$\begin{pmatrix} (1, 1)_h & (1, x)_h \\ (x, 1)_h & (x, x)_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, 1)_h \\ (f, x)_h \end{pmatrix}$$

## 二次拟合

取 $\Phi$ 为二次多项式空间，函数空间的基为 $\{1, x, x^2\}$ ，拟合曲线为 $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ，则法方程为

$$\begin{pmatrix} (1, 1)_h & (1, x)_h & (1, x^2)_h \\ (x, 1)_h & (x, x)_h & (x, x^2)_h \\ (x^2, 1)_h & (x^2, x)_h & (x^2, x^2)_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, 1)_h \\ (f, x)_h \\ (f, x^2)_h \end{pmatrix}$$

形如 $ae^{bx}$ 拟合

取函数空间 $\Phi = \{ae^{bx}, a, b \in R\}$ , 该函数空间并不构成线性空间, 不易得到平方误差极小意义下的拟合曲线 $y = ae^{bx}$ 。但由

$$\ln y = \ln a + bx$$

可以先做 $y^* = a^* + bx$ , 由此得到

$$y = e^{y^*}$$

则法方程为

$$\begin{pmatrix} (1, 1)_h & (1, x)_h \\ (x, 1)_h & (x, x)_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, 1)_h \\ (f, x)_h \end{pmatrix}$$

求如下数据的最小二乘拟合曲线

$x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_i$	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29

- 线性拟合

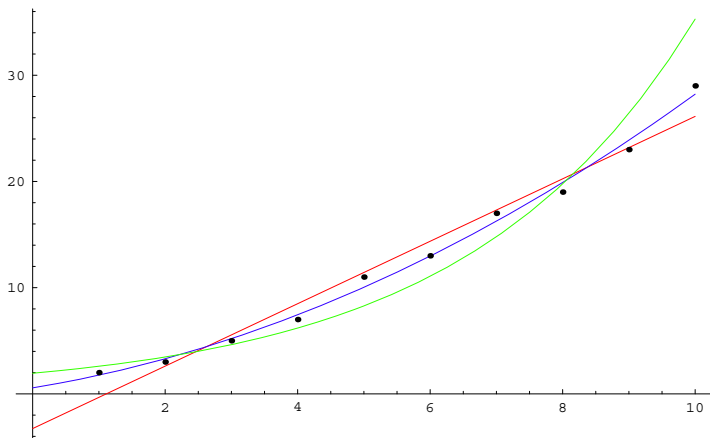
$$y = -3.26667 + 2.93939x$$

- 二次拟合

$$y = 0.566667 + 1.02273x + 0.174242x^2$$

- $ae^{bx}$  拟合

$$y^* = 0.664723 + 0.289876x$$



# 矛盾方程组

给定数据序列 $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , 作拟合直线 $p(x) = a + bx$ 。如果要求直线 $p(x)$ 通过这些点, 则有

$$p(x_i) = a + bx_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

写成矩阵形式有

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

若秩 $(A, b) \neq$ 秩 $A$ , 则方程组 $Ax = b$ 无解, 该方程组被称为矛盾方程组。

# 矛盾方程组的求解

求解一个矛盾方程组

$$\begin{array}{ccc} A & x & = & b \\ m \times n & n \times 1 & & m \times 1 \end{array}$$

$m > n$ , 计算的是在均方误差  $\|Ax - b\|_h$  极小意义下的解, 也就是最小二乘问题。

## 定理

- ①  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $b$  为  $m \times 1$  列向量,  $A^T Ax = A^T b$  成为方程  $Ax = b$  的法方程, 法方程恒有解。
- ②  $A^T Ax = A^T b \iff \|Ax - b\|_h = \min_{y \in R^n} \|Ay - b\|_h$



# 曲线拟合与矛盾方程组的求解

对离散数据 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, m$ 作 $n$ 次多项式曲线拟合, 即求解

$$Q(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n - y_i)^2$$

的极小问题与求解矛盾方程组 $A\alpha = \mathbf{y}$ 是等价的, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

- 函数逼近是与函数插值理论同时发展起来的。其经典问题为：已知区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f$ ，对某一固定整数 $n$ ，找一个次数至多是 $n$ 次的多项式 $p$ ，使其与 $f$ 的偏差最小。这里的偏差可以有不同的定义，如最大值或平方积分。
- 一般的函数逼近问题是：给定一个赋范函数空间 $E$ 以及它的一个子空间 $G$ 。若 $f \in E$ ，计算 $p \in G$ 使得 $\|f - p\|$ 最小。同样这里的 $\|\cdot\|$ 定义也可以有多种选择。所得到的 $p$ 称为 $f$ 的在 $\|\cdot\|$ 意义下的最佳逼近
- 函数逼近中比较成熟的理论是单变量函数的最小二乘理论和Tchebyshev理论

# 最佳逼近的存在性和唯一性

## Theorem

若  $G$  是  $E$  的一个有限维子空间，则  $E$  的每一个元素在  $G$  中至少有一个最佳逼近。

证明：给定  $f \in E$ ，则  $f$  在  $G$  中最佳逼近的候选者  $g$  必定在下述集合中：

$$K = \{g \in G : \|g - f\| \leq \|f\|\}$$

$K$  为有界闭集，而  $G$  是有限维的，因此  $K$  是紧集。而泛函  $g \mapsto \|f - g\|$  是连续的，因此根据紧集上的连续实值函数能达到下确界得证定理。 □

# 内积空间中的逼近理论

## Theorem

设 $G$ 是内积空间 $E$ 的子空间。对 $f \in E, g \in G$ ，下列性质等价：

- ①  $g$ 是 $G$ 中 $f$ 的一个最佳逼近
- ②  $f - g \perp G$

证明：若 $f - g \perp G$ ，对任一 $h \in G$ ，

$$\|f - h\|^2 = \|(f - g) + (g - h)\|^2 = \|f - g\|^2 + \|g - h\|^2 \geq \|f - g\|^2$$

反之，设 $g$ 是 $f$ 的一个最佳逼近。再设 $h \in G, \lambda > 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|f - g + \lambda h\|^2 - \|f - g\|^2 \\ &= \lambda \{2\langle f - g, h \rangle + \lambda \|h\|^2\} \end{aligned}$$

令 $\lambda \rightarrow 0+$ ，得到 $\langle f - g, h \rangle \geq 0$ 。类似地， $\langle f - g, -h \rangle \geq 0$ 。所以 $\langle f - g, h \rangle = 0$ ，即 $f - g \perp G$ 。



# 最佳逼近元是唯一的

## Theorem

设 $G$ 是内积空间 $E$ 的子空间，则 $f \in E$ 在 $G$ 中的最佳逼近元是唯一的。

证明：若 $g_1$ 和 $g_2$ 同时是 $f$ 在 $G$ 中的最佳逼近元，而且 $g_1 \neq g_2$ ，则 $\|g_1 - g_2\| > 0$ 以及 $f - g_1 \perp g_2$ 。

$$\|f - g_2\|^2 = \|(f - g_1) + (g_1 - g_2)\|^2 = \|f - g_1\|^2 + \|g_1 - g_2\|^2 > \|f - g_1\|^2$$

这与 $g_2$ 也为最佳逼近矛盾。



- 设 $\{u_1, \dots, u_n\}$ 是子空间 $G$ 的一组基, 为了计算 $f$ 在 $G$ 中的最佳逼近 $u$ , 待定 $u = \sum_{j=1}^n c_j u_j$ .  $u - f \perp G$ 等价于 $\langle u - f, u_i \rangle = 0, i = 1, \dots, n$ . 由此得到方程组

$$\sum_{j=1}^n c_j \langle u_j, u_i \rangle = \langle f, u_i \rangle$$

这是一个含有 $n$ 个未知数,  $n$ 个线性方程的方程组。其系数矩阵 $G = (\langle u_i, u_j \rangle)$ 称为Gram矩阵。

## Theorem

Gram矩阵为对称正定阵。

计算函数  $f(x) = \sin x$  在空间  $\text{span}(x, x^3, x^5)$  中的最佳逼近。所用范数为

$$\|f\| = \left( \int_{-1}^1 f^2(x) dx \right)^{1/2}$$

解：令  $g_1(x) = x$ ,  $g_2(x) = x^3$ ,  $g_3(x) = x^5$ . 待定最佳逼近元为  $g(x) = c_1x + c_2x^3 + c_3x^5$ , 则由  $\langle g - f, g_i \rangle = 0$  得到如下方程组：

$$c_1 \langle g_1, g_i \rangle + c_2 \langle g_2, g_i \rangle + c_3 \langle g_3, g_i \rangle = \langle f, g_i \rangle, i = 1, 2, 3$$

即

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/5 & 1/7 \\ 1/5 & 1/7 & 1/9 \\ 1/7 & 1/9 & 1/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 1 - \cos 1 \\ -3 \sin 1 + 5 \cos 1 \\ 65 \sin 1 - 101 \cos 1 \end{pmatrix}$$

系数矩阵为 Hilbert 矩阵，一个著名的病态矩阵。

# 标准正交基

- 根据幂基计算最佳逼近元，计算过程的稳定性不好。而下面的定理说明标准正交基的优势

## Theorem

设 $G$ 的标准正交基为 $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ,  $f \in E$ .

则 $g = \sum_{i=1}^n c_i g_i$ 为 $f$ 在 $E$ 中最佳逼近当且仅当 $c_i = \langle f, g_i \rangle$ .

证明：  $g = \sum_{i=1}^n c_i g_i$ 为 $f$ 在 $E$ 中最佳逼近  $\iff f - g \perp G \iff f - g \perp g_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

$$\begin{aligned} \left\langle f - \sum_{i=1}^n c_i g_i, g_j \right\rangle &= \langle f, g_j \rangle - \sum_{i=1}^n c_i \langle g_i, g_j \rangle \\ &= \langle f, g_j \rangle - c_j = 0 \end{aligned}$$





# 标准正交基(续)

- 可以应用Gram-Schmidt过程把一般的基转化为标准正交基
- 前例中 $\{x, x^3, x^5\}$ 的转化结果为 $\{x/\sqrt{2/3}, (5x^3 - 3x)/(2\sqrt{2/7}), (63x^5 - 70x^3 + 15x)/(8\sqrt{2/11})\}$
- 如果内积定义满足 $\langle fg, h \rangle = \langle f, gh \rangle$ , 从单项式函数 $1, x, \dots$ 出发, 应用Gram-Schmidt过程的结果称为正交多项式
- 常用的内积

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

满足上述要求

## Theorem

如下定义的多项式序列是正交的：

$$p_n(x) = (x - a_n)p_{n-1}(x) - b_np_{n-2}(x), \quad n \geq 2$$

其中  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x - a_1$ ,

$$a_n = \frac{\langle xp_{n-1}(x), p_{n-1}(x) \rangle}{\langle p_{n-1}(x), p_{n-1}(x) \rangle}$$
$$b_n = \frac{\langle xp_{n-1}(x), p_{n-2}(x) \rangle}{\langle p_{n-2}(x), p_{n-2}(x) \rangle}$$

所用的内积满足  $\langle fg, h \rangle = \langle f, gh \rangle$

证明：由归纳定义可知每个 $p_n$ 都是首一 $n$ 次多项式，因此 $a_n$ 和 $b_n$ 的定义中分母不为零。

下面对 $n$ 归纳证明： $\langle p_n, p_i \rangle = 0, i = 0, 1, \dots, n-1$ .

$n=0$ 没有需要证明的。 $n=1$ 时由 $a_1$ 的定义可以验证成立。

设 $n-1$ 时成立， $n \geq 2$ 。那么可以直接验证

$$\langle p_n, p_{n-1} \rangle = \langle p_n, p_{n-2} \rangle = 0$$

对 $i = 0, 1, \dots, n-3$ ,

$$\begin{aligned} \langle p_n, p_i \rangle &= \langle xp_{n-1}, p_i \rangle - a_n \langle p_{n-1}, p_i \rangle - b_n \langle p_{n-2}, p_i \rangle \\ &= \langle p_{n-1}, xp_i \rangle \\ &= \begin{cases} \langle p_{n-1}, p_{i+1} + a_{i+1}p_i + b_{i+1}p_{i-1} \rangle = 0 & i \geq 1 \\ \langle p_{n-1}, p_1 + a_1p_0 \rangle = 0 & i = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



# Legendre多项式

- 当内积定义为

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

时生成的正交多项式称为Legendre多项式

- 前几个多项式为

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x$$

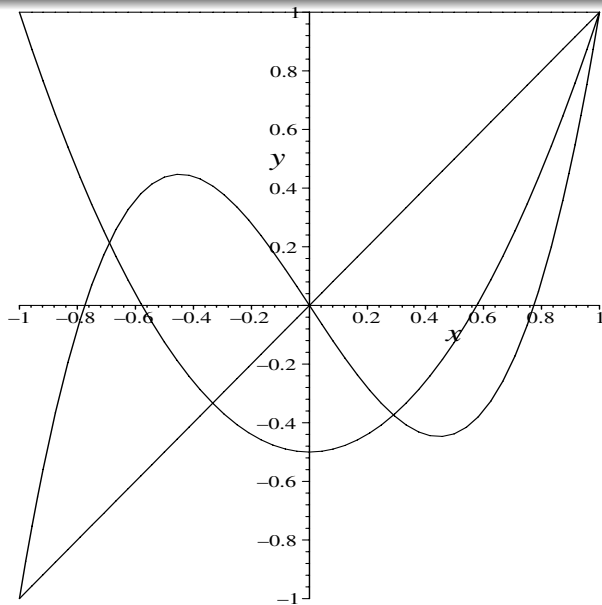
$$p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$p_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

$$p_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$$

$$p_5(x) = x^5 - \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{21}x$$

# Legendre多项式



- 应用内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

时对应的正交多项式为Tchebyshev多项式

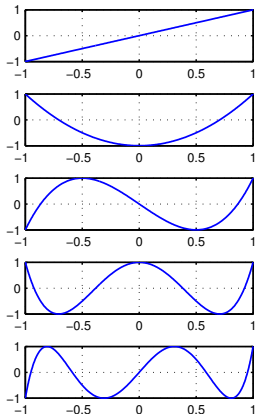
- 应用内积

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$$

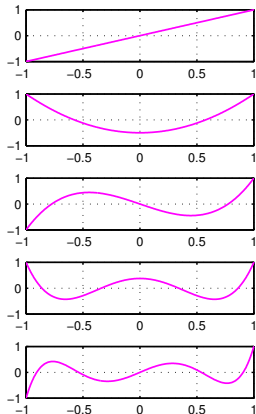
时对应的正交多项式为Jacobian多项式

# Tchebyshev 多项式与 Legendre 多项式

Chebyshev



Legendre



- 给定  $u = \sum_{k=0}^n c_k p_k$ , 其中  $p_i$  为某一正交多项式, 那么可以应用下述算法计算  $u(x)$  的值:

```
dn+2 ← 0; dn+1 ← 0
for k = n to 0 step -1 do
    dk ← ck + (x - ak+1)dk+1 - bk+2dk+2
end do
```

- 有效性验证:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^n [d_k - (x - a_{k+1})d_{k+1} + b_{k+2}d_{k+2}]p_k(x) \\ &= d_0p_0(x) + d_1[p_1(x) - (x - a_1)p_0(x)] \\ &\quad + \sum_{k=2}^n d_k[p_k(x) - (x - a_k)p_{k-1}(x) + b_kp_{k-2}(x)] \\ &= d_0 \end{aligned}$$



## Theorem

前面定义的正交多项式 $p_n$ 是所有的首一 $n$ 次多项式中范数最小的。

证明：任意首一 $n$ 次多项式可以写作 $q = p_n - \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i$ .  $\|q\|$ 具有最小范数相当于在 $\Pi_{n-1}$ 空间中寻找 $p_n$ 的最佳逼近。因此应当有 $q \perp \Pi_{n-1}$ , 从而需选取 $c_i = 0$ . □

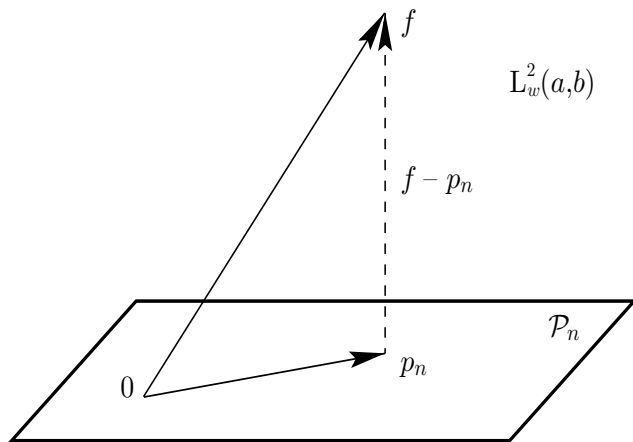
- 给定空间  $G$  的一组标准正交基  $[u_1, \dots, u_n]$ , 定义正交投影算子:

$$P_n f = \sum_{i=1}^n \langle f, u_i \rangle u_i$$

- 算子  $P_n$  具有如下性质:

- ①  $P_n$  为  $E$  到  $G$  的线性映射
- ②  $P_n^2 = P_n$ , 因此称为投影算子
- ③  $f - P_n f \perp G$
- ④  $P_n f$  是  $f$  在  $G$  中的最佳逼近
- ⑤ 每个  $P_n$  都是自伴的, 即  $\langle P_n f, g \rangle = \langle f, P_n g \rangle$

# 正交投影



- 考虑定义在给定拓扑空间 $X$ 上的全体实值连续函数形成的空间 $C(X)$ ，这里 $X$ 为紧的Hausdorff空间
- 定义范数为

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

则 $C(X)$ 成为一个赋范空间(从而是Banach空间)

- $C(X)$ 中的最佳逼近问题为：给定 $f \in C(X)$ 以及 $C(X)$ 的一个有限维子空间 $G$ ，计算 $g \in G$ 使得

$$\|f - g\| = \text{dist}(f, G) := \inf_{\bar{g} \in G} \|f - \bar{g}\|$$

- 由上节“最佳逼近存在性定理”可知 $g$ 是存在的

例:用 $\Pi_1$ 中元素在区间 $[a, b]$ 上最佳逼近 $f(x) \in C^2[a, b]$

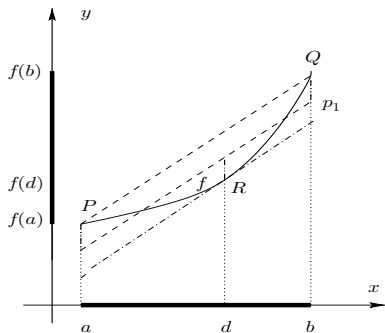
- 线性函数为了成为最佳逼近存在3个极大偏差的点, 它们是 $a$ ,  $b$ 以及其间的一点 $d$ , 记极大偏差为 $\delta$ , 最佳逼近为 $p(x)$ , 则应有

$$p(a) - f(a) = \delta$$

$$p(d) - f(d) = -\delta$$

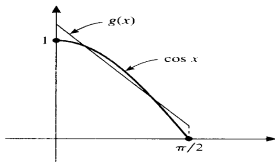
$$p(b) - f(b) = \delta$$

$$p'(d) - f'(d) = 0$$



- 用  $\Pi_1$  中元素在区间  $[0, \pi/2]$  上最佳逼近  $f(x) = \cos x$

如左所示线性函数为了成为最佳逼近，还需要向下移动一些，从而减小极大偏差。此外，其斜率还可以调整。为了成为最佳逼近，存在3个极大偏差的点，它们是  $0$ ,  $\pi/2$  以及其间的一点  $\xi$ ，记极大偏差为  $\delta$ ，最佳逼近为  $g(x)$ ，则应有



$$g(0) - f(0) = \delta$$

$$g(\xi) - f(\xi) = -\delta$$

$$g(\pi/2) - f(\pi/2) = \delta$$

$$g'(\xi) - f'(\xi) = 0$$