Lec3 Note of Abstract Algebra

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 17 日

例 2.4. 由正 n 边形保持自身不变的所有旋转与翻转构成的群，称为**二面体群 (Dihedra group)**，记为 D_n。

定义 2.4. 设 G 为群，$H \subset G$ 为非空子集。称 H 为 G 的**子群 (Subgroup)**，若 H 在 G 的乘法运算下形成一个群。记作 $H \leq G$。

若 $H \leq G$ 且 $H \neq G$，称 H 为 G 的**真子群 (Proper subgroup)**，记为 $H < G$。

设 $H \leq G$，那么

(1) $\forall\, a, b \in H,\ ab \in H$；

(2) $1_H \cdot 1_H = 1_H \Rightarrow 1_H = 1_G \in G$；

(3) $\forall\, a \in H,\ a^{-1} \in H$。

命题 2.1. 设 $\varnothing \neq H \subset G$，则下述等价：

1. $H \leq G$；
2. *(1)(2)(3)*；
3. $\forall\, a, b \in H,\ ab^{-1} \in H$。

证明. 仅证明 3⇒2。

取 $b = a \in H$，则 $aa^{-1} = 1_G \in H$。

对 $\forall\, a \in H$，则 $1 \cdot a^{-1} = a^{-1} \in H$。

$\forall\, a, b \in H \Rightarrow a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$。 □

例 2.5. 设 $\varnothing \neq A \subset G,\ |A| = n < \infty$，则下述等价：

1. $A \leq G$；
2. $G_A = \{g \in G \mid gA = A\} = A$，这里 $gA = \{ga \mid a \in A\} \subset G$；
3. $1 \in A$ 且 $|G_A| = |A| = n$。

评论. $G_A \leq G$：

- $1 \cdot A = A \Rightarrow\ 1 \in G_A$；
- $aA = A,\ bA = A \Rightarrow (ab)A = a(bA) = aA = A \Rightarrow ab \in G_A$；
- $aA = A \Rightarrow A = a^{-1}(aA) = a^{-1}A \Rightarrow a^{-1} \in G_A$。

证明. 1⇒2：

若 $A \le G$，则 $xA = A \Rightarrow x \cdot 1 = x \in A$，即 $x \in G_A \Rightarrow x \in A$，反过来亦成立。

2⇒3：

显然。

3⇒1：

$1 \in A$, $|G_A| = n$，则 $\forall\, g \in G_A$, $gA = A \Rightarrow g \cdot 1 \in A$，即 $G_A \subset A$，而 $|G_A| = |A|$，所以 $G_A = A$。 □

例 2.6. 对任何群 G，$G \le G$, $\{1_G\} \le G$，称为 G 的**平凡子群**。

例 2.7. $A_n \le S_n$，A_n 是由偶置换形成的子群。

例 2.8. 称 $GL_n(\mathbb{F})$ 的子群为**典型群 (Classical group)**，这里 $\mathbb{F}$ 为域，如 $\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \cdots$。有以下几种：

(1) **一般线性群 (General linear group)**$GL_n(\mathbb{F})$。

特殊线性群 (Special linear group)$SL_n(\mathbb{F}) = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid \det A = 1\}$。

(2) 设 $X \in GL_n(\mathbb{F})$ 为对称或反对称阵。

则 $G(X) := \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid A^T X A = X\} \le GL_n(\mathbb{F})$。

这是因为：

- $I_n \in G(X)$；
- $A^T X A = X \Rightarrow (A^{-1})^T A^T X A A^{-1} = (A^{-1})^T X A^{-1} = X$，即 $A^{-1} \in G(X)$；
- $A^T X A = X$, $B^T X B = X \Rightarrow (AB)^T X AB = B^T A^T X AB = B^T X B = X$，即 $AB \in G(X)$。

特别取 $X = I_n$ 时，得到**正交群 (Orthogonal group)**，记为 $O_n(\mathbb{F})$。

记 $SL_n(\mathbb{F}) \cap O_n(\mathbb{F}) = SO_n(\mathbb{F})$，称为**特殊正交群 (Special orthogonal group)**。

评论. $H_i \le G$, $i \in I \Rightarrow \bigcap\limits_{i \in I} H_i \le G$，但一般而言 $\bigcup\limits_{i \in I} H_i$ 未必是 G 的子群。

若 $H_i, i \in I$ 为 $\mathcal{P}(G)$ 的全序子集，则 $\bigcup\limits_{i \in I} H_i \le G$。

取 $X = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$，则记 $G(X) = O_{p,q}(\mathbb{F})$，相应地有 $SO_{p,q}(\mathbb{F})$，称为**广义正交群**。

取 $X = \begin{pmatrix} & I_n \\ -I_n & \end{pmatrix}$，则记 $G(X) = Sp_{2n}(\mathbb{F})$，称为**辛群 (Symplectic group)**。

评论. $Sp_{2n}(\mathbb{F}) \le SL_{2n}(\mathbb{F})$。

(3) $X \in GL_n(\mathbb{C})$ 为 Hermite 阵。

则 $G(X) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^H X A = X\} \le GL_n(\mathbb{C})$。特别取 $X = I_n$，则 $G(I_n) = U_n$。称该群为**酉群 (Unitary group)**。同样地有**特殊酉群 (Special unitary group)**$SU_n = U_n \cap SL_n(\mathbb{C})$。

例 2.9.

$$O_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -\cos\theta & \mp\sin\theta \\ \mp\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$Sp_2 = SL_2.$$

$$U_1 = \{z \mid \overline{z}z = 1\} = S^1.$$

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \middle| |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} = S^3.$$

3 群的直积

设有群 G, H，定义

$$G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\},\ (g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) := (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

定义 3.1. $G \times H$ 在上述运算下形成一个群，称为群 G 和 H 的**直积 (Direct product)**。

评论. 若 $G_1 \leq G, H_1 \leq H$，则 $G_1 \times H_1 \leq G \times H$。

$|G| < \infty, |H| < \infty \Rightarrow |G \times H| = |G| \cdot |H| < \infty$。

$G \leftrightarrow G \times \{1_H\} \leq G \times H,\ H \leftrightarrow \{1_G\} \times H \leq G \times H$。