题目一. $f(x)=x^4+3x^2+ax+b$, $g(x)=x^2-ax+2$

若 $g|f$. 求 a, b

解法一: 待定系数法.

设 $f(x)=g(x)h(x)$. 其中 $\deg h=4-2=2$

设 $h(x)=x^2+cx+\frac{b}{2}$

则有 $x^4+3x^2+ax+b=(x^2-ax+2)(x^2+cx+\frac{b}{2})$

比较 x^3 系数 $0=c-a$

〃 〃 x^2 〃 〃 $3=2-ac+\frac{1}{2}b$

〃 〃 x 〃 〃 $a=-\frac{1}{2}ab+2c$

解得 $a=0$. $b=2$.

解法二: 长除.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+ax+a^2+1 \\
\hline
x^2-ax+2 & x^4+0x^3+3x^2+ax+b \\
 & x^4-ax^3+2x^2 \\
\hline
 & ax^3+x^2+ax+b \\
 & ax^3-a^2x^2+2ax \\
\hline
 & (a^2+1)x^2-ax+b \\
 & (a^2+1)x^2-a(a^2+1)x+2(a^2+1) \\
\hline
 & a^3x+b-2(a^2+1)
\end{array}
$$

故 $f(x)=g(x)\cdot(x^2+ax+a^2+1)+\underbrace{a^3x+b-2(a^2+1)}_{r(x)}$

由 $g|f \Rightarrow \deg r(x)=0$

$\Rightarrow a^3=0,\quad b-2(a^2+1)=0$

$\Rightarrow a=0,\quad b=2$ □

题二: $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2.$ $\quad g(x) = x^2 - x + 1$

求 $\gcd(f, g)$. 及 u, v s.t. $uf + vg = \gcd$

且 $\deg u < 2.$ $\deg v < 3.$

解: Euclid 算法:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x + 1 \\
\hline
x^2 - x + 1 & 3x^3 - 2x^2 + x + 2 \\
 & \underline{3x^3 - 3x^2 + 3x} \\
 & x^2 - 2x + 2 \\
 & \underline{x^2 - x + 1} \\
 & -x + 1
\end{array}
$$

于是 $f(x) = g(x)(3x+1) + (-x+1)$ ①

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 0 \\
\hline
x - 1 & x^2 - x + 1 \\
 & \underline{x^2 - x} \\
 & 1
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ $g(x) = x(x-1) + 1$ ②

① $\times\, x$ + ② 得

$x f(x) + g(x) = (3x^2 + x) g(x) + 1$

$\Rightarrow$ $x f(x) + (1 - 3x^2 - x) g(x) = 1$

$u(x) = x,$ $\quad v(x) = 1 - 3x^2 - x.$

由课上 Thm, 满足 deg 条件的 u, v 唯一.

□