MATH 3011 运筹学 **秋季 2023**

Lecture 2: 线性规划介绍

Lecturer: 陈士祥 *Scribes:* 陈士祥、*ChatGPT*

1 线性规划简介

线性规划（Linear Programming, LP）是数学优化的一个重要分支，旨在最大化或最小化线性目标函数，同时受到线性不等式（称为约束条件）的限制。它是由俄国数学家 Leonid Kantorovich 和美国数学家 George Dantzig 在 20 世纪 40 年代独立发展的。

发展历史：

- 早期发展：1939 年，Kantorovich 发表了关于线性规划理论的论文。他提出了一种用于资源分配的方法，后来这种方法被称为线性规划。
- 单纯形法：1947 年，George Dantzig 发明了单纯形法，这是解决线性规划问题的第一个有效的算法，标志着线性规划作为一门学科的诞生。
- 后续发展：随后几十年中，线性规划领域经历了迅速发展，包括理论的深化、算法的改进，以及与其他数学领域的交叉融合，如对偶理论和内点法等。

应用场景： 线性规划广泛应用于各个领域，包括但不限于：

- 经济学：资源分配、成本最小化、利润最大化等。
- 军事：在第二次世界大战中用于军事物资的分配和后勤计划。
- 生产与制造：产品混合选择、生产计划、物流等。
- 服务行业：人力资源规划、运输路线设计、网络设计等。
- 金融：投资组合优化、风险管理等。

2 线性规划

2.1 例: 线性规划在饮食健身与营养均衡中的应用

以饮食健身和营养均衡为例，线性规划可以帮助制定一个既经济又满足所有营养需求的饮食计划。

1. **定义决策变量**：
   假设我们有 N 种食物，决策变量 x_i 表示第 i 种食物的摄入量。
2. **建立目标函数**：
   最小化总成本。例如，每种食物的单位成本为 c_i，我们想最小化 $\sum_{i=1}^{N} c_i x_i$。
3. **建立约束条件**：
   - 营养约束：每种食物含有不同的营养成分，如蛋白质、碳水化合物、脂肪、维生素和矿物质等。如果每日营养需求是已知的，我们可以设定约束条件来保证摄入量满足最低营养需求。
   - 能量约束：设定总热量的上限，以保证不超过个人维持体重或减肥的热量需求。
   - 食物量约束：考虑到实际摄入量的可能性，每种食物的摄入量应在合理的范围内。

线性规划模型示例

假设我们有三种食物：鸡肉、大米和蔬菜。我们需要确保蛋白质、碳水化合物和脂肪的最低摄入量分别为 P、C 和 F。而每日的能量最大摄入量为 K。

决策变量：

- x_1：鸡肉克数
- x_2：大米克数
- x_3：蔬菜克数

目标函数：

$$\text{Minimize} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

约束条件：

$$\begin{aligned}
&p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \geq P \\
&a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \geq C \\
&f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 \geq F \\
&k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 \leq K \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

其中，c_i, p_i, a_i, f_i, k_i 分别是每种食物的单位成本、单位蛋白质、单位碳水化合物、单位脂肪和单位热量。P、C、F 和 K 是蛋白质、碳水化合物、脂肪和总热量的日推荐摄入量。

线性规划的求解：通过构建这个模型，我们可以使用线性规划算法（如单纯形法或内点法）来求解决策变量的最优值，这些值将告诉我们为了最小化成本，同时满足所有营养和热量需求，每种食物需要摄入多少克。

2.2 线性规划图解法

对于非常简单的线性规划问题，我们可以通过图解的方法得到最优解。例如，考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的问题：

$$
\begin{aligned}
\min -x_1 - x_2 & \\
\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 \le 3 & \\
2x_1 + x_2 \le 3 & \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. &
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

可以做出可行域如下图

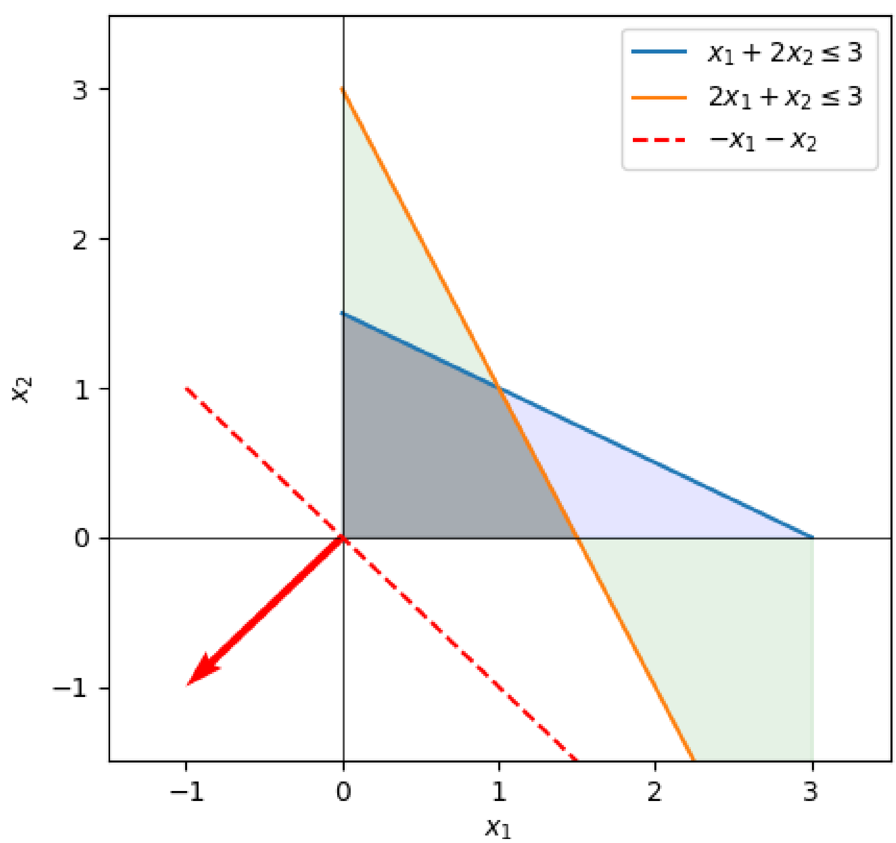

图 2.1: 问题(2.1)可行域图示，灰色区域即为可行域。红色箭头方向指向目标函数值的上升方向。故逆着红色箭头，移动红色虚线，达到可行域的某个顶点达到最小值。图中，$(1,1)$ 即为最优点。

2.3 线性规划一般形式

我们针对实际问题，可以列出如下问题形式：

$$
\begin{aligned}
\min(\max) \quad & z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le (=, \ge) b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le (=, \ge) b_m
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

我们可以把(2.2)转化为如下一般形式：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

若优化目标为最大化 (Maximize) 函数值，则可以在目标函数添加负号得到等价的最小化 (Minimize) 的问题。若约束中既有 $\le$ 也有 $\ge$，也可以通过改变符号的方式统一为 $\ge$ 的约束。

故，我们有线性规划矩阵一般形式为：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^\top x \\
\text{s.t.} \quad & Ax \ge b.
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

故，约束都是凸多面体。

2.4 线性规划的标准形式

线性规划的标准形式是理解和求解线性规划问题的一个基础和重要步骤。它为理论分析和算法实现提供了一个清晰、统一的框架。当我们研究线性规划理论时，一般形式更为方便。而在计算时，使用标准形式更为方便。

线性规划问题总可以写成如下标准形式：

$$
\text{(LP)} \qquad
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, \cdots, m \\
& x_j \ge 0, j = 1, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

或者用矩阵表示为:

$$\text{(LP)} \qquad \begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{c}$ 是 n 维列向量, $\mathbf{b}$ 是 m 维列向量。$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ 表示所有分量 $x_i \geq 0$.

对于非标准形式, 可能的标准化步骤有:

- 目标函数 $\max f(\mathbf{x}) \longrightarrow \min -f(\mathbf{x})$
- 不等式约束的等式化 (引入松弛变量或者剩余变量)
- 自由变量的非负化 $x_j = x_j^{'} - x_j^{''}, x_j^{'}, x_j^{''} \geq 0$

Proposition 2.1 线性规划一般形式和标准形式等价。*(两个优化问题等价的意义是指, 对于一个优化问题的可行解, 我们总可以找到另一个问题对应的可行解, 使得它们的目标函数值相等。也有条件更弱的阐述: 两个优化问题等价, 如果给定一个问题的最优解, 可以构造出另一个问题的最优解, 并且最优值相同。)*

Proof: 对于一般形式(2.4),

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \end{aligned}$$

我们引入松弛变量 $s \in \mathbb{R}^m$, $s \geq 0$, 使得有等式 $Ax - s = b$ 成立. 另外, 可以将 x 记为 $x' - x''$, $x' \geq 0, x'' \geq 0$. 这是因为任意的实数总可以写成两个非负实数的差。

故问题(2.4)可以写为

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x' - c^T x'' + 0_m^T s \\ \text{s.t.} \quad & Ax' - Ax'' - s = b \\ & x' \geq 0, x'' \geq 0, s \geq 0. \end{aligned}$$

这里 0_m 表示 m 维零向量。令 $\bar{c}^T = (c^T, -c^T, 0_m^T)$, $\bar{A} = [A, -A, -I_m]$, 这里 I_m 表示 $m \times m$ 的单位矩阵, $\bar{x}^T = ((x')^T, (x'')^T, s^T)$, 我们有

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{c}^T \bar{x} \\ \text{s.t.} \quad & \bar{A}\bar{x} = b, \\ & \bar{x} \geq 0. \end{aligned}$$

此即为标准形式(2.6). 故, 一般形式 LP 总有标准形式 LP 与其对应。

反之, 对于标准形式, 我们可以将 $Ax = b$ 写为 $Ax \leq b$ 和 $Ax \geq b$. 这样也可以得到一般形式的 LP。■

作业 2.1 证明：对于标准形式，如果矩阵 $A \in \mathrm{R}^{m\times n}$ 的秩为 $k, k < m$，其行向量为 $a_1^\top, a_2^\top, \ldots, a_m^\top$. 那么 A 的 k 个线性无关的行向量 $a_{i_1}^\top, a_{i_2}^\top, \ldots, a_{i_k}^\top$ 组成的子矩阵 $\tilde{A}$ 和对应的 $\tilde{b}$，有 $P = Q$，这里 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$, $Q = \{x \mid \tilde{A}x = \tilde{b}, x \geq 0\}$.

因此，不失一般性，我们考虑标准形式可以假设 A 是行满秩的。