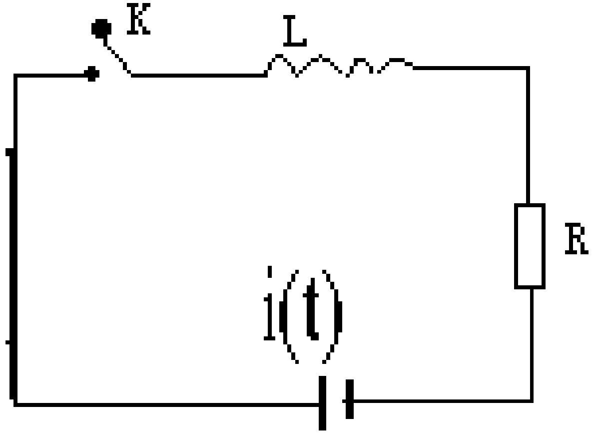
微分方程

一阶线性方程的三个例子

例1. *R-L*串联电路: 由电感*L*,电阻*R*和电源所组成的串联电路,如下图所示,其中电感*L*,电阻*R*和电源的电动势*E*均为常数,试求当开关*K*合上后,电路中电流强度*I*与时间*t*之间的关系。



R-L 电路

- **电路的Kirchhoff第二定律:**

在闭合回路中,所有支路上的电压的代数和为零。

解: 设当开关K合上后, 电路中在时刻t的电流强度为$I(t)$,则电流经过电感L, 电阻R的电压降分别为 $L\frac{dI}{dt}, RI$, 于是由Kirchhoff第二定律, 得到

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E.$$

取开关闭合时的时刻为0, 即$I(0)=0.$

解线性方程初值问题: $\frac{dI}{dt}=-\frac{R}{L}I+\frac{E}{L}, I(0)=0.$

得解为: $I(t)=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$

例2. 设$P(t)$是以ω为周期的连续函数，证明：

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=0 \text{ 的非零解以}\omega\text{为周期} \Leftrightarrow \int_0^{\omega}P(t)\mathrm{d}t=0.$$

证：设$x(t)$是方程的非零解，满足$x(t_0)=x_0$，则 $x(t)=x_0e^{-\int_{t_0}^{t}P(s)ds}$.

必要性：由$x(t+\omega)=x(t)$知$x_0e^{-\int_{t_0}^{t+\omega}P(s)ds}=x_0e^{-\int_{t_0}^{t}P(s)ds} \Rightarrow \int_t^{t+\omega}P(s)ds=0.$

再由$P(t)$的周期条件得$\int_0^{\omega}P(t)\mathrm{d}t=0.$

充分性：若$\int_0^{\omega}P(t)\mathrm{d}t=0$，则$x(t+\omega)=x_0e^{-\int_{t_0}^{t+\omega}P(s)ds}=x_0e^{-\int_{t_0}^{t}P(s)ds}\cdot e^{-\int_{t}^{t+\omega}P(s)ds}$

$$=x_0e^{-\int_{t_0}^{t}P(s)ds}\cdot e^{-\int_{0}^{\omega}P(s)ds}=x_0e^{-\int_{t_0}^{t}P(s)ds}=x(t).$$

例3. 设$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上连续且有界，证明方程 $\dfrac{dx}{dt}+x=f(t)$ 在$(-\infty,+\infty)$上存在一个有界解。

证. 方程通解为 $x=e^{-t}[C+\int_0^t f(s)e^s\mathrm{d}s].$

取$C=\int_{-\infty}^0 f(s)e^s\mathrm{d}s$(由条件知此广义积分收敛),得解

$$x=e^{-t}\int_{-\infty}^t f(s)e^s\mathrm{d}s.$$

由条件可令$|f(t)|\le M,\forall t\in(-\infty,+\infty)$,则易知$|x(t)|\le M,\forall t\in(-\infty,+\infty)$.

此即为方程的一个有界解，证毕。