线性代数B2
第二十二讲

陈发来

2022.11.02

第三章 线性空间

§4 商空间

Definition

定义1 设V是线性空间. $W \subset V$是子空间. $\alpha, \beta \in V$, 如果$\alpha - \beta \in W$则称α, β**模W同余**.

同余是一种等价关系:

1. **自反性** $\alpha \equiv \alpha \pmod W$.
2. **对称性** 若$\alpha \equiv \beta \pmod W$, 则$\beta \equiv \alpha \pmod W$.
3. **传递性** 若$\alpha \equiv \beta \pmod W$, $\beta \equiv \gamma \pmod W$, 则$\alpha \equiv \gamma \pmod W$.

按同余关系, V中的向量可以划分为同余类, 同一类的向量彼此同余, 不同类的向量彼此不同余. 每一个同余类可以表示为$\tilde{\alpha} = \{\alpha + W\} := \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in W\}$, $\alpha \in V$.

第三章 线性空间

用V/W表示所有模W的同余类的集合. 在V/W中定义线性运算:

$$\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=\widetilde{\alpha+\beta},\quad \lambda\tilde{\alpha}=\widetilde{\lambda\alpha}.$$

上述定义是定义好的(well-defined). 任取$\alpha'\in\tilde{\alpha}$, $\beta'\in\tilde{\beta}$, $\alpha'-\alpha\in W$, $\beta'-\beta\in W$, 故$(\alpha'+\beta')-(\alpha+\beta)\in W$, 即$\alpha'+\beta'\equiv\alpha+\beta\ (\mod W)$, $\widetilde{\alpha'+\beta'}=\widetilde{\alpha+\beta}$.
同理可证$\lambda\alpha'\equiv\lambda\alpha\ (\mod W)$, 即$\widetilde{\lambda\alpha'}=\widetilde{\lambda\alpha}$.

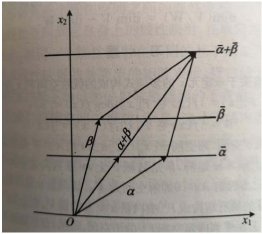
易证上述运算满足八条规则, 因此我们有

Theorem

定理1 V/W在上述运算下构成线性空间, 称为**商空间**. W是该空间的零元素.

Example

例1 设$V=\mathbb{R}^2$, $W=\{(x_1,0)\,|\,x_1\in\mathbb{R}\}$. 对$\alpha=(x_1,y_1)$, $\tilde{\alpha}=\{(t,y_1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$. 对$\beta=(x_2,y_2)$, $\tilde{\beta}=\{(t,y_2)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$. 于是$\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}=\{(t,y_1+y_2)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$, $\lambda\tilde{\alpha}=\{(t,\lambda y_1)\,|\,t\in\mathbb{R}\}$. 显然线性运算满足八条运算规则.



设W'是W关于V的补空间, 即$V=W\oplus W'$. 考虑映射

$$\sigma: V/W\to W',\ \sigma(\tilde{\alpha})=\alpha_2,$$

其中$\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in W+W'$. 下面证明$\sigma$是同构映射.

第三章 线性空间

首先说明σ是定义好的. 设$\alpha' \in \tilde{\alpha}$, $\alpha' = \alpha_1' + \alpha_2' \in W + W'$, 则$\alpha' - \alpha \in W$, $\alpha_1' - \alpha_1 \in W$, $\alpha_2' - \alpha_2 \in W'$. 另一方面由 $\alpha_2' - \alpha_2 = (\alpha' - \alpha) - (\alpha_1' - \alpha_1) \in W$知$\alpha_2' - \alpha_2 \in W \cap W'$. 故$\alpha_2' = \alpha_2$, 即$\sigma$是定义好的.
对任意$\alpha \in W'$, 则$\sigma(\tilde{\alpha}) = \alpha$. 这说明$\sigma$是满射.
对任意$\alpha \in W'$, 设$\sigma(\tilde{\alpha}_1) = \sigma(\tilde{\alpha}_2) = \alpha$. 则$\alpha_1 = \beta_1 + \alpha$, $\alpha_2 = \beta_2 + \alpha$, $\beta_1, \beta_2 \in W$. 于是$\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2 \in W$, 即$\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$. 因此$\sigma$是单射.
设$\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_1 \in W + W'$, $\alpha_2 = \beta_2 + \gamma_2 \in W + W'$, 则$\alpha_1 + \alpha_2 = (\beta_1 + \beta_2) + (\gamma_1 + \gamma_2) \in W + W'$. 于是 $\sigma(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2) = \sigma(\widetilde{\alpha_1 + \alpha_2}) = \gamma_1 + \gamma_2 = \sigma(\tilde{\alpha}_1) + \sigma(\tilde{\alpha}_2)$.
$\sigma(\lambda\tilde{\alpha}_1) = \sigma(\widetilde{\lambda\alpha_1}) = \lambda\gamma_1 = \lambda\sigma(\tilde{\alpha}_1)$. 即$\sigma$保持线性性.

综述σ是V/W到W'的同构映射.

第三章 线性空间

Theorem

定理2 *设W是线性空间V的子空间，W'是W的补空间．则商空间V/W与W'同构．*

Corollary

推论1 $\dim V/W = \dim V - \dim W$．称$\dim V/W$是$W$的余维数，记为$codim\, W$．

Example

例2 是$V = F[t]$，W是所有被t^n整除的多项式全体构成的子空间．求$codim\, W$．

解.

对任意$f(t) \in F[t]$，设$f(t) \equiv r(t) \mod t^n$，$\deg(r) \leq n-1$．
即知$f(t) = q(t)t^n + r(t) \in W + F_{n-1}[t]$．因而
$F[t] = W \oplus F_{n-1}[t]$．进而$codim\, W = \dim F_{n-1}[t] = n$．

第三章 线性空间

作业

1 在$V=F^{2\times 2}$中，令V_1是形如$\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$的矩阵构成的集合. 证明: V_1为$F^{2\times 2}$的子空间. 并求商空间V/V_1.

2 设V_1, V_2是V的子空间, 且V_1, V_2的余维数有限. 则

$$codim(V_1+V_2)+codim(V_1\cap V_2)=codim(V_1)+codim(V_2).$$

§5 对偶空间

Definition

定义1. 设V是数域F上的线性空间. 称$f:V\to F$是V上的线性函数，如果f满足

$$f(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})=\lambda f(\mathbf{x})+\mu f(\mathbf{y}),\qquad \lambda,\mu\in F,\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in V.$$

V中任意两个线性函数f,g可以定义加法与数乘运算：

$$(f+g)(\mathbf{x}):=f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x}),\quad (\lambda f)(\mathbf{x})=\lambda f(\mathbf{x}).$$

在上述运算下，V上线性函数全体构成一个线性空间，称为V的对偶空间。

Definition

定义2. V上线性函数的全体构成的线性空间称为V的对偶空间，记为V^*.

Theorem

定理1 设V是F上n维线性空间，则V的对偶空间V^*也是n维线性空间. 并且，设$e_1,\ldots,e_n$是V的一组基，$e^1,\ldots,e^n$是V^*中满足$e^i(e_j)=\delta_{ij}$的线性函数。则$e^1,\ldots,e^n$是V^*的一组基，称为$e_1,\ldots,e_n$的对偶基。

证明.

首先证$e^1,\ldots,e^n$线性无关. 实际上, 设

$$\lambda_1 e^1+\ldots+\lambda_n e^n=0.$$

上式两边作用到e_i上得

$$\lambda_1 e^1(e_i)+\ldots+\lambda_n e^n(e_i)=\lambda_i=0,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

即$e^1,\ldots,e^n$线性无关.

□

第三章 线性空间

接下来证明: 对任意$f \in V^*$,

$$f = f(e_1)e^1 + \ldots + f(e_n)e^n := \tilde{f}.$$

实际上, 上式右边作用到e_i有

$$\tilde{f}(e_i) = (f(e_1)e^1 + \ldots + f(e_n)e^n)(e_i) = f(e_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

于是对任意$\mathbf{x} = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$,

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{f}(e_i) = \tilde{f}(\mathbf{x}).$$

即$f \equiv \tilde{f}$. 于是$e^1, \ldots, e^n$为V^*的一组基, $\dim V^* = n$. $\square$

第三章 线性空间

Example

例1 $V=F_n[x]$为次数不超过n的多项式线性空间. 求基函数$e_1=1, e_2=x, \ldots, e_{n+1}=x^n$的对偶基.

解.

由$e^i(x^{j-1})=\delta_{ij}$, 则对$p(x)=\sum_{j=0}^n a_j x^j$,

$$e^i(p)=\sum_{j=0}^n a_j e^i(e_{j+1})=\sum_{j=0}^n a_j \delta_{i,j+1}=a_{i-1}=\frac{p^{(i-1)}(0)}{(i-1)!}.$$

$\square$

第三章 线性空间

Example

例2 设$V=\langle \sin(x),\sin(2x),\ldots,\sin(nx)\rangle$，求$V$的一组基$e_1=\sin(x),e_2=\sin(2x),\ldots,e_n=\sin(nx)$的对偶基.

解.

由$e^i(\sin(jx))=\delta_{ij}$，则对$p(x)=\sum_{j=1}^n a_j\sin(jx)$，

$$e^i(p)=\sum_{j=1}^n a_j e^i(e_j)=a_i=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p(x)\sin(ix)\,dx.$$

$\square$

注：由于$\dim V=\dim V^*=n$，$\sigma:e_i\to e^i$，$i=1,2,\ldots,n$确定了V到V^*的一个同构映射.