1.22 $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)^2-2(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3)$

$=(-\frac{2}{3})^2-0=\frac{4}{9}$

$\gamma_1^2\gamma_2^2+\gamma_1^2\gamma_3^2+\gamma_2^2\gamma_3^2=(\gamma_1\gamma_2+\gamma_1\gamma_3+\gamma_2\gamma_3)^2-2\gamma_1\gamma_2\gamma_3(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)$

$=0^2-2\times\frac{1}{3}\times(-\frac{2}{3})=\frac{4}{9}$

$\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2=(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{9}$

$f(x)=x^3-\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{9}x-\frac{1}{9}$

1.24.(2) 利用字典序 $x_1>x_2>x_3$

$x_1(x_2^3+x_3^3)+x_2(x_1^3+x_3^3)+x_3(x_1^3+x_2^3)-S_1^2S_2$

$=-x_1^2x_2x_3-x_2^2x_1x_3-x_3^2x_1x_2-2S_2^2$

$=-S_1S_3-2S_2^2$

$\therefore$ 原式 $=S_1^2S_2-S_1S_3-2S_2^2$

1.25. 在将对称多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 表示为初等对称多项式 $s_1,\cdots,s_n$ 之多项式 $g_f(s_1,\cdots,s_n)$ 的过程之中，只用到了对 f 系数与整数的加，减，乘。幂和 $P_k=\sum_{i=1}^n x_i^k$ 系数在 $\mathbb{Z}$ 中，故 $g_{P_k}(s_1,\cdots,s_n)$ 系数亦在 $\mathbb{Z}$ 中。

李尚志 P89

P89.2. 若 A 反对称，我们来证 A^* 反对称

因 A 是偶数阶 2n，所以我们可以考察矩阵 $A_t=A+\begin{pmatrix}0&I_n\\-I_n&0\end{pmatrix}t$。若 A_t 可逆，则 A_t^{-1} 反对称，则 $A_t^*=\det A_t\, A_t^{-1}$ 反对称。

即，对于 $t\in\mathbb{R}$，$\det A_t\neq 0$，$A_t^*+(A_t^*)^T=0$。根据多项式根的理论，

$\forall t\in\mathbb{R}$，$A_t^*+(A_t^*)^T=0$。即，$A^*+(A^*)^T=0$

P90.4. (几位同学的想法)

令 $\alpha=\det\begin{pmatrix}1&a_1&\cdots&a_1^{n-1}\\\vdots&&&\vdots\\1&a_n&\cdots&a_n^{n-1}\end{pmatrix}$。对于 $n\in\mathbb{Z}$，令 $v_p(n)=\max\{e\in\mathbb{Z}\mid p^e\mid n\}$.

令 $\beta=\prod_{j=1}^n j!$　　要证 $\beta\mid\alpha$，只需证 $\forall$ 素数 p，$v_p(\beta)\le v_p(\alpha)$

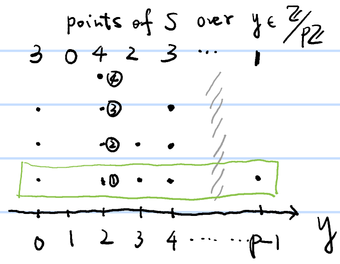
$\alpha=\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)$。令 $S=\{a_i, 1\le i\le n\}$，不妨设 $|S|=n$。我们来观察态射 $S\xrightarrow{\varphi}\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}: a\longmapsto a \bmod p^k$。

现在来计算 $v_p(\alpha)$。n 个点要映到 p 个位置，那么至少有 $n-p^k$ 个点要映到与其它点相同的位置。若 $y\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 上有好几个点，那么不但是算重合点的数量，而是算组合，这是由于 α 的定义。例如右图 $y=2$ 上面 ①-②，①-③，①-④，②-③，②-④，③-④ 都会为 $v_p(\alpha)$ 提供数值。

因此，我们要除去绿色框内的点数(最多 p^k 个)，再重新计算，这样就得到

$$v_p(\alpha)\ge\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i\le\lfloor n/p^k\rfloor}(n-ip^k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\lfloor\tfrac{n-1}{p^k}\rfloor+\lfloor\tfrac{n-2}{p^k}\rfloor+\cdots+\lfloor\tfrac{1}{p^k}\rfloor\right)=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\lfloor\tfrac{j}{p^k}\rfloor=\sum_{j=1}^{n-1}v_p(j!)$$

$$=v_p\left(\prod_{j=1}^{n}(j!)\right)$$



figure