期中复习 • 复分析常见判断题汇总

黄天一

2023 年 4 月 14 日

这里我们给出不少与复分析期中前内容相关的判断题, 来帮助同学们复习一些细枝末节的概念与性质. 先判断对错, 再说明理由. 下面我们总设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的区域.

1. 若 f 在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 处满足 Cauchy-Riemann 方程, 则 f 在 z_0 处全纯.
2. 存在 $B(0,1) \setminus \{0\}$ 上的无界全纯函数 f, 使得 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z) = 0$.
3. 设 $f = u + \mathrm{i}v \in H(\Omega)$, 且满足 $u = v^2$, 则 f 为常数.
4. 设 u 在 Ω 上调和, 则存在 $f \in H(\Omega)$, 使得 $u = \operatorname{Re} f$.
5. 若整函数 f 将实轴和虚轴上的点均映为实数, 则 $f'(0) = 0$.
6. $\operatorname{Log}(z)$ 作为多值函数, 成立等式 $\operatorname{Log}(z^2) = 2\operatorname{Log}(z)$.
7. 对任意的 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和 $w \in \mathbb{C}$, 成立 $z^{2w} = z^w \cdot z^w$.
8. $\sin z$ 是复数域上的有界函数.
9. 函数 $f(z) = \operatorname{Log}\left(\dfrac{z^2-1}{z}\right)$ 在区域 $\mathbb{C} \setminus ([-1,0] \cup [1,\infty))$ 上能选出单值的全纯分支.
10. 设 f 为 $\sqrt[4]{(1-z)^3(1+z)}$ 在 $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$ 上的单值全纯分支, 并且 $f(\mathrm{i}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$, 则 $f(-\mathrm{i}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$.
11. 若 f 在 Ω 上全纯, 则沿 Ω 内任一可求长闭曲线的积分为零.
12. 若 f 在 Ω 上全纯, 则 f 在 Ω 上存在原函数.
13. 在单位圆周上可以用多项式一致逼近函数 $f(z) = \frac{1}{z}$.
14. 当 $\operatorname{Re} z_1 \leqslant 0, \operatorname{Re} z_2 \leqslant 0$ 时, $|\mathrm{e}^{z_1} - \mathrm{e}^{z_2}| \leqslant |z_1 - z_2|$.
15. $\mathbb{C}$ 上的非负调和函数为常数.
16. 设 f 为非常值整函数, 则当 $z \to \infty$ 时, $|f(z)| \to \infty$.
17. 非常值整函数 f 的像在 $\mathbb{C}$ 中稠密.

18. 设 f 在 $|z|<2$ 内全纯, 且对任意 $n \geqslant 1$, 有

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(n+1)z-1} = 0,$$

则 f 恒为零.

19. 单位圆盘 $B(0,1)$ 上的非零全纯函数在 $B(0,1)$ 中至多有有限个零点.

20. 设 f 在 Ω 上全纯, 且在 Ω 上恒成立 $f'(z) \neq 0$, 则 f 在 Ω 上单叶.

21. 方程 $2z^4 = \sin z$ 在 $|z|<1$ 中只有一个根.

22. 方程 $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内的零点个数为 3.

23. 设 $f \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, 则 f 在 Ω 的边界上取到最大模.

24. 设 $|z_k| > 1, k = 1, \cdots, n$. 则存在 $z_0 \in \partial B(0,1)$, 满足 $\prod\limits_{k=1}^{n} |z_k - z_0| > 1$.

25. 存在 $B(0,1)$ 上的全纯函数 f, 使得在 $B(0,1)$ 上恒成立 $|f(z)| = |z|^2 + 1$.

26. 设 f 为整函数, 如果 f 在 $B(0,1)$ 内非零, 且 $f(z) = M, \forall |z| = 1$, 则 f 为常数.

27. 设 $f : B(0,1) \to B(0,1)$ 全纯, 且 $f(0) = 0$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(z^n)$ 在 $B(0,1)$ 中内闭一致收敛.