§0.1 曲面的概念

将主要讨论$\mathbb{R}^3$中的二维曲面。与参数曲线类似，将引入参数曲面，它的定义与基本概念与参数曲线具有一些相似性。

§0.1.1 曲面定义及例子

定义0.1. （参数曲面）如果从平面区域D到$\mathbb{R}^3$的映射$r : D = \{(u, v)\} \to \mathbb{R}^3$

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

满足*(i)* $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$为光滑函数；

(ii) $r_u := (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})$ 与$r_v := (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$线性无关，即$r_u \wedge r_v \neq 0$。

则称r是$\mathbb{R}^3$中的一个曲面，(u, v)称为曲面的（坐标）参数。

由条件(ii)以及秩定理，任意$(a, b) \in D$存在它的邻域使得r为从该邻域到它的像集的微分同胚。曲面通常记作S。

记$p = (a, b) \in D$，$P = P(a, b)$表示曲面上坐标为(a, b)的点(注意可能发生$r(a_1, b_1) = r(a, b), (a_1, b_1) \neq (a, b)$)，有时也直接把$P(a, b)$记作$r(a, b)$。在一点$P(a, b)$处

$$r_u(a, b) = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u})(a, b) = \frac{d}{du}|_{u=a} r(u, b) \neq 0,$$

这里$r(u, b)$是曲面上的一条曲线，$r_u(a, b)$是该曲线在$u = a$处的切向量。$r_u(a, b), r_v(a, b)$称为曲面在P点的坐标切向量。条件(ii)保证了r_u, r_v在曲面任一点$P(a, b)$张成一个平面，称为切平面。

曲面的常见形式：

(i)由$z = f(x, y), (x, y) \in D$给出，称为函数$f$的图。它具有参数化形式

$$r(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in D.$$

如果f为光滑函数，则它成为参数曲面。事实上，

$$r_x = (1, 0, f_x),$$

$$r_y = (0, 1, f_y),$$

$$r_x \wedge r_y = (-f_x, -f_y, 1) \neq 0.$$

(ii)定义集合$S := \{F(x, y, z) = 0\}$给出。若$(x_0, y_0, z_0) \in S, F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$，由隐函数定理存在$(x_0, y_0)$的邻域$U$以及$(x_0, y_0, z_0)$的邻域$V$，在此范围内$F(x, y, z) = 0$有显示表示

$$z = f(x, y), \quad z_0 = f(x_0, y_0).$$

所以当$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$时，局部上可以表示为(i)的形式，即函数的图。

例1：球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}, a > 0.$$

(i)上半球面有参数表示

$$r(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}), \quad (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 < a^2\}.$$

计算

$$r_x = (1, 0, \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}),$$

$$r_y = (0, 1, \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}),$$

$$\langle r_x, r_y \rangle = \frac{xy}{a^2 - x^2 - y^2},$$

$$r_x \wedge r_y = (\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}).$$

(ii) 利用球坐标有参数表示

$$r(\theta, \varphi) = a(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \quad \theta \in (0, \pi), \varphi \in (0, 2\pi).$$

这是

$$D = \{(\theta, \varphi) | \theta \in (0, \pi), \varphi \in (0, 2\pi)\}$$

到$S^2 - \{(a\sin\theta, 0, a\cos\theta), \theta \in [0, \pi]\}$(即球面去掉连接南北极点的一条大圆弧)的一一映射。此时

$$r_\theta = a(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta),$$

$$r_\varphi = a(-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0),$$

$$\langle r_\theta, r_\varphi \rangle = 0,$$

$$r_\theta \wedge r_\varphi = a^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

(iii) 球极投影坐标：北极$N=(0,0,a)$到球面上北极之外任意一点(x,y,z)的连线与xy平面相交于唯一一点

$$(u,v,0):=(\frac{ax}{a-z},\frac{ay}{a-z},0),$$

以(u,v)为参数即反解出

$$u^2+v^2+a^2=a^2\frac{2a}{a-z},$$

$$z=a\frac{u^2+v^2-a^2}{a^2+u^2+v^2},\quad x=\frac{2a^2u}{a^2+u^2+v^2},\quad y=\frac{2a^2v}{a^2+u^2+v^2}.$$

因此有球面(去掉北极)的一个参数表示，称为球面的球极投影参数表示：

$$r(u,v)=(\frac{2a^2u}{a^2+u^2+v^2},\frac{2a^2v}{a^2+u^2+v^2},a\frac{u^2+v^2-a^2}{a^2+u^2+v^2}).$$

例2(环面)：考虑xz平面上一个圆周

$$\begin{cases} x=R+r\cos u, \quad R>r>0, u\in[0,2\pi) \\ z=r\sin u. \end{cases}$$

将它绕z轴旋转一周得到环面

$$\begin{cases} x(u,v)=(R+r\cos u)\cos v, u,v\in[0,2\pi) \\ y(u,v)=(R+r\cos u)\sin v, \\ z(u,v)=r\sin u. \end{cases}$$

例3（旋转面）：xz平面上与z轴不交的正则参数曲线

$$(x,z)=(f(u),g(u)),\quad |f|>0,\sqrt{(f')^2+(g')^2}>0.$$

绕z轴旋转得到旋转面，它的参数表示为

$$r(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u)).$$

计算

$$r_u=(f'(u)\cos v,f'(u)\sin v,g'(u)),$$

$$r_v=(-f(u)\sin v,f(u)\cos v,0),$$

$$\langle r_u,r_v\rangle=0,$$

$$r_u\wedge r_v=f(u)(-g'(u)\cos v,-g'(u)\sin v,f'(u)).$$

$$|r_u\wedge r_v|=|f|\sqrt{(f')^2+(g')^2}>0.$$

§0.1.2 映射的微分与切平面、法向

曲面在坐标为(a,b)的点$P=P(a,b)$有两个线性无关的坐标切向量

$$r_u=\frac{d}{du}|_{u=a}r(u,b),\quad r_v=\frac{d}{dv}|_{v=b}r(a,v).$$

它们属于$\mathbb{R}^3$在$r(a,b)$的切空间，并且与曲面S相切于$P(a,b)$。

定义0.2. *(切平面)* 曲面在P点的切平面定义为r_u,r_v张成的平面，记作T_PS，即

$$T_PS:=span\{r_u,r_v\}.$$

T_PS中的元素称为曲面S在P处的一个切向量。

过P点与切平面T_PS垂直的直线称为曲面在P点的法线，其中的向量（以P为起点、平行于法线）称为曲面在P处的法向量。$r_u(a,b)\wedge r_v(a,b)$是曲面在P处的一个非零法向量，令$N(P)=\frac{r_u(a,b)\wedge r_v(a,b)}{|r_u(a,b)\wedge r_v(a,b)|}$，则$(r_u,r_v,N)$构成$P$处一个右手系正交标架。

切平面是曲面映射r在$p=(a,b)\in D$处的微分（或称切映射）的像集。先回顾映射的微分。

设D为$\mathbb{R}^n$的区域，$F:D\to\mathbb{R}^m$为可微映射。任给$p\in D$，则映射F在p的微分（或称切映射），记作dF_p，它把p处的切向量映为$F(p)$处的切向量。p处的切向量通过D中经过p的可微曲线的切向量给出。即考虑D中可微曲线$\gamma(t)\subset D$使得$\gamma(0)=p$，则

$$X:=\frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma(t)=\gamma'(0)$$

定义了p处一个切向量。p处切向量的全体构成一个向量空间，称为D在p处的切空间，记作T_pD。对于$\mathbb{R}^n$的区域D，$T_pD=\mathbb{R}^n$(同样维数的向量空间)。类似的，$\mathbb{R}^m$在$F(p)$同样有切空间$T_{F(p)}\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^m$。

定义0.3. F在p的微分

$$dF_p:T_pD\cong\mathbb{R}^n\to T_{F(p)}\mathbb{R}^m\cong\mathbb{R}^m,$$

定义为

$$X\mapsto dF_p(X):=\frac{d}{dt}|_{t=0}(F\circ\gamma)(t)=\frac{d}{dt}|_{t=0}F(\gamma(t))\in T_{F(p)}\mathbb{R}^m\cong\mathbb{R}^m.$$

即$dF_p(X)$定义为可微曲线$F\circ\gamma(t)$在$P:=F(p)$处的切向量。

接下来计算$dF_p(X)$的表达式：首先介绍一个常用记号。设$(e_1,\cdots,e_m)^T$ 为$\mathbb{R}^m$的一组单位正交基，如果$x\in\mathbb{R}^m$的相应于$(e_1,\cdots,e_m)^T$分量表示为$(x^1,\cdots,x^m)$, 通常就把e_α记作$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$，它们是$T_x\mathbb{R}^m\cong\mathbb{R}^m$中的元素。于是有记号

$$F(u^1,\cdots,u^n)=(x^1(u^1,\cdots,u^n),\cdots,x^m(u^1,\cdots,u^n))=\sum_{\alpha=1}^m x^\alpha(u^1,\cdots,u^n)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}.$$

类似的设有$\mathbb{R}^n$的一组单位正交基$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)^T$，如果相应分量记号为$(u^1,\cdots,u^n)$，$T_{(u^1,\cdots,u^n)}\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^n$的单位正交基$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)^T$ 就记作$(\frac{\partial}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u^n})^T$。$D$中可微曲线可以表示为

$$\gamma(t)=(u^1(t),\cdots,u^n(t))=\sum_{i=1}^n u^i(t)\varepsilon_i.$$

把F的分量记作f^α，即

$$x^\alpha(u^1,\cdots,u^n)=f^\alpha(u^1,\cdots,u^n),\quad \alpha=1,\cdots,m,$$

考虑D中任一条可微曲线$\gamma(t)=(u^1(t),\cdots,u^n(t))$，它在$t=0$处的取值和切向量分别记作

$$p=(u^1(0),\cdots,u^n(0)),$$
$$X(p)=\gamma'(0)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma(t)=\sum_{i=1}^n\frac{du^i(0)}{dt}\frac{\partial}{\partial u^i}:=\sum_{i=1}^n X^i\frac{\partial}{\partial u^i}.$$

从而有

$$\begin{aligned}dF_p(X) &:= \frac{d}{dt}|_{t=0}F(\gamma(t))\\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\sum_{\alpha=1}^m f^\alpha(u^1(t),\cdots,u^n(t))\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\\ &= \sum_{\alpha=1}^m\sum_{i=1}^n\frac{\partial f^\alpha(p)}{\partial u^i}\frac{du^i(0)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\\ &= \sum_{\alpha=1}^m\sum_{i=1}^n\frac{\partial f^\alpha(p)}{\partial u^i}X^i\frac{\partial}{\partial x^\alpha}.\end{aligned}$$

在$\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n$的基$(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^m})|^T_{F(p)},(\frac{\partial}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u^n})|^T_p$之下的矩阵表示为

$$dF_p(X)=(X^1,\cdots,X^n)\begin{pmatrix}\frac{\partial f^1(p)}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial f^m(p)}{\partial u^1}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial f^1(p)}{\partial u^n} & \cdots & \frac{\partial f^m(p)}{\partial u^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x^1}\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial x^m}\end{pmatrix},$$

其中$(\frac{\partial f^\alpha(p)}{\partial u^i})$为$F$在$p$点的Jacobi矩阵。由此可见$dF_p$为线性映射。

对于曲面$r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，它对应映射$r:D\to\mathbb{R}^3$。如果取$D$中可微曲线$\gamma(t)=(a+t,b)$，则有

$$p:=\gamma(0)=(a,b),\quad X:=\gamma'(0)=(1,0)=\frac{\partial}{\partial u}\in T_pD,$$

以及

$$dr_p(X)=\frac{d}{dt}|_{t=0}r(\gamma(t))=\frac{d}{dt}|_{t=0}r(a+t,b)=\frac{d}{du}|_{u=a}r(u,b).$$

即$P=P(a,b)\in S$处坐标切向量

$$r_u=dr_p(\frac{\partial}{\partial u}|_p)\in\mathrm{Im}(dr_p).$$

类似可取$\gamma(t)=(a,b+t)$，则有$r_v=dr_p(\frac{\partial}{\partial v}|_p)\in\mathrm{Im}(dr_p)$。因此$P=P(a,b)$的两个坐标切向量$r_u,r_v$都属于微分映射$dr_p$的像集。

可以从曲面映射r的微分来理解曲面定义中条件(ii)以及切平面T_PS。

Proposition 0.4. 如下三者两两等价：

(i)$P=P(a,b)$处坐标切向量r_u,r_v线性无关；

(ii)dr_p为单射；

(iii) $dr_p=(\frac{\partial r^\alpha(p)}{\partial u^i})$满秩。

证明：可直接利用

$$dr_p(\lambda_1\frac{\partial}{\partial u}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial v})=\lambda_1r_u+\lambda_2r_v,\quad\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R},$$

$$r_u\wedge r_v=(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}).$$

□

Proposition 0.5.

$$T_PS=dr_p(\mathbb{R}^2).\quad(\mathbb{R}^2=T_pD)$$

证明：选取D中曲线$\gamma(t)=(a+\lambda_1t,b+\lambda_2t)$，则

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}r(a+\lambda_1t,b+\lambda_2t)=\lambda_1r_u(a,b)+\lambda_2r_v(a,b)\in dr_p(\mathbb{R}^2),\quad\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}.$$

因此$T_PS\subset dr_p(\mathbb{R}^2)$。反之，对$D$中任意可微曲线$\gamma(t)=(u(t),v(t))$

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}r(u(t),v(t))=u'(0)r_u(a,b)+v'(0)r_v(a,b)\in T_PS.$$

因此，$dr_p(\mathbb{R}^2)\subset T_PS$。 □

通过曲面映射的微分，正则曲面定义中条件(ii)可以改作dr_p为单射；正则曲面在$P(a,b)$的切平面可定义为$dr_p(\mathbb{R}^2)$。

§0.1.3 重新参数化

对于参数曲面，同样有重新参数化。设有新的参数空间$(\bar{u},\bar{v})\in\bar{D}$，以及光滑的一一映射(是否需要附加其他条件待定)

$$\sigma:(\bar{u},\bar{v})\in\bar{D}\to(u,v)\in D.$$

重新参数化对应于复合映射$r\circ\sigma:\bar{D}\to\mathbb{R}^3$，即曲面的新参数表示

$$r(\bar{u},\bar{v})=r\circ\sigma(\bar{u},\bar{v})=r(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v}))=(x(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v})),y(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v})),z(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v}))).$$

设曲面上同一点P的坐标变换为

$$(a,b)=\sigma(\bar{a},\bar{b})=(u(\bar{a},\bar{b}),v(\bar{a},\bar{b})),$$

由复合函数的链式求导法则，

$$r_{\bar{u}}(\bar{a},\bar{b})=r_u(a,b)\frac{\partial u}{\partial\bar{u}}(\bar{a},\bar{b})+r_v(a,b)\frac{\partial v}{\partial\bar{u}}(\bar{a},\bar{b}),$$

$$r_{\bar{v}}(\bar{a},\bar{b})=r_u(a,b)\frac{\partial u}{\partial\bar{v}}(\bar{a},\bar{b})+r_v(a,b)\frac{\partial v}{\partial\bar{v}}(\bar{a},\bar{b}).$$

因此

$$r_{\bar{u}}(\bar{a},\bar{b}),\quad r_{\bar{v}}(\bar{a},\bar{b})\in T_PS,$$

$$\begin{pmatrix} r_{\bar{u}}\\ r_{\bar{v}}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial\bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial\bar{u}}\\ \frac{\partial u}{\partial\bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial\bar{v}}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} r_u\\ r_v\end{pmatrix},$$

$$r_{\bar{u}}\wedge r_{\bar{v}}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}r_u\wedge r_v.$$

从而为保证正则曲面定义中条件(ii)对于新参数$(\bar{u},\bar{v})\in\bar{D}$仍成立，要求$\sigma:\bar{D}\to D$为一一映射并且Jacobi行列式

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u(\bar{u},\bar{v})}{\partial\bar{u}} & \frac{\partial v(\bar{u},\bar{v})}{\partial\bar{u}}\\ \frac{\partial u(\bar{u},\bar{v})}{\partial\bar{v}} & \frac{\partial v(\bar{u},\bar{v})}{\partial\bar{v}}\end{vmatrix}\neq 0.$$

即$\sigma:\bar{D}\to D$为光滑同胚。

从如上讨论可知，切平面及法线与曲面的参数选取无关。新旧的坐标切向量都构成切平面的一组基，基变换矩阵为参数变换的Jacobi矩阵。$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}>0$时相应的参数变换称为同向参数变换，$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}<0$时相应的参数变换称为反向参数变换。通常认为$r\circ\sigma$与$r$为同一曲面$S$的两个参数表示。

例：球面的重新参数化

在(i)(ii)的共同部分对应的参数空间之间有微分同胚

$$\sigma(\theta,\varphi)=(x,y)=(a\sin\theta\cos\varphi,a\sin\theta\sin\varphi),\quad \theta\in(0,\frac{\pi}{2}),\varphi\in(0,2\pi).$$

$$r_1(x,y)=(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2}),$$

于是相应的重新参数化$r_1\circ\sigma=r_2$，即

$$r_1\circ\sigma(\theta,\varphi)=r_1(a\sin\theta\cos\varphi,a\sin\theta\sin\varphi)=(a\sin\theta\cos\varphi,a\sin\theta\sin\varphi,a\cos\theta)=r_2(\theta,\varphi).$$

例：设$F(x,y,z)$为$\mathbb{R}^3$的区域U上的光滑函数，设它的等值集合

$$S_c:=\{(x,y,z)|F(x,y,z)=c\}\neq\emptyset.$$

由隐函数定理，对于$\nabla F\neq 0$的点$P_0=(x_0,y_0,z_0)\in S_c$，S_c在P_0的某个邻域内可以表示为图形式的曲面(单射)。特别的如果对S_c中任意点，$\nabla F\neq 0$，则c称为F的正则值，此时S_c为一（整体）曲面。

设S_c中一点P满足$\nabla F(P)\neq 0$。对S_c中任意可微曲线$r(t)=(x(t),y(t),z(t))(r(0)=P)$

$$F(r(t))=c,$$

从而

$$0=\frac{dF}{dt}(r(t))|_{t=0}=\langle\nabla F,r'(0)\rangle.$$

因此$\nabla F(P)\neq 0$为S_c在P处的法向，S_c在P处的切平面方程为

$$\langle(x-x_P,y-y_P,z-z_P),\nabla F(P)\rangle=0.$$

许多的具体例子都以这种形式给出：线性函数给出平面，二次函数给出椭球面、双曲面、抛物面（见习题1）。

作业：1(1,5), 2, 3, 4, 5