比等距变换更广泛的一类重要变换是保角变换。由于等距变换保持曲面的第一基本形式，因此它保持曲线的长度，同时它也保持曲面上两条相交曲线在交点处的夹角不变。保角变换是保持夹角的变换。

定义0.1. 如果一一映射$\sigma : S \to \widetilde{S}$保持任意两条相交曲线在交点处的夹角不变，则称它为曲面的保角变换。

例如复平面上一对一的全纯函数对应的映射为保角变换。保角变换一般不保持第一基本形式，但是它们的第一基本形式有如下对应关系：

Proposition 0.2. 一一映射$\sigma : S \to \widetilde{S}$为保角变换当且仅当存在正函数$\lambda(u,v)$使得在对应点

$$\widetilde{I}(\widetilde{u}(u,v), \widetilde{v}(u,v)) = \lambda^2(u,v) I(u,v).$$

证明：由定义，σ为保角变换当且仅当

$$\frac{\langle v, w\rangle}{|v||w|} = \frac{\langle d\sigma(v), d\sigma(w)\rangle}{|d\sigma(v)||d\sigma(w)|}, \quad \forall v \neq 0, w \neq 0 \in T_P S. \quad (*)$$

设σ为保角变换，$\{e_1, e_2\}$为$T_P S$的单位正交基。取$v = e_1, w = e_2$，则由(*)

$$\langle d\sigma(e_1), d\sigma(e_2)\rangle = 0.$$

取$v = e_1, w = ae_1 + be_2 (ab \neq 0)$，则由上式及(*)

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a|d\sigma(e_1)|^2}{|d\sigma(e_1)|\sqrt{a^2|d\sigma(e_1)|^2 + b^2|d\sigma(e_2)|^2}}.$$

即

$$(a^2+b^2)|d\sigma(e_1)|^2 = a^2|d\sigma(e_1)|^2 + b^2|d\sigma(e_2)|^2,$$

因此

$$|d\sigma(e_1)|^2 = |d\sigma(e_2)|^2 =: \lambda^2(P), \quad \lambda > 0$$

$$\langle d\sigma(ae_1+be_2), d\sigma(ce_1+de_2)\rangle = \lambda^2(ac+bd) = \lambda^2\langle ae_1+be_2, ce_1+de_2\rangle,$$

$$\langle d\sigma(v), d\sigma(w)\rangle = \lambda^2\langle v, w\rangle, \quad \forall v, w \in T_P S. \quad (*2)$$

反之如果(*2)成立，则有(*)。因此σ为保角变换当且仅当存在正函数λ使得

$$\langle d\sigma(v), d\sigma(w)\rangle = \lambda^2\langle v, w\rangle, \quad \forall v, w \in T_P S.$$

由此，并利用

$$\widetilde{r}(\widetilde{u}(u,v), \widetilde{v}(u,v)) = \sigma \circ r(u,v),$$

可计算第一基本形式

$$\begin{aligned}\widetilde{I} &= \langle d\widetilde{r}, d\widetilde{r}\rangle = \langle d(\sigma\circ r), d(\sigma\circ r)\rangle = \langle d\sigma\circ dr, d\sigma\circ dr\rangle \\ &= \langle d\sigma(r_u)du + d\sigma(r_v)dv, d\sigma(r_u)du + d\sigma(r_v)dv\rangle \\ &= \lambda^2\langle r_u du + r_v dv, r_u du + r_v dv\rangle \\ &= \lambda^2 I.\end{aligned}$$

□

例：半径为a的球面在球极投影参数表示下的第一基本形式为

$$I = \frac{4}{(1+\frac{1}{a^2}(u^2+v^2))^2}(dudu + dvdv).$$

因此球极投影是球面(去掉北极点)与平面之间的保角变换。

注：任意曲面上每一点都有一个邻域可以和欧式平面的一个区域建立保角变换。或称任意曲面局部共形于平面。等价于曲面上任一点都存在其邻域上的局部坐标(u,v)使得其第一基本形式

$$I = \lambda^2(u,v)(dudu + dvdv), \quad \lambda > 0,$$

这样的参数称为曲面的等温参数。

§0.1 曲面的协变微分

可通过自然标架或正交标架表述运动方程、曲面结构方程，曲面的协变微分同样有这两种表述。本节主要以正交标架为例，先介绍联络形式，而协变微分主要由联络形式给出。

§0.1.1 联络形式

设S为$\mathbb{R}^3$中曲面，取沿S正交标架$\{r; e_1, e_2, e_3\}$，其中e_3为曲面单位法向量。标架运动方程为

$$\begin{aligned} dr &= \omega^\alpha e_\alpha, \quad (a) \\ de_i &= \omega_i^j e_j, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \quad (b) \end{aligned}$$

其系数为五个一次微分形式$\{\omega^1, \omega^2, \omega_1^2, \omega_1^3, \omega_2^3\}$。

由$d(dr) = 0$得到

$$d\omega^1 - \omega^2 \wedge \omega_2^1 = 0, \quad d\omega^2 - \omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0 \quad (1)$$

$$\omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^3 = 0 \Leftrightarrow h_{12} = h_{21}. \quad (2)$$

其中(1)等价于协变微分的挠率为零。由$d(de_i) = 0$得曲面正交标架的结构方程：

$$d\omega_\alpha^k - \omega_\alpha^j \wedge \omega_j^k = 0. \quad (GC)$$

(GC)包含Gauss方程

$$d\omega_1^2 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = d\omega_1^2 + K\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \quad (G)$$

以及两个Codazzi方程。

上述方程中与ω_1^3, ω_2^3无关的方程(即内蕴部分)有

$$\omega_1^2 + \omega_2^1 = 0,$$

$$d\omega^1 - \omega^2 \wedge \omega_2^1 = 0, \quad d\omega^2 - \omega^1 \wedge \omega_1^2 = 0 \quad (1)$$

以及Gauss方程

$$d\omega_1^2 + K\omega^1 \wedge \omega^2 = 0. \quad (G)$$

定义0.3.

$$\omega_1^2 = \langle de_1, e_2 \rangle = -\omega_2^1$$

称为曲面关于标架$\{e_1, e_2\}$的联络形式。

此定义中假设了曲面S以及它的正交标架，但同样可以只由第一基本形式出发给出联络形式。事实上，选取单位正交标架$\{X_1, X_2\}$，即$I(X_\alpha, X_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$以及其对偶基$\{\omega^1, \omega^2\}$，则由如下命题可唯一确定关于$\{X_1, X_2\}$或$\{\omega^1, \omega^2\}$的联络形式。

Proposition 0.4. *联络形式ω_1^2由ω^1, ω^2及(1)式唯一确定。*

证明：令

$$d\omega^1 = a\omega^1 \wedge \omega^2, \quad d\omega^2 = b\omega^1 \wedge \omega^2.$$

则(1)成立当且仅当

$$\omega_1^2 = a\omega^1 + b\omega^2.$$

□

由于联络形式ω_1^2由$\{\omega^1, \omega^2\}$(或$\{X_1, X_2\}$)唯一确定，因此它是内蕴的。但另一方面，它依赖于$\{e_1, e_2\}$(或$\{X_1, X_2\}$)的选取，不是几何量。

Proposition 0.5. *设*

$$\bar{e}_1 = \cos\theta e_1 + \sin\theta \bar{e}_2, \quad \bar{e}_2 = -\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2$$

为曲面的另一组正交标架，则曲面关于$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$的联络形式

$$\bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + d\theta.$$

证明：按定义直接计算

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_1^2 &= \langle d\bar{e}_1, \bar{e}_2\rangle = \langle d(\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2), (-\sin\theta e_1 + \cos\theta e_2)\rangle \\
&= d\theta + \cos^2\theta\langle de_1, e_2\rangle - \sin^2\theta\langle de_2, e_1\rangle \\
&= d\theta + \omega_1^2.
\end{aligned}$$

□

定理0.6. *(Gauss绝妙定理) 曲面的Gauss曲率K由曲面的第一基本形式唯一确定。*

证明：给定第一基本形式，任取正交标架$\{e_1, e_2\}$(或$\{X_1, X_2\}$)。由Gauss方程

$$d\omega_1^2 - \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = d\omega_1^2 + K\omega^1 \wedge \omega^2 = 0, \quad (G)$$

可得

$$K = \frac{-d\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2},$$

特别右边由$\{e_1, e_2\}$唯一确定，而且不依赖于正交标架$\{e_1, e_2\}$的选取。 □

考虑等距变换$\sigma : S \to \widetilde{S}$，并随之变换$e_\alpha$ 为$\widetilde{e}_\alpha := d\sigma(e_\alpha)$。则$\{d\sigma(e_1), d\sigma(e_2)\}$为$\widetilde{S} = \sigma(S)$的正交标架。如果在相应点还取相同的参数坐标，即令$\widetilde{u}(u,v) = u, \widetilde{v}(u,v) = v$，$\widetilde{S}$的参数表示为

$$\widetilde{r}(u,v) = \sigma \circ r(u,v).$$

从而对曲面$\widetilde{S} = \sigma \circ r$，

$$\widetilde{X}_\alpha := (d\sigma \circ r)^{-1}(d\sigma(e_\alpha)) = (d\sigma \circ dr)^{-1}(d\sigma(e_\alpha)) = (dr)^{-1}(d\sigma)^{-1}(d\sigma(e_\alpha)) = (dr)^{-1}(e_\alpha) = X_\alpha,$$

从而有$\widetilde{\omega}^\alpha = \omega^\alpha, \quad \widetilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2$，以及如下结论：

Proposition 0.7. *互为等距的曲面，在对应点的Gauss曲率相等。*

Gauss绝妙定理中Gauss曲率的表达式给出了Gauss曲率比较简便的计算方法。

例：设(u,v)为曲面的等温坐标系，其第一基本形式

$$I = \lambda^2(dudu + dvdv).$$

则其Gauss曲率

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\ln\lambda.$$

证明：取

$$X_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial v};$$
$$\omega^1 = \lambda du, \quad \omega^2 = \lambda dv.$$

因此

$$d\omega^1 = \omega^2 \wedge \omega_2^1 = \lambda_v dv \wedge du = \omega^2 \wedge \frac{\lambda_v}{\lambda}du$$
$$d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2 = \lambda_u du \wedge dv = \omega^1 \wedge \frac{\lambda_u}{\lambda}dv$$

从而

$$\omega_1^2 = -\frac{\lambda_v}{\lambda}du + \frac{\lambda_u}{\lambda}dv = -(\ln\lambda)_v du + (\ln\lambda)_u dv,$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{-d\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = -[(\ln\lambda)_{vv} + (\ln\lambda)_{uu}]\frac{du \wedge dv}{\lambda^2 du \wedge dv} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\ln\lambda \\ &= -\frac{4}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}\ln\lambda. \end{aligned}$$

□

作业：1(2,3,4), 2