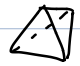
满足②的事件A.B.C不一定满足①：



有3个面分别涂红、蓝、黄色. 第4个面涂3种颜色.

A: 向下的面有红色　　$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$

B: ⋯ 黄　　$P(ABC)=\frac{1}{4}$

C: ⋯ 蓝　　$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$

A_i，$i\in I$. I为指标集.　相互独立 $\Leftrightarrow P(\bigcap_{i\in J}A_i)=\prod_{i\in J}P(A_i)$，$\forall J\in I$.

hw: P_{12} 1.3(1,2)　P_{14} 2.4

设 $A_1,\cdots,A_n$ 独立. $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-P((\bigcup_{i=1}^{n}A_i)^c)=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c)$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}(1-P(A_i))$$

小概率事件迟早发生：

$P(A)=\varepsilon<<1$. 重复实验. A_k第k次实验.事件A发生

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=1-(1-\varepsilon)^n\longrightarrow 1$$

条件独立性：

$P(C)>0$. 若$P(A\cap B|C)=P(A|C)P(B|C)$,称事件A.B关于C条件独立.

$P(\cdot|C)$概率测度

例 掷两个骰子. A 第1个3点. B第2个3点.. C点数和为偶数.

$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{36}$.　$P(AB|C)=\frac{P(ABC)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{18}$

而 $P(A|C)P(B|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}\cdot\frac{P(B\cap C)}{P(C)}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ ⇒ 不是条件独立.

§1.5乘积空间.

$\Omega_1=\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$　$F_1=F_2=2^{\Omega}$　$P(\{i\})=\frac{1}{6}$.

$\Omega_1 \overset{\text{叉乘}}{\times} \Omega_2=\{(i,j)\mid i\in\Omega_1, j\in\Omega_2\}$ $F_1\times F_2=\{A_1\times A_2\mid A_1\in F_1, A_2\in F_2\}$

$F_1=\{\phi,\Omega,A,A^c\}$ $F_2=\{\phi,\Omega,B,B^c\}$

$F_1\times F_2=\{\phi,\Omega\times\Omega,A\times\Omega,A^c\times\Omega,\Omega\times B,\Omega\times B^c,A\times B,A\times B^c,A^c\times B,A^c\times B^c\}$

$\Omega\times\Omega\setminus(A\times B)\notin F_1\times F_2 \Rightarrow F_1\times F_2$ 不是σ代数.

引理 F.g是Ω的两个σ代数,则$F\cap g$也是σ代数.

证: 1° $\Omega\in F$, $\Omega\in g$, $\Omega\in F\cap g$

2° $A\in F\cap g$, 则 $A^c\in F$, $A^c\in g \Rightarrow A^c\in F\cap g$

3° $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}\subset F\cap g$ $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in F$, $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in g$ $\therefore \bigcup_{i=1}^{n}A_i\in F\cap g$

$F\cup g$ 不一定是σ-代数.

定义. A是Ω的部分子集组成的集合类,满足$A\subset F_i$的σ代数F_i的交集$\cap F_i$称为由A生成的σ代数.(包含A的最小σ代数)

例 R上Borel σ-代数.

$\mathcal{A}=\{(a,b]\mid a<b, a,b\in R\}$ $\mathcal{A}_1=\{(a,b)\mid a<b\}$

$(-\infty,b]\in\sigma(\mathcal{A})$ $\sigma(\mathcal{A})=\sigma(\mathcal{A}_1)$

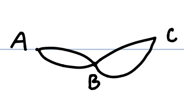
$=\bigcup_{n=|b|}^{\infty}(-n,b]$ $R^2=R\times R$. $B_2=\{(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\mid a_1<b_1, a_2<b_2\}$

$\{b\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(b-\frac{1}{n},b]\in\sigma(\mathcal{A})$ $(a,b)\in\sigma(\mathcal{A})$

(Ω_1,F_1,P_1), (Ω_2,F_2,P_2)

$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$ $F=\sigma(F_1\times F_2)$ $P((A_1,A_2))=P_1(A_1)P_2(A_2)$ $A_1\in F_1, A_2\in F_2$

§1.6 例

1. 

每条路独立地以概率p被阻断.

(1) 求有一条从A到C的通路的概率.

E表示有从A到C通路 E_1: $A\to B$ E_2: $B\to C$

$E=E_1\cap E_2$ $E_1.E_2$独立. $P(E)=P(E_1)P(E_2)=(1-P(A\to B$两条路都不通$))P(E_2)$

$= (1-p^2)(1-p^2)$

(2) 另有一条路直接从A到C. 以概率p被阻断. 求此时有一条从A到C的通路的概率.

E_3表示$A\to C$有直通路. $\Omega = E_3 \cup E_3^c$

$p(E) = p(E|E_3)p(E_3) + p(E|E_3^c)p(E_3^c) = 1\cdot(1-p) + (1-p^2)^2\cdot p$

2. 赌徒破产模型

甲 k 掷硬币. 正面:甲资金+1, 庄-1.

庄 $N-k$ 反面:庄资金+1. 甲-1.

直到1方资金为0结束. 求甲资金变为0的概率.

解: 记A_k表示甲资金从k变为0. $p(A_k) = p_k$.

B表示第1次掷出正面. $p_0 = 1$, $p_N = 0$

$p(A_k) = P(A_k|B)P(B) + P(A_k|B^c)P(B^c) = P(A\quad)\cdot\frac{1}{2} + P(A_{k-1})\cdot\frac{1}{2}$

$\Rightarrow p_k = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1}$ $\quad p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$

$p_k = p_k - p_{k-1} + p_{k-1} - p_{k-2} + \cdots + p_1 - p_0 + p_0$

$0 = p_N = N(p_1 - p_0) + p_0 \Rightarrow p_1 - p_0 = -\frac{1}{N}$ $\quad \therefore p_k = 1 - \frac{k}{N}$

古典概型

Ω有限集 等可能.

计数 从n个元素中任取m个有多少种取法?

	放回	不放回
可区分	n^m	A_n^m
不可区分	C_{m+n-1}^{n-1}	C_n^m

hw 1.7.1, 1.7.2, 1.7.5, 1.8.9, 1.8.11, 1.8.16