连通集： (R^n)

设$E\subset R^n$. 如果E的任一分解式$E=A\cup B$满足条件$A\neq\phi$ $B\neq\phi$ 且$A\cap B=\phi$. 便可使得以下两式：$A\cap B'\neq\phi$ 和 $A'\cap B\neq\phi$ 中将至少有一个成立 那么称E是R^n中的一个连通集. 或者说E是连通的

道路连通： (R^n)

设$E\subset R^n$. 如果对$\forall$两点$p,q\in E$. 都有一条"连续曲线" $l\subset E$将p与q连接起来. 则称点集E道路连通

列紧集： (R^n)

设$E\subset R^n$. 如果E中任一点列都有一子列收敛于E中的一点. 则称E是R^n中的一个列紧集

紧致集： (R^n)

设$E\subset R^n$ 若能从E的任一个开覆盖中选出有限个开集. 它们仍能组成E的开覆盖. 那么称E为一个紧致集

Bolzano-Weierstrass

从任一有界的点列中可以选出收敛的子点列

6.7

设$E\subset R^1$ 连通 且$\exists x\neq y\subset E$. 如果能证明$[x,y]\subset E$ 那么E必为区间.
若$\exists c\in(x,y)$ 但$c\notin E$. 作集合 $A=\{x\in E: x<c\}$. $B=\{x\in E: x>c\}$ 则$A\neq\phi$ $B\neq\phi$ 且$E=A\cup B$
A中凝聚点$\leq c$ 所以B中无A的凝聚点. $\Rightarrow A'\cap B=\phi$ 同理 $A\cap B'=\phi$ $\Rightarrow$ E不连通 矛盾

补充：在R上，集合E连通的充分必要条件是E为区间。
必要性：由上题证明易知
充分性：？

6.8

(1°) 由定理9推出

(2°) 由补充定理可推出

(3°) 设$A=\{x\in R^n_{有}\mid x_1<\sqrt{2}\}$ $B=\{x\in R^n_{有}\mid x_1>\sqrt{2}\}$
则$A\neq\phi$ 且$B\neq\phi$ $A\cap B=\phi$
$A\cap B'=\phi$ 且$A'\cap B=\phi$
得$R^n_{有}$不连通

(4°) 考虑 $x=(x_1\cdots x_n)\in R^n_{无}$ $y=(y_1\cdots y_n)\in R^n_{无}$
不妨设 $x_1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 若$y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
考虑平面 $D_1=\{(z_1\cdots z_n)\in R^n\mid z_1=x_1\}\subset R^n_{无}$
$D_2=\{(z_1\cdots z_n)\in R^n\mid z_1=y_1\}\subset R^n_{无}$
$\Rightarrow\exists z_2\in R\setminus Q$ s.t. x与$(x_1,z_1,x_3\cdots x_n)$在D_1中折线连通
y与$(y_1,z_2,y_3\cdots y_n)$在D_2中折线连通
$\{t(x_1,z_2,x_3\cdots x_n)+(1-t)(y_1,z_2\cdots y_n)\}\subset R^n_{无}$
$\therefore$ 折线连通
若$y_1\in Q$ $\exists y_i\in R\setminus Q$ 不妨设 $y_2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$D_1=\{(z_1\cdots z_n)\in R^n\mid z_1=x_1\}\subset\mathbb{R}^n_{无}$
$D_2=\{(z_1\cdots z_n)\in R^n\mid z_2=y_2\}\subset\mathbb{R}^n_{无}$
则x与$(x_1,y_2\ x_3\cdots)$在D_1中有折线连通
$(x_1,y_2\ x_3\cdots)$与y在D_2中有折线连通
$\therefore$ x与y 折线连通

(5°) 同(4°)思路

6.9 $\Leftarrow$ 由定理4可知

$\Rightarrow$ (X,τ) 非连通. $\exists A\neq\phi$ $B\neq\phi$ $X=A\cup B$ $A\cap B'=\phi$ 且 $A'\cap B=\phi$

令 $f: X\to R$ $f(x)=\begin{cases} a & x\in A \\ b & x\in B\end{cases}$ $a\neq b$ 则 f 为连续映射

6.15 (1) $f:(a,b)\to S^1$

$(a,c)\cup(c,b)$ 不连通 而 $S^1\setminus\{f(c)\}$ 连通 $\Rightarrow$ 不同胚 ($[a,b]$, $[a,b)$ 同理)

(2) $f:[a,b]\to(a,b)$

$[a,b)$ 连通 $(a,b)\setminus\{f(b)\}$ 不连通 $\Rightarrow$ 不同胚 ($(a,b]$, (a,b) 同理)

$f:[a,b)\to[a,b]$

(a,b) 连通 $[a,b]\setminus\{f(a),f(b)\}$ 不连通 $\Rightarrow$ 不同胚

(3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 不连通 而 $\mathbb{R}^2\setminus\{f(0)\}$ 连通 $\Rightarrow$ 不同胚

(4) $f: S^1\to S^2$

$S^1\setminus\{a,b\}$ 不连通 而 $S^2\setminus\{f(a),f(b)\}$ 连通 $\Rightarrow$ 不同胚

(5) f: Möbius 带 $\to$ 圆环 则边界 $\to$ 边界

Möbius 带边界连通 圆环边界不连通 矛盾 $\Rightarrow$ 不同胚

7.4. (1°) 只需证 X 中每个点列必有收敛的子点列

(2°) $\forall x\in X$, $x=(x_1\cdots x_n\cdots)$ $\forall\varepsilon>0$ $\exists N$ s.t. $\forall n>N$ $\frac{1}{n}<\varepsilon$

设 $y\in X\setminus J$ 令 $y=(x_1\cdots x_N\ \varepsilon\ x_{N+2}\cdots)$

$\|y-x\|_2=|x_{N+1}-\varepsilon|<2\varepsilon$

7.6 定理: R^n 中的集合 E 为列紧集 $\Leftrightarrow$ E 为有界闭集

必要性: 如果 E 无界, 那么必可以找出一个点列 $\{x_i\}\subset E$, 满足 $\|x_i\|>i$ $(i=1,2,3\cdots)$. 显然 $\{x_i\}$ 无收敛子列

$\therefore$ E 不为列紧集

若 E 不是闭集 必有收敛点列 $\{x_i\}\subset E$, 使得 $x_i\to a$ $(i\to\infty)$ 但 $a\notin E$ 因此 $\{x_i\}$ 的一切子列都收敛于 $a\notin E$ 从而 E 不为列紧集, 矛盾

充分性: 设 E 是有界闭集, 任取一点列 $\{x_i\}\subset E$, 则它是有界的, 按照 Bolzano-Weierstrass 定理从 $\{x_i\}$ 中可选出收敛子列 $\{x_{ki}\}$ s.t. $x_{ki}\to a$ $(i\to\infty)$ 因为 E 是闭集且 $\{x_{ki}\}\subset E$ 故 $a\subset E$

$\therefore$ E 是一个列紧集

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

Hefei,Anhui.230026 The People's Republic of China

7.11 $G_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x^i| < k,\ 1 \le i \le n\}$

7.14

$\Rightarrow$ 设$\{U_\alpha\}$为X_1开覆盖 则$\{U_\alpha \times X_2\}$为$X_1 \times X_2$开覆盖. 取有限子覆盖$\{U_i\}_{i=1}^n \times X_2$ $\{U_i\}_{i=1}^n$为X_1开覆盖.
X_1为紧致的 X_2同理

$\Leftarrow$

引理 $A \subset X$紧 $y \in Y$ W是$A \times \{y\}$在$X \times Y$中的邻域 则$\exists A, y$的开邻域U_x V_x $U_x \times V_x \subset W$
$\{U_x\}$为A在X中的开覆盖

证: A紧$\Rightarrow \exists$有限子覆盖$U_{x_1} \cdots U_{x_n}$ 令$U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$ U为X开邻域 V为y开邻域
$U \times V \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \times V_{x_i} \subset W$

证: X, Y紧$\Rightarrow X \times Y$紧

F为$X \times Y$开覆盖

$\forall y \in Y$, $X \times \{y\} \cong X$ X紧$\Rightarrow X \times \{y\}$紧

F为$X \times \{y\}$在$X \times Y$中的开覆盖$\Rightarrow$有限子覆盖$U_y^1 \cdots U_y^{n_y}$ 令$U_y = \bigcup_{i=1}^{n_y} U_y^i$为$X \times \{y\}$的开邻域

由引理. $\exists y$的开邻域V_y $X \times V_y \subset U_y$

$\{V_y\}_{y \in Y}$为Y的开覆盖. Y紧.. 有有限子覆盖$V_{y_1} \cdots V_{y_m}$ $X \times Y: \bigcup_{i=1}^m X \times V_{y_i} \subset \bigcup_{i=1}^m U_{y_i} \subset \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{n_{y_i}} U_{y_i}^j$

$\Rightarrow \{U_{y_i}^j\}$为$F$的有限子覆盖

$\Rightarrow X_\lambda$ $\lambda \in \Lambda$紧$\Rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$紧

7.21

(1°) (a, b)非紧. $[a, b]$紧.

(2°) $\mathbb{R}^n$非紧. S^n紧