§0.1 平均曲率与高斯曲率

回顾Weingarten映射

$$W(v) := -X_v(N), \quad v \in T_P S, \quad X_v := (dr_p)^{-1}(v),$$

$$\langle W(v), w\rangle = II(X_v, X_w), \quad (W) = (II)(I)^{-1}.$$

主曲率和相应主方向(k, v)，其中$v \neq 0$，指的是

$$Wv = kv.$$

曲面的平均曲率和Gauss曲率分别定义为

$$H := \frac{1}{2}tr(W) = \frac{1}{2}tr((II)(I)^{-1}) = \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

$$K := \det(W) = \frac{\det(II)}{\det(I)} = k_1 k_2.$$

§0.1.1 脐点与全脐曲面

定义0.1. *(i)如果存在$k \in \mathbb{R}$使得$II_p = kI_p$，则称$P \in S$为曲面的脐点。如果$k = 0$，则称P为曲面的平点；如果$k \neq 0$，则称P为曲面的圆点。*

(ii)如果曲面的每一点都是脐点，则称曲面为全脐曲面。

由$II_p = kI_p$，因此P点的法曲率都相等，两个主曲率也相等。在脐点处，曲面沿任何切方向的弯曲方向、程度是一样的。脐点性质还是共形不变的。

主曲率的可微性与脐点有关。曲面的主曲率k满足

$$(k - k_1)(k - k_2) = k^2 - (k_1 + k_2)k + k_1 k_2 = k^2 - 2Hk + K = 0,$$

因此

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

由于曲面光滑，H, K为光滑函数。在非脐点处，

$$H^2 - K = (\frac{k_1 - k_2}{2})^2 > 0,$$

因此主曲率k_1, k_2在非脐点附近$(H^2 - K > 0)$光滑。在脐点处，$H^2 - K = 0$。如果P为$H^2 - K$的一阶零点，则k_1, k_2在P点不可微。

定理0.2. *(Meusnier, 1776) 曲面是全脐曲面当且仅当它是平面或球面(一部分)。*

证明：已知平面或球面为全脐曲面。并且已知如果$II \equiv 0$，则曲面为平面。

先考察球面：设

$$|r(u,v) - r_0|^2 = R^2 > 0, \quad R > 0$$

则

$$\langle dr, r - r_0 \rangle \equiv 0,$$

因此

$$N = \pm \frac{1}{R}(r - r_0),$$

$$dN = \pm \frac{1}{R} dr,$$

$$II = -\langle dr, dN \rangle = \mp \frac{1}{R} \langle dr, dr \rangle = \mp \frac{1}{R} I.$$

即球面为全脐曲面。特别对于球面

$$dN = cdr.$$

设曲面为全脐曲面，即$II = c(u,v)I$，考察dN与dr之间的关系。由假设，

$$\langle dr, -dN - cdr \rangle \equiv 0,$$

因此

$$dN + cdr \equiv 0.$$

特别有

$$N_u + cr_u = 0, \quad N_v + cr_v = 0,$$

从而

$$N_{uv} + cr_{uv} + c_v r_u = 0, \quad N_{vu} + cr_{vu} + c_u r_v = 0,$$

相减得

$$c_v r_u - c_u r_v = 0,$$

$$c_v = c_u = 0,$$

从而$c(u,v)$为常数。若$c \equiv 0$，则$II \equiv 0$，曲面为平面。若$c = c_0 \neq 0$，又由

$$N_u + c_0 r_u = 0, \quad N_v + c_0 r_v = 0,$$

可知$N + c_0 r$为常向量，记作

$$N + c_0 r = c_0 r_0,$$

则$r(u,v)$是半径为$\frac{1}{|c_0|}$的球面

$$|r - r_0| = \frac{1}{|c_0|}.$$

□

§0.1.2 曲率线

定义0.3. *(曲率线)如果S上曲线$r(t)=r(u(t),v(t))$使得$r'(t)$都是曲面在$r(t)$处的一个主方向，则称曲线$r(t)$为曲率线。*

Proposition 0.4. *(Rodrigues) $r(t)=r(u(t),v(t))$为曲率线当且仅当沿该曲线$\frac{dN}{dt}$与$r'(t)$平行。*

证明：对曲面S上任意曲线$r(t)=r(u(t),v(t))$

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt}(u(t),v(t)) &= u'N_u+v'N_v\\ &= -u'W(r_u)-v'W(r_v)\\ &= -W(r').\end{aligned}$$

因此$\frac{dN}{dt}$与$r'(t)$平行当且仅当存在$k\in\mathbb{R}$使得$W(r')=kr'$，即r'为一个主方向。 □

任一点P，都存在包含它的邻域以及局部参数(u,v)使得$\langle r_u,r_v\rangle=0$，即正交参数系[习题12]。非脐点P，存在它的邻域以及参数(u,v)使得u,v-曲线为曲率线[do Carmo, § 3.4]。

§0.1.3 Gauss曲率的另一定义：Gauss

Gauss通过面积比来定义Gauss曲率，一个是$S_1\subset S$的面积，另一个是$g(S_1)\subset S^2$的有向面积。曲面S在$r(u,v)$处的面积元

$$dA=|r_u\wedge r_v|dudv=\langle r_u\wedge r_v,N\rangle dudv=\sqrt{EG-F^2}dudv.$$

如果映射$N=\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}:D\to S^2$的微分满秩(即$N_u\wedge N_v\neq 0$)，则由它给出$S^2$面积元为$|N_u\wedge N_v|dudv$，其中$N_u\wedge N_v=(-Wr_u)\wedge(-Wr_v)$。记

$$Wr_u=ar_u+br_v,\quad Wr_v=cr_u+dr_v,$$

则

$$N_u\wedge N_v=(Wr_u)\wedge(Wr_v)=(ad-bc)r_u\wedge r_v=\det(W)r_u\wedge r_v=Kr_u\wedge r_v.$$

从而S^2面积元为

$$|N_u\wedge N_v|dudv=|K||r_u\wedge r_v|dudv=|K|dA.$$

又由$g=N\circ r^{-1}:S\to S^2$，若$K(P)\neq 0$，则存在P的邻域S_1使得$g|_{S_1}$为微分同胚。如下讨论限制在$S_1\subset S$或$D_1:=r^{-1}(S_1)\subset D$上。

面积元$|N_u\wedge N_v|dudv$是S^2的相应于定向(N_u,N_v)(或者说$\frac{N_u\wedge N_v}{|N_u\wedge N_v|}$)的面积元。$S^2$的相应于定向$N$(曲面$S$的法向)的有向面积元

$$d\sigma := sgn(\langle\frac{N_u\wedge N_v}{|N_u\wedge N_v|},N\rangle)|K|dA$$

这里$\frac{N_u\wedge N_v}{|N_u\wedge N_v|}=\pm N$，符号函数取值与参数选取无关，只与曲面$S$有关。由

$$N_u\wedge N_v = Kr_u\wedge r_v,$$

可得

$$sgn(\langle\frac{N_u\wedge N_v}{|N_u\wedge N_v|},N\rangle) = sgn(K\frac{|r_u\wedge r_v|}{|N_u\wedge N_v|}) = sgn(K),$$

从而相应于定向N的有向面积元

$$d\sigma = KdA.$$

对曲面上包含P点的区域S_1，$g(S_1)\subset S^2$的有向面积

$$\mathrm{Area}(g(S_1)) = \int_{g(S_1)} d\sigma = \int_{S_1} KdA.$$

因此S_1收缩于P点时，

$$\lim_{S_1\to P}\frac{\mathrm{Area}(g(S_1))}{\mathrm{Area}(S_1)} = K(P).$$

即Gauss曲率等于Gauss映射像集$g(S_1)\subset S^2$的相应于定向N的有向面积与$S_1\subset S$的面积比值的极限。

§0.1.4 平均曲率的意义

曲面的平均曲率定义为

$$H=\frac{1}{2}tr(W)=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{1}{2}\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}.$$

平均曲率为零的曲面称为极小曲面。极小曲面具有广泛的应用。

例：(i)计算$\mathbb{R}^3$中图$r(x,y)=(x,y,f(x,y)),(x,y)\in D$的平均曲率。

(ii)设$f(x,y;t)\in C^2(\overline{D}\times(-\epsilon,\epsilon))$，并且$f|_{\partial D}$不依赖于$t$。令

$$M_t=\{(x,y,z=f(x,y;t))\},$$

求面积泛函$\mathrm{Area}(M_t)$的Euler-Lagrange方程。

解：(i) 计算平均曲率：

$$r_x = (1, 0, f_x), \quad r_y = (0, 1, f_y), \quad N = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1).$$

因此第一基本形式

$$(I) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix},$$

这也验证了曲面的面积元

$$dA = \sqrt{EG - F^2} dxdy = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy.$$

第一基本形式的逆矩阵为

$$(I)^{-1} = \frac{1}{1 + f_x^2 + f_y^2} \begin{pmatrix} 1 + f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 + f_x^2 \end{pmatrix}.$$

第二基本形式

$$(II) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{aligned} 2H &= tr((II)(I)^{-1}) = \frac{1}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}[(1 + f_y^2) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right). \end{aligned}$$

因此有极小曲面方程(Lagrange 1762年)的标准形式

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0,$$

以及等价的散度形式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right) = 0.$$

注1. 事实上Lagrange 1762年通过如下面积变分首先得到极小曲面方程，Meusnier (1776年) 发现极小曲面方程等价于图曲面的平均曲率为零。

注2：高斯曲率

$$K=\frac{1}{(1+|Df|^2)^2}\det(D^2f),$$

其中Df,D^2f分别为f的梯度和Hessian。因此各种高斯曲率方程为完全非线性的Monge-Ampere型方程。

(ii) 令

$$\dot{f}(x,y)=\frac{df}{dt}|_{t=0}(x,y;t).$$

则由$\dot{f}|_{\partial D}=0$以及分部积分得

$$\begin{aligned}
\dot{A} &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\int_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy\\
&= \int_D\frac{f_x\dot{f}_x+f_y\dot{f}_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}dxdy\\
&= \int_D[\frac{\partial}{\partial x}(\dot{f}\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})-\dot{f}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})]dxdy\\
&\quad+\int_D[\frac{\partial}{\partial y}(\dot{f}\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})-\dot{f}\frac{\partial}{\partial y}(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})]dxdy\\
&= -\int_D\dot{f}[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})]dxdy.
\end{aligned}$$

如果$f(x,y)=f(x,y;0)$使得对任意满足$\dot{f}|_{\partial D}=0$的连续函数$\dot{f}$都有$\dot{A}=0$，则称$f(x,y)$为面积泛函的临界点，$f(x,y)$所满足的方程称为面积泛函的Euler-Lagrange方程。因此有面积泛函的Euler-Lagrange方程，即极小曲面方程(Lagrange 1762年)的散度形式

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}})=0.$$

面积的变分公式为

$$\dot{A}=-\int_D 2H\dot{f}dxdy=-\int_S\langle 2HN,\dot{r}\rangle dA.$$

注：一般情形曲面面积的第一变分。考虑曲面$r(u,v)$的一族扰动曲面

$$r(u,v;t)=r(u,v)+t\varphi(u,v)N(u,v),\quad t\in(-\epsilon,\epsilon).$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=0}\text{Area} &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\int_D\sqrt{EG-F^2}dudv\\
&= \int_D\frac{\dot{E}G+E\dot{G}-2F\dot{F}}{2\sqrt{EG-F^2}}dudv,
\end{aligned}$$

其中

$$\dot{E} = \frac{d}{dt}|_{t=0}E = \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle r_u, r_u\rangle = 2\langle r_u, \varphi N_u\rangle = -2\varphi L,$$

$$\dot{G} = \frac{d}{dt}|_{t=0}G = \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle r_v, r_v\rangle = 2\langle r_v, \varphi N_v\rangle = -2\varphi N,$$

$$\dot{F} = \frac{d}{dt}|_{t=0}F = \frac{d}{dt}|_{t=0}\langle r_u, r_v\rangle = \langle \varphi N_u, r_v\rangle + \langle r_u, \varphi N_v\rangle = -2\varphi M.$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=0}\text{Area} &= -\int_D \varphi\frac{LG+NE-2MF}{\sqrt{EG-F^2}}dudv \\
&= -\int_D 2H\varphi\sqrt{EG-F^2}dudv \\
&= -\int_S \langle 2HN, \dot{r}\rangle dA.
\end{aligned}$$

因此面积泛函的临界点当且仅当曲面的平均曲率为零，即极小曲面。

作业：29, 35