思考题讨论

- 思考题7.6 想象将密绕螺线管的导线纵向剖开，每股线圈的自感为L，求互感及总自感。
- 思考题8.2 证明静磁能 $W_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\,\mathrm{d}V.$
- 思考题9.1 暂态电路的频率如何分布？似稳条件的适用性如何？

- 思考题8.2 证明静磁能 $W_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V.$

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_V (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_V \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H}) + \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})\mathrm{d}V$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\oiint_S (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}} + \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V.$$

表面项弃之！

- 思考题9.1 暂态电路与似稳条件

问题：

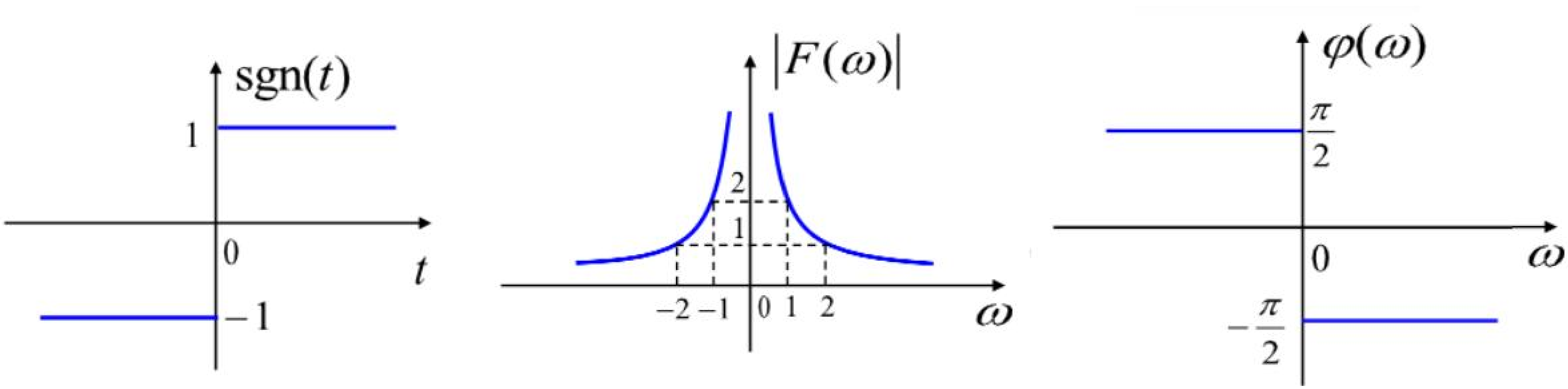
➢ 简谐交流电有单一频率，似稳条件$l<<\lambda$很明确。

➢ 暂态电路的激励源∝阶跃函数，非单一频率，似稳条件中的λ是什么？

破解：

➢ 扣除掉直流成分，激励源正比于符号函数sgn(t)。其Fourier变换

$$F[\mathrm{sgn}(t)] = \lim_{\alpha\to 0^+} F[\mathrm{sgn}(t)e^{-\alpha|t|}] = \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{-2j\omega}{\alpha^2+\omega^2}\right) = \frac{2}{j\omega}$$



- 可见电源电压主要成分为低频部分，高频部分占比少，可以忽略。
- 实际电源电动势并非理想的阶跃函数，有平滑过渡区，进一步减少了高频成分。

第二十八讲 2022-06-09

第9章 交流电路

§ 9.1 基本概念和描述方法

§ 9.2 交流电路的复数解法

§ 9.3 交流电路的功率

§ 9.4 交流电路的分析举例

9.3 交流电的功率

- 计算交流电功率比直流电功率“麻烦”：

➢ 交流电是随时间作周期性变化的，因此就有瞬时功率和平均功率的概念。前者精确，后者实用。

➢ 由于电感和电容是储能元件，并不真实消耗能量，因而就有视在功率与有功功率的分别；而有功功率占视在功率的比例则用功率因数来衡量。

➢ 提高电路的功率因数，就能提高有功功率的比例，从而降低对电器耐受电压、电流的要求。

正能量：交流电功率有更多彩的内涵！

1. 瞬时功率

- 瞬时功率是非线性电学量，慎用复数法。

  函数法是简谐量的忠实表述，当为首选！

- 稳恒电路：I和U是稳恒的，所以其功率也稳恒。

- 交流电路：设$i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_i)$, $u(t)=V_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_u)$, 则瞬时功率

$$p(t)=V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_i)\cos(\omega t+\varphi_u)$$

$$=\tfrac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}[\cos(\varphi_u-\varphi_i)+\cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)]$$

记$\varphi=\varphi_u-\varphi_i$，则

$$p(t)=\tfrac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}[\cos\varphi+\cos(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i)]$$

- 瞬时功率讨论：

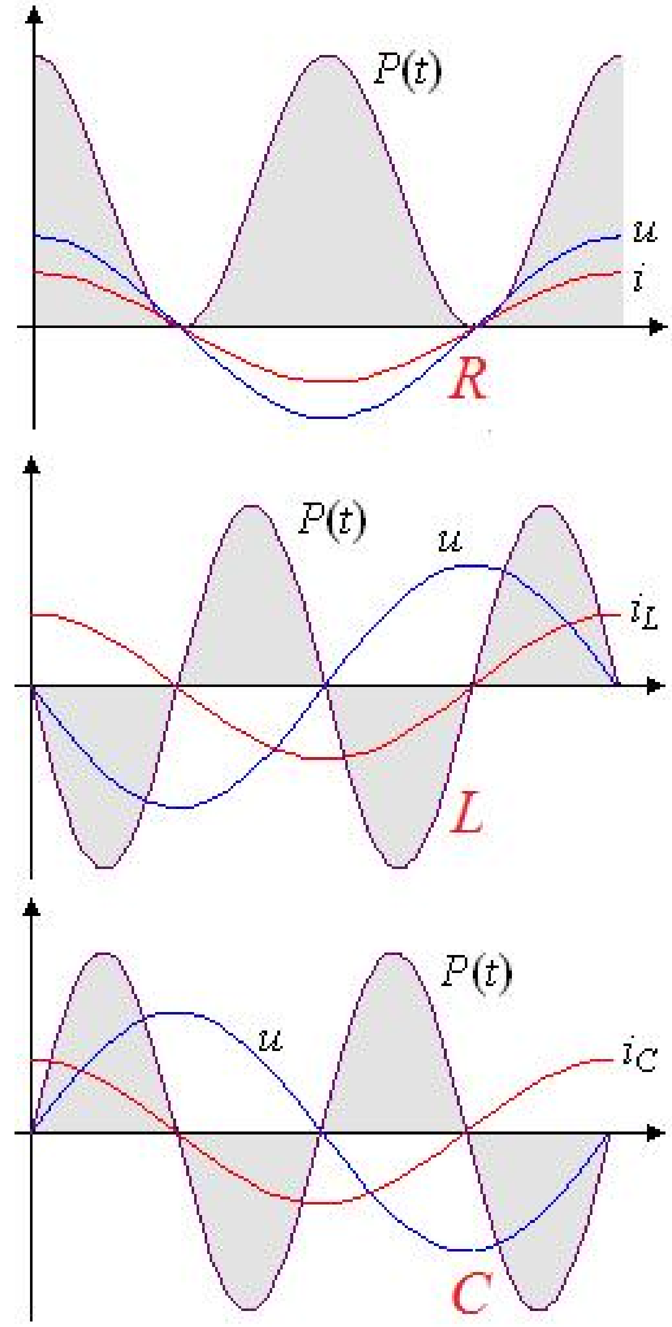
➢ 上式的第一项与时间无关，第二项是二倍频项。

➢ 电感或电容元件的电压超前或之后电流$\pi/2$相位，所以$\cos\varphi=0$，第一项为零，有贡献的只有随时间正负交替的第二项。

➢ 当电感元件的$p(t)>0$时，电感吸收能量，转为磁能储存在线圈的磁场中；当$p(t)<0$时，电感释放其储存的磁能。

➢ 当电容元件的$p(t)>0$时，电容吸收能量，转为电能储存在电容器内的电场；当$p(t)<0$时，电容释放其储存的电能。

R、L、C元件上的瞬时电压、瞬时电流和瞬时功率的关系



2. 平均功率

1) 定义

- 瞬时功率在一个周期内的平均值。

$$P=\overline{p}=\int_0^T p(t)\mathrm{d}t/T=\tfrac{1}{2}V_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos\varphi=VI\cos\varphi,$$

其中V和I是有效值。瞬时功率的含时项在平均后“消失”了，所以平均功率既实用又简单。

2) 不同元件的平均功率

- 纯电阻：$\varphi=0$，$\cos\varphi=1$，与稳恒电路的情况一致；
- 纯电感：$\varphi=\pi/2$，$\cos\varphi=0$，平均功率为零；
- 纯电容：$\varphi=-\pi/2$，$\cos\varphi=0$，平均功率为零。

3. 视在功率和功率因数

- 视在功率$S=VI$

  广义：一个元件或电路上电压和电流有效值的乘积。

  狭义：一个元件上额定电压与额定电流的乘积，也称额定功率。

- 有功功率：电路在一个周期内实际消耗的功率。

  有功功率=平均功率 (**Why？**)，即$P=VI\cos\varphi$。

- 功率因数：有功功率与视在功率之比，即$\cos\varphi$。

- 增大功率因数的意义

➢ 额定功率给定时，可提高有功功率

➢ 有功功率给定时，可降低对电器额定电压/流的要求

4. 由电压和电流复有效值计算平均功率

- 功率是基本电学量的非线性表达，所以一般不等于复数描述法的实部： $p(t) \neq \mathrm{Re}(\tilde{V}\tilde{I})$
- 平均功率的表达式比较简单，可尝试用复数法表达。

设 $\dot{V} = Ve^{\mathrm{j}\varphi_u}$， $\dot{I} = Ie^{\mathrm{j}\varphi_i}$， $\varphi_u - \varphi_i = \varphi$，

则 $\dot{V}\dot{I}^* = VIe^{\mathrm{j}\varphi}$， $\dot{V}^*\dot{I} = VIe^{-\mathrm{j}\varphi}$.

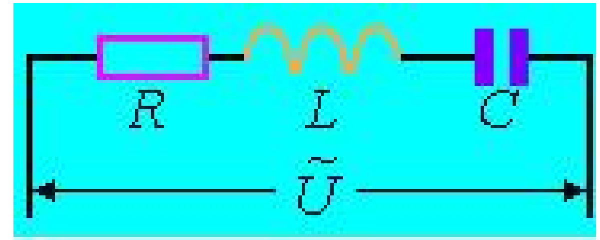
于是有

$$\mathrm{Re}(\dot{V}\dot{I}^*) = \mathrm{Re}(\dot{V}^*\dot{I}) = \frac{1}{2}(\dot{V}\dot{I}^* + \dot{V}^*\dot{I}) = VI\cos\varphi = P.$$

- 瞬时功率的表达式过于复杂，用复数法表述很麻烦，且意义不大。

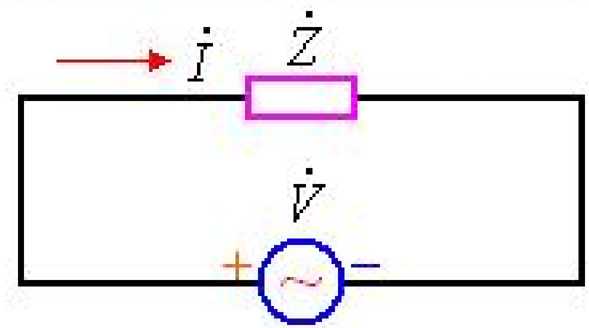
9.4 交流电路分析举例

1. 串联谐振电路



带内阻R的电感L和电容C串联。

- 复阻抗



$$\dot{Z} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C = R + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

$$= R + \mathrm{j}(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = Z e^{\mathrm{j}\varphi_Z}.$$

阻抗和辐角

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2 (1 - \omega_0^2 / \omega^2)^2},$$

$$\varphi_Z = \tan^{-1}[(\omega L / R)(1 - \omega_0^2 / \omega^2)], \text{ 其中 } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

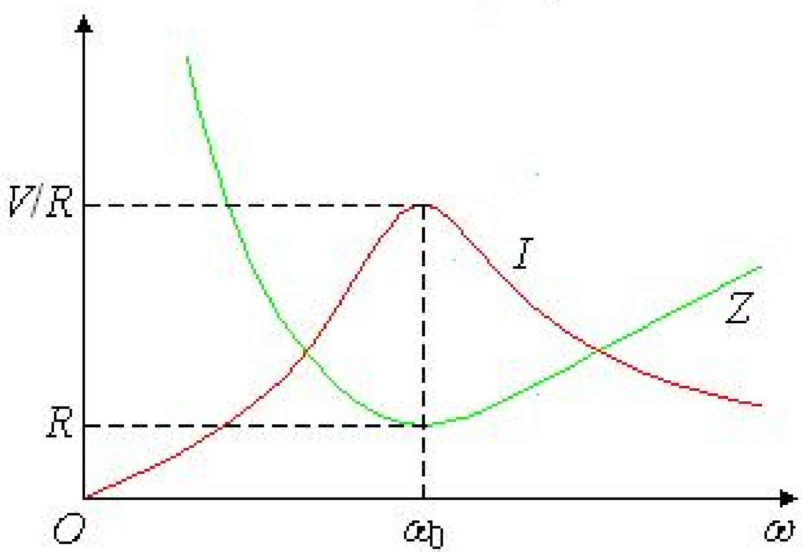
- 复电流

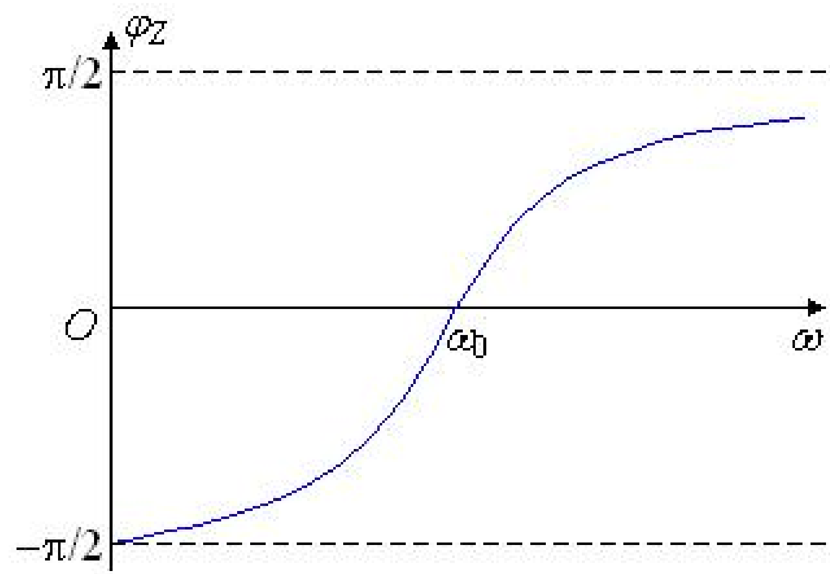
复电路方程：$\dot{V}=\dot{I}\dot{Z}$

设复电压初相位为0，则 $\varphi_u=0,\ \dot{V}=V.$

故得复电流为 $\dot{I}=\dot{V}/\dot{Z}=V/\dot{Z}$

其模和辐角分别为 $I=V/Z$, $\varphi_i=-\varphi_Z$.





- 串联谐振

当$\omega L=1/\omega C$，即$\omega=\omega_0=1/\sqrt{LC}$ 时，I取极大值，Z取极小值，这种情况称为串联谐振。

谐振频率 $$f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

此时$\varphi_z=0$, $Z_{\min}=R$, $I_{\max}=V/R$. U_R, U_L, U_C都取极大值。

- 一般情形

$$\varphi_Z=\tan^{-1}[(\omega L/R)(1-\omega_0^2/\omega^2)]\rightarrow$$

当$\omega<\omega_0$时，$\varphi_z<0$，电路呈电容性；

当$\omega>\omega_0$时，$\varphi_z>0$，电路呈电感性；

当$\omega=\omega_0$时，$\varphi_z=0$，电路呈纯电阻性。

- 品质因数

$$Q=\frac{1}{R\omega_0 C}=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

反映谐振电路的若干固有性质。

1) Q决定谐振时的阻抗比和电压比

谐振时$V_R=\mathcal{E}$，即电阻的电压等于电源电动势，而电感和电容上的电压达到电动势的Q倍：

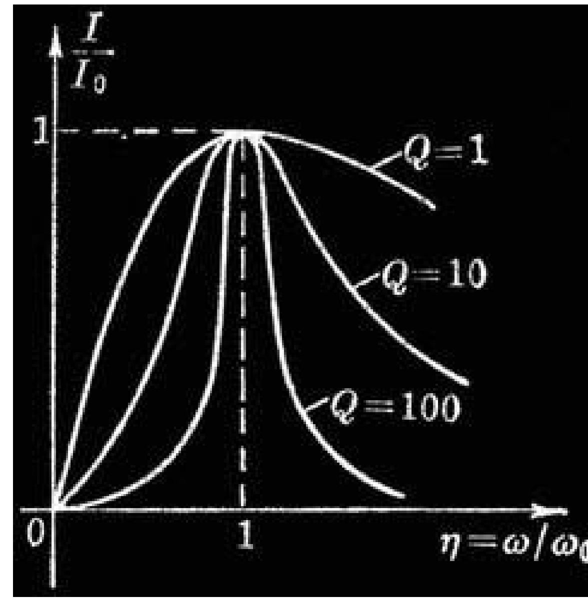
$$Q=\frac{Z_C}{R}\overset{\times I_{\max}}{\underset{\times I_{\max}}{=}}\frac{V_C}{V_R},\quad Q=\frac{Z_L}{R}\overset{\times I_{\max}}{\underset{\times I_{\max}}{=}}\frac{V_L}{V_R}.$$

但L和C的电压相位相反，总电压为0.

所以串联谐振电路也称作电压谐振电路。

2) Q决定谐振曲线的尖锐程度

设频率由$f_0 \rightarrow f_0 \pm \Delta f$时，$Z=\sqrt{2}Z_{\min}$， 即$I=I_{\max}/\sqrt{2}$，称$2\Delta f$为谐振电路的带宽。



由 $Z=\sqrt{R^2+\omega^2L^2(1-\omega_0^2/\omega^2)^2}$

可证 $2\Delta f=\Delta\omega/\pi=f_0/Q$.

3) Q表征电路的损耗与储能情况

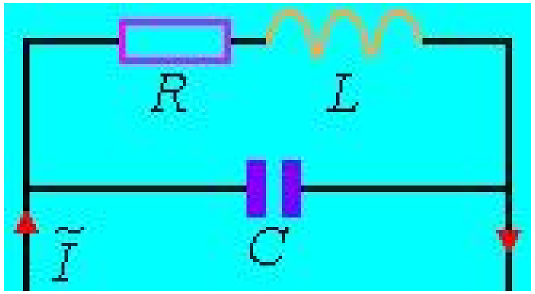
$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{2\pi L}{T_0 R}=4\pi\frac{LI^2/2}{I^2RT_0},$$

$$Q=\frac{1}{R\omega_0 C}=\omega_0 C\frac{(I/\omega_0 C)^2}{I^2R}=4\pi\frac{CV_C^2/2}{I^2RT_0},$$

即Q等于电感或电容平均储能与一个周期能量损耗之比的4π倍。Q越大，储能效率越高。

2. 并联谐振电路

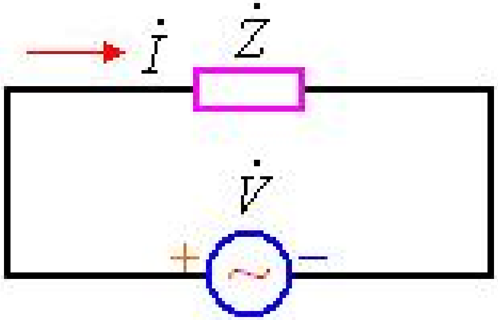
带内阻R的电感L和电容C并联。



- 阻抗和辐角

$$\frac{1}{\dot{Z}}=\frac{1}{\dot{Z}_C}+\frac{1}{\dot{Z}_R+\dot{Z}_L}=\mathrm{j}\omega C+\frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}=\mathrm{j}\omega C+\frac{R-\mathrm{j}\omega L}{R^2+(\omega L)^2}$$

$$=\frac{R}{R^2+(\omega L)^2}+\mathrm{j}\left[\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right].$$



$$\therefore Z=R\sqrt{\frac{1+Q^2\omega^2/\omega_0^2}{(1-\omega^2/\omega_0^2)^2+\omega^2/(\omega_0^2Q^2)}},$$

$$\varphi_Z=\tan^{-1}\left[\frac{\omega L}{R}(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-\frac{1}{Q^2})\right].$$

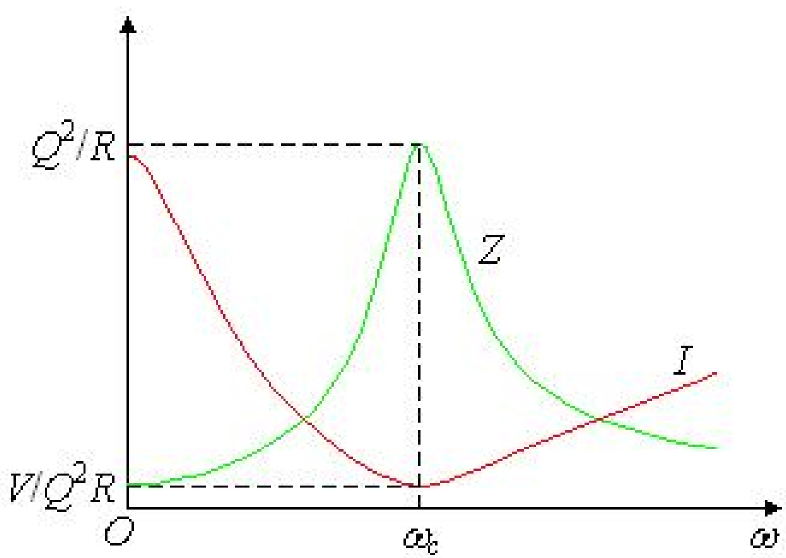
- 并联谐振

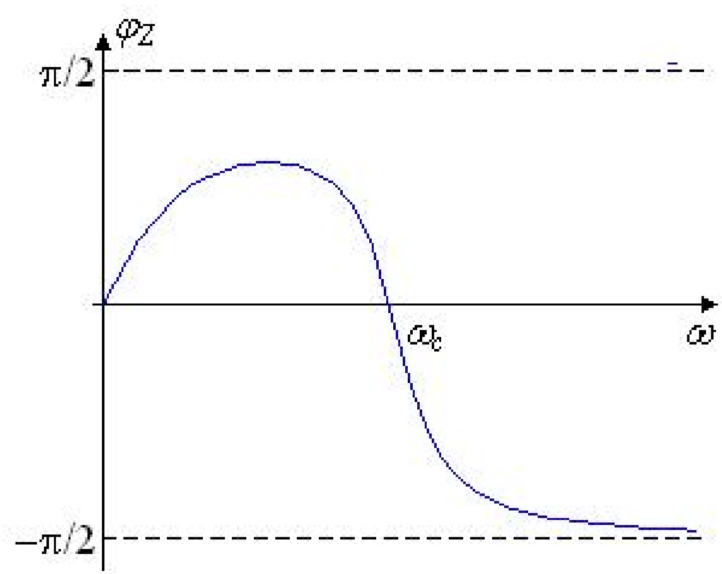
当φ_Z=0时，$\omega_C = \omega_0\sqrt{1-Q^{-2}}$，$f_C = \dfrac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{1-Q^{-2}}$.

谐振频率$f_C \neq f_0$.

此时电路阻抗接近最大值，回路总电流接近最小值。

等效阻抗和总电流与频率关系同串联谐振电路相反。





- $Q \gg 1$情形下的并联谐振

➢ $R \ll \omega L \rightarrow Q \gg 1 \rightarrow \omega_C \approx \omega_0$, $f_C \approx f_0$.

➢ 总阻抗和总电流分别达最大值和最小值

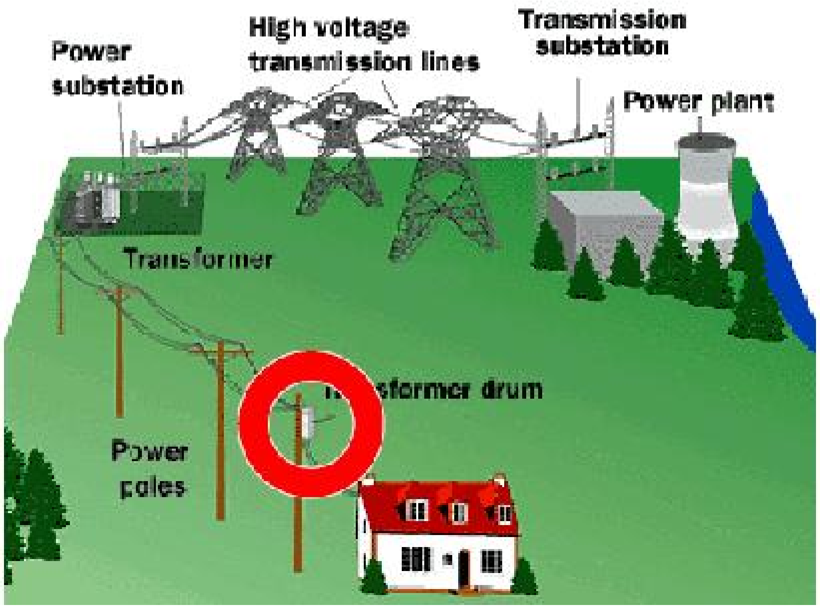
$$Z \approx Q^2 R，I_{min} \approx V/(Q^2 R).$$

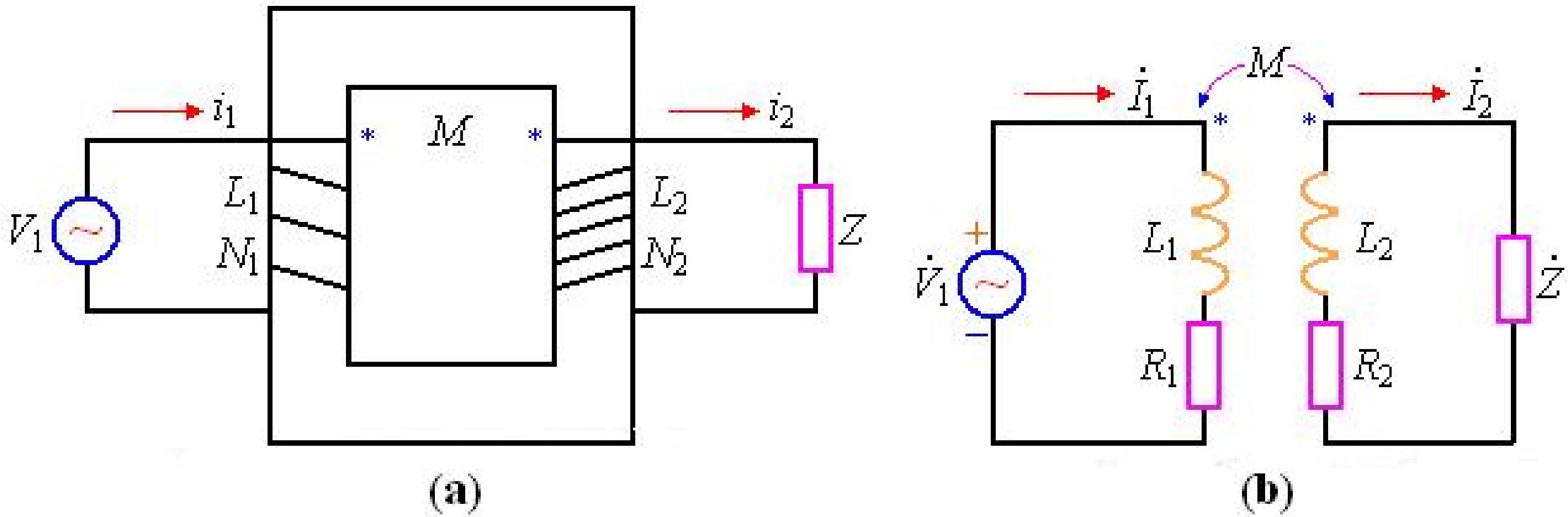
➢ 总电压和总电流同位相，电路呈纯电阻特性。

➢ 对于两个分支电流的并联，I_1和I_2在数值上均达到最大，但I_1与I_2在位相上相差180°，总电流几乎为零。所以并联谐振又称为电流谐振。

3. 变压器电路

- 在长距离输送电的过程中，电线有一定的电阻，导致焦耳热损耗: $Q=I^2Rt$。
- 在$P=UI$一定时，提高输送电压，可以降低电流，减低焦耳热损耗。其后再将电压降到220V供应用户。





1) 变压器原理

- 变压器由绕在同一铁芯上的两个线圈构成。与电源相连线圈为初级线圈，与负载相连线圈为次级线圈。
- 变压器中，能量依靠铁芯中的互感磁能传递。
- 设N_1, N_2分别为初、次级线圈的匝数，$L_{1,2}$为自感，M为互感，$R_{1,2}$为线圈内阻，电流I_1, I_2从异名端流入。

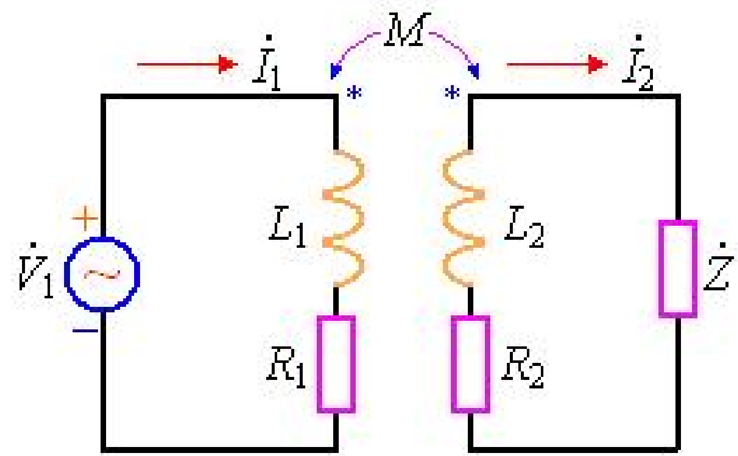
- 电路方程

初级线圈：$\dot{V}_1 = \dot{I}_1\dot{Z}_1 - \dot{I}_2\dot{Z}_M$,

次级线圈：$0 = -\dot{I}_1\dot{Z}_M + \dot{I}_2\dot{Z}_2$,

其中

$$\dot{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}\omega L_1,\ \dot{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}\omega L_2 + \dot{Z},\ \dot{Z}_M = \mathrm{j}\omega M.$$



- 输入和输出电流

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2},\quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{V}_1\dot{Z}_M}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2}.$$

两电流之比 (变流比)、 变压比分别是

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_M},\quad \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{\dot{I}_2\dot{Z}}{\dot{V}_1} = \frac{\dot{Z}\dot{Z}_M}{\dot{Z}_1\dot{Z}_2 - \dot{Z}_M^2}.$$

2) 理想变压器

- 无磁漏，即通过两组线圈每匝的磁通都一样，则

$$M^2 = L_1 L_2,\ L_1 / L_2 = N_1^2 / N_2^2.$$

回忆例7.7，$L \propto N^2$

- 无铜损 (绕组中无电阻)，即

$$R_1 = R_2 = 0.$$

- 无铁损 (忽略铁芯中的磁滞损耗和涡流损耗)。
- 初、次级线圈的感抗远大于电源内阻和负载阻抗：

$$Z_1, Z_2, Z_M >> Z.$$

- 于是可得理想变压器的如下重要关系

变流比 $$\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}=\frac{\dot{Z}_M}{\dot{Z}_2}=\frac{\mathrm{j}\omega M}{\mathrm{j}\omega L_2}=\frac{\sqrt{L_1L_2}}{L_2}=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}=\frac{N_1}{N_2}.$$

变压比 $$\frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1}=\frac{\mathrm{j}\omega M\dot{Z}}{-\omega^2L_1L_2+\mathrm{j}\omega L_1\dot{Z}+\omega^2M^2}=\frac{M}{L_1}=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}=\frac{N_2}{N_1}.$$

注意推导中原公式分母近似的技巧！

变换阻抗 变压器初级等效阻抗 (反射阻抗) 为

$$\dot{Z}_1'\equiv\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1}=\frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2-\dot{Z}_M^2}{\dot{Z}_2}=\frac{L_1}{L_2}\dot{Z}=\frac{N_1^2}{N_2^2}\dot{Z}.$$

可证初级和次级回路功率相等，电能转换效率100%.

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{\mathrm{Re}(\dot{V}_2\dot{I}_2^*)}{\mathrm{Re}(\dot{V}_1\dot{I}_1^*)}=\mathrm{Re}\left(\frac{N_2\dot{V}_1}{N_1}\frac{N_1\dot{I}_1^*}{N_2}\right)/\mathrm{Re}(\dot{V}_1\dot{I}_1^*)=1.$$

第9章 小结

交流电路 → 简谐交流电 $\begin{cases}\text{函数描述}\\\text{矢量描述}\\\text{复数描述}\end{cases}$

单回路、多回路方程 ← 似稳电路基本方程

核心复阻抗

串联(电压)谐振：Q $\begin{cases}\text{谐振时的阻抗比和电压比}\\\text{谐振曲线的尖锐程度}\\\text{电路的损耗与储能}\end{cases}$

并联(电流)谐振：$Q>>1$

理想变压器：变流比/变压比/变换阻抗/效率100%

非线性量：瞬时/视在/平均(有功)功率/S

复有效值表示

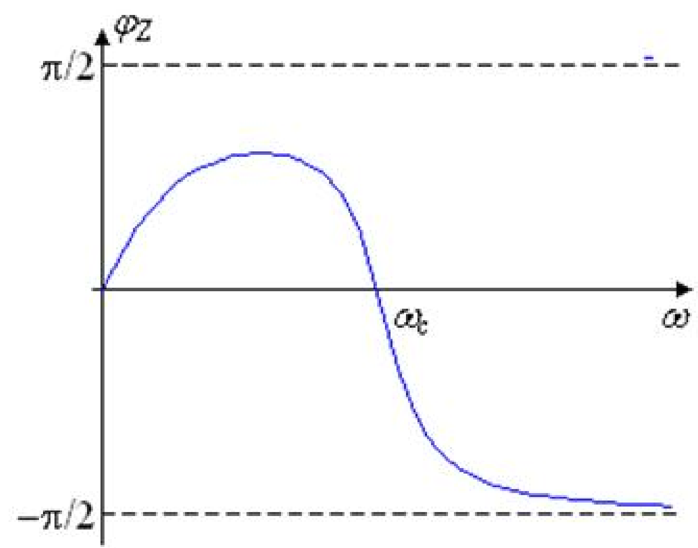
作业、预习及思考题

- 作业：**9.5~9.10**
- 预习：**10.1 麦克斯韦方程组、10.2 平面电磁波**
- 思考题9.2 图9.13b中为何

  1) $\omega=0$和ω_c时$\varphi_Z=0$？

  2) $\omega\to\infty$时$\varphi_Z=-\pi/2$？

  3) $Q>>1$时$\varphi_{Z\max}=\pi/2$



特别思考题

- **思考题7.7** 对7.6的再思考：已知L_2=0.99L_1，k=0.99，求同名端并接时两线圈的总自感L。

- **思考题7.8** 两线圈并接的总自感公式可简化为 $g(x,y)=\dfrac{x(1-y^2)}{1+x-2y\sqrt{x}}$，仿照此式构造函数$f(x, y)$，要求：

  1) 当$x\neq1, y=1$时，$f=0$；当$x=1, y=1$时，$f=1$。

  2) 当x和y均略小于1时，f也略小于1。