1

§8. 1(2)(4), 2(2), 3(1)(3), 4(2)(4) 5(1)(4). 6. 7. 8.

1.(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

(4) $n \geq 4$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & & & \\ -1 & 0 & 2 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 2 & 0 & -1 \\ & & & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$n=3$ $Q = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.(2) $Q = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2bx_1x_2 + 2bx_2x_3$

3.(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(\lambda I - A) = \lambda^2(\lambda - 9)$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\alpha_1 = (2\ 1\ 0)^T$ $\alpha_2 = (-2\ 0\ 1)^T$

$\lambda_3 = 9$ $\alpha_3 = (1\ -2\ 2)^T$

$e_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\ 1\ 0)^T$

$\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2 e_1)e_1 = \frac{1}{5}(-2\ 4\ 5)^T$

$e_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2\ 4\ 5)^T$

$e_3 = \frac{\alpha_3}{|\alpha_3|} = \left(\frac{1}{3}\ -\frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\right)$.

$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

第七章也有题这样错的
↓
（有些同学直接把 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 单位化后就正交，也是不可以的！"实对称阵A属于不同特征值的特征向量必正交"（P207 推论7.3.1）
此题中 α_3 与 $\alpha_1\alpha_2$ 正交，可以直接单位化，但 $\alpha_1\alpha_2$ 不一定是正交的！需要作 Schimidt 正交化）.
（不是实对称阵的话，所有特征向量都要参与正交化！

(3) $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det(\lambda I-A)=(\lambda+3)^2(\lambda-6)$

$\lambda_1=\lambda_2=-3 \quad \alpha_1=(-1\ 1\ 0)^T \ \alpha_2=(-1\ 0\ 1)^T$

$\lambda_3=6 \quad \alpha_3=(1\ 1\ 1)^T$

$e_1=\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1\ 1\ 0)^T$

$\beta_2=\alpha_2-(\alpha_2\ e_1)e_1=\frac{1}{2}(-1\ -1\ 2)^T$

$e_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1\ -1\ 2)^T$

$e_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1\ 1\ 1)^T$

$T=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$-3y_1^2 \cancel{+} -3y_2^2+6.$

4.(2) $Q=x_1^2+x_2x_3$

$=x_1^2+\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{2}x_2x_3+\frac{1}{4}x_3^2-\frac{1}{4}x_2^2+\frac{1}{2}x_2x_3-\frac{1}{4}x_3^2$

$=x_1^2+\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2-\frac{1}{4}(x_2-x_3)^2$

$\begin{cases} y_1=x_1 \\ y_2=(x_2+x_3)\frac{1}{2} \\ y_3=(x_2-x_3)\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=y_2+y_3 \\ x_3=y_2-y_3 \end{cases} \quad Q=y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(4) $Q=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$

$=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+4x_2^2-4x_2x_3+x_3^2-5x_3^2$

$=(x_1+x_2)^2+(2x_2-x_3)^2-5x_3^2$

$\begin{cases} y_1=x_1+x_2 \\ y_2=2x_2-x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-\frac{1}{2}(y_2+y_3) \\ x_2=\frac{1}{2}(y_2+y_3) \\ x_3=y_3 \end{cases} \Rightarrow Q=y_1^2+y_2^2-5y_3^2$

2

5.(1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 3 & 2 & & 1 & \\ 1 & 2 & 1 & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_1+r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \\ 1 & 2 & 1 & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}c_1+c_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_1+r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}c_1+c_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{3}{5}r_2+r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{5}c_2+c_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = Py \\ Q = y^T \begin{pmatrix} 2 & & \\ & \frac{5}{2} & \\ & & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} y \end{array}$$

右侧块 $= P^T$（因为我作的行变换）

(4)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & 1 & & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & 1 & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_2+c_1]{r_2+r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & & 1 & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}c_1+c_2]{-\frac{1}{2}r_1+r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & & \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & & & 1 & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-\frac{1}{2}c_1+c_3]{-\frac{1}{2}r_1+r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & & \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{2}c_1+c_4]{-\frac{1}{2}r_1+r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[c_2+c_3]{r_2+r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-c_2+c_4]{-r_2+r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 1 & 1 & & \\ & -\frac{1}{4} & & & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & 0 & & -1 & 0 & 1 & \\ & & & 0 & & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x = Py \\ Q = y^T \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -\frac{1}{4} & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} y \end{array}$$

右侧块 $= P^T$

6. 由定理 8.3.2（惯性定理）正负惯性指数不同 故不相合.

7. $A^2=A$. 设 A 特征值和对应特征向量为 λ 和 α. $A\alpha=\lambda\alpha$

$(A^2-A)\alpha = A^2\alpha - A\alpha = A\lambda\alpha - \lambda\alpha = \lambda^2\alpha - \lambda\alpha = (\lambda^2-\lambda)\alpha$.

$\lambda^2-\lambda$ 为 A^2-A 的特征值

$A^2-A=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda=0$ $\lambda=1$ 或 0.

又 A 实对称 故存在正交矩阵 T, s.t. $T^{-1}AT=\left(\begin{matrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&\\&&&0&\\&&&&\ddots\\&&&&&0\end{matrix}\right)\}r$

$\left(\begin{matrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&1&&\\&&&0&\\&&&&\ddots\\&&&&&0\end{matrix}\right)\}r$ 为A的相合标准型. $r=\operatorname{rank}A$

8. A 对称，$\exists$ T 正交. s.t. $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\underbrace{a_1 \cdots a_r}_{r=\operatorname{rank}A}\ 0 \cdots 0)$

令 $A_k = T\operatorname{diag}(0\cdots 0\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{第k个}}}{a_k}\ 0 \cdots 0)T^{-1}$ $(k=1\cdots r)$

$A_1 \cdots A_r$ 的 rank 为 1, $A=A_1+\cdots+A_r$.

20-21 (一)

2. (1) × 非实对称阵

(2) × $\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ 实方阵特征值可能是复的. 不能实相似为上三角阵

(3) × $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ 不能正交相似为对角阵

(但可以酉相似为对角阵)

(4) √ $A^{-1}(AB)A=BA$

(5) × $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ 顺序主子式均≥ 0 但 $(-1\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\underset{<0}{-1}$

5

3 8 · 12 · 14 15 17 18 19 20 23 24 26 ~~27~~ 28, 21, 22.

12 (1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{t}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $2>0$. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & \frac{t}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{t}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-\frac{t^2}{4}>0$

$\Leftrightarrow t \in (-2\ \ 2)$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{2} & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$ $1>0$ $\begin{vmatrix} 1 & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & 2 \end{vmatrix} = 2-\frac{t^2}{4}>0 \Leftrightarrow t\in(-2\sqrt{2}\ \ 2\sqrt{2})$

$\begin{vmatrix} 1 & \frac{t}{2} & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} & \frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix} = \frac{23}{4}-t^2>0 \Leftrightarrow t\in\left(-\frac{\sqrt{23}}{2}\ \ \frac{\sqrt{23}}{2}\right)$

综上. $t\in\left(-\frac{\sqrt{23}}{2}, \frac{\sqrt{23}}{2}\right)$

13. $\begin{pmatrix} a & & c \\ & b & \\ c & & a \end{pmatrix}$ $\begin{cases} a>0 \\ ab>0 \\ a^2b-c^2b>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ |c|<a \end{cases}$

14. A负定 $\Leftrightarrow x^TAx<0 \quad \forall x\neq 0 \Leftrightarrow x^T(-A)x>0 \quad \forall x\neq 0$.

$\Leftrightarrow$ $-A$正定 $\Leftrightarrow$ $-A$ 顺序主子式均 >0.

设 A顺序主子阵为 A_k, $-A$顺序主子阵为 B_k

k奇: $\det B_k = \det(-A_k) = (-1)^k \det A_k = -\det A_k$.

k偶: $\det B_k = (-1)^k \det(A_k) = \det A_k$.

故 A负定 $\Leftrightarrow$ 奇阶顺序主子式 <0. 偶阶顺序主子式 >0.

15. $\begin{cases} y_1 = x_1+a_1x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n+a_nx_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_1 & 0 \\ 0 & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Q = y_1^2+\cdots+y_n^2 = y^Ty$

$= x^TA^TAx \geq 0$ 半正定

时 $Q=0 \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow Ax=0$

若Q正定，则 $Ax=0$ 有唯一0解 $x=0 \Rightarrow$ A满秩，即 A可逆

$\det A = 1+(-1)^{n+1}\prod_{k=1}^{n} a_k \neq 0$（按第1列展开）。

$\Rightarrow \prod_{k=1}^{n} a_k \neq (-1)^n$.

17. A正定 $\Rightarrow a_{ii}>0 \quad i=1\cdots n$.

令 $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}} \end{pmatrix}$. $P^TAP=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & 1 \end{pmatrix}}=B$.

设B特征值为 $\lambda_1\cdots\lambda_n$.

$\det B=\lambda_1\cdots\lambda_n \underset{\text{均值}}{\leq} \left(\frac{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}{n}\right)^n=\left(\frac{trB}{n}\right)^n=1$

$\det B = \det(P^TAP)=\frac{1}{a_{11}\cdots a_{nn}}\det A$

$\Rightarrow \det A \leq a_{11}\cdots a_{nn}$.

18 (1) $\Rightarrow$): A实对称 $\Rightarrow \exists$ 可逆 P s.t. $P^TAP=diag(\lambda_1\cdots\lambda_n)$

若 $\exists \lambda_i\leq 0$ 则取 $x=Pe_i \Rightarrow x^TAx=e_i^TP^TAPe_i=\lambda_i\leq 0$. 矛盾!

$\Leftarrow$): 若 $\lambda_i>0$ $i=1\cdots n$. 则对 $\forall x\in\mathbb{R}^n$, 设 $y=P^Tx$

$x^TAx=x^TP\,diag(\lambda_1\cdots\lambda_n)P^Tx=y^T diag(\lambda_1\cdots\lambda_n)y$

$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2>0 \Rightarrow$ 正定.

19. (1) A正定 $\Rightarrow \exists$ 可逆 P s.t. $A=P^TP \Rightarrow A^{-1}=(P^TP)^{-1}=P^{-1}P^{-T}=(P^{-T})^TP^{-T}$

P^{-T} 可逆 $\Rightarrow A^{-1}$ 正定.

(2) A^* 特征值为 $\frac{\det A}{\lambda}$（习题 ）.

$\det A>0$, $\lambda_i>0$ $i=1\cdots n \Rightarrow \frac{\det A}{\lambda_i}>0$ $i=1\cdots n \Rightarrow A^*$ 正定.

6

20页后.

23. 由习题 ，A特征值只能为-1或1. ⇒ A+I 的特征值只能是0 或2

⇒ 正定或半正定.

24. (1) ~~[illegible]~~

(1)：A, B正定 ⇒ $\forall x\neq 0$, $x^TAx>0$, $x^TBx>0$ ⇒ $\forall x\neq0$ $x^T(A+B)x>0$.

⇒ A+B 正定

(2) ⇒)：AB正定 ⇒ $BA=B^TA^T=(AB)^T=AB$.

⇐)：$AB=BA$ ⇒ $(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$ ⇒ AB对称.

A, B正定 ⇒ ∃可逆 P, Q s.t. $A=P^TP$ $B=Q^TQ$.

⇒ $AB=P^TPQ^TQ$.

⇒ $QABQ^{-1}=QP^TPQ^TQQ^{-1}=QP^TPQ^T=(PQ^T)^T(PQ^T)$ 正定

⇒ AB正定.

26. A正定 ⇒ ∃P可逆 s.t. $A=P^TP$ 考虑 $tI+P^{-T}BP^{-1}$

为实对称，设 $P^{-T}BP^{-1}$ 的特征值为 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$.

⇒ $tI+P^{-T}BP^{-1}$ 的特征值为 $t+\lambda_k$，当t充分大时. $t+\lambda_k>0$ 对所有k成立

$((tI+M)\alpha_k=t\alpha_k+M\alpha_k=(t+\lambda_k)\alpha)$.

⇒ $tI+P^{-T}BP^{-1}$ 正定 ⇔ $\forall x\neq0$ $x^T(tI+P^{-T}BP^{-1})x$

对 $\forall y\in\mathbb{R}^n$ $y\neq0$ ∃ $x\neq0$ s.t. $y=P^{-1}x$ i.e. $x=Py$. 代入.

有 $y^TP^T(tI+P^{-T}BP^{-1})Py=y^T(tA+B)y>0$.

⇒ tA+B 正定 (t充分大)

27. 由习题 8.17. $\det A \le a_{11}\cdots a_{nn} \le \left(\frac{a_{11}+\cdots+a_{nn}}{n}\right)^n = \left(\frac{\mathrm{tr}A}{n}\right)^n$

均值.

11 (1) $2>0$. $\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = 4-\frac{1}{4} > 0$.

$\begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -5 < 0$.

(2) $1>0$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+1 > 0$.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$.

---

22. (1) $(2x-1)^2-6(y-\frac{1}{4})^2-6(z-\frac{1}{4})^2-4(y-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{4})-5=0$.

令 $a=2x-1$ $b=y-\frac{1}{4}$ $c=z-\frac{1}{4}$ $(x\ y\ z)^T=\alpha$

$a^2-6b^2-6c^2-4bc-5=0$. $(a\ b\ c)^T=\beta$.

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \lambda_1=-8 & \alpha_1=(0\ 1\ 1)^T \\ \lambda_2=-4 & \alpha_2=(0,-1\ 1)^T \\ \lambda_3=1 & \alpha_3=(1,0,0)^T \end{matrix}$ $P^TAP=\begin{pmatrix} -8 & & \\ & -4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\beta^TA\beta=\beta^TP^T\begin{pmatrix} -8 & & \\ & -4 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P\beta$.

令 $\gamma=P\beta=(\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3)^T$

原方程为 $-8\gamma_1^2-4\gamma_2^2+\gamma_3^2-5=0$ 双叶双曲面型

(突然发现我的做法好像和书上标准过程不太一样 ... 答案过程仅供参考
建议按书上来先旋转消交叉项再化简).

(2) 单叶双曲面型

19-20(二)

(1) ✓ $Span(\alpha_1\cdots\alpha_r)\subseteq Span(\beta_1\cdots\beta_r)$ $rank(\alpha_1\cdots\alpha_r)=r$

$\Rightarrow rank(\beta_1\cdots\beta_r)=r$

(2) X $a=1$时 $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 不能相似对角化(代数重数≠几何重数)

(3) ✓ 正交阵 ⇒ 行(列)向量构成n维标准正交向量组

⇒ $\mathbb{R}^n$上的标准正交基.

(4) ✓ ①首先验证子空间: $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. A,B对称, $(\lambda A+\mu B)^T=\lambda A^T+\mu B^T=\lambda A+\mu B$

②∀对称方阵 $\begin{pmatrix}a&d&e\\d&b&f\\e&f&c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}$

$+d\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}0&&1\\&0&\\1&&0\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}0&&\\&0&1\\&1&0\end{pmatrix}$

$\{(\quad)\ \cdots\}$ 为一组基. ⇒ 维数为6.

19-20(一).

(1) $\det(\lambda I-A)=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=3$ $\alpha_1=(-1\ 0\ 1)^T$ $\alpha_2=(-1\ 1\ 0)^T$

$\lambda_3=0$ $\alpha_3=(1\ 1\ 1)^T$

$\Rightarrow A$与$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$不相似 但相合. (相合不相似的例子)

(2) ✓ ① $m\le n$时 $rank A\le m$. $rank AB\le rank A$ $\Rightarrow rank A=m$

同理B有 $rank B=m$

② $m>n$时,若$rank A<n$ 则 $rank AB\le rank A<n<m$ 矛盾!

$\Rightarrow rank A=n$ 同理 $rank B=n$.

(3) $f(x_1\cdots x_n)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\frac{i}{j}x_j\right)^2=\sum_{i=1}^n i^2\left(\sum_{j=1}^n\frac{x_j}{j}\right)^2$

令 $y_1=\sum_{j=1}^n\frac{x_j}{j}$ $f(x_1\cdots x_n)=\left(\sum_{i=1}^n i^2\right)y_1^2$

(4) $A=(a_{ij})_{n\times n}$. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$ $(i=1\cdots n)$. 令 $\alpha=(1\cdots\cdots1)^T$

$$\Rightarrow A\alpha=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\alpha \quad \Rightarrow \lambda=1 \text{ 为 } A \text{ 的特征值.}$$

由 $A^5\alpha=A^4\lambda\alpha=\cdots=\lambda^5\alpha$ 知 $\lambda^5=1$ 为 A^5 特征值

设 $A^5=(b_{ij})_{n\times n}$.

$$A^5\alpha=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} b_{1j}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n} b_{nj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} b_{ij}=1 \quad (i=1\cdots n)$$

20-21 (一)

6. A.B实对称. $AB=BA$ 求证:存在 n阶正交 P s.t. P^TAP 与 P^TBP 都是对角阵

Pf: A实对称 $\Rightarrow$ ∃正交 P s.t. $P^{-1}AP=diag(\lambda_1 I_{n_1}\cdots\lambda_r I_{n_r})$

$\lambda_1\cdots\lambda_r$ 为A的r个不同的特征值 n_i 为 λ_i 对应重数

$AB=BA \Rightarrow \cancel{P}\, diag(\lambda_1 I_{n_1}\cdots\lambda_r I_{n_r})P^{-1}BP$

$=P^{-1}BP\, diag(\lambda_1 I_{n_1}\cdots\lambda_r I_{n_r})\cancel{P^{-1}}$

设 $P^{-1}BP=(B_{ij})$ 分块与 $diag(\lambda_1 I_{n_1}\cdots\lambda_r I_{n_r})$ 分块相对应.

$\Rightarrow \lambda_i B_{ij}=\lambda_j B_{ij} \Rightarrow B_{ij}=0 \ (i\neq j)$

$\Rightarrow P^{-1}BP=\begin{pmatrix}B_{11}&&0\\&\ddots&\\0&&B_{rr}\end{pmatrix}$. 由B实对称, P正交.

$\Rightarrow (P^{-1}BP)^T=P^TB^TP^{-T}=P^{-1}BP\Rightarrow \begin{pmatrix}B_{11}&&\\&\ddots&\\&&B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}^T&&\\&\ddots&\\&&B_{rr}^T\end{pmatrix}$

$\Rightarrow B_{ii}$ 可对角化, 设正交 P_i s.t. $P_i^{-1}B_{ii}P$ 为对角阵

$\Rightarrow Q=\begin{pmatrix}P_{11}&&\\&\ddots&\\&&P_{rr}\end{pmatrix}$ 为正交阵 且 $Q^{-1}P^{-1}BPQ$ 为对角阵

3 且 $Q\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{n_r}\end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix}P_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & P_{rr}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r I_{n_r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{11}^T & & \\ & \ddots & \\ & & P_{nn}^T\end{pmatrix}$

仍为对角阵

$\Rightarrow T=PQ$ 即为所求

补1. $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2=A$，求证：A 可对角化

Pf：$A^2-A=0$. $A^2\alpha=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha$

(和习题 6.23 很像) $(A^2-A)\alpha=(\lambda^2-\lambda)\alpha=0 \Rightarrow \lambda=0$ 或 1

由 $A(A-I)=0 \Rightarrow \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(A-I)\le n$.

但 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(A-I)\ge \operatorname{rank}(A-A+I)=n$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(A-I)=n$.

$\to$ ……

2. A 为 3 维方阵，$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关的 3 维列向量，满足

$A\alpha_1=-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3$，$A\alpha_2=4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3$，

$A\alpha_3=-2\alpha_1+3\alpha_3$

(1) 求 A 的特征值和特征向量.

(2) 求行列式 $\det(A^*-4I_3)$

Sol：(1) $A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\underbrace{\begin{pmatrix}-1&4&-2\\-3&4&0\\-3&1&3\end{pmatrix}}=B.$

设 B 特征值为 λ_i 对应向量为 x_i

$\det(\lambda I-B)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=1 \quad x_1=(1\ 1\ 1)^T$

$\lambda_2=2 \quad x_2=(2\ 3\ 3)^T$

$\lambda_3=3 \quad x_3=(1\ 3\ 4)^T$.

$A(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)x_i=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)Bx_i=\lambda_i(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)x_i$

令 $y_i=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)x_i \Rightarrow Ay_i=\lambda_i y_i$

故 λ_i 为A的特征值 y_i 为A对应的特征向量

$\lambda_1=1$. $y_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

$\lambda_2=2$ $y_2=2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3$.

$\lambda_3=3$ $y_3=\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3$.

(2) A特征值互不相同 $\Rightarrow \exists$ 可逆P s.t. $A=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$

$A^*=(P^{-1})^*\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}^*P^*\underset{\uparrow}{=}Q^{-1}\Lambda^*Q$

设 $P^*=Q$

$\det(A^*-4I_3)=\det(Q^{-1}\Lambda^*Q-4I)=\det(Q^{-1}(\Lambda^*-4I)Q)$

$=\det Q\cdot\det Q^{-1}\cdot\det(\Lambda^*-4I)$

$=4$.

3. "A、B为实方阵，A与B既相似又相合，A与B是否一定正交相似?"

反例：$\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}$.