复分析第三次习题课

黄天一

2023 年 4 月 12 日

1 作业部分

3.2.1. 计算下列积分.

1. $\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2}$.
2. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{2z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z$.
3. $\displaystyle\int_{|z|=5}\frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z$.
4. $\displaystyle\int_{|z|=2a}\frac{\mathrm{e}^z}{z^2+a^2}\mathrm{d}z$, $a>0$.

解答. 1. 参考徐神笔记 Lec 7 例 2.3.

2. 直接整理可得

$$\int_{|z|=2}\frac{2z-1}{z(z-1)}\mathrm{d}z=\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z}+\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z-1}=4\pi\mathrm{i}.$$

3. 这里我们应用 3.2.2(**注意：本讲义为了不重复证明，直接用了下面将证的结论，但是正式考试时不允许直接套用作业题，请类似 3.2.2 的证明按部就班地写清楚求解过程，类似的还有 3.2.4 的第二题给出的无界域 Cauchy 积分公式，也不要直接套用**). 由于 $\dfrac{z^2}{z^4+1}$ 在 $z\to\infty$ 时收敛于零, 因此积分值为零.

4. 由 Cauchy 积分公式计算可得

$$\int_{|z|=2a}\frac{\mathrm{e}^z}{z^2+a^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{2a\mathrm{i}}\left(\int_{|z|=2a}\frac{\mathrm{e}^z}{z-a\mathrm{i}}\mathrm{d}z-\int_{|z|=2a}\frac{\mathrm{e}^z}{z+a\mathrm{i}}\mathrm{d}z\right)=\frac{\pi}{a}(\mathrm{e}^{a\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{-a\mathrm{i}})=\frac{2\pi\mathrm{i}}{a}\sin a.$$

□

注 1.1. 不少同学在处理第 3 题时用了 "换元法", 但需要注意: **在复变函数中使用换元法是需要十分谨慎的，实用性远不及我们的核心工具：Cauchy 积分定理和 Cauchy 积分公式**. 为了看清这一点, 我们来回顾书上唯一提到的一处换元法, 即习题 3.1.7.

7、设 γ 是可求长曲线，φ 在 γ 上全纯，$\Gamma=\varphi(\gamma)$. 证明：

(i) Γ 也是可求长曲线；

(ii) 如果 f 在 Γ 上连续，那么

$$\int_\Gamma f(w)\mathrm{d}w=\int_\gamma f(\varphi(z))\varphi'(z)\mathrm{d}z.$$

现在我们来看看如何将这个换元法应用在第三题. 此时对应的 φ 即为 $\varphi(z)=z^2$, γ 为圆周 $|z|=5$, 且曲线 $\Gamma=\varphi(\gamma)$ 实际上是沿着 $|z|=25$ 逆时针转了两圈, 设第一圈为 Γ_1, 第二圈为 Γ_2, 则

$$\int_{|z|=5}\frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}w}{w^2-1}=\int_{\Gamma_1}\frac{\mathrm{d}w}{w^2-1}=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\left(\frac{1}{w-1}-\frac{1}{w+1}\right)\mathrm{d}w=0.$$

这样才是完整的求解, 使用换元法的同学鲜少能给出完整的过程.

3.2.2. 设 $f\in H(B(\infty,r))$, 且 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=A$, 证明:

$$\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}A,\ \forall R>r.$$

证明. 由于 $f(z)$ 在 $B(\infty,r)$ 上全纯, 由 Cauchy 积分定理可得

$$\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z=\int_{|z|=R'}f(z)\mathrm{d}z,\ \forall R,R'>r.$$

所以我们只需证明 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}A$. 任取 $\varepsilon>0$, 当 $|z|=R>r$ 充分大时, 有 $|zf(z)-A|<\varepsilon$. 所以

$$\left|\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z-2\pi\mathrm{i}A\right|=\left|\int_{|z|=R}\frac{zf(z)-A}{z}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{R}\cdot2\pi R=2\pi\varepsilon.$$

即证. □

3.2.3. 设 n 是正整数, 通过计算积分 $\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{z}$ 来证明

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=2\pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

证明. 设 k 为正整数, 则有 $\int_{|z|=1}z^k\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, & k=-1,\\ 0, & k\neq-1.\end{cases}$ 由此可得

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{z}&=\int_{|z|=1}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}z^{k-1}\cdot\frac{1}{z^{2n-k}}\mathrm{d}z\\&=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\int_{|z|=1}z^{2n-2k-1}\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

另一方面, 参数化可得

$$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\mathrm{i}\int_0^{2\pi}2^{2n}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta.$$

比较两式可得

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=2\pi\cdot\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=2\pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

□

3.2.4. (全纯函数平均值公式) 设 $0 < r < R$, $f \in H(B(0,R))$. 证明:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{|z|\leqslant r} f(z)dxdy.$$

证明. 由 Cauchy 积分公式可得

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\cdot ire^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta.$$

进而成立

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint_{|z|\leqslant r} f(z)dxdy = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\left(\int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta})d\theta\right)\rho d\rho = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r 2\pi f(0)\rho d\rho = f(0).$$

□

3.2.5. (二维调和函数的平均值公式) 设 u 在 $B(0,R)$ 中调和, $0 < r < R$, 证明:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta.$$

证明. 不妨设 u 是实值函数, 不然分解成实部虚部即可. 由于 u 在 $B(0,R)$ 上调和, 故存在 $B(0,R)$ 上的共轭调和函数 v, 设 $f = u + iv \in H(B(0,R))$. 任取 $0 < r < R$, 成立

$$u(0) = \operatorname{Re} f(0) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})d\theta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re} f(re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta.$$

□

3.3.3. 设 $f \in C^n(\mathbb{C}) \cap H(\mathbb{C})$, 并且 $f^{(n)}(z)$ 恒为零. 证明: f 必为次数不大于 n 的多项式.

证明. 实际上, 题干的 n 可以改成 $n-1$. 我们用归纳法证明之. 当 $n = 1$ 时, 即为 $f'(z)$ 恒为零, 此时 f 恒为常数. 若对于正整数 n 命题成立, 设 f 为整函数且 $f^{(n+1)}(z) = 0$, 则有 $(f^{(n)})' = 0 \Rightarrow f^{(n)}$ 恒为常数 w_0. 所以有

$$\left(f(z) - \frac{w_0}{n!}z^n\right)^{(n)} = f^{(n)} - w_0 = 0,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

由归纳假设可得 $f(z) - \frac{w_0}{n!}z^n$ 是次数不超过 $n-1$ 的多项式, 所以 f 是次数不超过 n 的多项式.

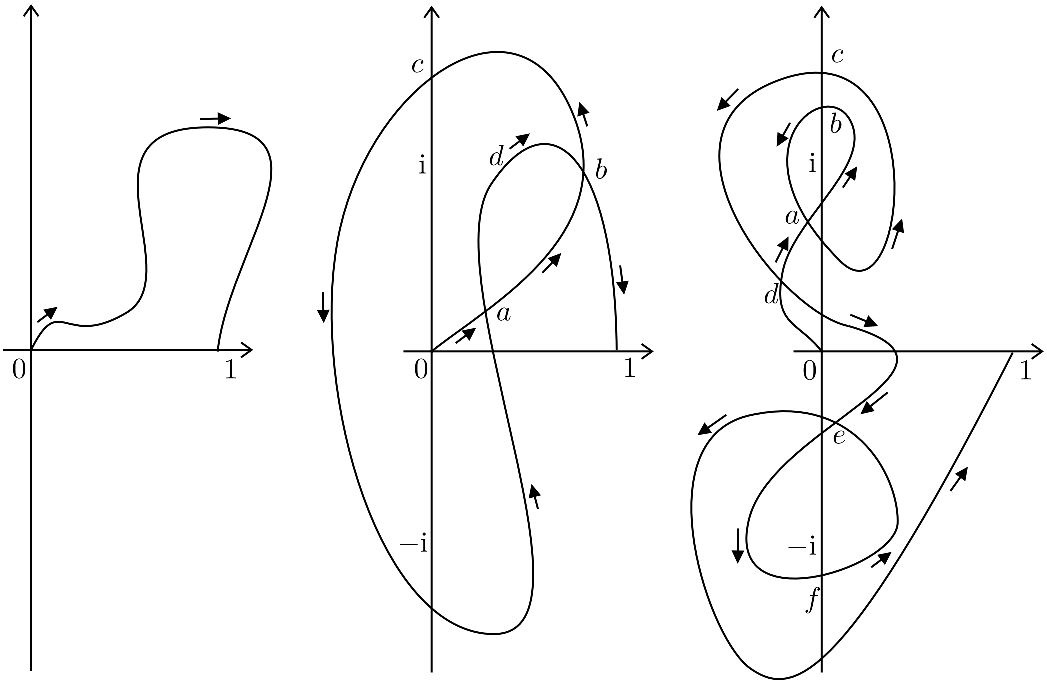
□

3.3.4. 设 γ 是从 0 到 1 且不经过 $\pm i$ 的可求长曲线, 证明:

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

证明. 第一种情况: 从 0 到 1 的可求长曲线 γ 既不围绕 i 转圈, 也不围绕 $-i$ 转圈 (例如左图). 由 Cauchy 积分定理可得

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$



第二种情况: γ 的某一段同时围绕 i, −i 逆时针转了一圈 (也就是这段简单闭曲线内部包含 i, −i), 我们来说明这种情况是可以忽略的. 设这条简单闭曲线是 γ', 则

$$\int_{\gamma'}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\int_{\gamma'}\frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}}-\int_{\gamma'}\frac{\mathrm{d}z}{z+\mathrm{i}}\right)=\frac{2\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=0.$$

所以同时围绕 i, −i 转圈不会影响最终的积分值. 例如中间的图, γ 从 0 出发, 沿路径 $0\to a\to b\to c\to a\to d\to b\to 1$ 到达 1, 则 $a\to b\to c\to a$ 同时围绕 i, −i 逆时针转了一圈, 所以此时的积分值为

$$\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\int_{\widehat{0adb1}}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\frac{\pi}{4}.$$

最后, 设 γ_1 是仅围绕 i 转了一圈的简单可求长闭曲线, 则

$$\int_{\gamma_1}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\int_{\gamma_1}\frac{1}{z+\mathrm{i}}/(z-\mathrm{i})\mathrm{d}z=\pi.$$

设 γ_2 是仅围绕 −i 转了一圈的简单可求长闭曲线, 则

$$\int_{\gamma_2}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=\int_{\gamma_1}\frac{1}{z-\mathrm{i}}/(z+\mathrm{i})\mathrm{d}z=-\pi.$$

我们设 γ 分别单独绕 i, −i 逆时针转了 m,n 圈, 这里 m,n 为整数. 约定: 逆时针转了负整数圈就表示顺时针转了对应的正整数圈. 以右图为例, 此时 γ 从 0 出发, 沿 $0\to d\to a\to b\to a\to c\to d\to e\to f\to e\to 1$ 到达 1, 那么 $\widehat{aba},\widehat{acda}$ 共绕 i 逆时针转了两圈, $\widehat{efe}$ 绕 −i 逆时针转了一圈, $\widehat{0de1}$ 是从 0 到 1 且不绕 i, −i 转圈的可求长闭曲线. 所以

$$\begin{aligned}\int_{\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}&=\int_{\widehat{0de1}}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}+\int_{\widehat{aba}}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}+\int_{\widehat{acda}}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}+\int_{\widehat{efe}}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}\\&=\frac{\pi}{4}+\pi+\pi-\pi=\frac{5\pi}{4}.\end{aligned}$$

更一般地, 在我们此前的假设下, 有

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + m\pi - n\pi = \frac{\pi}{4} + (m-n)\pi.$$

其中 m, n 可以取到任意整数值. 综上可得

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

□

3.3.5. 设 f 是凸域 D 上的全纯函数, 如果在 D 内恒成立 $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, 证明 f 在 D 内单叶.

证明. 任取不同的两点 $z_1, z_2 \in D$, 由于 D 是凸集, 故线段 z_1z_2 包含于 D, 该线段的一个参数化为 $t \in [0,1] \mapsto (1-t)z_1 + tz_2$. 又因为凸集单连通, 所以成立

$$f(z_2) - f(z_1) = \int_{\overline{z_1 z_2}} f'(z)\mathrm{d}z = (z_2 - z_1)\int_0^1 \operatorname{Re} f'((1-t)z_1 + tz_2)\mathrm{d}t.$$

由 $\operatorname{Re} f'(z)$ 恒大于零可得

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^1 f'((1-t)z_1 + tz_2)\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 \operatorname{Re} f'((1-t)z_1 + tz_2)\mathrm{d}t > 0.$$

因此 $f(z_1) \neq f(z_2)$, 所以 f 在 D 中单叶. □

注 1.2. 本题也有部分同学犯了同一个错误, 就是用了所谓的“复变函数版本的微分中值定理”. 需要注意的是, **数分里多元函数所满足的中值定理在复变函数中不再适用!** 下面是方企勤书上给出的反例.

例 2 设 $P(z) = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$, 其中 a_1, a_2, a_3 不在一直线上, D 表示以 a_1, a_2, a_3 为顶点的三角形, 则 $P'(z)$ 的零点属于 D.

证明 过 a_1, a_2 两点的直线记作 L_3, 它把 $\mathbf{C}$ 分成两个半平面, 记不含 a_3 的半平面为 H_3 (图 3-1). 类似有直线 L_1, L_2 与半平面 H_1, H_2. 只要证 $P'(z)$ 的零点不属于 H_k $(k=1,2,3)$, 则零点必属于 $D = \mathbf{C}\backslash\{H_1 \cup H_2 \cup H_3\}$.

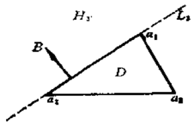


图 3-1

由求导公式得

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{z-a_k}.$$

设 B 为复数, 它对应的向量垂直于 L_3, 且指向 H_3 半平面. $\forall z \in H_3$, 有

$$\operatorname{Re}\frac{BP'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Re}\frac{B}{z-a_k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\operatorname{Re} B(\bar{z}-\bar{a}_k)}{|z-a_k|^2}.$$

从几何上可以看出, 向量 B 与向量 $z-a_k$ 的内积大于零, 所以 $\forall z \in H_3$ 时,

$$\operatorname{Re}\frac{BP'(z)}{P(z)} > 0.$$

这说明 $P'(z)$ 在 H_3 上无零点. 同理可证 $P'(z)$ 在 H_1, H_2 上无零点, 故 $P'(z)$ 的零点位于三角形 D 内.

上面例子顺便也告诉我们, 在复变函数里没有相应的微分中值定理和积分中值定理. 如果有微分中值定理, 由 $P(z)$ 在 a_1, a_2 为零, 可得 $P'(z)$ 在连接 a_1, a_2 的线段上某一点为零, 这样 $P'(z)$ 就有三个零点与 $P'(z)$ 为二次多项式矛盾.

3.4.1. 计算下列积分.

1. $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{\sin z}{z^2-1}\mathrm{d}z.$

2. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$

3. $\displaystyle\int_{4x^2+y^2=2y} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z.$

4. $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z^2+4)}.$

5. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}.$

6. $\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)}.$

第 6 题中 n 为正整数, 且 a,b 不在圆周 $|z|=R$ 上.

解答. 1. 注意到 $\dfrac{\sin z}{z+1}$ 在 $|z-1|\leqslant 1$ 上全纯, 由 Cauchy 积分公式可得

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\sin z}{z^2-1}\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z+1}/(z-1)\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}\sin 1.$$

2. 由 Cauchy 积分公式可得

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}} - \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z+\mathrm{i}}\right) = \frac{2\pi\mathrm{i}-2\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = 0.$$

3. $4x^2+y^2=2y$ 围成了椭圆域 D, 由于 $\mathrm{i}\in D, -\mathrm{i}\notin D$. 由 Cauchy 积分公式的推论可得

$$\int_{4x^2+y^2=2y} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\pi z}}{(z+\mathrm{i})^2} = \frac{\pi(\pi\mathrm{i}-1)}{2}.$$

4. 直接整理可得

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{1}{3}\left(\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} - \int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+4}\right) = 0.$$

5. 考虑曲线 $|z|=\frac{1}{4}, |z-1|=\frac{1}{4}, |z|=2$ 围成的三连通域 D, 则 $\dfrac{1}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}$ 在 $\overline{D}$ 上全纯. 所以

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z-1)^3(z-3)^5} &= \int_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z-1)^3(z-3)^5} + \int_{|z-1|=\frac{1}{4}} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z-1)^3(z-3)^5} \\ &= \pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\bigg|_{z=0} \frac{1}{(z-1)^3(z-3)^5} + \pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\bigg|_{z=1} \frac{1}{z^3(z-3)^5} \\ &= -\frac{1697}{46656}\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

(非常坏题目 😡, 恨来自 USTC👊)

6. 这里我们借助第二题给出的无界域 Cauchy 积分公式, 考虑四种情况:

(1) $a,b\in B(0,R)$, 此时 $\dfrac{1}{(z-a)^n}$ 在 $B(\infty,R)$ 中全纯, 并且在 $z\to\infty$ 时收敛于 0. 由 3.4.2 可得此时积分为零.

(2) $a,b\in B(\infty,R)$, 则 $\dfrac{1}{(z-a)^n(z-b)} \in H(\overline{B(0,R)})$. 由 Cauchy 积分定理可得此时积分为零.

(3) $a\in B(0,R), b\in B(\infty,R)$, 此时 $\dfrac{1}{(z-a)^n} \in H(\overline{B(\infty,R)})$, 并且 $z\to\infty$ 时收敛于零. 由 3.4.2 可得此时积分为 $-\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{(b-a)^n}$.

(4) $a\in B(\infty,R), b\in B(0,R)$. 由 Cauchy 积分公式可得

$$\int_{|z|=R} \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(b-a)^n}.$$

□

3.4.2. (无界域的 Cauchy 积分公式) 设 γ 为可求长简单闭曲线, 内部为区域 G_1, 外部为区域 G_2. 如果 $f \in H(G_2) \cap C(\overline{G}_2)$, 并且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$, 证明:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \begin{cases} -f(z) + A, & z \in G_2, \\ A, & z \in G_1. \end{cases}$$

证明. 若 $z \in G_1$, 则对于充分大的 $R > 0$, 考虑曲线 $\gamma, |\zeta - z| = R$ 确定的二连通域 D, 则 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} \in H(D) \cap C(\overline{D})$. 因此

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \triangleq I(R).$$

由于 $|\zeta| \to \infty$ 时 $f(\zeta) \to A$, 因此任取 $\varepsilon > 0$, 当 $|\zeta - z| = R$ 充分大时 $|f(\zeta) - A| < \varepsilon$. 因此

$$|I(R) - A| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta) - A}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{R} \cdot 2\pi R = \varepsilon.$$

因此令 $R \to +\infty$ 即得 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \lim_{R \to +\infty} I(R) = A$.

若 $z \in G_2$, 则对于充分大的 $R > 0$, 考虑曲线 $\gamma, |\zeta - z| = R, |\zeta - z| = \delta$ 确定的三连通域 D, 其中 $\varepsilon > 0$ 充分小. 则有 $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} \in H(\overline{D})$. 因此

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = I(R) - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta - z| = \delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = I(R) - f(z).$$

由 R 的任意性, 结合第一种情况的讨论即可得此时 $\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = A - f(z)$ □

注 1.3. 无界域的 Cauchy 积分公式的证明是很值得记忆的, 该方法可以用于求解诸多类似形式的复积分. 这里我们列出若干往年期中考察过的积分计算题并给出最后答案, 具体的过程留给同学们自行完成. 求解的方案在作业题中都出现过.

1. (22mid) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^4+1)(z-3)}$. (Ans. $-\dfrac{\pi \mathrm{i}}{41}$)
2. (21mid) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{i}\theta} \mathrm{d}\theta$. (Ans. 2π)
3. (21(H)mid) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^{10}}{(z^5+1)^2(z+2)} \mathrm{d}z$. (Ans. $-\dfrac{126\pi \mathrm{i}}{961}$)
4. (20mid) $\displaystyle\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z}{(z-2\mathrm{i})(z-1)} \mathrm{d}z$, $\displaystyle\int_{|z|=\frac{5}{2}} \frac{z}{(z-2\mathrm{i})(z-1)} \mathrm{d}z$. (Ans. $\dfrac{2\pi \mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$, $2\pi \mathrm{i}$)
5. (16(H)mid) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{|\mathrm{d}z|}{z-1}$. (Ans. 0)

3.4.5. 设 $f \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$, 证明:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 2f(0) + f'(0).$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 2f(0) - f'(0).$$

证明. 只证明第一个等式, 第二个等式完全类似. 考虑复积分

$$I = \int_{|z|=1}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta} + 2\right)\frac{f(\zeta)}{\zeta}\mathrm{d}\zeta.$$

一方面计算可得

$$I = \int_{|z|=1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + \int_{|z|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta + 2\int_{|z|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}(f'(0) + 2f(0)).$$

另一方面, 曲线参数化可得

$$I = \mathrm{i}\int_0^{2\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + 2)f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = 2\mathrm{i}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta = 4\mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta.$$

比较两个等式即证. □

3.4.6. 设 $f \in H(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$, 并且 $f(0) = 1, \operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$, 那么

$$-2 \leqslant \operatorname{Re} f'(0) \leqslant 2.$$

证明. 由 3.4.5 的结论可得

$$\operatorname{Re} f'(0) + 2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\operatorname{Re} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta \geqslant 0 \Rightarrow \operatorname{Re} f'(0) \geqslant -2.$$

$$-\operatorname{Re} f'(0) + 2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\operatorname{Re} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta \geqslant 0 \Rightarrow \operatorname{Re} f'(0) \leqslant 2.$$

□

3.5.1. 设 f 为有界整函数, z_1, z_2 是 $B(0,r)$ 中任意两点, 证明:

$$\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z = 0.$$

并由此得出 Liouville 定理.

证明. 设 $|f(z)| \leqslant M$ 对任意 $z \in \mathbb{C}$ 成立. 注意到 $\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} \in H(B(\infty, r))$, 所以对任意 $R > r$, 有

$$\left|\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\right| \leqslant \frac{M}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)}\cdot 2\pi R.$$

可以看到 $R \to \infty$ 时 RHS 收敛于零, 所以

$$\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z = 0.$$

另一方面, 由 Cauchy 积分公式可得

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z&=\frac{1}{z_1-z_2}\left(\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-z_1}\mathrm{d}z-\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-z_2}\mathrm{d}z\right)\\&=\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}.\end{aligned}$$

由此可得 $f(z_1)=f(z_2)$ 对任意选定的 $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ 成立. 这就说明有界整函数只能是常数. □

3.5.2. 设 f 是整函数, 如果 $z\to\infty$ 时 $f(z)=O(|z|^\alpha)$, $\alpha\geqslant 0$. 证明: f 是次数不超过 $\lfloor\alpha\rfloor$ 的多项式.

证明. 设 $n=\lfloor\alpha\rfloor+1$, 只需证明 $f^{(n)}$ 恒为零. 任取 $z\in\mathbb{C}$, 则

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta-z|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(z)=O(|z|^\alpha)$, 故 $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta^n}=0$, 因此任取 $\varepsilon>0$, 存在 $R_0>0$, 当 $|\zeta|>R_0$ 时, 成立 $|f(\zeta)|\leqslant\varepsilon|\zeta|^\alpha$. 所以 $|\zeta-z|=R$ 充分大时有

$$\left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\right|=\frac{1}{R}\left|\frac{\zeta}{\zeta-z}\right|^n\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta^n}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{R}\left(\frac{R+|z|}{R}\right)^n\leqslant\frac{2^n\varepsilon}{R}.$$

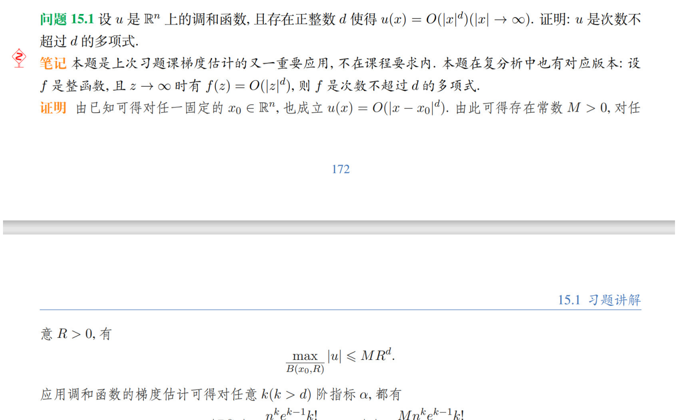
最后一步成立, 因为可以将 R 放大到 $R\geqslant|z|$. 所以此时有

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{2^n\varepsilon}{R}\cdot 2\pi R=n!2^n\varepsilon.$$

由 ε 的任意性即可得 $f^{(n)}(z)=0$. 由 z 的任意性即证.

□

注 1.4. 学过微分方程引论的同学是否会觉得很眼熟?



问题 15.1 设 u 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数, 且存在正整数 d 使得 $u(x)=O(|x|^d)(|x|\to\infty)$. 证明: u 是次数不超过 d 的多项式.

笔记 本题是上次习题课梯度估计的又一重要应用, 不在课程要求内. 本题在复分析中也有对应版本: 设 f 是整函数, 且 $z\to\infty$ 时有 $f(z)=O(|z|^d)$, 则 f 是次数不超过 d 的多项式.

证明 由已知可得对任一固定的 $x_0\in\mathbb{R}^n$, 也成立 $u(x)=O(|x-x_0|^d)$. 由此可得存在常数 $M>0$, 对任

172

15.1 习题讲解

意 $R>0$, 有

$$\max_{B(x_0,R)}|u|\leqslant MR^d.$$

应用调和函数的梯度估计可得对任意 $k(k>d)$ 阶指标 α, 都有

$$|D^\alpha u|\leqslant\frac{n^ke^{k-1}k!}{R^k}\max_{B(x_0,R)}|u|\leqslant\frac{Mn^ke^{k-1}k!}{R^{k-d}}.$$

令 $R\to+\infty$ 即可得 $D^\alpha u=0$. 由任意性即可得 u 为次数不超过 d 的多项式.

图 1: 本题的调和函数版本, 图源自笔者的微分方程讲义

可以看到, 全纯函数和调和函数在很多性质上是共通的, 包括之前的 Cauchy 积分公式与 Schwarz 积分公式, 还有平均值公式, Liouville 定理, 以及此后的最大模 (值) 原理, Schwarz 对称原理, 等等.

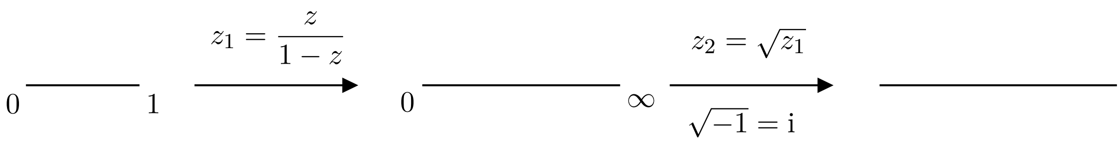
(来自后来的补充: 下面两题老师课上讲了, 所以不在习题课上重新讲解. 但是标黑体字的注意事项还是要留心)

3.5.4. 设 f 是整函数, 如果 $f(\mathbb{C}) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, 则 f 是常值函数.

证明. 考虑函数 $g = \frac{1}{f+\mathrm{i}}$, 由 $\operatorname{Im} f(z) > 0$ 恒成立可得 $\operatorname{Im}(f(z) + \mathrm{i}) > 1$, 所以 g 为整函数且恒成立 $|g(z)| < 1$, 由 Liouville 定理可得 g 为常数, 所以 f 为常数. □

3.5.5. 设 f 是整函数, 如果 $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus [0, 1]$, 则 f 是常值函数.

证明. 我们先求出一个从 $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ 到上半平面的共形映射. 其中三个区域分别为 $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$, $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.



最后一个映射取 $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$ 的单值分支 **(作业、考试中遇到多值函数, 也一定要指明你选取的单值分支!)**. 可以看到, 其中的每一步映射都是单叶的全纯满射. 所以待求的一个共形映射为

$$\varphi(z) = \sqrt{\frac{z}{1-z}}.$$

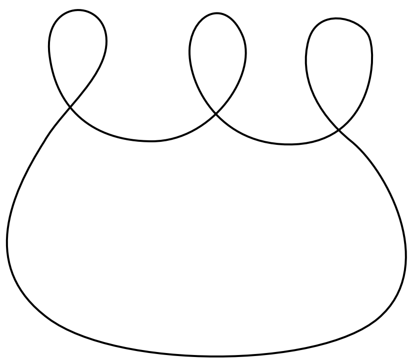
由此, 我们考虑整函数 $g(z) = \varphi(f(z))$, 则 g 的值域 $g(\mathbb{C}) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, 由 3.5.4 可得 g 为常数, 从而 f 为常数. □

注 1.5. 事实上, 在复分析理论中成立着推广版的 Liouville 定理, 即 **Picard 小定理**: 设 f 为整函数, 且存在不同的两点 $a, b \in \mathbb{C}$, 使得 $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, 则 f 为常数. 我们 (或许) 将在第六、七章证明这一极致优美的结论.

3.5.6. 设 f 在区域 D 上全纯, $z_0 \in D$, 定义

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \in D \setminus \{z_0\}, \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

证明: $F \in H(D)$.



注 1.6. 来自后来的补充: 批改这一题的时候发现绝大多数同学都没有讨论 $z_0 \in \gamma$ 的情况, 并且都是验证 F 在最一般的可求长闭曲线上积分为零. 实际上可求长闭曲线可以长成上面这个样子, 也就是存在一些 "绳结". 由于我们仅仅要求 γ 可求长, 这种绳结的个数甚至可以是可数的. 这时候在 γ 围成区域的内部无法直接使用 Cauchy 积分定理. 为了避免讨论这种情况, 我们用一下习题 3.5.3 的结论 (老师课上讲过), 仅仅验证 F 在三角形边界上积分为零即可.

证明. 由 f 全纯即可得 $F \in C(D)$, 并且在 $D \setminus \{z_0\}$ 中全纯. 任取 D 内部的三角形 T, 其边界 ∂T 记为 γ. 考虑两种情况.
(1) $z_0 \notin T$(可以落在 γ 上), 则 $F \in H(T) \cap C(\overline{T})$. 由 Cauchy 积分定理即可得 $\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z = 0$.
(2) $z_0 \in T$, 则有

$$\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z - f(z_0)\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = 2\pi\mathrm{i}f(z_0) - 2\pi\mathrm{i}f(z_0) = 0.$$

由 Morera 定理即证. □

2 补充习题

第一题用于帮同学们巩固 "凑复积分" 的技巧.

1. (史济怀习题 3.2.6) 设 $0 < r < 1$, 证明:

$$\int_0^\pi \log(1 - 2r\cos\theta + r^2)\mathrm{d}\theta = 0.$$

证明. 我们来凑合适的复积分. 根据 log 里的函数, 不难联想到余弦定理. 事实上, 对于 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 有 $|1-z|^2 = 1 - 2r\cos\theta + r^2$. 又因为 $\mathrm{d}z = \mathrm{i}z\mathrm{d}\theta$, 这启发我们考虑积分

$$\int_{|z|=r} \frac{\log(1-z)}{z}\mathrm{d}z = 0.$$

这里全纯单值分支 log 的选取是合理的, 因为 $|z| = r < 1$ 落在 $\mathrm{Log}(1-z)$ 的单值域 $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ 内. 左端参数化整理可得

$$\int_{|z|=r} \frac{\log(1-z)}{z}\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \log(1 - 2r\cos\theta + r^2)\mathrm{d}\theta - \int_0^{2\pi} \arg(1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.$$

比较虚部即可得

$$0 = \int_0^{2\pi} \log(1 - 2r\cos\theta + r^2)\mathrm{d}\theta = 2\int_0^\pi \log(1 - 2r\cos\theta + r^2)\mathrm{d}\theta.$$

□

第二题是用来补史济怀 2.4 节证明里的一个坑.

2. (方企勤定理 4.4.11) 设 D 为单连通区域, $f \in H(D)$ 且恒不为零, 则 $\mathrm{Log}\, f(z)$ 可以取出单值分支 $g(z)$, 即 $g \in H(D)$ 且 $f(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$. 并且 $g(z) + 2k\pi\mathrm{i}$ 为 $\mathrm{Log}\, f(z)(k \in \mathbb{Z})$ 的全部单值全纯分支.

注 2.1. 与本题有关的是教材定理 2.4.2(对数函数在单连通域上的单值全纯分支), 但那个证明是错误的 (完全没有体现出 D 是单连通域的作用), 以本题的证明为标准.

证明. 我们给出两个证明, 一个借助共轭调和函数, 另一个借助积分理论.
(1) 由 $f\in H(D)$ 且恒非零可得 $u(z)=\log|f(z)|$ 是调和函数 (习题 2.2.12, 第二周作业的推论), 由于 D 是单连通的, 故 $u(z)$ 在 D 上存在共轭调和函数 $v(z)$. 设 $g(z)=u(z)+\mathrm{i}(v(z)-v(z_0)+\arg f(z_0))$, 则 $g\in H(D)$, 并且 $\mathrm{e}^{g(z_0)}=f(z_0)$. 又因为 $|\frac{\mathrm{e}^{g(z)}}{f(z)}|$ 恒为 1, 所以全纯函数 $\frac{\mathrm{e}^{g(z)}}{f(z)}$ 恒为常数 $\frac{\mathrm{e}^{g(z_0)}}{f(z_0)}=1$, 因此 $f(z)=\mathrm{e}^{g(z)}$.

设 $h(z)$ 也是 $\operatorname{Log} f(z)$ 的单值分支, 则 $\mathrm{e}^{g(z)}=\mathrm{e}^{h(z)}\Rightarrow h(z)=g(z)+2k(z)\pi\mathrm{i}$, 其中 $k(z)$ 为整数值函数. 由于 $h,g\in H(D)$, 故 $k(z)$ 连续, 从而 $k(z)=k$ 为常数, 即有 $h(z)=g(z)+2k\pi\mathrm{i}$.
(2) 取 $z_0\in D$ 以及 $w_0\in\mathbb{C}$, 使得 $f(z_0)=\mathrm{e}^{w_0}$. 由于 D 是单连通域, 并且 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 D 中全纯, 考虑函数

$$g(z)=w_0+\int_{z_0}^{z}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\mathrm{d}z,$$

则 $g\in H(D)$, 并且 $g'(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$. 考虑函数 $h(z)=f(z)\mathrm{e}^{-g(z)}$, 则 $h\in H(D)$. 计算可得

$$h'(z)=\mathrm{e}^{-g(z)}(f'(z)-f(z)g'(z))=0.$$

因此 h 在 D 上恒为常数, 结合 $h(z_0)=f(z_0)\mathrm{e}^{-w_0}=1$ 可得 $h(z)$ 恒为 1, 因此 $f(z)=\mathrm{e}^{g(z)}$. 其他单值分支的推导与 (1) 相同. □

第三题以全纯函数为工具来研究调和函数的一些性质.

3. (史济怀习题 3.4.8, 方企勤习题 7.10) (1) 证明 Schwarz 积分公式: 设 $f=u+\mathrm{i}v\in H(B(0,R))\cap C(\overline{B(0,R)})$, 则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z}u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}v(0).$$

(2) 设 f 为整函数且满足 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\operatorname{Re} f(z)}{z}=0$, 证明: f 是常数.

证明. (1) 首先由 Cauchy 积分公式可得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta.$$

另一方面, 由于 z 关于圆周 $|z|=R$ 的对称点 $\frac{R^2}{\bar z}\in B(\infty,R)$, 故

$$0=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-\frac{R^2}{\bar z}}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\bar z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{\bar z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-R}\mathrm{d}\theta.$$

(上述中我们实际假设了 $z\neq 0$, $z=0$ 时是上式显然成立的). 上式取共轭可得

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{z\overline{f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}}{z-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\mathrm{d}\theta=0.$$

由此, 我们得到

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+z\overline{f(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z}\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})+\mathrm{i}v(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))+z(u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})-\mathrm{i}v(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z}\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z}u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta+\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z}u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta+\mathrm{i}v(0).
\end{aligned}
$$

最后一步我们用了调和函数的平均值公式, 这是在习题 3.2.5 中已验证过的.
(2) 任取 $z\in\mathbb{C}$, 以及 $R>|z|$. 对 Schwarz 积分公式求导可得

$$
f'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z)^2}u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=R}\frac{u(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta.
$$

由 $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\dfrac{u(\zeta)}{\zeta}=0$ 可得, 任取 $\varepsilon>0$, 当 $|\zeta|=R$ 充分大时, 有 $|u(\zeta)|\leqslant\varepsilon|\zeta|$. 不妨设 $|z|<2R$, 此时

$$
|f'(z)|\leqslant\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon R}{(R-|z|)^2}\cdot 2\pi R<8\varepsilon.
$$

由 ε 的任意性可得 $f'(z)=0$, 由 z 的任意性可得 f 是常数. □

注 2.2. 本题刻画了二维调和函数的积分公式, 而我们在微分方程这门课里就已经深入地讨论了调和方程边值问题的求解以及诸多性质, 现在我们来看看这其中是否有些关联.

对 Schwarz 积分公式两边取实部可得

$$
u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+z}{R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z}\right)u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta=\frac{R^2-|z|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{|R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-z|^2}\mathrm{d}\theta.
$$

这其实就给出了调和方程的边值问题 $\begin{cases}\Delta u=0, & z\in B(0,R),\\ u=\varphi, & z\in\partial B(0,R)\end{cases}$ 的解 (可以把 RHS 中的 $u(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 改为 $\varphi(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$). 不难看到, 该公式即为微分方程中所给出的 Poisson 公式的二维情形.

第四题是 Liouville 定理的一些应用.

4. (1) 证明: 非常值整函数的值域在 $\mathbb{C}$ 中稠密.
(2) 用复变函数的 Liouville 定理证明二维调和函数的 Liouville 定理: 设 u 为 $\mathbb{C}$ 上的调和函数, 若 u 有上界 (或者下界), 则 u 恒为常数.
(3) (19(H) 期中) 证明: 若 u 是 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上的非负调和函数, 则 u 为常数.

证明. (1) 设 f 为整函数, 且 $f(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}$ 中不稠密, 即存在 $w_0\in\mathbb{C}, r>0$ 使得 $B(w_0,r)\cap f(\mathbb{C})=\varnothing$. 考虑函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-w_0}$, 由于 $|f(z)-w_0|\geqslant r$, 所以 g 是整函数且 $|g(z)|\leqslant\frac{1}{r}$. 由 Liouville 定理可得 g 是常数, 从而 f 是常数.

(2) 设 u 为 $\mathbb{C}$ 上有上界 M 的调和函数, 则 u 存在 $\mathbb{C}$ 上的共轭调和函数 v. 设 $f=u+\mathrm{i}v$ 为整函数, 考虑函数 $g=\dfrac{1}{f-M-1}$, 由于 $\mathrm{Re}(f-M-1)=u-M-1\leqslant -1$ 恒成立, 所以 g 也是整函数, 并且 $|g(z)|\leqslant 1, \forall z\in\mathbb{C}$. 由 Liouville 定理可得 g 为常数, 进而 f 为常数, 所以 u 为常数.
(3) 考虑函数 $v:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, 定义为 $v(z)=u(\mathrm{e}^z)$. 由于 e^z 是整函数, 根据习题 2.2.12(第二周作业题) 即可得 v 是 $\mathbb{C}$ 上有下界的调和函数, 从而为常数. 又因为 e^z 的像域为 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, 进而 u 也是常数. □

第五题展示了对于全纯函数导数的估计手法.

5. (Stein Exercise 2.7, 像域的直径估计) 设 $f\in H(B(0,1))$, 证明:

$$2|f'(0)|\leqslant \sup_{z,w\in B(0,1)}|f(z)-f(w)|.$$

其中等号成立当且仅当 f 是线性函数.

注 2.3. 本题也是李皓昭老师某年的期中压轴, 难度较大. 其中等号成立条件的证明需要用到最大模原理和 Schwarz 引理 (本题主要的难点), 故暂时略过.

证明. 由 Cauchy 积分公式的推论可得

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(-\zeta)}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta,\ \forall r\in(0,1).$$

我们记 $D=\sup\limits_{z,w\in B(0,1)}|f(z)-f(w)|$ 为像域 $f(B(0,1))$ 的直径, 则

$$2|f'(0)|=\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|\zeta|=r}\frac{f(\zeta)-f(-\zeta)}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{D}{r^2}\cdot 2\pi r=\frac{D}{r}.$$

令 $r\to 1^-$ 即可得 $2|f'(0)|\leqslant D$. □

第六题是 Morera 定理的进一步推广. 其中第 (2) 问用作拓展, 不需要掌握.

6. (史济怀习题 3.5.8, Stein Problem 2.3, Morera 定理的进一步推广) Morera 定理告诉我们, 如果连续函数 f 沿区域 D 内任一可求长闭曲线的积分为零, 则 f 为全纯函数. 在课上, 老师还证明了: 如果 f 仅仅沿着任意三角形边界的积分为零, 仍然可得 f 全纯. 那么对于其他的闭合曲线, 是否有类似的结论呢? 本题我们就来讨论这个事情.
(1) 我们将一段圆弧及其端点连成的弦围成的区域称为弓形域. 若 f 是区域 D 内的连续函数, 并且对任意包含于 D 的弓形域 G, 总成立

$$\int_{\partial G}f(z)\mathrm{d}z=0,$$

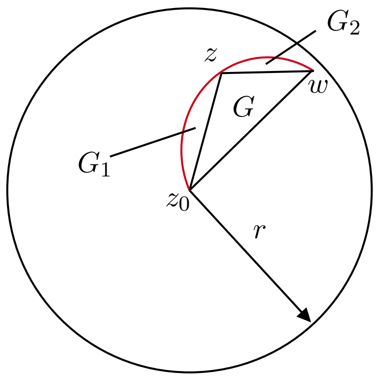
则 f 在 D 内全纯.
(2) 把弓形域改成圆盘, 上述结论仍然是成立的. 或者更进一步, 改成所谓的 “toy contour”[1] 也成立.

[1]这个是 Stein 书上的讲法, 意思是具有 “明确的” 内部的闭曲线, 这个内部可以是圆盘、多边形、草履虫等等. 这当然是个有趣但很不严谨的定义, 但足够囊括绝大多数的初等平面图形了.

证明. (1) 我们逐点证明 f 在 D 内全纯. 任取 $z_0 \in D$, 设 $B(z_0,r) \subset D$. 定义 $B(z_0,r)$ 上的函数

$$F(z) = \int_{\overline{z_0 z}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

即 $f(\zeta)$ 沿线段从 z_0 到 z 积分. 现在, 任取 $z \in B(z_0,r)$, 以及 $w \in B(z_0,r)$, z_0, z, w 三点确定了唯一的外接圆弧 $\widehat{z_0 z w}$, 它与弦 $z_0 w$ 围成了弓形域 G. 另一方面, 在该外接圆弧上, $\widehat{z_0 z}$ 确定了一段子弧, 它与弦 $z_0 z$ 围成了弓形域 G_1; $\widehat{zw}$ 确定了另一段子弧, 它与弦 zw 围成了弓形域 G_2, 如下图所示.



由于 f 在任一弓形域边界上的积分为零, 所以

$$\begin{aligned} F(z) - F(w) &= \int_{\overline{z_0 z}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{\overline{z_0 w}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\widehat{z z_0}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \int_{\widehat{w z_0}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_{\widehat{zw}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \int_{\overline{wz}} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$

然后重复定理 3.3.2 的证明即可得 F 在 $B(z_0,r)$ 上全纯, 且导数为 $F'(z) = f(z)$, 所以 $f(z)$ 在 $B(z_0,r)$ 上全纯. 由 z_0 的任意性即可得 f 在 D 上全纯.

(2) 处理本题的基本思路如下: 先证明该结论对于 C^∞ 函数 f 成立, 然后用**磨光核** (mollifier) 对一般的连续函数 f 磨光, 化归为 C^∞ 的情况. 由于我们还是逐点证明全纯, 所以干脆不妨设 D 为圆盘. 如果 $f = u + \mathrm{i}v \in C^\infty(D)$, 任取 $z_0 \in D$, 存在 $R > 0$ 使得 $B(z_0,R) \subset D$. 任取 $0 < r < R$, 则有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial B(z_0,r)} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\partial B(z_0,r)} u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_{\partial B(z_0,r)} v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y \\ &\xlongequal{\text{Green}} -\iint_{B(z_0,r)} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}A + \mathrm{i}\iint_{B(z_0,r)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}A. \end{aligned}$$

由 z_0, r 的任意性即可得 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ 在 D 上恒成立, 所以 $f = u + \mathrm{i}v \in H(D)$.

如果 $f = u + \mathrm{i}v \in C(D)$, 考虑磨光核 $\eta_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2}\eta(\frac{z}{\varepsilon})$, 其中

$$\eta(z) \triangleq \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|z|^2-1}\right), & |z| < 1, \\ 0, & |z| \geqslant 1. \end{cases}$$

其中常数 $C > 0$ 满足 $\iint_{\mathbb{C}} \eta(z)\mathrm{d}A = 1$[2]. 现在我们考虑 f 的磨光 $f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$, 则 $f^\varepsilon \in C^\infty(D_\varepsilon)$, 并且任

[2]这里给没有学过微分方程引论的同学简单介绍磨光核的主要性质.

取包含于 D_ε 的圆周 γ, 有

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f^\varepsilon(z)\mathrm{d}z &= \int_\gamma \left(\iint_D \eta_\varepsilon(w) f(z-w)\mathrm{d}A\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_\gamma \left(\iint_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(w) f(z-w)\mathrm{d}A\right)\mathrm{d}z \\
&= \iint_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(w) \left(\int_\gamma f(z-w)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}A \\
&= \iint_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(w) \left(\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}A = 0.
\end{aligned}$$

(这里我们承认了两个 Riemann 积分顺序可交换) 其中, $\tilde{\gamma} = \gamma - w = \{z - w : z \in \gamma\}$ 仍然为圆周, 并且由于 $\gamma \subset D_\varepsilon$ 且 $|w| < \varepsilon$, 所以 $\tilde{\gamma} \subset D$, 因此最后一个等号成立. 由第一步可得 $f^\varepsilon \in H(D_\varepsilon)$. 因为 f^ε 内闭一致收敛于 f, 由 Weierstrass 定理可得对任意 $\varepsilon > 0$, $f \in H(D_\varepsilon)$, 进而 $f \in H(D)$. 本证明过程可以推广到其他形状的 toy contour. □

第七题是临时补充的习题, 用于帮一些同学巩固一下微分形式与 Pompeiu 公式的应用 (虽然这一部分基本不可能在考试中考察). 其中第二问是很重要的估计, 这是课上的 Cauchy 不等式的推广, 它把逐点估计推广为了紧致集合上的估计.

7. (1) 设 D 是由有限条简单闭曲线围成的区域.

(i) 设 $f, g \in C^1(\overline{D})$, 证明 Green 公式:

$$\iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial \zeta} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\right)\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta} = \int_{\partial D} (f\mathrm{d}\zeta + g\mathrm{d}\bar{\zeta}).$$

(ii) 设 $f \in H(\overline{D})$, $z \in D$, 证明:

$$\iint_D \frac{\overline{f'(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}}\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta} = \int_{\partial D}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta + \frac{\overline{f(\zeta)}}{\bar{\zeta} - \bar{z}}\mathrm{d}\bar{\zeta}\right).$$

(2)(龚昇 2.3 节定理 6(2)) 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的区域, K 是包含于 Ω 的紧致集合, $D \subset\subset \Omega$ 是 K 的开邻域. 则对于 $n = 1, 2, \cdots$, 存在常数 C_n, 对任意 $f \in H(\Omega)$, 成立

$$\sup_{z\in K} |f^{(n)}(z)| \leqslant C_n \iint_D |f(\zeta)|\mathrm{d}A.$$

证明. (1)(i) 本题可以直接用 Stokes 公式 $\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D}\omega$. 考虑一形式 $\omega = f\mathrm{d}\zeta + g\mathrm{d}\bar{\zeta}$, 则有

$$\mathrm{d}\omega = \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\mathrm{d}\bar{\zeta} \wedge \mathrm{d}\zeta + \frac{\partial g}{\partial \zeta}\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta} = \left(\frac{\partial g}{\partial \zeta} - \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\right)\mathrm{d}\zeta \wedge \mathrm{d}\bar{\zeta}.$$

1. 磨光核 $\{\eta_\varepsilon(z) : \varepsilon > 0\}$ 是一族单位近似, 其中 $\mathrm{supp}(\eta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$ 且 $\iint_{\mathbb{C}} \eta_\varepsilon(z)\mathrm{d}A = 1$.

2. 定义区域 D 上连续函数 f 的磨光为

$$f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f = \iint_D \eta_\varepsilon(z-w) f(w)\mathrm{d}A,\ \mathrm{d}A = -\frac{\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\bar{w}}{2\mathrm{i}}.$$

我们记 $D_\varepsilon = \{z \in D : \mathrm{dist}(z, \partial D) > \varepsilon\}$ 为 D 的开子集, 则磨光函数满足: (i) $f^\varepsilon \in C^\infty(D_\varepsilon)$; (ii) $\varepsilon \downarrow 0$ 时 f^ε 在 D 上内闭一致收敛于 f.

上述性质的证明可以参考群文件里的 “微分方程引论习题课讲义”158 到 160 页, 其中还介绍了如何用磨光核证明一般调和函数的光滑性.

由 Stokes 公式即证.

(ii) 设 $\mathrm{d}A=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 为 $\mathbb{C}$ 的面积元, 则有 $\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}=-2\mathrm{i}\mathrm{d}A$. 因此

$$\iint_D \frac{f'(\zeta)}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}=-2\mathrm{i}\iint_D \frac{f'(\zeta)}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\mathrm{d}A=\overline{2\mathrm{i}\iint_D \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}(\bar{f})\frac{\mathrm{d}A}{\zeta-z}}=-\overline{\iint_D \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}(\bar{f})\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}}.$$

由 Pompeiu 公式可得

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}(\bar{f})\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}=2\pi\mathrm{i}\overline{f(z)}-\int_{\partial D}\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=-\overline{\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta}-\overline{\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\mathrm{d}\bar{\zeta}}.$$

联立上述两式即证.

(2) 由于本问是作区域上的整体估计, 逐点的 Cauchy 积分公式不再奏效了, 我们需要考虑其他方法. 为此, 我们要借助一个很有用的工具, 叫做**截断函数**. 断言: 存在 $\mathbb{C}$ 上的紧支光滑函数 η, 满足: (a) $0\leqslant\eta\leqslant 1$ 在 $\mathbb{C}$ 上恒成立; (b) $\mathrm{supp}(\eta)\subset D$; (c) 存在 K 的开邻域 U, 使得 $U\subset\subset D$, 并且 η 在 U 上取值恒为 1[3]. 由此可得 ηf 是 $\mathbb{C}$ 上的光滑函数, 因为区域 D 以外取值恒为零. 任取一点 $z\in K$, 设 $K'=\mathrm{supp}(\frac{\partial\eta}{\partial\bar{z}})$, 对函数 ηf 应用 Pompeiu 公式可得

$$f(z)=\eta(z)f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\iint_\Omega \frac{\partial(\eta f)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\iint_\Omega f\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\iint_{K'} f\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{\zeta-z}.$$

注意到 K,K' 是不相交的紧致集, 故 $\rho=\mathrm{dist}(K,K')>0$, 并且上式即为紧致集合上的 Riemann 积分. 因此

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\iint_{K'} f\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}}{(\zeta-z)^{n+1}}=-\frac{n!}{\pi}\iint_{K'} f\frac{\partial\eta}{\partial\bar{\zeta}}\frac{\mathrm{d}A}{(\zeta-z)^{n+1}}.$$

设 $\sup\limits_{\zeta\in K'}|\frac{\partial\eta}{\partial\zeta}(\zeta)|=M<+\infty$, 估计可得

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{n!}{\pi}\iint_{K'}\frac{M}{\rho^{n+1}}|f(\zeta)|\mathrm{d}A\leqslant C_n\iint_D|f(\zeta)|\mathrm{d}A.$$

其中 $C_n=\frac{Mn!}{\pi\rho^{n+1}}$ 是与 f 无关的常数, 即证. □

注 2.4. 我们来简要总结一下第 (2) 问的证明. 可以看到, 在证明中, 我们之所以要引入截断函数, 就是为了既消去 Pompeiu 公式里的边界项, 又不影响在 K 内的取值. 这类截断函数在 3.7 节中讨论一维 $\bar{\partial}$ 问题的解时也有类似的应用, 感兴趣的同学可以自行阅读.

下面补充几道与复变函数级数理论相关的习题.

8. (方企勤习题 5.5) 设 $\{f_n: n=1,2,\cdots\}$ 是区域 D 上的全纯函数列, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ 在 D 内一致收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n'(z)|$ 在 D 中内闭一致收敛.

证明. 这里用一个比较简单的级数题帮同学们熟悉复变函数级数理论的基本技巧. 任取包含于 D 的紧集 K, 设 $\rho=\mathrm{dist}(K,\partial D)>0$. 任取 $z\in K$, 成立

$$\sum_{n=N+1}^{N+p}|f_n'(z)|\leqslant\sum_{n=N+1}^{N+p}\frac{1}{2\pi}\int_{|\zeta-z|=\rho}\frac{|f_n(\zeta)|}{|\zeta-z|^2}|\mathrm{d}\zeta|\leqslant\frac{1}{2\pi\rho^2}\int_{|\zeta-z|=\rho}\sum_{n=N+1}^{N+p}|f_n(\zeta)||\mathrm{d}\zeta|.$$

[3] 截断函数是可以显式地构造出来的, 是微分流形里单位分解的基石. 可以阅读龚昇书第二章附录 "单位分解定理", 或者随意一本微分流形的书籍, 了解详细的构造.

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ 在 D 上一致收敛可得, 任取 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 对任意 $p\in\mathbb{N}$ 和 $\zeta\in D$, 都成立 $\sum\limits_{n=N+1}^{N+p}|f_n(\zeta)|<\varepsilon$, 所以此时成立

$$\sum_{n=N+1}^{N+p}|f_n'(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi\rho^2}\cdot\varepsilon\cdot 2\pi\rho=\frac{\varepsilon}{\rho}.$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n'(z)|$ 在 K 内一致收敛, 进而在 D 中内闭一致收敛. □

9. (2022mid) 计算积分 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-a}\mathrm{d}z$, 其中 $|a|<1$.

解答. 在圆周 $|z|=1$ 上, 对全纯函数 $\sin\frac{1}{z}$ 进行 Taylor 展开可得

$$\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-a}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}(z-a)}.$$

由于 Taylor 展开式在收敛圆盘中内闭一致收敛 (**这句话请在考试时务必指明! 否则会扣一些分**), 所以上述级数在圆周 $|z|=1$ 上一致收敛. 因此

$$\int_{|z|=1}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-a}\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^{2n+1}(z-a)}.$$

现在考虑两种情况.

(1) $a=0$. 此时 $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^{2n+2}}=\int_0^{2\pi}\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}(2n+1)\theta}\mathrm{d}\theta=0$, $n=0,1,\cdots$, 所以题设积分为零.

(2) $a\neq 0$. 考虑曲线 $|z|=1,|z|=\varepsilon,|z-a|=\varepsilon$ 围成的三连通域, 这里 $\varepsilon>0$ 充分小, 则

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z^{2n+1}(z-a)}&=\int_{|z|=\varepsilon}\frac{\mathrm{d}z}{z^{2n+1}(z-a)}+\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{\mathrm{d}z}{z^{2n+1}(z-a)}\\&=\frac{2\pi\mathrm{i}}{(2n)!}\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}z^{2n}}\bigg|_{z=0}\left(\frac{1}{z-a}\right)+\frac{2\pi\mathrm{i}}{a^{2n+1}}\\&=-\frac{2\pi\mathrm{i}}{a^{2n+1}}+\frac{2\pi\mathrm{i}}{a^{2n+1}}=0,\ n=0,1,\cdots\end{aligned}$$

所以此时题设积分仍然为零. □

10. (方企勤 5.1 节定理 5) 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处收敛 [4], 证明:

1. 该级数在半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>x_0\}$ 内收敛.
2. 该级数在以 z_0 为顶点, 以水平射线 $[z_0,\infty)$ 为角平分线且张角 $2\theta_0<\pi$ 的闭角域 A 上一致收敛.

证明. 对于给定的正整数 N, 定义

$$S_N^0=0,\ S_N^1=\frac{a_{N+1}}{(N+1)^{z_0}},\cdots,S_N^p=\sum_{k=1}^{p}\frac{a_{N+k}}{(N+k)^{z_0}},\cdots$$

[4] 为了消除歧义, 我们约定: $n^z=\mathrm{e}^{z\log n}$, 这里 $\log n$ 就是最简单的对数函数, 不具备多值性.

由于级数在 z_0 处收敛, 所以对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 对任意 $p\in\mathbb{N}$, 都有 $|S_N^p|<\varepsilon$. 对任意 $z\in\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>z_0\}$, 分部求和可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p}\frac{a_{N+k}}{(N+k)^z}&=\sum_{k=1}^{p}\frac{a_{N+k}}{(N+k)^{z_0}}\frac{1}{(N+k)^{z-z_0}}=\sum_{k=1}^{p}\frac{S_N^k-S_N^{k-1}}{(N+k)^{z-z_0}}\\&=\sum_{k=1}^{p-1}S_N^k\left(\frac{1}{(N+k)^{z-z_0}}-\frac{1}{(N+k+1)^{z-z_0}}\right)+\frac{S_N^p}{(N+p)^{z-z_0}}.\end{aligned}$$

由于 $z-z_0$ 的实部大于零, 可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n^{z-z_0}}-\frac{1}{(n+1)^{z-z_0}}\right|&=\left|(z-z_0)\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{z-z_0+1}}\right|\leqslant|z-z_0|\cdot\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{x-x_0+1}}\\&=\frac{|z-z_0|}{x-x_0}\left(\frac{1}{n^{x-x_0}}-\frac{1}{(n+1)^{x-x_0}}\right)\end{aligned}$$

由此可得

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{a_{N+k}}{(N+k)^z}\right|\leqslant\varepsilon\frac{|z-z_0|}{x-x_0}\frac{1}{(N+p)^{x-x_0}}+\frac{\varepsilon}{(N+p)^{x-x_0}}<\frac{\varepsilon}{N^{x-x_0}}\left(\frac{|z-z_0|}{x-x_0}+1\right).$$

由此可得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^z}$ 收敛. 另一方面, 在角状域 A 中, 成立

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\frac{a_{N+k}}{(N+k)^z}\right|<\varepsilon\left(\frac{|z-z_0|}{x-x_0}+1\right)\leqslant\varepsilon(1+\sec\theta_0).$$

由此可得此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^z}$ 一致收敛. □

注 2.5. 有了本题的结论, 不难验证下述事实. 出于篇幅考虑, 我们不再列出详细证明, 留给同学们自己验证.

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^z}$ 存在收敛直线 $\operatorname{Re}z=x_0$, 满足: (1) 级数在直线右侧收敛, 在左侧发散. (2) 级数在直线右侧内闭一致收敛. (第 (1) 问稍难证一些, 这里给一下大概思路: 如果级数处处发散/收敛, 那么收敛直线分别为 $\operatorname{Re}z=+\infty$ 和 $\operatorname{Re}z=-\infty$; 如若不然, 设级数在 z_1 处发散, z_2 处收敛, 反复二分得到闭集套, 最后的极限就落在收敛直线上.)

与这个级数相关的一个著名猜测即为解析数论中的 **Riemann 猜想**. 当 $a_n=1$ 时, 我们称 $\zeta(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^z}$ 为 **Riemann zeta 函数**, 可以看到, $z=1$ 时级数发散, 并且 $\operatorname{Re}z=1$ 是 $\zeta(z)$ 的收敛直线. 事实上, $\zeta(z)$ 可以全纯开拓到 $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ 上, 并且在 $z=-2k(k=1,2,\cdots)$ 上取值为零. Riemann 猜测 $\zeta(z)$ 的其余零点都分布在直线 $\operatorname{Re}z=\frac{1}{2}$ 上. 后来的许多数值模拟验证了该猜想在大规模计算下的准确性, 但该猜想至今未能得到证明.