曲面的内蕴几何学

上一章研究了曲面标架的运动方程和曲面的结构方程。曲面的结构方程又称为Gauss-Codazzi方程。其中Gauss方程有一个重要的推论，即Gauss绝妙定理：曲面的Gauss曲率可以仅由曲面的第一基本形式决定。Gauss曲率由曲面的第一基本形式决定这一事实预示着曲面的度量本身蕴含着曲面的某种几何。

本章从这一角度出发，研究曲面由第一基本形式所决定的几何，即曲面的内蕴几何学。曲面第一基本形式就是曲面的度量，保持曲面度量不变的变换称为曲面的等距变换，曲面的内蕴几何学研究等距变换下不变的几何量和几何性质。由于第一基本形式实质上是定义在参数区域上的一个正定二次微分形式，因此可以忽略曲面浸入$\mathbb{R}^3$这一起源，直接把定义在参数区域上的一个正定二次微分形式视为度量。由此出发研究它的几何学即黎曼所建立的以他名字命名的黎曼几何。

计划内容包括：平面欧式几何的基本概念如微分、平移、直线、曲线曲率、坐标系、三角形内角和等在曲面上的推广。

§0.1 曲面的等距变换

§0.1.1 等距变换

由曲面的讨论，$\mathbb{R}^3$的合同变换是保持曲面第一、第二基本形式(反向刚体运动使得第二基本形式变号)的变换。现在讨论更广泛的一类变换，只要求它保持曲面的第一基本形式，称为曲面的等距变换。

定义0.1. 设$\sigma : S \to \widetilde{S}$是$\mathbb{R}^3$中两曲面$S,\widetilde{S}$之间的一个一一映射。如果$S$中任意曲线$\gamma$和$\widetilde{S}$中对应曲线$\widetilde{\gamma} := \sigma\circ\gamma$长度相等，则称$\sigma$为$S$到$\widetilde{S}$的一个等距变换。

相互之间存在等距变换的曲面$S,\widetilde{S}$称为等距的曲面。

$\mathbb{R}^3$的等距变换(即合同变换，或称为欧式变换）诱导了曲面和它的像曲面之间的等距变换(曲面第一基本形式不变)。但两曲面之间的等距未必是合同的，例如将一张纸卷曲。

设曲面$S,\widetilde{S}$的参数表示分别为

$$r = r(u,v),\quad (u,v)\in D;\quad \widetilde{r} = \widetilde{r}(\widetilde{u},\widetilde{v}),\quad (\widetilde{u},\widetilde{v})\in \widetilde{D}.$$

设$\sigma : S \to \widetilde{S}$为任一变换(不需等距)，它的参数表示为

$$\begin{cases} \widetilde{u} = \widetilde{u}(u, v) \\ \widetilde{v} = \widetilde{v}(u, v), \end{cases}$$

即上述参数空间之间的变换使得

$$\widetilde{r}(\widetilde{u}(u, v), \widetilde{v}(u, v)) = (\sigma \circ r)(u, v) = \sigma(r(u, v)).$$

或简单记作

$$\widetilde{r} = \sigma \circ r.$$

任取S上一条曲线$\gamma(t) = r(u(t), v(t))$，记

$$p := (u(0), v(0)), \quad X = u'(0)\frac{\partial}{\partial u} + v'(0)\frac{\partial}{\partial v} \in T_p D,$$

$$P := \gamma(0), \quad \gamma'(0) = u'(0) r_u + v'(0) r_v := dr_p(X) \in T_P S.$$

令

$$\widetilde{\gamma}(t) = \sigma \circ \gamma(t) = \widetilde{r}(\widetilde{u}(u(t), v(t)), \widetilde{v}(u(t), v(t))), \quad \widetilde{P} = \widetilde{\gamma}(0) = \sigma(P).$$

设σ为一等距变换。由等距变换的定义

$$\int_0^t |\gamma'(\tau)| d\tau = \int_0^t |\widetilde{\gamma}'(\tau)| d\tau, \quad \forall \gamma, \forall t.$$

因此

$$|\gamma'(0)| \equiv |\widetilde{\gamma}'(0)|.$$

由此可以得到等距变换的“无穷小”表述。

映射σ在P点的切映射(微分)定义为

$$d\sigma_P (= \sigma_{*P}) : T_P S \to T_{\widetilde{P}} \widetilde{S}, \quad \gamma'(0) \mapsto d\sigma_P(\gamma'(0)) := \widetilde{\gamma}'(0).$$

具体计算

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}'(0) \quad &=: \quad d\sigma_P(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \widetilde{r}(\widetilde{u}(u(t), v(t)), \widetilde{v}(u(t), v(t))) \\
&= \quad \widetilde{r}_{\widetilde{u}} \frac{d\widetilde{u}}{dt}(0) + \widetilde{r}_{\widetilde{v}} \frac{d\widetilde{v}}{dt}(0) \\
&= \quad \widetilde{r}_{\widetilde{u}} (\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial v} v'(0)) + \widetilde{r}_{\widetilde{v}} (\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial u} u'(0) + \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial v} v'(0)) \\
&= \quad u'(0)(\widetilde{r}_{\widetilde{u}} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial u} + \widetilde{r}_{\widetilde{v}} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial u}) + v'(0)(\widetilde{r}_{\widetilde{u}} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial v} + \widetilde{r}_{\widetilde{v}} \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial v}).
\end{aligned}$$

特别
$$\frac{d\widetilde{r}}{du}=\frac{d(\sigma\circ r)}{du}=(d\sigma\circ dr)(\frac{\partial}{\partial u})=d\sigma(r_u)=\widetilde{r}_{\widetilde{u}}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial u}+\widetilde{r}_{\widetilde{v}}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial u},$$
$$\frac{d\widetilde{r}}{dv}=\frac{d(\sigma\circ r)}{dv}=(d\sigma\circ dr)(\frac{\partial}{\partial v})=d\sigma(r_v)=\widetilde{r}_{\widetilde{u}}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial v}+\widetilde{r}_{\widetilde{v}}\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial v}.$$
从而$d\sigma_P$在自然标架$\{r_u,r_v\}$下的系数矩阵为
$$\left(\begin{array}{c} d\sigma_P(r_u)\\ d\sigma_P(r_v)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial u}&\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial u}\\ \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial v}&\frac{\partial\widetilde{v}}{\partial v}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\widetilde{r}_{\widetilde{u}}\\ \widetilde{r}_{\widetilde{v}}\end{array}\right):=J_\sigma\left(\begin{array}{c}\widetilde{r}_{\widetilde{u}}\\ \widetilde{r}_{\widetilde{v}}\end{array}\right).$$
切映射$d\sigma_P$为线性映射，只依赖于σ而与γ选取无关。

由
$$|\gamma'(0)|\equiv|\widetilde{\gamma}'(0)|,$$
可得
$$\begin{aligned}|\gamma'(0)|^2 &= |u'(0)r_u+v'(0)r_v|^2\\ &= u'(0)^2\langle r_u,r_u\rangle+2u'(0)v'(0)\langle r_u,r_v\rangle+v'(0)^2\langle r_v,r_v\rangle\\ &\equiv |\widetilde{\gamma}'(0)|^2=|u'(0)d\sigma_P(r_u)+v'(0)d\sigma_P(r_v)|^2\\ &= u'(0)^2\langle d\sigma_P(r_u),d\sigma_P(r_u)\rangle+2u'(0)v'(0)\langle d\sigma_P(r_u),d\sigma_P(r_v)\rangle\\ &\quad +v'(0)^2\langle d\sigma_P(r_v),d\sigma_P(r_v)\rangle.\end{aligned}$$
这里向量长度$|\cdot|$、内积$\langle,\rangle$都是$\mathbb{R}^3$的标准内积限制于曲面切平面，因此就是曲面上的内积。由$u'(0),v'(0)$的任意性，
$$\langle r_\alpha,r_\beta\rangle=\langle d\sigma_P(r_\alpha),d\sigma_P(r_\beta)\rangle,\quad\forall\alpha,\beta=1,2.$$
这里$r_\alpha:=dr(\frac{\partial}{\partial u^\alpha})$。从而
$$\langle d\sigma_P(v),d\sigma_P(w)\rangle=\langle v,w\rangle,\quad\forall v,w\in T_PS.\quad(*)$$
由此可见，等距变换也保持夹角。反之，如果一一映射$\sigma:S\to\widetilde{S}$使得上式(*)成立，则
$$|\widetilde{\gamma}'(t)|=|d\sigma_{\gamma(t)}(\gamma'(t))|=|\gamma'(t)|,$$
从而曲线γ和$\widetilde{\gamma}:=\sigma\circ\gamma$长度相等。因此等距变换有如下的等价定义：

定义0.2. 如果一一映射$\sigma:S\to\widetilde{S}$满足
$$\langle d\sigma_P(v),d\sigma_P(w)\rangle=\langle v,w\rangle,\quad\forall v,w\in T_PS\quad(*)$$
则称σ为一等距变换。

因为参数曲面的内积结构是由其第一基本形式来表示的。接下来考察等距变换在第一基本形式之间的反映。σ为等距变换当且仅当

$$(I)=\langle\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix},(r_u,r_v)\rangle=\langle\begin{pmatrix} d\sigma(r_u) \\ d\sigma(r_v) \end{pmatrix},(d\sigma(r_u),d\sigma(r_v))\rangle.$$

对任意变换$\sigma:S\to\widetilde{S}$，由

$$\begin{pmatrix} d\sigma_P(r_u) \\ d\sigma_P(r_v) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \widetilde{r}_{\widetilde{u}} \\ \widetilde{r}_{\widetilde{v}} \end{pmatrix}:=J_\sigma\begin{pmatrix} \widetilde{r}_{\widetilde{u}} \\ \widetilde{r}_{\widetilde{v}} \end{pmatrix},$$

可得

$$\langle\begin{pmatrix} d\sigma(r_u) \\ d\sigma(r_v) \end{pmatrix},(d\sigma(r_u),d\sigma(r_v))\rangle \quad = \quad \langle J_\sigma\begin{pmatrix} \widetilde{r}_{\widetilde{u}} \\ \widetilde{r}_{\widetilde{v}} \end{pmatrix},(\widetilde{r}_{\widetilde{u}},\widetilde{r}_{\widetilde{v}})J_\sigma^T\rangle=J_\sigma(\widetilde{I})J_\sigma^T.$$

因此σ为等距变换当且仅当

$$(I)=J_\sigma(\widetilde{I})J_\sigma^T.$$

反之，将上式代入

$$I=(du,dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}=(du,dv)(I)\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

并利用

$$\begin{pmatrix} d\widetilde{u} \\ d\widetilde{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial u} & \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}=J_\sigma^T\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix},$$

可得

$$I=(d\widetilde{u},d\widetilde{v})(\widetilde{I})\begin{pmatrix} d\widetilde{u} \\ d\widetilde{v} \end{pmatrix}=\widetilde{I}.$$

因此等距变换又有如下的等价定义：

定义0.3. 一一映射$\sigma:S\to\widetilde{S}$为等距变换当且仅当

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}=J_\sigma\begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix}J_\sigma^T,\quad J_\sigma:=\begin{pmatrix} \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial u} & \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial u} \\ \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial v} & \frac{\partial\widetilde{v}}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

即

$$I=\widetilde{I},$$

这里$\widetilde{I}$通过变换σ对应的坐标变换表示为D上的二次微分形式。

注：此定义给出了判断一个变换是否为等距变换的计算方法。由此定义，等距变换的存在性与求解对应于上述一阶非线性偏微分方程组解的存在性与求解。因此求解等距变换常借助于第一基本型的内蕴不变量，特别是Gauss曲率。

例：正螺面(第三章习题36，Euler 1774, Meusnier 1776)

$$r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)=(0,0,v)+u(\cos v,\sin v,0),\quad D=\{(u,v):u>0,v\in(0,2\pi)\}$$

与悬链面(Euler, 1744)

$$r(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,arcosh\rho),\quad \widetilde{D}=\{(\rho,\theta):\rho>1,\theta\in(0,2\pi)\}$$

等距。它们的第一基本形式分别为

$$I(u,v)=dudu+(1+u^2)dvdv,$$

$$I(\rho,\theta)=\frac{\rho^2}{\rho^2-1}d\rho d\rho+\rho^2d\theta d\theta.$$

可分别计算(选用Gauss绝妙定理对应的两种方式)其高斯曲率分别为

$$K(u,v)=-\frac{1}{(1+u^2)^2};\quad K(\rho,\theta)=-\frac{1}{\rho^4}.$$

定义一一映射σ

$$\begin{cases}\rho(u,v)=\sqrt{1+u^2}\\ \theta(u,v)=v,\end{cases}$$

则

$$d\rho=\frac{udu}{\sqrt{1+u^2}},\quad d\theta=dv.$$

代入悬链面的第一基本形式得

$$I(\rho,\theta)=dudu+(1+u^2)dvdv=I(u,v).$$

因此σ为等距变换。 □

利用正交标架描述等距变换：设$\{r;e_1,e_2,e_3\},\{\widetilde{r};\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_2,\widetilde{e}_3\}$分别为曲面$S,\widetilde{S}$的给定正交标架。记

$$dr=\omega^1e_1+\omega^2e_2,\quad d\widetilde{r}=\widetilde{\omega}^1\widetilde{e}_1+\widetilde{\omega}^2\widetilde{e}_2.$$

一一映射$\sigma:S\to\widetilde{S}$为等距变换当且仅当在对应的点$I=\widetilde{I}$，即

$$\omega^1\omega^1+\omega^2\omega^2=\widetilde{\omega}^1\widetilde{\omega}^1+\widetilde{\omega}^2\widetilde{\omega}^2.$$

这里$\widetilde{\omega}^\beta$为$\{d\widetilde{u}, d\widetilde{v}\}$的线性组合，后者又可通过变换$\sigma$的Jacobi矩阵表示成$\{du, dv\}$的线性组合。因此可假设

$$(\widetilde{\omega}^1 \quad \widetilde{\omega}^2) = (\omega^1 \quad \omega^2)A,$$

则

$$\widetilde{I} = (\widetilde{\omega}^1 \quad \widetilde{\omega}^2)\begin{pmatrix} \widetilde{\omega}^1 \\ \widetilde{\omega}^2 \end{pmatrix} = (\omega^1 \quad \omega^2)AA^T\begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}.$$

因此σ为等距变换当且仅当$AA^T = I_2$，即$A \in O(2)$。再次选取曲面$\widetilde{S}$切平面上的正交标架

$$\begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \widetilde{e}_1 \\ \widetilde{e}_2 \end{pmatrix},$$

则有

$$d\widetilde{r} = \widetilde{\omega}\widetilde{e} = \overline{\omega e} = \overline{\omega}A\widetilde{e},$$

从而

$$\overline{\omega} = \widetilde{\omega}A^{-1} = \omega AA^{-1} = \omega.$$

Proposition 0.4. $\sigma : S \to \widetilde{S}$为等距变换当且仅当存在$S, \widetilde{S}$的正交标架$\{r; e_1, e_2, e_3\}$, $\{\widetilde{r}; \widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3\}$ 使得在对应点

$$\omega^1 = \widetilde{\omega}^1, \quad \omega^2 = \widetilde{\omega}^2.$$

作业：3