§0.1 测地坐标系

测地极坐标系与法坐标系的关系为

$$\begin{cases} x^1 = \rho\cos\theta \\ x^2 = \rho\sin\theta \end{cases}$$

因此坐标变换的Jacobi行列式

$$\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(\rho,\theta)} = \rho,$$

测地极坐标系(ρ,θ)为P的一个去心邻域上的正则参数系。

以P为原点的测地极坐标系$r = r(\rho,\theta)$之下，ρ-线$\theta = \theta_0$为

$$r(\rho,\theta_0) = \exp_P(\rho\cos\theta_0 e_1 + \rho\sin\theta_0 e_2) = \gamma_{\cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2}(\rho),$$

即从P点出发、以$v = \cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2 \in T_P S$为单位切向量的弧长参数测地射线$\gamma_v(\rho)$。记其与$e_1$的夹角为$\theta_0$的$\rho$-线为$C_{\theta_0}$，即

$$C_{\theta_0}(\rho) = \gamma_{\cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2}(\rho) = \exp_P[\rho(\cos\theta_0 e_1 + \sin\theta_0 e_2)].$$

则$\{C_\theta | \theta \in [0, 2\pi)\}$是从$P$点出发的一族测地线。

θ-线$\rho = \rho_0 \in (0,\epsilon)$为

$$r(\rho_0,\theta) = \exp_P(\rho_0\cos\theta e_1 + \rho_0\sin\theta e_2) = \gamma_{\cos\theta e_1 + \sin\theta e_2}(\rho_0) = \gamma(\rho_0, \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2),$$

即切平面上以原点为圆心、ρ_0为半径的圆周$\{w \in T_P S, |w| = \rho_0\}$在指数映射下的像，称为以$\rho_0$为半径的测地圆。

欧式平面(测地)极坐标系为正交坐标系，特别有

$$I = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

在测地极坐标系下，第一基本形式有简洁的形式。

定理0.1. 测地极坐标系(ρ,θ)下成立：

(i) $I = d\rho^2 + G(\rho,\theta)d\theta^2$ *(Gauss引理);*

(ii) $\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G} = 0$*;*

(iii) $\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1$.

证明：(i) 记测地极坐标(ρ,θ)下，

$$I = Ed\rho^2 + 2Fd\rho\cdot d\theta + Gd\theta^2.$$

由ρ为测地射线的弧长参数，

$$E = \langle r_\rho, r_\rho\rangle = 1.$$

由法坐标与测地极坐标的变换关系，

$$r_\theta = \frac{\partial x^1}{\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial x^2} = -\rho\sin\theta r_1 + \rho\cos\theta r_2,$$

因此

$$\lim_{\rho\to 0} r_\theta = 0,$$

$$\lim_{\rho\to 0} F = \lim_{\rho\to 0}\langle r_\rho, r_\theta\rangle = 0.$$

另一方面，由$\rho-$线为弧长参数测地射线

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial\rho} &= \frac{\partial}{\partial\rho}\langle r_\rho, r_\theta\rangle = \langle D_{\frac{\partial}{\partial\rho}} r_\rho, r_\theta\rangle + \langle r_\rho, D_{\frac{\partial}{\partial\rho}} r_\theta\rangle\\ &= \langle r_\rho, D_{\frac{\partial}{\partial\rho}} r_\theta\rangle = \langle r_\rho, r_{\theta\rho}\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}|r_\rho|^2 = 0.\end{aligned}$$

因此

$$F = \langle r_\rho, r_\theta\rangle \equiv 0,$$

即测地射线与测地圆正交。

(ii) 记法坐标系下第一基本形式矩阵表示为$(g_{\alpha\beta})$。由(i)以及第一基本形式矩阵表示随坐标变换而相合变换，

$$\begin{aligned}\sqrt{G} &= \sqrt{EG-F^2} = |\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(\rho,\theta)}|\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}\\ &= \rho\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}.\end{aligned}$$

因此$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G} = 0$。

(iii) 由(ii)的证明，

$$\begin{aligned}(\sqrt{G})_\rho &= \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} + \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}\\ &= \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} + \rho\frac{1}{2\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})}}(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x^1}\det(g_{\alpha\beta}) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial x^2}\det(g_{\alpha\beta})).\end{aligned}$$

由法坐标系下

$$g_{\alpha\beta}(P) = \delta_{\alpha\beta},\quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(P) = 0,$$

可得
$$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = \lim_{\rho\to 0}\sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} = 1.$$
□

利用测地极坐标系可验证原点小邻域内从原点出发的测地射线最短。

定理0.2. 设P为曲面S上一点，则存在P点的一个邻域U使得对任意$Q\in U$，U中存在唯一测地线连接P,Q两点，并且它是S上连接P,Q两点的最短曲线。

证明：取$\epsilon>0$充分小使得指数映射$\exp_P:\{w\in T_PS:|w|<\epsilon\}\to U(\subset S)$为一一映射。令$Q\in U$的测地极坐标表示为$Q=r(\rho_0,\theta_0),\rho_0<\epsilon$，则$U$中从$P$出发的所有测地线为$C_\theta$，因此$U$中连接$P,Q$两点的唯一测地线为
$$C_{\theta_0}=\{\theta=\theta_0, 0\le\rho\le\rho_0\}.$$
它的长度即$\rho_0(<\epsilon)$。接下来分两种情况说明C_{θ_0}最短：任一连接P,Q两点的曲线
$$r(t),\quad t\in[0,t_0],\quad r(0)=P,\quad r(t_0)=Q$$
包含于U，以及不全在U中。

(i) 当$r(t)$包含于U：记
$$r(t)=r(\rho(t),\theta(t)).$$
则$\rho(t_0)=\rho(Q)=\rho_0$，从而
$$\begin{aligned} L[r(t)] &= \int_0^{t_0}|r'(t)|dt=\int_0^{t_0}|r_\rho\frac{d\rho}{dt}+r_\theta\frac{d\theta}{dt}|dt \\ &= \int_0^{t_0}[|r_\rho|^2(\frac{d\rho}{dt})^2+|r_\theta|^2(\frac{d\theta}{dt})^2]^{\frac{1}{2}}dt \\ &\ge \int_0^{t_0}|\frac{d\rho}{dt}|dt\ge\int_0^{t_0}\frac{d\rho}{dt}dt \\ &= \rho(t_0)=\rho(Q)=\rho_0. \end{aligned}$$

(ii) 当$r(t)$于$t=t_1<t_0$第一次到达∂U时，与(i)中同样可得
$$L[\{r(t),t\in[0,t_1]\}]\ge\epsilon>\rho_0.$$
□

利用测地极坐标系求常Gauss曲率曲面第一基本形式：以曲面S上一点P为原点，在极坐标系(ρ,θ)下第一基本形式
$$I=d\rho^2+G(\rho,\theta)d\theta^2.$$

则Gauss曲率

$$K = \frac{-d\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} = \frac{-d[(\sqrt{G})_\rho d\theta]}{d\rho \wedge \sqrt{G} d\theta} = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}.$$

设曲面S的Gauss曲率为常数。

(i) $K = 0$。则

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} = 0.$$

通解为

$$\sqrt{G} = f(\theta) + g(\theta)\rho.$$

由$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G} = 0$可得$f(\theta) = 0$，由$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1$可得$g(\theta) = 1$，因此

$$\sqrt{G} = \rho,$$

$$I = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

即平面在极坐标下的第一基本形式。

(ii) $K = \frac{1}{a^2} > 0$。则

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} + \frac{1}{a^2}\sqrt{G} = 0.$$

通解为

$$\sqrt{G} = f(\theta)\cos\frac{\rho}{a} + g(\theta)\sin\frac{\rho}{a}.$$

由$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G} = 0$可得$f(\theta) = 0$，由$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1$可得$g(\theta) = a$，因此

$$I = d\rho^2 + a^2\sin^2(\frac{\rho}{a})d\theta^2, \quad \rho \in (0, \pi a).$$

即半径为a的球面在测地极坐标下的第一基本形式。

(iii) $K = -\frac{1}{a^2}$。则

$$(\sqrt{G})_{\rho\rho} - \frac{1}{a^2}\sqrt{G} = 0.$$

通解为

$$\sqrt{G} = f(\theta)\cosh\frac{\rho}{a} + g(\theta)\sinh\frac{\rho}{a}.$$

由$\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G} = 0$可得$f(\theta) = 0$，由$\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho = 1$可得$g(\theta) = a$，因此

$$I = d\rho^2 + a^2\sinh^2(\frac{\rho}{a})d\theta^2.$$

即双曲空间在测地极坐标下的第一基本形式。

注：设

$$E = G = e^{2f(u,v)}, \quad F = 0,$$

则高斯曲率

$$K = -e^{-2f} \triangle f.$$

利用该公式可验证

$$I = \frac{du^2 + dv^2}{[1 + c(u^2 + v^2)]^2}$$

的高斯曲率

$$K = 4c.$$

取$c = 0$对应平面$(u, v) \in \mathbb{R}^2$；

取$c = \frac{1}{4a^2}$,，则$K = \frac{1}{a^2}$，对应半径为a的球面，此时I为球面在一个球极投影坐标下的表示，$(u, v) \in \mathbb{R}^2$；

取$c = -\frac{1}{4a^2}, u^2 + v^2 < 4a^2$称为Poincare圆盘，其曲率$K = -\frac{1}{a^2}$。

作业：18, 19, 23