Lec14 Note of Abstract Algebra

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 28 日

我们回忆，对集合 S，考虑 S 上所有文字构成的集合 $W(S)=\{x_1x_2\cdots x_n \mid n\geq 0,\ x_i\in S\}$，它是含幺半群，称为自由含幺半群，并诱导了群 $W(S\cup S^{-1})$。且有引理：

引理 4.2：$w\in W(S\cup S^{-1})$ 具有唯一的既约形式。

于是我们顺理成章地可以在 $W(S\cup S^{-1})$ 上定义等价关系 $\sim$：

$$w\sim w' :\Leftrightarrow w,w'\text{具有相同的既约形式},$$

并记 $F(S)=W(S\cup S^{-1})/\sim$ 为等价类的集合，那么全体既约形式为其完全代表元系。

在 $F(S)$ 上可以定义乘法：

$$[w_1]\cdot[w_2]=[w_1\cdot w_2].$$

当然，我们需要先验证它是良定义的。

引理 4.3. $w_1\sim w_2, u_1\sim u_2\Rightarrow w_1u_1\sim w_2u_2$，换言之，$[w_1]=[w_2],[u_1]=[u_2]\Rightarrow[w_1u_1]=[w_2u_2]$。

证明. 设 w 为 w_1,w_2 的既约形式，u 为 u_1,u_2 的既约形式，那么 $w_1u_1\rightsquigarrow wu_1\rightsquigarrow wu$[1]，且 $w_2u_2\rightsquigarrow wu_2\rightsquigarrow wu$。于是 $w_1u_1\sim w_2u_2$。 □

于是考虑既约形式组成的集合，对于 u,v 既约，我们定义 $u\cdot v=\widetilde{u\cdot v}$，$\widetilde{u\cdot v}$ 是 $u\cdot v$ 的既约形式。那么自然有

$$\widetilde{\widetilde{u\cdot v}\cdot w}=\widetilde{u\cdot\widetilde{v\cdot w}}=\widetilde{u\cdot v\cdot w}.$$

定义 4.3. $F(S)$ 在上述乘法下形成一个群，称为由集合 S **生成的自由群 (Free group)**，若 $|S|<\infty$，则称为**有限生成自由群**。

评论. 含幺半群 M 为群 $\Leftrightarrow$ 存在 M 一组生成元 $g_1,\cdots,g_n,\cdots$ 使得 g_i 可逆。

例 4.2. 设 $S=\{a\}$，那么

$$\begin{aligned}F(S)&=\{\cdots,a^{-2},a^{-1},1,a,a^2,\cdots\}\\&\simeq\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

当 $|S|\geq 2$ 时，$F(S)$ 不是 Abel 群。例如 $S=\{a,b\}$，那么 $ab\neq ba$。

[1]方便起见，我们用 $w_1\rightsquigarrow w$ 表示 w_1 约化得到 w。

定理 4.4. *自由群的泛性质：G 为群，S 为集合，$f\colon S \to G$ 为集合映射，则 f 可以唯一扩充为群同态 $\tilde{f}\colon F(S) \to G$。*

证明. 定义

$$\tilde{f}(a_{i1}\cdots a_{in}) := \tilde{f}(a_{i1})\cdots\tilde{f}(a_{in}),\ a_{ij} \in S \cup S^{-1}.$$

这里

$$\tilde{f}(a_i) = \begin{cases} f(a_i),\ a_i \in S, \\ f^{-1}(a_i^{-1}),\ a_i \in S^{-1}. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & G \\ F(S) \arrow[ur, "\exists!\ \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

□

推论. *任一 (有限生成) 群均为 (有限生成) 自由群的商群。*

证明. S 为 G 的一组生成元，那么

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "\text{inc}"] \arrow[d] & G \\ F(S) \arrow[ur, two heads, "\exists!\ f"'] & \end{tikzcd}$$

这里的满同态在于 $S \subset \mathrm{Im}f \leq G \Rightarrow \mathrm{Im}f = G$，于是 $G \simeq F(S)/\mathrm{Ker}f$。 □

例 4.3. 考虑 $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$，那么有

$$\begin{tikzcd} \{\bar{1}\} \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d] & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ F(\{\bar{1}\}) \simeq \mathbb{Z} \arrow[ur, "f", "n \mapsto \bar{n}"'] & \end{tikzcd}$$

且 $\mathrm{Ker}f = 6\mathbb{Z}$。

Burnside Problem 设 $G = \langle g_1, \cdots, g_n\rangle$, $\mathrm{ord}g < \infty$, $\forall\, g \in G$，那么 G 是否一定是有限群？

很遗憾不是，我们可以利用几何的方法构造反例。

Restricted Burnside Problem 给定 n，G 有限生成，且 $\mathrm{ord}g < n$, $\forall\, g \in G$，那么 G 是否一定是有限群？

这个问题的答案是肯定的。

我们知道任一群均为其生成元生成的自由群的商群，于是我们希望完整但更简洁地描述之。

定义 4.4. 设 $G = F(S)/N$，可将 G 记成 $G = \langle S \mid r = 1, r \in N\rangle$。若 $R \subset F(S)$ 在 $F(S)$ 中生成的正规子群[2]为 N，则将 G 记作 $G = \langle S \mid r = 1, r \in R\rangle = F(S)/\langle R\rangle_N$，称为 G 的一个**表现**。S 称为 G 的一组**生成元集 (Generators)**，R 称为**生成关系 (Generating relations)**。

例 4.4. 考虑正五边形的二面体群 D_5，顶点按顺时针记为 $1, 2, 3, 4, 5$，记 $\sigma = (12345), \tau = (25)(34)$，那么 $\sigma\tau = (12)(35)$，于是 $\sigma^5 = 1$, $\tau^2 = 1$, $(\sigma\tau)^2 = 1$, $\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$, $D_5 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^5 = 1,\ \tau^2 = 1 = (\sigma\tau)^2\rangle$。并设 $F(x, y)/\langle x^5, y^2, (xy)^2\rangle_N$，记 $K = \langle x^5, y^2, (xy)^2\rangle_N$。构造群同态

$$f\colon F(x, y) \twoheadrightarrow D_5,$$
$$x \mapsto \sigma,$$
$$y \mapsto \tau.$$

那么 $\sigma^5 = 1 \Rightarrow x^5 \in \mathrm{Ker} f$, $\tau^2 = 1 \Rightarrow y^2 \in \mathrm{Ker} f$, $(\sigma\tau)^2 = 1 \Rightarrow (xy)^2 \in \mathrm{Ker} f$。从而 $K \leq \mathrm{Ker} f$，那么有

$$F(x, y)/K \twoheadrightarrow F(x, y)/\mathrm{Ker} f \equiv D_5.$$

现在我们要说明这是同构，即证明单射。

由 $xy = yx^{-1}$，$F(x, y)/K$ 具有表达形式 $y^i x^j$, $i = 0, 1$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$，于是存在

$$\{y^i x^j \mid i = 0, 1,\ j = 0, 1, 2, 3, 4\} \twoheadrightarrow \frac{F(x, y)}{K} \twoheadrightarrow D_5.$$

而最左边与最右边均只有 10 个元素，故必然为双射。从而 $K = \mathrm{Ker} f$。

[2]即包含 R 的最小的正规子群，记为 $\langle R\rangle_N$