§0.1 测地坐标系

欧氏平面上常用的坐标系包括直角坐标系和极坐标系。其中直角坐标系的$x-,y-$线分别为两族相互正交的直线，极坐标系的$r-,\theta-$线分别为从原点出发的射线和以原点为圆心的同心圆周。利用测地线，可以在曲面上建立相应坐标系，即测地平行坐标系和测地极坐标系。它们能够方便研究曲面的内蕴几何。

§0.1.1 测地平行坐标系

设P为曲面上一点，$r(v)$为曲面上过P点的一条正则参数曲线，$r(0)=P$。过曲线上各点$r(v)$作与曲线正交的并以u为弧长参数的测地线$\gamma_{r(v)}(u)$，即测地线$\gamma_{r(v)}(u)$满足

$$\gamma_{r(v)}(0)=r(v),\quad |\gamma'_{r(v)}(u)|=1,\quad \langle\gamma'_{r(v)}(0),r'(v)\rangle=0.$$

令$\gamma_{r(v)}(u)$的参数坐标为(u,v)，则曲面在P点的某邻域内有正则参数表示

$$r(u,v)=\gamma_{r(v)}(u).$$

因此$\langle r_u,r_u\rangle=1$，并且空间曲线$\gamma_{r(v)}(u)$的曲率向量$r_{uu}=\frac{d^2\gamma_{r(v)}(u)}{du^2}$与曲面正交。记曲面相应第一基本形式为

$$I=Edudu+2Fdu\cdot dv+Gdvdv,$$

其中

$$E=\langle r_u,r_u\rangle=1,\quad F=\langle r_u,r_v\rangle,\quad G(u,v)=\langle r_v,r_v\rangle.$$

由于$\gamma_{r(v)}(u)$与$r(v)$正交，因此

$$F(0,v)=\langle r_u,r_v\rangle=\langle\gamma'_{r(v)}(0),r'(v)\rangle=0.$$

由$\gamma_{r(v)}(u)$为弧长参数测地线，

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\langle r_u,r_v\rangle=\langle r_{uu},r_v\rangle+\langle r_u,r_{uv}\rangle\\ &= \langle r_u,r_{uv}\rangle=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\langle r_u,r_u\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

因此

$$F(u,v)=F(0,v)=0.$$

从而第一基本形式有如下简单形式

$$I = dudu + G(u,v)dvdv.$$

如果$r(v)$是一条弧长参数测地线，则上述参数系(u,v)称为曲面以P为原点的测地平行坐标系。此时由于$r(0,v)$为弧长参数测地线，

$$G(0,v) = \langle r_v, r_v\rangle = 1,$$

$$\begin{aligned} G_u(0,v) &= \partial_u < r_v, r_v >= 2 < r_{uv}, r_v > \\ &= 2(\partial_v < r_u, r_v > - < r_u, r_{vv} >) \\ &= 0. \end{aligned}$$

§0.1.2　法坐标系和测地极坐标系

设P为曲面$r(u,v)$上一点，任给单位切向量$v \in T_P S, |v| = 1$，存在唯一从P出发、以v为切向量的弧长参数测地线$\gamma_v(s) = \gamma(v,s), s \geq 0$，称为测地射线。单位切向量$v$的全体构成$T_P S$中的单位圆周，为紧致集，因此存在$\epsilon = \epsilon(P) > 0$使得对任意单位切向量$v \in T_P S$，$\gamma_v(s)$对$0 \leq s < \epsilon$有定义。

定义0.1. *对任意非零切向量$w \in T_P S, |w| = \rho$，定义P点的指数映射*

$$\exp_P : T_P S \to S, \quad w \mapsto \exp_P(w) := \gamma_{\frac{w}{\rho}}(\rho) = \gamma(\frac{w}{\rho}, \rho).$$

当$|w| < \epsilon$时，$\exp_P(w)$有定义。

指数映射是从切平面原点的一个邻域到曲面的映射，并且把切平面过原点的射线段$\rho v(|v| = 1)$映为测地线

$$\exp_P(\rho v) = \gamma(v, \rho) = \gamma_v(\rho).$$

通过指数映射，可以用切平面$T_P S$的坐标给出曲面的参数表示。取$T_P S$的正交标架$\{e_1, e_2\}$，记$w = x^1 e_1 + x^2 e_2 \in T_P S$。

定义0.2. *(法坐标系与测地极坐标系) 定义曲面S在P点附近的参数表示*

$$r(x^1, x^2) := \exp_P(w) = \exp_P(x^1 e_1 + x^2 e_2).$$

则(x^1, x^2)称为以P为原点的法坐标系。令

$$(x^1, x^2) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta),$$

并定义参数表示

$$r(\rho,\theta):=\exp_P(w)=\exp_P(\rho\cos\theta e_1+\rho\sin\theta e_2).$$

则(ρ,θ)称为以P为原点的测地极坐标系。

Proposition 0.3. 法坐标(x^1,x^2)是曲面在P点附近的正则参数。

证明：由指数映射定义，法坐标系下切映射$dr_P:T_PS\to T_PS$为恒同映射：

$$dr_P(\frac{\partial}{\partial x^\alpha})=\frac{\partial r}{\partial x^\alpha}(P)=e_\alpha,\quad \alpha=1,2.$$

□

法坐标的下列性质常用来简化计算。

定理0.4. 设曲面在以P为原点的法坐标系(x^1,x^2)下第一基本形式$I=g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$，则

$$g_{\alpha\beta}(P)=\delta_{\alpha\beta},\quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(P)=0,\quad \forall\alpha,\beta,\gamma=1,2,$$
$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(P)=0,\quad \forall\alpha,\beta,\gamma=1,2.$$

证明：取T_PS的正交标架$\{e_1,e_2\}$，则曲面S在P点的法坐标定义为

$$r(x^1,x^2):=\exp_P(x^1e_1+x^2e_2)=\gamma_{\frac{x^1e_1+x^2e_2}{\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}}}(\sqrt{(x^1)^2+(x^2)^2}).$$

P点对应参数空间的的原点。

$$g_{\alpha\beta}(P):=\langle dr_{(0,0)}(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}),dr_{(0,0)}(\frac{\partial}{\partial x^\beta})\rangle=\langle e_\alpha(P),e_\beta(P)\rangle=\delta_{\alpha\beta}.$$

曲面上过P点的测地线为$\rho-$线$\theta=\theta_0$，即

$$\begin{cases}x^1=\rho\cos\theta_0\\ x^2=\rho\sin\theta_0\end{cases}$$

是曲面的测地线，代入测地线方程

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\rho^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\rho}\frac{dx^\gamma}{d\rho}=0,\quad \alpha=1,2$$

可得沿测地线$\theta=\theta_0$成立

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(\rho\cos\theta_0,\rho\sin\theta_0)\frac{dx^\beta}{d\rho}\frac{dx^\gamma}{d\rho}=0,\quad \alpha=1,2.$$

令$\rho \to 0$，则可得

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(P)\frac{dx^{\beta}}{d\rho}|_{\rho=0}\frac{dx^{\gamma}}{d\rho}|_{\rho=0}=0, \quad \alpha=1,2,$$

其中$\frac{dx^{\beta}}{d\rho}|_{\rho=0}=\cos\theta_0$或$\sin\theta_0$。由$\theta_0$的任意性，

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(P)=0, \quad \forall\alpha,\beta,\gamma=1,2.$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}(P) &= \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\langle r_{\alpha}, r_{\beta}\rangle = \langle D_{\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}}r_{\alpha}, r_{\beta}\rangle + \langle r_{\alpha}, D_{\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}}r_{\beta}\rangle \\ &= g_{\eta\beta}\Gamma^{\eta}_{\gamma\alpha}(P)+g_{\alpha\eta}\Gamma^{\eta}_{\gamma\beta}(P)=0.\end{aligned}$$

□

测地极坐标系与法坐标系的关系为

$$\begin{cases} x^1=\rho\cos\theta \\ x^2=\rho\sin\theta \end{cases}$$

因此坐标变换的Jacobi行列式

$$\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(\rho,\theta)}=\rho,$$

测地极坐标系(ρ,θ)为P的一个去心邻域上的正则参数系。

以P为原点的测地极坐标系$r=r(\rho,\theta)$之下，ρ-线$\theta=\theta_0$为

$$r(\rho,\theta_0)=\exp_P(\rho\cos\theta_0 e_1+\rho\sin\theta_0 e_2)=\gamma_{\cos\theta_0 e_1+\sin\theta_0 e_2}(\rho),$$

即从P点出发、以$v=\cos\theta_0 e_1+\sin\theta_0 e_2$为单位切向量的弧长参数测地射线$\gamma_v(\rho)$。记其与$e_1$的夹角为$\theta_0$的$\rho$-线为$C_{\theta_0}$，即

$$C_{\theta_0}(\rho)=\gamma_{\cos\theta_0 e_1+\sin\theta_0 e_2}(\rho)=\exp_P[\rho(\cos\theta_0 e_1+\sin\theta_0 e_2)].$$

则$\{C_{\theta}|\theta\in[0,2\pi)\}$是从$P$点出发的一族测地线。

θ-线$\rho=\rho_0\in(0,\epsilon)$为

$$r(\rho_0,\theta)=\exp_P(\rho_0\cos\theta e_1+\rho_0\sin\theta e_2)=\gamma_{\cos\theta e_1+\sin\theta e_2}(\rho_0)=\gamma(\rho_0,\cos\theta e_1+\sin\theta e_2),$$

即切平面上以原点为圆心、ρ_0为半径的圆周$\{w\in T_PS, |w|=\rho_0\}$在指数映射下的像，称为以$\rho_0$为半径的测地圆。

欧式平面(测地)极坐标系为正交坐标系，特别有

$$I=d\rho^2+\rho^2 d\theta^2.$$

在测地极坐标系下，第一基本形式有简洁的形式。

定理0.5. 测地极坐标系(ρ,θ)下成立:

(1) $I=d\rho^2+G(\rho,\theta)d\theta^2$ *(Gauss引理);*

(2) $\lim_{\rho\to 0}\sqrt{G}=0$*;*

(3) $\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{G})_\rho=1$.

作业：16, 17, 24, 25