$$= C_{m+n}^{n} p^n q^m \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!}$$

$$= \frac{(n+m)!}{n!\,m!} p^n q^m e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda p} \frac{(\lambda q)^m}{m!} e^{-\lambda q}$$

$$P(X=n) = \sum_{m=n+1}^{\infty} P(X=n \mid N=m) P(N=m) = \frac{(\lambda p)^n}{n!} e^{-\lambda p}.$$

hw 3.1.1 (b.d) 3.1.2 (b)(d) 3.2.2 3.2.3

X.Y离散型r.v.

X.Y独立 $\Longleftrightarrow P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i)P(Y=y_j) \Longleftrightarrow P(X\in A, Y\in B) = P(X\in A)P(Y\in B)$

$\Longleftrightarrow P(X\le x, Y\le y) = P(X\le x)P(Y\le y)$

$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立.

$\forall$可能取值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $\{X_1=x_1\}, \{X_2=x_2\}, \cdots, \{X_n=x_n\}$相互独立

$\Longleftrightarrow F(x_1,\cdots,x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k)$

$x_i \to +\infty$ $F_{X_1\cdots X_{i-1}X_{i+1}\cdots X_n}(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n) = \prod_{k\ne i} F_{X_k}(x_k)$

①$\{X_n, n\in I\}$ (I指标集) 相互独立是指对$J\in I$, $\{X_n, n\in J\}$相互独立.

② $\{X_1,\cdots,X_n\}$. $\{Y_1,\cdots,Y_m\}$相互独立. $F(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m) = F_{\vec{X}}(x_1,\cdots,x_n) F_{\vec{Y}}(y_1,\cdots,y_m)$

$g: R^n \to R$, $h: R^m \to R$, 则$g(X_1,\cdots,X_n)$, $h(Y_1,\cdots,Y_m)$相互独立.

§3.3 数学期望

r.v. 数字特征: (1) 位置参数: 期望(均值). 中位数. 众数. (2) 刻度参数: 方差. 标准差

X. $f(x) = P(X=x)$

定义: r.v. X 概率 density function $f(x)$. 如果$\sum x f(x)$绝对收敛. 称$\sum x f(x)$为数学期望.

记作E[X]. e.g. $P(X=\pm k) = \frac{3}{\pi^2 k^2}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3\times 2}{\pi^2 k^2} = 1$

$\sum_{k\ne 0} k \cdot \frac{3}{\pi^2 \cdot k^2} = \sum_{k\ne 0} \frac{3}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k}$ 发散

例 $I_A(w)=\begin{cases}1, & w\in A\\ 0, & w\notin A.\end{cases}$

$P(I_A=1)=P(A)$ $\quad E(I_A)=1\cdot P(A)+0\cdot P(A^c)=P(A)$

随机变量函数的数学期望

$X\sim P(X=x_k)=p_k \quad k=1,2,\cdots$

$g: R\to R \quad E(g(X))=\sum_k g(x_k)\cdot P(X=x_k)$

X	-1	0	1	1.5
P	0.1	0.2	0.3	0.4

$E[X]=-1\times 0.1+0\times 0.2+1\times 0.3+1.5\times 0.4$

X^2	1	0	2.25
P	0.4	0.2	0.4

$E[X^2]=1\cdot P(X^2=1)+2.25\cdot P(X^2=2.25)$

$X\in\{x_1,x_2,\cdots\} \quad A_k=\{w\mid X=x_k\} \quad X=\sum_k x_k I_{A_k} \quad E[X]=\sum_k x_k P(X=x_k)=\sum_k x_k\cdot E(I_{A_k})$

$(X,Y) \quad P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\ i,j=1,2,\cdots$

$E(g(X,Y))=\sum_{i,j} g(x_i,y_j)\cdot P(X=x_i,Y=y_j)$

数学期望性质（所涉及期望存在）

(1) $X\geq 0$，则 $E[X]\geq 0$ (2) $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y) \quad a,b\in R$

(2)证：设 $X=\sum_i x_i I_{A_i} \quad A_i=\{w\mid X(w)=x_i\}$ ； $Y=\sum_j y_j I_{B_j} \quad B_j=\{w\mid Y(w)=y_j\}$

$aX+bY=\sum_i ax_i I_{A_i}+\sum_j by_j I_{B_j}=\sum_i ax_i\sum_j I_{A_i\cap B_j}+\sum_j by_j\sum_i I_{B_j\cap A_i}$

$=\sum_i\sum_j (ax_i+by_j) I_{A_i\cap B_j}$

$E(aX+bY)=\sum_{i,j}(ax_i+by_j)P(A_i\cap B_j)$

$=\sum_{i,j} ax_i P(A_i\cap B_j)+\sum_{i,j} by_j P(A_i\cap B_j)$

$=\sum_i ax_i\sum_j P(A_i\cap B_j)+\sum_j by_j\sum_i P(A_i\cap B_j)$

$=\sum_i ax_i P(A_i)+\sum_j by_j\cdot P(B_j)$

$=aE(X)+bE(Y)$

(3) 若 $X\geq Y$，则 $E(X)\geq E(Y)$ (4) $E(|X|)\geq |E(X)|$

(5) 若 X. Y 独立，则 $E[XY]=E[X]E[Y]$. 若 X. Y 满足 $E[XY]=E[X]E[Y]$，称其不相关.

证：$E[XY]=E(\sum_i x_i\cdot I_{A_i}\cdot\sum_j y_j\cdot I_{B_j})=E(\sum_{i,j}x_iy_jI_{A_i\cap B_j})=\sum_{i,j}x_iy_jP(A_i\cap B_j)$

$\overset{独立性}{=}\sum_{i,j}x_iy_jP(A_i)P(B_j)=\sum_i x_iP(A_i)\cdot\sum_j y_j\cdot P(B_j)=E[X]\cdot E[Y]$

推广 $X_1,\cdots,X_n$ 独立. $E(\prod_{i=1}^n X_i)=\prod_{i=1}^n E(X_i)$

尽量别写成 $E(XY)^2$

(6) $[E(XY)]^2\le E(X^2)E(Y^2)$

证：$E((tX+Y)^2)=E(X^2t^2+2tXY+Y^2)=t^2E(X^2)+2tE(XY)+E(Y^2)\ge0$ 对 $\forall t\in R$ 成立.

若 $E(X^2)\ne0$，判别式 $4[E(XY)]^2\le4E(X^2)E(Y^2)$

若 $E(X^2)=0=\sum_i x_i^2P(X=x_i)$ （必有 $x_i^2\cdot P(X=x_i)=0$. $\Rightarrow P(X=0)=1$，$E[XY]=E[X^2]=E[Y^2]=0$

$\exists t_0$, s.t. $E[(t_0X+Y)^2]=0$ 取等号 $\Leftrightarrow$ $\exists t_0$, s.t. $P(tX_0+Y=0)=1$

4. 方差

定义：X 离散型 $E(X)$. $E(X^2)$ 存在. 称 $E[(X-E(X))^2]$ 为 X 的方差.

记为 $Var(X)=E[X^2-2XE(X)+E(X)^2]=E(X^2)-2E(X)E(X)+E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$

$\sqrt{Var(X)}$ 标准差 $E(X^k)$：k阶矩；$E((X-E(X))^k)$：k阶中心矩

方差性质

(1) $Var(aX)=a^2Var(X)$, $a\in R$ (2) 若 X. Y 不相关，则 $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

证：(1) $Var(aX)=E((aX)^2)-[E(aX)]^2=a^2E(X^2)-a^2E(X)^2=a^2Var(X)$

(2) $Var(X+Y)=E((X+Y)^2)-[E(X+Y)]^2$

$=E(X^2+2XY+Y^2)-(E(X)+E(Y))^2$

$=E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-E(X)^2-E(Y)^2-2E(X)E(Y)$

$=Var(X)+Var(Y)$

5. 常见分布的期望. 方差

(1) $X\sim B(n,p)$ $P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$, $k=0,1,\cdots,n$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{np\cdot(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}=np\cdot(p+q)^{n-1}=np$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n} k^2\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}+\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=n(n-1)p^2\cdot(p+q)^{n-2}+E(X)=(n^2-n)p^2+np$$

$$var(X)=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=npq$$

(2) $X\sim G(p)$ $\quad P(X=k)=q^{k-1}\cdot p$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}\cdot p=p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)'=p\cdot\left(\frac{q}{1-q}\right)'=p\cdot\frac{1-q+q}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2\cdot q^{k-1}\cdot p=\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)q^{k-1}\cdot p-\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot q^{k-1}\cdot p=p\cdot\left(\frac{q^2}{1-q}\right)''-\frac{1}{p}=\frac{2-p}{p^2}$$

$$var(X)=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

(3) $X\sim f(r,p)$ $\quad P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^r q^{k-r}$ $\quad k=r,r+1,\cdots$

$X=X_1+X_2+\cdots+X_r$ $\quad$ X_i表示第$i-1$次成功到第i次成功所需次数.

$X_1,X_2,\cdots,X_r$独立. $\quad X_i\sim G(p)$

$EX=E(X_1+\cdots+X_r)=\frac{r}{p}$ $\quad var(X)=\sum_{i=1}^{r}var(X_i)=\frac{r(1-p)}{p^2}$

(4) Poisson分布 $\quad P(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad k=0,1,2\cdots$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty} k^2\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}+\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda^2+\lambda.$$

$var(X)=\lambda$

hw: 3.2.5, 3.3.2, 3.3.3