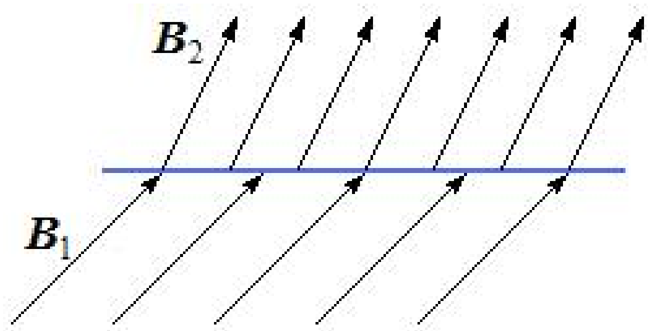
思考题讨论

- 思考题6.1 如何数学表述线圈尺寸<<磁场非均匀尺寸?
- 思考题6.2 为什么介质界面处B线可以不中断?



第二十一讲 2022-05-12

第6章 静磁场中的磁介质

§6.1 磁场对电流的作用

§6.2 磁介质及其磁化强度M

§6.3 磁介质中静磁场的基本定理

§6.4 介质的磁化规律

§6.5 边值关系和唯一性定理 ~~§6.6 磁像法~~

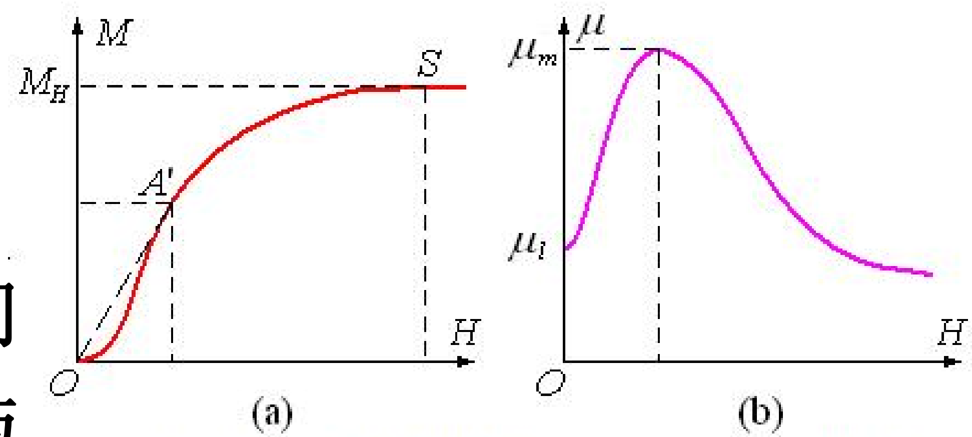
§6.7 磁路定理及其应用

§6.8 磁荷法

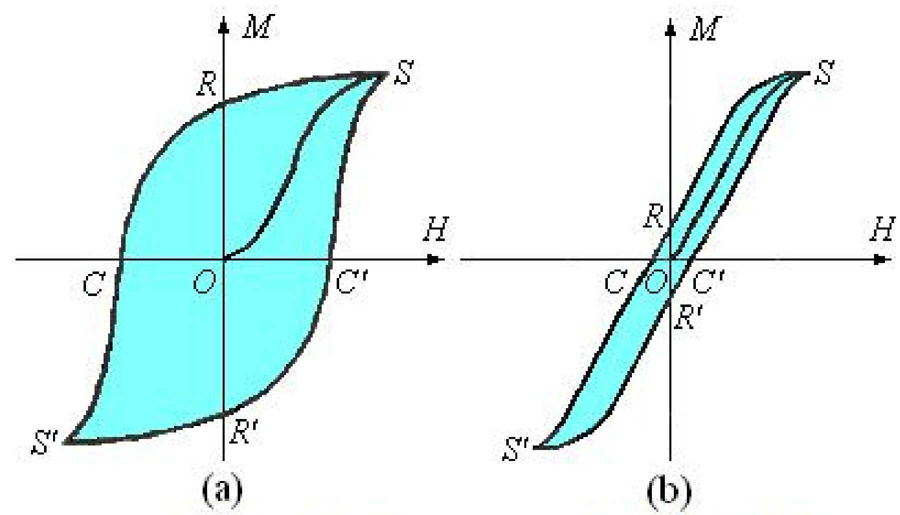
- 铁磁质 强磁性物质

铁磁质 (铁/钴/镍)的$|M|$相当大，M和H间的函数关系复杂，且与磁化的历史有关。下面简述一下铁磁质的磁化规律的典型特征。

类似于铁电体的电滞回线，铁磁质有磁滞回线。



(a) 起始磁化曲线　(b) μ–H曲线



(a)硬磁材料　(b)软磁材料

1) 硬磁材料

- 在外磁场为零时仍有较强的剩余磁化强度~ 1T，且不易退磁，适于制作永久磁铁。
- 例子：碳钢、钕铁硼合金($Nd_{15}B_8Fe_{77}$)、人造铁氧体 (如钡铁氧体、锶铁氧体)。

2) 软磁材料

- 剩余磁化强度小，μ_r为10^3~10^5 或更大，作为高导磁材料广泛应用于各种电子和电工设备之中。
- 例子：纯铁、硅钢、坡莫合金、锰锌铁氧体、镍锌铁氧体。

3) 铁磁性向顺磁性的转化

将铁磁质加热到高于其居里温度 (居里点) T_c，铁磁性消失，转变为顺磁性，磁化率与温度的关系满足居里—外斯定律：

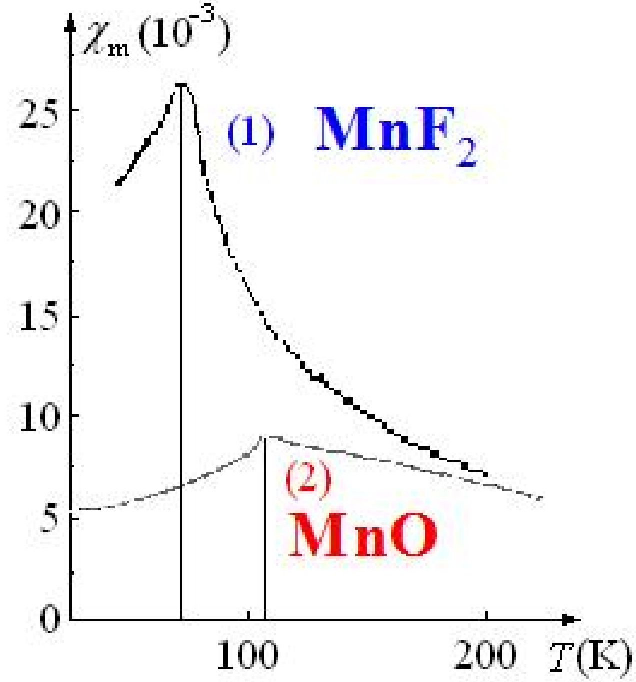
$$\chi_m = \frac{C}{T - T_c},$$

式中C为居里常数，T_c为居里温度，二者可以通过实验确定。铁、钴、镍的居里温度分别为1040 K、1395 K、628 K。

- 亚铁磁质和反铁磁质

天然磁石(Fe_3O_4)一直被视为铁磁质。深入研究其微观机理后，发现它属于亚铁磁质。铁氧体材料、过渡族与稀土族化合物中的绝大多数是亚铁磁质。亚铁磁性属于强磁性物质，其宏观磁性与铁磁质很像，二者的磁化曲线和磁滞回线很难区分。

如图，某些物质的磁化率—温度关系曲线出现极大值，这类物质称为反铁磁质，属于弱磁性物质。



早期由于不了解其磁结构，人们把它看成一类特殊的顺磁质。20世纪50代初，法国物理学家奈尔用中子衍射法确定反铁磁质的磁结构，发现每种反铁磁质存在特定温度T_N：$T<T_N$时χ_m随T降低而减小，表现出反铁磁性；$T>T_N$时χ_m随温度增加而减小，转变成顺磁性。T_N称为奈尔温度或奈尔点。

奈尔还建立了亚铁磁质的分子场理论，给人造铁氧体磁性材料的开发提供了理论指导，他因此获得了1970年诺贝尔物理奖。

2. 介质磁化的微观机制

- 磁化规律是磁场和物质相互作用的宏观描述，其物理机制必然与微观结构有关 (回顾：电介质极化) 。
- 顺磁质和抗磁质磁化的微观机制可以用经典理论定量分析，虽然严格分析需要量子力学知识。而铁磁质、亚铁磁质与反铁磁质的磁化机理超出经典理论的能力，姑且用简化的量子概念定性说明。
- 分子固有磁矩m_0：一个分子内全部电子的轨道磁矩及自旋磁矩的矢量和 (原子核磁矩比电子磁矩小3个量级，忽略不计)。

1) 顺磁质

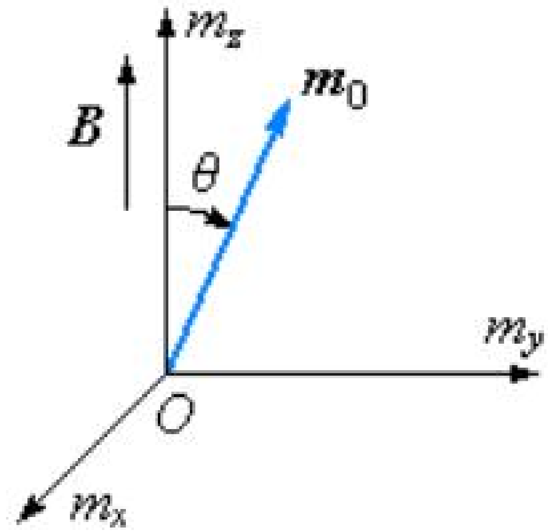
- 顺磁效应：无外磁场时$\boldsymbol{m}_0\neq 0$，但分子热运动导致$\boldsymbol{m}_0$取向无规，互相抵消，宏观磁矩为零。有外磁场时，在磁力矩$\boldsymbol{m}_0\times\boldsymbol{B}$作用下$\boldsymbol{m}_0$有顺着外场方向排列的趋势，产生与外场方向一致的宏观磁化。
- 设分子数密度为n_0，诸分子的$|\boldsymbol{m}_0|$相同，考察单位体积中$\boldsymbol{m}_0$在空间的取向分布。无外磁场时，$\boldsymbol{m}_0$各向同性，其方向角位于$\theta\sim\theta+\mathrm{d}\theta,\ \varphi\sim\varphi+\mathrm{d}\varphi$中的分子数密度

$$\mathrm{d}n(\theta,\ \varphi)=n_0\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,/4\pi.$$

上式对φ积分得

$$\mathrm{d}n(\theta)=(n_0/2)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

设外磁场$\boldsymbol{B}$沿z轴方向，由热学知识，分子磁矩取向满足玻尔兹曼分布律



$$\mathrm{d}n(\theta) = Ce^{-\varepsilon_p/kT}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

其中$\varepsilon_p = -\boldsymbol{m}_0\cdot\boldsymbol{B} = -m_0 B\cos\theta$，是$\boldsymbol{m}_0$在外磁场中的势能 **(8.5节)**。常温下$|\varepsilon_p| \ll kT$ **(习题6.8)**，

$$\therefore\ \mathrm{d}n(\theta) \approx C(1+m_0 B\cos\theta/kT)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

由归一化条件 $n_0 = \int_0^\pi \mathrm{d}n(\theta)$ 求得$C = n_0/2$，所以

$$\mathrm{d}n(\theta) = (n_0/2)(1+m_0 B\cos\theta/kT)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

$$\rightarrow M = \int_0^\pi m_0\cos\theta\,\mathrm{d}n(\theta) = \frac{n_0 m_0^2}{3kT}B \approx \frac{\mu_0 n_0 m_0^2}{3kT}H.$$

$\boldsymbol{M}$与$\boldsymbol{H}$平行$\rightarrow$ $$\boldsymbol{M}=\frac{\mu_0 n_0 m_0^2}{3kT}\boldsymbol{H},$$

$$\rightarrow \chi_{\mathrm{m}}=\frac{\mu_0 n_0 m_0^2}{3kT}. \qquad (*)$$

可见磁化率与温度成反比，称为居里定律。

讨论：

1. 在推导中假设$m_0 B << kT$，所以磁场不能太强，温度不能过低。(该假设不成立时如何求χ_{m}？)

2. 实验表明，(*)式对气态顺磁质适用，对某些液态和固态顺磁质不成立。原因？

2) 抗磁质

- 抗磁效应的定性解释：无外场时$\boldsymbol{m}_0=0$，无宏观磁化。外磁场影响分子中电子的轨道运动，引起与外磁场反向的附加轨道磁矩，产生抵抗外磁场的磁化强度。
- 抗磁效应的定量理论：

➢ 设一电子以角速度$\boldsymbol{\omega}$、轨道半径r绕核运动，则轨道电流$I=-e\omega/2\pi$，轨道磁矩$\boldsymbol{m}=-er^2\boldsymbol{\omega}/2$.

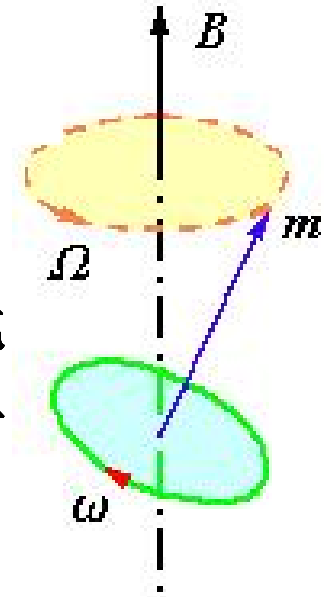
➢ 在外磁场力矩$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}=-(er^2/2)\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{B}$作用下，电子的轨道面绕$\boldsymbol{B}$进动。通常外磁场力<<分子内的库仑力，→进动角速度$\Omega<<\omega$。由刚体力学理论，

$$\boldsymbol{L}\approx m_e r^2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}.$$

比较蓝与红两式得：$r^2(m_e\boldsymbol{\Omega}-e\boldsymbol{B}/2)\times\boldsymbol{\omega}=0$,

$$\therefore\ \boldsymbol{\Omega}=(e/2m_e)\,\boldsymbol{B}\rightarrow \boldsymbol{\Omega}//\boldsymbol{B},$$

与电子轨道取向及电子旋转方向、快慢无关。但电子荷负电，所以由进动产生的附加磁矩反平行于$\boldsymbol{B}$。(与电荷+/–无关！)



- 设电子各个轨道面取向等几率，则电子在以r为半径的球面上等几率分布，形成一均匀球面电荷，各种轨道取向的电子以Ω进动的平均效应等效于球面电荷以Ω自转，其附加磁矩为 (习题5.9)

$$\Delta\boldsymbol{m}=-\frac{er^2}{3}\boldsymbol{\Omega}=-\frac{e^2r^2}{6m_e}\boldsymbol{B}.$$

➢ 附加磁矩的统计平均

设抗磁质分子数密度为n_0，一个分子中有Z个电子，则磁化强度

$$\boldsymbol{M} = n_0 Z \overline{\Delta \boldsymbol{m}} = -\frac{n_0 Z e^2 \overline{r}^2}{6m_\mathrm{e}} \boldsymbol{B} \approx -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2 \overline{r}^2}{6m_\mathrm{e}} \boldsymbol{H},$$

其中$\overline{r}^2$为各种可能电子轨道半径的方均根值。所以

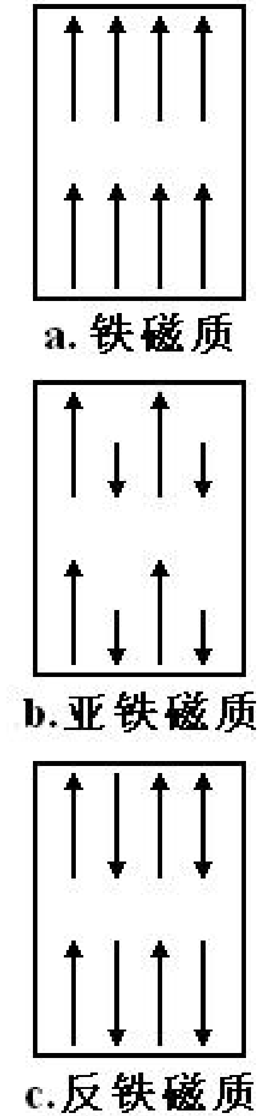
$$\chi_\mathrm{m} = -\frac{\mu_0 n_0 Z e^2}{6m_\mathrm{e}} \overline{r}^2,$$

与温度无关。上式与实验相当符合。

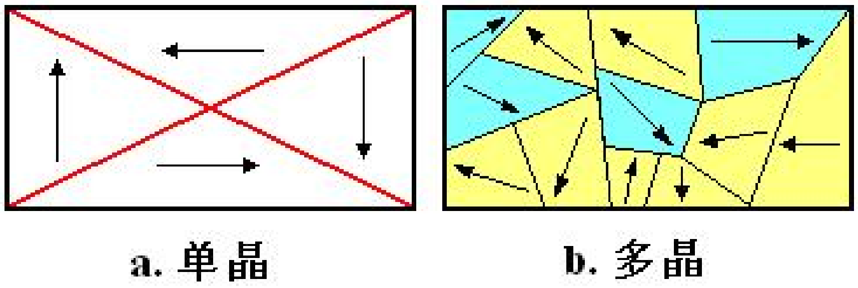
顺磁质中也存在抗磁效应，但<<顺磁效应。

3) 铁磁质、亚铁磁质和反铁磁质

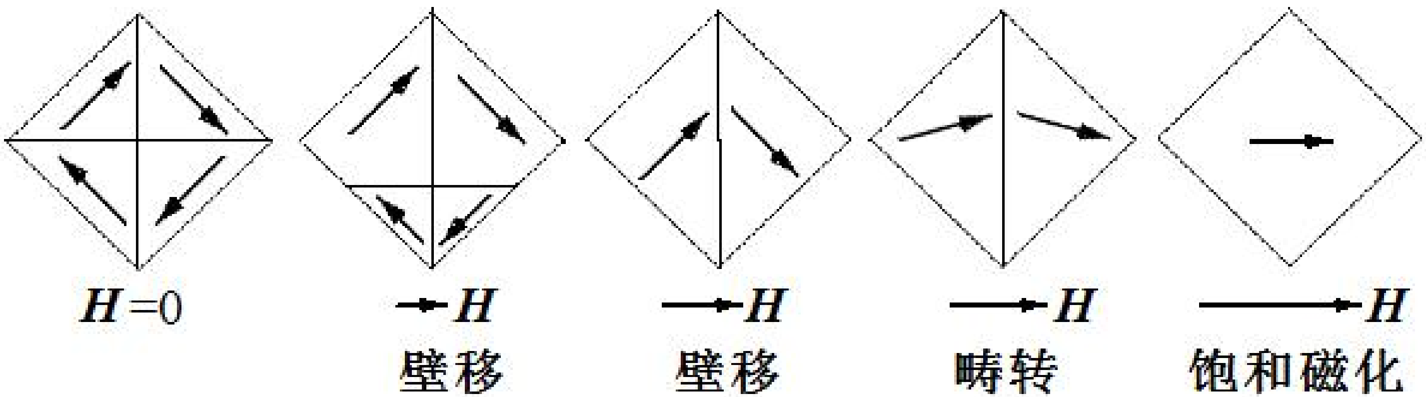
- 无外磁场时，三类磁介质中电子的自旋磁矩在小范围内自发排列，形成自发磁化区—磁畴，如右图所示。
- ➢ 铁磁质磁畴的相邻分/原子磁矩平行。
- ➢ 亚铁磁质磁畴的相邻分/原子磁矩反平行，但大小不等，有剩余磁矩。
- ➢ 反铁磁质磁畴的相邻分/原子磁矩反平行，且大小相等，完全抵消。
- ➢ 在转变温度以上磁畴消失，转成顺磁态。
- 由于磁畴结构不同，三者磁化机制各异。



- 铁磁质：无外磁场时，各磁畴的自发磁化方向无序，宏观上不显磁性。



有外磁场时，磁化有两种方式：壁移过程和畴转过程。两种过程交叉或同时进行。下图中，随着磁场增大，先壁移，再畴转，直到饱和磁化。



由于磁畴比单个分子抗热干扰的能力强，铁磁质容易磁化，磁化率很大。

- 亚铁磁质有自发磁化的磁畴结构，宏观磁性和磁化过程都与铁磁质很相似，从磁化曲线和磁滞回线上很难找出二者的差别。
- 反铁磁质的磁化较复杂，以**MnO**单晶为例说明。

➢取外磁场平行或反平行于$\mathbf{Mn^{2+}}$固有磁矩方向。接近**0K**时，由于交换作用强于外磁场作用，χ_m~**0**。T↑，无规热运动扰乱磁序，有利于外磁场的磁化作用，χ_m↑。$T=T_c$时，反铁磁消失，转为顺磁质，χ_m达到极大。T↑，χ_m按顺磁质特性减小，遵守居里定律。

➢若外磁场与$\mathbf{Mn^{2+}}$的磁矩垂直，$T<T_c$时，χ_m取平行情况下的最大值，与T无关 。

3. 无限均匀线性各向同性介质中的静磁场

安培环路定理的应用举例

[例6.5] 求一电流为I的无穷长直导线在磁导率为μ的无限均匀线性各向同性磁介质中的磁场分布。

[解] 本体系具有轴对称，属一维问题，磁感应线为以长直导线为轴的圆，磁场强度的大小只与圆半径r有关。对这样的圆回路应用安培环路定理得

$$2\pi r H = I，\quad H = I/2\pi r，$$

$$\therefore\ B = \mu H = \mu I/2\pi r，$$

是真空中无穷长载流直导线的磁感应强度的μ/μ_0倍。

[例6.6] 设匝数为N、电流为I、平均半径为$\boldsymbol{R}$的细螺绕环内填满磁导率为μ的均匀线性各向同性磁介质，求管内磁感应强度的大小。

[解] 对管内与环同轴的半径为R的圆回路应用安培环路定理得

$$2\pi RH=NI，H=NI/2\pi R=nI$$

式中n为单位长度上的匝数。

所以管内$B=\mu H=\mu nI$，为真空螺绕环$\boldsymbol{B}$值的μ/μ_0倍。

- *H*线的概念

  类比磁感应线，所谓*H*线，是指磁场空间的一组曲线，曲线上一点的切线方向为该点磁场强度*H*的方向，*H*的大小正比于*H*线的数密度。

- *H*线的基本性质

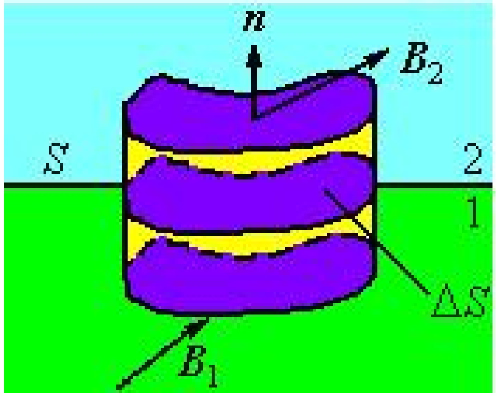
  由*H*满足的环路定理，可推断*H*线和传导电流线总是相互环绕。

  对各向同性磁介质而言，*H*与*B*处处平行。

§ 6.5 边值关系和唯一性定理

1. 磁场在磁介质界面上的边值关系

- 界面μ突变→两侧磁场不连续，磁学微分方程失效。对策：从高斯和安培环路定理推出界面两侧磁场的联系，即边值关系。



- 磁感应强度

在界面S上取小面元ΔS，以ΔS为截面作高→0的柱形高斯面，两底分别位于两介质中，侧面磁通量可略去。由高斯定理得

$$B_{2n}\Delta S - B_{1n}\Delta S = 0, \rightarrow \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0.$$

可见在界面上$\boldsymbol{B}$的法向分量连续。

- 磁化强度

已证

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1).$$

- 磁场强度

类似于$\boldsymbol{M}$边值关系的推导，由安培环路定理可得

$$\boldsymbol{i}_0 = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1).$$

除了理想导体和超导体外，通常$\boldsymbol{i}_0=0$，此时有

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = 0.$$

即$\boldsymbol{H}$的切向分量连续。

2. 静磁场的唯一性定理

- 直接计算磁场的困难：有磁介质时，事先难以确知磁化电流分布，因而不便由毕-萨定律计算磁场。
- 唯一性定理：由高斯定理、安培环路定理及$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{H}$关系，再加上必要的附加条件，就可以唯一确定静磁场。(猜解有效！见本节后续内容及磁像法)
- 简单情形下的附加条件 (一般情形见下册)

1)设磁场空间为一封闭曲面S包围。若S有限，给定B_{Sn}满足 $\oiint_S B_{S_n}\,\mathrm{d}S=0$；若$S$无限，则要求$B_S\to 0$。

2)磁介质各向同性，μ已知，但可以非均匀或有界面。

3)导体中的传导电流及分布确知。

- 证明：不妨设有两组解$\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{H}_1$和$\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{H}_2$。

  令$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2$，根据叠加原理，叠加解对应：传导电流为零，$S$面上$B_{Sn}=0$或$B_S\to 0$。

➢若S有限，$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$线不可能起止于S面上；又由于$B_{Sn}=0$，$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$线不可能穿过$\boldsymbol{S}$面。$\to$$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$线只能在$S$内闭合，$\to$$S$面内必有传导电流，与红色一句矛盾。

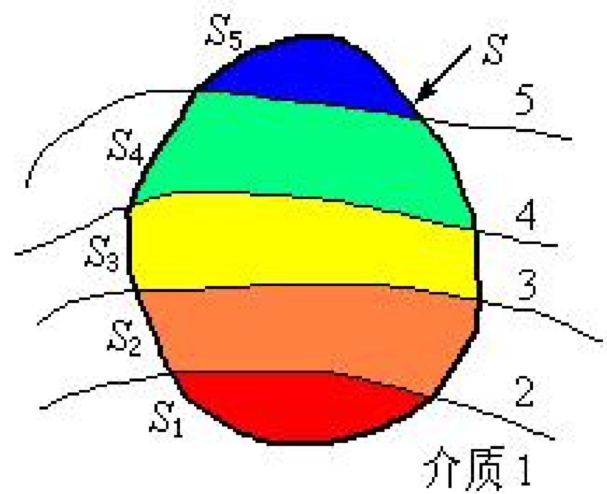
➢若S无限，$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$线也不能在S内闭合，$\to$必起止于无穷远，这是一种特殊的闭合，$\to$$S$内必有传导电流。

$\Rightarrow$$\boldsymbol{B}=0$，$\boldsymbol{H}=0$，即$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}_2$。

- 附加条件很容易成立，此时唯一性定理简化为：满足相同高斯和安培环路定理的两个静磁场必相等。

3. 分区均匀线性各向同性介质中的静磁场

1) 介质界面与磁感应线重合



- 由唯一性定理可证，

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}_0/\mu_0,$$

其中$\boldsymbol{B}_0$是去掉介质时传导电流在真空中产生的磁感应强度。

- 当传导电流对称分布时，可由安培环路定理

$$\oint \boldsymbol{B}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \Sigma I_0$$

直接计算$\boldsymbol{B}_0$，而各介质中的磁场

$$\boldsymbol{B}_i=\mu_i\boldsymbol{H}=\mu_i\boldsymbol{B}_0/\mu_0.$$

证明：尝试解成立是因为

1) $\boldsymbol{B}_0/\mu_0$满足安培环路定理——$\boldsymbol{H}$的候选者

由 $\oint \boldsymbol{B}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum I_0$ 可得

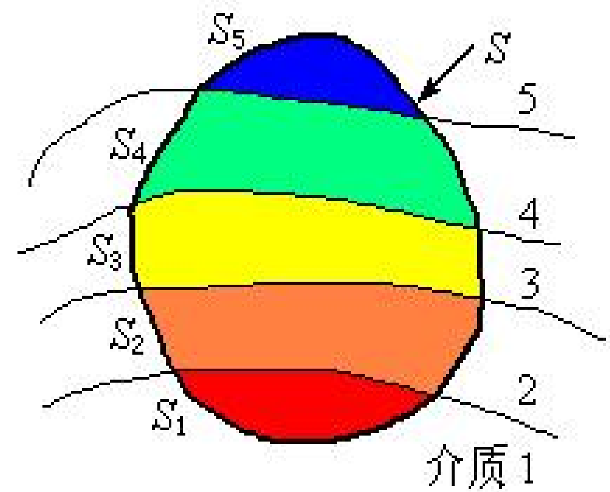
$$\oint \boldsymbol{B}_0 / \mu_0 \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I_0 ,$$

2) $\mu_i \boldsymbol{B}_0/\mu_0$满足高斯定理——$\boldsymbol{B}$的候选者

a. 当S完全位于第i区介质内，则

$$\oiint_S \frac{\mu_i}{\mu_0} \boldsymbol{B}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\mu_i}{\mu_0} \oiint_S \boldsymbol{B}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

b. 若S跨若干介质区，如图，令S中处于第i介质区的部分为S_i，S_i加上该介质区与相邻区的边界构成闭合面S_{iC}。由于介质界面与$\boldsymbol{B}$线重合，界面上的磁通量为零，

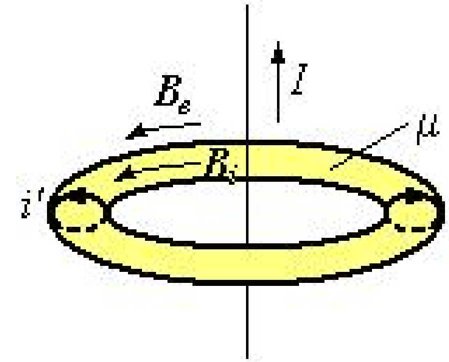


$$\therefore \iint_{S_i} \boldsymbol{B}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_{S_{iC}} \boldsymbol{B}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

$$\therefore \oiint_S \sum_i \frac{\mu_i}{\mu_0} \boldsymbol{B}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_i \frac{\mu_i}{\mu_0} \iint_{S_i} \boldsymbol{B}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \sum_i \frac{\mu_i}{\mu_0} \oiint_{S_{iC}} \boldsymbol{B}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

[例6.7] 一圆环状磁介质与一无穷长直导线共轴。介质磁导率为μ，直导线电流强度为I，求介质内外空间的磁感应强度的分布和介质表面的磁化面电流。



[解] 本题属于介质界面与磁感应线重合的情形。

撤去磁介质时的磁场$B_0=\mu_0 I/(2\pi r)$。

所以介质内$B_i=\mu I/(2\pi r)$，介质外$B_e=\mu_0 I/(2\pi r)$。

界面磁化电流面密度

$$i'=M_i-M_e=(1/\mu_0)(B_i-B_e)=(\mu/\mu_0-1)I/(2\pi r).$$

作业、预习及思考题

- 作业：**6.8~6.13**
- 预习：**6.5余下部分、6.7 磁路定理及其应用、6.8 磁荷法**

下次课讨论

- 思考题6.3 当$m_0B\sim kT$时，求顺磁质的χ_m。
- 思考题6.4 为什么抗磁质微观机制与实际能很好符合，而顺磁质微观机制则不一定？