Lec10 Note of Abstract Algebra

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 14 日

2　群在集合上的作用

定义 2.1. 设 G 为群，$\varnothing \neq X$ 为集合，则群 G 在 X 上的一个 **(左) 作用**是指一个映射：

$$\begin{aligned}\varphi\colon G \times X &\to X,\\ (g, x) &\mapsto g \cdot x := \varphi(g, x).\end{aligned}$$

满足

(1) $g(hx) = (gh)x,\ \forall\, g, h \in G,\ x \in X$；

(2) $1_G \cdot x = x$。

评论. 类似地可以定义右作用，等价于 G^{op} 的左作用。

例 2.1. 考虑

$$m\colon G \times G \to G.$$

这里 m 为 G 上乘法。可见乘法自动诱导了 G 在自身上的作用。

评论. 如果 $\varphi\colon G \times X \to X$ 为 X 上的作用，那么对每个 g 可以定义

$$\rho_g = \varphi(g, *)\colon X \to X.$$

那么有

- $\rho_{1_G} = \varphi(1_G, *) = \mathrm{Id}_X \in S(X),\ \rho_{1_G} \circ \rho_g = \rho_g \circ \rho_{1_G} = \rho_g$；
- $\rho_g \circ \rho_h = \rho_{gh} \in S(X)$；
- $\rho_{g^{-1}} = \varphi(g^{-1}, *) \in S(X),\ \rho_{g^{-1}}\rho_g = \rho_g\rho_{g^{-1}} = \rho_{1_G}$；
- $\rho_f(\rho_g\rho_h) = \rho_{fgh} = (\rho_f\rho_g)\rho_h$。

可见 G 在 ρ 下的像集为 $S(X)$ 的子群。且 $1_G \mapsto \mathrm{Id}_X$，$\rho_{gh} = \rho_g\rho_h$，从而

$$\begin{aligned}\rho\colon G &\to S(X),\\ g &\mapsto \rho_g = \varphi(g, *),\end{aligned}$$

给出了一个群同态。

事实上 G 在 X 上的作用与 G 到 $S(X)$ 的群同态是一一对应的，后者称为 G 的一个**表示**。那么从表示出发我们当然也可以给出群的作用：设有表示

$$\rho\colon G \to S(X),$$

我们定义

$$g \cdot x := \rho(g)(x).$$

则此定义给出了 G 在 X 上的一个作用。我们用 $G \circlearrowleft X$ 来表示 G 作用在 X 上。

若进一步，X 为域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，且对 $\forall\, g \in G,\ g \cdot *$ 为 X 上的线性变换，此时，称 G **线性作用**在 X 上。那么我们看见

$$\{G\text{在}X\text{上线性作用}\} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\rho\colon G \to GL(X)\}.$$

前者意味着 X 为 $G-$ 模，后者意味着 X 为 G 的线性表示。

现在假设 $G \circlearrowleft X$，那么在 X 上定义关系 $\sim$ 为

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists\, g \in G,\ y = g \cdot x.$$

那么 $\sim$ 为等价关系：

- $x = 1_G \cdot x \Rightarrow x \sim x$。
- $y = gx \Rightarrow g^{-1}y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = x$，于是 $x \sim y \Rightarrow y \sim x$。
- $y = gx,\ z = hy \Rightarrow z = h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$。

从而我们有如下定义：

定义 2.2. 设 $G \circlearrowleft X$，那么对 $\forall\, x \in X$，

$$\mathcal{O}_x = \{g \circ x \mid g \in G\} \subset X$$

称为 x 在 G 作用下的**轨道 (Orbit)**。若 $X = \mathcal{O}_x,\ \exists\, x \in X$，则称 G 在 X 上的作用**可迁 (传递，Transitive)**。

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \leq G$$

称为 x 的**稳定子 (Stabilizer) 群**。

例 2.2. 考虑 X 与其对称群 $S(X)$，则

$$S(X) \times X \to X,$$
$$(f, x) \mapsto f(x).$$

给出了 X 上的群作用，且其相应的表示为

$$\mathrm{Id}\colon S(X) \to S(X).$$

特别地，$S_n \circlearrowleft \{1, 2, \cdots, n\}$，$n$ 的稳定子群 $G_n = S_{n-1} = S(\{1, 2, \cdots, n-1\})$。$GL(V) \circlearrowleft V$。

例 2.3. 考虑群 G 上的乘法：

$$m\colon G \times G \to G$$
$$g \cdot h \mapsto gh.$$

它是 G 上的作用。且对 $\forall\, h \in G$, $\mathcal{O}_h = G$，从而群作用可迁，h 的稳定子群为 $G_h = \{1\}$。

例 2.4. 考虑上半平面 $\mathcal{H} = \{x + iy \mid y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$。那么定义

$$SL_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

称为**分式线性变换 (Möbius 变换)**。该群作用是可迁的，且 $G_i = SO_2$。

值得一提的是，$\forall\, g \in SL_2(\mathbb{R})$, $\exists!\, g = \begin{pmatrix} 1 & n \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \\ & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，该结果称为 **Iwasawa 分解**。

命题 2.1. 设 $G \circlearrowleft X$, $\forall\, x \in X$，则有双射

$$G/G_x \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \mathcal{O}_x,$$
$$aG_x \mapsto a \cdot x.$$

推论. 设 $|G| < \infty$，则

(1) $|\mathcal{O}_x| = [G : G_x] \mid |G|$，称为**轨道长度**。

(2) $|X| = \sum_{x \in I} |\mathcal{O}_x| = \sum_{x \in I} [G : G_x]$，这里 I 为轨道的完全代表元系。

例 2.5. 考虑二面体群 D_n，则 D_n 作用在顶点上可迁，顶点的稳定子群阶为 2，从而 $|D_n| = |\mathcal{O}_i||G_i| = 2n$，这里 i 为任意顶点。

命题 2.2. 设 $G \circlearrowleft X$, $x \in X$, $a \in G$, $x' = a \cdot x$，则

(1) $\{g \in G \mid gx = x'\} = aG_x$。

(2) $G_{ax} = aG_x a^{-1}$。

证明. (1)

$$\begin{aligned} gx = x' = ax &\Leftrightarrow a^{-1}gx = x \\ &\Leftrightarrow a^{-1}g \in G_x \\ &\Leftrightarrow g \in aG_x. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} g \in G_{ax} &\Leftrightarrow g \cdot (ax) = ax \\ &\Leftrightarrow a^{-1}ga \cdot x = x \\ &\Leftrightarrow a^{-1}ga \in G_x \\ &\Leftrightarrow g \in aG_x a^{-1}. \end{aligned}$$

□

对 $G \circlearrowleft X$ 对应的表示 $\rho\colon G \to S(X)$，$\mathrm{Ker}\rho = \{g \mid gx = x\ \forall\, x \in X\} = \bigcap\limits_{x \in X} G_x \lhd G$ 称为群作用的**核**。

例 2.6. (1) 设 $H \leq G$, $G/H = \{aH \mid a \in G\}$，则

$$\varphi\colon G \times G/H \to G/H,$$
$$g(aH) \mapsto gaH.$$

为群作用，称为**左诱导作用**。对应的表示的核为

$$\mathrm{Ker}\rho = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}.$$

特别地，当 $H = \{1\}$ 时，为左乘作用。

(2) $GL_2(\mathbb{F}_2) = GL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq S_3$。

这是因为 $GL_2(\mathbb{F}_2) \circlearrowleft \mathbb{F}_2^{2\times 1}$，进一步 $GL_2(\mathbb{F}_2) \circlearrowleft \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\}$。后者的对称群为 S_3，从而

$$\rho\colon GL_2(\mathbb{F}_2) \to S_3$$

为群同态，而 $\mathrm{Ker}\rho = \{I_2\}$，故为单射，从而为同构。

命题 2.3. *Caylay*：*任一 (有限) 群为 (有限阶) 对称群子群。*

证明. 左乘作用诱导群同态，ρ 为单射：

$$\rho\colon G \to S(G),\ \mathrm{Ker}\rho = \bigcap_{g\in G} G_g = \{1_G\}.$$

□