思考题讨论

- **思考题7.5** 固定ω_0变化β，证明电容器在临界阻尼情形比过阻尼情形更快地充放电。

  提示：看整体趋势时只需比较主导指数项

  t充分大时，过阻尼解含t的主导项$\propto\exp[-(\beta-\gamma)t]$

  临界阻尼解含t的主导项$\propto\exp[-\omega_0 t]$

  只需证明$\beta-\gamma<\omega_0$，即$\beta-[\beta^2-\omega_0^2]^{1/2}<\omega_0$，

  也即$\beta-\omega_0<[\beta^2-\omega_0^2]^{1/2}$ …………

- **思考题8.1** 例题8.2中由W_m导出$\boldsymbol{F}_{12}$。

思考题8.1 例题8.2中由W_m导出$\boldsymbol{F}_{12}$。

$$W_\mathrm{m}=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}(-\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2+3m_{1r}m_{2r}),$$

$$\therefore \boldsymbol{F}_{12}=(\nabla W_\mathrm{m})_{\boldsymbol{m}}=\frac{\mu_0}{4\pi}(-\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2+3m_{1r}m_{2r})\nabla(\frac{1}{r^3})+\frac{3\mu_0}{4\pi r^3}(\nabla m_{1r}m_{2r}+m_{1r}\nabla m_{2r})$$

$$\because \nabla(\frac{1}{r^3})=-\frac{3}{r^5}\boldsymbol{r}=-\frac{3}{r^4}\boldsymbol{e}_r,\ \ \nabla m_{1r}=\nabla(\frac{\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{r}}{r})=\frac{\boldsymbol{m}_1}{r}-\frac{\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{m}_1-m_{1r}\boldsymbol{e}_r}{r}$$

$$\therefore \boldsymbol{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}(\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2-3m_{1r}m_{2r})\frac{3}{r^4}\boldsymbol{e}_r+\frac{3\mu_0}{4\pi r^3}(\frac{\boldsymbol{m}_1-m_{1r}\boldsymbol{e}_r}{r}m_{2r}+m_{1r}\frac{\boldsymbol{m}_2-m_{2r}\boldsymbol{e}_r}{r})$$

$$=\frac{3\mu_0}{4\pi r^4}\left[(\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2)\boldsymbol{e}_r-3m_{1r}m_{2r}\boldsymbol{e}_r+(\boldsymbol{m}_1m_{2r}-m_{1r}\boldsymbol{e}_rm_{2r}+m_{1r}\boldsymbol{m}_2-m_{1r}m_{2r}\boldsymbol{e}_r)\right]$$

$$=\frac{3\mu_0}{4\pi r^4}(\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2-5m_{1r}m_{2r})\boldsymbol{e}_r+\frac{3\mu_0}{4\pi r^4}(m_{2r}\boldsymbol{m}_1+m_{1r}\boldsymbol{m}_2).$$

第二十七讲 2022-06-07
第9章 交流电路

§ 9.1 基本概念和描述方法

§ 9.2 交流电路的复数解法

§ 9.3 交流电路的功率

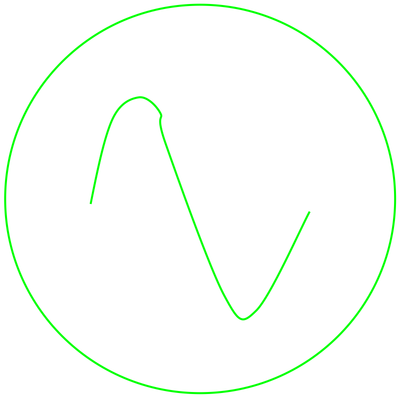
§ 9.4 交流电路的分析举例

9.1 基本概念和描述方法

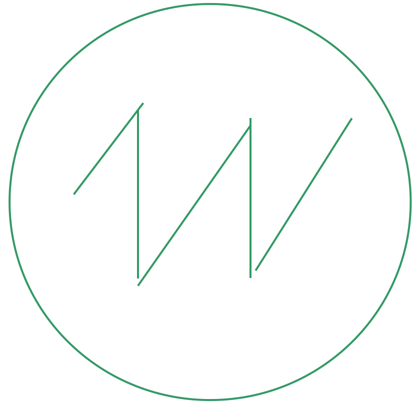
1. 交流电路

- 定义：电源电动势随时间周期变化，因而 (?)各元件的电流和电压也作周期变化的电路。
- 与稳恒电路和暂态电路比较：交流电路在物理上有明显不同，但处理方法上又有相似之处。
- 似稳条件：对于f=50Hz的交流电，l<<λ=6000km，所以一个市内电网是似稳电路。
- 本章主要内容：似稳交流电路的基本理论和计算，重点是复数解法。

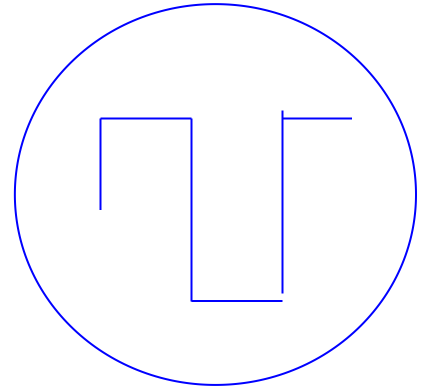
2. 交流电类型



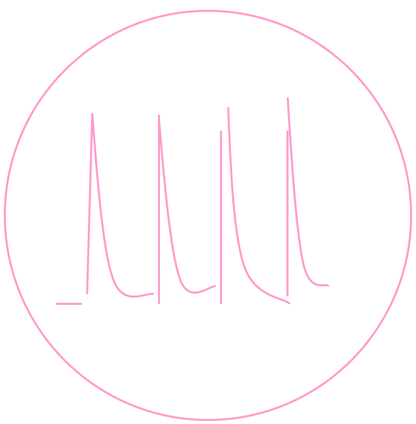
a. 简谐波



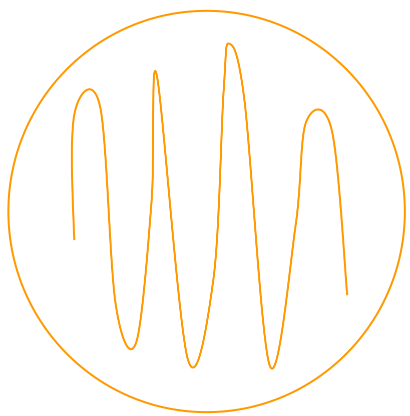
b. 锯齿波



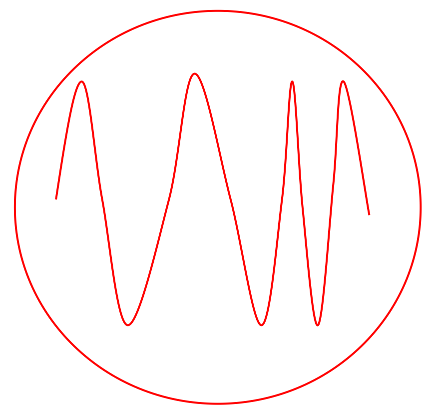
c. 矩形波



d. 尖脉冲



e. 调幅波



f. 调频波

- 不同类型的交流电由不同的电源或信号源产生，满足不同的需求。
- 简谐交流电：以正 (余) 弦规律变化的交流电。
- 各类交流电波形的共同特征

➢ 作周期性的变化

➢ 因而可分解为一系列不同频率的简谐波

➢ 线性电路中不同频率的简谐波可互不干扰地传播，因此可单独地加以处理：

任意交流电 $\xrightarrow{\text{分解}}$ 简谐交流电 $\xrightarrow{\text{？？}}$ 简谐解 $\xrightarrow{\text{求和}}$ 终解

结论：简谐交流电最基本、最重要。

3. 简谐交流电的描述方法

函数描述、矢量描述、复数描述

1) 函数描述

- 电压、电流和电动势均可写成余弦函数形式

$u(t)=V_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_u)$, $i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_i)$, $e(t)=\mathcal{E}_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_e)$.

- 简谐交流电的基本特征量：频率、峰值、相位

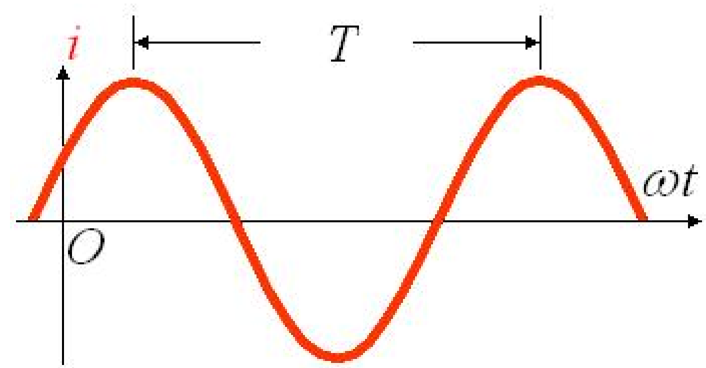
a. 周期和频率

➢周期T：交流电状态循环一次所需要的时间

➢频率f：交流电在单位时间内的循环次数，$f=1/T$

➢角 (圆) 频率ω：发电机转子角速度，$\omega=2\pi f=2\pi/T$

b. 峰值与有效值



- **峰值**：I_{m}, V_{m}, $\mathcal{E}_{\mathrm{m}}$.
- **有效值**：与交流电热效应相等的直流电物理量。

$$\int_0^T i^2 R\,\mathrm{d}t = I^2 R T,$$

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T I_{\mathrm{m}}^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i)\,\mathrm{d}t = \frac{I_{\mathrm{m}}^2}{2},$$

$$I = I_{\mathrm{m}}/\sqrt{2}, \quad V = V_{\mathrm{m}}/\sqrt{2}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathrm{m}}/\sqrt{2}.$$

- **目的**：使交流电平均功率与直流电功率的公式相同。
- 交流电压 (电流) 表的测量值、交流设备电压 (电流) 的铭牌标注值均为有效值。

c. 相位和相位差

➢相位：$\omega t+\varphi_u$, $\omega t+\varphi_i$和$\omega t+\varphi_e$，是决定交流电瞬时状态的物理量。相位总是以2π为周期。

➢初相位：t=0时的相位φ_u, φ_i和φ_e。一般规定：$|\varphi|\leq\pi$.

➢相位差：两个简谐量相位之差。

➢同频量的相位差=初相位差

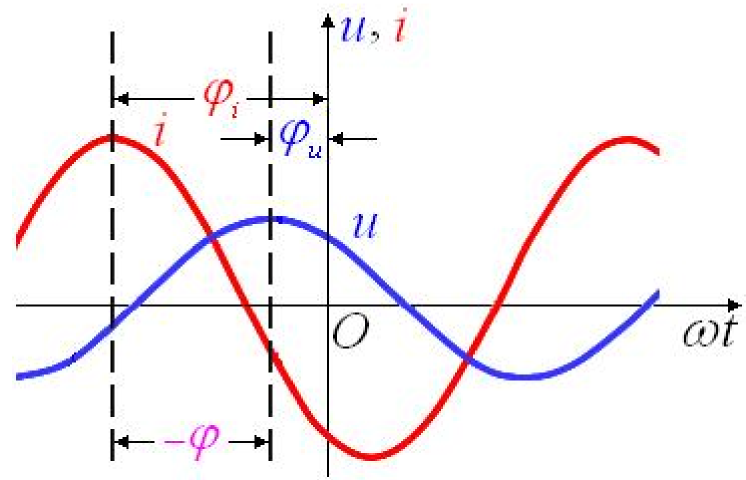
设$u(t)=V_m\cos(\omega t+\varphi_u)$,

$i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$, 则

$\varphi=(\omega t+\varphi_u)-(\omega t+\varphi_i)=\varphi_u-\varphi_i$.

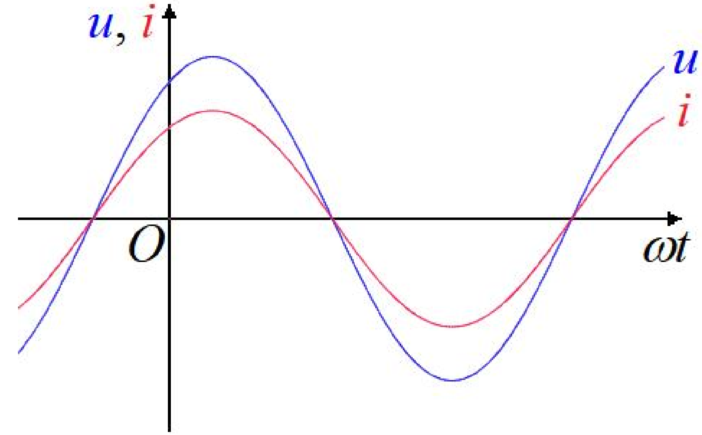
$\varphi<0$时，u滞后i，i先到达最大；

$\varphi>0$时，u超前i，u先到达最大。

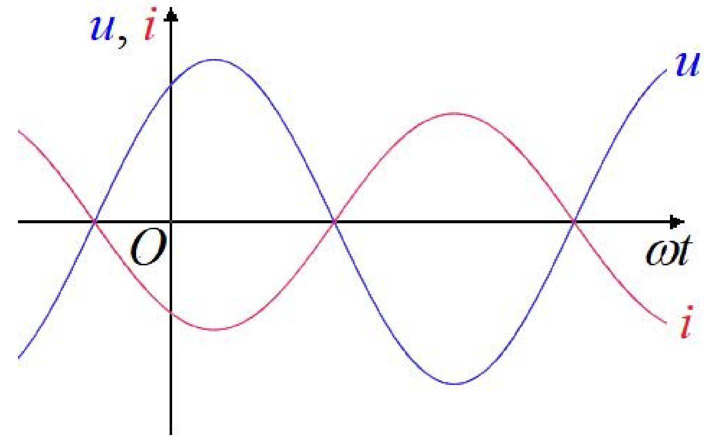


➢特殊相位关系：

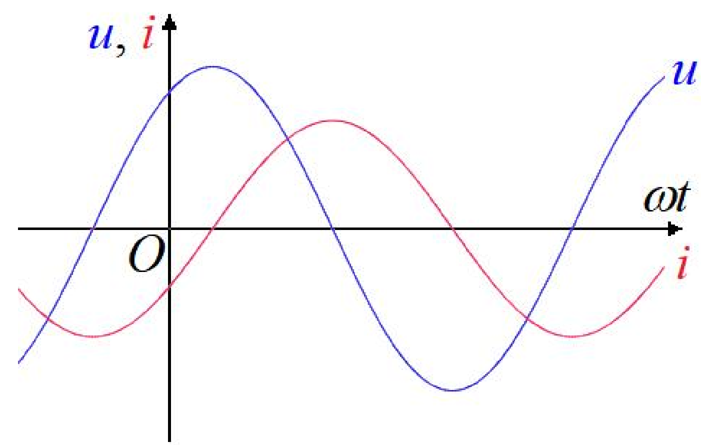
- $\varphi=0$，同相。



- $\varphi=\pm\pi$，反相。

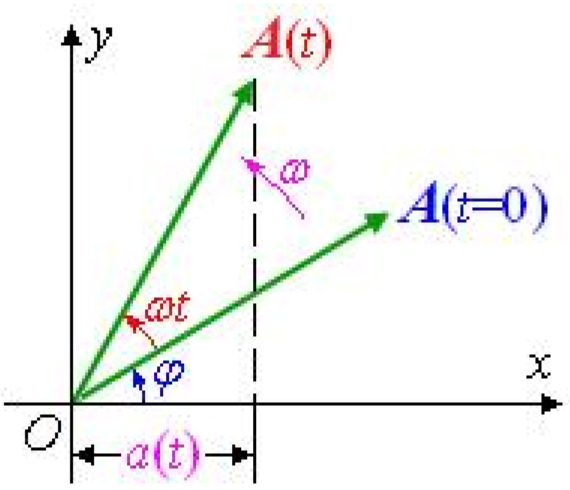


- $\varphi=\pi/2$，u领先i于$\pi/2$
  (不说u落后i于$3\pi/2$)。



2) 矢量描述

- 利用“旋转矢量”描述交流电，具体方法如下



➢ 从原点出发作一矢量A，长度等于峰值A，与x轴夹角等于初相位φ，A以匀角速度ω绕O点逆时针旋转

➢ 在任意时刻，A与x轴的夹角为$\omega t+\varphi$，即相位

➢ A在x轴上的投影值是简谐量的瞬时值

$$a(t)=A\cos(\omega t+\varphi).$$

$\Rightarrow$一个简谐量可以唯一地与一个旋转矢量相对应

- 两个同性质、同频率的简谐量矢量合成

$$a_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1),\ a_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2).$$

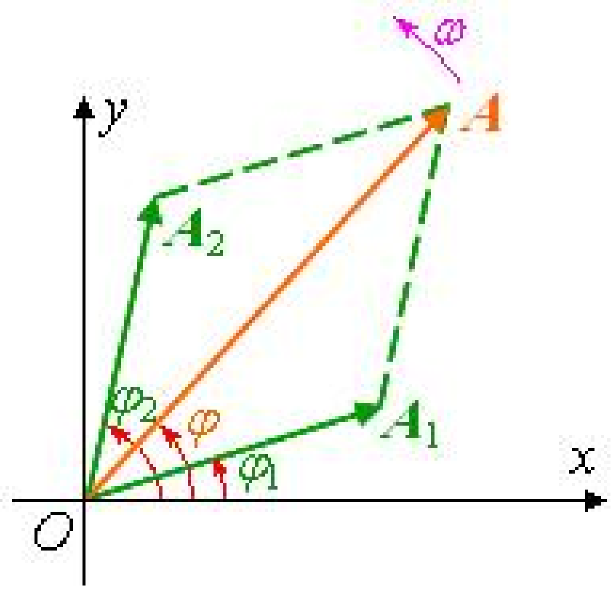
设两个简谐量之和为$a(t)$，则

$$a(t)=a_1(t)+a_2(t)=A\cos(\omega t+\varphi),$$

解得

$$A=\sqrt{A_1^{\ 2}+A_2^{\ 2}+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)},$$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}.$$



与矢量合成规则$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$一致。

- 矢量法的关键：作出正确的矢量图

➢ 基准矢量：为其他矢量定位的矢量。串联电路中，基准矢量一般取表示电流的矢量；并联电路中，基准矢量一般取表示电压的矢量。

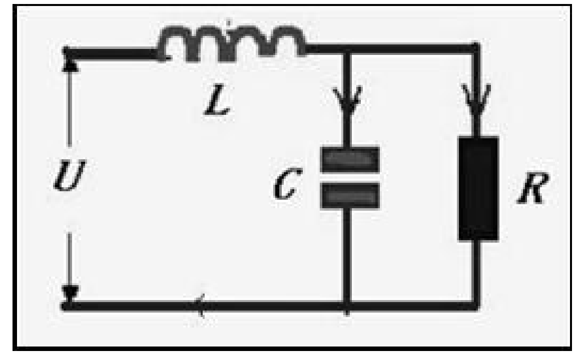
➢ 根据与基准矢量的相位关系，作出表示其他电学量的矢量。

- 矢量法的优缺点

➢ 优点：直观表示各简谐量间的相位关系，并通过简明的矢量合成法则对同类同频简谐量叠加。

➢ 局限：涉及复杂的三角函数运算，不便于分析复杂的交流电路。→复数解法。

补充例题：如图所示交流电路，电阻R与电容C并联后，再与电感L串联，已知$Z_L=Z_C=R$，用矢量图解法求下列各量的相位差：

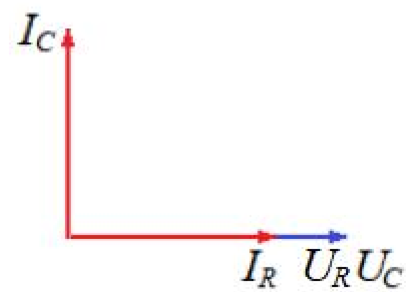


(1) U_C与I_R；

(2) I_C与I_R；

(3) U_L与U_R；

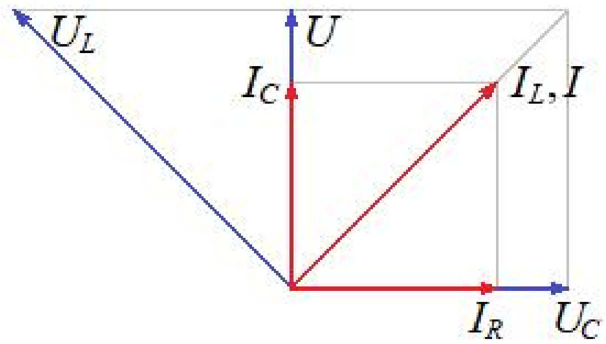
(4) U与I。



解 本题以电阻电流为基准矢量

(1) $U_C=U_R$，U_C与I_R同相位，相位差为零。

(2) I_c超前U_C $\pi/2$相位，所以 I_c与I_R的相位差为$\pi/2$。



(3) $Z_C=R$，所以 $I_c=I_R$。I_L是 I_c与I_R之和，

所以$I_L=\sqrt{2}I_R$，与I_R的相位差为π/4。

而U_L超前I_Lπ/2相位，于是U_L与U_R的相位差为3π/4。

(4) 由矢量法分析知，U与I的相位差为π/4。

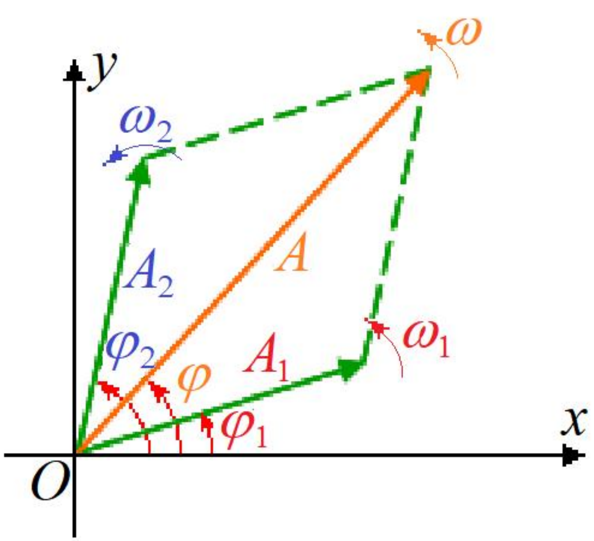
不同频率量的叠加

已知$U_1=A_1\cos\omega_1 t$，$U_2=A_2\cos\omega_2 t$，求二者之和 (此处略去了平庸的初相位)。

相应矢量图如下，由于U_1和U_2的角频率不同，图中两矢量的夹角以及平行四边形对角线的长度都随时间改变。

但可看出A的最大值为A_1+A_2，最小值为$|A_1-A_2|$。

下页计算中，把缓变成分纳入振幅中，突出快变成分。

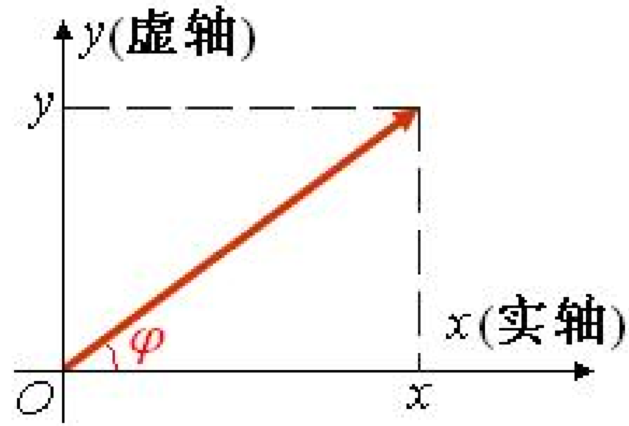


$$
\begin{aligned}
U &= U_1 + U_2 = A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \cos\omega_2 t \\
&= \frac{A_1 + A_2}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) + \frac{A_1 - A_2}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \\
&= (A_1 + A_2)\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t) \\
&\qquad - (A_1 - A_2)\sin(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)\sin(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t) \\
&= A\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi)
\end{aligned}
$$

其中 $\tan\varphi = \dfrac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}\tan(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)$

$$
A^2 = [(A_1 + A_2)\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)]^2 + [(A_1 - A_2)\sin(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t)]^2
$$

3) 复数基本知识



- 复数表示：

代数法 指数法 几何法

$$\tilde{A} = a + \mathrm{j}b = Ae^{\mathrm{j}\varphi} = A\cos\varphi + \mathrm{j}A\sin\varphi,$$

其中$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$, $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arctan b/a$.

- 复数运算：

$$\tilde{A}_{1,2} = x_{1,2} + \mathrm{j}y_{1,2} = A_{1,2}e^{\mathrm{j}\varphi_{1,2}},$$

$$\tilde{A}_1 \pm \tilde{A}_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{j}(y_1 \pm y_2) = Ae^{\mathrm{j}\varphi},$$

$$\tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2 = A_1 A_2 e^{\mathrm{j}(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{A}_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{\mathrm{j}(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

4) 复数表述

$$\tilde{A} = Ae^{j(\omega t+\varphi)} = A\cos(\omega t+\varphi) + jA\sin(\omega t+\varphi).$$

- 为什么可以用一个复数代表一个简谐量？

➢ 该复数的实部就是这个简谐量本身，虚部不独立

➢ 复数的模与简谐量的峰值相对应

➢ 复数的辐角与简谐量的相位相对应

➢ 对多个简谐量进行某种线性运算：只需对代表它们的复数进行相同运算，并取实部

- 复数表述法的优点：复数比三角函数的某些运算 (如微、积分) 要简便得多，且能将交流电路问题等效为直流电路形式。

- 简谐物理量任一瞬时值均可写成与之对应的、唯一的复数形式：

复电压：$\tilde{V} = V_{\mathrm{m}} e^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_u)} = \sqrt{2} V e^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_u)} = \sqrt{2} \dot{V} e^{\mathrm{j}\omega t}$,

复电流：$\tilde{I} = I_{\mathrm{m}} e^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)} = \sqrt{2} I e^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)} = \sqrt{2} \dot{I} e^{\mathrm{j}\omega t}$,

复电动势：$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_{\mathrm{m}} e^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_e)} = \sqrt{2} \mathcal{E} e^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_e)} = \sqrt{2} \dot{\mathcal{E}} e^{\mathrm{j}\omega t}$.

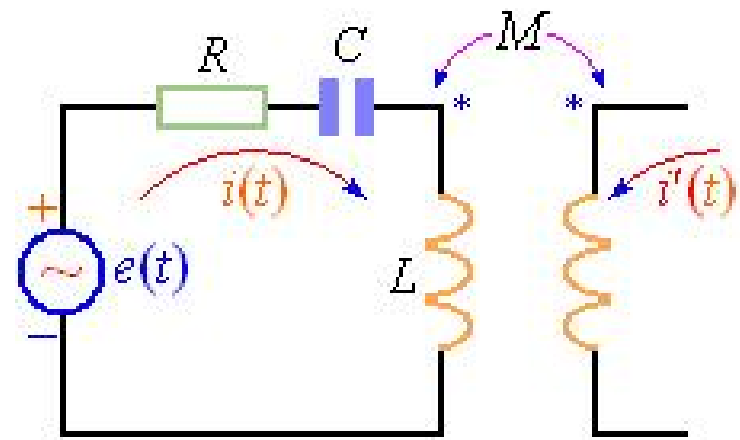
复有效值：$\dot{V} \equiv V e^{\mathrm{j}\varphi_u}$ $\quad \dot{I} \equiv I e^{\mathrm{j}\varphi_i}$ $\quad \dot{\mathcal{E}} \equiv \mathcal{E} e^{\mathrm{j}\varphi_e}$

- 取复数的实部，得到真正有物理意义的瞬时量：

$$u(t) = \mathrm{Re}(\tilde{V}) = V_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_u)$$
$$i(t) = \mathrm{Re}(\tilde{I}) = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_i)$$
$$e(t) = \mathrm{Re}(\tilde{\mathcal{E}}) = \mathcal{E}_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_e)$$

9.2 交流电路的复数解法

1. 交流电路的基本方程



- 满足似稳条件的*RLC*单回路的基本方程为

$$e = iR + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t}.$$

- 线性电路：R, L, C, M为常量，由各元件的内在因素决定，与外在因素 (如i, i', e) 无关。
- 线性电路性质：若干信号线性叠加，互不干扰。

2. 电路方程的复数形式

- 复数表示的基本方程

$$\mathrm{Re}(\tilde{\mathcal{E}}) = R[\mathrm{Re}(\tilde{I})] + \frac{1}{C}\int \mathrm{Re}(\tilde{I})\mathrm{d}t + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}(\tilde{I}) + M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}(\tilde{I}'),$$

$$\rightarrow \mathrm{Re}(\tilde{\mathcal{E}}) = \mathrm{Re}[R\tilde{I} + \frac{1}{C}\int \tilde{I}\mathrm{d}t + L\frac{\mathrm{d}\tilde{I}}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}\tilde{I}'}{\mathrm{d}t}],$$

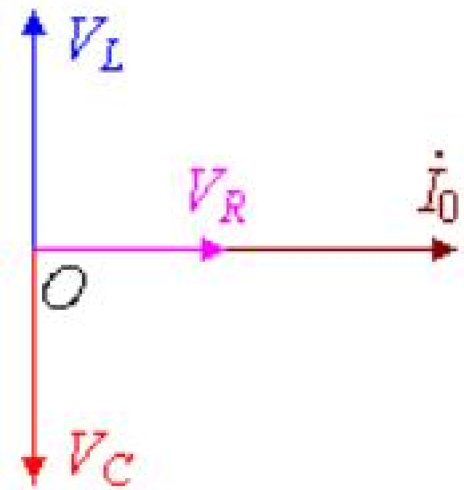
$$\rightarrow \tilde{\mathcal{E}} = R\tilde{I} + \frac{1}{C}\int \tilde{I}\mathrm{d}t + L\frac{\mathrm{d}\tilde{I}}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}\tilde{I}'}{\mathrm{d}t}$$

$$= R\tilde{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\tilde{I} + \mathrm{j}\omega L\tilde{I} + \mathrm{j}\omega M\tilde{I}'.$$

- 复有效形式：$\dot{\mathcal{E}} = R\dot{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} + \mathrm{j}\omega L\dot{I} + \mathrm{j}\omega M\dot{I}'.$

- 以下分析中一律采用复有效形式，并简称复数形式。

3. 交流电路元件的复阻抗



- 复阻抗：一段电路或一个元件上的复电压与复电流之比，即

$$\dot{Z} \equiv \dot{V} / \dot{I} = Ze^{\mathrm{j}\varphi},$$

其中$Z=V/I$为阻抗，$\varphi=\varphi_u-\varphi_i$为辐角。

- 电阻：$\dot{Z}_R = R$，电流和电压同位相，
- 电容：$\dot{Z}_C = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \dfrac{1}{\omega C} e^{-\mathrm{j}\pi/2}$，电流超前电压π/2位相，
- 电感：$\dot{Z}_L = \mathrm{j}\omega L = \omega L e^{\mathrm{j}\pi/2}$，电压超前电流π/2位相。
  $\dot{Z}_M = \mathrm{j}\omega M = \omega M e^{\mathrm{j}\pi/2}$.
- 阻抗分别为$Z_R=R$，$Z_C=1/\omega C$，$Z_L=\omega L$，$Z_M=\omega M$.

- 引入复阻抗后，

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{I}(\dot{Z}_R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C) + \dot{I}'\dot{Z}_M.$$

- 复电压、复电流和复阻抗之间出现了类似于欧姆定律的关系，给运算带来很大方便。
- 复阻抗的模就是电路或元件的阻抗，复阻抗的辐角就是电压与电流的相位差。可见复阻抗同时反映了电压与电流的量值关系和相位关系两方面信息，因而成为解交流电路的中心问题。
- 串联电路中，纯电阻提供了复阻抗的实部，而纯电感和纯电容提供了复阻抗的虚部。复阻抗的虚部称为电抗，电感和电容的电抗分别称为感抗和容抗。

- 串联电路

➢ 通过电路各元件的电流瞬时值相同

➢ 总电压瞬时值等于各元件电压瞬时值之和

⇒串联电路的总复阻抗等于各元件复阻抗之和

$$\dot{V} = I\dot{Z} = \sum_i \dot{V}_i = \sum_i I\dot{Z}_i \Rightarrow \dot{Z} = \sum_i \dot{Z}_i.$$

- 并联电路

➢ 加在各支路上的电压瞬时值相同

➢ 总电流瞬时值等于各支路电流瞬时值之和

⇒总复阻抗的倒数等于各支路复阻抗的倒数和

$$\dot{I} = \sum_i \dot{I}_i \Rightarrow \frac{U}{\dot{Z}} = \sum_i \frac{U}{\dot{Z}_i} \Rightarrow \frac{1}{\dot{Z}} = \sum_i \frac{1}{\dot{Z}_i}.$$

4. 交流电路的基尔霍夫方程组及复数形式

- 基尔霍夫方程组及复数形式

$$\begin{cases}\sum i(t)=0,\\ \sum u(t)=\sum e(t).\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\sum(\pm\dot{I}_i)=0,\\ \sum(\pm\dot{I}\dot{Z})=\sum(\pm\dot{\mathcal{E}}).\end{cases}$$

- 正负号约定

➢ 节点流出(入)的电流，其复量前写正 (负) 号；

➢ 若某支路电流的标定方向与绕行方向一致，该支路的复阻抗前写正号，否则写负号；

➢ 若某电源电动势的标定方向与绕行方向一致，该电动势的复量前写正号，否则写负号。

- 适用范围：基尔霍夫定律仅适用于低频交流电路。

作业、预习及思考题

- 作业：9.1~ 9.4
- 预习：9.3 交流电路的功率、9.4 交流电路的分析举例、10.1 麦克斯韦方程

- 思考题7.6 想象将密绕螺线管的导线纵向剖开，每股线圈的自感为L，求互感及总自感。
- 思考题8.2 证明静磁能 $W_{\mathrm{m}}=\dfrac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V.$
- 思考题9.1 暂态电路的频率如何分布？似稳条件的适用性如何？