第二讲

$\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$

$B_r(x) \overset{\text{def}}{=} \{ y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r \}$

<u>Def</u> 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in E$

如果 $\exists r > 0$ s.t. $B_r(x) \subset E$, 则称 x 是 E 之内点.

如果 E 中每点均为内点, 则称 E 是开集.

<u>HW</u>: 设 $\tau \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n$ 中开集全体

证明: (i) $\phi, \mathbb{R}^n \in \tau$

(ii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

(iii) $A_\alpha \in \tau, \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$

<u>Def</u> 设 X 是非空集合,

$2^X \overset{\text{def}}{=} X$ 之子集全体

如果 $\tau \subset 2^X$ 满足

(i) $X, \phi \in \tau$

(ii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$

(iii) $A_\alpha \in \tau,\ \forall \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$ ②

则称 τ 是 X 上一个拓扑，τ 中元素称为 X 中开集，(X,τ) 称为拓扑空间

Def 设 $E \subset \mathbb{R}^n$

称 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 E 的极限点（聚点）是指

$$B_r(x) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \phi,\ \forall r > 0$$

$(\Longleftrightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E \setminus \{x\},\ s.t.\ x_n \to x)$

$E' \overset{def}{=}$ E 的极限点全体，称为 E 的导集

$\overline{E} \overset{def}{=} E \cup E'$ 称为 E 的闭包

$\partial E \overset{def}{=} \overline{E} \setminus \mathring{E}$ --- 边界.

如果 $\exists r > 0$ s.t.

$$B_r(x) \cap E = \{x\},$$

则称 x 是 E 的孤立点

如果 $E' = E$，则称 E 是完全集

（即完全集 = 不含孤立点的闭集）

Def F_σ集 $\stackrel{def}{=}$ 可数个闭集之并集

G_δ集 $\stackrel{def}{=}$ 可数个开集之交集

Note：E是F_σ集 $\Longleftrightarrow$ E^c是G_δ集

例：$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$是$F_\sigma$集

Def 如果 $\mathscr{A}\subset 2^X$ 满足

(i) $\phi\in\mathscr{A}$

(ii) $A\in\mathscr{A}\Longrightarrow A^c\in\mathscr{A}$

(iii) $A_n\in\mathscr{A},\ n=1,2,\cdots\Longrightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$

则称 $\mathscr{A}$ 是 X上一个 σ-代数.

Rmk：(ii)+(iii) $\Longrightarrow$ "$A_n\in\mathscr{A},\ n=1,2,\cdots\Longrightarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$"

Def 设 $\mathscr{F}\subset 2^X$

包含$\mathscr{F}$的$\underbrace{\text{最小的}\sigma\text{-代数}}$ $\mathcal{M}(\mathscr{F})$称为$\mathscr{F}$生成的σ-代数

是指：$\forall\sigma$-代数$\mathscr{A}\supset\mathscr{F}$

$\Longrightarrow\mathscr{A}\supset\mathcal{M}(\mathscr{F})$

Def $\mathcal{B} \overset{def}{=\!=}$ $\mathbb{R}^n$中开集全体生成之σ-代数.

称为Borel σ-代数.

$\mathcal{B}$中元素称为Borel集

例：开集，闭集，F_σ集，G_δ集

$F_{\sigma\delta}$集（$\overset{def}{=\!=}$ 可数个F_σ集之交集）

$G_{\delta\sigma}$集（$\overset{def}{=\!=}$ 可数个G_δ集之并集）

$F_{\sigma\delta\sigma}$集，$G_{\delta\sigma\delta}$集，……

Thm（$\mathbb{R}$中开集之结构）

$\mathbb{R}$中非空开集可唯一地表为至多可数个互不相交之开区间之并集.

Pf 设 $G \overset{open}{\subset} \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall x \in G, \exists r > 0$ s.t. $(x-r, x+r) \subset G$

令

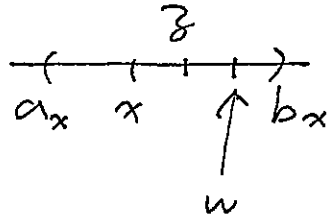
$a_x \overset{def}{=\!=} \inf\{y \in \mathbb{R} : y < x, (y, x) \subset G\}$

$b_x \overset{def}{=\!=} \sup\{z \in \mathbb{R} : z > x, (x, z) \subset G\}$

（Note: a_x可能为$-\infty$，b_x可能为$+\infty$）

$I_x \overset{\text{def}}{=\!=} (a_x, b_x)$

1° $I_x \subset G$



$\forall z \in I_x$，不妨设 $z > x$

$\xRightarrow{b_x\text{之定义}}$ $\exists w$ s.t.

$z < w < b_x$ 且 $(x, w) \subset G$

$\xRightarrow{\text{特别地}}$ $z \in G$

$$\Rightarrow \quad G = \bigcup_{x \in G} I_x$$

2° $\forall I_y, I_z \in \{I_x\}_{x \in G}$

要么 $I_y \cap I_z = \phi$

要么 $I_y = I_z$

假设 $I_y \cap I_z \neq \phi$

$\Rightarrow y \in \underbrace{I_y \cup I_z}_{\text{仍是开区间}} \subset G$

$\xRightarrow{I_y\text{定义中的“最大性”}}$ $I_y \cup I_z \subset I_y$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow I_z \subset I_y \\ \text{同理，} I_y \subset I_z \end{array}\right\} \Rightarrow I_y = I_z$$

3° $\{I_x\}_{x\in G}$ 至多可数.

不同的 I_x 不相交 $\Longrightarrow$ 包含不同的有理数

$\Longrightarrow$ 对应 $Q \to \{I_x\}_{x\in G}$ 中每个 q 至多

$$q \mapsto I_x \ni q$$

对应一个 I_x，从而 I_x 的"个数"不会多于 q 的"个数"

Rmk: 如果 $a_x, b_x \in \mathbb{R}$，则 $a_x, b_x \notin G$

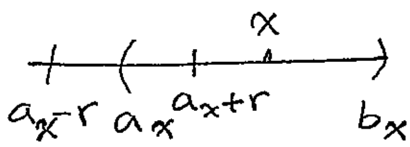
假设 $a_x \in G$

$\Rightarrow \exists\, r>0$ s.t. $(a_x - r, a_x + r) \subset G$

$\Rightarrow (a_x - r, x) \subset (a_x - r, a_x + r) \cup (a_x, b_x)$

$\subset G$

与 a_x 的定义矛盾



Def 设 $G \overset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}$

如果开区间 $(a,b) \subset G$ 且 $a, b \notin G$

则称 (a,b) 是 G 的一个构成区间

Cor 房 $G \overset{\text{open}}{\subseteq} \mathbb{R}$ 表为互不相交的开区间之并，⑦
则这些开区间一定是构成区间.

Def $\mathbb{R}^n$ 中形如

$$R \overset{\text{def}}{=} [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

$$= \{(x_1, \cdots, x_n) : a_i \le x_i \le b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n\}$$

的集合称为矩体

如果 R 的各边长均相等，则称之为方体.

形如 $\frac{p}{2^k}$，$p, k \in \mathbb{Z}$ 的数称为二进有理数

顶点为二进有理数点的方体称为二进方体
(dyadic cube)

Thm（$\mathbb{R}^n$ 中开集的结构）

$\mathbb{R}^n$ 中非空开集可表为~~可数个~~可数个内部互不相交的闭方体之并.

Pf 对 $k \in \mathbb{Z}$，

$$\Gamma_k \overset{\text{def}}{=} \{\text{边长为 } 2^{-k} \text{ 的二进方体}\}$$

$$\mathcal{F}_0 \overset{def}{=\!=} \{ Q \in \Gamma_0 : Q \subset G \}$$

$$\mathcal{F}_1 \overset{def}{=\!=} \{ Q \in \Gamma_1 : Q \subset G \setminus (\bigcup_{R \in \Gamma_0} R) \}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{F}_k \overset{def}{=\!=} \{ Q \in \Gamma_k : Q \subset G \setminus (\bigcup_{i=0}^{k-1} \bigcup_{R \subset \Gamma_i} R) \}$$

$$\vdots$$

<u>Claim</u> $$G = \underbrace{\bigcup_{k=0}^{\infty} \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_k}}_{\text{至多可数，内部互不相交}} Q$$

1° RHS $\subset$ LHS

平凡

2° LHS $\subset$ RHS

$\forall x \in G$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\exists Q^{(k)} \in \Gamma_k$ s.t.

$x \in Q^{(k)}$ $\quad (\because \mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in \Gamma_k} Q)$

(Note: 这个 $Q^{(k)}$ 不一定属于 $\mathcal{F}_k$，$\because$ 它不一定 $\subset G$)

$\xRightarrow{x\text{是}G\text{的内点}}$ $\exists r > 0$, s.t. $B_r(x) \subset G$

$\Rightarrow$ 当 k 充分大时,

$$Q^{(k)} \subset B_r(x) \subset G$$

由 $\mathcal{F}_k$ 之定义 $\Rightarrow$ $Q^{(k)}$ 一定包含于 $\mathcal{F}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_k$ 中某个二进方体.

$$\Rightarrow \quad x \in Q^{(k)} \subset \bigcup_{j=0}^{k} \bigcup_{Q \in \mathcal{F}_j} Q \subset RHS$$