微分方程

Bessel方程
与Bessel函数

定理：（变系数二阶线性常微分方程的广义幂级数解）

设$p(t),q(t)$在t_0附近可展开成$(t-t_0)$的幂级数，$p^2(t_0)+q^2(t_0)\neq 0$，则$(t-t_0)^2x''+(t-t_0)p(t)x'+q(t)x=0$在$t_0$邻域内有收敛的广义幂级数解$x=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(t-t_0)^{k+\rho}$，$C_k,\rho$：常数，$C_0\neq 0$。

（参考丁同仁“常微分方程教程”第二版P227）

Bessel方程： $t^2x''+tx'+(t^2-\nu^2)x=0,\ \lambda:=\nu^2\geq 0,\nu\geq 0$：实数。

目标： 求Bessel方程的通解。

1. Bessel方程的广义幂级数解

$$t^2x''+tx'+(t^2-\nu^2)x=0$$

由定理，有广义幂级数解 $x=\sum_{k=0}^{\infty}C_kt^{k+\rho},C_k,\rho$:待定, 则

$$x'=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+\rho)t^{k+\rho-1},\quad x''=\sum_{k=0}^{\infty}C_k(k+\rho)(k+\rho-1)t^{k+\rho-2}$$

代入Bessel方程得

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+\rho)^2-\nu^2]C_kt^{k+\rho}+\sum_{k=0}^{\infty}C_kt^{k+\rho+2}=0。$$

比较最低次幂 t^ρ 的系数： $(\rho^2-\nu^2)C_0=0\ \ (C_0\neq 0)$

$$\Rightarrow \rho^2-\nu^2=0\Rightarrow \rho_1=\nu,\ \rho_2=-\nu\left(\nu\geq 0\right)。$$

1°. $\rho=\rho_1=\nu$时, 令 $x_1=\sum_{k=0}^{\infty}C_k t^{k+\rho_1}=\sum_{k=0}^{\infty}C_k t^{k+\nu}$, 有

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+\nu)^2-\nu^2]C_k t^{k+\nu}+\sum_{k=0}^{\infty}C_k t^{k+\nu+2}=0,$$ 比较系数得

$$t^{\nu}:(\nu^2-\nu^2)C_0=0\quad(C_0\neq 0).$$

$$t^{\nu+1}:[(1+\nu)^2-\nu^2)C_1=0\Rightarrow\ C_1=0.$$

$$t^{\nu+k}:[(k+\nu)^2-\nu^2]C_k+C_{k-2}=0\Rightarrow$$

$$C_k=-\frac{C_{k-2}}{k(k+2\nu)}$$ (系数递推公式),

$$C_2=-\frac{C_0}{2\cdot 2(1+\nu)},C_3=-\frac{C_1}{3\cdot(3+2\nu)}=0,$$

$$C_4=(-1)^2\frac{C_0}{2^4\cdot 2(2+\nu)(1+\nu)},C_5=0,\cdots$$

$$\therefore C_{2k}=\frac{(-1)^k C_0}{2^{2k}k!(k+\nu)(k-1+\nu)\cdots(1+\nu)},\ C_{2k+1}=0.$$

$$\Rightarrow C_{2k}=\frac{(-1)^k C_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(k+\nu+1)},\ x_1(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k C_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2k}k!\Gamma(k+\nu+1)}x^{2k+\nu}.$$

其中$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt, s>0$满足$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$.

在 $x_1(t)$中，取$C_0=\dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$，得广义幂级数解

$$x_1(t)=J_\nu(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}$$

(第一类ν阶Bessel函数)

易知$\lim\limits_{t\to0+}J_\nu(t)=\begin{cases}0, & \nu>0\\ 1, & \nu=0\end{cases}$。

2°. $\rho=\rho_2=-\nu<0$时

a) 2ν非整数，系数递推公式$C_k=-\dfrac{C_{k-2}}{k(k-2\nu)},k\geq 2,C_0\neq 0,$

类似得广义幂级数解$J_{-\nu}(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)}(\dfrac{t}{2})^{2k-\nu},$

$\lim\limits_{t\to 0+}J_{-\nu}(t)=+\infty,\ \nu>0,\nu\neq$整数.

$\Rightarrow J_\nu(t)$与$J_{-\nu}(t)$线性无关，Bessel方程通解为

$x(t)=CJ_\nu(t)+DJ_{-\nu}(t).$

b) $2\nu=2m+1$奇数,只须令$C_{2m+1}=0$,仍有$J_{-\nu}(t)$.

c)$\nu=m$整数,易验证$J_{-m}(t)=(-1)^m J_m(t)$ (见下页证明)线性相关,

另一线性无关解可以用$J_m(t)\int J_m^{-2}(t)\,e^{-\int\frac{dt}{t}}dt$表示(过于复杂!).

证明：$J_{-m}(t)=(-1)^m J_m(t),\ \ m\in\mathbb{N}$。

由复变函数知负整数是Γ函数的一级极点，则$\forall m\in\mathbb{N}$,

$$J_{-m}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-m}=\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-m+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-m}$$

$$=\sum_{k=m}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k-m)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k-m}\quad(\because\Gamma(n+1)=n!,n=0,1,2,\cdots)$$

$$=(-1)^m\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{l!(l+m)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+m}\quad(令k=l+m,\ 则当k=m时,l=0)$$

$$=(-1)^m J_m(t).$$ 证毕.

另一方法给出通解：

(i). $\nu \neq m$非整数时，令$N_\nu(t) = \dfrac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi} J_\nu(t) - \dfrac{1}{\sin\nu\pi} J_{-\nu}(t)$

(第二类ν阶Bessel函数或ν阶Neumann函数)

(ii). $\nu = m$整数时, 令$N_m(t) = \lim\limits_{\nu\to m} N_\nu(t)$,由洛必达法则可得

$$N_m(t) = \frac{2}{\pi} J_m(t)(\ln\frac{t}{2} + \gamma) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m-k-1)!}{k!}(\frac{t}{2})^{2k-m}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+m)!}\left(\sum_{l=0}^{m+k-1}\frac{1}{l+1} + \sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{l+1} + \right)(\frac{t}{2})^{2k+m},$$

其中$\gamma \approx 0.5772$为Euler常数.

(参考梁昆淼“数学物理方法”第四版P207)

易知$\lim\limits_{t\to 0+} N_m(t) = -\infty \Rightarrow N_m(t)$与$J_m(t)$线性无关.

$\therefore$ Bessel方程通解为$x(t) = CJ_\nu(t) + DN_\nu(t), \forall \nu \geq 0.$

小结：

➢Bessel方程： $t^2x'' + tx' + (t^2 - \nu^2)x = 0$

➢广义幂级数解：

第一类ν阶Bessel函数

$$\boxed{J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}}$$

第二类ν阶Bessel函数
(ν阶Neumann函数)

$$N_\nu(t) = \frac{\cos\nu\pi}{\sin\nu\pi}J_\nu(t) - \frac{1}{\sin\nu\pi}J_{-\nu}(t)$$

$$(\nu = m\text{时}\ N_m(t) = \lim_{\nu\to m} N_\nu(t))$$

➢Bessel方程通解：

$$\boxed{x(t) = CJ_\nu(t) + DN_\nu(t)}$$

2. Bessel函数$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu}$ 的性质

➢**递推公式：**

$$(x^\nu J_\nu)'=x^\nu J_{\nu-1},\quad (x^{-\nu}J_\nu)'=-x^{-\nu}J_{\nu+1}\quad（\nu=0\text{时}\ J_0'=-J_1）$$

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^n(x^\nu J_\nu)=x^{\nu-n}J_{\nu-n},\quad (\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^n(x^{-\nu}J_\nu)=(-)^n x^{-(\nu+n)}J_{\nu+n}$$

➢**半整数阶Bessel函数：**

$$J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(x)=\begin{cases}(-1)^n\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}(\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^n(\dfrac{\sin x}{x}), & +\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}x^{n+\frac{1}{2}}(\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})^n(\dfrac{\cos x}{x}), & -\end{cases}$$

推论： 半整数阶第一第二类Bessel函数都是初等函数！

➢母函数：
$$\boxed{e^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\zeta^n\quad(\zeta\neq 0)}$$

➢整数阶Bessel函数的复积分形式与实积分形式：

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{\frac{x}{2}(\zeta-\zeta^{-1})}}{\zeta^{n+1}}dz$$ （对母函数作Laurent展开）

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)d\theta,\ n\geq 0$$ （取$\zeta=e^{i\theta}$）

此时易看出

$$J_n(-x)=(-1)^n J_n(x),\ \left|J_n(x)\right|\leq 1,\ \forall x\geq 0$$

➢Bessel函数的渐进表示：当$x \to +\infty$,

利用Sommerfeld积分以及及鞍点法

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{1}{4}\pi\right)+O(x^{-2/3})$$

$$N_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{1}{4}\pi\right)+O(x^{-2/3})$$

（梁昆淼–数理方法）

- 变量充分大时两类Bessel函数相位相差$\pi/2$且均衰减震荡
- 由上面的渐进表示易知两个函数在正半轴有无穷多个零点
- Bessel函数的零点分布对相关特征值问题至关重要

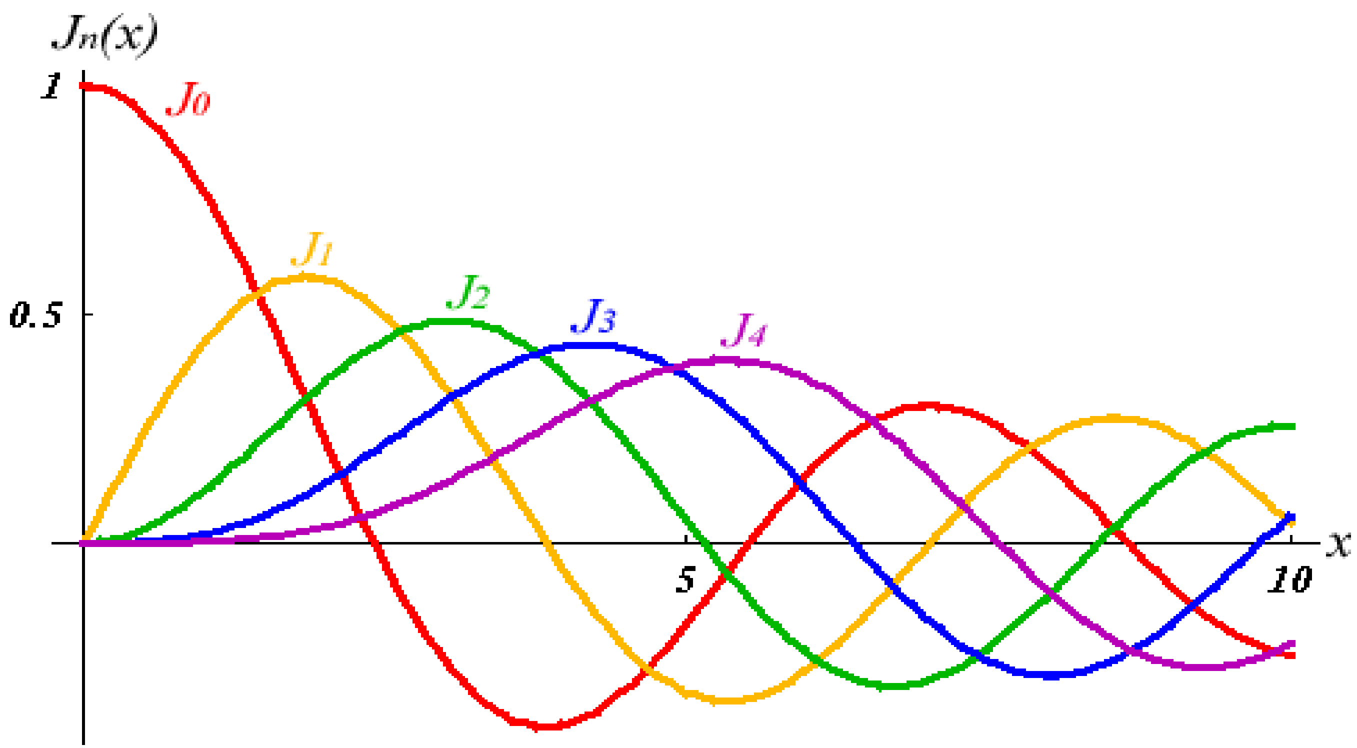
➢Bessel函数的零点分布：

$a)\ \nu > -1$时$J_\nu(x)$与$N_\nu(x)$在x轴有无穷个对称的零点

$b)\ \nu > -1$时$J_\nu(x)$的非零零点均为一级的; $\nu = \pm n$时0为$J_\nu(x)$的n级零点

$c)J_\nu(x)$与$J_{\nu+1}(x)$的正零点两两相间且前者的第一个正零点离原点更近

$d)J_\nu'(x)$和$J_\nu(x) + hxJ_\nu'(x)$ (h实数)在x轴有无穷个零点



柱函数的分类：

柱函数

- 第一、二类Bessel函数 $J_\nu(x),\ N_\nu(x) = \dfrac{\cos\nu\pi\ J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$
- 第三类Bessel函数 $\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \end{cases}$
- 第一类虚变量Bessel函数 $\boxed{I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)}$
- 第二类虚变量Bessel函数 $\boxed{K_\nu(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}}$
- 球Bessel、球Neumann函数
- 球Hankel函数

$$\boxed{\begin{gathered} j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x),\ n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+\frac{1}{2}}(x), \\ h_l^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(x),\ h_l^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) \end{gathered}}$$