Lec4 Note of Abstract Algebra

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 22 日

2.4 群同态

定义 2.2. $f\colon G \to H$ 称为群 G 到 H 的一个**同态**，是指满足

$$f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2),\ \forall\, g_1, g_2 \in G$$

的映射。

若 f 为单射，则称 f 为**单同态**，记为 $f\colon G \hookrightarrow H$ 或 $f\colon G \rightarrowtail H$。若 f 为满射，则称 f 为**满同态**，记为 $f\colon G \twoheadrightarrow H$。若 f 为双射，则称**同构**，记为 $f\colon G \xrightarrow{\sim} H$。

评论. 容易验证同态的复合仍是同态。

命题 2.1. 设 $f\colon G \to H$ 为群同态，则

(1) $f(1_G) = 1_H$；

(2) $f(g^{-1}) = (f(g))^{-1},\ \forall\, g \in G$。

证明. (1) $f(1_G)^2 = f(1_G) \cdot f(1_G) = f(1_G \cdot 1_G) = f(1_G) \Rightarrow f(1_G) = 1_H$。

(2) $f(g) \cdot f(g^{-1}) = f(g \cdot g^{-1}) = f(1_G) = 1_H$。同理 $f(g^{-1})f(g) = 1_H$。

□

评论. 设 M_1, M_2 为含幺半群，我们说 $f\colon M_1 \to M_2$ 是幺半群的同态，指的是 f 应当满足：

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$；

(2) $f(1_{M_1}) = 1_{M_2}$。

例 2.1. 记 $\mathbb{F}$ 为域，考虑其在乘法下构成的群[1]。考虑映射：

$$f\colon \mathbb{F} \hookrightarrow M_2(\mathbb{F}),$$
$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $f(ab) = f(a)f(b)$，但是 $f(1) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \neq 1_{M_2(\mathbb{F})}$，$f(1)$ 仅为幂等元。

[1]应当去掉加法幺。

例 2.2. 设 $H \le G$，考虑嵌入映射

$$\begin{aligned} \mathrm{inc}\colon H &\hookrightarrow G, \\ h &\mapsto h, \end{aligned}$$

它是群单同态。

考虑 $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 在加法下构成的群，则商映射

$$\begin{aligned} \pi\colon \mathbb{Z} &\twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \\ a &\mapsto \overline{a} \end{aligned}$$

是满同态。

记 μ_n 为 n 次单位根乘法群，$\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 为 n 次本原单位根，那么

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \mu_n, \\ a &\mapsto \zeta_n^a \end{aligned}$$

是群同构。

考虑 $\det\colon GL_n(\mathbb{F}) \twoheadrightarrow \mathbb{F}^\times$，它是满同态。

考虑指数映射 $\exp\colon (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^+, \times),\ a \mapsto e^a$，则其为同构。

考虑实数到单位圆周的映射：

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to S^1 = \{e^{i2\pi\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}, \\ \theta &\mapsto e^{i2\pi\theta}, \end{aligned}$$

它是满同态。

考虑

$$\begin{aligned} S^1 &\xrightarrow{\sim} SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}, \\ e^{i\theta} &\mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

它是同构。

考虑

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^\times, \times) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^\times \times S^1, \\ re^{i\theta} &\mapsto (r, e^{i\theta})x, \end{aligned}$$

它是群同构。

考虑

$$\begin{aligned} f\colon S_n &\to GL_n(\mathbb{F}), \\ \sigma &\mapsto E_{\sigma(1)1} + \cdots + E_{\sigma(n)n} \end{aligned}$$

它是单同态。

定义 2.3. 群 G 到自身的同态 (构) 称为 G 的**自同态 (Endomorphism)**(**自同构 (Automor-**

phism))。

命题 2.2. *(1)* G 的自同构的全体在映射的复合运算下形成一个群，称为 G 的**自同构群**，记作 $\mathrm{Aut}G$。

(2) 设 $\varphi\colon G \xrightarrow{\sim} H$ 为一个群同构，则 G 到 H 的同构的全体为 $\mathrm{Aut}H \circ \varphi = \varphi \circ \mathrm{Aut}G$，这里 $\mathrm{Aut}H \circ \varphi = \{f \circ \varphi \mid f \in \mathrm{Aut}H\}$, $\varphi \circ \mathrm{Aut}G = \{\varphi \circ g \mid g \in \mathrm{Aut}G\}$。

证明. (1) 注意到 $\mathrm{Aut}G \subset S(G)$，这里 $S(G)$ 为 G 的对称群。于是我们只需验证 $\mathrm{Aut}G$ 在乘法与取逆下封闭。

由于自同态的复合还是自同态，双射复合还是双射，因此自同构复合还是自同构。不难验证自同构的逆映射仍是自同构。

(2) 设 $\varphi_1\colon G \xrightarrow{\sim} H$，则

$$\varphi_1 = (\varphi_1\varphi^{-1})\varphi = \varphi(\varphi^{-1}\varphi_1)$$

这里 $\varphi_1 \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}H$, $\varphi^{-1} \circ \varphi_1 \in \mathrm{Aut}G$。

□

例 2.3. 考虑 $(\mathbb{Z}, +)$，则其自同态具有以下形式

$$\begin{aligned}\varphi_n\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z},\\ m &\mapsto nm.\end{aligned}$$

则 φ_n 单 $\Leftrightarrow n \neq 0$。φ 同构 $\Leftrightarrow n = \pm 1$。于是 $\mathrm{Aut}\mathbb{Z} = \{\varphi_{\pm 1}\} \simeq \mathbb{Z}^\times$。而我们注意到

$$\varphi_n \circ \varphi_m = \varphi_{nm}.$$

于是 $\mathrm{End}(\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}, \times)$，这里作为含幺半群而同构。

考虑 $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$，则其自同态具有以下形式

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{m}}\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\\ \overline{\alpha} &\mapsto \overline{m\alpha}.\end{aligned}$$

则 $\varphi_{\overline{m}}$ 同构 $\Leftrightarrow (m, n) = 1$。同样地注意到

$$\varphi_{\overline{m}} \circ \varphi_{\overline{m'}} = \varphi_{\overline{mm'}},$$

那么 $\mathrm{End}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{\varphi_{\overline{m}} \mid \overline{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\} \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$。而 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (\mathrm{End}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$，进而 $|\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})| = \varphi(n)$。

考虑 $(\mathbb{Q}, +)$，则其自同态具有以下形式

$$\begin{aligned}\varphi_q\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q},\\ \alpha &\mapsto q\alpha.\end{aligned}$$

于是其为同构只需 $q \neq 0$。类似有 $\mathrm{End}(\mathbb{Q}, +) \simeq (\mathbb{Q}, \times)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, +) \simeq \mathbb{Q}^\times$。

例 2.4.

- 考虑

$$\begin{aligned} f\colon G &\to G, \\ g &\mapsto g^2, \end{aligned}$$

  则 f 为群同态 $\Leftrightarrow G$ 为 Abel 群。

  特别地，若 $g^2 = 1, \forall\, g \in G$，则 G 为 Abel 群。

- 考虑

$$\begin{aligned} f\colon G &\to G, \\ g &\mapsto g^{-1}, \end{aligned}$$

  则 f 为群同态 $\Leftrightarrow G$ 为 Abel 群。

3 子群与陪集分解

定义 3.1. $g \in G$，若存在正整数 n 使得 $g^n = 1$，则称 g 为**有限阶元**。使上式成立的最小的正整数 n 称为 g 的**阶 (Order)**，记为 $\mathrm{ord}(g) = n$。否则称 g 为**无限阶元**，记为 $\mathrm{ord}(g) = \infty$。