Lec1 Note of Abstract Algebra

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 10 日

Part I

群论基础

1 集合论预备知识

1.1 映射

定义 1.1. 称 f 是从集合 A 到集合 B 的**映射**，是指对 A 中任一元素 $a \in A$，按某种方式存在 B 中唯一的元素，记为 $f(a)$，称为 a 的**像**，与之相对应。

A 称为**定义域**，B 称为**值域**[1]，f 称为对应关系。

定义 1.2. 设 $f\colon A \to B,\ g\colon C \to D$ 为映射。称 f 与 g **相等**，记作 $f = g$，当且仅当 $A = C,\ B = D,\ f(a) = g(a),\ \forall\, a \in A$。

例 1.1. 考虑两个映射

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}, \\ n &\mapsto 2n, \\ g\colon \mathbb{Z} &\to 2\mathbb{Z}, \\ n &\mapsto 2n, \end{aligned}$$

则 $f \neq g$，因为它们的值域不一致。

我们知道，对 $a \in A$，$f(a)$ 为 a 的像。而对 $b \in B$，记 $f^{-1}(b) := \{a \in A \mid f(a) = b\}$，称为 b 的**原像**。注意，$f^{-1}(b)$ 可能为空集。

定义 1.3. 设 $f\colon A \to B$ 为映射。称 f 为**单射**，若

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2e,\ \forall\, a_1, a_2 \in A.$$

[1] 更确切的说法应当是**到达域**，而值域一般用来指映射的像集，即 $\mathrm{Im}f$。但记号当然并非 mathematically important，不过建议稍加注意。

称 f 为**满射**，若

$$f^{-1}(b) \neq \varnothing,\ \forall\, b \in B,$$

也可以写成

$$f(a) = b,\ \forall\, b \in B,\ \exists\, a \in A.$$

称 f 为**双射**，或 **1-1 映射**，若 f 既是单射又是满射。

定义 1.4. $f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$ 称为 f 的**像集**。

我们注意到，对 $f\colon A \to B$, $A \neq \varnothing$，有 $A = \bigsqcup_{b \in f(A)} f^{-1}(b)$，这构成了 A 的一个拆分，进而给出了 A 上的等价关系 $\sim$：

$$a_1 \sim a_2 :\Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2).$$

称为 f 所决定的等价关系。

1.2 映射的复合

定义 1.5. 设 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ 为映射，则映射

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\to C, \\ (g \circ f)(a) &\mapsto g(f(a)) \end{aligned}$$

称为 f 和 g 的**复合**。

这实际上可以理解为

$$\begin{aligned} A \xrightarrow{f} B &\xrightarrow{g} C, \\ a \mapsto f(a) &\mapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

命题 1.1. 考虑集合与映射

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D.$$

则

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

证明. 按定义，有

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))), \\ ((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))). \end{aligned}$$

于是二者相等。 □

评论. 这是所谓的映射的结合律。更一般的结合律见如下讨论。

定义 1.6. 设 M 为集合，M 上的一个**二元运算**是指映射

$$m\colon M \to M.$$

类似可以定义 n **元运算**

$$m\colon \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{n\text{个}} \to M.$$

$m(a,b)$ 通常记为 $a \cdot b$, $a * b, \cdots$ 。

例 1.2. 设 X 为集合，记 $Map(X,X) = \{f\colon X \to X\}$，则复合 $\circ$ 为 $Map(X,X)$ 上的一个二元运算。

我们称二元运算 m 满足**结合律**，若

$$m(m(a,b),c) = m(a,m(b,c)),\ \forall\, a,b,c \in M.$$

若将 $m(a,b)$ 记为 $a \cdot b$，则上式可写为

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

于是根据1.1，复合是 $Map(X,X)$ 上的一个满足结合律的二元运算。

评论. 容易发现 $(\mathbb{R}^3, \times)$ 不满足结合律，而它满足：

反对称性 $\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha,\ \forall\, \alpha, \beta, \in \mathbb{R}^3$,

Jacobi 等式 $(\alpha \times \beta) \times \gamma + (\beta \times \gamma) \times \alpha + (\gamma \times \alpha) \times \beta = 0$。

我们称 $\times$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的李括号。