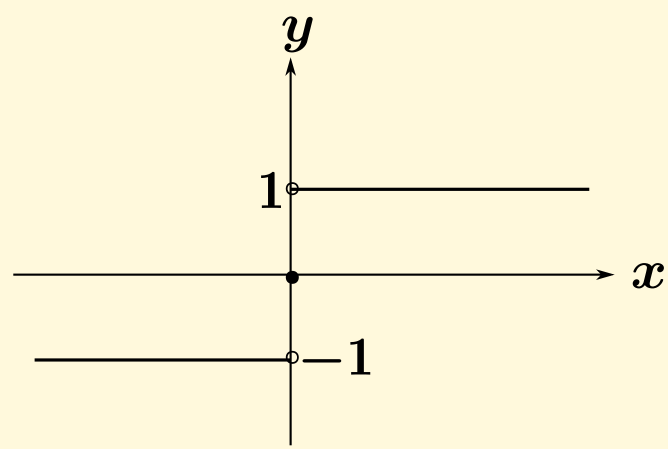
第 2 章 函数的连续性

§2.1 连续函数的基本概念

2.1.1 连续的定义

直观上讲, 函数连续, 就是指函数的图象是一条“没有断开”的“连续”的曲线. 首先观察以下几个例子. 第一个例子是符号函数:

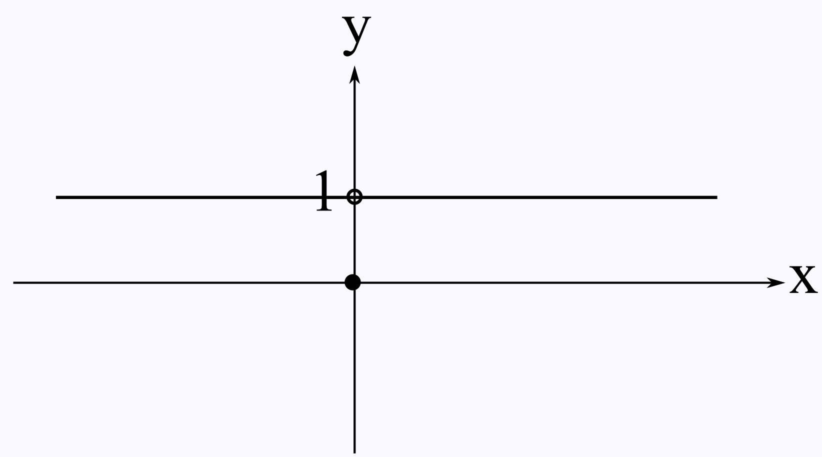
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



从图形上看, 它在 $x = 0$ 处是断开的. 而在“间断点” $x = 0$ 处的显著特点是, 当 $x \to 0$ 时, 函数没有极限 (因为左右极限分别为 -1 和 1, 两者不相等) .

第二个例子是如下函数:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$



显然, 它在 $x=0$ 处是断开的, 原因是函数虽然在 $x=0$ 以 1 为极限, 但极限值与函数本身在这一点的函数值 ($f(0)=0$) 不相符.

如果改变这个函数在 $x=0$ 的定义, 使得函数在 $x=0$ 的值等于函数在 $x=0$ 的极限值, 那么它在 $x=0$ 处就连续了. 改变后的函数是 $f(x)=1,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

根据观察, 函数在一点 x_0 处如果连续, 应该具备两个要素: 其一是函数在这一点 x_0 处应该有极限, 其二是极限值应该等于函数在这一点的值.

定义 1 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的邻域内 (包含 x_0 的一个开区间) 有定义, 如果

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

就称 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续, x_0 是 $f(x)$ 的连续点, 否则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 或 x_0 是 $f(x)$ 的间断点. 如果 $f(x)$ 在区间 I 中的任一点连续, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 也称 $f(x)$ 是 I 上的连续函数.

根据上述定义, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的连续性, 取决于 f 在这点附近的值和在这点的值, 这个事实表明 (在一点的) 连续性, 是一种“局部性质”.

如果用“$\varepsilon - \delta$”语言叙述, 就是: 称函数在定义域内的一点 x_0 连续, 如果对于任意给定的正数 ε, 总存在一个 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

从以前的例子可知, $\sin x$, a^x, $\ln x$, x^n 等都是连续函数.

问题 1 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 是否连续?

问题 2 函数 $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 是否连续?

问题 3 函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数} \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$ 有没有连续点?

问题 4 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ 是有理数} \\ 0, & x \text{ 是无理数} \end{cases}$ 有没有连续点?

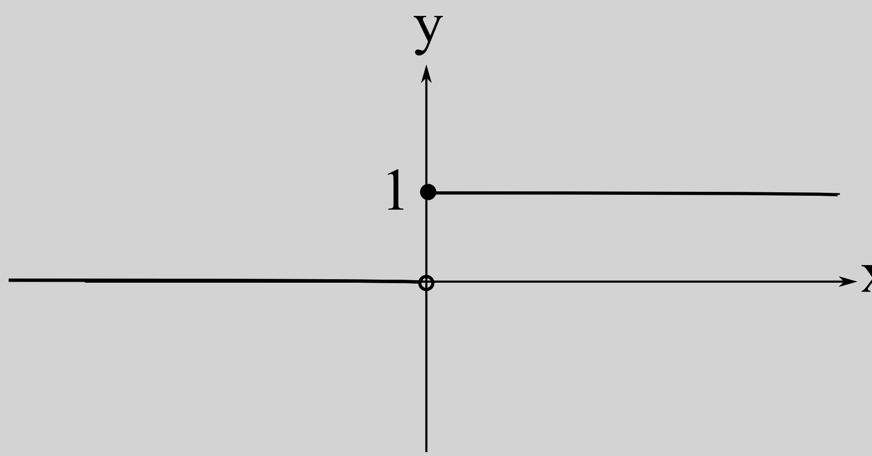
问题 5 能不能构造一个只在 0 和 1 连续的函数?

2.1.2 左(右)连续与间断

定义 2 设 $f(x)$ 在 x_0 的一个邻域内有定义. 如果 $f(x_0+0)=f(x_0)$ 就称 $f(x)$ 在 x_0 右连续; 如果 $f(x_0-0)=f(x_0)$, 就称 $f(x)$ 在 x_0 左连续.

例如下面的函数在 $x=0$ 右连续.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$



$f(x)$ 在 x_0 连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 左连续同时也右连续.

$f(x)$ 在一个包含端点的区间上连续, 是指 $f(x)$ 在区间内部每一点都连续, 并且在端点上有相应的单侧连续性.

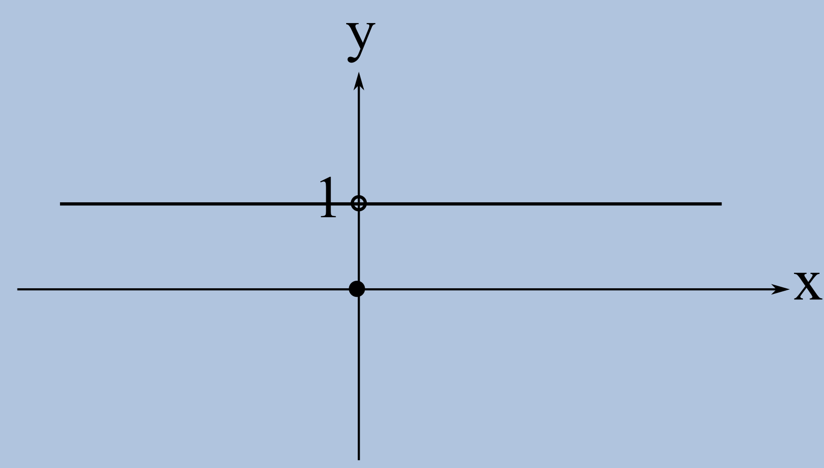
函数在一点 x_0 发生间断会有下列三种方式:

1° (可去间断点) 函数在一点 x_0 左右极限都存在且相等 (所以在这一点有极限), 但不等于 $f(x_0)$, 即,

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0).$$

例如:

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

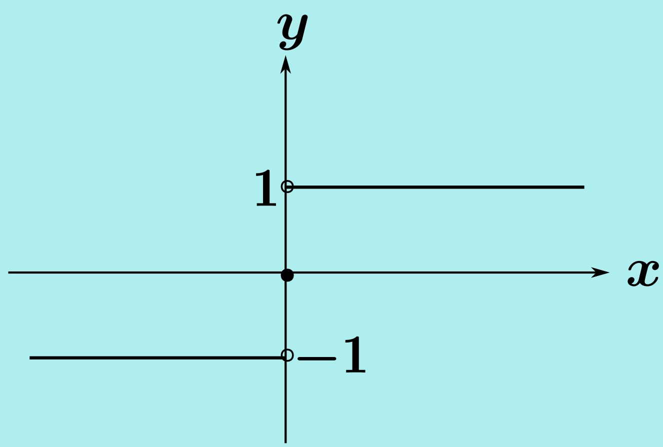


2° (**跳跃点**) 函数在一点 x_0 左右极限都存在, 但是不相等, 即

$$f(x_0+0) \neq f(x_0-0).$$

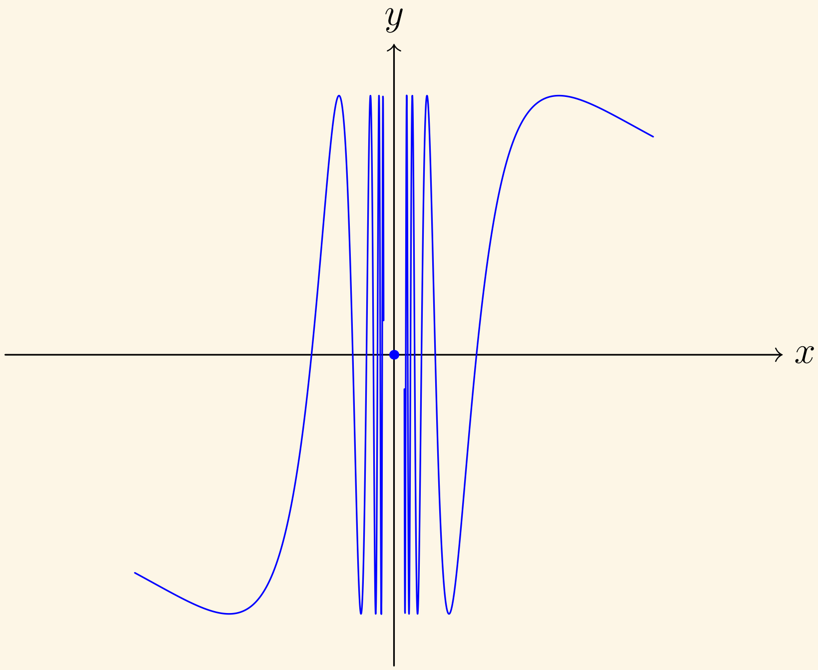
称 $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ 为跳跃度. 例如:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$



3° (第二类间断点) 函数在一点 x_0 左右极限至少有一个不存在. 例如:

$$f(x)=\begin{cases}\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$



显然 $f(x)$ 在定义区间的端点就只有两种间断情况: 可去间断 (在该端点 $f(x)$ 的相应单侧极限存在但与函数值不等) 和第二类间断点 (在该端点 $f(x)$ 的相应单侧极限不存在).

2.1.3 连续函数的运算

性质 1 (**局部有界性**) 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 连续, 则 $f(x)$ 在 x_0 附近有界.

性质 2 (**保号性**) 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 连续且 $f(x_0) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 附近为正.

性质 3 (**连续函数的四则运算**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 x_0 连续, 则函数 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 处也连续 (当然, 对于最后一个函数, 必须假定 $g(x_0) \neq 0$) .

性质 4 (**连续函数的复合**) 设 $u = g(x)$ 在区间 I 上有定义, 函数 $y = f(u)$ 在区间 J 上有定义, 且 $g(I) \subseteq J$. 若 $u = g(x)$ 在 $x_0 \in I$ 连续, $y = f(u)$ 在 $u_0 = g(x_0)$ 处连续 (即 $f(u)$ 在 u_0 连续, $u_0 = g(x_0)$) , 则复合函数 $f(g(x))$ 也在 x_0 连续.

证明 对于任意给定的正数 ε, 因为 f 在 u_0 连续, 则存在一个正数 $\eta > 0$, 使得当 $|u - u_0| < \eta$ 时, 有

$$|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$$

对于上述 $\eta > 0$, 又因为 g 在 x_0 连续, 所以存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|g(x) - g(x_0)| = |u - u_0| < \eta$$

于是, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 从上面两个不等式得到

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| = |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon$$

即函数 $f(g(x))$ 在 x_0 连续. 证毕.

此性质也可以表示为下面形式

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(g(x_0))$$

即在连续的条件下, 可将复合函数的极限运算移到内层函数来运算.

定理 1 设 $y = f(x)$ 是定义在区间 $I = [a, b]$ 上的一个连续函数, 则 f 在 I 上有反函数的充分必要条件是 f 在 I 上严格递增 (减). 当这个条件成立时, f 的反函数 f^{-1} 在其相应的定义域内也是严格递增 (减) 的连续函数.

证明 不妨设 $y = f(x)$ 在 $I = [a, b]$ 上严格单调递增. 所以有反函数 f^{-1}. 以后将说明 f 的值域, 也就是反函数 f^{-1} 的定义域也是一个区间 $J = [f(a), f(b)]$.

1° 先证 f^{-1} 也是严格递增的. 任给 $y_1 < y_2$, 其中 $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. 于是 $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. 如果 $x_2 \leqslant x_1$, 则由 $f(x)$ 的单调性, 就有 $y_2 = f(x_2) \leqslant y_1 = f(x_1)$. 此矛盾说明 $x_1 < x_2$, 故 $f^{-1}(y)$ 为严格单调递增.

2° 现在来证明 $x = f^{-1}(y)$ 在 J 上的连续性. 任取 J 中一点 $y_0 \in (f(a), f(b))$. 则有 $x_0 \in (a, b)$, 使 $y_0 = f(x_0)$. 对任给的满足 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset$

返回 全屏 关闭 退出

I 的正数 ε. 由 $f(x)$ 的单调性可知有

$$y_1 = f(x_0 - \varepsilon) < y_0 = f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon) = y_2.$$

取 $\delta = \min(y_0 - y_1, y_2 - y_0)$. 则当 $|y - y_0| < \delta$ 时, 就有

$$y_1 < y < y_2.$$

由 $f^{-1}(y)$ 的单调性可知, 当 $|y - y_0| < \delta$ 时, 必有

$$f^{-1}(y) > f^{-1}(y_1) = x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_0) - \varepsilon$$

及

$$f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon = f^{-1}(y_0) + \varepsilon.$$

即当 $|y - y_0| < \delta$ 时,

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon.$$

故 $f^{-1}(y)$ 在 y_0 连续, 由 y_0 的任意性 $f^{-1}(y)$ 在 $(f(a), f(b))$ 连续.

至于 $f^{-1}(y)$ 在端点的单侧连续性则用上述方法类似可证. 证毕.

例 1 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 且满足方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \tag{2.1}$$

其中 x, y 是任意实数. 求 $f(x)$.

解 在方程中令 $x=y$ 得 $f(2x)=2f(x)$, 用归纳法可以证明对任意自然数 n 有

$$f(nx)=nf(x). \tag{2.2}$$

将此式中的 x 换成 $\frac{x}{n}$ 得

$$f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x). \tag{2.3}$$

于是对任意自然数 m 和 n 有

$$f\left(\frac{n}{m}x\right)=\frac{n}{m}f(x). \tag{2.4}$$

因而对任意正有理数 r 有

$$f(rx)=rf(x). \tag{2.5}$$

从 $f(2x) = 2f(x)$ 可得 $f(0) = 0$. 在原方程中令 $y = -x$ 可得 $f(-x) = -f(x)$. 于是上面的式子对任意负有理数 r 也成立. 对于任意实数 x, 取有理数列 $\{r_n\}$ 收敛于 x. 因为

$$f(r_n) = r_n f(1),$$

令 $n \to \infty$ 根据 f 的连续性得

$$f(x) = ax,$$

其中 $a = f(1)$ 是常数.

2.1.4 初等函数的连续性

定理 2 (**初等函数的连续性**) 所有初等函数在其定义区间内出处连续.

证明 已证明了 $\sin x$, a^x, $\ln x$ 的连续性. 因为

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \ \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \ \csc x = \frac{1}{\sin x},$$

所以三角函数是连续的, 根据反函数连续性定理可知, 反三角函数也是连续的. 对于一般的幂函数 x^a 由于

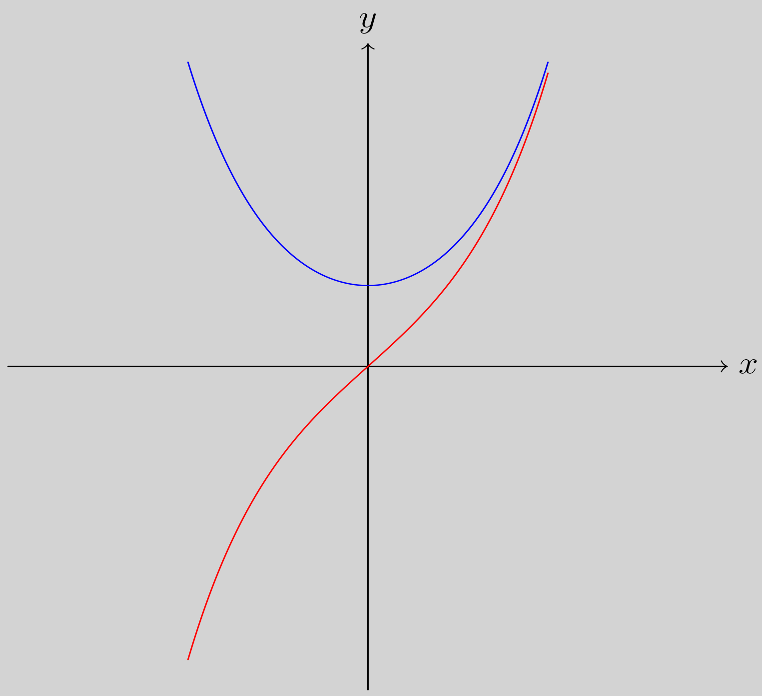
$$x^a = e^{a \ln x},$$

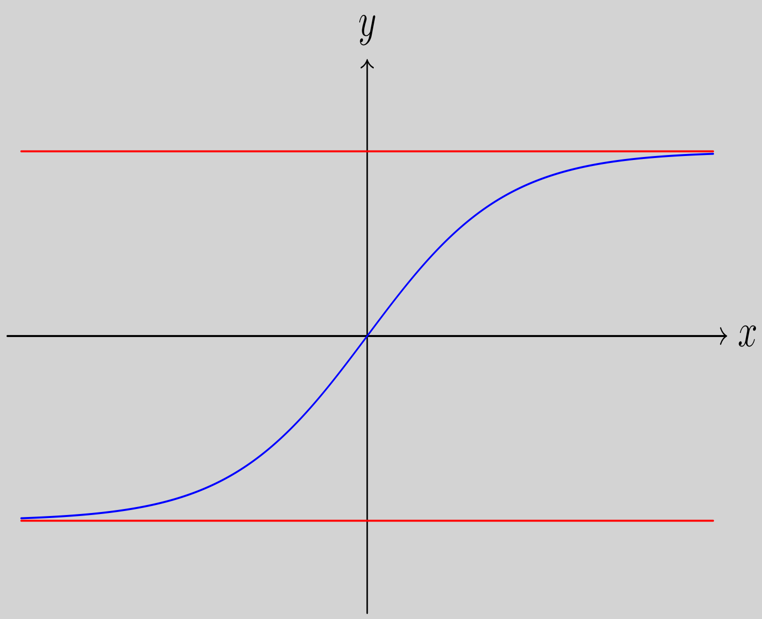
根据复合函数定理及指数函数的连续性可知 x^a 也是连续的. 最后根据连续函数的四则运算定理即知, 一切初等函数都连续.

例 2 (双曲函数) 函数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

分别称为双曲正弦、双曲余弦、双曲正切, 统称为双曲函数.





双曲函数的性质:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y,$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$\sinh x$ 的反函数: $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (-\infty < x < +\infty)$

$\cosh x$ 的反函数: $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x \geqslant 1)$

$\tanh x$ 的反函数: $y = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$