第九次习题课

王沛林

Question 1. 设 G 为有限交换 p-群，若 G 只有一个 p 阶子群，则 G 为循环群。

Proof. 设 G 的初等因子组为 $\{p^{k_1}, p^{k_2}, \cdots, p^{k_s}\}$，则有

$$G \cong C_{t_1} \times C_{t_2} \times \cdots C_{t_s}$$

其中 $C_{t_i} =< a_i >$ 为 $t_i = p^{k_i}$ 阶循环群，即 $|a_i| = p^{k_i}$。

若 $s > 1$，有 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 互异，有

$$H_1 =< a_1^{p^{k_1-1}} >, H_2 =< a_2^{p^{k_2-1}} >$$

为 G 的两个不同的 p 阶子群，矛盾。即 $s = 1$，G 为循环群。 □

Question 2. 设 G 为有限交换 p-群，若 G 只有一个指数为 p 的子群，则 G 为循环群。

Proof. 假设仍如上题，若 $s > 1$，则循环群 $C_{t_1} =< a_1 >, C_{t_2} =< a_2 >$ 均有唯一指数为 p 的子群 $K_1 =< a_1^p >, K_3 =< a_2^p >$，则

$$G_1 = K_1 \times C_{t_2} \times \cdots C_{t_s}, G_2 = C_{t_1} \times K_2 \times \cdots C_{t_s}$$

是 G 的两个指数为 p 的子群，矛盾。即 $s = 1$，G 为循环群。 □

Lemma 0.1. 设 G 为阶大于 1 的有限 p-群，则 G 的中心 C 阶大于 1。

Proof. 设 $|G| = p^m$，将 G 分解为共轭元素类的并，有

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_t, G_i \cap G_j = \emptyset, i \neq j$$

其中 $G_1 = \{e\}$。由于 $|G_i|$ 都是 p^m 的因子，都为 1 或 p 的次方，又由

$$|G_1| + |G_2| + \cdots + |G_t| = p^m,$$

且 $|G_1| = 1$，至少存在一个 r，使得 $|G_r| = 1$，即 $|G_r|$ 只含一个元素 $a \neq e$，即 $a \in C$，从而 $|C| > 1$。 □

Question 3. 设 G 为有限 p-群，若 G 只有一个指数为 p 的子群，则 G 为循环群。

Date: 2023 年 5 月 20 日.

Proof. 设 $|G| = p^n$，对 n 做归纳。

当 $k = 1$ 时结论显然，设对 $k < n$ 时结论成立，下证当 $k = n$ 时结论成立。

设 C 是 G 的中心，由引理，$|C| > 1$，从而 $|G/C| < p^n$。由 $[G/C : H/C] = p \Leftrightarrow [G : H] = p$，从而由 G 只有一个指数为 p 的子群，有 G/C 只有一个指数为 p 的子群，由归纳假设 G/C 为循环群，从而 G 为交换群 (第四次作业 11)，由上题，G 为循环群。

□

Question 4. 对于下列情形，各给一个例子。
(1) 既无左单位元也无右单位元。
(2) 只有左单位元，无右单位元。
(3) 只有右单位元，无左单位元。

Proof. (1) 全体偶数 $2\mathbb{Z}$ 对数的加法和乘法构成环，但这个环既无左单位元也无右单位元。

(2) 设 $\mathbb{F}$ 是一个数域，则 $R = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{F}\}$ 对于矩阵加法和乘法构成环，且 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 都是左单位元。

设 $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为右单位元，则由

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

分别得 $x = 1, y = 0$，$x = 1, y = 1$，矛盾。

(3) 类似的，方阵环 $R = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} |a, b \in \mathbb{F}\}$ 对于矩阵加法和乘法构成环，且 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$ 都是右单位元，但无左单位元。 □

Question 5. 对于下列情形，各给一个例子。
(1) 环 R 有单位元，但一个子环 S 无单位元。
(2) 环 R 无单位元，但一个子环 S 有单位元。
(3) 环 R 及其一子环有单位元，但单位元不同。

Proof. (1) 整数环 $\mathbb{Z}$ 有单位元，但其子环 $2\mathbb{Z}$ 无单位元。

(2) 由一切方阵 $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 构成的矩阵环无单位元，但由一切矩阵 $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 构成的子环有单位元 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。其中 x, y 属于数域 $\mathbb{F}$。

(3) 令 $R=\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}|a,b,c,d\in\mathbb{Z}\}$，则 R 有单位元 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。而 R 的子环 $S=\{\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}|a\in\mathbb{Z}\}$，有单位元 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 且二者单位元不同。 □

Question 6. 设 S 是环 R 的一个子环，若 R 与 S 都有单位元且不相等，则 S 的单位元为 R 的一个零因子。

Proof. 用 e,e' 分别表示 R,S 的单位元，且 $e\neq e'$。由 $e'e=e', e'e'=e'$，

$$e'(e-e')=e'e-e'e'=e'-e'=0,$$

其中 $e-e'\neq 0$，从而 e' 为 R 的一个左零因子。 □

Question 7. 设 R 是一个无零因子环。
(1) R 中非零幂等元是 R 的单位元。
(2) 若 R 中有单位元，则元素 $a\neq 0$ 的右逆元也是左逆元。

Proof. (1) 设 e 是 R 的一个非零幂等元，则对任意 $x\in R$，有

$$e(ex-x)=e^2x-ex=0$$

但 $e\neq 0$，R 无零因子，即 $ex-x=0$，e 为单位元。

(2) 设 R 的单位元为 e。若 $R=\{0\}$，结论显然。若 $R\neq\{0\}$，设 $0\neq a\in R$，且 $aa'=e$。由 $R\neq\{0\}$，有 $e\neq 0$，从而 $a'\neq 0$，且

$$(a'a-e)a'=a'(aa')-a'=0,$$

但 R 无零因子，从而 $a'a-e=0$，即 a 的右逆元也为左逆元。 □