实分析期末复习

王一多

2023年7月6日

注:以下均省略几乎处处

1 测度论

1.1 课本中需要掌握的定理证明

1.证明可数集是零测集

2.证明外侧度的次可数可加性,即若$E=\cup_{j=1}^{\infty}E_j$,则$m_*(E)\leq\sum_{j=1}^{\infty}m_*(E_j)$

3.证明可测集的可数并可测

4.若E_j是一列可测集,如果$E_j\nearrow E$,证明$m(E)=\lim_{n\to\infty}m(E_n)$

5.证明可测集的定义等价于对任意$\varepsilon>0$,存在一个闭集$F\subset E$,并且$m(E-F)\leq\varepsilon$

6.证明不可测集合存在,并证明其任意可测子集都是零测集

7.用Egorov定理证明Lusin定理

8.如果E可测,证明存在一个G_δ集G满足$E\subset G$并且$m(G-E)=0$

1.2 课后习题

1.证明康托集是完全不连通以及完美的

2.给定一个紧集E,定义$O_n=(x|d(x,E)<\frac{1}{n})$,证明

$$m(E)=\lim_{n\to\infty}m(O_n)$$

,并举出E不紧时的反例

3.证明闭集是G_δ集

4.证明Borel-Cantelli引理

5.证明开集加开集是开集,闭集加闭集是可测集

6.举出两个零测集相加不是零测集的例子

7.令m表示R上的lebesgue测度,A $\subset R$是Lebesgue可测集,假设对于所有的实数$a < b$,

$$m(A \cap [a, b]) < \frac{b-a}{2}.$$

证明m(A)=0.

8.f_n是一列定义在$[0,1]$上几乎处处有限的可测函数,证明存在一列数c_n使得

$$\frac{f_n(x)}{c_n} \to 0$$

1.3 其他

1.设$E_1, E_2 ... E_k$是$[0,1]$上的可测集,并且有$\sum_{i=1}^{k} m(E_i) > k-1$,证明$m(\cap_{i=1}^{k} E_i) > 0$

2.设E_k是$[0,1]$中的可测集列,$m(E_k) = 1$,证明$m(\cap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1$

3.给定R上一个可测集E,则证明对任意$0 < a < m(E)$,存在E中的有界闭集F使得$m(F) = a$

4.给定一个正测集E,证明对任意$a > 0$,存在区间I使得$m(E \cap I) > am(I)$

5.对于任意R上可测集A,证明$A - A$包含带原点的一段区间

6.给一个有限测度的可测集A,以及几乎处处有限并且几乎处处大于0的可测函数f,证明对任意$m(A) > \delta > 0$,存在$B \subset A$以及正整数k使得

$$m(A - B) < \delta, \frac{1}{k} < f(x) < k, x \in B$$

7.作一个在任意开区间上都不连续的单调函数

8.给一个定义在$(0,1)$上的可测函数f,证明存在数列h_n,使得

$$h_n \to 0, \lim_{n \to \infty} f(x + h_n) = f(x)$$

9..给一个定义在$[0,1]$上的可测函数f,$E \subset (x|f'(x) exists)$,如果$m(E) = 0$,证明$m(f(E)) = 0$

10.A是一个正测集,证明存在$x, y \in A$,使得$x - y$是有理数

11.设R上实值函数f满足

$$|f(x) - f(y)| \leq e^{|x|+|y|}|x - y|, x, y \in R$$

证明f把零测集映到零测集

2 积分论

2.1 课本中需要掌握的定理证明

1.证明有界收敛定理

2.证明控制收敛定理

3.若f是R^d上的可积函数,则对于任意$\varepsilon > 0$,证明

(1)存在一个有限测度球B,使得

$$\int_{B^c} |f| < \varepsilon$$

(2)存在$\delta > 0$

$$\int_E |f| < \varepsilon, m(E) < \delta$$

4.若f是R^d上的可积函数,证明当$h \to 0$时,有$|f_h - f|_{L_1} \to 0$

5.Fubini部分的证明不作太多要求,大家自己看书复习吧

2.2 课后习题

1.stein chapter2 exercise4

2..stein chapter2 exercise6

3.stein chapter2 exercise9

4.stein chapter2 exercise11

5.stein chapter2 exercise13

6.stein chapter2 exercise19

2.3 其他

1.两个有紧支集的可积函数复合后是否可积?

2.E是一个有限测度的可测集,证明E上的可测函数可积等价于

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(x \in E | f(x) \geq n)$$

收敛

3.E是有限测度的可测集,f, g是E上的可积函数,并且在E上的积分相同,证明下式至少有一个成立

(1)$f = g$

(2)存在E的子集M, f在M上的积分大于g在M上的积分

4.f是R上定义在$[0,1]$上的正可测函数,$0 < a < 1$,证明对$[0,1]$的任意满足$m(E) > a$的可测子集E,有

$$inf(\int_E f) > 0$$

5.设$f \in L^1(R)$.计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_R f(x-n)\frac{x}{1+|x|}dx$$

6.设f和g是(0,1)上的非负实值可测函数,满足对任意的$\alpha > 0$都有$m(x \in (0,1) : f(x) > \alpha) = m(x \in (0,1) : g(x) > \alpha)$,证明

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$$

7.设$E \subset R$可测,m(E)> 0,令

$$f(x) = \int_R \chi_E(tx)\chi_E(t)dt$$

证明f在x=1处连续

8.设B是R^d中的单位球,f_n:→R是一列可测函数,而且满足(a)f_n几乎处处收敛于函数f;(b)$||f_n||_{L^2(B)} \leq 1$对于任意的n;求证:

$$\lim_{n\to\infty}\int_B f_n = \int_B f.$$

9.设$E \subset R, 0 < m(E) < \infty$,$f$(x)在R上非负可测,证明$f \in L^1(R)$当且仅当g(x)=$\int_E f(x-t)dt$在R上可积

10. f_n是R上一列可积函数,如果存在可积函数f使

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t) - f(t)dt \leq \frac{1}{n^2}$$

则$f_n \to f$

11.设$f_n \geq 0 \in L^p(R)$,证明$f_n \to f(L^p)$当且仅当$f_n^p \to f^p(L^1)$

12.$f_n \to f, |f_n|_p \to |f|_p$,证明

$$|f_n - f|_p \to 0$$

13.$f \in L^2(0,1), F(x) = \int_0^x f(x)dx$,证明对任意$0 < h < 1$,存在c使得

$$(\int_0^{1-h}|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}|^2dx)^{\frac{1}{2}} \leq c|f|_2$$

3 微分论

3.1 课本中需要掌握的定理证明

1.f是R^d上的可积函数,证明对任意$a>0$,

$$m((x\in R^d|f^*(x)>a))\leq \frac{3^d}{a}|f|_{L^1(R^d)}$$

2.f局部可积,证明Mf下半连续

3..f是R^d上的可积函数,证明

$$\lim_{m(B)\to 0,x\in B}\frac{\int_B f(y)dy}{m(B)}=f(x)$$

4.有界变差函数处的证明不要求掌握,大家自己对着书复习看一下吧

5.f单增连续,证明

$$\int_a^b f'(x)dx\leq f(b)-f(a)$$

并给出不取等的例子

3.2 课后习题

1.stein chapter3 exercise4

2.stein chapter3 exercise7

3.stein chapter3 exercise11

4.stein chapter3 exercise15

5.stein chapter3 exercise16

6.stein chapter3 exercise32

3.3 其它

1.证明定义在区间$[0,1]$的函数f李普希兹连续等价于存在一列连续的可微函数f_n满足$(1)|f_n'(x)|\leq M(2)f_n\to f$

2.f_n是一列定义在区间$[0,1]$的绝对连续函数,并且$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$对任意x收敛且$\int_0^1(\sum_{n=1}^{\infty}|f_n'(x)|)dx<\infty$,证明f绝对连续

3.对R的每一个开区间I,f在I上绝对连续,假设f,f'都是可积函数,证明

$$\lim_{|x|\to\infty}f(x)\to 0,\int_R f'=0$$

4.f_n是一列定义在区间$[0,1]$的绝对连续函数,,$f_n(0)=0$,如果f_n'是Cauchy(L^1),证明存在f绝对连续,且$f_n\to f$是一致的

5.举出有界变差函数导数恒为0,但不是常值函数的例子

6.若f在R上绝对连续,且$f\in L^1(R)$.如果

$$\lim_{t\to 0}\int_R|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}|dx=0$$

证明:$f=0$

7.f_k是一列定义在(0,1)上的单增函数,且$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=1,x\in(0,1)$,证明

$$\liminf_{k\to\infty}f_k'(x)=0$$

8.设f_n是定义在$[a,b]$上的单调增的绝对连续函数,如果函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n$在$[a,b]$上点点收敛到f,求证:f也是绝对连续的