第七章 Fourier变换方法

宁吴庆

中国科学技术大学数学科学学院

Fourier积分

设函数$f(x)$在$[-l,l]$上满足Dirichlet定理的条件，令 $\lambda_n = n\omega = \frac{n\pi}{l}$，$\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1} = \frac{\pi}{l}$，则利用Fourier级数的复数形式并令$l \to +\infty$，有

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{l\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{\mathrm{i}n\omega x} = \lim_{l\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(\xi) e^{-\mathrm{i}n\omega\xi} \mathrm{d}\xi e^{\mathrm{i}n\omega x} \\ &= \lim_{l\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{l}{\pi} \cdot \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(\xi) e^{-\mathrm{i}\lambda_n\xi} \mathrm{d}\xi e^{\mathrm{i}\lambda_n x} \cdot \Delta\lambda_n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\mathrm{i}\lambda\xi} \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

最后的积分称为$f(x)$的**Fourier积分**．于是可以得到下面的Fourier定理．

Fourier积分

- **Fourier定理**: 若函数$f(x)$在$\mathbb{R}$的任何有限区间上分段可微且在$\mathbb{R}$上绝对可积, 则对$\forall x \in \mathbb{R}$成立

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

若$f(x)$在x连续, 则有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi.$$

注: (1) 严格证明详见常庚哲, 史济怀《数学分析教程》下册第12 章.
(2) 最后的等式实际上就是**Fourier变换的反演公式**: 先作Fourier变换, 再作Fourier逆变换.
(3) 为保证定理中的广义积分收敛就加了绝对可积的条件.

Fourier变换

设连续函数$f(x)$在$\mathbb{R}$的任何有限区间上分段可微且在$\mathbb{R}$上绝对可积.

- **Fourier变换与Fourier逆变换**: 在Fourier积分公式中令

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi,$$

则称$F(\lambda)$为$f(x)$的**Fourier变换**或**像函数**, 常记为$\widehat{f}(\lambda)$或$F[f](\lambda)$.

由Fourier定理知

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda,$$

则称$f(x)$为$F(\lambda)$的**Fourier逆变换**或**像原函数**, 常记为$\check{F}(x)$或$F^{-1}[F](x)$.

Fourier变换

- **Fourier变换的基本性质**: 设$f(x), g(x)$在$\mathbb{R}$上有Fourier变换.
  1. **线性**: $F[c_1 f + c_2 g] = c_1 F[f] + c_2 F[g]$, c_1, c_2为任意常数.
  2. **频移**: $F[f(x)e^{-\mathrm{i}\lambda_0 x}](\lambda) = F[f](\lambda + \lambda_0)$, λ_0: 任意实数.
  3. **微分**: 若 $\lim\limits_{|x|\to\infty} f^{(m)}(x) = 0$, $f^{(m)}(x)$有Fourier变换, $0 \leqslant m \leqslant k$, 则 $F[f^{(k)}(x)] = (\mathrm{i}\lambda)^k F[f(x)]$.
  4. **幂乘**: 若$xf(x)$有Fourier变换, 则 $F[xf(x)] = i\dfrac{\mathrm{d}F[f](\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$.
  5. **卷积**: 若$f(x), g(x)$在$\mathbb{R}$上绝对可积, $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$, 则 $F[f * g] = F[f]F[g]$.
  6. **Parseval等式**: 若$f(x)$在$\mathbb{R}$上可积且平方可积, 则
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 \mathrm{d}\lambda.$$

注：性质1、性质2和性质4可直接从定义证明. 下面证明性质3、性质5和性质6.

性质3(微分)的证明: 仅证明$k=1$情形(一般情形可用归纳法证明). 由条件和分部积分有

$$F[f'(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\lambda F[f(x)].$$

性质5(卷积)的证明: 由条件知以下重积分可交换顺序, 故得

$$\begin{aligned}
F[f*g] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t\Big]e^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-\mathrm{i}\lambda(y+t)}\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-\mathrm{i}\lambda y}\mathrm{d}y = F[f]F[g].
\end{aligned}$$

性质6(Parseval等式)的证明: 令$g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$, 则有

$$\begin{aligned}
F[g]&=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)e^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\Big]e^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)e^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-\mathrm{i}\lambda(y-t)}\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{\mathrm{i}\lambda t}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)e^{-\mathrm{i}\lambda y}\mathrm{d}y\\
&=\overline{F(\lambda)}F(\lambda)=|F(\lambda)|^2.
\end{aligned}$$

由Fourier逆变换公式有

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F[g](\lambda)e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda.$$

于是令$x=0$得 $g(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\lambda)|^2\mathrm{d}\lambda.$

Fourier变换的应用例子

求解一维波动方程初值问题
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \end{cases}$$
其中$\varphi(x), \psi(x)$在$\mathbb{R}$上绝对可积，常数$c > 0$.

Fourier变换的应用例子

求解一维波动方程初值问题 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), \end{cases}$

其中$\varphi(x), \psi(x)$在$\mathbb{R}$上绝对可积，常数$c > 0$.

解：对空间变量x作Fourier变换，令 $\widehat{u} = \widehat{u}(\lambda, t) = F[u(x,t)]$, $\widehat{\varphi}(\lambda) = F[\varphi(x)](\lambda)$, $\widehat{\psi}(\lambda) = F[\psi(x)](\lambda)$, 则由Fourier变换的性质有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 \widehat{u}}{\mathrm{d}t^2} - c^2 (\mathrm{i}\lambda)^2 \widehat{u} = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ \widehat{u}(\lambda, 0) = \widehat{\varphi}(\lambda), \dfrac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}t}(\lambda, 0) = \widehat{\psi}(\lambda). \end{cases}$$

二阶常系数常微分方程的通解为 $\widehat{u}(\lambda, t) = A(\lambda) e^{\mathrm{i}c\lambda t} + B(\lambda) e^{-\mathrm{i}c\lambda t}$, 代入初始条件得 $A(\lambda) = \dfrac{1}{2}\left[\widehat{\varphi}(\lambda) + \dfrac{\widehat{\psi}(\lambda)}{\mathrm{i}c\lambda}\right]$, $B(\lambda) = \dfrac{1}{2}\left[\widehat{\varphi}(\lambda) - \dfrac{\widehat{\psi}(\lambda)}{\mathrm{i}c\lambda}\right]$.

于是由Euler公式有

$$\begin{aligned}\hat{u}(\lambda,t) &= \frac{1}{2}\left[\hat{\varphi}(\lambda)+\frac{\hat{\psi}(\lambda)}{\mathrm{i}c\lambda}\right]e^{\mathrm{i}a\lambda t}+\frac{1}{2}\left[\hat{\varphi}(\lambda)-\frac{\hat{\psi}(\lambda)}{\mathrm{i}c\lambda}\right]e^{-\mathrm{i}a\lambda t}\\ &= \hat{\varphi}(\lambda)\cos c\lambda t+\frac{\hat{\psi}(\lambda)}{c\lambda}\sin c\lambda t.\end{aligned}$$

所以由Fourier变换的反演公式知初值问题的解为

$$\begin{aligned}u(x,t) &= F^{-1}[\hat{u}(\lambda,t)] = F^{-1}[\hat{\varphi}(\lambda)\cos c\lambda t+\frac{\hat{\psi}(\lambda)}{c\lambda}\sin c\lambda t]\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\lambda)\cos c\lambda t e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda+\frac{1}{2c\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{\psi}(\lambda)}{\lambda}\sin c\lambda t e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\lambda)(e^{\mathrm{i}c\lambda t}+e^{-\mathrm{i}c\lambda t})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\\ &\quad+\frac{1}{4c\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{\psi}(\lambda)}{\lambda}(e^{\mathrm{i}c\lambda t}-e^{-\mathrm{i}c\lambda t})e^{\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\varphi}(\lambda)\left[e^{\mathrm{i}\lambda(x+ct)}+e^{\mathrm{i}\lambda(x-ct)}\right]\mathrm{d}\lambda \\
&\qquad + \frac{1}{4c\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widehat{\psi}(\lambda)}{\mathrm{i}\lambda}\left[e^{\mathrm{i}\lambda(x+ct)}-e^{\mathrm{i}\lambda(x-ct)}\right]\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{4c\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\psi}(\lambda)\mathrm{d}\lambda\int_{x-ct}^{x+ct}e^{\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{4c\pi}\int_{x-ct}^{x+ct}\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\psi}(\lambda)e^{\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}
$$

注：上式称为一维波动方程初值问题解的“d’Alembert 公式”，也称为弦自由振动问题的行波解. 数理方程中常用行波法(换元法)求解.