作业

4.3

1. 令 $F(z)=\begin{cases}(z-a)f(z) & (z\neq a)\\ 0 & (z=a)\end{cases}$，则由条件，$F$ 在 $D\setminus\{a\}$ 上全纯，

且在 a 处连续，对 D 中任一简单闭曲线 γ，若 a 在 γ 外或在 γ 上，

由 Cauchy 积分定理：$\int_\gamma F(z)dz=0$；若 a 在 γ 内，那么 $\exists\,\varepsilon>0$, s.t.

$B(a,\varepsilon)$ 在 γ 内，由 Cauchy 积分定理：$\int_\gamma F(z)dz=\int_{\partial B(a,\varepsilon)} F(z)dz$

由于 F 连续知 给定 ε_0 有 F 在 $B(a,\varepsilon_0)$ 上有界，设为 M

令 $\varepsilon\leq\varepsilon_0$ $\left|\int_{\partial B(a,\varepsilon)} F(z)dz\right|\leq M\int_{\partial B(a,\varepsilon)}|dz|=2\pi M\varepsilon$，令 $\varepsilon\to0$ 知：

$\int_\gamma F(z)dz=0$，由 Morera 定理：F 在 D 上全纯

现重定义 $f(a)=F'(a)$，则由前习题知 现在的 f 全纯

3. (1) $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$，$|e^z-1|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}-1$

而 $e^{|z|}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=|z|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{(n+1)!}\leq|z|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=|z|e^{|z|}$

(2) $\left|\frac{e^z-1}{z}\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}\right|\begin{cases}\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{(n+1)!}<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=e-1\\ \geq1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z|^n}{(n+1)!}>1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}=3-e\end{cases}$

5. (1) 存在，$f(z)=\frac{1}{1+z}\in H(B(0,1))$ 符合

(2) 不存在，$f(z)$ 有一族零点 $\{\frac{1}{2n}\}$ 趋于0，知 $f(0)=0$ (连续性)

由零点孤立性知 $f(z)\equiv0$，这与 $f(\frac{1}{2n-1})=1$ 矛盾

(3) 存在，$f(z)=z^2\in H(B(0,1))$ 符合

(4) 不存在，类似(2)知 $f(z)=z^3$，这与 $f(-\frac{1}{n})=\frac{1}{n^3}$ 矛盾

12. $\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \Rightarrow 1=(1-z-z^2)(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n)$

比较系数即证

4.4

1. $g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $D\setminus\bigcup_{k=1}^{n}B(z_i,\varepsilon)$ 上全纯，令 ε 充分小使 $B(z_i,\varepsilon)$ 互不相交

此时由Cauchy积分公式：$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial B(z_i,\varepsilon)}g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$

在 $\partial B(z_i,\varepsilon)$ 上 $\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{[(z-z_i)^{k_i}h_i(z)]'}{(z-z_i)^{k_i}h_i(z)}=\frac{h_i'(z)}{h_i(z)}+\frac{k_i}{z-z_i}$

$\left(h_i(z)=\frac{f(z)}{(z-z_i)^{k_i}}\right)$

而 $\frac{h_i'(z)}{h_i(z)}g(z)$ 在 $B(z_i,\varepsilon)$ 内全纯，在 $\partial B(z_i,\varepsilon)$ 上积分为0

$\Rightarrow$ 原式 $=\frac{1}{2\pi i}\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial B(z_i,\varepsilon)}\frac{k_i g(z)}{(z-z_i)}dz=\sum_{i=1}^{n}k_i g(z_i)$ (Cauchy积分定理

设 $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$，当 $|z|>R=\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|+1$ 时，

5. $|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|\leq\sum_{i=0}^{n-1}|a_i||z|^i\leq|z|^{n-1}(R-1)<R|z|^{n-1}\leq|z^n|$

$\Rightarrow p(z)$ 在 $\partial B(0,R)$ 外无根

此时令 $g(z)=z^n \Rightarrow |p(z)-g(z)|<|g(z)|$ 在 $\partial B(0,R)$ 上成立

且 g 在 $\partial B(0,R)$ 上无零点，由Rouché知 $p(z)$ 在 $B(0,R)$ 内根数与 $g(z)$ 在 $B(0,R)$ 内根数 n 一样，证毕

3. 取 $\gamma_R=\{(0,y)\,|\,|y|\leq R\}\cup\{z\,|\,|z|=R,\ \mathrm{Re}z\geq0\}$，$R>\lambda+1$

当 z 在右半平面内且在 γ_R 外内，$|z-\lambda|\geq R-\lambda>1\geq|e^{-z}|=e^{-\mathrm{Re}(z)}$

$\Rightarrow f(z)=z-\lambda-e^{-z}$ 在 γ_R 外无根

令 $g(z)=z-\lambda \Rightarrow$ on γ_R，$|f(z)-g(z)|=|e^{-z}|\leq1<|z-\lambda|=|g(z)|$

而 $g(z)$ 在 γ_R 内仅 $z=\lambda$ 一根，由Rouché知 $f(z)$ 仅有 γ_R 内一根

而容易知道 $x=\lambda-e^{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上确有一根，证毕

6. 当 $|z|<1$ 时，$\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)z^{i}=\frac{1}{(1-z)^{2}}$

该级数的收敛半径为 1，则该级数在 $B(0,1)$ 内一致收敛

结合 Hurwitz 定理及 $\frac{1}{(1-z)^2}$ 在 $B(0,1)$ 内全纯 $\Rightarrow \exists N, \forall n\geq N$,

$\sum_{i=0}^{n}(i+1)z^{i}$ 在 $B(0,1)$ 中零点个数与 $f(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ 相同

而 f 在 $B(0,1)$ 内无根，证毕

11. 统一设各问中函数为 $f(z)$

(1) $g(z)=-8z$，$|f(z)-g(z)|=|z^{9}-2z^{6}+z^{2}-2|\leq 6<8=|g(z)|$

$g(z)$ 在 $B(0,1)$ 中一根

(2) $g(z)=8$，$|f(z)-g(z)|=|2z^{5}-z^{3}+3z^{2}-z|\leq 7<8=|g(z)|$

$g(z)$ 在 $B(0,1)$ 中无根

(3) $g(z)=-5z^{4}$，$|f(z)-g(z)|=|z^{7}+z^{2}-2|\leq 4<5=|g(z)|$

$g(z)$ 在 $B(0,1)$ 中四根

(4) $g(z)=-4z^{n}$，$|f(z)-g(z)|=|e^{z}+1|\leq e^{|z|}+1=e+1<4=|g(z)|$

$g(z)$ 在 $B(0,1)$ 中 n 根

12. 令 $g(z)=f(z)-z$，$h(z)=-z$，则在 $\partial B(0,1)$ 上 $|g(z)-h(z)|=|f(z)|<1$

$=|h(z)|$，而 $h(z)$ 在 $B(0,1)$ 内仅一根知结论成立

4.5

3. 令 $f(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$，则 $|f(0)|>1$

现在，$\overline{B(0,1)}$ 为紧集 $\Rightarrow |f(z)|$ 在 $\overline{B(0,1)}$ 能取到最大值

结合最大模定理知：$\exists z_0\in\partial B(0,1)$，使 $|f(z_0)|\geq|f(z)|$ $(\forall z\in\overline{B(0,1)})$

$\Rightarrow |f(z_0)|\geq|f(0)|>1 \quad \Rightarrow \prod_{k=1}^{n}|z_0-z_k|>1$

4. 同3知 $\max\limits_{|z|\leq r}|f(z)|=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$

$\Rightarrow \max\limits_{|z|=r_1}|f(z)|\leq\max\limits_{|z|\leq r_2}|f(z)|=\max\limits_{|z|=r_2}|f(z)|$ （若 $0\leq r_1\leq r_2<R$）

$\Rightarrow M(r_1)\leq M(r_2)$，证毕

7. 对 $\frac{1}{f(z)}$ 使用最大模原理即证

补充题：4.4.13