$= E[X(X-1)\cdots(X-n+1)]$

三. 常见分布的母函数.

(1) $X\sim B(n,p)$, $p_k=C_n^k p^k q^{n-k}$, $k=0,\cdots,n$ $\quad G_X(s)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}\cdot s^k=(ps+q)^n$

(2) $X\sim G(p)$ $\quad p_k=q^{k-1}p$, $k=1,2,\cdots$ $\quad G_X(s)=\sum_{k=0}^{n} q^{k-1}ps^k=\frac{ps}{1-qs}$

(3) $X\sim P(\lambda)$ $\quad p_k=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad G_X(s)=\sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}s^k=e^{-\lambda+\lambda s}$

四. 独立随机变量的和

$X_1,\cdots,X_n$ 取非负整数值. 相互独立. $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$, X_i 母函数 $G_i(s)$, 则 $G_Y(s)=\prod_{i=1}^{n}G_i(s)$

证: $G_i(s)=\sum_k s^k P(X_i=k)=E[s^{X_i}]$

$G_Y(s)=E[s^Y]=E[s^{X_1+\cdots+X_n}]=\prod_{i=1}^{n}E(s^{X_i})=\prod_{i=1}^{n}G_i(s)$

例: 掷5颗骰子, 求点数和为15的概率.

解: X_i 第 i 颗骰子点数. X_i, $i=1,2,3,4,5$ 相互独立.

$Y=\sum_{i=1}^{5}X_i$ $\quad G_i(s)=\frac{1}{6}(s+s^2+\cdots+s^6)=\frac{1}{6}\cdot\frac{s(1-s^6)}{1-s}$

$G_Y(s)=\frac{1}{6^5}s^5(1-s^6)^5(1-s)^{-5}$

$=\frac{1}{6^5}s^5(1-5s^6+10s^{12}\cdots)(\sum_{k=0}^{\infty}C_{-5}^k(-s)^k)$

s^{15} 系数为 $\frac{1}{6^5}(C_{-5}^{10}\cdot(-1)^{10}-5C_{-5}^{4})$ $\quad P(Y=15)=s^{15}$ 系数

hw 3.7.8, 5.1.1 (a)(b), 5.1.2, 5.1.4

随机个独立同分布 r.v. 之和. $X_1,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布. 取非负整数值.

N 与 X_i 独立. 取正整数值. $Y=\sum_{i=1}^{N}X_i$. 求 $G_Y(s)$.

$G_Y(s)=\sum_y s^y P(Y=y)=E[s^Y]\overset{\text{重期望公式}}{=}E(E[s^Y|N])=\sum_n E[s^Y|N=n]\cdot P(N=n)$

$=\sum_n E[s^{X_1+\cdots+X_n}|N=n]\cdot P(N=n)=\sum_n E[s^{X_1+\cdots+X_n}]\cdot P(N=n)$

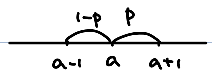
$=\sum_n(\prod_{k=1}^{n}G_{X_k}(s))\cdot P(N=n)=\sum_n(G_{X_1}(s))^n P(N=n)=G_N(G_{X_1}(s))$

$G_X(s)=E[s^X]$ $\quad$ 矩母函数 $\sum E(X^k)s^k$

(X,Y) 取非负整数值. $p_{ij}=P(X=i,Y=j)$

$G(s,t)=\sum_{i,j} s^i t^j P(X=i,Y=j)=E[s^X t^Y]$　　X,Y 独立 $\Leftrightarrow$ $G(s,t)=G_X(s)G_Y(t)$

§3.7 随机游动

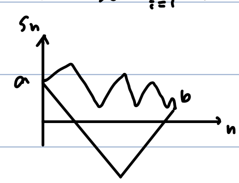


(n,S_n)

一. S_0 初始位置

$P(X_i=1)=p,\ P(X_i=-1)=q=1-p$　　$S_n=S_0+\sum_{i=1}^{n} X_i$　　$X_i,\ i=1,2,\cdots$ 独立

例 无限制 $S_0=a$. 求 $P(S_n=b)$



轨道 $p^r q^l$: r 右移次数, l 左移次数.

$$\begin{cases} l+r=n \\ r-l=b-a \end{cases} \Rightarrow r=\frac{n+b-a}{2},\quad l=\frac{n-b+a}{2}$$

轨道数 C_n^r

$$P(S_n=b)=C_n^{\frac{n+b-a}{2}}\, p^{\frac{n+b-a}{2}}\, q^{\frac{n-b+a}{2}}$$

例2 带吸收壁随机游动.

$P(X_i=1)=p$　　$P(X_i=-1)=q=1-p$　若 $S_n=S_0+\sum_{i=1}^{n} X_i=0$ ($\exists n$), 则对 $k\ge n$, $S_k=0$.

计算质点 $t=0$ 时位于 k 最终被 0 吸收的概率.

解: $p_0=1,\ p_N=0$

A_k 从 k 出发被 0 吸收事件.

B 第1步右移

$$p_k=P(A_k)=P(A_k|B)P(B)+P(A_k|B^c)P(B^c)$$

$$=P(A_{k+1})P(B)+P(A_{k-1})P(B^c)=p\cdot p_{k+1}+q\,p_{k-1}$$

$$\Rightarrow (p_{k+1}-p_k)=\frac{q}{p}(p_k-p_{k-1})$$

$$p_k=p_k-p_{k-1}+p_{k-1}-p_{k-2}+\cdots+p_1-p_0+p_0$$

$$=\left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}(p_1-p_0)+\cdots+(p_1-p_0)+p_0=p_0+\frac{(p_1-p_0)\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)^k\right)}{1-\frac{q}{p}}$$

记 $r=\frac{q}{p}$. $p_N=0\Rightarrow 1+\frac{(p_1-p_0)(1-r^N)}{1-r}=0 \Rightarrow p_1-p_0=-\frac{1-r}{1-r^N}$

若 $r=1$, $p_k=p_0+k(p_1-p_0)$　　$p_N=0\Rightarrow 1+N(p_1-p_0)=0$

$$P_k=\begin{cases}\dfrac{r^k-r^N}{1-r^N} & r=\dfrac{q}{p}\neq 1\\[2mm] 1-\dfrac{k}{N} & r=1\end{cases}$$

从k出发被 $X=N$ 吸收的概率：$q_k=\begin{cases}\dfrac{(\frac{1}{r})^k-(\frac{1}{r})^N}{1-(\frac{1}{r})^N}, & r\neq 1\\[2mm] 1-\dfrac{N-k}{N}, & r=1\end{cases}$

记 X_k 为从k出发到被 $X=0$ 吸收时的移动次数 求 $D_k=E[X_k]$

解：$D_k=E(X_k|B)P(B)+E(X_k|B^c)P(B^c)$

$P(X_k=x|B)=P(x_{k+1}=x-1)$

$P(X_k=x|B^c)=P(X_{k-1}=x-1)$

$E(X_k|B)=\sum_x x\cdot P(X_k=x|B)=\sum_x \overset{(x-1)+1}{\uparrow \atop x} P(X_{k+1}=x-1)=E(X_{k+1})+1$

$E(X_k|B^c)=E(X_{k-1})+1$

$\Rightarrow D_k=(D_{k+1}+1)\cdot p+(D_{k-1}+1)\cdot q \Rightarrow D_k=pD_{k+1}+qD_{k-1}+1$

$p(D_{k+1}-D_k)-q(D_k-D_{k-1})=-1$

$p((D_{k+1}-D_k)-(D_k-D_{k-1}))-(q-p)(D_k-D_{k-1})=-1$ $\quad pD''(k)-(q-p)D'(k)=-1$

特解 $\tilde{D}_k=\begin{cases}\dfrac{k}{q-p}, & r=\dfrac{q}{p}\neq 1\\[2mm] -k^2, & r=1\end{cases}$

$u_k=D_k-\tilde{D}_k$ $\quad u_k$ 满足 $u_k=pu_{k+1}+qu_{k-1}$

$$D_k=\begin{cases}\dfrac{1}{q-p}\left(k-N\cdot\dfrac{1-r^k}{1-r^N}\right), & r\neq 1\\[2mm] kN-k^2, & r=1\end{cases}$$

无限制随机游走一般性质：$S_n=S_0+\sum_{i=1}^n X_i$

1.空间齐次性 $\quad P(S_n=j|S_0=a)=P(S_n=j+b|S_0=a+b)$

证：$P(S_n=j+b|S_0=a+b)=\dfrac{P(S_n-S_0=j-a,\ S_0=a+b)}{P(S_0=a+b)}=P(S_n-S_0=j-a)$

$P(S_n=j|S_0=a)=P(S_n-S_0=j-a)$

2.时间齐次性. $\quad P(S_n=j|S_0=a)=P(S_{m+n}=j|S_m=a)$

证：$P(S_{n+m}=j|S_m=a)=\dfrac{P(S_{n+m}=j,\ S_m=a)}{P(S_m=a)}=\dfrac{P(S_{n+m}-S_m=j-a,\ S_m=a)}{P(S_m=a)}=P(S_{m+n}-S_m=j-a)$

$=P\left(\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i=j-a\right)\overset{\text{同分布}}{=\!=}P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=j-a\right)=P(S_n=j|S_0=a)$

3. Markov性.(马氏性) $P(S_{n+m}=j\mid S_0,S_1,\cdots,S_m)=P(S_{n+m}=j\mid S_m)$

证: $\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_m)=P(S_{n+m}=j\mid S_0=x_0,S_1=x_1,\cdots,S_m=x_m)$

$$=\frac{P(S_{n+m}=j,S_0=x_0,\cdots,S_m=x_m)}{P(S_0=x_0,\cdots,S_m=x_m)}=\frac{P(S_{n+m}-S_m=j-x_m,S_0=x_0,\cdots,S_m=x_m)}{P(S_0=x_0,\cdots,S_m=x_m)}$$

$$=P(S_{n+m}-S_m=j-x_m)$$

$$\psi(x_m)=P(S_{n+m}=j\mid S_m=x_m)=\frac{P(S_{n+m}-S_m=j-x_m,S_m=x_m)}{P(S_m=x_m)}=P(S_{n+m}-S_m=j-x_m)$$

$\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_m)=\psi(x_m)$, $\varphi(S_0,S_1,\cdots,S_m)=\psi(S_m)$

二.轨道计数. $S_n=S_0+\sum_{i=1}^{n}X_i$

(i,S_i)的连线称为一条轨道.

$(0,a)\longrightarrow(n,b)$ 轨道数 $C_n^{\frac{n+b-a}{2}}$ n. $b-a$同奇偶

$N_n(a,b)$表示n步从a到b轨道数.

$N_n^0(a,b)$表示n步从a出发,经过0点到b点的轨道数.

引理1 $N_n(a,b)=\begin{cases}C_n^{\frac{n+b-a}{2}}, & n,\ b-a\text{同奇偶}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$

引理2(反射定理) $a,b>0$ $N_n^0(a,b)=N_n(-a,b)$

从a到b经过原点的轨道与从$-a$到b的轨道一一对应.

定理3(投票定理) $b>0$ n与b同奇偶. 从0出发,到达b且不再到达0点,轨道数为 $\frac{b}{n}N_n(0,b)$

证: 第1步向右. 所求轨道数 $=N_{n-1}(1,b)-N_{n-1}^0(1,b)$

$$=C_{n-1}^{\frac{n-1+b-1}{2}}-N_{n-1}(-1,b)$$

$$=C_{n-1}^{\frac{n+b-2}{2}}-C_{n-1}^{\frac{n-1+b+1}{2}}\overset{化简}{=}\frac{b}{n}C_n^{\frac{n+b}{2}}=\frac{b}{n}N_n(0,b)$$

例 甲a票 乙b票 $a>b$. 求计票过程中,甲票数始终领先的概率?

解: X_i取$1,-1$. 第i票投给甲, $X_i=1$; 第i票投给乙, $X_i=-1$.

$S_0=0$, $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$. 要求 $S_n>0$, $n=1,2,\cdots,a+b$的概率.

$$P(S_1,S_2,\cdots,S_n>0,S_0=0,S_{a+b}=a-b)=\frac{\text{从0到}a-b\text{不过原点轨道数}}{N_{a+b}(0,a-b)}\overset{Thm3}{=}\frac{a-b}{a+b}$$

定理4 $S_0=0$ 不再经过原点.

$$P(S_1,S_2,\cdots,S_n\neq 0,\ S_n=b)=\frac{|b|}{n}P(S_n=b)$$

证: $S_n=b$ 不过原点, 轨道数 $\frac{|b|}{n}N_n(0,b)$

$$P(S_1,S_2,\cdots,S_n\neq 0,\ S_n=b)=\frac{|b|}{n}N_n(0,b)\,p^{\frac{n+b}{2}}q^{\frac{n-b}{2}}$$

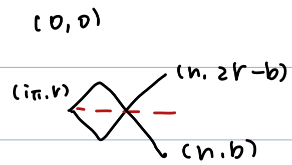
$$P(S_1,\cdots,S_n\neq 0,\ S_0=0)=\sum_b P(S_1,\cdots,S_n\neq 0,\ S_0=0,\ S_n=b)$$

$$=\sum_b\frac{|b|}{n}P(S_n=b)=\frac{1}{n}\sum_b|b|\cdot P(S_n=b)=\frac{1}{n}E(|S_n|)$$

游走最大值 记 $M_n=\max\{S_i: 0\le i\le n\}$

定理: $S_0=0,\ r\ge 1$

$$P(M_n\ge r,\ S_n=b)=\begin{cases}P(S_n=b) & b\ge r\\ \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b}P(S_n=2r-b) & b<r\end{cases}$$



证: 记 $A=\{(0,0)\to(n,b)$ 且经过某点$(i,r)\}$

对 $\forall\pi\in A$, 可得 π' 从 (i_π,r) 翻转, π' 是从 $(0,0)$ 到 $(n,2r-b)$ 的轨道 $\pi\longleftrightarrow\pi'$

$\#A=N_n(0,2r-b)$

$$\frac{P(\pi)}{P(\pi')}=\frac{p^{\frac{n-i_\pi+b-r}{2}}\cdot q^{\frac{n-i_\pi-b+r}{2}}}{p^{\frac{n-i_\pi-b+r}{2}}\cdot q^{\frac{n-i_\pi+b-r}{2}}}=\left(\frac{q}{p}\right)^{r-b}$$

$$P(M_n\ge r,\ S_n=b)=N_n(0,2r-b)\,P(\pi)=\underbrace{P(S_n=2r-b)}_{P(\pi')\cdot N_n(0,2r-b)}\left(\frac{q}{p}\right)^{r-b}$$

hw 3.9.3, 3.9.4, 3.9.5, 3.10.1