定理(唯一性):分布函数由特征函数唯一确定.

证:设 C_F 表示 $F(x)$ 连续点全体. 任取 $a,b\in C_F$, $a<b$

$$F(b)-F(a)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi(t)dt$$. 取 $\{a_n\}\subset C_F$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

$\lim\limits_{n\to\infty}F(b)-F(a_n)=F(b)$ 唯一确定

若 $a\notin C_F$. 可找到一列 $\{b_n\}\in C_F$. $F(x)$ 右连续. $\lim\limits_{n\to\infty}F(b_n)=F(a)$

定理. 若特征函数 $\varphi(t)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|dt<\infty$, 则 $\varphi(t)$ 对应的分布函数 $F(x)$ 可导.

证:设 C_F 表示 $F(x)$ 连续点全体.

任取 $a\in R$. $\{b_n\}\downarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=a$, $b_n\in C_F$.

$$\left|F(b_n)-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}\right|=\lim_{T\to+\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb_n}}{it}\varphi(t)dt\right|$$

$$\le\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb_n}}{it}\varphi(t)\right|dt$$

$$\le\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{|e^{-ita}|\cdot|1-e^{it(a-b_n)}|}{|t|}|\varphi(t)|dt$$

$$\le\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}|a-b_n|\int_{-T}^{T}|\varphi(t)|dt\to0\quad(n\to+\infty)$$

$$F(b_n)-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}\to F(a)-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}=0\Rightarrow F(a)=F(a-0),\ a\in C_F$$

$$\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x}=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-it(a+\Delta x)}}{it\Delta x}\varphi(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ita}-e^{-it(a+\Delta x)}}{it\Delta x}\varphi(t)dt$$

$$\left|\frac{e^{-ita}-e^{-it(a+\Delta x)}}{it\Delta x}\varphi(t)\right|\le\left|\frac{e^{-ita}(1-e^{-it\Delta x})}{it\Delta x}\varphi(t)\right|\le\varphi(t)$$

由DCT. $$\lim_{\Delta x\to0}\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\Delta x\to0}\frac{e^{-ita}-e^{-it(a+\Delta x)}}{it\Delta x}\varphi(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ita}\varphi(t)dt=F'(a)$$

hw: 5.8.5(e), 5.8.9, 5.9.2, 5.9.5, 5.9.8

二. 多元特征函数

$(X_1,\cdots,X_n)$ 联合分布 $F(x_1,\cdots,x_n)$

定义: $E[e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)}] \triangleq \varphi(t_1,\cdots,t_n)$

$\varphi(0,\cdots,0)=1 \qquad |\varphi(t_1,\cdots,t_n)|\le 1 \qquad \varphi(-t_1,\cdots,-t_n)=\overline{\varphi(t_1,\cdots,t_n)}$

定理 $\varphi(t_1,\cdots,t_n)$是$\vec{X}=(X_1,\cdots,X_n)$的特征函数.

假设$\vec{X}$在$V=\{a_i\le x_i\le b_i, i=1,\cdots,n\}$的表面上取值的概率为0.

$$P(a_k\le X_k\le b_k, k=1,\cdots,n)=\lim_{\substack{T_k\to+\infty\\k=1,\cdots,n}}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-T_1}^{T_1}\cdots\int_{-T_n}^{T_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{-ia_kt_k}-e^{-ib_kt_k}}{it_k}\varphi(t_1,\cdots,t_n)\,dt_1\cdots dt_n$$

例 $\vec{X}\sim N(\vec{\mu},\Sigma)$

$\varphi(t_1,\cdots,t_n)=E[e^{i\sum_{k=1}^{n}t_kX_k}] \qquad Y=\sum_{k=1}^{n}t_kX_k\sim N(\sum_{k=1}^{n}t_k\mu_k, \vec{t}\Sigma\vec{t}^{T})$

$\varphi_Y(s)=E[e^{isY}]=E[e^{is\sum_{k=1}^{n}t_kX_k}]=\exp(is\sum_{k=1}^{n}t_k\mu_k-\frac{1}{2}s^2\vec{t}\Sigma\vec{t}^{T})$

$\varphi(t_1,\cdots,t_n)=\varphi_Y(1)=\exp(i\vec{t}\vec{\mu}^{T}-\frac{1}{2}\vec{t}\Sigma\vec{t}^{T})$

Σ协方差矩阵

$\mathrm{rank}\,\Sigma=r\le n$

$n=1 \quad r=0 \quad \sigma^2=0 \quad P(X=\mu)=1$

$n=2 \quad r=0 \quad P((X_1,X_2)=(\mu_1,\mu_2))=1$; $r=1$ (X_1,X_2)在平面内某条曲线上取值.

$\mathrm{rank}\,\Sigma<n$, $(X_1,\cdots,X_n)$退化到R^n的一个r维子空间内取值.

性质: 1. $\varphi(t_1,\cdots,t_n)$是$(X_1,\cdots,X_n)$的c.f. $E(X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n})$存在, 记$s=k_1+\cdots+k_n$

则 $\left.\dfrac{\partial^s\varphi}{\partial t_1^{k_1}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right|_{\vec{t}=\vec{0}}=i^s\cdot E[X_1^{k_1}\cdots X_n^{k_n}]$

2. $X_1,\cdots,X_n$相互独立 $\Leftrightarrow \varphi(t_1,\cdots,t_n)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t_k)$

"$\Rightarrow$" $\varphi(t_1,\cdots,t_n)=E[\prod_{k=1}^{n}e^{it_kX_k}]=\prod_{k=1}^{n}E[e^{it_kX_k}]$

"$\Leftarrow$" 由反转公式可得. $P(a_k\le X_k\le b_k, k=1,\cdots,n)=\prod_{k=1}^{n}P(a_k\le X_k\le b_k)$

四. $\{F_n(x)\}$一列分布函数 对应c.f. $\{\varphi_n(t)\}$ 收敛性之间的关系.

例 $\Omega=[0,1]$ P Lebesgue测度.

$X_n=\frac{1}{n}$ $F_n(x)=P(X_n\le x)=\begin{cases}0, & x<\frac{1}{n}\\ 1, & x\ge\frac{1}{n}\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=0$ $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$ 左连续.

定义 $\{F_n(x)\}$ $F(x)$为分布函数.

若在$F(x)$的连续点处成立 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$, 则称$F_n(x)$弱收敛于$F(x)$. 记 $F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$

记为 $F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$

分布函数列弱收敛于分布函数,极限是唯一的.

定理(连续性定理)

(1) 分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于分布函数$F(x)$

则 $\varphi_n(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF_n(x)\xrightarrow{n\to+\infty}\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(x)$

(2) $\varphi_n(t)$是$F_n(t)$对应的特征函数. $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$且$\varphi(t)$在$t=0$处连续.

则$\varphi(t)$也是某分布函数$F(x)$的特征函数. 且$F_n(x)\xrightarrow{w}F(x)$

例 $X_n\sim N(0,n)$ $\varphi_n(t)=e^{-\frac{nt^2}{2}}\longrightarrow\begin{cases}1, & t=0\\ 0, & t\ne 0\end{cases}$ 不是特征函数.

§5.3 两个极限定理

大数定律 (law of large numbers) LLN

中心极限定理 (central limit theory) CLT

多次实验中 事件A发生频率 稳定于$P(A)$

$X_n=\begin{cases}1 & A发生\\ 0 & A不发生\end{cases}$ $\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{n}\to P(A)$

依概率收敛 X_n服从弱大数定律；几乎处处收敛 X_n服从强大数律

定义 $\{X_n\}$ r.v.序列．分布函数$F_n(x)$，X的分布函数$F(x)$.

若$F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$，称$X_n$依分布收敛于$X$．记作 $X_n \xrightarrow{D} X$.

定理 $X_1,\cdots,X_n\cdots$ 独立同分布 r.v.序列 $E[X_i]=\mu$． $S_n=X_1+\cdots+X_n$，则$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{D}\mu$

证： $X=\mu$的特征函数 $\varphi(t)=e^{i\mu t}$． $\frac{S_n}{n}$的特征函数记为$\varphi_n(t)$

$$\varphi_n(t)=E[e^{it\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}}]=E[\prod_{k=1}^{n}e^{i\cdot\frac{t}{n}X_k}]\xlongequal{\text{独立同分布}}(\varphi_{X_1}(\tfrac{t}{n}))^n=(1+i\mu\cdot\tfrac{t}{n}+o(\tfrac{t}{n}))^n$$

$\therefore \frac{S_n}{n}\xrightarrow{D}\mu$ $\qquad\qquad \to e^{i\mu t}=\varphi(t)\Rightarrow F_n\xrightarrow{W}F$

定理（中心极限定理） $\{X_n\}$独立同分布 $E[X_k]=\mu$．$Var(X_k)=\sigma^2$，$k=1,2,\cdots$

$S_n=X_1+\cdots+X_n$，则 $\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\xrightarrow{D}Y$ $\quad Y\sim N(0,1)$

证：Y的特征函数 $\varphi_Y(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$

令 $Z_k=\frac{X_k-\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ 的特征函数 $\varphi_Z(t)=1-\frac{t^2}{2n}+o(\frac{t^2}{n})$

$E[Z_k]=0$ $\quad E[Z_k^2]=\frac{1}{n}$

$\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}=\sum_{k=1}^{n}Z_k$ 的特征函数记为$\varphi_n(t)$． $\varphi_n(t)=(\varphi_Z(t))^n=(1-\frac{t^2}{2n}+o(\frac{t^2}{n}))^n\to e^{-\frac{t^2}{2}}$

由连续性定理，$\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ 的分布函数收敛于$e^{-\frac{t^2}{2}}$对应分布函数.

第7章 极限定理

§7.1 几种收敛性

一．定义：X．$\{X_n\}$在(Ω,F,P)定义的r.v.

1° 几乎处处收敛（以概率1收敛）

如果 $P(\{w:\lim_{n\to\infty}X_n(w)=X(w)\})=1$，称$X_n$几乎处处收敛于$X$． $X_n\xrightarrow{a.s.}X$

2° r阶平均收敛．

设$E[|X_n|^r]<+\infty$．若$\lim_{n\to\infty}E(|X_n-X|^r)=0$．称$X_n$ r阶平均收敛于X． $X_n\xrightarrow{r}X$

$r=1$ 平均收敛 ； $r=2$ 均方收敛

3° 依概率收敛.

若对 $\forall \varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n-X|>\varepsilon)=0$, 称 X_n 依概率收敛于 X. $X_n \xrightarrow{P} X$.

4° 依分布收敛

X_n 的分布函数 $F_n(x) \xrightarrow{w} F(x)$ X 的分布函数. 称 X_n 依分布收敛于 X. $X_n \xrightarrow{D} X$

二. 四种收敛关系

定理 $(X_n \xrightarrow{a.s.} X) \overset{①}{\Rightarrow} (X_n \xrightarrow{P} X) \overset{③}{\Rightarrow} (X_n \xrightarrow{D} X)$

$(X_n \xrightarrow{r} X) \overset{②}{\Rightarrow} (X_n \xrightarrow{P} X)$

引理1 $X_n \xrightarrow{P} X$, 则 $X_n \xrightarrow{D} X$.

证: 设 X_n 的分布函数为 $F_n(x)$, X 的分布函数为 $F(x)$.

对 $\forall \varepsilon>0$, $F_n(x)=P(X_n\le x)=P(X_n\le x, X\le x+\varepsilon)+P(X_n\le x, X>x+\varepsilon)$

$\le P(X\le x+\varepsilon)+P(|X_n-X|>\varepsilon)=F(x+\varepsilon)+P(|X_n-X|>\varepsilon)$

$F(x-\varepsilon)=P(X\le x-\varepsilon)=P(X\le x-\varepsilon, X_n\le x)+P(X\le x-\varepsilon, X_n>x)$

$\le P(X_n\le x)+P(|X_n-X|>\varepsilon)=F_n(x)+P(|X_n-X|>\varepsilon)$

$F(x-\varepsilon)-P(|X_n-X|>\varepsilon)\le F_n(x)\le F(x+\varepsilon)+P(|X_n-X|>\varepsilon)$

令 $n\to\infty$. $F(x-\varepsilon)\le \liminf\limits_{n\to\infty} F_n(x)\le \limsup\limits_{n\to\infty} F_n(x)\le F(x+\varepsilon)$

若 x 为 $F(x)$ 连续点, 令 $\varepsilon\to 0^+$. $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$ $\therefore X_n \xrightarrow{D} X$

反之不成立:

X	1	-1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$X_n=-X$

X_n	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$X_n \xrightarrow{D} X$ $|X_n-X|=2$ 故 $X_n \not\xrightarrow{P} X$.

引理 (Markov 不等式) $E[|X|^r]<\infty$, 则对 $\forall a>0$, $P(|X|^r>a)\le \frac{E(|X|^r)}{a}$. $|X|^r\ge a\mathbb{1}_{(|X|^r>a)}$

$E[|X|^r]\ge E[a\cdot I_{(|X|^r>a)}]=aP(|X|^r>a)$

引理 $X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

证: $\lim\limits_{n\to+\infty} E[|X_n-X|^r]=0$ $(r\geq 1)$ 对 $\forall \varepsilon>0$, $P(|X_n-X|>\varepsilon)\leq \dfrac{E[|X_n-X|]^r}{\varepsilon^r}\to 0$

$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ $\quad X_n(w)\to X(w) \iff \forall k>0, \exists n, \forall m>n$ 时, $|X_m(w)-X(w)|<\frac{1}{k}$.

$X_n \xrightarrow{a.s.} X \iff P(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}\{|X_n-X|<\frac{1}{k}\})=1$

hw: 5.10.1, 5.10.3, 5.10.4, 7.2.1, 7.2.2