

微分方程

人口模型与新产品销售模型

微分方程模型

在许多实际问题中，当直接导出变量之间的函数关系较为困难，但导出包含未知函数的导数或微分的关系式较为容易时，可用建立微分方程模型的方法来研究该问题。

建模的常用方法有：1. **按变化规律列方程**，利用数学、物理、化学、生物等学科中的规律对实际问题直接列出微分方程；2. **利用微元分析法建模**，根据已知的规律或定理，通过寻求微元之间的关系式得到微分方程；3. **利用近似模拟法建模**，当实际现象相当复杂且无清晰规律时可根据大量实验数据提出合理假设，再利用适当的数学方法得到微分方程。

对方程的分析：1. **求出方程的解**，求出未知函数的解析表达式或利用各种数值解法、数值软件（如Matlab）求近似解；2. **不必求出方程的解**，根据微分方程的理论研究某些性质或它的变化趋势

一、 Malthus模型与Logistic模型

为了保持自然资源的合理开发与利用，人类必须保持并控制生态平衡，包括人类自身的增长，这里仅考察人口模型。原本种群的数量应取离散值，但由于种群数量一般较大，为建立微分方程模型，可将种群数量看作连续变量，甚至允许它为可微变量，由此引起的误差将是十分微小的。

世界人口

年	1625	1830	1930	1960	1974	1987	1999
人口（亿）	5	10	20	30	40	50	60

中国人口

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	2000
人口（亿）	3	4.7	6	7.2	10.3	11.3	12.95

模型1 马尔萨斯 (Malthus) 模型

假设：人口净增长率 r 是一常数

记 $x(t)$ ： t 时刻时的人口，可微函数， x_0 ： $t = 0$ 时的人口

则
$$r = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{x(t)\Delta t}$$

于是 $x(t)$ 满足如下微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{A1})$$

(A1) 的解为： $x(t) = x_0 e^{rt}$ (A2)

$$x(t) = x_0 e^{rt} \quad (\text{A2})$$

当 $r > 0$ 时，表明人口将按指数规律无限增长，因此又称为人口指数模型。

马尔萨斯模型的一个显著特点：种群数量翻一番所需的时间是固定的。

令种群数量翻一番所需的时间为 T ，则有： $2x_0 = x_0 e^{rT}$

故
$$T = \frac{\ln 2}{r}$$

模型检验

$$x(t) = x_0 e^{rt} \quad (\text{A2})$$

利用网络可查到近两个世纪的美国人口统计数据（以百万作单位），对模型作检验。

参数估计： r, x_0 可用已知数据利用线性最小二乘法进行估计

(A2) 式两边取对数，得：

$$\ln x(t) = \ln x_0 + rt \Rightarrow y = a + rt \quad (\text{A3})$$

$(y = \ln x(t), a = \ln x_0)$

以1790—1900年的数据拟合 (A3) 式，用 Matlab 软件计算得： $r = 0.2743/10$ 年

Matlab计算示范 $\ln x(t) = \ln x_0 + rt \Rightarrow y = a + rt$ (A3)

$(y = \ln x(t), a = \ln x_0)$

以1790-1900年共计12个数据为例进行拟合：

t=[0: 11]; %输入数据

x=[3.9 5.3 7.2 9.6 12.9 17.1 23.2 31.4 38.6 50.2 62.9 76];

plot (t, x, 'o'); %画散点图

y=log(x);

p=polyfit(t,y,1)

输出结果： $p = 0.2743 \quad 1.4323$

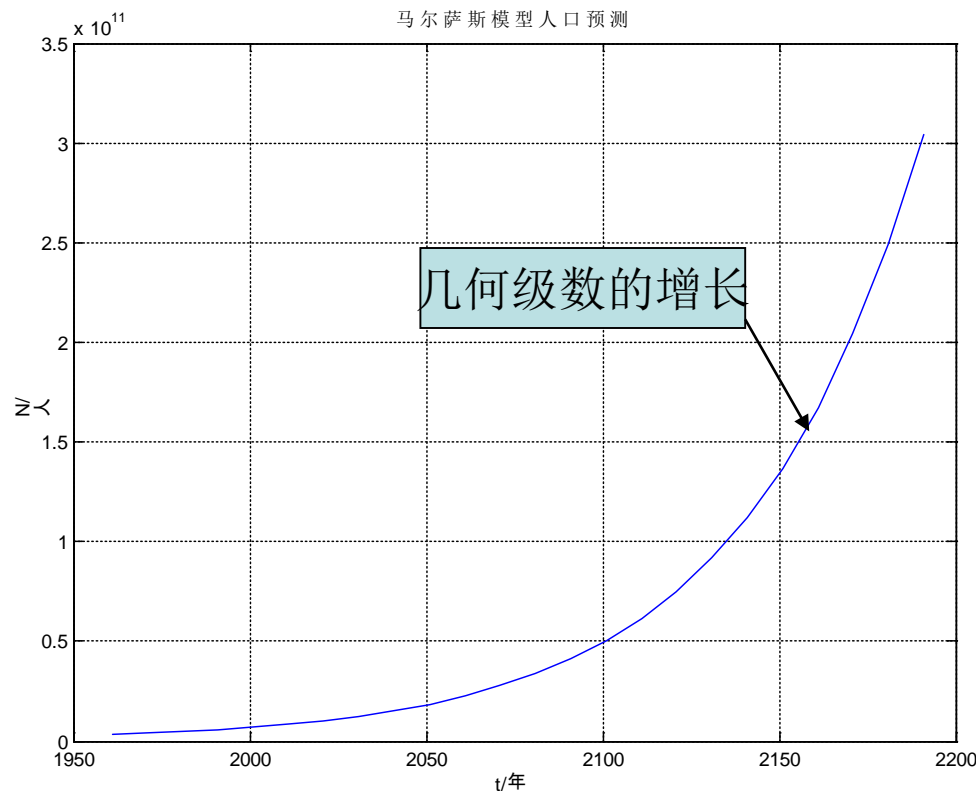
表示： $y = 0.2743t + 1.4323$

$$\therefore \ln x_0 = 1.4323 \Rightarrow x_0 = 4.1884$$

$$\therefore x(t) = 4.1884e^{0.2743t}$$

模型预测

假如人口数真能保持每34.6年增加一倍，那么人口数将以几何级数的方式增长。例如，到2510年，人口达 2×10^{14} 个，即使海洋全部变成陆地，每人也只有9.3平方英尺的活动范围，而到2670年，人口达 36×10^{15} 个，只好一个人站在另一人的肩上排成二层了。故马尔萨斯模型是不完善的。



结论：Malthus模型实际上只有在群体总数不太大时才合理，到总数增大时，生物群体的各成员之间由于有限的生存空间，有限的自然资源及食物等原因，就可能发生生存竞争等现象，所以Malthus模型假设的人口净增长率不可能始终保持常数，它应当与人口数量有关。

模型2 Logistic模型

人口净增长率应当与人口数量有关，即： $r=r(x)$

从而有：

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = r(x)x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{A4})$$

对马尔萨斯模型引入一次项（竞争项），令 $r(x)=r-ax$ ，得

$$\frac{dx}{dt} = (r - ax)x \quad \text{或} \quad \frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)x \quad (\text{A5})$$

(A5) 可改写成：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{r}{x_m}(x_m - x)x \quad (\text{A6})$$

(A5) 被称为Logistic模型或生物总数增长的**统计筹算律**，是由荷兰数学生物学家弗赫斯特（Verhulst）首先提出的。一次项系数是负的，因为当种群数量很大时，会对自身增大产生抑制性，故一次项又被称为**竞争项**。

对 (A6) 分离变量: $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x_m - x} \right) dx = r dt$

两边积分并整理得: $x = \frac{x_m}{1 + C e^{-rt}}$

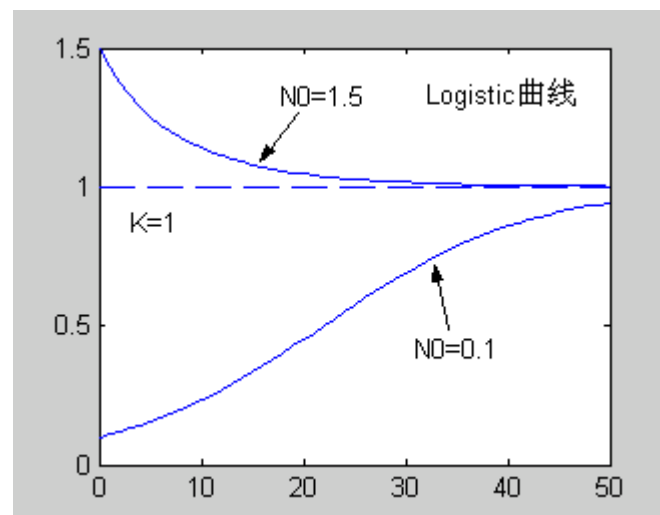
令 $x(0)=x_0$, 求得: $C = \frac{x_m - x_0}{x_0} = \frac{x_m}{x_0} - 1$

故 (A6) 的满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的解为:

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \left(\frac{x_m}{x_0} - 1 \right) e^{-rt}} \quad (\text{A7})$$

易见: $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_m$

$x(t)$ 的图形请看右图



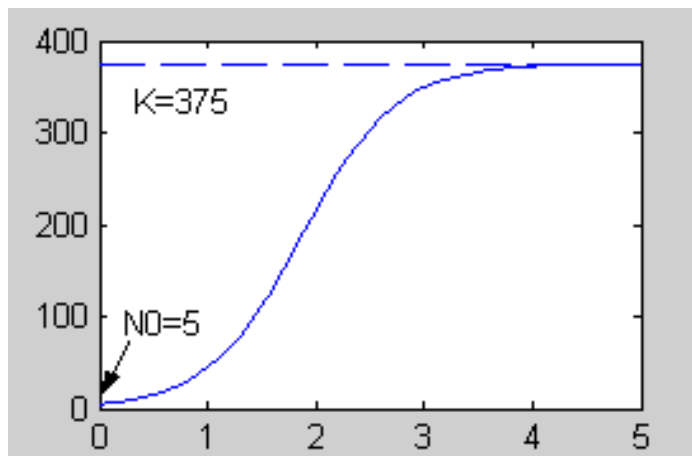
模型检验

用Logistic模型来描述种群增长的规律效果如何呢？1945年克朗皮克（Crombic）做了一个人工饲养小谷虫的实验，数学生物学家高斯（E·F·Gauss）也做了一个原生物草履虫实验，实验结果都和Logistic曲线十分吻合。

大量实验资料表明用Logistic模型来描述种群的增长，效果还是相当不错的。例如，高斯把5只草履虫放进一个盛有 0.5cm^3 营养液的小试管，他发现，开始时草履虫以每天230.9%的速率增长，此后增长速度不断减慢，到第五天达到最大量375个，实验数据与 $r=2.309$ ， $a=0.006157$ ， $x(0)=5$ 的Logistic曲线（S曲线）：

$$x(t) = \frac{375}{1 + 74e^{-2.309t}}$$

几乎完全吻合，见右图



Malthus模型和Logistic模型的总结

- Malthus模型和Logistic模型均为对微分方程（A4）所作的模拟近似方程。前一模型假设了种群增长率 r 为一常数，（ r 被称为该种群的**内禀增长率**）。后一模型则假设环境只能供养一定数量的种群，从而引入了一个竞争项。
- 用近似模拟法建立微分方程来研究实际问题时必须对求得的解进行检验，看其是否与实际情况相符或基本相符。相符性越好则模拟得越好，否则就得找出不相符的主要原因，对模型进行修改。

Malthus模型与Logistic模型虽然都是为了研究种群数量的增长情况而建立的，但它们也可用来研究其它实际问题，只要这些实际问题的数学模型有相同的微分方程即可。

二、新产品的推广

经济学家和社会学家一直很关心新产品的推销速度问题。怎样建立一个数学模型来描述它，并由此析出一些有用的结果以指导生产呢？下面以销售iPhone 14为例进行介绍。

设需求量有一个上界，并记此上界为 N ，记 t 时刻已销售出的iPhone 14数量为 $x(t)$ ，则尚未使用的人数大致为 $N - x(t)$ ，于是由统计筹算律：
$$\frac{dx}{dt} \propto x(N - x)$$

记比例系数为 k ，则 $x(t)$ 满足：
$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$$

此方程即Logistic模型，通解为：
$$x(t) = \frac{N}{1 + Ce^{-kNt}}$$

对 $x(t)$ 求一阶、两阶导数：

$$x'(t) = \frac{ckN^2 e^{-kNt}}{(1 + Ce^{-kNt})^2}, \quad x''(t) = \frac{Ck^2 N^3 e^{-kNt} (Ce^{-kNt} - 1)}{(1 + Ce^{-kNt})^3}$$

容易看出, $x'(t) > 0$, 即 $x(t)$ 单调增加。

由 $x''(t_0) = 0$, 可以得出 $Ce^{-kNt_0} = 1$, 此时, $x(t_0) = \frac{N}{2}$ 。

当 $t < t_0$ 时, $x''(t) > 0$, $x'(t)$ 单调增加, 而当 $t > t_0$ 时, $x''(t) < 0$, $x'(t)$ 单调减小。实际调查表明, 销售曲线与 Logistic 曲线十分接近, 尤其是在销售后期, 两者几乎完全吻合。

结论: 在销出量小于最大需求量的一半时, 销售速度是不断增大的, 销出量达到最大需求量的一半时, 该产品最为畅销, 接着销售速度将开始下降。所以初期应采取小批量生产并加以广告宣传; 从有20%用户到有80%用户这段时期, 应该大批量生产; 后期则应适时转产, 这样做可以取得较高的经济效果。