线性代数B2
第二十讲

陈发来

2022.10.26

第三章 线性空间

§2 线性空间的同构与同态

一般线性空间与数组空间有完全类似的结构与性质.

1 考虑由n元一次方程全体构成的线性空间E_n. 对每个方程$l := a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \in E_n$，有唯一的一个数组向量$(a_1, \cdots, a_n, b) \in F^{n+1}$与之对应，由此建立了$E_n$与$F^{n+1}$的一个一一对应。依照这个对应，一个线性方程组$L$对应$F^{n+1}$的一组向量$S$。对方程组$L$做初等变换等价于对向量组$S$做线性组合，$L$线性相关等价于$S$线性相关，$L$的极大无关组(独立方程组)对应于$S$的极大无关组。$L$的秩(独立方程的个数)等于$S$的秩。从线性运算(加法与数乘)的角度看，$E_n$与$F^{n+1}$有完全相同的结构，我们称$E_n$与$F^{n+1}$同构。

第三章 线性空间

2 设V为n维线性空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为V的基。对任何$x\in V$, x可以唯一地表示成

$$x=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n,$$

从而$x\in V$与n维数组$X:=(x_1,\cdots,x_n)\in F^n$建立了一一对应关系$\sigma:\sigma(x)=X$。该对应保持了两个空间$V$与$F^n$之间的线性关系不变

$$\sigma(x+y)=\sigma(x)+\sigma(y),\quad \sigma(\lambda x)=\lambda\sigma(x).$$

由此，向量组之间的线性相关(无关)性保持不变，极大无关组对应极大无关组，基对应基，等等。从这个意义上看，n维线性空间与n维数组空间没有本质的区别。

第三章 线性空间

Definition

定义1 设V_1, V_2是数域F上两个线性空间。如果存在一一映射$\sigma : V_1 \to V_2$满足

1. $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y), \quad \forall\, x, y \in V_1$;
2. $\sigma(\lambda x) = \lambda\sigma(x), \quad \forall\, \lambda \in F,\, x \in V_1$。

则称线性空间V_1与V_2 **同构**，记为$V_1 \sim V_2$。σ称为**同构映射**。当$V_1 = V_2$时，称σ为**自同构**。

Theorem

定理*1* 设V_1, V_2, V_3是数域F上的线性空间，则有

1. 若$\dim V_1 = n$，则V_1与n维数组空间F^n同构。
2. 设σ是$V_1 \to V_2$的同构映射，则σ^{-1}是$V_2 \to V_1$的同构映射。
3. 若V_1与V_2同构，V_2与V_3同构，则V_1与V_3同构。

注 同构是等价关系.

证明.

1 V中每个向量与其在一组基下的坐标建立了同构映射.

2 σ是一一映射，则σ^{-1}也是一一映射. 且

$$\sigma^{-1}(\sigma(x)+\sigma(y)) = x+y = \sigma^{-1}(\sigma(x))+\sigma^{-1}(\sigma(y))$$
$$\sigma^{-1}(\lambda\sigma(x)) = \lambda x = \lambda\sigma^{-1}(\sigma(x))$$
$$\sigma^{-1}(x'+y') = \sigma^{-1}(x')+\sigma^{-1}(y'),$$
$$\sigma^{-1}(\lambda x') = \lambda\sigma^{-1}(x').$$

即σ^{-1}为同构映射.

3 设$\sigma_1 : V_1 \to V_2$, $\sigma_2 : V_2 \to V_3$是同构映射.

则$\sigma_2\sigma_1 : V_1 \to V_3$是一一映射. 且

$$\sigma_2\sigma_1(x+y) = \sigma_2(\sigma_1(x)+\sigma_1(y)) = \sigma_2\sigma_1(x)+\sigma_2\sigma_1(y).$$
$$\sigma_2\sigma_1(\lambda x) = \sigma_2(\lambda\sigma_1(x)) = \lambda\sigma_2\sigma_1(x).$$

即$\sigma_2\sigma_1$是同构映射.

$\square$

第三章 线性空间

Theorem

定理2 设V_1, V_2是数域F上的线性空间，$\sigma: V_1 \to V_2$是同构映射。则

1. $\sigma(0_1) = 0_2$，这里$0_1, 0_2$分别是V_1, V_2的零元素。
2. $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$。
3. $\sigma(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sigma(\alpha_i)$。
4. V_1中向量组S线性无关(相关)当且仅当$\sigma(S)$在V_2中线性无关(相关)。
5. M是V_1的基当且仅当$\sigma(M)$是V_2的基。
6. $\dim V_1 = \dim V_2$。

注: U是V_1的子空间 $\Leftrightarrow$ $\sigma(U)$是V_2的子空间.

证明.

1. $\sigma(0_1) = \sigma(0_1 + 0_1) = \sigma(0_1) + \sigma(0_1)$. 因此$\sigma(0_1) = 0_2$.
2. $\sigma(-\alpha) + \sigma(\alpha) = \sigma(-\alpha + \alpha) = \sigma(0_1) = 0_2$.
   故$\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$.
3. $\sigma(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2) = \sigma(\lambda_1\alpha_1) + \sigma(\lambda_2\alpha_2) = \lambda_1\sigma(\alpha_1) + \lambda_2\sigma(\alpha_2)$. 一般结论由递归可得.
4. $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$线性相关$\Leftrightarrow$存在不全为零的数$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$使得$\sum_{i=1}^m \lambda_i\alpha_i = 0_1 \Leftrightarrow$ 存在不全为零的数$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得$\sum_{i=1}^m \lambda_i\sigma(\alpha_i) = \sigma(\sum_{i=1}^m \lambda_i\alpha_i) = \sigma(0_1) = 0_2 \Leftrightarrow \sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_m)$线性相关.
5. M 是V_1的基$\Leftrightarrow$ M是V_1的极大无关组$\Leftrightarrow$ M线性无关，V_1可以表示为M的线性组合$\Leftrightarrow$ $\sigma(M)$线性无关，V_2是$\sigma(M)$的线性组合$\Leftrightarrow$ $\sigma(M)$是V_2的极大无关组$\Leftrightarrow\sigma(M)$是V_2的基.
6. 设M是V_1的基, 则$\sigma(M)$是V_2的基, 故$\dim V_2 = \dim V_1$.

第三章 线性空间

Theorem

定理3 数域F上的线性空间V_1与V_2同构的充要条件是$\dim V_1 = \dim V_2$.

证明.

由定理2，若V_1与V_2同构，则$\dim V_1 = \dim V_2$. 反过来设$\dim V_1 = \dim V_2 = n$. 由定理1有$V_1 \sim F^n$, $V_2 \sim F^n$. 从而$V_1 \sim V_2$. $\square$

Example

例1 设V是数域F上线性空间, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in V$线性无关. 令$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $a_{ij} \in F$. 证明: $\dim\langle\beta_1, \cdots, \beta_m\rangle = \text{rank}(A)$. 这里$A = (a_{ij})_{m\times n}$.

证明.

关键观察
$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_m\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

先设$V = F^n$，则由$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in F^n$线性无关，它们构成的矩阵$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)^T$为可逆方阵，从而
$\dim\langle\beta_1, \cdots, \beta_m\rangle = \mathrm{rank}(\beta_1, \cdots, \beta_m) = \mathrm{rank}(A)$.

对于一般空间V，考虑同构映射

$$\sigma : \langle\alpha_1, \ldots, \alpha_n\rangle \to F^n, \quad \sigma(\alpha_i) = \mathbf{e}_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

设A_i为A的第i行，则$\sigma(\beta_i) = A_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. 于是
$\dim\langle\beta_1, \cdots, \beta_m\rangle = \dim\langle\sigma(\beta_1), \cdots, \sigma(\beta_m)\rangle =$
$\dim\langle A_1, \cdots, A_m\rangle = \mathrm{rank}(A)$.

$\square$

第三章 线性空间

Example

例2 设$\alpha_1,\dots,\alpha_n$线性无关，问λ为何值时，$\alpha_1-\lambda\alpha_2$，$\alpha_2-\lambda\alpha_3$，…，$\alpha_n-\lambda\alpha_1$线性无关？如果$\alpha_1,\dots,\alpha_n$线性相关呢？

解.

$$\begin{pmatrix}\alpha_1-\lambda\alpha_2\\ \alpha_2-\lambda\alpha_3\\ \vdots\\ \alpha_n-\lambda\alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -\lambda\\ -\lambda & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$\alpha_1-\lambda\alpha_2$，…，$\alpha_n-\lambda\alpha_1$线性无关当且仅当$\det(A)=1-\lambda^n\neq 0$. □

第三章 线性空间

特别地有以下结论($n = 3, \lambda = -1$)：设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，则$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$也线性无关.
实际上，由于

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 + \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

而

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

因此$\operatorname{rank}(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1) = 3$，
即$\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$线性无关.

第三章 线性空间

Definition

定义2 设V_1与V_2是数域F上的两个线性空间. 如存在映射$\phi: V_1 \to V_2$满足

$$(1)\quad \phi(\alpha+\beta)=\phi(\alpha)+\phi(\beta), \qquad (2)\quad \phi(\lambda\alpha)=\lambda\phi(\alpha)$$

则称ϕ是V_1到V_2的**同态映射**.

Theorem

定理4 设ϕ是线性空间V_1到V_2的同态映射, 则

1. $\phi(\theta_1)=\theta_2$;
2. $\phi(-\alpha)=-\phi(\alpha)$;
3. $\phi(\sum_{i=1}^m \lambda_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^m \lambda_i\phi(\alpha_i)$;
4. $S_1 \subset V_1$线性相关, 则$\phi(S_1) \subset V_2$也线性相关.

第三章 线性空间

Example

例3 设V中向量组$\alpha_1,\dots,\alpha_r$可以由向量组$\beta_1,\dots,\beta_s$线性表示，且$s<r$. 证明：$\alpha_1,\dots,\alpha_r$线性相关.

证明.

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix},\quad A\in F^{r\times s}.$$

则$\mathrm{rank}(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\le\mathrm{rank}(A)<r$. 故$\alpha_1,\dots,\alpha_r$线性相关.

考察映射$\phi:(x_1,\dots,x_s)\in F^s\to x_1\beta_1+\dots+x_s\beta_s\in V$. 易知$\phi$为同态映射. 用$\mathbf{a}_i$表示$A$的第$i$行，则$\phi(\mathbf{a}_i)=\alpha_i$. 由于$\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_r$在$F^s$中线性相关，因而$\alpha_1,\dots,\alpha_r$线性相关. $\square$

第三章 线性空间

几何观点.

$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_r \rangle \subset \langle \beta_1, \ldots, \beta_s \rangle$. Thus
$\mathrm{rank}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \le \mathrm{rank}(\beta_1, \ldots, \beta_s) \le s < r$.

第三章 线性空间

课堂练习

1. 求下列多项式矩阵的Smith标准型、行列式因子、不变因子及初等因子组。

$$(1)\quad \begin{pmatrix} \lambda^2(\lambda+1)^2 & & \\ & \lambda^3(\lambda-1)^2 & \\ & & (\lambda+1)^3(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ & \lambda & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}$$

第三章 线性空间

课堂练习

2. 设A是n阶实对称方阵，A的前$n-1$阶顺序主子式均为正，且$\det(A)\geq 0$. 证明A半正定。
3. 设$A\geq B\geq 0$. 证明：$\sqrt{A}\geq\sqrt{B}\geq 0$.

作业：§2.6 1,3,4.