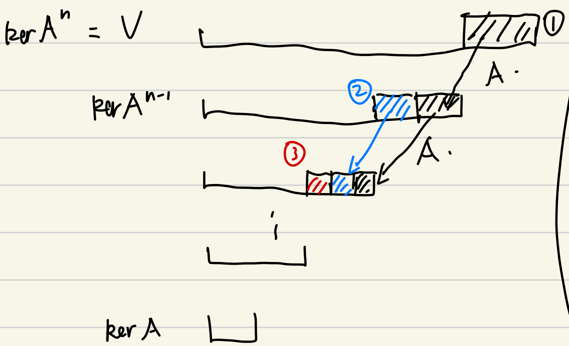
第九次习题课

1. Jordan 标准型 的 P. $(AP = PJ)$ （见11.24和11.28录像

利用 $V = \bigoplus_{i=1}^{t} \ker(\lambda_i I - A)^{n_i}$ 不妨设 A 幂零 $(A^n = 0$, $A^{n-1} \neq 0)$

$$\ker A \subseteq \ker A^2 \subseteq \cdots \cdots \subseteq \ker A^{n-1} \subseteq \ker A^n = V$$



$$\left(\begin{aligned} V &= \ker A^{n-1} \oplus U_n \\ \ker A^{n-1} &= \ker A^{n-2} \oplus AU_n \oplus U_{n-1} \\ \ker A^{n-2} &= \ker A^{n-3} \oplus A^2 U_n \oplus AU_{n-1} \oplus U_{n-2} \\ &\vdots \\ \ker A &= A^{n-1}U_n \oplus A^{n-2}U_{n-1} \oplus \cdots \oplus U_1 \end{aligned}\right)$$

$$\rightsquigarrow V = (A^{n-1}U_n \oplus \cdots \oplus U_n) \oplus (A^{n-2}U_{n-1} \oplus \cdots \oplus U_{n-1}) \cdots \oplus U_1$$

利用 $U_n, U_{n-1}, \cdots, U_1$ 的基向量 生成 P

$$P_x = (A^{n-1}x, \cdots, Ax, x)$$

注. 利用 A 的 已知的 Jordan 标准形 $\mathrm{diag}(J_{n_i}(0))$ $1 \le i \le t$
需且只需从 $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$ 中找出 t 个线性无关向量即可

则 $P = (A^{n_1-1}\alpha_1, \cdots A\alpha_1, \alpha_1, A^{n_2-1}\alpha_2, \cdots, A\alpha_2, \alpha_2, \cdots,$
$A^{n_t-1}\alpha_t, \cdots, A\alpha_t, \alpha_t)$

例. · 作业 $\begin{pmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ 3 & & 4 & \\ 2 & 3 & & 4 \end{pmatrix} = A$ $\quad B = A - 4I.$ $\quad \operatorname{rank} B = 2.$

$B^2 = 0. \quad \longrightarrow \quad B \sim \operatorname{diag}(J_2(0), J_2(0))$

而又 $e_1, e_2 \notin \ker B.$

$\Rightarrow \quad P = (Be_1, e_1, Be_2, e_2)$ 即可

· 作业 $A = N^3.$ $\quad n = 3k + r.$ $\quad (0 \le r \le 2).$

$r=0 \quad A^k = 0. \quad A^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 0 & & 0 & \end{pmatrix} \neq 0$

$e_n, \; e_{n-1}, \; e_{n-2} \in U$

$A^{k-1}e_n \cdots \leftarrow Ae_n \leftarrow e_n$

$A^{k-1}e_{n-1} \; - - - \leftarrow e_{n-1} \quad \rightsquigarrow \quad P.$

$A^{k-1}e_{n-2} \; - - - \leftarrow e_{n-2}$

$r=1 \quad A^k = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \neq 0$

$A^{k-1} = \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$

$e_n, \; e_{n-1}, e_{n-2} \quad \rightsquigarrow \quad P \qquad (e_{n-3} = Ae_n)$

$r=2 \quad A^k = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & \end{pmatrix} \qquad A^{k-1} = \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$

$e_n \quad e_{n-1} \quad e_{n-2} \quad \rightsquigarrow \quad P$

例 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} J_2(2+i) & \\ & J_2(2-i) \end{pmatrix}$ 的 P

由 $\text{rank}(A-(2+i)I) = 3$

$\text{rank}(A-(2+i)I)^2 = 2$ 及标准型.

$\longrightarrow$ 找 α, β $\begin{cases} (A-(2+i)I)\alpha \neq 0 \\ (A-(2+i)I)^2\alpha = 0 \\ (A-(2-i)I)\beta \neq 0 \\ (A-(2-i)I)^2\beta = 0 \end{cases}$

则 $P = (\square\alpha, \ \alpha, \ \triangle\beta, \ \beta)$

$\square = A-(2+i)I.$ $\quad \triangle = A-(2-i)I.$

2. 实方阵的实相似

定理 7.8.3 设 n 阶实方阵 A 的全部初等因子为

$$\lambda^{n_j}(1\leqslant j\leqslant s);\quad (\lambda-\lambda_j)^{m_j}\quad (1\leqslant j\leqslant t)$$

$$(\lambda-a_j-b_j\mathrm{i})^{k_j},\quad (\lambda-a_j+b_j\mathrm{i})^{k_j}\quad (1\leqslant j\leqslant p)$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 是 A 的非零实特征值(不一定两两不同)，$a_1\pm b_1\mathrm{i}$，⋯，$a_p\pm b_p\mathrm{i}$ 是 A 的虚特征值(不一定两两不同)．则 A 实相似于如下的标准形

① $$\mathrm{diag}(N_{n_1},\cdots,N_{n_s},\lambda_1 M_{m_1},\cdots,\lambda_t M_{m_t},L_{k_1}(a_1\pm b_1\mathrm{i}),\cdots,L_{k_p}(a_p\pm b_p\mathrm{i})),$$

其中

$$N_{n_j}=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}_{n_j\times n_j},\quad M_{m_j}=\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&1\end{pmatrix}_{m_j\times m_j}$$

$$L_{k_j}(a_j\pm b_j\mathrm{i})=\begin{pmatrix}aM_{k_j}&bM_{k_j}\\-bM_{k_j}&aM_{k_j}\end{pmatrix}\quad\square$$

② $$\mathrm{diag}(J_{n_1}(\lambda_1),\cdots,J_{n_t}(\lambda_t),K_{m_1}(a_1\pm b_1\mathrm{i}),\cdots,K_{m_p}(a_p\pm b_p\mathrm{i})),$$

$$K_{m_j}(a_j\pm b_j\mathrm{i})=\begin{pmatrix}L(a_j\pm b_j\mathrm{i})&I_{(2)}&&\\&L(a_j\pm b_j\mathrm{i})&\ddots&\\&&\ddots&I_{(2)}\\&&&L(a_j\pm b_j\mathrm{i})\end{pmatrix}$$

是初等因子为 $(\lambda-a_j-b_j\mathrm{i})^{m_j}$，$(\lambda-a_j+b_j\mathrm{i})^{m_j}$ 的 $2m_j$ 阶方阵，

$$L(a_j\pm b_j\mathrm{i})=\begin{pmatrix}a_j&b_j\\-b_j&a_j\end{pmatrix}\quad\square$$

<u>Thm</u>. $\mathbb{F}\subseteq K$ (例. $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$) $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$

- A 与 B 在 $\mathbb{F}$ 上相似 $\Leftrightarrow$ 在 K 上相似
- $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 在 $\mathbb{F}[\lambda]$ 上相抵 $\Leftrightarrow$ 在 $K[\lambda]$ 上相抵

注. $\forall x\in\mathbb{F}$. $xI-A$ 与 $xI-B$ 相抵 (在 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 意义下)

$\not\Rightarrow$ A,B 相似.

例 $\mathrm{diag}(J_2(1),J_3(1))$ 与 $\mathrm{diag}(J_4(1),1)$.

4. 求证：任意可逆复方阵 A 可以分解为 $A = BC$，其中 B 可对角化，C 的特征值全为 1，且 $BC = CB$；并且这种分解是唯一的.

具体证明见上一次习题课讲义.

5. 求证：任一复方阵可以写成两个对称复方阵的乘积，并且可以指定其中一个是可逆方阵.

令 $S_{m_i} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}_{m_i \times m_i}$ $\quad (S_{m_i}^{-1} = S_{m_i}^{T} = S_{m_i})$

注意到 $S_{m_i}^{-1} J_{m_i}(\lambda) S_{m_i} = J_{m_i}(\lambda)^T$

$\forall A, \quad \exists P. \quad P^{-1} A P = J$

$\exists S = S^T, \quad S^{-1} J S = J^T$

$\Rightarrow S^{-1} P^{-1} A P S = J^T = P^T A^T (P^{-1})^T$

$\Rightarrow A = P S P^T A^T (P S P^T)^{-1}$

令 $U = P S P^T \quad (U^T = U.)$

则 $A = U A^T U^{-1}$

$\Rightarrow B = U A^T \qquad B^T = A U = U A^T = B$

$C = U^{-1}$

$BC = A$

$\square$

· 常用的 P （并不唯一）.

· $\begin{pmatrix} a & c \\ & b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{b-a} \\ & 1 \end{pmatrix}$$

· $\begin{pmatrix} a & b \\ & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} b & \\ & 1 \end{pmatrix}. \text{ 或 } \begin{pmatrix} 1 & \\ & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

· $\begin{pmatrix} a & 1 \\ & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & \\ 1 & a \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

5. 在 n 维欧氏空间 $E_n(\mathbf{R})$ 中两两成钝角的向量最多有几条？试证明你的结论.

证. 归纳法. $n=1$ 至多 2 条.

设 $n-1$ 时 至多 n 条.

设 $E_n(\mathbb{R})$ 中有 $n+2$ 条 互成钝角的向量.

$\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+2}$

记 $W = \langle \alpha_{n+2} \rangle$. 则 $E_n(\mathbb{R}) = W \oplus W^{\perp}$

记 $\alpha_i = b_i \alpha_{n+2} + w_i$ $\quad 1 \le i \le n+1$, $b_i \in \mathbb{R}$

由 $(\alpha_i, \alpha_{n+2}) < 0 \Rightarrow b_i < 0 \quad \forall i$

而 $(\alpha_i, \alpha_j) < 0 \Rightarrow b_i b_j |\alpha_{n+2}|^2 + (w_i, w_j) < 0$

$\Rightarrow (w_i, w_j) < -b_i b_j |\alpha_{n+2}|^2 < 0$

$\Rightarrow$ $w_1, \cdots, w_{n+1}$ 为 $W^{\perp}$ ($\dim = n-1$) 的 $n+1$ 个互成钝角的向量. 与归纳矛盾

举例.

$\mathbb{R}^3$.

$(1 \quad 0 \quad 0)$

$(-1 \quad 2 \quad 0)$

$(-1 \quad -2 \quad 4)$

$(-1 \quad -2 \quad -4)$

$\alpha_1 = (1, 0, \cdots 0)$

$\alpha_2 = (-1, 2, 0 \cdots 0)$

$\alpha_k = (-1, -2^1, \cdots, -2^{k-2}, 2^{k-1}, 0, \cdots 0)$

$\vdots$

$\alpha_n = (-1, -2^1, \cdots, -2^{n-2}, 2^{n-1})$

$\alpha_{n+1} = (-1, -2^1, \cdots, -2^{n-2}, -2^{n-1})$.

6. 给定$0\neq\alpha\in E_n(\mathbf{R})$，定义 $E_n(\mathbf{R})$中的线性变换 τ_α：$\beta\mapsto\beta-\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$，求证：

(1) τ_α 是正交变换；

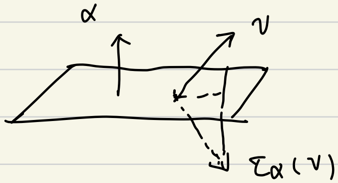
(2) τ_α 在适当的标准正交基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1)$.

(2). 设 $e_1=\frac{\alpha}{|\alpha|}$ 并扩充成 $E_n(\mathbb{R})$ 的标准正交基 $(e_1,\cdots,e_n)$

则 $$\tau_\alpha(e_i) = e_i - \frac{2(e_i,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha \quad (i\geq 2)$$
$$= 0$$
$$\tau_\alpha(e_1) = -e_1$$

$\Rightarrow$ τ_α 在此基下矩阵为 $\mathrm{diag}(-1,1,\cdots1)$

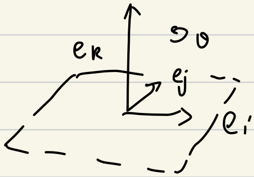
注 1. $H_\alpha = I-\frac{2}{\alpha^T\alpha}\alpha\alpha^T$ 为所谓的 Householder 矩阵



关于法向量 α 作平面反射.

2. $$G_{ij}(\theta) = I-(1-\cos\theta)(E_{ii}+E_{jj})-\sin\theta(E_{ij}-E_{ji})$$
$$=\begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & \\ & \cos\theta & & -\sin\theta & \\ & & I_{j-i-1} & & \\ & \sin\theta & & \cos\theta & \\ & & & & I_{n-j}\end{pmatrix}$$

为在 (e_i,e_j) 平面的旋转 θ



2. 设 A 是 n 阶反对称实方阵.

(1) 求证：A^2 的特征值都是实数且 $\leqslant 0$;

(2) 设 X_1 是 A^2 的属于特征值 λ_1 的特征向量. 则当 $\lambda_1=0$ 时 $AX_1=0$；当 $\lambda_1\neq 0$ 时 $W=V(X_1,AX_1)$ 是 $\mathscr{A}:X\mapsto AX$ 的不变子空间，$\mathscr{A}|_W$ 在 W 的任何一组标准正交基下的矩阵为 $\begin{pmatrix}0 & b_1\\ -b_1 & 0\end{pmatrix}$，其中 $\pm b_1 i$ 是 $\mathscr{A}|_W$ 的特征值且 $\lambda_1=-b_1^2$.

证. (1). $A^2=-AA^T$ → 半负定 且 特征值 $\in\mathbb{R}$ ≤ 0

(2). $\lambda\neq 0$ 时. $W=(x_1, Ax_1)$

A不变： $A(ax_1+bAx_1)=aAx_1+b\lambda_1x_1\in W$

$\mathscr{A}: W\to W$

$x\mapsto Ax$

$\forall\ \{\alpha_1,\alpha_2\}\subseteq W$ 标准正交基

$\alpha_i^T A\alpha_i \underset{(\text{数})^T}{=\!=} (\alpha_i^T A\alpha_i)^T = \alpha_i^T A^T\alpha_i = -\alpha_i^T A\alpha_i$

$\Rightarrow\ \alpha_i^T A\alpha_i=0$ 而 $\dim W=2$

$\Rightarrow\ \exists\ a.b\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}A\alpha_1=a\alpha_2\\ A\alpha_2=b\alpha_1\end{cases}$

$$\begin{cases}\lambda\alpha_1=A^2\alpha_1=aA\alpha_2=ab\alpha_1 \Rightarrow \lambda=ab\\ -\lambda\,\alpha_1^T\alpha_1=-\alpha_1^TA^2\alpha_1=\alpha_1^TA^TA\alpha_1=|a\alpha_2|^2=a^2|\alpha_2|^2\end{cases}$$

$\Rightarrow\ \lambda=-a^2=ab$

$\Rightarrow\ \mathscr{A}(\alpha_1\ \alpha_2)=(\alpha_1\ \alpha_2)\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}.$

注：1. 思考，我们在哪使用了"标准正交基"条件？

2. 有同学直接使用了 A 的正交相似标准型.
问题是，W 已经取定，你的第一步应该是
确定合适的基，及 $\mathscr{A}|_W$ 的矩阵表示 $\tilde{A}$，再讨论其标准型
$\tilde{A}\in\mathbb{R}^{2\times 2}$，$\tilde{A}^T=-\tilde{A}$？

$\mathscr{A}(x_1\ Ax_1)=(x_1\ Ax_1)\begin{pmatrix}0 & -b^2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ → 该矩阵不与 $\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & 0\end{pmatrix}$ 正交相似.

故 $\{x_1, Ax_1\}$ 作为基不合适。

3. 该问题本质给出了 $A=-A^T$ 正交相似到其标准型的算法.

step 1. 计算 A^2 $(=-AA^T)$ 及特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

step 2. 对 $\lambda_i\neq 0$. 考虑 $V_{\lambda_i}=\{x \mid A^2x=\lambda_i x\}$ 为 A 不变子空间

取标准正交基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n_i}\}$.

step 3. $A|_{V_{\lambda_i}}$ 的矩阵 $\tilde{A}$ 满足 $\tilde{A}^T=-\tilde{A}$

$\tilde{A} \xrightarrow[\text{正交相似}]{}$ 标准形. (P_i 正交阵) 令 $(\beta_1\cdots\beta_{n_i})=(\alpha_1\cdots\alpha_{n_i})P_i$

step 4. 将 step3 得到的向量扩充为标准正交基

3. 设 Hermite 方阵

$$H=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{6} & \frac{i}{2\sqrt{3}} \\ \frac{i}{\sqrt{6}} & -\frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

求酉方阵 U 使 $U^{-1}HU$ 为对角矩阵，并求 H^k（k 为正整数）.

证. $\lambda=0,\ 1$ 为特征值. （0 为 2 重）

0 对应 $x_1=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$. $x_2=\begin{pmatrix}\sqrt{3}i\\ 0\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$.

1 对应 $x_3=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ -1\\ \sqrt{3}i\end{pmatrix}$

对 x_1, x_2, x_3 进行 Gram-Schmidt 正交化

可得 P.

注. 不同特征值对应特征向量相互正交

故只需对 x_1, x_2 作 Gram-S. 正交化, 对 x_3 单位化即可.

Gram-Schmidt 正交化 in $\mathbb{C}^n$

1. 算法

$$\beta_1 = \alpha_1, \qquad \gamma_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|}$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1 \qquad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|}.$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{|\beta_2|^2}\beta_2.$$

$\vdots$

2. 注意事项.

① 内积 $(\alpha, \beta) = \alpha \beta^H$ ← 共轭转置.

（如果有人以 $(\alpha, \beta) = \bar{\alpha}\beta^T$，则算法需调整）

② $$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{|\beta_1|^2}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{|\beta_2|^2}\beta_2$$

$$= \alpha_3 - (\alpha_3, \gamma_1)\gamma_1 - (\alpha_3, \gamma_2)\gamma_2$$

注意内积对象 不是 $\frac{(\alpha_3, \alpha_2)}{|\alpha_2|^2}\alpha_2$.

第六次习题课的一处错误

· 正交相似.

（并未假定 A 对称）

定理. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 其特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

且 $1 \le k \le s$ 时 $\lambda_{2k} = \overline{\lambda_{2k-1}} \notin \mathbb{R}$

$2s+1 \le k \le n$ 时 $\lambda_k \in \mathbb{R}$

则 A 可正交相似成如下方阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & & * \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & A_s & * & \cdots \\ & & & \lambda_{2s+1} & * \\ & & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 A_k 为 2 阶方阵. $(1 \le k \le s)$

特征值为 $\lambda_{2k}, \lambda_{2k-1}$

$\boxed{A_k \text{ 形如 } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}$ ×

比如 $\begin{pmatrix} 0 & -b^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 无法正交相似到 $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.