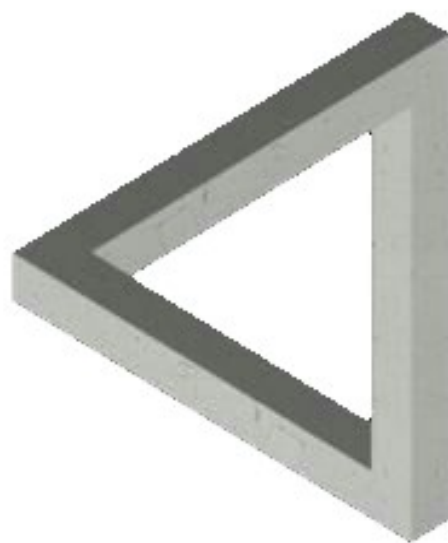


University of Science and Technology of China

中国科学技术大学

# 微分方程引论课程笔记



苏茂江

sumaojiang@mail.ustc.edu.cn

2022 年 12 月 31 日

# 目录

<b>1</b>	<b>* 微分方程的基本概念与分类</b>	<b>6</b>
1.1	微分方程的一般定义 . . . . .	6
1.2	一阶微分方程的方向场 . . . . .	8
<b>2</b>	<b>了解得比较彻底的一阶常微分方程的求法</b>	<b>8</b>
2.1	可分离变量的方程 . . . . .	8
2.2	一阶线性常微分方程 . . . . .	8
2.3	齐次方程 . . . . .	9
2.4	Bernoulli 方程 . . . . .	9
2.5	Riccati 方程 . . . . .	10
2.6	导数未解出的一阶方程 . . . . .	10
2.6.1	可直接解出 $\frac{dy}{dx}$ 的方程 . . . . .	10
2.6.2	x 可显式表达类型 . . . . .	10
2.6.3	t 可显式表达类型 . . . . .	11
2.7	积分因子法（最后的大杀器） . . . . .	11
2.8	首次积分法求解一阶常微分方程组 . . . . .	13
<b>3</b>	<b>n 阶常系数线性微分方程</b>	<b>14</b>
3.1	n 阶齐次常系数线性微分方程的求解 . . . . .	14
3.2	n 阶非齐次常系数线性微分方程的求解 . . . . .	16
3.2.1	猜 . . . . .	16
3.2.2	运算子法（最推荐） . . . . .	16
3.2.3	常数变易法 . . . . .	18
<b>4</b>	<b>线性常微分方程组</b>	<b>19</b>
4.1	一阶齐次常系数线性微分方程组的求解 . . . . .	19
4.1.1	A 可以对角化 . . . . .	21
4.1.2	A 有复数特征值 . . . . .	22
4.1.3	*A 不可对角化（求 Jordan 标准形） . . . . .	23
4.1.4	*A 不可对角化（待定指数函数法） . . . . .	23
4.2	一阶非齐次常系数线性微分方程组的求解 . . . . .	23
4.3	* 一阶线性变系数常微分方程组 . . . . .	25
4.4	二阶齐次线性常微分方程 . . . . .	26
4.4.1	猜一个特解 +Louville 公式 . . . . .	26
4.4.2	* 幂级数法 or 广义幂级数法 . . . . .	27
4.5	*Sturm-Liouville 边值定理 . . . . .	27

<b>5 * 常微分方程的一些定性理论</b>	<b>27</b>
5.1 Picard 定理	27
5.2 解的延申定理	28
5.3 解对初值的连续依赖性定理	28
5.4 解对初值的连续性定理	29
5.5 解对初值的稳定性	29
5.5.1 线性近似	30
5.5.2 李雅普诺夫直接方法	30
<b>6 一阶偏微分方程</b>	<b>30</b>
6.1 一阶线性偏微分方程组	30
6.1.1 齐次情况	30
6.1.2 一般情况	31
6.2 一阶拟线性偏微分方程组	31
6.2.1 特征线法	32
6.2.2 * 参数曲面法 (二阶)	32
<b>7 二阶 PDE (偏微分方程) 的分类与标准形</b>	<b>34</b>
7.1 两个自变量时的化简	34
7.1.1 双曲型方程	36
7.1.2 抛物型方程	36
7.1.3 椭圆型方程	37
7.2 当 $A$ 是常矩阵时的化简	37
7.3 进一步化简: 消掉常一阶项!	38
<b>8 波与扩散</b>	<b>39</b>
8.1 一维波动方程	39
8.1.1 求解无边界一维波动方程初值问题	39
8.1.2 能量法证明解的唯一性	40
8.1.3 在 $L^\infty$ 模空间中证明解的稳定性	42
8.1.4 依赖区间, 决定区域, 影响区域	42
8.2 一维热方程	42
8.2.1 最值原理	42
8.2.2 能量法证明初边值解的唯一性	43
8.2.3 在 $L^\infty$ 模和 $L^2$ 模空间中解的稳定性	44
8.2.4 构造函数证明无边界解的唯一性	44
8.2.5 求解无边界一维热方程初值问题	45

<b>9 反射与源</b>	<b>45</b>
9.1 反射（半直线问题）	45
9.1.1 波动方程 Dirichlet 边界	45
9.1.2 波动方程 Neumann 边界	46
9.1.3 波动方程 Robin 边界	47
9.1.4 热方程 Dirichlet 边界	48
9.1.5 热方程 Neumann 边界	49
9.1.6 热方程 Robin 边界	49
9.2 源（非齐次问题）	50
9.2.1 叠加原理	50
9.2.2 Duhamel 原理	51
9.2.3 波动方程带源直线问题（无边界）	52
9.2.4 波动方程带源半直线问题 Dirichlet 边界	53
9.2.5 热方程带源直线问题（无边界）	54
9.2.6 其它	55
<b>10 边值问题</b>	<b>55</b>
10.1 波动方程	55
10.1.1 Dirichlet 边界	55
10.1.2 Neumann 边界	57
10.1.3 混合型边界	58
10.1.4 Robin 边界	59
10.2 热方程	60
10.2.1 Dirichlet 边界	60
10.2.2 其它	62
10.3 非齐次边界的处理方法	62
10.4 常微分下的特殊 Duhamel 原理	62
10.5 有界弦受迫振动问题	63
10.6 有限长杆热传导问题	65
<b>11 调和方程和 Green 函数</b>	<b>67</b>
11.1 调和方程一些性质	68
11.1.1 $\Delta$ 的平移不变性	68
11.1.2 $\Delta$ 的旋转不变性	68
11.1.3 最值原理	68
11.1.4 Dirichlet 边值问题解的至多唯一性	69
11.2 Laplace 算子 $\Delta$ 极坐标表示（2 维，3 维）	70
11.2.1 2 维 Laplace 算子 $\Delta$ 的极坐标表示	70

11.2.2 3 维 Laplace 算子 $\Delta$ 的极坐标表示 . . . . .	70
11.3 分离变量法求解调和方程 . . . . .	71
11.3.1 分离变量法求解二维调和方程 (矩形区域, Dirichlet 边界) . . . . .	71
11.3.2 分离变量法求解二维调和方程 (圆域区域, Dirichlet 边界) . . . . .	72
11.4 Green 第一公式, 第二公式和基本积分公式 . . . . .	74
11.5 有了基本积分公式后的一些新性质 . . . . .	77
11.5.1 平均公式 . . . . .	77
11.5.2 强最值原理 . . . . .	77
11.5.3 能量法证明特殊边界下的解至多唯一性 . . . . .	78
11.5.4 Dirichlet 原理 (Dirichlet 边界) . . . . .	79
11.5.5 Dirichlet 原理 (Robin 边界) . . . . .	79
11.6 Green 函数与理论解 . . . . .	80
11.6.1 Dirichlet 边界 . . . . .	80
11.6.2 Neumann 边界 . . . . .	81
11.6.3 Robin 边界 . . . . .	82
11.7 镜像法求特殊区域的 Green 函数 . . . . .	83
11.7.1 三维半空间 (Dirichlet 边界) . . . . .	83
11.7.2 三维球体 (Dirichlet 边界) . . . . .	84
11.7.3 三维半球体 (Dirichlet 边界) . . . . .	85
11.7.4 三维半空间 (Neumann 边界) . . . . .	85
<b>12 高维发展型偏微分方程</b> . . . . .	<b>85</b>
12.1 三维波动方程 . . . . .	86
12.1.1 能量守恒 . . . . .	86
12.1.2 特征锥 . . . . .	87
12.1.3 初值问题解的唯一性 (全空间) . . . . .	88
12.2 高维偏微分方程初边值问题解的唯一性 . . . . .	89
12.2.1 波动方程 (Dirichlet 边界) . . . . .	89
12.2.2 波动方程 (Neumann 边界) . . . . .	90
12.2.3 波动方程 (Robin 边界) . . . . .	90
12.2.4 热方程 (Dirichlet/Neumann 边界) . . . . .	91
12.2.5 热方程 (特殊 Robin 边界) . . . . .	92
12.3 高维波动方程初值问题解 . . . . .	93
12.3.1 三维波动方程径向解 . . . . .	93
12.3.2 三维的一般情形! Kirchhoff' s Formula . . . . .	94
12.3.3 降维法求二维解 . . . . .	97
12.4 非线性方程的解法 . . . . .	97
12.4.1 Kirchhoff 变换 . . . . .	97

1 * 微分方程的基本概念与分类	6
12.4.2 Cole-Hopf 变换 . . . . .	98
12.4.3 相似变换 . . . . .	98
12.4.4 行波变换 . . . . .	98
12.4.5 平面波变换 . . . . .	99
<b>13 绝技 · Fourier 变换!</b>	<b>99</b>
13.1 心法 · 有限区间 Fourier 展开! . . . . .	99
13.2 突破极限! Fourier 变换神功初成! . . . . .	100
13.3 卷积! . . . . .	101
13.4 Fourier 变换的若干性质 . . . . .	101
13.4.1 线性性 . . . . .	101
13.4.2 频移特性 . . . . .	102
13.4.3 平移特性 . . . . .	102
13.4.4 微分关系 . . . . .	102
13.4.5 微分特性 . . . . .	102
13.4.6 卷积特性 . . . . .	102
13.5 用 Fourier 变换强鲨线性方程 . . . . .	103
13.5.1 求解一维热方程直线问题 . . . . .	103
13.5.2 求解一维波动方程 . . . . .	104
13.5.3 求解全空间调和方程基本解 . . . . .	106
13.5.4 求解非齐次三维波动方程初值问题 . . . . .	107

## 前言

本课程教材为金福临的《常微分方程》1984 年版和 Walter A. Strauss 的《Partial Differential Equations An Introduction》，还参考了陈祖墀的《偏微分方程》(第三版)和 Evans 的《Partial Differential Equations》(第二版)。工作量大，难免有所疏忽。如有错漏欢迎私信我或发邮件至 sumaojiang@mail.ustc.edu.cn 联系我，谢谢！

## 1 \* 微分方程的基本概念与分类

### 1.1 微分方程的一般定义

**定义 1.** 凡是链接自变量  $x$  与这个自变量的未知函数  $y$  和它的导数的方程

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

叫做常微分方程，其中导数实际出现的最高阶数叫做常微分方程的阶。次数的定义则与多项式相同。

注意, 函数  $F$  应当是固定的已知的函数, 即  $F$  本身与未知函数  $y$  无关, 不能有平移, 复合等情况, 例如  $y' = y(x-1)$  就不是一个常微分方程,  $y(x-1)$  是一个与  $y$  相关的函数, 但与上述的定义不符, 它并不是一个“合法的”变量。

**定义 2.** 如果次数均是一次的, 那么称此方程是线性常微分方程, 否则称它为非线性方程常微分方程。

**定义 3.** 如果未知函数  $y$  是一个多元函数 (当然不会只有一个自变量  $x$ ), 那么微分方程中会出现偏导数, 这种方程被称为偏微分方程

**定义 4.** 设  $n$  阶微分方程的解  $y = f(x, C_1, C_2 \dots C_n)$  包含  $n$  个独立常数  $C_1, C_2 \dots C_n$ , 那么称其为通解, 这里我们说  $C_1, C_2 \dots C_n$  是独立的, 指的是 Jacobi 行列式 (\*)

$$\frac{D[f, f^1, \dots, f^{n-1}]}{D[C_1, C_2 \dots C_n]} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial C_1} & \frac{\partial f}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial C_n} \\ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial C_1} & \frac{\partial f^{(2)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial f^{(2)}}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

其中,  $f^{(i)}$  指的是  $f$  对  $x$  求  $i$  次偏导。如果一个解不包含任何独立常数, 那么称其为特解。

值得注意的是, 通解并不是全部解, 特解也不一定包含于通解。再一看, 独立这个定义看起来花里胡哨的, 特别是 jacobi 行列式, 看起来很奇怪。那么, 我们思考一下, 我们平时所说的  $C_1, C_2 \dots C_n$  是独立的到底指的是什么? 我觉得应该是存在一个函数  $G(C_1, C_2 \dots C_{n-1}) = C_n$ 。这样,  $C_1, C_2 \dots C_n$  就不能随意取值, 只能很惨地被函数  $G$  给束缚住。此时考察 jacobi 行列式: 因为对于任意  $i$ ,  $\frac{\partial f^{(i)}}{\partial C_n} = \frac{\partial f^{(i)}}{\partial C_1} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial C_n} + \dots + \frac{\partial f^{(i)}}{\partial C_{n-1}} \cdot \frac{\partial C_{n-1}}{\partial C_n}$ , 从而

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial C_1} & \frac{\partial f}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial C_n} \\ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial C_1} & \frac{\partial f^{(2)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial f^{(2)}}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \end{vmatrix}$$

,

$$\text{其中 } A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial C_1} & \frac{\partial f}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial C_n} \\ \frac{\partial f^{(2)}}{\partial C_1} & \frac{\partial f^{(2)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial f^{(2)}}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & & & \frac{\partial C_1}{\partial C_n} \\ & 1 & & \frac{\partial C_2}{\partial C_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \frac{\partial C_{n-1}}{\partial C_n} \end{pmatrix}$$

这是一个  $n \times n-1$  矩阵乘上  $n-1 \times n$  矩阵, 由 *Binet - Cauchy* 公式知  $\begin{vmatrix} A & B \end{vmatrix} = 0$

从而, jacobi 行列式为 0。这么一看, 好像用 Jacobi 定义还是有点道理的。但是我们为啥要用 Jacobi 定义呢? 这是因为不仅仅当  $G(C_1, C_2 \dots C_{n-1}) = C_n$  时 Jacobi 行列式才等于 0。比如  $G(C_1, C_2 \dots C_n) = 0$  时 Jacobi 行列式也为 0, 显然 Jacobi 定义的独立更具有普适性。

另一方面，如果我们知道了通解  $y = f(x, C_1, C_2 \dots C_n)$ ，可以对其  $x$  求  $n-1$  阶导得到一个关于  $C_1, C_2 \dots C_n$  线性方程组（视  $x, y$  的  $i$  阶导数为常数），将  $C_1, C_2 \dots C_n$  用  $x, y$  的  $i$  阶导数表示，再代入  $y$  随  $x$  的  $n$  阶偏导，即  $y^{(n)} = \frac{\partial f(x, C_1, C_2 \dots C_n)}{\partial x}$ ，这样就得到一个  $n$  阶微分方程，而  $y$  是它的通解。

## 1.2 一阶微分方程的方向场

考虑一阶微分方程  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ，其中  $f$  是连续函数，那么我们可以在具体的一个点上画出其方向！实际上，我们往往先让  $f(x, y) = k$ ， $k$  是常数，先把所有方向斜率为  $k$  的点的曲线画出来，再改变  $k$  得到一定范围内的方向场。

# 2 了解得比较彻底的一阶常微分方程的求法

## 2.1 可分离变量的方程

这种方程直接分离变量两边积分即可，不要忘记常数  $C$ 。

定义 5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)} \quad (2.1)$$

求解方法没什么好说的，不过这还是提醒我们要掌握一些常见或不常见的积分。重要的是，一定不要忘记分类讨论分母是 0 的时候对应的特解！

## 2.2 一阶线性常微分方程

定义 6.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (2.2)$$

求解方法是常数变易法，想法是这样的  
齐次方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

的通解用分离变量法求得为

$$y = Ce^{-\int p dx} \quad (2.3)$$

$C$  是常数，那么如果把  $C$  看作  $x$  的函数的话带回公式 (2.2) 得到

$$C'(x)e^{-\int p dx} = q(x) \quad (2.4)$$



意味着我们只要选取满足公式 (2.4) 的  $C(x)$  就可以了, 对 (2.4) 两边积分得到  $C$  再代回 (2.3) 得到例 2 通解

$$y = e^{-\int p dx} \left( C + \int q \cdot e^{\int p dx} dx \right) \quad (2.5)$$

$C$  是任意常数, 由初值确定。

## 2.3 齐次方程

定义 7.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.6)$$

解决的方法是做一个简单的换元令  $u = \frac{y}{x}$ , 代入得到

$$u + x \frac{du}{dx} = f(u) \quad (2.7)$$

这是一个可分离变量的方程回到 2.1 的情况了, 两边积分得到通解或者通积分, 回代即得答案。

类似的还有这种齐次方程

定义.

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + l}\right)$$

进行简单的变量代换

$$u = x - p, v = y - q$$

选取  $p, q$  把  $c, l$  消掉即可化为齐次方程, 即  $p, q$  满足

$$\begin{cases} ap + bq = c \\ mp + nq = l \end{cases}$$

当这个方程没有解的时候, 意味着  $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ , 这时候直接令

$$u = ax + by$$

就可以把原方程化为 2.1 的可分离变量方程

## 2.4 Bernoulli 方程

定义 8.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \quad (2.8)$$

特别地,  $n=0$  的时候就是 2.2 里面的方程。对 Bernoulli 方程, 只要做简单换元  $u = y^{1-n}$ , 就可以把方程 (2.8) 化为

$$\left(\frac{1}{1-n}\right) \frac{du}{dx} + p(x)u = q(x) \quad (2.9)$$

这就和 2.2 完全一样了, 求得通解回代即可

## 2.5 Riccati 方程

定义 9.

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \quad (2.10)$$

一般的 Riccati 方程求解非常困难, 但是 Riccati 方程有一个特性: 如果求得一个特解  $u$ , 我们让解  $y = v+u$  有

$$\frac{dv}{dx} = p(x)v^2 + [2p(x)u(x) + q(x)]v \quad (2.11)$$

这是一个 Bernoulli 方程, 可以求得解  $v$ ,  $v$  是包含一个独立常数  $C$  的, 于是我们就可以得到 Riccati 方程的通解  $y = v+u$

在考试中,, 往往要先猜出一个特解  $u$  (多为多项式), 再求通解

## 2.6 导数未解出的一阶方程

意思就是说方程并没有化为标准的

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

的形式, 那么我们也有一些方法去求

### 2.6.1 可直接解出 $\frac{dy}{dx}$ 的方程

可以直接把导数算出来的, 例如

例 1.

### 2.6.2 $x$ 可显式表达类型

定义 10.

$$x = g(t, \dot{x}) \quad (2.12)$$

我们设

$$p = \dot{x}$$

对方程 (2.12) 两边对  $t$  求导, 因为  $g(t, p)$  对  $t$  求导只会出现一个线性的一阶  $\frac{dp}{dt}$ , 故可以得到

$$\frac{dp}{dt} = f(t, p)$$

就得到了一个导数已经解出的方程

### 2.6.3 $t$ 可显式表达类型

定义 11.

$$t = g(x, \dot{x}) \quad (2.13)$$

类似地, 我们设

$$p = \dot{x}$$

对方程 (2.13) 两边对  $x$  求导, 就得到

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p)$$

也是一个导数已经解出的方程

## 2.7 积分因子法 (最后的大杀器)

当之前所有的方法都不适用的时候, 还有一个碰碰运气的方法 (很有技巧性), 最后的救命稻草!

首先我们要知道啥是恰当方程

定义 12. 对于常微分方程

$$Mdt + Ndx = 0 \quad (2.14)$$

如果存在  $u(t, x)$  使得

$$\begin{cases} u_t = M \\ u_x = N \end{cases}$$

那么就称方程 (2.14) 是一个恰当方程,  $u(t, x)$  是一个全微分

显然，如果一个方程是恰当方程，那么就好办多了，思路是计分别积分得到

$$\begin{cases} u = \int M dt + f(x) \\ u = \int N dx + g(t) \end{cases} \quad (2.15)$$

比对一下，答案立马就出来了。那么我们怎么知道一个方程到底是不是恰当方程呢？

一方面我们知道， $u(t, x)$  的二阶偏导数连续的话，有

$$u_{tx} = u_{xt}$$

也就是

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

实际上有

**定理 1.** 若方程 (2.14) 中  $M, N$  满足

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

那么方程 (2.14) 是恰当的

然而，对于不是恰当的方程该怎么办呢？如果前面所有的方法都不适用，那么还有最后一招：积分因子法

**定义 13.** 对于方程 (2.14), 如果存在  $v$  使得方程

$$vMdt + vNdx = 0$$

是恰当的，那么  $v$  称为方程 (2.14) 的一个积分因子，也等价于

$$\frac{\partial vM}{\partial x} = \frac{\partial vN}{\partial t}$$

想法很好，但是不幸的是，积分因子并没有什么特别好的求法，只能靠：猜！

不过猜也是有技巧的，我们可以先假定  $v$  的一些常见形式，先行验证，或者靠分组积分因子法去猜。

以下给出的命题，大家可以自己验证：

**命题 1.**  $v$  仅依赖于  $x$  即  $v = v(x) \Leftrightarrow M, N$  满足

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{M} = G(x)$$

即  $G$  仅依赖于  $x$

这是因为

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x}}{M} = \frac{dv}{dt} \cdot v$$

而  $v$  是仅依赖于  $x$  的, 同样的道理

**命题 2.** 存在积分因子  $v = v(t^\alpha x^\beta)$  的积分因子  $\Leftrightarrow$

$$\left(-\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x}\right)(\alpha x^\beta t^{\alpha-1}N - \beta t^\alpha x^{\beta-1}M)^{-1} = G(t^\alpha x^\beta)$$

分组积分因子法就不介绍了,, 感觉基本没啥用, 实际上考试的时候也很少有时间去验证上述命题,, 个人推荐考试时猜不出来就跳过, 其它做完再回来验证命题或者继续猜积分因子

## 2.8 首次积分法求解一阶常微分方程组

一般的常微分方程组的解法很复杂,, 首次积分也是一种技巧性极强的方法(不保证一定能做出来), 大体上意思是只要能够(怎么得到首次积分就各显神通了)出足够多的首次积分, 就视为得到通积分。

**定义 14.**

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{cases} \quad (2.16)$$

方程对于这种方程, 想要得到通解

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases} \quad (2.17)$$

往往是很困难的(前面的一些方程也很困难)

我们得到这样的隐式解(首次积分组)就视为最终答案了

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = C_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1} \end{cases}$$

其中  $C_1 \dots C_{n-1}$  是独立常数. 注意首次积分只有  $n-1$  个, 可以视作(2.17)有  $n$  个式子, 有  $n+1$  个元(包括  $t$ ), 花掉一个式子消去  $t$  以后就只有  $n-1$  个式子了. 下面介绍一个经典例题

例 2. 求解 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cy - bz \\ \frac{dy}{dt} = az - cx \\ \frac{dz}{dt} = bx - ay \end{cases}, \text{ 其中 } a, b, c \text{ 为常数}$$

解答. 这个式子高度轮换, 故往往考虑三个式子相加或者乘上一个因子再相加, 我们得到

$$\begin{cases} x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 0 \\ a \frac{dx}{dt} + b \frac{dy}{dt} + c \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} xdx + ydy + zdz = 0 \\ adx + bdy + cdz = 0 \end{cases}$$

从而得到答案

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = C_1 \\ ax + by + cz = C_2 \end{cases}$$

### 3 n 阶常系数线性微分方程

#### 3.1 n 阶齐次常系数线性微分方程的求解

一般的 n 阶齐次常系数线性微分方程的形式为

定义 15.

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = 0 \quad (3.1)$$

齐次的意思是等号右边是 0, 非齐次指的是等号右边是一个关于 t 的函数  $f(t)$ 。现在我们先求解齐次方程。

为了求解这个方程, 需要先介绍一些引理:

引理 1. \* 若  $y_1, y_2$  是方程 (3.1) 的解, 那么对  $y_1, y_2$  的任意线性组合  $ay_1 + by_2$  也是方程 (3.1) 的解

证明. 由于对于任意 i,

$$\frac{d^i (ay_1 + by_2)}{dt^i} = a \frac{d^i y_1}{dt^i} + b \frac{d^i y_2}{dt^i}$$

,

于是

$$a_n \frac{d^n (ay_1 + by_2)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} (ay_1 + by_2)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 (ay_1 + by_2)$$

$$= a \left( a_n \frac{d^n y_1}{d^n t} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_1}{d^{n-1} t} + \dots + a_0 y_1 \right) + b \left( a_n \frac{d^n y_2}{d^n t} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_2}{d^{n-1} t} + \dots + a_0 y_2 \right) = 0$$

从而  $ay_1 + by_2$  也是方程 (3.1) 的解  $\square$

回到原方程, 方程 (3.1) 的求解要从有个人发现了一个方法说起 (不知道是谁, 但是方法永流传 ~)。我们先假设方程 (3.1) 的解长得像这样:

$$x = e^{\lambda t} \quad (3.2)$$

那么代回原方程, 我们惊奇地发现只要  $\lambda$  满足特征方程

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (3.3)$$

那么  $x = e^{\lambda t}$  还真是方程 (3.1) 的解(容易验证) !!!

更为神奇的是, 由多项式相关理论, 特征方程 (3.3) 恰好有  $n$  个根。设  $n$  个根为  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。那么我们就找到了  $n$  个解  $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$  !!! 又根据引理 1,  $C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$  也是解, 而这个解是通解!!!

等等等等, 别高兴的太早, 要想  $C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$  是通解, 还有一个问题有待验证: 常数  $C_i$  独立。幸运的是, 这一点也是成立的。

因为  $C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} = 0$  可以推出  $C_i = 0$ , 从而  $e^{\lambda_i t}$  线性无关, 即解是独立的, 那么  $C_i$  也是独立的。

注 1. 详细的证明要从 Jacobi 出发, 过程比较复杂, 详见

这样, 我们就神奇地给出了方程 (3.1) 的通解, 真是神奇:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \quad (3.4)$$

但是还有一个问题: 特征方程 (3.3) 不一定有  $n$  个实根, 如果有复数根怎么办? 如果  $a_0 \dots a_n$  均为实数的话,  $p(\lambda)$  是一个实系数多项式, 它的复数根应当是共轭的! 我们设

$$\begin{cases} \lambda_1 = a + bi \\ \lambda_2 = a - bi \end{cases}$$

是一对共轭根,  $a, b$  为实数, 那么  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$  是原方程解, 即  $e^{at+bit}, e^{at-bit}$

由 Euler 公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.5)$$

其证明往往是用 Tylor 展开来解决, 就不赘述了。

于是

$$\begin{cases} x_1 = e^{at} (\cos bt + i \sin bt) \\ x_2 = e^{at} (\cos bt - i \sin bt) \end{cases}$$

是原方程通解，取实部和虚部就有

$$\begin{cases} x_1 = e^{at} \cos bt \\ x_2 = e^{at} \sin bt \end{cases} \quad (3.6)$$

是原方程线性无关通解，于是我们就解决了复数根的问题。（对复数求导等法则将在复变函数课程里介绍）

用（3.6）去替换（3.4）里面的  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ ，我们就完全解决了（3.1）问题

### 3.2 n 阶非齐次常系数线性微分方程的求解

一般的 n 阶齐次常系数线性微分方程的形式为

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = f(t) \quad (3.7)$$

上一小节，我们已经得到了 n 阶齐次常系数线性微分方程的通解。而齐次与非齐次方程也就差了一点点，我们该如何求解（3.4）呢？

为了寻求方程（3.4）的解，我们需要用到齐次方程的通解

**引理 2.** 如果  $x_1$  是方程（3.1）的解， $x_2$  是方程（3.7）的解，那么  $x_1 + x_2$  也是方程（3.7）的解  
证明. 显然 □

注意，齐次方程我们是很好处理的，我们可以得到有 n 个独立常数的通解，对于非齐次方程，如果我们知道非齐次方程的一个特解  $x_2$  和齐次方程的通解  $x_1$ ，那么由引理 2，就有非齐次方程的通解：

$$x = x_1 + x_2$$

注意， $x_1$  里面是有 n 个独立常数的!!! 从而  $x$  就是非齐次方程的通解。那么问题就变成求非齐次方程（3.7）的一个特解了。对于求特解，有一些特殊方法：

#### 3.2.1 猜

先猜常数和多项式（待定系数去得到系数）

#### 3.2.2 运算子法（最推荐）

这是由工程师发明的一个方法，在求非齐次方程特解这个问题上特别好用，其数学的严格证明复杂，也往往不被作要求。再次列举一下问题：求

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = f(t)$$



的特解

让  $D = \frac{d}{dt}$ ,  $D$  是一个微分算子 (就是一个名字), 则

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_0$$

$P(D)$  也是一个微分算子且

$$P(D)x = f(t)$$

形式上,  $x$  就等于

$$x = P(D)^{-1} f(t)$$

就得到了特解。哈哈哈哈哈 ~

那么, 实际上  $P(D)^{-1}$  到底是个什么东西呢?

对多项式有一定了解的话肯定知道对于  $P(x) \in F[x]$ , 是并不一定存在  $P(x)^{-1}$  的, 比如  $f(x) = x$  这个多项式, 多项式环嘛, 要是乘法都有逆就叫做多项式域了。

但是对任意  $P(x) \in F[x]$  我们是可以定义广义逆的:

$$P(x)^{-1} = \frac{1}{P(x)} \quad (3.8)$$

$\frac{1}{P(x)}$  是幂级数展开! 设

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

则

$$\frac{1}{P(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (3.9)$$

系数  $b_n$  可以由大除法确定: 举个例子

**例 3.**  $P(D) = 2D^2 + 2D + 1$ , 求  $P(D)^{-1}$

**解答.** 用  $F(D) = 1 + 0D + 0D^2 + 0D^3 + \dots$  对  $P(D)$  做大除法 (倒着除)

在这里可能会有一种问题, 那就是我们不可能算完所有的  $b_n$  啊, 但实际问题我们往往只需要算两三项即可。为什么呢? 注意

$$\frac{1}{P(D)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n D^n$$

这是一个微分算子, 比如当  $\frac{1}{P(D)}$  作用到多项式  $f(t)$  上的时候, 那么只有  $D$  的次数超过  $f$  的次数, 再怎么求导都是 0!! 所以大于这个次数的系数  $b_n$  就无需计算了。

### 3.2.3 常数变易法

先说结论，常数变易法对于求非齐次方程特解这个问题提供了一个很好地理论上可行地办法，但实际上，当阶数  $n$  增加时，复杂度骤增。做题时往往只有  $n=2$  才会考虑或者运算子法难以做出特解地时候才考虑常数变易法。

对于

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = f(t)$$

设齐次方程的通解为

$$x = C_1 x_1 + \dots C_n x_n \quad (3.10)$$

不写出  $x_i$  的形式是因为不确定是实根  $\lambda$  对应的解  $e^{\lambda t}$ , 还是复数共轭根对应的  $x_1 = e^{at} \cos bt, x_2 = e^{at} \sin bt$ , 都不影响

把  $C_i (1 \leq i \leq n)$  看作关于  $t$  的函数  $C_i(t)$  我们想让这样的  $x$  满足非齐次方程，对 (3.10) 式对  $t$  求导，得到

$$\frac{dx}{dt} = C'_1 x_1 + \dots C'_n x_n + C_1 x_1' + \dots C_n x_n' \quad (3.11)$$

我们让  $C'_1 x_1 + \dots C'_n x_n = 0$ ，继续对 (3.11) 求导，让  $C'_1 x_1' + \dots C'_n x_n' = 0$ ，以此类推，我们让

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 C'_1 + \dots x_n C'_n = 0 \\ \frac{dx_1}{dt} C'_1 + \dots \frac{dx_n}{dt} C'_n = 0 \\ \vdots \\ \frac{d^{n-2} x_1}{dt^{n-2}} C'_1 + \dots \frac{d^{n-2} x_n}{dt^{n-2}} C'_n = 0 \\ \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} C'_1 + \dots \frac{d^{n-1} x_n}{dt^{n-1}} C'_n = f(t) \end{array} \right. \quad (3.12)$$

那么就有

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = C_1 \frac{dx_1}{dt} + \dots C_n \frac{dx_n}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} = C_1 \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} + \dots C_n \frac{d^{n-1} x_n}{dt^{n-1}} \\ \frac{d^n x}{dt^n} = f(t) + C_1 \frac{d^n x_1}{dt^n} + \dots C_n \frac{d^n x_n}{dt^n} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

把 (3.13) 往 (3.7) 里一代，嘿！刚好满足 (3.7) 从而我们只要从 (3.12) 里解出相应的  $C_i(t)$  即可。常数变易法其本质是把常数变易成  $t$  的函数，从而给了我们更多操作空间来凑出非齐次项  $f(t)$

## 4 线性常微分方程组

在 2.8 中我们讲了可以用首次积分法求一阶线性常微分方程组，本节将介绍一些一般理论，首次积分太过于技巧性，可能今天能猜出来，哪天运气不好怎么猜都猜不出来（吐槽）。

### 4.1 一阶齐次常系数线性微分方程组的求解

一阶常系数线性微分方程组指的是：

定义 16.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

其中  $a_{ij}$  是常数，这就叫一阶常系数线性微分方程组。齐次指的是  $f_i(t) \equiv 0$ 。这种形式的方程我们往往用矩阵表示来化简

我们让

$$\vec{x} = (x_1, x_2 \dots x_n)^T$$

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$\vec{f}(t) = (f_1, f_2 \dots f_n)^T$$

注意，这里  $x, f(t)$  都是向量!! 其  $n$  个分量都是函数!!!

就可以把 (4.1) 写成

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t) \quad (4.2)$$

A 是  $n$  阶常方阵，我们先来看齐次的情形，即  $f(t) \equiv 0$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (4.3)$$

我们先观察式 (4.3) 如果  $\vec{x}$  就是一个函数，不是向量函数，A 也是一个常数，而不是矩阵，那么就简单了，解是

$$x = e^{At}C \quad (4.4)$$

我们猜测 (4.3) 的解也可以有这种形式，那么如果 A 是矩阵呢？

首先我们要了解 e 是什么东西，最经典的定义是

定义 17.

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (4.5)$$

但其实如果根据  $e^x$  的 Tylor 展开, 还可以这么定义  $e$  (级数定义)

定义 18.

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad (4.6)$$

$e^x$  的 Tylor 展开:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

相应地, 我们可以这么定义  $e^{At}$

定义 19.

$$e^{At} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(At)^k}{k!} \quad (4.7)$$

由定义 (4.7) 可以看出, 首先  $e^{At}$  肯定是一个矩阵, 因为它等于矩阵  $At$  的级数和 ( $At = (a_{ij}t)_{n \times n}$ )。注意到对任意的  $x$ , 级数

$$\sum_{k=0}^n \frac{(xt)^k}{k!}$$

对  $t$  均一致收敛。从而, 级数

$$\sum_{k=0}^n \frac{(At)^k}{k!}$$

也应当对  $t$  一致收敛, 因为每个元对应的级数  $\sum_{k=0}^n \frac{(a_{ij}t)^k}{k!}$  对  $t$  一致收敛嘛。从而定义 19 是合理的。于是我们来看看

$$\vec{x} = e^{At} \vec{C} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(At)^k}{k!} \vec{C}$$

其中  $C = (C_1, \dots, C_n)^T$  是常向量。这样猜出来的形式解  $x$  到底满不满足方程 (4.3) 呢? 我们对  $x$  求导

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{de^{At}}{dt} \vec{C} = A \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(At)^k}{k!} \vec{C} = A\vec{x} \quad (4.8)$$

第二个等式可以仔细验证一下, 比较关键。从而我们就解出了齐次方程 (3.3) 的解

$$\vec{x} = e^{At} \vec{C} \quad (4.9)$$

当然我们的工作还没做完，我们还要化简  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(At)^k}{k!}$ ，这需要计算 A 的 n 次幂，我们知道常见的计算矩阵 n 次幂的方法就是把 A 对角化，或者相似到 Jordan 标准形。无论是下面哪种情况，都要通过 A 的特征多项式

$$\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) \quad (4.10)$$

计算 A 的特征值。

#### 4.1.1 A 可以对角化

如果 A 可以对角化，即存在可逆矩阵 P 使得

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

A 的 k 次幂

$$A^k = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(At)^k}{k!} &= P^{-1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & \\ & \frac{\lambda_2^k}{k!} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} P \\ &= P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P \end{aligned}$$

故

$$\vec{x} = e^{At} \vec{C} = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} P \vec{C} \quad (4.11)$$

PC 也可以看作任意常向量（形象地讲是 C 把 P 吃掉了，因为 C 是任意常向量），于是

$$\vec{x} = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \vec{C} \quad (4.12)$$

其中  $P^{-1} = (\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$ ,  $\vec{p}_i$  是特征值  $\lambda_i$  对应的特征向量，于是我们还可以把式子 (4.11) 写成这种形式：

$$\vec{x} = C_1 \vec{p}_1 e^{\lambda_1 t} + \dots C_n \vec{p}_n e^{\lambda_n t} \quad (4.13)$$

时刻注意  $\vec{x}$  是个向量!! 现在我们就完成了齐次方程的求解。

#### 4.1.2 A 有复数特征值

如果 A 有复数特征值，因为 A 是实矩阵，其复特征值必然成对共轭出现，设

$$\begin{cases} \lambda_1 = a + bi \\ \lambda_2 = a - bi \end{cases}$$

对应的特征向量为  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ 。值得注意的是  $\vec{p}_1$  和  $\vec{p}_2$  也共轭（详细见线性代数）在 (4.12) 中这两个特征值贡献的两个线性无关解为

$$\begin{cases} x_1 = \vec{p}_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2 = \vec{p}_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (4.14)$$

由欧拉公式，可以写为

$$\begin{cases} x_1 = \vec{p}_1 e^{at} (\cos bt + i \sin bt) \\ x_2 = \vec{p}_2 e^{at} (\cos bt - i \sin bt) \end{cases} \quad (4.15)$$

因为  $p_1$  和  $p_2$  共轭，设

$$\begin{cases} \vec{p}_1 = \vec{p} + \vec{q}i \\ \vec{p}_2 = \vec{p} - \vec{q}i \end{cases}$$

$\vec{p}, \vec{q}$  均为 n 为实列向量，在 (4.14) 中取  $x_1$  的实部和虚部（取  $x_2$  是一样的，因为共轭），得到另外的线性无关解

$$\begin{cases} x'_1 = e^{at} (\vec{p} \cos bt - \vec{q} \sin bt) \\ x'_2 = e^{at} (\vec{q} \cos bt + \vec{p} \sin bt) \end{cases} \quad (4.16)$$

用  $x'_1$  和  $x'_2$  去替换 (4.12) 中的  $x_1$  和  $x_2$ , 对所有的复特征值做这种操作, 最后可以得到  $n$  个实线性无关解。

### 4.1.3 \*A 不可对角化 (求 Jordan 标准形)

这里有两种方法, 先讲 Jordan 标准形。因为化简  $e^{At}$  是要求  $A$  的  $n$  次幂, 虽然  $A$  不能对角化, 但实矩阵  $A$  是可以相似到 Jordan 标准形的。用线性代数里教授的方法就可以求得  $A$  的 Jordan 标准形  $J$ , 即

$$A = P^{-1}JP$$

从而

$$A^n = P^{-1}J^nP$$

$J$  的  $n$  次幂是相对好求的, 这里就不再赘述了。

### 4.1.4 \*A 不可对角化 (待定指数函数法)

直接给出结论 (只需验证即可, 可以倒推思考这个方法是怎么想出来的):

**定理 2.** 对于 (4.10) 的  $i$  重根  $\lambda$  我们可以给出  $i$  个线性无关解

$$\left( e^{\lambda t} \vec{R}_1(t), e^{\lambda t} \vec{R}_2(t), \dots, e^{\lambda t} \vec{R}_i(t) \right) \quad (4.17)$$

其中对  $1 \leq j \leq i$  有

$$\vec{R}_j(t) = \vec{r}_{j,0} + \frac{t}{1!} \vec{r}_{j,1} + \dots + \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \vec{r}_{j,i-1} \quad (4.18)$$

$\vec{r}_{j,0}$  是  $(A - \lambda I)^i \vec{r} = 0$  的  $i$  个线性无关解, 对  $1 \leq l \leq i-1$  有

$$\vec{r}_{j,l} = (A - \lambda I)^l \vec{r}_{j,0} \quad (4.19)$$

## 4.2 一阶非齐次常系数线性微分方程组的求解

即求解方程

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t) \quad (4.20)$$

与第三章类似, 实际上我们要运用叠加原理, 把非齐次常系数线性微分方程组的通解转化为求齐次常系数线性微分方程组的通解 + 非齐次常系数线性微分方程组的一个特解。齐次常系数线性微分方程组的通解已经在 4.1 中解决了, 现在我们集中精力求解一个非齐次方程的特解

就行。这里运用常数变易法比较适合，因为只有一阶，还记得第三章我们说常数变易法实际上只适合小阶数， $n=1$  很小吧。

设非齐次方程 (4.20) 对应的齐次方程

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \quad (4.21)$$

的通解为

$$\vec{x} = \Phi(t) \vec{C} \quad (4.22)$$

由第三章我们知道  $e^{At}$  是一个  $\Phi(t)$ ，化简过后  $\Phi(t)$  会更简单，例如 (4.12) 中的

$$\Phi(t) = P^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

然后常数变易法，把  $\vec{C}$  看作关于  $t$  的函数  $\vec{C}(t)$ ，代回方程 (4.20) 中，得到

$$\Phi'(t) \vec{C} + \Phi(t) \vec{C}' = A\Phi(t) \vec{C} + \vec{f}(t)$$

所以，我们只要让

$$\Phi(t) \vec{C}' = \vec{f}(t) \quad (4.23)$$

积分，即

$$\vec{C} = \int \Phi^{-1}(t) \vec{f}(t) dt \quad (4.24)$$

代回 (4.22) 即可找到方程 (4.20) 的一个特解

$$\vec{x}^* = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \vec{f}(t) dt \quad (4.25)$$

从而方程 (4.20) 的通解为

$$\vec{x} = \Phi(t) \vec{C} + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \vec{f}(t) dt \quad (4.26)$$

也可以写成

$$\vec{x} = \Phi(t) \left( \vec{C} + \int \Phi^{-1}(t) \vec{f}(t) dt \right) \quad (4.27)$$

与 2.2 的公式 (2.5) 对比一下，有没有发现很像呢？这是因为 (2.5) 是 (4.27) 的特殊情形（方程组只有一个方程时）。



### 4.3 \* 一阶线性变系数常微分方程组

定义 20.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (4.28)$$

其中  $a_{ij}(t)$  是关于  $t$  的函数。与常系数类似，用矩阵表示可以化简它。写成

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t)$$

齐次方程指的是

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} \quad (4.29)$$

对于一般的线性变系数常微分方程组我们往往难以求解，但是通解会有一些性质。

定义 21. 给定  $n$  个  $n$  维向量函数

$$\begin{cases} \vec{\varphi}_1 = (\varphi_{11}(t), \dots, \varphi_{1n}(t))^T \\ \vdots \\ \vec{\varphi}_n = (\varphi_{n1}(t), \dots, \varphi_{nn}(t))^T \end{cases}$$

记

$$W(t) = \det \Phi(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} \quad (4.30)$$

为  $n$  个向量函数  $\vec{\varphi}_1 \dots \vec{\varphi}_n$  的 Wronsky 行列式

定理 3. (Liouville公式) 齐次线性微分方程组 (变系数) 的任意  $n$  个解的 Wronsky 行列式满足

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds} \quad (4.31)$$

证明. 因为  $\vec{\varphi}_i(t)$  是方程 (4.29) 的解, 故

$$\frac{d\vec{\varphi}_i(t)}{dt} = A(t)\vec{\varphi}_i(t) \quad (4.32)$$

从而

$$\frac{d\varphi_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) \varphi_{kj}(t) \quad (4.33)$$

而

$$\frac{dW(t)}{dt} = \sum_{l=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{d\varphi_{l1}(t)}{dt} & \cdots & \frac{d\varphi_{ln}(t)}{dt} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} \quad (4.34)$$

这个公式是由导数的乘法法则和行列式的计算决定的。把 (4.33) 代入 (4.34) 得到

$$\frac{dW(t)}{dt} = \sum_{l=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{lk}(t) \varphi_{k1}(t) & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{lk}(t) \varphi_{kn}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} = \sum_{l=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{ll}(t) \varphi_{k1}(t) & \cdots & a_{ll}(t) \varphi_{kn}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix} \quad (4.35)$$

$$= \sum_{l=1}^n a_{ll}(t) W(t) = \text{tr} A(t) W(t)$$

从而

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds} \quad (4.36)$$

证毕！

□

## 4.4 二阶齐次线性常微分方程

定义 22.

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0 \quad (4.37)$$

注意，这里的系数是关于 t 的函数！处理这种方程有两种方法

### 4.4.1 猜一个特解 + Louville 公式

先仔细观察方程，看能不能猜出一个解，要是能猜出来就简单了。因为我们可以通过换元

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \end{cases}$$

把二阶齐次线性常微分方程 (4.37) 转变成二阶齐次线性常微分方程组

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix} \vec{x} \quad (4.38)$$

同样的, 实际上我们可以把  $n$  阶齐次线性常微分方程转变成二阶齐次线性常微分方程组。继续, 我们设已经猜出来的解是  $\varphi(t)$ , 而  $x(t)$  是我们想求的另外一个解, 那么由 Liouville 公式

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & x(t) \\ \varphi'(t) & x'(t) \end{vmatrix} = \varphi(t)x'(t) - x(t)\varphi'(t) = W(0)e^{-\int_0^t p ds} \quad (4.39)$$

用  $\frac{1}{\varphi^2(t)}$  乘上式得到

$$\frac{d\left(\frac{x(t)}{\varphi(t)}\right)}{dt} = \frac{Ce^{-\int_0^t p ds}}{\varphi^2(t)} \quad (4.40)$$

即

$$x(t) = \varphi(t) \int_0^t \frac{1}{\varphi^2(s)} e^{-\int_0^s p(u) du} ds \quad (4.41)$$

这个解与  $\varphi(t)$  线性无关, 就得到方程 (4.37) 的通解

$$x(t) = C_1\varphi(t) + C_2\varphi(t) \int_0^t \frac{1}{\varphi^2(s)} e^{-\int_0^s p(u) du} ds \quad (4.42)$$

#### 4.4.2 \* 幂级数法 or 广义幂级数法

如果给不出经典解, 我们可以给出广义幂级数解 (形式解), 参考丁同仁, 李承治的《常微分方程教程》P207~P236。

### 4.5 \* Sturm-Liouville 边值定理

请参考陈祖墀《偏微分方程》的相关章节。

## 5 \* 常微分方程的一些定性理论

相关证明请参考丁同仁, 李承治的《常微分方程教程》P63~P89。在此仅列出结论 (也许后续会补上咕咕咕)

### 5.1 Picard 定理

Picard 定理是定性理论的核心, 又被称作初值解的存在唯一性定理。

**定理 4.**  $\vec{f}(t, \vec{x})$  在矩形区域  $D: \{(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t - t_0| \leq a, |\vec{x} - \vec{x}_0| \leq a\}$  内连续且满足  $L$ - 条件, 则

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

在区间  $I=[t_0 - h, t_0 + h]$  上存在唯一解。其中

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad (5.2)$$

$$M = \max_D \vec{f}(t, \vec{x}) \quad (5.3)$$

$L$ - 条件为: 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ , 对  $\forall t, \forall |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta(\varepsilon)$ , 有  $|\vec{f}(t, \vec{x}) - \vec{f}(t, \vec{x}_0)| < L |\vec{x} - \vec{x}_0|$

## 5.2 解的延申定理

**定理 5.**  $\Gamma$  是区域  $D$  内任意一点  $P(t_0, x_0)$  的一条积分曲线, 则  $\Gamma$  将在区域  $D$  内延申到边界

值得注意的是,  $D$  未必是有界区域, 只要到达边界即可, 不一定能到达端点。

## 5.3 解对初值的连续依赖性定理

给出解对初值的连续依赖性的定义:

**定义 23.** 设初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases} \quad (5.4)$$

的解为

$$\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0) \quad (5.5)$$

在区间  $[a, b]$  上存在, 若对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, t_0, \vec{x}_0) > 0$ , 使得对任意满足  $|t_0^* - t_0| < \delta(\varepsilon), |\vec{x}_0^* - \vec{x}_0| < \delta(\varepsilon)$  的所有初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0^*) = \vec{x}_0^* \end{cases} \quad (5.6)$$

的解

$$\vec{x}^* = \vec{\varphi}^*(t, t_0^*, \vec{x}_0^*) \quad (5.7)$$

在  $[a, b]$  上存在, 且 对  $\forall t \in [a, b], |\vec{\varphi}^*(t, t_0^*, \vec{x}_0^*) - \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0)| < \varepsilon$   
那么称点  $(t_0, \vec{x}_0)$  连续依赖于初值  $(t_0^*, \vec{x}_0^*)$ 。

**定理 6.** (解对初值的连续依赖性定理)

若  $\vec{f}(t, \vec{x})$  在区域  $D$  内连续且满足  $L$ - 条件时, 方程

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases} \quad (5.8)$$

有解

$$\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0) \quad (5.9)$$

且对  $\forall t \in [a, b]$ , 都有

$$\vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0) \in D \quad (5.10)$$

那么初值问题

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0^*) = \vec{x}_0^* \end{cases} \quad (5.11)$$

的解在点  $(t_0, \vec{x}_0)$  连续依赖于初值  $(t_0^*, \vec{x}_0^*)$ 。其中 •

$L$ - 条件为: 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ , 对  $\forall t, \forall |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta(\varepsilon)$ , 有  $|\vec{f}(t, \vec{x}) - \vec{f}(t, \vec{x}_0)| < L |\vec{x} - \vec{x}_0|$

## 5.4 解对初值的连续性定理

**定理 7.** (解对初值的连续性定理)

若  $\vec{f}(t, \vec{x})$  在区域  $D$  内连续且满足  $L$ - 条件, 那么方程

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases} \quad (5.12)$$

的解

$$\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0) \quad (5.13)$$

在它的范围内关于  $(t, \vec{x})$  连续

## 5.5 解对初值的稳定性

请参考丁同仁, 李承治的《常微分方程教程》P250~P254

## 5.5.1 线性近似

## 5.5.2 李雅普诺夫直接方法

## 6 一阶偏微分方程

## 6.1 一阶线性偏微分方程组

先看看这东西长啥样：

定义 24.

$$b_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + b_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_n} + c(x_1, \dots, x_n) z = f(x_1, \dots, x_n) \quad (6.1)$$

其中  $z$  是关于  $x_1 \dots x_n$  的函数。令  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$

考虑用特征线法求解。先寻找一条特征曲线  $\vec{x}(t)$ ，即把所有的  $x_i$  看成关于  $t$  的函数。那么可以把方程 (6.1) 转化为

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = b_i(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dz}{dt} = -c(x_1, \dots, x_n) z + f(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (6.2)$$

其中求解

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = b_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (6.3)$$

可以得到  $n-1$  个首次积分  $\varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ ，注意这些首次积分是满足 (6.3) 的。即

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dx_k}{dt} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = b_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + \dots + b_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = 0 \quad (6.4)$$

而且

$$\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \quad (6.5)$$

$\Phi$  是其变元的任意连续可微函数，那么  $\Phi$  也是满足 (6.4) 的

## 6.1.1 齐次情况

即

$$c \equiv f \equiv 0$$

时， $z = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$  就是方程 (6.1) 的解，由 (6.4) 知道这是显然的。

### 6.1.2 一般情况

仅有  $n-1$  个变元是不够满足非齐次情况的，我们自己任意选取任意一个  $\varphi_n$ ，应该满足  $\varphi_n$  与  $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$  独立，即

$$\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0 \quad (6.6)$$

由反函数定理，可以求出反函数

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \end{cases}$$

设  $z = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  那么就有

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k} \quad (6.7)$$

代入到 (6.1) 中，即

$$\sum_{i=1}^n b_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k} = -cz + f \quad (6.8)$$

注意 对于  $(1 \leq i \leq n-1)$ ，有 (6.4)，故 (6.8) 可以化简为

$$\left( \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right) \frac{\partial z}{\partial \varphi_n} = -c(\varphi_1, \dots, \varphi_n) z + f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \quad (6.9)$$

这是一个一阶 ODE 问题，很好求解。可以求到通解

$$z = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

由此看出选取  $\varphi_n$  的关键是尽量让反函数比较好求，以及  $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}$  尽可能简单。

## 6.2 一阶拟线性偏微分方程组

先瞅瞅要解决啥东东：

定义 25.

$$\sum_{k=1}^n b_k(x_1, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_k} = c(x_1, \dots, x_n, z) \quad (6.10)$$

发现啥不一样没？ $b_i$  和  $c$  还和  $z$  有关！我们有两种武器去对付它

### 6.2.1 特征线法

类似于上一小节，依旧可以采用特征线法求解。先找特征线：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b_1(x_1, \dots, x_n, z) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = b_n(x_1, \dots, x_n, z) \\ \frac{dz}{dt} = c(x_1, \dots, x_n, z) \end{cases} \quad (6.11)$$

求得  $n$  个首次积分  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ，这些首次积分满足

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{dx_k}{dt} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + c \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = 0 \quad (6.12)$$

同样地， $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  是其变元的任意连续可微函数，那么  $\Phi$  也是满足 (6.12) 的另一方面，设隐函数  $V(x_1, \dots, x_n, z) = 0$  是原方程的通积分，那么对  $x_j$  求偏导就有

$$0 = \frac{\partial V(x_1, \dots, x_n, z)}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (6.13)$$

从而得到

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = - \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^{-1} \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (6.14)$$

代入 (6.10) 即

$$\sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial V}{\partial x_k} + c \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (6.15)$$

有没有发现这个和 (6.12) 一样啊！故  $V = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ，这个是通积分，即隐式解。

### 6.2.2 \* 参数曲面法（二阶）

详细证明参考陈祖墀《偏微分方程》的相关章节，仅给出方法：

对于二阶方程

$$a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u) \quad (6.16)$$

和初值（参数曲线）（ $z = u$ ）

$$\begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases}$$



先验证

$$J = \begin{vmatrix} a & b \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (6.17)$$

以确保存在反函数，再求解特征方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, u) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y, u) \\ \frac{dz}{dt} = c(x, y, u) \end{cases}$$

得到显式解

$$\begin{cases} x = X(t, C_1, C_2, C_3) \\ y = Y(t, C_1, C_2, C_3) \\ z = Z(t, C_1, C_2, C_3) \end{cases} \quad (6.18)$$

再代入初值 ( $t = t_0$ ) 解出

$$\begin{cases} x = X(t, s) \\ y = Y(t, s) \\ z = Z(t, s) \end{cases} \quad (6.19)$$

由于 (6.17) 我们知道可以从

$$\begin{cases} x = X(t, s) \\ y = Y(t, s) \end{cases} \quad (6.20)$$

中解出反函数

$$\begin{cases} t = T(x, y) \\ s = S(x, y) \end{cases} \quad (6.21)$$

代入  $z = Z(t, s)$  得到通解

$$z = u(x, y) \quad (6.22)$$

相比较而言，特征线法的难度在于求首次积分，而参数曲面法难点在于求显式解 (6.18) 和求解反函数，各有利弊吧，但是相当多的情况是往往首次积分比较好求。

## 7 二阶 PDE（偏微分方程）的分类与标准形

$n$  个变元的一般二阶 PDE 形式为

定义 26.

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(\vec{x}) u_{x_i x_j} + f(\vec{x}, u, Du) = 0 \quad (7.1)$$

其中我们把前面看作是线性主部，后面是  $x, u$  的一阶和零阶项。让  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  如果  $u$  关于  $\vec{x}$  的二阶导连续的话有

$$u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$$

故可以选取  $A$  为对称阵!! 在点  $\vec{x}_0$  处的方程类型是按照如下规则分类的:

1.  $A(\vec{x}^0)$  的特征值非 0, 且仅有一个异号: 双曲型
2.  $A(\vec{x}^0)$  的特征值非 0, 且异号特征值  $>1$ : 超双曲型
3.  $A(\vec{x}^0)$  的特征值有一个为 0: 抛物型
4.  $A(\vec{x}^0)$  的特征值非 0, 且均同号: 椭圆型

这儿注意: 因为  $A$  是对称阵, 所以它的特征值均为实数!!! 因此才能这样分类。线代真是数学基础啊 ~

### 7.1 两个自变量时的化简

此时方程变为

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (7.2)$$

所有给定函数在指定区间内可微。此时记

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

我们先按照之前讲的分类方法给出方程 (7.2) 的分类。先求  $A$  的特征值, 令

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad (7.4)$$

从而由 Vieta 定理,

$$\lambda_1 \lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \det(A)$$

于是, 方程 (7.2)

1. 当  $\det(A) > 0$  时, 是椭圆型
2. 当  $\det(A) = 0$  时, 是抛物型
3. 当  $\det(A) < 0$  时, 是双曲型

接着我们来化简 (7.2) 我们希望通过换元得到尽量简单的方程, 比如让方程 (7.2) 中某些系数为 0.

设

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases} \quad (7.5)$$

需要满足  $\xi, \eta$  独立, 即

$$D = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

那么对于新方程

$$A_{11}u_{xx} + 2A_{12}u_{xy} + A_{22}u_{yy} + \tilde{f}(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (7.6)$$

其系数满足

$$\begin{cases} A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\ A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \end{cases} \quad (7.7)$$

可以看出, 如果  $\xi, \eta$  是方程

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \quad (7.8)$$

的两个特解, 那么  $A_{11}$  和  $A_{22}$  就等于 0 啦。对于方程 (7.8), 我们可以通过一个引理, 把它化为我们可以求解的常微分方程。

**引理 3.**  $z = \varphi(x, y)$  是方程 (7.8) 的解  $\Leftrightarrow \varphi(x, y) = h$  是方程

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0 \quad (7.9)$$

的通积分

证明.  $\Rightarrow$ : 我们验证满足 (7.8) 的解  $\varphi$  有  $\varphi(x, y(x)) = h$  是方程 (7.9) 的通积分, 对  $\varphi(x, y(x)) = h$  关于  $x$  求导, 有

$$\varphi_x + \varphi_y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (7.10)$$

得到

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{dy}{dx} \quad (7.11)$$

从而代入到方程 (7.8) 中就得到了方程 (7.9)

⇐: 如果  $\varphi$  是方程 (7.9) 的通积分, 那么, 对  $\varphi(x, y(x)) = h$  关于  $x$  求导, 有

$$\varphi_x + \varphi_y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (7.12)$$

得到

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \quad (7.13)$$

从而代入到方程 (7.9) 中就得到了方程 (7.8) □

从而我们可以通过求方程 (7.9) 的积分来得到  $\varphi$ , 对于方程 (7.9), 对于判别式

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det(A) \quad (7.14)$$

有三种情况

### 7.1.1 双曲型方程

此时,  $\det(A) < 0$ , 即  $\Delta > 0$ , 从而方程 (7.9) 可以显式解出  $\frac{dy}{dx}$ , 即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (7.15)$$

从此可以解出两个特解, 即  $\xi, \eta$ , 换元后  $A_{11}$  和  $A_{22}$  等于 0, 成功化简!

### 7.1.2 抛物型方程

此时,  $\det(A) = 0$ , 即  $\Delta = 0$ , 解出

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad (7.16)$$

$$A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0$$

第二个等式是因为  $\det(A) = 0$ , 得到  $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ . 于是我们得到  $(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y) = 0$ , 于是

$$A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0$$

于是成功化简!

### 7.1.3 椭圆型方程

此时,  $\det(A) > 0$ , 即  $\Delta < 0$ , 解出

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm i\sqrt{-a_{12}^2 + a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad (7.17)$$

可以得到两个共轭复特征线:

$$\begin{cases} \varphi_1 = p(x, y) + iq(x, y) \\ \varphi_2 = p(x, y) - iq(x, y) \end{cases} \quad (7.18)$$

其中  $p, q$  是实函数, 取

$$\begin{cases} \xi = p \\ \eta = q \end{cases} \quad (7.19)$$

会让  $A_{11} = A_{22} \neq 0$  而  $A_{12} = 0$ , 也成功化简!

## 7.2 当 A 是常矩阵时的化简

如果 A 是常矩阵, 我们做换元

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

$P = (p_{ij})_{n \times n}$  也是常矩阵, 我们来看看做了这么一个变换以后, 新的方程长啥样。先得到一阶导

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_i} u_{y_k} = \sum_{k=1}^n p_{ki} u_{y_k}$$

再求导得到二阶导

(7.21)

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^n p_{ki} \sum_{l=1}^n p_{lj} u_{y_k y_l} = \begin{pmatrix} p_{1i} & \cdots & p_{ni} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{y_1 y_1} & \cdots & u_{y_1 y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{y_n y_1} & \cdots & u_{y_n y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

从而, 设  $b_{ml}$  是  $u_{y_m y_l}$  的系数, 从 (7.21) 可以看出,  $a_{ij} u_{x_i x_j}$  项对  $b_{ml}$  的贡献为

$$a_{ij} p_{mi} p_{lj}$$

$$b_{ml} = \sum a_{ij} p_{mi} p_{lj} = \begin{pmatrix} p_{m1} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p_{l1} \\ \vdots \\ p_{ln} \end{pmatrix}$$

从而, 换元以后新系数矩阵  $B = (b_{ml})_{n \times n}$

$$B = P A P^T \quad (7.23)$$

从而, 取相应的  $P$  即可使  $B$  是与  $A$  相合的任意矩阵。 $A$  是实对称阵, 其相合标准形是

$$D = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & O_{n-r} \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

$p$  是正惯性系数,  $q$  是负惯性系数。 $P$  的求法是用增广矩阵, 可以参考线性代数的部分。

### 7.3 进一步化简：消掉常一阶项！

无论是 7.1 还是 7.2 的换元, 都会产生新的一阶项! 所有如果想要消掉常一阶项的话, 要在二阶项已经化简完之后再消掉一阶项。另一个更重要的原因是, 只有化简完的二阶项我们才能找到一个简单明了的办法去消掉常一阶项。对于方程

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} d_{ij} u_{x_i x_j} - 2 \sum_{i=1}^p b_i u_{x_i} + 2 \sum_{i=p+1}^r b_i u_{x_i} + f(\vec{x}, u) = 0 \quad (7.25)$$

系数矩阵  $D$  满足式 (7.24),  $b_i$  是常数。为了消掉一阶项, 我们采用换元法

$$u = v e^{\sum_{i=1}^r b_i x_i} \quad (7.26)$$

那么, 一阶导有

$$u_{x_i} = (v_{x_i} + b_i v) e^{\sum_{i=1}^r b_i x_i} \quad (7.27)$$

二阶导有

$$u_{x_i x_i} = (v_{x_i x_i} + 2b_i v_{x_i} + b_i^2) e^{\sum_{i=1}^r b_i x_i} \quad (7.28)$$

则  $v$  满足的方程为

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n}^n d_{ij} v_{x_i x_j} + \tilde{f}(\vec{x}, v) = 0 \quad (7.29)$$

大功告成！注意，消掉一阶项会产生新的 0 阶项！

## 8 波与扩散

### 8.1 一维波动方程

#### 8.1.1 求解无边界一维波动方程初值问题

先求解最简单的无边界的初值问题

定义 27.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (8.1)$$

其中

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (8.2)$$

是方程 (8.1) 的初值，表示在  $t$  等于 0 的时候弦每一个点的初振幅和初速度。

在此仅介绍最简单的一种办法去求解 (8.1)，换元法。令

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases} \quad (8.3)$$

那么有

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

则新的系数矩阵

$$B = PAP^T = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2c^2 \\ 2c^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

即

$$4c^2 u_{\xi\eta} = 0 \quad (8.6)$$

积分可得

$$u = f(x + ct) + g(x - ct) \quad (8.7)$$

$f, g$  是其变元任意连续可微函数。(8.7) 也被称作行波解。在没有初值时只能得到 (8.7) 现在代入 (8.1) 的初值, 我们有:

$$\begin{cases} \varphi = f + g \\ \psi = c(f' - g') \end{cases} \quad (8.8)$$

求得

$$\begin{cases} f = \frac{1}{2}\varphi + \int \psi dx \\ g = \frac{1}{2}\varphi - \int \psi dx \end{cases} \quad (8.9)$$

得到大名鼎鼎的 *d'Alembert* 公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds \quad (8.10)$$

这样就求得了 (8.1) 的解。

### 8.1.2 能量法证明解的唯一性

令

$$KE(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2 dx \quad (8.11)$$

其物理意义是动能, 数学上可以理解为是凑出来的特殊式。为什么特殊呢, 我们考察其关于时间的导数,

$$\frac{dKE(t)}{dt} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 2u_t u_{tt} dx = c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_{xx} dx \quad (8.12)$$

分部积分法, 得到

$$\frac{dKE(t)}{dt} = c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_t u_{xx} dx = c^2 u_t u_x \Big|_{-\infty}^{+\infty} - c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_{tx} u_x dx \quad (8.13)$$

我们考虑初值紧支的情况, 即初值仅在有界区域上不等于 0. 由 *d'Alembert* 公式, 解  $u$  也是紧支的。此时  $c^2 u_t u_x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

于是



$$\frac{dKE(t)}{dt} = -c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_{tx} u_x dx = -\frac{1}{2} c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du_x^2}{dt} dx = -\frac{d\frac{1}{2}c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx}{dt} \quad (8.14)$$

于是我们令

$$PE(t) = \frac{1}{2} c^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \quad (8.15)$$

其物理意义是势能。把它们加起来，就有

$$E(t) = KE(t) + PE(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2 + c^2 u_x^2 dx \quad (8.16)$$

则

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0 \quad (8.17)$$

即

$$E(t) = \text{const} \quad (8.18)$$

那么对于初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (8.19)$$

反证法，若解不唯一，则存在两个不同解  $u_1$  和  $u_2$ ，令  $w = u_1 - u_2$ ，则  $w$  满足

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ w_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (8.20)$$

其能量

$$E(t) \equiv E(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} w_t^2(x, 0) + c^2 w_x^2(x, 0) dx \quad (8.21)$$

但是由 (8.20),  $w_t(x, 0) = w_x(x, 0) = 0$ , 故  $E(t) \equiv 0$ , 意味着  $w_t \equiv w_x \equiv 0$ , 即  $w \equiv \text{const} = w(x, 0) = 0$

于是

$$u_1 \equiv u_2 \quad (8.22)$$

矛盾！故方程 (8.19) 的解是唯一的！

### 8.1.3 在 $L^\infty$ 模空间中证明解的稳定性

在连续函数空间  $C([a, b])$  上可以定义  $L^p$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) 范数

$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \quad (8.23)$$

$L^\infty$  模就是

$$\|f\|_{+\infty} = \max_{a \leq x \leq b} |f| \quad (8.24)$$

解的稳定性可以理解成, 只要初值足够小, 那么得到的解之间的差就可以足够小。对于问题 (8.1) 如果解对  $t$  的定义域是有界的 ( $t \in [-T, T]$ ), 那么, 设有两个解  $u_1$  和  $u_2$ , 其对应初值为相应下标的  $\varphi, \psi$ , 那么由 *d'Alembert* 公式, 有:

$$\|u_1 - u_2\|_{+\infty} = \max \left| \frac{1}{2} [(\varphi_1 - \varphi_2)(x + ct) + (\varphi_1 - \varphi_2)(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} (\psi_1 - \psi_2) ds \right| \quad (8.25)$$

则

$$\|u_1 - u_2\|_{+\infty} \leq \max |\varphi_1 - \varphi_2| + t \max |\psi_1 - \psi_2| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{+\infty} + T \|\psi_1 - \psi_2\|_{+\infty} \quad (8.26)$$

故解是稳定的。

### 8.1.4 依赖区间, 决定区域, 影响区域

相关部分可以参考 Walter A. Strauss 的 *Partial Differential Equations An Introduction*。

## 8.2 一维热方程

接着来看看热方程

定义 28.

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0, k > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (8.27)$$

### 8.2.1 最值原理

最值原理讲述的是在闭矩形区域中的热方程初边值问题的最大值只能在矩形的三条边界上取到。

定理 8. 对于一维热方程的初边值问题

$$u_t = ku_{xx} \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T \quad (8.28)$$

设  $Q_T = (0, l) \times (0, T]$ ,  $\Gamma_T = \overline{Q_T}/Q_T$ , 即两侧线和底线。那么

$$\max_{\overline{Q_T}} |u| = \max_{\Gamma_T} |u| \quad (8.29)$$

证明. 我们采用对解进行小扰动的方法来证明, 仅证明最大值情形。

反证法, 设在点  $p(x_0, t_0) \in Q_T$  取得最大值。那么由解的连续性, 存在一个固定的小  $\varepsilon > 0$ ,  $v = u + \varepsilon x^2$ ,  $v$  也满足在点  $p(x_0, t_0) \in Q_T$  取得最大值。那么在最大值点有

$$v_t \geq 0 \quad (8.30)$$

之所以可以大于 0 是因为  $p$  可能在  $t = T$  上, 且由于在最大值点的 Hessian 矩阵半负定,

$$v_{xx} \leq 0$$

这是因为半负定方阵的任意主子式 (特别地取对角元) 小于等于 0.

那么在最大值点

$$v_t = u_t = u_{xx} = v_{xx} - 2\varepsilon < 0 \quad (8.31)$$

与 (8.30) 矛盾! 从而假设不成立, 证毕!  $\square$

### 8.2.2 能量法证明初边值解的唯一性

定理 9. 一维热方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x, t) & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ u(0, t) = g(t) & u(l, t) = h(t) \end{cases} \quad (8.32)$$

的解唯一。

证明. 用最值原理证明。设有两个解  $u_1$  和  $u_2$ , 那么令  $w = u_1 - u_2$ , 则  $w$  满足

$$\begin{cases} w_t = kw_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0 & w(l, t) = 0 \end{cases} \quad (8.33)$$

由最值原理,  $\max_{\overline{Q_T}} |u| = \max_{\Gamma_T} |u|$ , 然而由于三个初边值均为 0, 故  $\max_{\overline{Q_T}} |u| = 0$ , 即  $u \equiv 0$ ,  $u_1 = u_2$ , 证毕!  $\square$

### 8.2.3 在 $L^\infty$ 模和 $L^2$ 模空间中解的稳定性

设方程 (8.32) 有两个解  $u_1$  和  $u_2$ , 其对应初值为相应下标的  $\phi, g, h$  在  $L^\infty$  模空间中, 由最大值原理

$$\|u_1 - u_2\|_{+\infty} = \max |u_1 - u_2| = \max \{|\phi_1 - \phi_2|, |g_1 - g_2|, |h_1 - h_2|\} \quad (8.34)$$

故解稳定。

在  $L^2$  模空间中, 有

$$\|u_1 - u_2\|_2^2 = \int_0^l |u_1 - u_2|^2 dx \leq \int_0^l |\phi_1 - \phi_2|^2 dx \quad (8.35)$$

故解稳定。

### 8.2.4 构造函数证明无边界解的唯一性

无边界情况下, 没有最值原理, 其证明相对来讲要复杂一些。

**定理 10.** 方程 (8.27) 如果有有界解  $u$ , 那么解是唯一的

注. 在 Evans 的《Partial Differential Equations》(第二版) 中给出了  $u$  更弱的条件  $|u| \leq ae^{b|x|^2}$ ,  $a > 0, b > 0$ , 这样的  $u$  都是唯一的, 定理 6 中  $u$  有更强的有界条件。

证明. 只要证明初值为 0 的时候, 只有唯一解  $u \equiv 0$  即可 (否则令  $w = u_1 - u_2$ )。设  $M = \max |u|$ , 对任一点  $(x_0, y_0)$ , 我们证明  $u(x_0, y_0) = 0$ 。为此我们引入一个区域

$$Q_L = \{(x, t) \mid |x - x_0| \leq L, 0 \leq t \leq t_0\}$$

构造一个函数

$$v(x, t) = \frac{2Mk}{L^2} \left( t + \frac{|x - x_0|^2}{2k} \right) \quad (8.36)$$

$v$  的系数是我们精妙凑出的。我们先证明在  $Q_L$  内,  $|u| \leq v$ , 仅证明  $u \leq v$ , 另一边同理。这是因为令  $w = u - v$ , 则  $w$  满足

$$\begin{cases} w_t = u_t - v_t = u_t - \frac{2Mk}{L^2} \\ w_{xx} = u_{xx} - \frac{2M}{L^2} \end{cases} \quad (8.37)$$

则  $w$  满足

$$\begin{cases} w_t = kw_{xx} & (x, t) \in Q_L \\ w(x, 0) = u(x, 0) - v(x, 0) = 0 - \frac{M|x-x_0|^2}{L^2} \leq 0 \\ w|_{|x-x_0|=L} = u|_{|x-x_0|=L} - \frac{2Mk}{L^2}t - M \leq 0 \end{cases} \quad (8.38)$$

由最值原理知  $w \leq 0$ , 即  $u \leq v$ , 同理  $u \geq -v$ , 对任意  $L > 0$  成立。于是

$$|u(x_0, t_0)| \leq \lim_{L \rightarrow +\infty} v(x_0, t_0) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{2Mkt_0}{L^2} = 0 \quad (8.39)$$

从而就证明了  $u \equiv 0$ , 于是解唯一。  $\square$

### 8.2.5 求解无边界一维热方程初值问题

它的求解比波动方程复杂得多。相关部分可以参考 Walter A. Strauss 的 Partial Differential Equations An Introduction。在此仅给出公式：方程 (8.27) 的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy \quad (8.40)$$

## 9 反射与源

### 9.1 反射（半直线问题）

半直线问题会有一个边界（半直线的“出发点”）。按照边界的类型大概可以分为三类：Dirichlet, Neumann, Robin。我们分别来看

#### 9.1.1 波动方程 Dirichlet 边界

定义 29.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x > 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x > 0 \\ u(0, t) = 0 & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (9.1)$$

可以看作弦的一个端点固定。解决这个问题，我们采取特殊手段：奇延拓！我们把初值奇延拓，使得

$$\begin{cases} \Phi(x) = U(x, 0) = \begin{cases} \varphi(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\varphi(-x) & x < 0 \end{cases} \\ \Psi(x) = U_t(x, 0) = \begin{cases} \psi(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\psi(-x) & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (9.2)$$

让  $U$  满足

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(x, 0) = \Phi(x) \\ U_t(x, 0) = \Psi(x) \end{cases} \quad (9.3)$$

这是一个全直线问题！可以使用 *d'Alembert* 公式，我们来看看：

$$U(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x+ct) + \Phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s) ds \quad (9.4)$$

在边界  $(0, t)$  处

$$U(0, t) = \frac{1}{2} [\Phi(ct) + \Phi(-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} \Psi(s) ds = 0 \quad (9.5)$$

都等于 0 是因为  $\Phi, \Psi$  都是奇函数。这说明什么？这意味着  $U$  在  $x \geq 0$  处是完全满足方程 (9.1) 的，即满足 Dirichlet 边界！从而

$$u = U|_{x \geq 0} = \begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds & 0 \leq t \leq \frac{x}{c} \\ \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s) ds & t > \frac{x}{c} \end{cases} \quad (9.6)$$

### 9.1.2 波动方程 Neumann 边界

定义 30.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x > 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x > 0 \\ u_x(0, t) = 0 & (\text{Neumann 边界}) \end{cases} \quad (9.7)$$

处理这种边界，与 9.1.1 的思路差不多，但是要偶延拓（想想为什么）！我们把初值偶延拓，使得

$$\begin{cases} \Phi(x) = U(x, 0) = \begin{cases} \varphi(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \varphi(-x) & x < 0 \end{cases} \\ \Psi(x) = U_t(x, 0) = \begin{cases} \psi(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (9.8)$$

让  $U$  满足

$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(x, 0) = \Phi(x) \\ U_t(x, 0) = \Psi(x) \end{cases} \quad (9.9)$$

这是一个全直线问题！可以使用 *d'Alembert* 公式，我们来看看：

$$U(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x+ct) + \Phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \Psi(s) ds \quad (9.10)$$

那么对  $t$  的偏导

$$U_x(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi'(x+ct) + \Phi'(x-ct)] + \frac{1}{2c} [\Psi(x+ct) - \Psi(x-ct)] \quad (9.11)$$

在边界  $(0, t)$  处

$$U_x(0, t) = \frac{c}{2} [\Phi'(ct) + \Phi'(-ct)] + \frac{1}{2} [\Psi(ct) - \Psi(-ct)] = 0 \quad (9.12)$$

都等于 0 是因为  $\Phi, \Psi$  都是偶函数， $\Phi'$  就是奇函数。这意味着  $U$  在  $x \geq 0$  处是完全满足方程 (9.7) 的，即满足 Neumann 边界！从而

$$u = U|_{x \geq 0} = \begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds & 0 \leq t \leq \frac{x}{c} \\ \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^{ct-x} \psi(s) ds & t > \frac{x}{c} \end{cases} \quad (9.13)$$

### 9.1.3 波动方程 Robin 边界

定义 31.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x > 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x > 0 \\ u_t(0, t) + au_x(0, t) = 0 & (\text{Robin 边界}) \end{cases} \quad (9.14)$$

对这个问题，我们的思路是通过换元，把这个问题转化成 *Dirichlet* 边界。很巧妙地，我们让

$$v = u_t + au_x \quad (9.15)$$

那么  $v$  满足

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} \quad x > 0, t > 0 \quad (9.16)$$

实际上, 如果  $u$  满足  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ , 那么  $u$  的任意阶偏导及其线性组合  $v$  都满足  $v_{tt} = c^2 v_{xx}$ , 更精妙的是它的初边值, 先来看边界上的情况

$$v(0, t) = u_t(0, t) + au_x(0, t) = 0 \quad (9.17)$$

所以  $v$  是满足 Dirichlet 边界的。对于初值

$$\begin{cases} v(x, 0) = u_t(x, 0) + au_x(x, 0) = \psi(x) + a\varphi'(x) \\ v_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) + au_{xt}(x, 0) = c^2 u_{xx} + a\psi'(x) = c^2 \varphi''(x) + a\psi'(x) \end{cases} \quad (9.18)$$

从而  $v$  是一个初值已知, 满足 Dirichlet 边界的半直线问题, 这个我们已经会做了。

#### 9.1.4 热方程 Dirichlet 边界

类似地对于热方程, 我们有

定义 32.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & x > 0 \\ u(0, t) = 0 & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (9.19)$$

我们依然是对初值奇延拓, 试图找到一个满足边界条件的全直线解。把初值奇延拓:

$$\Phi = \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\phi(-x) & x < 0 \end{cases} \quad (9.20)$$

从而  $U$  满足

$$\begin{cases} U_t = kU_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(x, 0) = \Phi(x) \end{cases} \quad (9.21)$$

那么对于全直线问题  $U$ , 有

$$U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \Phi(y) dy \quad (9.22)$$

在边界  $(0, t)$  有

$$U(0, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4kt}} \Phi(y) dy = 0 \quad (9.23)$$

等于 0 是因为  $e^{-\frac{y^2}{4kt}} \Phi(y)$  对  $y$  是奇函数, 积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4kt}} \Phi(y) dy$  等于 0. 于是  $U$  满足边界条件



$$u = U|_{x \geq 0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \left[ \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \Phi(y) dy - \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \Phi(-y) dy \right] \quad (9.24)$$

进一步化简, 即

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}} \right) \Phi(y) dy \quad (9.25)$$

### 9.1.5 热方程 Neumann 边界

完全类似地, 得到

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4kt}} \right) \Phi(y) dy \quad (9.26)$$

### 9.1.6 热方程 Robin 边界

与波动方程 Robin 边界类似, 通过换元化为 Dirichlet 边界

定义 33.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & x > 0 \\ u_t(0, t) + au_x(0, t) = 0 & (Robin \text{ 边界}) \end{cases} \quad (9.27)$$

同样地, 我们让

$$v = u_t + au_x \quad (9.28)$$

那么  $v$  满足

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} \quad x > 0, t > 0 \quad (9.29)$$

先来看看边界上的情况

$$v(0, t) = u_t(0, t) + au_x(0, t) = 0 \quad (9.30)$$

所以  $v$  是满足 Dirichlet 边界的。对于初值

$$v(x, 0) = u_t(x, 0) + au_x(x, 0) = ku_{xx} + a\phi'(x) = k\phi(x) + a\phi'(x) \quad (9.31)$$

从而  $v$  是一个初值已知, 满足 Dirichlet 边界的半直线问题, 这个问题已经被我们斩于马下了。

## 9.2 源（非齐次问题）

带源问题往往比较复杂，以波动方程为例

定义 34.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (9.32)$$

这类问题最关键的是要化有源为无源，其中最关键的武器是叠加原理和 Duhamel 原理，是对付有源问题的最有力的无差别大杀器，另外还有特解法这种特殊武器，将在第十章简要介绍。

### 9.2.1 叠加原理

我们以波动方程带源直线问题为例来形象地说明叠加原理

定义 35.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (9.33)$$

叠加原理指的是，如果  $w, v$  分别满足

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ w_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (9.34)$$

和

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(x, 0) = \varphi(x) \\ v_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (9.35)$$

那么  $u = w + v$ ，我们来验证这一点，对于  $u = w + v$

$$\begin{cases} u_{tt} = w_{tt} + v_{tt} \\ u_{xx} = w_{xx} + v_{xx} \end{cases} \quad (9.36)$$

那么将 (9.34) 和 (9.35) 代入 (9.36)，得到

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (9.37)$$

另外，

$$\begin{cases} u(x, 0) = w(x, 0) + v(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = w_t(x, 0) + v_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (9.38)$$

从而,  $u$  确实是满足 (9.33) 的。注意!  $v$  是很简单的问题, 而我们只要解决  $w$  就行了, 这就要交给 Duhamel 原理了!

### 9.2.2 Duhamel 原理

**定理 11.** 设  $\mathcal{L}$  为  $t$  和  $x \in \mathbb{R}^n$  的线性偏微分算子且关于  $t$  的导数不超过  $m-1$  阶, 则非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^m w}{\partial t^m} = \mathcal{L}w + f(x, t) & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ w|_{t=0} = \dots = \frac{\partial^{m-1} w}{\partial t^{m-1}}|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (9.39)$$

的解为

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t, \tau) d\tau \quad (9.40)$$

其中  $z$  满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^m z}{\partial t^m} = \mathcal{L}z & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ z|_{t=\tau} = \dots = \frac{\partial^{m-2} z}{\partial t^{m-2}}|_{t=\tau} = 0 & \frac{\partial^{m-1} z}{\partial t^{m-1}}|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases} \quad (9.41)$$

证明. 这是一个构造性的证明, 我也不知道这个妙东西是怎么想出来的, 灵感貌似来源于物理中的冲量原理, 我们验证一下就好。即验证  $w(x, t) = \int_0^t z(x, t, \tau) d\tau$  确实是满足 (9.39) 的。先看  $\frac{\partial^m w}{\partial t^m}$ , 先求一阶导看看

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial z(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau + z(x, t, t) \quad (9.42)$$

注意由 (9.41),  $z(x, t, t) = 0$ , 于是一直有

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^k} = \int_0^t \frac{\partial^k z(x, t, \tau)}{\partial t^k} d\tau, k < m \quad (9.43)$$

从而

$$w|_{t=0} = \dots = \frac{\partial^{m-1} w}{\partial t^{m-1}}|_{t=0} = 0$$

因为设  $\mathcal{L}$  为  $t$  和  $x \in \mathbb{R}^n$  的线性偏微分算子且关于  $t$  的导数不超过  $m-1$  阶, 所以

$$\mathcal{L}w = \int_0^t \mathcal{L}z d\tau \quad (9.44)$$

且

$$\frac{\partial^m w}{\partial t^m} = \int_0^t \frac{\partial^m z(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau + \frac{\partial^{m-1} z}{\partial t^{m-1}} \Big|_{t=\tau} = \int_0^t \frac{\partial^m z(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau + f(x, t) \quad (9.45)$$

注意

$$\frac{\partial^m z}{\partial t^m} = \mathcal{L}z \quad (9.46)$$

所以

$$\frac{\partial^m w}{\partial t^m} = \int_0^t \mathcal{L}z d\tau + f(x, t) \quad (9.47)$$

另一方面由 (9.44) 故

$$\frac{\partial^m w}{\partial t^m} = \mathcal{L}w + f(x, t) \quad (9.48)$$

证毕！

□

### 9.2.3 波动方程带源直线问题（无边界）

有了上面的铺垫，我们来看这个经典问题。

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t) & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (9.49)$$

和 9.2.1 中的做法一样， $u = w + v$ ， $v$  很好解决，由 *d'Alembert* 公式

$$v = \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds \quad (9.50)$$

另一方面由 Duhamel 原理

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t, \tau) d\tau \quad (9.51)$$

其中  $z$  满足

$$\begin{cases} z_{tt} = c^2 z_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ z(x, \tau) = 0 \\ z_t(x, \tau) = f(x, \tau) \end{cases} \quad (9.52)$$

那么由 *d'Alembert* 公式

$$z = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds \quad (9.53)$$

于是

$$w(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \quad (9.54)$$

这样我们就得到了最终答案

$$u = \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau \quad (9.55)$$

#### 9.2.4 波动方程带源半直线问题 Dirichlet 边界

对于半直线问题，我们的思路是先叠加原理 + Duhamel 原理，先把它拆开，再去奇延拓求解。

定义 36.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t) & x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & x > 0 \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & x > 0 \end{cases} \quad (9.56)$$

由叠加原理， $u = w + v$  其中， $w, v$  分别满足

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x, t) & x > 0, t > 0 \\ w(x, 0) = 0 & x > 0 \\ w_t(x, 0) = 0 & x > 0 \end{cases} \quad (9.57)$$

和

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} & x > 0, t > 0 \\ v(x, 0) = \varphi(x) & x > 0 \\ v_t(x, 0) = \psi(x) & x > 0 \end{cases} \quad (9.58)$$

先解决  $v$ ，在 9.1.1 中我们通过奇延拓得到

$$v = V|_{x \geq 0} = \begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds & 0 \leq t \leq \frac{x}{c} \\ \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s) ds & t > \frac{x}{c} \end{cases} \quad (9.59)$$

再由 Duhamel 原理

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t, \tau) d\tau \quad (9.60)$$

其中  $z$  满足

$$\begin{cases} z_{tt} = c^2 z_{xx} & x > 0, t > 0 \\ z(x, \tau) = 0 & x > 0 \\ z_t(x, \tau) = f(x, \tau) & x > 0 \end{cases} \quad (9.61)$$

那么由 9.1.1 我们知道

$$z = \begin{cases} \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds & 0 \leq t \leq \frac{x}{c} \\ \frac{1}{2c} \int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds & t > \frac{x}{c} \end{cases} \quad (9.62)$$

于是

$$w(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau & 0 \leq t \leq \frac{x}{c} \\ \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau & t > \frac{x}{c} \end{cases} \quad (9.63)$$

当当当！那么最终答案就是

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau & 0 \leq t \leq \frac{x}{c} \\ \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)} f(s, \tau) ds d\tau & t > \frac{x}{c} \end{cases} \quad (9.64)$$

### 9.2.5 热方程带源直线问题（无边界）

来看看这个

定义 37.

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} + f(x, t) & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, k > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (9.65)$$

有了前面的问题，对付这个家伙可以说是轻车熟路了。先由叠加原理  $u = w + v$  其中， $w, v$  分别满足

$$\begin{cases} w_t = k w_{xx} + f(x, t) & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, k > 0 \\ w(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (9.66)$$

和

$$\begin{cases} v_t = k v_{xx} & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, k > 0 \\ v(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (9.67)$$

$v$  我们当然知道

$$v = v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy \quad (9.68)$$

再由 Duhamel 原理

$$w(x, t) = \int_0^t z(x, t, \tau) d\tau \quad (9.69)$$

其中  $z$  满足

$$\begin{cases} z_t = kz_{xx} & x \in \mathbb{R}^n, t > 0, k > 0 \\ z(x, \tau) = f(x, \tau) \end{cases} \quad (9.70)$$

那么

$$z = z(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}} f(y, \tau) dy \quad (9.71)$$

故

$$w = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}} f(y, \tau) dy d\tau \quad (9.72)$$

综上，当当当！最后答案是

$$u = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} \phi(y) dy + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}} f(y, \tau) dy d\tau \quad (9.73)$$

### 9.2.6 其它

实际上，其它的源和反射问题都可以根据上面的方法得到类似的结论，波动/热 + 有源/无源 + 直线/半直线（三种边界）可以随意排列组合。总共 16 种，不再赘述。

## 10 边值问题

边值问题指的是区间是有限的，这样它就有更多的边界，一般来讲，边界越多，相对更复杂。很大的不同点在于，既不能奇延拓也不能偶延拓，我们难以寻找一个满足有界边界的全直线解，于是我们采取完全不同的思路解决这类问题：分离变量法求广义解。广义解是一个级数的形式，它不同于古典解，其理论依据建立在 Fourier 分析和 Sturm-Liouville 边值定理上。

### 10.1 波动方程

#### 10.1.1 Dirichlet 边界

来看这个问题，它和我们前面所介绍的都不一样：

定义 38.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 < x < l \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (10.1)$$

这里  $x$  的取值范围被限定在了一个有界区间中，会有两个边界，我们难以找到同时满足两个边界的全直线解，所以难以复制半直线类问题的解决思路，我们采用分离变量法，求出方程  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  的  $n$  个特解，再通过调整系数使得这些特解的线性组合满足我们想要的初边值。假设方程  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  具有分离解

$$u = X(x)T(t) \quad (10.2)$$

代入得到

$$XT'' = c^2 X''T \quad (10.3)$$

即

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \quad (10.4)$$

先从边界入手，为了满足  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ，我们有

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (10.5)$$

求出特征值  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ ，特征函数为  $X_n = \sin \frac{n\pi}{l}x$ ，由 Sturm-Liouville 边值定理，函数系  $\{X_n\}$  在  $0 < x < l$  上完备，由 (10.4) 我们还能得到

$$T'' + c^2 \lambda T = 0 \quad (10.6)$$

把  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  代入，就有

$$T = C_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + D_n \sin \frac{cn\pi}{l}t \quad (10.7)$$

于是

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + D_n \sin \frac{cn\pi}{l}t \right) \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (10.8)$$

我们可以控制常数  $C_n$  和  $D_n$  来使得  $u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$  满足初值  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ 。把初值代入我们需要



$$\begin{cases} u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{l} D_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \psi(x) \end{cases} \quad (10.9)$$

由 Fourier 变换相关知识我们知道, 只要

$$\begin{cases} C_n = \frac{(\varphi, X_n)}{(X_n, X_n)} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \\ D_n = \frac{l}{cn\pi} \frac{(\psi, X_n)}{(X_n, X_n)} = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \psi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \end{cases} \quad (10.10)$$

就行了。于是我们求得了方程 (10.1) 的广义解

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \right) \cos \frac{cn\pi}{l} t + \left( \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \psi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \right) \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (10.11)$$

### 10.1.2 Neumann 边界

即方程

定义 39.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 < x < l \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < l \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 & (Neumann \text{边界}) \end{cases} \quad (10.12)$$

同样地, 假设方程  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  具有分离解

$$u = X(x) T(t) \quad (10.13)$$

代入得到

$$X T'' = c^2 X'' T \quad (10.14)$$

即

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \quad (10.15)$$

不一样的是边界! 为了满足  $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$ , 我们有

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases} \quad (10.16)$$

求出特征值  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ , 特征函数为  $X_n = \cos \frac{n\pi}{l}x$ , 由 Sturm-Liouville 边值定理, 函数系  $\{X_n\}$  在  $0 < x < l$  上完备, 由 (10.15) 我们还能得到

$$T'' + c^2\lambda T = 0 \quad (10.17)$$

把  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  代入, 就有

$$T = C_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + D_n \sin \frac{cn\pi}{l}t \quad (10.18)$$

于是

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + D_n \sin \frac{cn\pi}{l}t \right) \cos \frac{n\pi}{l}x \quad (10.19)$$

我们通过控制常数  $C_n$  和  $D_n$  来使得  $u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$  满足初值  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, 0) = \psi(x)$ 。把初值代入我们需要

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{cn\pi}{l} D_n \cos \frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \end{cases} \quad (10.20)$$

由 Fourier 变换相关知识我们知道, 只要

$$\begin{cases} C_n = \frac{(\varphi, X_n)}{(X_n, X_n)} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \cos \frac{n\pi}{l}s ds, n \geq 1 & C_0 = \frac{(\varphi, X_0)}{(X_0, X_0)} = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(s) ds \\ D_n = \frac{l}{cn\pi} \frac{(\psi, X_n)}{(X_n, X_n)} = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \psi(s) \cos \frac{n\pi}{l}s ds, n \geq 1 & D_0 = 0 \end{cases} \quad (10.21)$$

就行了。于是我们求得了方程 (10.1) 的广义解

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( C_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + D_n \sin \frac{cn\pi}{l}t \right) \cos \frac{n\pi}{l}x \quad (10.22)$$

常数  $C_n, D_n$  由 (10.21) 确定。

### 10.1.3 混合型边界

我们注意到, 有界区间问题是两个边界  $x=0, x=l$  的。混合型边界指的是两个边界不是同一类型的边界, 比如一个是 Dirichlet 边界一个是 Robin 边界。在此仅举一例:

**定义 40.**

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 < x < l \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < l \\ u(0, t) = u_x(l, t) + a_l u(l, t) = 0 & (\text{混合边界}) \end{cases} \quad (10.23)$$

处理这类问题我们就不再使用 9.1.3 中介绍的换元法了, 可以直接用变量分离法。与之前不同的地方只有边值不同而已。与前面类似, 为了满足  $u(0, t) = u_x(l, t) + a_l u(l, t) = 0$ , 我们有

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X'(l) + a_l X(l) = 0 \end{cases} \quad (10.24)$$

这个问题的特征值和特征函数就没那么简单了。此时 Sturm-Liouville 边值定理依旧成立, 即  $\lambda > 0$ , 从而方程  $X'' + \lambda X = 0$  的解为

$$X = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x \quad (10.25)$$

那么代入  $X(0) = X'(l) + a_l X(l) = 0$ , 就有

$$\begin{cases} A = 0 \\ \sqrt{\lambda} B \cos \sqrt{\lambda} l + a_l B \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \end{cases} \quad (10.26)$$

特征值要满足

$$\sqrt{\lambda} = -a_l \tan \sqrt{\lambda} l \quad (10.27)$$

实际上当  $a_l > 0$  时, 有无穷多个根 (图解法), 我们设为  $\mu_n$  这是已知的, 我们不能直接求出显式的  $\mu_n$ , 所以把它保留就好了。后面的步骤与前面完全相同不再赘述。

#### 10.1.4 Robin 边界

Robin 边界对应的特征值问题是

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) - a_0 X(0) = X'(l) + a_l X(l) = 0 \end{cases} \quad (10.28)$$

Robin 边界问题相对来讲要复杂地多, 因为 Sturm-Liouville 边值定理不一定成立, 那么其特征值和特征函数往往表示很复杂或者比较难去求得。往往需要分类讨论。这种边界条件有十几种。在此仅作简要讨论。方程  $X'' + \lambda X = 0$  的通解是

$$\begin{cases} X = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x & \lambda > 0 \\ X = Ax + B & \lambda = 0 \\ X = A \cosh \sqrt{-\lambda} x + B \sinh \sqrt{-\lambda} x & \lambda < 0 \end{cases} \quad (10.29)$$

那么

$$\begin{cases} X' = -\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}x & \lambda > 0 \\ X' = A & \lambda = 0 \\ X' = \sqrt{-\lambda}A\sinh\sqrt{-\lambda}x + \sqrt{-\lambda}B\cosh\sqrt{-\lambda}x & \lambda < 0 \end{cases} \quad (10.30)$$

代入边值条件,  $\lambda = 0$  是特征值当且仅当  $a_0 + a_l(a_0l + 1) = 0$  是显然的, 另外地, 我们更关心的是  $\lambda > 0$  和  $\lambda < 0$  时的情况, 先来看  $\lambda > 0$  时:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}B - a_0A = 0 \\ -\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}l + a_l(A\cos\sqrt{\lambda}l + B\sin\sqrt{\lambda}l) = 0 \end{cases} \quad \lambda > 0 \quad (10.31)$$

这要求

$$a_0(\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + a_l\sin\sqrt{\lambda}l) + \sqrt{\lambda}(-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l + a_l\cos\sqrt{\lambda}l) = 0 \quad (10.32)$$

为了简化, 让  $\omega = \sqrt{\lambda}$ , 则 (10.32) 即

$$\tan\omega l = \frac{\omega(a_0 + a_l)}{\omega^2 - a_0a_l} \quad (10.33)$$

再运用图解法分类讨论即可 (求导可帮助判断)。再看看  $\lambda < 0$  时的情况:

$$\begin{cases} \sqrt{-\lambda}B - a_0A = 0 \\ \sqrt{-\lambda}A\sinh\sqrt{-\lambda}l + \sqrt{-\lambda}B\cosh\sqrt{-\lambda}l + a_l(A\cosh\sqrt{-\lambda}l + B\sinh\sqrt{-\lambda}l) = 0 \end{cases} \quad \lambda < 0 \quad (10.34)$$

让  $\omega = \sqrt{-\lambda}$ , 就有

$$\omega(\omega\sinh\omega l + a_l\cosh\omega l) + a_0(\omega\cosh\omega l + a_l\sinh\omega l) = 0 \quad (10.35)$$

这要求

$$\tanh\omega l = \frac{-\omega(a_0 + a_l)}{\omega^2 + a_0a_l} \quad (10.36)$$

再用图解法, 分类讨论即可。

## 10.2 热方程

### 10.2.1 Dirichlet 边界

来看热方程的 Dirichlet 边值问题

定义 41.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 < x < l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (10.37)$$

完全是依葫芦画瓢，假设方程  $u_t = ku_{xx}$  具有分离解

$$u = X(x)T(t) \quad (10.38)$$

代入得到

$$XT' = c^2 X''T \quad (10.39)$$

即

$$\frac{T'}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda \quad (10.40)$$

边界上，为了满足  $u(0, t) = u(l, t) = 0$ ，我们有

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (10.41)$$

求出特征值  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ ，特征函数为  $X_n = \sin \frac{n\pi}{l}x$ ，由 Sturm-Liouville 边值定理，函数系  $\{X_n\}$  在  $0 < x < l$  上完备，由 (10.15) 我们还能得到

$$T' + c^2 \lambda T = 0 \quad (10.42)$$

注意这是与以往不同的地方！把  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  代入，就有

$$T = C_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 t} \quad (10.43)$$

于是

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l}x \quad (10.44)$$

我们通过控制常数  $C_n$  和  $D_n$  来使得  $u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$  满足初值  $u(x, 0) = \phi(x)$ 。把初值代入我们需要

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l}x = \phi(x) \quad (10.45)$$

只要让

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \quad (10.46)$$

即可，于是我们有最终的广义解：

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{l} \int_0^l \phi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (10.47)$$

### 10.2.2 其它

热方程的其它边界情况处理方法于波动方程类似。

## 10.3 非齐次边界的处理方法

非齐次这个词我们依旧很熟悉了，对于不齐次的三种边界，我们都是采用构造辅助函数，利用叠加原理去解决。先来看 Dirichlet 边界：

$$\begin{cases} u(0, t) = f(t) \\ u(l, t) = g(t) \end{cases} \quad (10.48)$$

构造辅助函数，把边界给齐次化。设  $u = v + h$ ，我们假设  $v$  是满足齐次化边界的，来看看辅助函数  $h$  如果是关于  $x$  的一次函数  $h = Ax + B$ ，系数要满足什么条件。

$$\begin{cases} u(0, t) = f(t) = B \\ u(l, t) = g(t) = Al + B \end{cases} \quad (10.49)$$

很容易求出

$$\begin{cases} A = \frac{g(t)-f(t)}{l} \\ B = f(t) \end{cases} \quad (10.50)$$

这样，我们可以求出  $v$  以后再加上  $h = Ax + B$  得到答案  $u$ ，Neumann 边界则是用二次函数，Robin 边界则也是一次函数，齐次化后会得到相应的齐次边界。

## 10.4 常微分下的特殊 Duhamel 原理

**定理 12.** 设  $\mathcal{L}$  为  $t$  的线性微分算子且关于  $t$  的导数不超过  $m-1$  阶，则非齐次方程的初值问题

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = f(t) & t > 0 \\ w|_{t=0} = \dots = \frac{d^{m-1}w}{dt^{m-1}}|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (10.51)$$

的解为

$$w(t) = \int_0^t f(\tau) z(t-\tau) d\tau \quad (10.52)$$

其中  $z$  满足

$$\begin{cases} \mathcal{L}z = 0 & t > 0 \\ z|_{t=\tau} = \dots = \frac{d^{m-2}z}{dt^{m-2}}|_{t=\tau} = 0 & \frac{\partial^{m-1}z}{\partial t^{m-1}}|_{t=\tau} = 1 \end{cases} \quad (10.53)$$

证明. 参考 9.2.2

□

## 10.5 有界弦受迫振动问题

来看看边值问题里面最难的问题之一：有界弦受迫振动问题。可以说是边值问题的大 boss 了，其难度不在于思路，而是过程非常繁复。

定义 42.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t) & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & 0 < x < l \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (10.54)$$

在此先介绍一般思路：先叠加原理，把初值齐次化。再用分离变量法，得到特征方程，再去化有源为无源。这样做的好处是，只需要常微分下的特殊 Duhamel 原理，而非偏微分的形式。处理 ODE 的有源问题当然比 PDE 简单地多。另外还有一个特殊武器：特解法。这个在后面也会简要提及。

先由叠加原理， $u = w + v$  其中， $w, v$  分别满足

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x, t) & 0 < x < l, t > 0 \\ w(x, 0) = 0 & 0 < x < l \\ w_t(x, 0) = 0 & 0 < x < l \\ w(0, t) = w(l, t) = 0 & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (10.55)$$

和

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ v(x, 0) = \varphi(x) & 0 < x < l \\ v_t(x, 0) = \psi(x) & 0 < x < l \\ v(0, t) = v(l, t) = 0 & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (10.56)$$

$v$  我们已经知道（于 10.1.1）：

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \right) \cos \frac{cn\pi}{l} t + \left( \frac{2}{cn\pi} \int_0^l \psi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \right) \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (10.57)$$

对于  $w$ , 我们不要直接 Duhamel, 有一个很巧妙的办法是, 我们假设  $w$  有分离解

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) T_n(x) \quad (10.58)$$

希望这个  $w$  满足  $w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x, t)$ , 注意到边值是已经固定死的, 我们先求出  $X_n(t)$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (10.59)$$

求出特征值  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ , 特征函数为  $X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x$ , 由 Sturm-Liouville 边值定理, 函数系  $\{X_n\}$  在  $0 < x < l$  上完备, 然后我们看  $T_n(t)$  需要满足怎么样的条件。要满足  $w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x, t)$  而

$$\begin{cases} w_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ w_{xx} = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \end{cases} \quad (10.60)$$

代入得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin \frac{n\pi}{l} x = -c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x + f(x, t) \quad (10.61)$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ T_n''(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x, t) \quad (10.62)$$

那么实际上由 Fourier 展开, 我们可以把  $f(x, t)$  在  $0 < x < l$  上展开, 因为函数系  $\{X_n\}$  完备, 所以这是可行的, 即

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (10.63)$$

其中  $C_n$  满足

$$C_n(t) = \frac{(f, X_n)}{(X_n, X_n)} = \frac{2}{l} \int_0^l f(s, t) \sin \frac{n\pi}{l} s ds = f_n(t) \quad (10.64)$$

再和 (10.62) 对比不难发现, 只要让  $T_n$  满足



$$\begin{cases} T_n''(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0 \end{cases} \quad (10.65)$$

由常微分下的特殊 Duhamel 原理,

$$T_n(t) = \int_0^t f(\tau) z_n(t - \tau) d\tau \quad (10.66)$$

其中  $z$  满足

$$\begin{cases} z_n''(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 z_n(t) = 0 & t > 0 \\ z_n(0) = 0 & z_n'(0) = 1 \end{cases} \quad (10.67)$$

求出

$$z_n = \frac{l}{cn\pi} \sin \frac{cn\pi}{l} t \quad (10.68)$$

于是

$$T_n(t) = \frac{l}{cn\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{cn\pi}{l} (t - \tau) d\tau = \frac{l}{cn\pi} \int_0^t \left( \frac{2}{l} \int_0^l f(s, \tau) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \right) \sin \frac{cn\pi}{l} (t - \tau) d\tau \quad (10.69)$$

为了不看花眼, 把变量  $s$  换成  $p$ , 化简为

$$T_n(t) = \frac{2}{cn\pi} \int_0^t \int_0^l f(p, \tau) \sin \frac{n\pi}{l} p \cdot \sin \frac{cn\pi}{l} (t - \tau) dp d\tau \quad (10.70)$$

于是得到

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{cn\pi} \int_0^t \int_0^l f(p, \tau) \sin \frac{n\pi}{l} p \cdot \sin \frac{cn\pi}{l} (t - \tau) dp d\tau \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (10.71)$$

于是得到最终答案

$$u = w + v \quad (10.72)$$

不展开是因为实在是太长了。这样一来, 有界弦受迫振动问题也被我们斩掉了。

## 10.6 有限长杆热传导问题

最后一个大 boss!

定义 43.

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x, t) & 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) & 0 < x < l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & (\text{Dirichlet边界}) \end{cases} \quad (10.73)$$

有了前面的铺垫, 这最后一关倒没那么困难了。它存在的意义只是给我们练练手罢了 (冷酷无情)。按部就班, 由叠加原理,  $u = w + v$ , 其中,  $w, v$  分别满足

$$\begin{cases} w_t = kw_{xx} + f(x, t) & 0 < x < l, t > 0 \\ w(x, 0) = 0 & 0 < x < l \\ w(0, t) = w(l, t) = 0 & (\text{Dirichlet边界}) \end{cases} \quad (10.74)$$

和

$$\begin{cases} v_t = kv_{xx} & 0 < x < l, t > 0 \\ v(x, 0) = \phi(x) & 0 < x < l \\ v(0, t) = v(l, t) = 0 & (\text{Dirichlet边界}) \end{cases} \quad (10.75)$$

$v$  由 10.2.1 求得

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{l} \int_0^l \phi(s) \sin \frac{n\pi}{l} s ds \right) e^{-(\frac{cn\pi}{l})^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (10.76)$$

对于  $w$ , 设为

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) T_n(t) \quad (10.77)$$

和上一小节一样, 直接先算  $X_n(t)$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (10.78)$$

求出特征值  $\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$ , 特征函数为  $X_n = \sin \frac{n\pi}{l} x$ , 由 Sturm-Liouville 边值定理, 函数系  $\{X_n\}$  在  $0 < x < l$  上完备, 直接列出  $T_n$  要满足的式子:

$$\begin{cases} T'_n(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = 0 \end{cases} \quad (10.79)$$

其中

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(p, t) \sin \frac{n\pi}{l} p dp \quad (10.80)$$

由常微分下的特殊 Duhamel 原理,

$$T_n(t) = \int_0^t f(\tau) z_n(t-\tau) d\tau \quad (10.81)$$

其中  $z$  满足

$$\begin{cases} z'_n(t) + c^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 z_n(t) = 0 \\ z_n(0) = 1 \end{cases} \quad (10.82)$$

求出

$$z_n = e^{-\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 t} \quad (10.83)$$

于是

$$T_n(t) = \int_0^t f(\tau) z_n(t-\tau) d\tau = \frac{2}{l} \int_0^t \int_0^l f(p, t) \sin \frac{n\pi}{l} p \cdot e^{-\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} dp d\tau \quad (10.84)$$

从而

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{l} \int_0^t \int_0^l f(p, t) \sin \frac{n\pi}{l} p \cdot e^{-\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 (t-\tau)} dp d\tau \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (10.85)$$

最后

$$u = w + v \quad (10.86)$$

K.O!

## 11 调和方程和 Green 函数

如果让波动方程和热方程中最终结果  $u$  与时间  $t$  无关, 那么就变成了调和方程, 其物理意义是求当状态最终平衡时的函数。定义  $n$  维的无边界调和方程为:

定义 44.

$$\Delta u(x) = u_{x_1 x_1} + \dots u_{x_n x_n} = 0, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad (11.1)$$

为了方便起见 (偷懒), 以后将  $\vec{x}$  简记为  $x$ , 并且不带下标或者下标为 0 的也往往是向量, 例如  $x^*, x_0$ 。一般来讲没有太大歧义……式 (11.1) 中  $\Delta$  被称为 Laplace 算子, 用以简化表示。

## 11.1 调和方程一些性质

### 11.1.1 $\Delta$ 的平移不变性

如果我们进行一个平移的换元, 令

$$x^* = x + \vec{C} \quad (11.2)$$

其中  $\vec{C}$  是常向量, 那么显然对任意下标  $i$

$$u_{x_i^* x_i^*} = u_{x_i x_i} \quad (11.3)$$

从而有

$$\Delta u(x^*) = \Delta u(x) \quad (11.4)$$

### 11.1.2 $\Delta$ 的旋转不变性

熟悉线性代数的同学们应当知道在  $n$  维下, 我们把旋转这个概念扩充为正交变换。如果将  $x$  进行正交变换, 即

$$x^* = Ax \quad (11.5)$$

其中  $A$  是正交方阵, 满足  $AA^T = I$ , 那么注意到 7.2 小节的结论, 换元以后新系数矩阵

$$B = AIA^T = I \quad (11.6)$$

于是

$$\Delta u(x^*) = \Delta u(x) \quad (11.7)$$

### 11.1.3 最值原理

与热方程类似, 我们有最值原理, 其证明也同样是采用热方程里面的对函数进行小扰动的方法

**定理 13.** 若  $D \in \mathbb{R}^n$  有界,  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ , 即  $D$  内部二阶连续可微, 边界连续, 且  $\Delta u = 0$  in  $D$ , 那么

$$\begin{cases} \max_D u = \max_{\partial D} u \\ \min_D u = \min_{\partial D} u \end{cases} \quad (11.8)$$

其中  $\partial D$  表示  $D$  的边界。

证明. 仅证明最大值的情况, 最小值情况类似. 反证法, 如果有

$$\max_{\bar{D}} u > \max_{\partial D} u$$

设  $u$  在  $x_0$  处取得最大值 (不在边界上), 那么由连续性,  $\exists \varepsilon > 0$ , 使

$$v = u + \varepsilon |x|^2$$

依旧有  $v$  在  $x_0$  处取得最大值. 那么由于 Hessian 矩阵半负定 (在最大值点) 我们有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \leq 0 \quad (11.9)$$

从而

$$0 = \Delta u = \Delta v - 2n\varepsilon < 0$$

矛盾! 证毕!

□

#### 11.1.4 Dirichlet 边值问题解的至多唯一性

这个问题有两个常见的证法, 一个是最值原理, 一个是构造能量函数. 这里仅用第一种证法, 构造能量函数法在介绍完 Green 公式以后在证明 Robin 边值问题解的至多唯一性中再介绍.

**定理 14.**  $f \in C(D), f \in C(\partial D)$ , 则在 Dirichlet 边界下, 方程

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ u|_{\partial D} = g \end{cases}$$

至多只有一个解  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ .

证明. 反证法, 如果有两个解  $u_1, u_2$ , 令  $w = u_1 - u_2$ , 那么  $w$  满足

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } D \\ w|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

由最值原理

$$\begin{cases} \max_{\bar{D}} w = \max_{\partial D} w = 0 \\ \min_{\bar{D}} w = \min_{\partial D} w = 0 \end{cases}$$

这意味着  $w \equiv 0$ , 于是  $u_1 = u_2$ , 证毕!

□

## 11.2 Laplace 算子 $\Delta$ 极坐标表示 (2 维, 3 维)

在处理圆域, 球域调和方程时, 我们往往需要通过极坐标变换把区域变成矩形, 长方体, 这就不得不介绍 Laplace 算子  $\Delta$  的极坐标表示了, 因为极坐标变换并不是平移或者旋转变换, 很不幸地, 在极坐标下的 Laplace 算子  $\Delta$  与直角坐标系下形式是不一样的

### 11.2.1 2 维 Laplace 算子 $\Delta$ 的极坐标表示

极坐标变换指的是

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (11.10)$$

由此得到

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

由此得到逆变换阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \quad (11.12)$$

从而由链式法则

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{cases} \quad (11.13)$$

再分别自运算再相加便得到

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \quad (11.14)$$

### 11.2.2 3 维 Laplace 算子 $\Delta$ 的极坐标表示

3 维极坐标变换指的是

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

类似地 2 维的做法, 在此仅给出答案

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} u_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} \quad (11.15)$$

### 11.3 分离变量法求解调和方程

与波动方程和弦方程类似, 当区域  $D$  是矩形区域, 或者圆域球域时, 分离变量法作为古老的武器依旧可以在低维发挥强大的威力。

#### 11.3.1 分离变量法求解二维调和方程 (矩形区域, Dirichlet 边界)

当区域  $D$  为  $D = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$  这样的矩形的时候, 下面的做法是可以推广到  $n$  维的, 其难度几乎不变。

定义 45.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } D \\ u|_{x=0} = f_1(y) & u|_{x=a} = f_2(y) \\ u|_{y=0} = g_1(x) & u|_{y=b} = g_2(x) \end{cases} \quad (11.16)$$

求解的思路当然是先把边界齐次化, 按照 10.3 节的处理方法, 利用叠加原理和辅助函数把边界齐次化, 忘了的同学可以回去复习哦。值得注意的是, 我们只要把  $x = 0, x = a$  这一组对边齐次化即可 (也不能同时把两组对边都齐次化)。于是我们研究

定义 46.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } D \\ u|_{x=0} = 0 & u|_{x=a} = 0 \\ u|_{y=0} = g_1(x) & u|_{y=b} = g_2(x) \end{cases} \quad (11.17)$$

即可, 设有分离变量解

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n(x) Y_n(y) \quad (11.18)$$

那么  $X(x)$  相应的边值问题为

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases} \quad (11.19)$$

这是老朋友了, 对应特征值  $\lambda_n = \frac{n\pi}{a}$ , 对应特征函数  $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{a}x$ , 将特征值代入

$$Y'' - \lambda Y = 0 \quad (11.20)$$

得到

$$Y_n = C_n \cosh \frac{n\pi}{a}y + D_n \sinh \frac{n\pi}{a}y \quad (11.21)$$

再代入  $u|_{y=0} = g_1(x)$ ,  $u|_{y=b} = g_2(x)$  以求出系数

$$\begin{cases} g_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} x \\ g_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \sinh \frac{n\pi}{a} b \sin \frac{n\pi}{a} x \end{cases} \quad (11.22)$$

由 Fourier 变换知

$$\begin{cases} C_n = \frac{2}{a} \int_0^a g_1(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx \\ D_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a g_2(x) \sin \frac{n\pi}{a} x dx \end{cases} \quad (11.23)$$

为了防止看花眼, 把  $dx$  换成  $dp$ , 从而就能够求出

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \left( \frac{2}{a} \int_0^a g_1(p) \sin \frac{n\pi}{a} p dp \right) \cosh \frac{n\pi}{a} y + \left( \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a g_2(p) \sin \frac{n\pi}{a} p dp \right) \sinh \frac{n\pi}{a} y \right) \sin \frac{n\pi}{a} x \quad (11.24)$$

### 11.3.2 分离变量法求解二维调和方程 (圆域区域, Dirichlet 边界)

当区域  $D$  为  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$  这样的圆域的时候, 分离变量法也能得到答案, 但不太好推广到  $n$  维。

定义 47.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } D \\ u|_{\partial D} = F(x, y) \end{cases} \quad (11.25)$$

在计算这个问题的时候, 应当先进行极坐标换元, 以把区域  $D$  从圆域化为矩形, 把原方程化为

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 & \text{in } D \\ u|_{\partial D} = F(R \cos \theta, R \sin \theta) = f(\theta) \end{cases} \quad (11.26)$$

同样地, 设有分离变量解

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(r) \Theta_n(\theta) \quad (11.27)$$

那么  $\Theta(\theta)$  相应的边值问题为

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \\ \Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) \end{cases} \quad (11.28)$$

这也是老朋友了, 对应特征值  $\lambda_n = n^2$ , 对应特征函数  $\Theta_n(x) = \sin n\theta, \Theta_n(x) = \cos n\theta$ , 将特征值代入



$$r^2 R'' + (r - n^2) R = 0 \quad (11.29)$$

这是 Euler 方程, 利用换元  $r = e^p$  化为

$$\frac{d^2 R}{dp^2} - n^2 R = 0 \quad (11.30)$$

求出

$$R_n = C_n e^{nlr} + D_n e^{-nlr} = C_n r^n + D_n r^{-n} \quad n \geq 1 \quad (11.31)$$

$$R_0 = C_0 + D_0 \ln r \quad n = 0 \quad (11.32)$$

注意到当  $r$  趋于 0 时, 解  $u$  应当是收敛的, 故而  $r^{-n}$  和  $\ln r$  前系数应当为 0, 于是我们让

$$C_n = 1, D_n = 0 \quad (11.33)$$

此时就有

$$R_n = r^n \quad (11.34)$$

再代入  $u|_{\partial D} = F(R \cos \theta, R \sin \theta) = f(\theta)$  以求出系数:

$$f(\theta) = u = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n \Theta_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) \quad (11.35)$$

由 Fourier 变换知

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n p dp & n \geq 1 \\ B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n p dp & n \geq 1 \\ B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) dp \end{cases} \quad (11.36)$$

从而就能够求出

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n (A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) \quad (11.37)$$

其中  $A_n, B_n$  是常数由 (11.36) 决定。式 (11.37) 还可以继续化简。式 (11.37) 等价于

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p) \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(p - \theta) \right) dp \quad (11.38)$$

设  $z = \frac{r}{R} e^{i(p-\theta)}$ , 那么就有

$$\operatorname{Re}(z^n) = \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(p - \theta) \quad (11.39)$$

从而式 (11.37) 化为

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p) \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re}(z^n) \right) dp = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p) \left( 1 + 2 \operatorname{Re} \left( \frac{z}{1-z} \right) \right) dp \quad (11.40)$$

即

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p) \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2a r \cos(p - \theta)} dp = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(p)}{a^2 + r^2 - 2a r \cos(p - \theta)} dp \quad (11.41)$$

这就是大名鼎鼎的 Poisson 公式!!

#### 11.4 Green 第一公式, 第二公式和基本积分公式

首先在 Gauss 公式

$$\int_D \nabla \cdot F dx = \int_{\partial D} F \cdot \vec{n} dS \quad (11.42)$$

中, 我们让  $F = u \nabla v$ ,  $F = v \nabla u$  代入得到

$$\begin{cases} \int_D u \Delta v dx = \int_{\partial D} u \nabla v \cdot \vec{n} dS - \int_D \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_D \nabla u \cdot \nabla v dx \\ \int_D v \Delta u dx = \int_{\partial D} v \nabla u \cdot \vec{n} dS - \int_D \nabla v \cdot \nabla u dx = \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_D \nabla v \cdot \nabla u dx \end{cases} \quad (11.43)$$

这被称为 Green 第一公式。把这俩式子相减消掉  $\int_D \nabla u \cdot \nabla v dx$  后得到 Green 第二公式

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (11.44)$$

为什么要介绍这么个公式? 它长得很奇怪啊。答案是这个公式可以帮助我们得到基本积分公式, 我们可以先囫圇吞枣般地想一想, 怎么对任意区域  $D$  求解方程

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} |_{\partial D} = g & \text{(常数 } \alpha, \beta \text{ 决定边界)} \end{cases} \quad (11.45)$$

我们已知什么?  $\Delta u, u, \frac{\partial u}{\partial n}$ , 所以我们的解必然要往这上面靠, 再看看 Green 第二公式 (11.44), 是不是基本都能靠到已知条件! 我们的想法是构造一个已知的  $v$  来得到满足一定要求的  $u$ 。下面我们介绍 Dirac 函数

**定义 48.** (物理定义) Dirac 函数  $\delta$  满足

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases} \quad (11.46)$$

且

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x) dx = 1 \quad (11.47)$$

这样的函数在数学狭义上是没有意义的，只有在泛函上才有意义。但是它的物理意义是显而易见的，例如空间中，仅有原点处一个质量为 1 的质点，那么这个空间中，物体的密度函数就是 Dirac 函数  $\delta(x)$ 。

我们用 Fourier 变换可以得到方程

$$\Delta U = \delta(x - x_0) \quad (11.48)$$

在全空间上的解

$$v(x - x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x - x_0| & n = 2 \\ -\frac{|x - x_0|^{2-n}}{n(n-2)w_n} & n \geq 3 \end{cases}$$

其中  $w_n$  是  $n$  维球体积。如果你感兴趣的话，可以跳掉 13.5.3 节，我将展示如何用 Fourier 变换得到它。尽管求解上很复杂，但是实际上验证它是很容易的。有了这个结论以后我们结合 Green 公式就可以得到基本积分公式。

**定理 15.** (基本积分公式) 设  $D \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(x) \in C^2(\bar{D})$ , 让

$$v(x - x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x - x_0| & n = 2 \\ -\frac{|x - x_0|^{2-n}}{n(n-2)w_n} & n \geq 3 \end{cases} \quad (11.49)$$

那么有

$$u(x_0) = \int_D v(x - x_0) \Delta u(x) dx + \int_{\partial D} \left( u(x) \frac{\partial v(x - x_0)}{\partial n} - v(x - x_0) \frac{\partial u(x)}{\partial n} \right) dS(x) \quad (11.50)$$

简记为

$$u(x_0) = \int_D v \Delta u dx + \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (11.51)$$

其中  $n$  是  $\partial D$  上的法向量。

证明. 注意到，因为在  $x = x_0$  处， $v(x - x_0)$  有奇点，故不能直接代入到 Green 方程中，处理方法也很经典，就是挖掉一个半径为  $\varepsilon$  的小球，再取极限。用一个小球把奇点挖掉，设这个小球是  $B_\varepsilon(x_0)$ ，设球面为  $S_\varepsilon(x_0)$ ，那么就有 Green 公式

$$\int_{D \setminus B_\varepsilon(x_0)} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS - \int_{S_\varepsilon(x_0)} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (11.52)$$

注意到在  $D \setminus B_\varepsilon(x_0)$  内  $\Delta v = 0$ ，故化简为

$$\int_{D \setminus B_\varepsilon(x_0)} v \Delta u dx + \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \int_{S_\varepsilon(x_0)} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (11.53)$$

接下来就是两边取极限  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 注意等式右边  $-\int_{S_\varepsilon(x_0)} v \frac{\partial u}{\partial n} dS$  中,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  有界, 设  $|\frac{\partial u}{\partial n}| \leq M$ , 由于  $|S_\varepsilon(x_0)| = nw_n \varepsilon^{n-1}$  那么

$$\left| \int_{S_\varepsilon(x_0)} v \frac{\partial u}{\partial n} dS \right| \leq M \left| \int_{S_\varepsilon(x_0)} v dS \right| \leq M n w_n \varepsilon^{n-1} \max_{S_\varepsilon(x_0)} |v| = \begin{cases} C\varepsilon \ln \varepsilon & n=2 \\ C\varepsilon & n \geq 3 \end{cases} \quad (11.54)$$

由此可见当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时  $-\int_{S_\varepsilon(x_0)} v \frac{\partial u}{\partial n} dS \rightarrow 0$ , 再来看另一部分  $\int_{S_\varepsilon(x_0)} u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \int_{S_\varepsilon(x_0)} u \nabla v \cdot n dS$ , 而

$$\nabla v = \begin{cases} \frac{x-x_0}{2\pi|x-x_0|^2} & n=2 \\ \frac{x-x_0}{nw_n|x-x_0|^n} & n \geq 3 \end{cases} = \frac{x-x_0}{nw_n|x-x_0|^n} \quad n \geq 2 \quad (11.55)$$

$S_\varepsilon(x_0)$  上的法向量  $n$  有

$$n = \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \quad (11.56)$$

故

$$\int_{S_\varepsilon(x_0)} u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \int_{S_\varepsilon(x_0)} u \nabla v \cdot n dS = \int_{S_\varepsilon(x_0)} u \frac{1}{nw_n|x-x_0|^{n-1}} dS = \int_{S_\varepsilon(x_0)} u \frac{1}{nw_n \varepsilon^{n-1}} dS \quad (11.57)$$

由中值定理

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon(x_0)} u \frac{1}{nw_n \varepsilon^{n-1}} dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\varepsilon) \int_{S_\varepsilon(x_0)} \frac{1}{nw_n \varepsilon^{n-1}} dS = u(x_0) \quad (11.58)$$

最后, 在 (11.53) 等式左边

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D \setminus B_\varepsilon(x_0)} v \Delta u dx = \int_D v \Delta u dx \quad (11.59)$$

这是因为在  $B_\varepsilon(x_0)$  内  $\Delta u$  有界, 设  $|\Delta u| \leq M$ , 那么

$$\left| \int_{B_\varepsilon(x_0)} v \Delta u dx \right| \leq M \left| \int_{B_\varepsilon(x_0)} v dx \right| = \begin{cases} \frac{M}{2\pi} \int_{B_\varepsilon(x_0)} \ln|x-x_0| dx & n=2 \\ M \int_{B_\varepsilon(x_0)} \frac{|x-x_0|^{2-n}}{n(n-2)w_n} dx & n \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{M}{2} \varepsilon^2 (2\ln \varepsilon - 1) & n=2 \\ \frac{M}{2(n-2)} \varepsilon^2 & n \geq 3 \end{cases} \quad (11.60)$$

故

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon(x_0)} v \Delta u dx = 0$$

意味着式 (11.59) 成立, 故在 (11.53) 等式两边取极限  $\varepsilon \rightarrow 0$  整理得

$$u(x_0) = \int_D v \Delta u dx + \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (11.61)$$

□

## 11.5 有了基本积分公式后的一些新性质

### 11.5.1 平均公式

在基本积分公式 (11.61) 中取区域  $D = B_R(x_0)$ , 如果  $u$  调和, 即  $\Delta u = 0$ , 就有

$$u(x_0) = \int_{S_R(x_0)} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (11.62)$$

注意到

$$\int_{S_R(x_0)} v \frac{\partial u}{\partial n} dS = v \int_{S_R(x_0)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = v \int_{B_R(x_0)} \Delta u dS = 0$$

第二个等式成立是因为在积分曲面  $S_R(x_0)$  上,  $|x - x_0|$  是定值  $R$ , 故  $v$  是常数, 可以直接把  $v$  提出来。于是

$$u(x_0) = \int_{S_R(x_0)} u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \frac{1}{nw_n R^{n-1}} \int_{S_R(x_0)} u dS \quad (11.63)$$

这就是球面平均公式, 直观的意义是  $u$  在某一点的值等于任意以这个点为中心的球面平均值, 注意对任意的  $R$  这个公式都是成立的。由此还可以得到球体平均公式

$$\frac{1}{w_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u dx = \frac{1}{w_n R^n} \int_0^R \int_{S_r(x_0)} u dS dr = \frac{nw_n u(x_0)}{w_n R^n} \int_0^R r^{n-1} dr = u(x_0) \quad (11.64)$$

即

$$u(x_0) = \frac{1}{w_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u dx \quad (11.65)$$

这就是球体平均公式。

### 11.5.2 强最值原理

最值原理仅说明最值至少有一个在边界取到, 并没有给出当等号成立的时候  $D$  内部的情况, 强最值原理证明, 在  $D$  内部取到最值,  $u$  必定是常数。

**定理 16.** 设  $D \subset \mathbb{R}^n$  是有界连通开集,  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  调和, 如果存在  $x_0 \in D$  使得  $u(x_0) = \max_{\bar{D}} u$  (或  $\min_{\bar{D}} u$ ) =  $M$ , 那么  $u$  恒为常数

证明. 仅证最大值情形, 由球体平均公式, 当  $0 < R < \text{dist}(x_0, \bar{D})$  时

$$M = u(x_0) = \frac{1}{w_n R^n} \int_{B_R(x_0)} u dx \leq M \quad (11.66)$$

等式成立当且仅当整个球体  $B_R(x_0)$  内  $u = M$ , 由于  $D$  是连通的, 故对任意  $D$  中一点  $x$ , 存在连续曲线使得  $x, x_0$  相连。这是一个闭曲线, 故是紧致的, 取一个很细的有限开覆盖  $B_{r_i}(x_i), 0 \leq i \leq n$ , 且  $x_n = x$  使得  $x_{i+1} \in B_{r_i}(x_i)$ , 从而

$$u(x) = M = u(x_0) \quad (11.67)$$

对任意  $x \in D$  成立, 故  $u$  是常数 □

### 11.5.3 能量法证明特殊边界下的解至多唯一性

定理 17.  $f \in C(D), f \in C(\partial D)$ , 则在特殊边界下, 方程

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ a(x)u + \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = g & a(x) > 0 \end{cases}$$

至多只有一个解  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ 。注意这个边界不是一般的 Robin 边界。下面的方法也适用于 Dirichlet 边界。

证明. 反证法, 如果有两个解  $u_1, u_2$ , 设  $w = u_1 - u_2$ , 那么  $w$  满足

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } D \\ a(x)w + \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0 & a(x) > 0 \end{cases} \quad (11.68)$$

构造能量

$$E = \int_D |\nabla w|^2 dx \geq 0 \quad (11.69)$$

则由于  $\Delta w = 0$

$$E = \int_D \nabla(w \nabla w) dx - \int_D w \Delta w dx = \int_D \nabla(w \nabla w) dx \quad (11.70)$$

由 Gauss 公式和  $a(x)w + \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0$

$$E = \int_D \nabla(w \nabla w) dx = \int_{\partial D} w \frac{\partial w}{\partial n} dS = - \int_{\partial D} a(x) w^2 dS < 0 \quad (11.71)$$

矛盾! 故假设不成立。 □

## 11.5.4 Dirichlet 原理 (Dirichlet 边界)

这个原理也与能量有关。

**定理 18.** 定义能量泛函  $E[w] = \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - wf\right) dx$ ,  $w \in \Gamma = \{w \in C^2(\bar{D}) \mid w|_{\partial D} = g\}$ , 那么  $u$  是方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } D \\ u|_{\partial D} = g \end{cases} \quad (11.72)$$

的解的充要条件是

$$E[u] = \min_{w \in \Gamma} E[w] \quad (11.73)$$

证明. 对任意  $w \in \Gamma$ , 设  $w = u + v$ , 那么  $v$  满足

$$v|_{\partial D} = 0 \quad (11.74)$$

那么

$$\begin{aligned} E[w] &= \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla w|^2 - wf\right) dx = \int_D \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla v) \cdot (\nabla u + \nabla v) dx - \int_D v f dx - \int_D u f dx \\ &= \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - uf\right) dx + \int_D \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - vf\right) dx \\ &= E[u] - \int_D v \Delta u dx + \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_D \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 - vf\right) dx \\ &= E[u] + \int_D \frac{1}{2} |\nabla v|^2 dx \geq E[u] \end{aligned}$$

等号成立当且仅当  $\nabla v = 0$ , 又  $v|_{\partial D} = 0$ , 故  $v = 0$ , 即等号成立当且仅当  $w = u$ , 证毕!  $\square$

## 11.5.5 Dirichlet 原理 (Robin 边界)

**定理 19.** 定义能量泛函  $E[w] = \frac{1}{2} \int_D |\nabla w|^2 dx - \int_{\partial D} w f dS$ ,  $w \in \Gamma = \{w \in C^2(\bar{D}) \mid \frac{\partial w}{\partial n}|_{\partial D} = f\}$ , 那么  $u$  是方程

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = f \end{cases} \quad (11.75)$$

的解的充要条件是

$$E[u] = \min_{w \in \Gamma} E[w] \quad (11.76)$$

证明. 对任意  $w \in \Gamma$ , 设  $w = u + v$ , 那么  $v$  满足

$$\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0 \quad (11.77)$$

那么

$$\begin{aligned} E[w] &= \frac{1}{2} \int_D |\nabla w|^2 dx - \int_{\partial D} w f dS = \frac{1}{2} \int_D (\nabla u + \nabla v) \cdot (\nabla u + \nabla v) dx - \int_D v f dx - \int_D u f dx \\ &= \frac{1}{2} \int_D |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial D} u f dS + \int_D \nabla u \cdot \nabla v dx + \frac{1}{2} \int_D |\nabla v|^2 dx - \int_{\partial D} v f dS \\ &= E[u] - \int_D v \Delta u dx + \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} dS + \frac{1}{2} \int_D (|\nabla v|^2 - v f) dx \\ &= E[u] + \frac{1}{2} \int_D |\nabla v|^2 dx \geq E[u] \end{aligned}$$

等号成立当且仅当  $\nabla v = 0$ , 又  $\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial D} = 0$ , 故  $v = 0$ , 即等号成立当且仅当  $w = u$ , 证毕!  $\square$

## 11.6 Green 函数与理论解

现在我们不忘初心, 回过头来思考怎么求解

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D} = g & \text{(常数 } \alpha, \beta \text{ 决定边界)} \end{cases} \quad (11.78)$$

按照 常数  $\alpha, \beta$  对边界 分类. 思路是借助基本积分公式

$$u(x_0) = \int_D v \Delta u dx + \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

### 11.6.1 Dirichlet 边界

此时问题是

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ u \Big|_{\partial D} = g & \text{(Dirichlet 边界)} \end{cases} \quad (11.79)$$

看看我们的基本积分公式, 其中  $\Delta u$  已知,  $u \Big|_{\partial D}$  已知, 如果让  $\frac{\partial u}{\partial n}$  项消失, 那么就得到了最终解. 如果我们知道一个辅助修正函数  $H$  满足



$$\begin{cases} \Delta H = 0 & \text{in } D \\ H|_{\partial D} = -v|_{\partial D} \end{cases} \quad (11.80)$$

由 Green 第二公式（此时没有奇点！）

$$0 = \int_D H \Delta u dx + \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial H}{\partial n} - H \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (11.81)$$

把（11.81）和我们的基本积分公式相加得到

$$u(x_0) = \int_D (v + H) \Delta u dx + \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial (v + H)}{\partial n} - (v + H) \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (11.82)$$

为了化简，我们让  $G = v + H$ ，注意到由  $H$  的定义  $(v + H)|_{\partial D} = 0$ ，故

$$u(x_0) = \int_D G f dx + \int_{\partial D} g \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (11.83)$$

这就是我们得到的解。这个  $G$  就被称为区域  $D$  的 Green 函数，如果我们省去对辅助函数  $H$  的定义而直接定义 Green 函数，即

$$\begin{cases} \Delta G(x, x_0) = \delta(x - x_0) & \text{in } D \\ G|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (11.84)$$

因为反过来这样定义辅助函数  $H = G - v$  是一样的，这样做的好处在于只要直接求得 Green 函数就可以直接写出最终的解（11.83）而不用再计算。

### 11.6.2 Neumann 边界

此时问题是

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = g & \text{(Neumann 边界)} \end{cases} \quad (11.85)$$

这时候我们应当让  $u$  项系数为 0，自然地会联想到让 Green 函数满足

$$\begin{cases} \Delta G(x, x_0) = \delta(x - x_0) & \text{in } D \\ \frac{\partial G}{\partial n}|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (11.86)$$

但这样是不行的，为什么捏？是因为本身这样的 Green 函数并不存在，由 Gauss 定理

$$1 = \int_D \Delta G dx = \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n} dS = 0 \quad (11.87)$$

矛盾！为了保证  $\frac{\partial G}{\partial n}|_{\partial D} = 0$ ，我们必须对  $\Delta G(x, x_0)$  有一个平移量，我们让

$$\begin{cases} \Delta G(x, x_0) = \delta(x - x_0) - \frac{1}{|D|} & \text{in } D \\ \frac{\partial G}{\partial n} \big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (11.88)$$

其中  $|D|$  是区域  $D$  的体积，是一个常数。这样一来

$$\int_D \Delta G dx = \int_D \left( \delta(x - x_0) - \frac{1}{|D|} \right) dx = 0 = \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n} dS = 0 \quad (11.89)$$

这样 Green 函数才会存在，此时由 Green 公式，让辅助函数  $H = G - v$

$$\int_D u \Delta H dx = \int_D H \Delta u dx + \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial H}{\partial n} - H \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = -C \quad (11.90)$$

其中

$$C = \int_D u \Delta H dx = \frac{1}{|D|} \int_D u dx$$

是常数。从而把 (11.90) 与基本积分公式相加得到最终解

$$u(x_0) = \int_D G f dx - \int_{\partial D} G g dS + C \quad (11.91)$$

注意到实际上

$$u(x_0) = \int_D G f dx - \int_{\partial D} G g dS \quad (11.92)$$

也是方程 (11.85) 的解，因为对最终解进行平移是不变的。因为刚好  $\nabla u, \Delta u$  都平移不变。

### 11.6.3 Robin 边界

此时方程是

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \big|_{\partial D} = g & \text{(Robin 边界)} \end{cases} \quad (11.93)$$

与 Dirichlet 边界类似，让 Green 函数满足

$$\begin{cases} \Delta G(x, x_0) = \delta(x - x_0) & \text{in } D \\ \alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n} \big|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (11.94)$$

此时由 Green 公式，让辅助函数  $H = G - v$

$$0 = \int_D H \Delta u dx + \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial H}{\partial n} - H \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (11.95)$$

从而把 (11.95) 与基本积分公式相加得到

$$u(x_0) = \int_D G f dx + \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (11.96)$$

由于  $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} |_{\partial D} = g$ , 有

$$u = \frac{1}{\alpha} \left( g - \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \quad (11.97)$$

代入 (11.96) 有

$$u(x_0) = \int_D G f dx + \int_{\partial D} \left( \frac{1}{\alpha} \left( g - \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (11.98)$$

注意到  $\alpha G + \beta \frac{\partial G}{\partial n} |_{\partial D} = 0$ , 化简得到最终解

$$u(x_0) = \int_D G f dx + \frac{1}{\alpha} \int_{\partial D} g \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (11.99)$$

同理

$$u(x_0) = \int_D G f dx - \frac{1}{\beta} \int_{\partial D} g G dS \quad (11.100)$$

v

## 11.7 镜像法求特殊区域的 Green 函数

有了前面的铺垫, 我们知道求解的关键是找到 Green 函数, 但是不幸的是对于一般区域的 Green 函数我们往往极难求解, 对于一些特殊区域, 我们可以利用镜像法求解。

### 11.7.1 三维半空间 (Dirichlet 边界)

此时区域  $D = \{(x, y, z) \mid z > 0\}$ , 原方程是

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } D \\ u |_{\partial D} = g & \text{(Dirichlet 边界)} \end{cases} \quad (11.101)$$

由上一小节注意到我们的 Green 函数应当满足

$$\begin{cases} \Delta G(x, x_0) = \delta(x - x_0) & \text{in } D \\ G |_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad (11.102)$$

注意到我们的函数  $v(x - x_0)$  是满足

$$\Delta v(x, x_0) = \delta(x - x_0) \quad (11.103)$$

的, 但是  $v |_{\partial D} \neq 0$ , 这时候我们可以用镜像法凑出满足  $G |_{\partial D} = 0$  的函数, 设

$$x_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad (11.104)$$

取其沿  $\partial D$  的对称点

$$x_0^* = (x_0, y_0, -z_0) \quad (11.105)$$

考察

$$G(x, x_0) = v(x - x_0) - v(x - x_0^*) \quad (11.106)$$

那么实际上这样的  $G$  是满足 (11.102) 的。因为在  $\partial D$  即  $z = 0$  上,  $|x - x_0| = |x - x_0^*|$ , 故

$$G|_{\partial D} = v(x - x_0) - v(x - x_0^*)|_{\partial D} = 0$$

另一方面, 因为在  $D$  里面,  $\delta(x - x_0^*) = 0$ , 因为  $x \neq x_0^*$ , 故

$$\Delta G(x, x_0) = \delta(x - x_0) - \delta(x - x_0^*) = \delta(x - x_0) \quad \text{in } D \quad (11.107)$$

因此得到半空间的 Green 函数

$$G(x, x_0) = v(x - x_0) - v(x - x_0^*)$$

### 11.7.2 三维球体 (Dirichlet 边界)

与物理中电像法类似, 对于球体区域  $D = B_R(0)$ , 给出 Green 函数

$$G(x, x_0) = v(x - x_0) - \frac{R}{|x_0|} v(x - x_0^*) \quad (11.108)$$

其中

$$x_0^* = \frac{R^2}{|x_0|^2} x_0 \quad (11.109)$$

显然  $\Delta G(x, x_0) = \delta(x - x_0)$ , 在边界上由阿氏圆 (相似三角形) 我们知道

$$\frac{|x - x_0|}{|x_0|} = \frac{|x - x_0^*|}{R} \quad (11.110)$$

三维里

$$v(x - x_0) = -\frac{1}{4\pi |x - x_0|}$$

故  $G|_{\partial D} = 0$ , 从而也得到了三维球体的 Green 函数。结论可以扩展到  $n$  维球体

$$G(x, x_0) = v(x - x_0) - \left(\frac{R}{|x_0|}\right)^{n-2} v(x - x_0^*)$$

### 11.7.3 三维半球体 (Dirichlet 边界)

区域

$$D = \{(x, y, z) \mid B_R(0) \cap \{z > 0\}\}$$

解决这个问题的思路是因为我们已经得到了三维球体的 Green 函数, 已经满足了球面的边界条件, 接下来只要满足通过反射的方法使得其满足平面  $z = 0$  上的边界条件即可。直接给出答案

$$G(x, x_0) = v(x - x_0) - \frac{R}{|x_0|} v(x - x_1) - v(x - x_3) + \frac{R}{|x_0|} v(x - x_4) \quad (11.111)$$

其中

$$\begin{cases} x_1 = \frac{R^2}{|x_0|^2} x_0 \\ x_3 \text{ 是 } x_0 \text{ 沿 } z = 0 \text{ 的对称点} \\ x_4 \text{ 是 } x_1 \text{ 沿 } z = 0 \text{ 的对称点} \end{cases} \quad (11.112)$$

### 11.7.4 三维半空间 (Neumann 边界)

Neumann 边界与 Dirichlet 边界不同的是其 Green 函数应当满足的边界条件不同, Neumann 边界的 Green 函数应当满足

$$\begin{cases} \Delta G(x, x_0) = \delta(x - x_0) - \frac{1}{|D|} = \delta(x - x_0) & \text{in } D \\ \frac{\partial G}{\partial n} \big|_{\partial D} = \nabla G \cdot n = 0 \end{cases} \quad (11.113)$$

这个问题的关键是希望有  $\nabla G \cdot n = 0$ , 注意到我们知道,  $n=3$  时

$$\nabla v(x - x_0) = \frac{x - x_0}{4\pi |x - x_0|^2}$$

镜像法让

$$G(x, x_0) = v(x - x_0) + v(x - x_0^*) \quad (11.114)$$

很巧妙地,

$$\nabla G(x, x_0) \cdot n \big|_{\partial D} = 0 \quad (11.115)$$

## 12 高维发展型偏微分方程

发展型方程就是和时间有关的方程



## 12.1 三维波动方程

三维波动方程指的是

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad (12.1)$$

在此再声明一下  $B_r(x)$  指的是以点  $x$  为中心的球域,  $S_r(x)$  指的是以点  $x$  为中心的球面。

### 12.1.1 能量守恒

在 8.1.2 小节我们了解到在一维情况下, 定义波动方程的能量为

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2 + c^2 u_x^2 dx \quad (12.2)$$

自然而然地我们想到把它拓展到 3 维, 此时有

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 dx \quad (12.3)$$

这样定义的能量到底有没有道理呢? 我们来验证一下

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx$$

注意到

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) = u_{tt} u_t + c^2 \sum_{x,y,z} u_x u_{xt} \quad (12.4)$$

为了和我们的条件  $u_{tt} = c^2 \Delta u$  搭上关系, 拆项有

$$u_x u_{xt} = \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t) - u_{xx} u_t$$

代入到 (12.4) 得到

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) = (u_{tt} - c^2 \Delta u) u_t + c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u) \quad (12.5)$$

而  $u_{tt} = c^2 \Delta u$ , 那么就有

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) = c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u) \quad (12.6)$$

于是由 Gauss 公式

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} c^2 \int_{S_r(0)} u_t \nabla u dS \quad (12.7)$$

如果我们假设  $u_t$  满足

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u_t = 0$$

那么就有

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

于是

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 dx = \text{const} \quad (12.8)$$

由此可见，我们的类比是合理的，也完全可以类比到  $n$  维空间

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 dx = \text{const} \quad (12.9)$$

### 12.1.2 特征锥

回顾一下我们的老朋友 d'Alembert 公式：

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

可以发现，初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

的解在点  $(x_0, t_0)$  处仅与初值  $\varphi(x), \psi(x)$  在区间  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  上的值有关。两条特征线内区域

$$D = \{(x, t) \mid |x - x_0| \leq c|t - t_0|\}$$

正是区间  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  的决定区域，即整个区域  $D$  内  $u$  的值都完全由初值  $\varphi(x), \psi(x)$  在区间  $[x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$  上的值决定。我们把这个问题的结论类比到 3 维问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (12.10)$$

是不是区域

$$D = \{(x, t) \mid |x - x_0| \leq c|t - t_0|\}$$

内  $u$  的值仍然由  $D$  与平面  $t=0$  的截面

$$B_{ct_0}(x_0) \times \{0\}$$

内的初值决定呢？答案是肯定的，区域  $D$  被我们称为“特征锥”。其追面方程为

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{x, y, z} (x - x_0)^2 - c^2 (t - t_0)^2 = 0$$

要证明区域  $D$  内  $u$  的值仍然由  $B_{ct_0}(x_0) \times \{0\}$  内的初值决定, 我们只需要证明球内初值为 0 则  $u$  为 0 即可, 而这是下一小节我们要证明的东西。

### 12.1.3 初值问题解的唯一性 (全空间)

更一般地, 我们可以证明更强地结论

**定理 20.** 方程

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t) & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (12.11)$$

的解唯一。

证明. 反证法, 如果有两个解  $u_1, u_2$ , 设  $u = u_1 - u_2$ , 那么  $u$  满足

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (12.12)$$

故

构造能量函数

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 dx \quad (12.13)$$

注意为啥我们不定义能量函数是

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 dx$$

呢? 这是因为, 这样的能量是常数需要  $u_t$  在无穷远处消失, 而我们的定理不需要。对于 (12.12) 我们对时间求导, 此时被积区域是和  $t$  有关的

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{c(t_0-t)} \int_{S_r(x_0)} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dS dr \quad (12.14)$$

由含参变量微分我们知道

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{c}{2} \int_{S_{c(t_0-t)}(x_0)} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dS + \frac{1}{2} \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx$$



由  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) = (u_{tt} - c^2 \Delta u) u_t + c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u)$  我们知道

$$\frac{dE}{dt} = \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u) dx - \frac{c}{2} \int_{S_{c(t_0-t)}(x_0)} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dS \quad (12.15)$$

由 Gauss 公式

$$\frac{dE}{dt} = c \int_{S_{c(t_0-t)}(x_0)} \left( cu_t \nabla u - \frac{u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2}{2} \right) dS \quad (12.16)$$

由 Cauchy 不等式

$$|cu_t \nabla u| \leq |u_t| |c \nabla u| \leq \frac{u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2}{2} \quad (12.17)$$

从而

$$\frac{dE}{dt} \leq 0 \quad (12.18)$$

故

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0 \quad t \geq 0 \quad (12.19)$$

综上  $E \equiv 0$ , 得到  $u_t \equiv 0, \nabla u \equiv 0$ , 从而  $u = \text{const}$ , 又  $u(x, 0) = 0$ , 故  $u \equiv 0$ ,  $u_1 = u_2$ , 矛盾! 证毕! 由此也能证明上一小节的结论。□

## 12.2 高维偏微分方程初边值问题解的唯一性

### 12.2.1 波动方程 (Dirichlet 边界)

**定理 21.** 设  $D \subset \mathbb{R}^n$  是有界区域, 那么方程

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t) & x \in D \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{初值} \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & \text{初值} \\ u|_{\partial D} = g(x, t) & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (12.20)$$

的解唯一。

证明. 值得注意的是, 与上一小节不同, 这次是一个有界区域, 并且已知边值, 而特征锥就不一定在  $D$  里面, 证明方法上的差异值得仔细琢磨。反证法, 如果有两个解  $u_1, u_2$ , 设  $u = u_1 - u_2$ , 那么  $u$  满足

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & x \in D \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & \text{初值} \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{初值} \\ u|_{\partial D} = 0 & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (12.21)$$

故

构造能量函数

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_D u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 dx \quad (12.22)$$

对时间求导

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int_D \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx \quad (12.23)$$

由  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) = (u_{tt} - c^2 \Delta u) u_t + c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u)$  我们知道

$$\frac{dE}{dt} = \int_D c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u) dx \quad (12.24)$$

由 Gauss 公式 且  $u|_{\partial D} = 0$ , 即  $u_t|_{\partial D} = 0$ , 于是

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \int_{\partial D} u_t \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 \quad (12.25)$$

故

$$E(t) = E(0) = 0 \quad t \geq 0 \quad (12.26)$$

得到  $u_t \equiv 0, \nabla u \equiv 0$ , 从而  $u = \text{const}$ , 又  $u(x, 0) = 0$ , 故  $u \equiv 0$ ,  $u_1 = u_2$ , 矛盾! 证毕!  $\square$

### 12.2.2 波动方程 (Neumann 边界)

定理 22. 设  $D \subset \mathbb{R}^n$  是有界区域, 那么方程

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t) & x \in D \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{初值} \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & \text{初值} \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = g(x, t) & (\text{Neumann 边界}) \end{cases} \quad (12.27)$$

的解唯一。

证明. 与 Dirichlet 边界完全类似, 在 (12.25) 处因为  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0$  而  $\frac{dE}{dt} = 0$ .  $\square$

### 12.2.3 波动方程 (Robin 边界)

定理 23. 设  $D \subset \mathbb{R}^n$  是有界区域, 那么方程

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x, t) & x \in D \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{初值} \\ u_t(x, 0) = \psi(x) & \text{初值} \\ u|_{\partial D} = g(x, t) & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (12.28)$$

的解唯一。

证明. Robin 边界需要我们构造另一个能量函数, 也可以当作是由边界条件凑出来的。反证法, 如果有两个解  $u_1, u_2$ , 设  $u = u_1 - u_2$ , 那么  $u$  满足

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & x \in D \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & \text{初值} \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{初值} \\ \sigma(x)u + \frac{\partial u}{\partial n} \big|_{\partial D} = 0 & (\text{Robin边界}) \end{cases} \quad (12.29)$$

故构造能量函数

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_D u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2 dx + \frac{c^2}{2} \int_{\partial D} \sigma(x) u^2 dx \quad (12.30)$$

对时间求导

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \int_D \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx + c^2 \int_{\partial D} \sigma(x) u u_t dx \quad (12.31)$$

由  $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) = (u_{tt} - c^2 \Delta u) u_t + c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u)$  我们知道

$$\frac{dE}{dt} = \int_D c^2 \nabla \cdot (u_t \nabla u) dx + c^2 \int_{\partial D} \sigma(x) u u_t dx \quad (12.32)$$

由 Gauss 公式且  $\sigma(x)u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , 得到

$$\frac{dE}{dt} = c^2 \int_{\partial D} u_t \left( \sigma(x)u + \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (12.33)$$

故

$$E(t) = E(0) = 0 \quad t \geq 0 \quad (12.34)$$

得到  $u_t \equiv 0, \nabla u \equiv 0$ , 从而  $u = \text{const}$ , 又  $u(x, 0) = 0$ , 故  $u \equiv 0$ ,  $u_1 = u_2$ , 矛盾! 证毕!  $\square$

#### 12.2.4 热方程 (Dirichlet/Neumann 边界)

定理 24. 设  $D \subset \mathbb{R}^n$  是有界区域, 那么方程

$$\begin{cases} u_t - k \Delta u = f(x, t) & x \in D \subset \mathbb{R}^n, t > 0, k > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{初值} \\ u|_{\partial D} = g(x, t) / \frac{\partial u}{\partial n} \big|_{\partial D} = g(x, t) & (\text{Dirichlet边界}) / (\text{Neumann边界}) \end{cases} \quad (12.35)$$

的解唯一。

证明. 仅证明 Dirichlet 边界, Neumann 边界完全类似. 反证法, 如果有两个解  $u_1, u_2$ , 设  $u = u_1 - u_2$ , 那么  $u$  满足

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = 0 & x \in D \subset \mathbb{R}^n, t > 0, k > 0 \\ u(x, 0) = 0 & \text{初值} \\ u|_{\partial D} = 0 & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (12.36)$$

构造能量函数

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_D u^2 dx \quad (12.37)$$

对时间求导

$$\frac{dE}{dt} = \int_D uu_t dx = k \int_D u \Delta u dx \quad (12.38)$$

由 Green 第一公式 我们知道

$$\frac{dE}{dt} = k \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} dx - k \int_D |\nabla u|^2 dx \quad (12.39)$$

由  $u|_{\partial D} = 0$ , 得到

$$\frac{dE}{dt} = -k \int_D |\nabla u|^2 dx \leq 0 \quad (12.40)$$

故

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0 \quad t \geq 0 \quad (12.41)$$

从而  $E \equiv 0$ , 得到  $u_t \equiv 0, \nabla u \equiv 0$ , 从而  $u = \text{const}$ , 又  $u(x, 0) = 0$ , 故  $u \equiv 0$ ,  $u_1 = u_2$ , 矛盾! 证毕!  $\square$

### 12.2.5 热方程 (特殊 Robin 边界)

**定理 25.** 设  $D \subset \mathbb{R}^n$  是有界区域, 那么方程

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = f(x, t) & x \in D \subset \mathbb{R}^n, t > 0, k > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{初值} \\ \sigma(x)u + \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = g(x, t) & \text{其中 } \sigma(x) \geq 0 (\text{特殊 Robin 边界}) \end{cases} \quad (12.42)$$

的解唯一。

证明. 仅证明 Dirichlet 边界, Neumann 边界完全类似. 反证法, 如果有两个解  $u_1, u_2$ , 设  $u = u_1 - u_2$ , 那么  $u$  满足

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = 0 & x \in D \subset \mathbb{R}^n, t > 0, k > 0 \\ u(x, 0) = 0 & \text{初值} \\ \sigma(x)u + \frac{\partial u}{\partial n} \big|_{\partial D} = 0 & \text{其中 } \sigma(x) \geq 0 \text{ (特殊Robin边界)} \end{cases} \quad (12.43)$$

构造能量函数

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_D u^2 dx \quad (12.44)$$

对时间求导

$$\frac{dE}{dt} = \int_D uu_t dx = k \int_D u \Delta u dx \quad (12.45)$$

由 Green 第一公式 我们知道

$$\frac{dE}{dt} = k \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} dx - k \int_D |\nabla u|^2 dx \quad (12.46)$$

由  $\sigma(x)u + \frac{\partial u}{\partial n} \big|_{\partial D} = 0$ , 得到

$$\frac{dE}{dt} = -k \int_{\partial D} \sigma(x) u^2 dx - k \int_D |\nabla u|^2 dx \leq 0 \quad (12.47)$$

故

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = 0 \quad t \geq 0 \quad (12.48)$$

从而  $E \equiv 0$ , 得到  $u_t \equiv 0, \nabla u \equiv 0$ , 从而  $u = \text{const}$ , 又  $u(x, 0) = 0$ , 故  $u \equiv 0$ ,  $u_1 = u_2$ , 矛盾! 证毕!  $\square$

## 12.3 高维波动方程初值问题解

### 12.3.1 三维波动方程径向解

先来看一种特殊情形, 如果

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(r) \\ u_t(x, 0) = \psi(r) \end{cases} \quad (12.49)$$

即初值是仅关于  $r$  的函数, 且  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ , 那么我们可以求出径向解  $u(r, t)$ , 此时我们把 Laplace 算子在极坐标下表示原方程变为

$$u_{tt} = c^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta} u_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} u_{\varphi\varphi} \right) \quad (12.50)$$

注意! 我们假设  $u(r, t)$  仅与  $r, t$  有关, 与  $\theta, \varphi$  无关, 从而

$$u_{tt} = c^2 \left( u_{rr} + \frac{2}{r} u_r \right)$$

两边乘上  $r$  得到

$$ru_{tt} = c^2 (ru_{rr} + 2u_r) \quad (12.51)$$

换元, 让

$$v(r, t) = ru(r, t)$$

注意到

$$\begin{cases} v_{tt} = ru_{tt} \\ v_{rr} = ru_{rr} + 2u_r \\ v(0, t) = 0 \end{cases}$$

从而  $v$  满足一维波动方程半直线问题 (Dirichlet 边界):

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{rr} & r > 0, t > 0 \\ v(r, 0) = r\varphi(r) & r > 0 \\ v_t(r, 0) = r\psi(r) & r > 0 \\ v(0, t) = 0 & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (12.52)$$

由此也可以看出, 为什么我们可以在初值函数仅与  $r$  有关是假设  $u$  有径向解, 因为换完元之后  $v$  的初值是仅关于  $r$  的, 满足半直线问题。解出得到

$$u(r, t) = \begin{cases} \frac{1}{2r} [(r+ct)\varphi(r+ct) + (r-ct)\varphi(r-ct)] + \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} \psi(s) ds & 0 \leq t \leq \frac{r}{c} \\ \frac{1}{2r} [(r+ct)\varphi(r+ct) - (ct-r)\varphi(ct-r)] + \frac{1}{2cr} \int_{ct-r}^{r+ct} \psi(s) ds & t > \frac{r}{c} \end{cases} \quad (12.53)$$

### 12.3.2 三维的一般情形! Kirchhoff's Formula

方程为

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (12.54)$$

对于一般情形, 我们就要用到球面平均法得到 Kirchhoff 公式。对于函数  $u(x, r)$ , 注意  $x$  是一个三维向量, 我们定义它在点  $x_0$  的球面平均函数为

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x_0)} u(x, t) dS \quad (12.55)$$

在固定了点  $x_0$  函数  $\bar{u}(r, t)$  是仅关于  $r, t$  的。我们需要利用它来达到和上一小节径向解相似的效果。把 (12.54) 写成极坐标形式得到

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(x, t) d\theta d\varphi \quad (12.56)$$

分别对  $t$  求二次偏导, 对  $r$  求一次偏导得到

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}(r, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} d\theta d\varphi \\ \frac{\partial \bar{u}(r, t)}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u(x, t)}{\partial r} d\theta d\varphi \end{cases} \quad (12.57)$$

即

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} = \bar{u}_{tt} \\ \bar{u}_r = \bar{u}_r \end{cases} \quad (12.58)$$

我们继续下一步, 对  $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$  在  $B_r(x_0)$  上积分得到

$$\int_{B_r(x_0)} u_{tt} dx = \int_{B_r(x_0)} c^2 \Delta u dx = c^2 \int_{S_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (12.59)$$

我们想办法把这两堆式子都跟平均函数扯上关系, 左边这一堆满足

$$\int_{B_r(x_0)} u_{tt} dx = \int_0^r d\rho \int_{S_r(x_0)} u_{tt} dS = 4\pi \int_0^r \rho^2 d\rho \frac{1}{4\pi \rho^2} \int_{S_r(x_0)} u_{tt} dS = 4\pi \int_0^r \rho^2 \bar{u}_{tt}(\rho, t) d\rho \quad (12.60)$$

右边那一堆满足

$$c^2 \int_{S_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 4\pi r^2 c^2 \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial r} dS = 4\pi r^2 c^2 \bar{u}_r \quad (12.61)$$

于是我们有

$$\int_0^r \rho^2 \bar{u}_{tt}(\rho, t) d\rho = c^2 r^2 \bar{u}_r \quad (12.62)$$

两边对  $r$  求偏导得到

$$r^2 \bar{u}_{tt}(r, t) = c^2 (r^2 \bar{u}_{rr} + 2r \bar{u}_r) \quad (12.63)$$

由 (12.58), 我们把它写为

$$r \bar{u}_{tt} = c^2 (r \bar{u}_{rr} + 2 \bar{u}_r) \quad (12.64)$$

怎么样是不是眼熟? 和上一小节类似, 我们可以做换元让

$$v(r, t) = r \bar{u}(r, t)$$

注意到

$$\begin{cases} v_{tt} = r\bar{u}_{tt} \\ v_{rr} = r\bar{u}_{rr} + 2\bar{u}_r \\ v(0, t) = 0 \end{cases}$$

从而  $v$  满足一维波动方程半直线问题 (Dirichlet 边界):

$$\begin{cases} v_{tt} = c^2 v_{rr} & r > 0, t > 0 \\ v(r, 0) = r \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x_0)} u(x, 0) dS = \frac{1}{4\pi r} \int_{S_r(x_0)} \varphi(x) dS & r > 0 \\ v_t(r, 0) = r \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x_0)} u_t(x, 0) dS = \frac{1}{4\pi r} \int_{S_r(x_0)} \psi(x) dS & r > 0 \\ v(0, t) = 0 & (\text{Dirichlet 边界}) \end{cases} \quad (12.65)$$

我们不直接使用公式去求解, 这样化简过于繁杂, 由  $v_{tt} = c^2 v_{rr}$  可以得到行波解

$$v = r\bar{u}(r, t) = f(r + ct) + g(r - ct) \quad (12.66)$$

让  $r \rightarrow 0^+$  得到

$$0 = f(ct) + g(-ct) \quad (12.67)$$

于是式 (12.66) 变为

$$r\bar{u}(r, t) = f(r + ct) - f(ct - r) \quad (12.68)$$

对上式两边  $r$  求导得到

$$(r\bar{u})_r = r\bar{u}_r + \bar{u} = f'(r + ct) + f'(ct - r) \quad (12.69)$$

两边取  $r \rightarrow 0^+$  得到

$$\bar{u}(0, t) = 2f'(ct) \quad (12.70)$$

另一方面

$$\bar{u}(0, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x_0)} u(x) dS = u(x_0, t) \quad (12.71)$$

故我们只要求解出  $f'$  便大功告成啦, 我们对式 (12.68) 两边对  $t$  求导得到

$$\frac{1}{c} r\bar{u}_t = f'(r + ct) - f'(ct - r) \quad (12.72)$$

与式 (12.69) 相加并让  $t \rightarrow 0^+$  得

$$\left[ (r\bar{u})_r + \frac{1}{c} r\bar{u}_t \right] |_{t=0} = 2f'(r) \quad (12.73)$$



一方面,

$$\frac{1}{c} r \bar{u}_t \big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi c r} \int_{S_r(x_0)} \psi(x) dS \quad (12.74)$$

另一方面,

$$(r \bar{u})_r \big|_{t=0} = (r \bar{u} \big|_{t=0})_r = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{4\pi r} \int_{S_r(x_0)} \varphi(x) dS \right) \quad (12.75)$$

于是我们有

$$u(x_0, t) = 2f'(ct) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x_0)} \psi(x) dS + \frac{\partial}{\partial ct} \left( \frac{1}{4\pi ct} \int_{S_{ct}(x_0)} \varphi(x) dS \right) \quad (12.76)$$

整理即得 Kirchhoff' s Formula

$$u(x_0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x_0)} \psi(x) dS + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x_0)} \varphi(x) dS \right) \quad (12.77)$$

### 12.3.3 降维法求二维解

方程为

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y) \end{cases} \quad (12.78)$$

我们依旧把这个方程看成是三维的特殊情形, 由 Kirchhoff 公式, 设  $x_0 = (x, y, 0)$

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x_0)} \psi(x, y) dS + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x_0)} \varphi(x, y) dS \right) \quad (12.79)$$

设  $D_{ct}(x, y)$  是以  $(x, y)$  为圆心,  $ct$  为半径的圆盘, 于是由曲面积分的知识我们知道

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{D_{ct}(x, y)} \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}} dx dy + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\pi c} \int_{D_{ct}(x, y)} \frac{\varphi(x, y)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2}} dx dy \right) \quad (12.80)$$

这就是二维解。

## 12.4 非线性方程的解法

在此仅介绍初等解法, 变分法与复杂解法等学了复变再回来品味品味。

### 12.4.1 Kirchhoff 变换

若

$$\nabla \cdot (\sigma(u) \nabla u) = 0 \quad (12.81)$$

令

$$w = \int_{u_0}^u \sigma(p) dp \quad (12.82)$$

则

$$\Delta w = \nabla \cdot \nabla w = \nabla \cdot (\sigma(u) \nabla u) = 0 \quad (12.83)$$

#### 12.4.2 Cole-Hopf 变换

若

$$u_t + uu_x = \beta u_{xx} \quad (12.84)$$

令

$$u = -2\beta \frac{\partial \ln v}{\partial x} \quad (12.85)$$

则

$$v_t = \lambda v_{xx} \quad (12.86)$$

#### 12.4.3 相似变换

若

$$u_t = (\sigma(u) u_x)_x \quad (12.87)$$

令

$$u = u(p) \quad p = \frac{x}{\sqrt{t}} \quad (12.88)$$

则

$$(\sigma(u) u')' + \frac{p}{2} u' = 0 \quad (12.89)$$

#### 12.4.4 行波变换

若

$$u_t = (u^n u_x)_x \quad (12.90)$$

令

$$u = f(x + at) \quad (12.91)$$

则

$$af' = (f^n f')' \quad (12.92)$$

于是

$$u = f(x + at) = (n(a(x + at)) + c)^{\frac{1}{n}} \quad (12.93)$$

## 12.4.5 平面波变换

若

$$iu_t + u_{xx} + \beta |u|^2 u = 0 \quad (12.94)$$

令

$$u = e^{i(kx - \mu t)} v(p) \quad (12.95)$$

其中

$$\begin{cases} k = \frac{b}{2} \\ \mu = k^2 - a^2 \\ p = x - bt \end{cases} \quad (12.96)$$

则

$$v_{pp} - a^2 v + \beta v^2 = 0 \quad (12.97)$$

于是

$$v_p^2 = a^2 v^2 - \frac{\beta}{2} v^4 \quad (12.98)$$

解得

$$v(p) = a \sqrt{\frac{2}{\beta}} \operatorname{sech} ap \quad (12.99)$$

最终得到

$$u = a \sqrt{\frac{2}{\beta}} e^{i\left(\frac{b}{2}x - \left(\frac{b^2}{4} - a^2\right)t\right)} \operatorname{sech} a(x - bt) \quad (12.100)$$

## 13 绝技 ·Fourier 变换!

Fourier 变换在面对线性方程时展现出了惊人的威力, 本章将从 Fourier 有限区间的展开开始, 逐步展现 Fourier 变换的威力。

## 13.1 心法 · 有限区间 Fourier 展开!

我们复习一下有限区间的 Fourier 展开, 对于  $f \in C[a, b]$ , 我们有

$$f(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos \frac{2n\pi}{b-a} x + B_n \sin \frac{2n\pi}{b-a} x \quad (13.1)$$

其中

$$\begin{cases} A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(p) \cos \frac{2n\pi}{b-a} p dp \\ B_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(p) \sin \frac{2n\pi}{b-a} p dp \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad (13.2)$$

我们考虑它的复数形式, 由 Euler 公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (13.3)$$

设定义在  $[-l, l]$  上的函数  $f$  在此区间上能够展开成 Fourier 级数:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos nwx + B_n \sin nwx \quad (13.4)$$

其中  $w = \frac{\pi}{l}$ , 且

$$\begin{cases} A_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(p) \cos \frac{n\pi}{l} p dp \\ B_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(p) \sin \frac{n\pi}{l} p dp \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad (13.5)$$

应用 Euler 公式

$$\cos nwx = \frac{e^{inwx} + e^{-inwx}}{2} \quad \sin nwx = \frac{e^{inwx} - e^{-inwx}}{2i} \quad (13.6)$$

于是

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{e^{inwx} + e^{-inwx}}{2} + i B_n \frac{e^{-inwx} - e^{inwx}}{2} \quad (13.7)$$

即

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A_n - iB_n}{2} e^{inwx} + \frac{A_n + iB_n}{2} e^{-inwx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{inwx} \quad (13.8)$$

其中

$$\begin{cases} F_0 = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(p) dp \\ F_{\pm n} = \frac{A_n \mp iB_n}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(p) (\cos \frac{n\pi}{l} p \mp i \sin \frac{n\pi}{l} p) dp = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(p) e^{\mp inwp} dp \end{cases} \quad (13.9)$$

有

$$F_{-n} = \overline{F_n} \quad (13.10)$$

### 13.2 突破极限! Fourier 变换神功初成!

Fourier 变换是 Fourier 展开的连续形式, 将类似的结果推广到定义在无穷区间上. 考虑定义在  $[-l, l]$  上的函数  $f$  在此区间上能够展开成 Fourier 级数,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{inwx} \quad (13.11)$$

将系数代入, 得到

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(p) e^{-inwp} dp \right) e^{inwx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(p) e^{-inw(p-x)} dp \quad (13.12)$$

设  $\lambda_n = nw$ ,  $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n-1}$ , 那么就有

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-l}^l f(p) e^{-i\lambda_n(p-x)} dp \right] \Delta\lambda_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \Delta\lambda_n e^{i\lambda_n x} H_n \quad (13.13)$$

其中

$$H_n = \int_{-l}^l f(p) e^{-i\lambda_n p} dp \quad (13.14)$$

这是一个黎曼和的形式, 当  $l \rightarrow +\infty$ , 一个合理的极限是

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) e^{-i\lambda p} dp \quad (13.15)$$

于是我们得到了 Fourier 变换

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) e^{-i\lambda p} dp \quad (13.16)$$

而

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (13.17)$$

被称为反演公式

### 13.3 卷积!

设函数  $f, g$  定义在  $(-\infty, +\infty)$  上并且绝对可积, 那么我们可以定义一个新的函数

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt \quad (13.18)$$

卷积满足交换律, 结合律, 分配律

$$\begin{cases} f * g = g * f \\ (f * g) * h = f * (g * h) \\ (f + g) * h = f * h + g * h \end{cases} \quad (13.19)$$

### 13.4 Fourier 变换的若干性质

我们记  $F[f](\lambda)$  为函数  $f$  的 Fourier 变换, 那么我们有一些基本性质

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p) e^{-i\lambda p} dp \quad (13.20)$$

#### 13.4.1 线性性

$$F[\alpha f + \beta g](\lambda) = \alpha F[f](\lambda) + \beta F[g](\lambda) \quad (13.21)$$

## 13.4.2 频移特性

$$F[f(x)e^{-i\lambda_0 x}](\lambda) = F[f(x)](\lambda + \lambda_0) \quad (13.22)$$

## 13.4.3 平移特性

$$F[f(x)](\lambda)e^{ix_0\lambda} = F[f(x+x_0)](\lambda) \quad (13.23)$$

证明. 由定义

$$F[f(x)](\lambda)e^{ix_0\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(p)e^{-i\lambda(p-x_0)}dp \quad (13.24)$$

换元, 令  $q = p - x_0$ , 得到

$$F[f(x)](\lambda)e^{ix_0\lambda} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q+x_0)e^{-i\lambda q}dq = F[f(x+x_0)](\lambda) \quad (13.25)$$

□

## 13.4.4 微分关系

若  $f(\pm\infty) = 0$ , 且  $f'$  的 Fourier 变换存在, 那么

$$F[f'(x)](\lambda) = i\lambda F[f(x)](\lambda) \quad (13.26)$$

这是因为由分部积分法则

$$F[f'(x)](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(p)e^{-i\lambda p}dp = f e^{-i\lambda p} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(p)e^{-i\lambda p}dp = i\lambda F[f(x)](\lambda)$$

## 13.4.5 微分特性

$$F'[f](\lambda) = F[-ixf](\lambda) \quad (13.27)$$

## 13.4.6 卷积特性

$$F[f * g](\lambda) = F[f](\lambda) \cdot F[g](\lambda) \quad (13.28)$$

证明. 由定义我们知道

$$F[f * g](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(p-t)g(t)dt \right) e^{-i\lambda p}dp = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(p-t)e^{-i\lambda p}dp \right) dt \quad (13.29)$$

作变量代换  $p = t + b$ , 得到

$$F[f * g](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(b) e^{-i\lambda(t+b)} db \right) dt \quad (13.30)$$

整理得

$$F[f * g](\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(b) e^{-i\lambda b} db = F[f](\lambda) \cdot F[g](\lambda) \quad (13.31)$$

□

## 13.5 用 Fourier 变换解强盗线性方程

### 13.5.1 求解一维热方程直线问题

求解方程

$$\begin{cases} T_t = T_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ T(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (13.32)$$

对变量  $x$  作 Fourier 变换, 记

$$u(\lambda, t) = F[T](\lambda) \quad (13.33)$$

则

$$\begin{cases} F\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right](\lambda) = \frac{\partial u}{\partial t} \\ F\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right](\lambda) = (i\lambda)^2 F[T](\lambda) = -\lambda^2 u \end{cases} \quad (13.34)$$

故

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda^2 u \quad (13.35)$$

求解得到

$$u = C(\lambda) e^{-\lambda^2 t} \quad (13.36)$$

代入初值条件, 得到

$$u = F[\phi](\lambda) e^{-\lambda^2 t} \quad (13.37)$$

利用 Fourier 反演公式得到

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[\phi](\lambda) e^{-\lambda^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda = \phi(x) * \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda \quad (13.38)$$

现在来计算

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} \cos \lambda x d\lambda = I(x, t) \quad (13.39)$$

注意到

$$I(0, t) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \quad (13.40)$$

且

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -2 \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x d\lambda = \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x d(e^{-\lambda^2 t}) \quad (13.41)$$

由分部积分公式得

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{1}{t} \left[ \sin \lambda x d(e^{-\lambda^2 t}) \Big|_0^{+\infty} - x \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} \cos \lambda x d\lambda \right] = -\frac{x}{2t} I \quad (13.42)$$

这是一个可分离变量方程初值问题, 求解得到

$$I(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (13.43)$$

故

$$T(x, t) = f(x) * \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy \quad (13.44)$$

我们又一次得到了热方程解。由上述我们可以发现, Fourier 变换实际上是特殊的换元, 其妙就妙在可以把求导转化为在前面  $\times$  一个  $i\lambda$ , 再利用卷积和反演公式可以快速得到解。其难度往往在于如何化简反演公式。

### 13.5.2 求解一维波动方程

回去看看我们曾经用换元法解决的问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (13.45)$$

对  $x$  作 Fourier 变换, 记

$$W(\lambda, t) = F[u] \quad (13.46)$$

于是

$$\begin{cases} F[u_{tt}] = F[u]_{tt} = w_{tt} \\ F[c^2 u_{xx}] = -c^2 \lambda^2 F[u] = -c^2 \lambda^2 w \end{cases} \quad (13.47)$$

那么原方程变为

$$w_{tt} = -c^2 \lambda^2 w \quad (13.48)$$

求解得到

$$w = A(\lambda) \cos c\lambda t + B(\lambda) \sin c\lambda t \quad (13.49)$$



由初值条件解得

$$w = F[\varphi] \cos c\lambda t + \frac{1}{c\lambda} F[\psi] \sin c\lambda t \quad (13.50)$$

由反演公式我们有

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[\varphi] \cos c\lambda t e^{i\lambda x} d\lambda + \frac{1}{2c\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} F[\psi] \sin c\lambda t e^{i\lambda x} d\lambda \quad (13.51)$$

由 Euler 公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (13.52)$$

得到

$$\cos c\lambda t = \frac{e^{ic\lambda t} + e^{-ic\lambda t}}{2} \quad \sin c\lambda t = \frac{e^{ic\lambda t} - e^{-ic\lambda t}}{2i} \quad (13.53)$$

代入得到

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[\varphi] (e^{ic\lambda t} + e^{-ic\lambda t}) e^{i\lambda x} d\lambda + \frac{1}{4ci\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda} F[\psi] (e^{ic\lambda t} - e^{-ic\lambda t}) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (13.54)$$

由平移特性, 整理得

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[\varphi(x+ct)] + F[\varphi(x-ct)] e^{i\lambda x} d\lambda + \frac{1}{4c\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\lambda} F[\psi] (e^{i\lambda(x+ct)} - e^{i\lambda(x-ct)}) d\lambda \quad (13.55)$$

即

$$u = \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{4c\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[\psi] d\lambda \int_{x-ct}^{x+ct} e^{i\lambda s} ds \quad (13.56)$$

进一步化简得

$$u = \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{4c\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F[\psi] e^{i\lambda s} d\lambda \int_{x-ct}^{x+ct} ds \quad (13.57)$$

即

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds \quad (13.58)$$

于是我们又得到了 d'Alembert 公式。在公式 (13.48) 也可以根据 Fourier 变换的微分关系有

$$u = \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{4c\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\lambda} (F[\psi(x+ct)] - F[\psi(x-ct)]) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (13.59)$$

$$= \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{4c\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (F[\Psi(x+ct)] - F[\Psi(x-ct)]) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (13.60)$$

$$= \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c} [\Psi(x+ct) - \Psi(x-ct)] \quad (13.61)$$

其中  $\Psi' = \psi$ , 于是得到

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds \quad (13.62)$$

## 13.5.3 求解全空间调和方程基本解

求全空间的基本解

$$\Delta V(x) = \delta(x) \quad (13.63)$$

这里需要自然地将一维 Fourier 变换推广到高维 Fourier 变换。

$$F[f(x)](\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(p) e^{-i\lambda \cdot p} dp \quad (13.64)$$

高维反演公式为

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F[f] e^{i\lambda \cdot x} d\lambda \quad (13.65)$$

当  $n \geq 3$  时, 作 Fourier 变换

$$F[V] = u(\lambda) \quad (13.66)$$

那么有

$$F[\Delta V] = -\lambda^2 u(\lambda) = F[\delta(x)] = 1 \quad (13.67)$$

求得

$$u(\lambda) = F[V] = -\frac{1}{\lambda^2} \quad (13.68)$$

由反演公式

$$V(x) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\lambda|^2} e^{i\lambda \cdot x} d\lambda \quad (13.69)$$

接下来的处理极具技巧性

$$V(x) = -\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} dt \right) e^{i\lambda \cdot x} d\lambda = -\int_0^{+\infty} dt \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda^2 t} e^{i\lambda \cdot x} d\lambda \quad (13.70)$$

后面是热核的反演公式, 于是

$$V(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dt \quad (13.71)$$

换元, 令  $p = \frac{|x|^2}{4t}$ , 则  $t = \frac{|x|^2}{4p}$ , 于是

$$V(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{p^{\frac{n}{2}} |x|^2}{4\pi^{\frac{n}{2}} p^2 (|x|)^n} e^{-p} dp = -\frac{1}{4\pi^{\frac{n}{2}} |x|^{n-2}} \int_0^{+\infty} p^{\frac{n}{2}-2} e^{-p} dp = -\frac{1}{4\pi^{\frac{n}{2}} |x|^{n-2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \quad (13.72)$$

而  $n$  维单位球体积

$$w_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \quad (13.73)$$

故

$$V(x) = -\frac{1}{4 \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1\right) |x|^{n-2}} = -\frac{1}{n(n-2) |x|^{n-2}} \quad (13.74)$$

## 13.5.4 求解非齐次三维波动方程初值问题

先求解齐次初值方程

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = \delta(x) \end{cases} \quad (13.75)$$

老样子, 我们对  $x$  作 Fourier 变换, 记

$$w(\lambda, t) = F[u] \quad (13.76)$$

那么就有

$$\begin{cases} F[u_{tt}] = w_{tt} \\ F[c^2 \Delta u] = -|\lambda|^2 c^2 w \end{cases} \quad (13.77)$$

于是

$$w_{tt} = -|\lambda|^2 c^2 w \quad (13.78)$$

求出

$$w = A(\lambda) \cos c|\lambda|t + B(\lambda) \sin c|\lambda|t \quad (13.79)$$

又对于初值有

$$\begin{cases} w(\lambda, 0) = 0 \\ w_t(\lambda, 0) = F[\delta] = 1 \end{cases} \quad (13.80)$$

求得

$$w = \frac{1}{c|\lambda|} \sin c|\lambda|t \quad (13.81)$$

由反演公式

$$u = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{c|\lambda|} \sin c|\lambda|t e^{i\lambda \cdot x} d\lambda \quad (13.82)$$

记  $|\lambda| = \rho$ ,  $r = |x|$  球坐标换元得到

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{(2\pi)^3 c} \int_0^{+\infty} \rho \sin(c\rho t) d\rho \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos\theta} d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi^2 c} \int_0^{+\infty} \sin(c\rho t) \left( -\frac{e^{i\rho r \cos\theta}}{ir} \right) \Big|_0^\pi d\rho = \frac{1}{2\pi^2 cr} \int_0^{+\infty} \sin(c\rho t) \sin(r\rho) d\rho \\ &= \frac{1}{4\pi^2 cr} \int_0^{+\infty} [\cos(c\rho t - r\rho) - \cos(c\rho t + r\rho)] d\rho = \frac{1}{8\pi^2 cr} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i\rho(ct-r)} - e^{i\rho(ct+r)}] d\rho \\ &= \frac{1}{4\pi cr} [\delta(ct-r) - \delta(ct+r)] = \frac{\delta(ct-r)}{4\pi cr} \end{aligned} \quad (13.83)$$

那么对于非齐次问题

$$\begin{cases} U_{tt} - c^2 \Delta U = f(x, t) & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ U(x, 0) = \varphi(x) \\ U_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (13.84)$$

可以直接验证它的解为

$$U(x, t) = u(x, t) * \psi(x) + \frac{\partial}{\partial t} (u(x, t) * \varphi(x)) + \int_0^t u(x, t - \tau) * f(x, \tau) d\tau \quad (13.85)$$

我们一一验证, 先验证较为简单的初值

$$U(x, 0) = 0 + \int_{\mathbb{R}^3} \delta(y) \varphi(x - y) dy + 0 = \varphi(x)$$

$$U_t(x, 0) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(y) \psi(x - y) dy + (c^2 \Delta u * \varphi(x)) + \int_0^t u_t(x, t - \tau) * f(x, \tau) d\tau |_{t=0} = \psi(x)$$

而

$$\begin{aligned} U_{tt} &= u_{tt} * \psi(x) + \frac{\partial}{\partial t} (u_{tt} * \varphi(x)) + \int_0^t u_{tt}(x, t - \tau) * f(x, \tau) d\tau + f \\ &= c^2 \left[ \Delta u * \psi(x) + \frac{\partial}{\partial t} (\Delta u * \varphi(x)) + \int_0^t \Delta u(x, t - \tau) * f(x, \tau) d\tau \right] + f \\ &= c^2 \Delta U + f \end{aligned}$$

另一方面对于任意函数  $g(x)$

$$u * g = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\delta(ct - |x - x_0|)}{4\pi c |x - x_0|} g(x) dx = \frac{1}{4\pi c} \int_0^{+\infty} \frac{\delta(r - ct)}{r} \int_{S_r(x_0)} g(x) dS dr \quad (13.86)$$

由 Dirac 函数的性质化简得

$$u * g = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x_0)} g(x) dS \quad (13.87)$$

于是我们把  $u = \frac{\delta(ct-r)}{4\pi cr}$  代入式 (13.85) 得到

$$U(x_0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x_0)} \psi(x) dS + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x_0)} \varphi(x) dS \right) + \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2 (t - \tau)} \int_{S_{c(t-\tau)}(x_0)} f(x, \tau) dS d\tau \quad (13.88)$$

前面就是 Kirchhoff 公式, 后面被称为推迟势。