§0.1 测地曲率与测地线

§0.1.1 测地曲率

回顾

定义0.1. 曲面上弧长参数曲线$r(s)$的测地曲率k_g定义为

$$k_g = \langle \frac{De_1}{ds}, e_2 \rangle.$$

$k_g e_2 = \frac{De_1}{ds}$称为曲线的测地曲率向量。

$r(s)$作为空间弧长参数曲线，其曲率$\kappa := |\frac{d^2r}{ds^2}|$，$\frac{d^2r}{ds^2}$称为此空间曲线的曲率向量。此曲率向量有分解

$$\frac{d^2r}{ds^2} = k_g e_2 + k_n e_3, \quad k_n = k_n(e_1)$$

从而

$$\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2.$$

法曲率反映曲面沿曲线切方向e_1的弯曲；而测地曲率k_g反映曲线在曲面内的弯曲程度，仅由第一基本形式决定。

计算测地曲率的一个常用公式：

Proposition 0.2. *(Liouville)* 设曲面第一基本形式$I = Edudu + Gdvdv$，曲面上弧长参数曲线$r(s)$与$u-$线的夹角为$\theta(s)$(即$\frac{dr}{ds} = \cos\theta \frac{r_u}{\sqrt{E}} + \sin\theta \frac{r_v}{\sqrt{G}}$)，则$r(s)$的测地曲率

$$k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v} \cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin\theta.$$

证明: 取曲面正交标架

$$e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}, \quad e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}},$$

则

$$\omega^1 = \sqrt{E}du, \quad \omega^2 = \sqrt{G}dv.$$

由结构方程$d\omega^\alpha - \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = 0$确定(上次课求Gauss曲率时已算过)

$$\omega_1^2 = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv.$$

由于$r(s)$与$e_1=\frac{r_u}{\sqrt{E}}$的夹角为θ，沿曲线取

$$\bar{e}_1=\frac{dr}{ds}=\frac{du}{ds}r_u+\frac{dv}{ds}r_v=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2,\quad \bar{e}_2=-\sin\theta e_1+\cos\theta e_2,$$

则$r(s)$的测地曲率

$$\begin{aligned}
k_g &= \langle\frac{D\bar{e}_1}{ds},\bar{e}_2\rangle=\langle\frac{D}{ds}(\cos\theta e_1+\sin\theta e_2),-\sin\theta e_1+\cos\theta e_2\rangle\\
&= \frac{d\theta}{ds}+\omega_1^2(\frac{du}{ds}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{dv}{ds}\frac{\partial}{\partial v})\\
&= \frac{d\theta}{ds}+(-\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du+\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv)(\frac{\cos\theta}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\sin\theta}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v})\\
&= \frac{d\theta}{ds}-\frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\ln E}{\partial v}\cos\theta+\frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\ln G}{\partial u}\sin\theta.
\end{aligned}$$

□

利用自然标架表示测地曲率：

$$\begin{aligned}
\frac{d^2r}{ds^2}(u^1(s),u^2(s)) &= \frac{d}{ds}(r_\alpha\frac{du^\alpha}{ds})\\
&= \frac{d^2u^\alpha}{ds^2}r_\alpha+\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}r_{\alpha\beta}\\
&= \frac{d^2u^\alpha}{ds^2}r_\alpha+\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}r_\gamma+b_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{ds}\frac{du^\beta}{ds}N,
\end{aligned}$$

因此测地曲率向量为

$$k_ge_2=(\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds})r_\alpha.$$

§0.1.2 测地线

定义0.3. *曲面上测地曲率(或测地曲率向量)为零的曲线称为曲面的测地线。*

正则曲线的不同参数化通常都当作同一曲线。这里不要求测地线为弧长参数形式。

由曲面上弧长参数曲线$r(s)=r(u(s),v(s))$的测地曲率向量表达式

$$k_ge_2=(\frac{d^2u^\alpha}{ds^2}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds})r_\alpha,$$

它是测地线当且仅当满足下列二阶常微分方程组，称为曲面的测地线方程

$$\begin{cases}\frac{d^2u^1}{ds^2}+\Gamma^1_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}=0\\ \frac{d^2u^2}{ds^2}+\Gamma^2_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds}=0.\end{cases}$$

测地曲率是平面曲线曲率的推广，测地线是平面直线在曲面的推广。平面上一点和一方向确定一条直线，曲面上相应有如下定理：

定理0.4. 设P为曲面S上一点，$v \in T_PS, |v| = 1$。则曲面S上存在唯一一条测地线$r(s) = r(u^1(s), u^2(s))$ 使得$r(0) = P, \frac{dr}{ds}(0) = v$。

证明：记
$$P = P(u_0^1, u_0^2), \quad v = a^1 r_1 + a^2 r_2.$$
则所求测地线满足测地线方程以及初值
$$u^\alpha(0) = u_0^\alpha, \quad \frac{du^\alpha}{ds}(0) = a^\alpha, \quad \alpha = 1, 2.$$
由常微分方程存在唯一性定理，初值问题存在唯一解$(u^1(s), u^2(s)), s \in (-\epsilon, \epsilon)$。 □

测地线的一些判断法则：测地曲率由曲面的第一基本形式决定，因此曲面的测地线由第一基本形式决定，曲面的测地线在等距变换下不变。

Proposition 0.5. 设$\sigma : S \to \widetilde{S}$为等距变换，$r(s)$为曲面$S$的测地线，则$\sigma \circ r(s)$为曲面$\widetilde{S}$的测地线。

Proposition 0.6. 设$r(s)$为曲面S上一条弧长参数曲线。$r(s)$为曲面S的测地线

$\Leftrightarrow$ *(i)* 空间曲线$r(s)$的曲率向量(或主法向量)与曲面的法向量共线；

$\Leftrightarrow$ *(ii)* $e_1 = \frac{dr}{ds}$沿曲线$r(s)$平行。

因此曲面上任意直线都是测地线。

证明：(i) 曲线$r(s)$作为空间曲线的曲率向量
$$\frac{d^2r}{ds^2} = k_g e_2 + k_n e_3,$$
因此$r(s)$为测地线当且仅当$\frac{d^2r}{ds^2} = k_n e_3$，即空间曲线$r(s)$的曲率向量与曲面法向$N = e_3$共线。

(ii) 由
$$\frac{De_1}{ds} = \langle \frac{de_1}{ds}, e_2 \rangle e_2 = k_g e_2,$$
因此$r(s)$为测地线当且仅当$e_1 = \frac{dr}{ds}$(即曲线的单位切向量)沿曲线平行。从而曲面测地线在此意义下推广了平面直线。 □

例：球面$S = \{|r - r_0| = a > 0\}$上的测地线。

设$P \in S, 0 \neq v \in T_PS$。向量$\overrightarrow{r_0P}$与$v$张成的平面与球面交于一个大圆$\Gamma$。$\Gamma$的曲率向量$\frac{r_0-P}{a^2}$与球面法向$\frac{r_0-P}{a}$共线，因此$\Gamma$为测地线。由测地线存在唯一性定理，经过$P$、切向量与$v$共线的测地线即球面大圆$\Gamma$。 □

例：圆柱面上的测地线。

圆柱面与平面等距。平面的测地线为直线。因此圆柱面的测地线就是平面直线在等距变换下的原像。由测地线切向量与圆柱面直母线的夹角不同得到直线、圆柱螺线、圆周。 □

曲面正交参数系下求测地线$r(u^1(s), u^2(s))$：由于测地线方程

$$k_g e_2 = (\frac{d^2 r}{ds^2})^T = (\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds})r_\alpha = 0$$

为二阶常微分方程组，可以借助测地线单位切向量

$$e_1 = \frac{dr}{ds} = \frac{du}{ds}r_u + \frac{dv}{ds}r_v := \cos\theta\frac{r_u}{\sqrt{E}} + \sin\theta\frac{r_v}{\sqrt{G}}$$

以及Liouville公式将测地线方程化为一阶常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{du}{ds} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{E}} \\ \frac{dv}{ds} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{G}} \\ k_g = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \ln E}{\partial v}\cos\theta + \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \ln G}{\partial u}\sin\theta = 0 \end{cases}$$

来求解$(u(s), v(s))$。

§0.1.3 测地曲率、测地线的变分刻画

类似于曲面的平均曲率为曲面面积泛函法向变分的负梯度，曲面中曲线的测地曲率向量为曲线长度泛函对曲线的法向变分（即变分向量场与e_2共线）的负梯度。法向变分使得边界项自动消失，比较简单。设曲线$r(s) = r(u(s), v(s))$为曲线$r(u, v)$上弧长参数曲线，其中$s \in [0, l]$。接下来考虑$r(s)$的长度变分。

沿曲线$r(s)$令

$$e_1 = e_1(u(s), v(s)) := \frac{dr}{ds} = \frac{du}{ds}r_u + \frac{dv}{ds}r_v,$$

$$e_2 = e_2(u(s), v(s)) = a^1(s)r_u + a^2(s)r_v.$$

考虑曲面上一族曲线$\{r^\lambda(s), s \in [0, l], \lambda \in (-\epsilon, \epsilon)\}$使得$r^0(s) = r(s)$以及

$$\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial \lambda}|_{\lambda=0} = f(s)e_2 = f(s)[a^1(s)r_u + a^2(s)r_v],$$

其中$f(s)$为任一光滑函数。满足这些条件的曲线族$\{r^\lambda(s)\}$称为$r(s)$的一个法向变分(s未必为r^λ的弧长参数)，$\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial \lambda}|_{\lambda=0}$称为变分向量场。

记
$$r^\lambda(s)=r(u^\lambda(s),v^\lambda(s)),$$
则上述条件分别对应于
$$\begin{cases} u^0(s)=u(s)\\ v^0(s)=v(s)\end{cases}$$
以及
$$\begin{cases} \frac{\partial u^\lambda(s)}{\partial\lambda}|_{\lambda=0}=f(s)a^1(s)\\ \frac{\partial v^\lambda(s)}{\partial\lambda}|_{\lambda=0}=f(s)a^2(s).\end{cases}$$
满足上述条件的一个变分为
$$r^\lambda(s)=r(u(s)+\lambda f(s)a^1(s),v(s)+\lambda f(s)a^2(s)),\quad s\in[0,l],\lambda\in(-\epsilon,\epsilon).$$
事实上考虑曲线长度的一阶法向变分时也仅需考虑这样的变分。

曲线$r^\lambda(s)$的长度
$$L(\lambda):=L[r^\lambda(s)]=\int_0^l|\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial s}|ds=\int_0^l\sqrt{\langle\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial s},\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial s}\rangle}ds,$$
从而
$$\begin{aligned}\frac{dL(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0} &= \int_0^l\frac{1}{|\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial s}|_{\lambda=0}}\langle\frac{\partial}{\partial\lambda}(\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial s}),\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial s}\rangle|_{\lambda=0}ds\\ &= \int_0^l\langle\frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial\lambda}),e_1\rangle|_{\lambda=0}ds\\ &= \int_0^l\langle\frac{d}{ds}(f(s)e_2),e_1\rangle ds\\ &= -\int_0^l f(s)\langle e_2,\frac{de_1}{ds}\rangle ds\\ &= -\int_0^l f(s)k_g(s)ds\\ &= -\int_0^l\langle k_ge_2,f(s)e_2\rangle ds,\end{aligned}$$
其中k_g为$r(s)$的测地曲率，k_ge_2为测地曲率向量。

如果对$r(s)$的任一个法向变分$\{r^\lambda(s)\}$总有
$$\frac{d}{d\lambda}|_{\lambda=0}L[r^\lambda(s)]=0,$$
则称曲线$r(s)$为长度泛函法向变分的临界点。测地曲率及测地线有如下变分意义：

定理0.7. 设$\{r^\lambda(s)\}$为曲面上弧长参数曲线$r(s)$的一个法向变分，变分向量场

$$\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial\lambda}|_{\lambda=0}=f(s)e_2.$$

则曲线长度的一阶法向变分为

$$\frac{dL[r^\lambda(s)]}{d\lambda}|_{\lambda=0}=-\int_0^l\langle k_ge_2,f(s)e_2\rangle ds.$$

特别测地曲率向量为曲线长度泛函法向变分的负梯度；曲线$r(s)$为测地线当且仅当它为曲线长度泛函法向变分的临界点。

类似的，对于曲面上弧长参数曲线$r(s)$的一般变分，记

$$X(s)=\frac{\partial r^\lambda(s)}{\partial\lambda}|_{\lambda=0},$$

则同样计算可得

$$\begin{aligned}\frac{dL(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0}&=\int_0^l\langle\frac{d}{ds}X(s),e_1\rangle ds=\int_0^l[\frac{d}{ds}\langle X(s),e_1\rangle-\langle X(s),\frac{de_1}{ds}\rangle]ds\\&=\langle X(s),e_1\rangle|_{s=0}^l-\int_0^l\langle k_ge_2,X(s)\rangle ds.\end{aligned}$$

设曲面上弧长参数曲线$r(s),s\in[0,l],r(0)=P,r(l)=Q$。如果对于$r(s)$的任一族满足$r^\lambda(0)\equiv P,r^\lambda(l)\equiv Q$ 变分曲线$\{r^\lambda(s),\lambda\in(-\epsilon,\epsilon),s\in[0,l]\}$总有

$$\frac{dL[r^\lambda(s)]}{d\lambda}|_{\lambda=0}=0,$$

则称$r(s)$为固定端点约束条件之下曲线长度泛函的临界点。在固定端点约束条件下，$X(s)\in T_{r(s)}S$为满足$X(0)=X(l)=0$的沿曲线$r(s)$的光滑切向量场。

定理0.8. 曲面上弧长参数曲线$r(s)(s\in[0,l])$为测地线当且仅当$r(s)$为固定端点约束条件之下曲线长度泛函的临界点。特别如果$r(s)$为曲面上连接P,Q两点的长度最短曲线，则$r(s)$为测地线。

因此，曲面上连接两点的最短曲线一定是测地线。但反过来未必成立，例如球面上非对径的两点P,Q，有唯一大圆经过它们，其中连接P,Q的劣弧是最短测地线，优弧也是测地线但非最短。

作业：10, 12, 13, 14