第 5 章 单变量函数的积分学

§5.1 积分

5.1.1 积分的定义

曲边梯形的面积

对于多边形, 定义面积时, 我们接受几何直观, 即承认对于每一个(平面)多边形 P 都有面积, 其面积是一个正数 $A(P)$, 并具有下面两个性质:

1° 两个全等的多边形有相同的面积;

2° 整体面积是它的各部分面积之和: 如果两个多边形 P' 与 P'' 拼凑在一起形成一个新的多边形 P, 则 P 的面积是

$$A(P) = A(P') + A(P'')$$

所谓 "拼凑" 或者说 "并" , 即是 P' 与 P'' 仅有某些边为公共部分.

3° 面积应连续依赖其边长.

4° 约定边长为 1 的正方形的面积为 1.

正方形 根据面积的性质, 边长为正有理数 r 的正方形的面积为 r^2. 我们希望正方形的面积应连续依赖其边长, 因此, 边长为正实数 a 的正方形的面积为 a^2.

长方形 由于长方形可以用正方形拼接而成, 按照面积的两个性质以及连续性可以证明边长为 a 和 b 的长方形的面积为 ab.

三角形 进而可以证明三角形的面积等于: 底×高÷2.

多边形 因为多边形可以用有限个三角形拼接而成, 因此多边形的面积可以确定.

曲边图形 对于一个由封闭曲线围成的平面图形, 如果它是有面积的, 那么我们也希望其面积是满足性质1°、性质2° 和性质3°.

封闭曲线围成的平面图形可以分成以下三种图形的并.

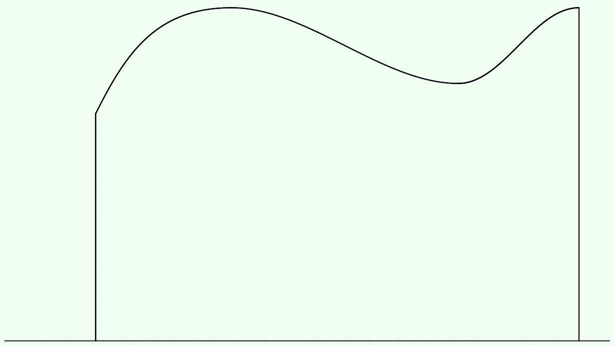

图 5.1

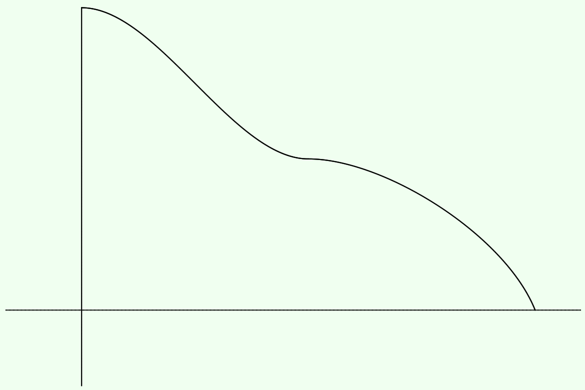

图 5.2

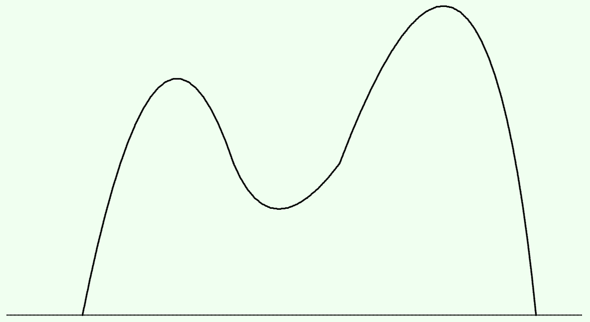

图 5.3

图5.2 与图5.3 是图5.1的蜕化情形: 其中一条边或两条边缩成为一个点. 因此, 我们只要考虑如图4.1的曲边梯形的面积就可以了.

图5.1有三边是直线段, 仅有一边是曲线, 我们假定它们所围成的区域是有面积的, 现在就是要求出这个面积. 我们将采用在小范围内 “以直代曲” 的方法, 先求出所求面积的一个近似.

取定一个直角坐标系 Oxy, 使所考虑的曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$, 与 x 轴, 两直线 $x = a$ 及 $x = b$ 所围成 (如图5.4).

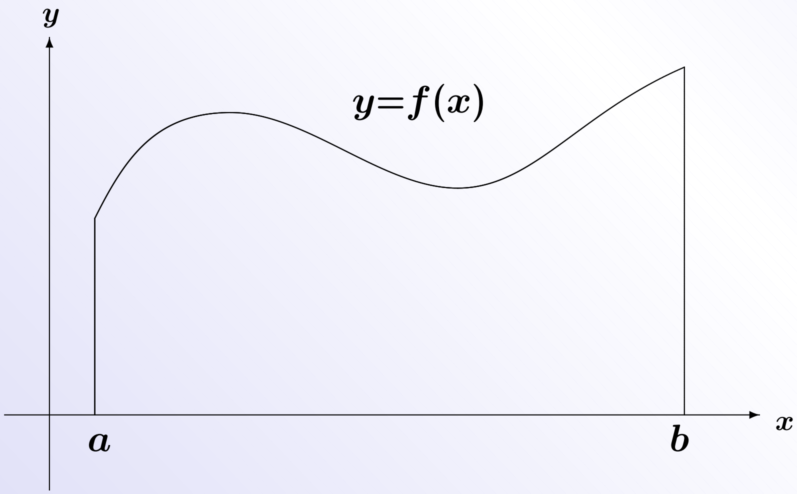

图 5.4

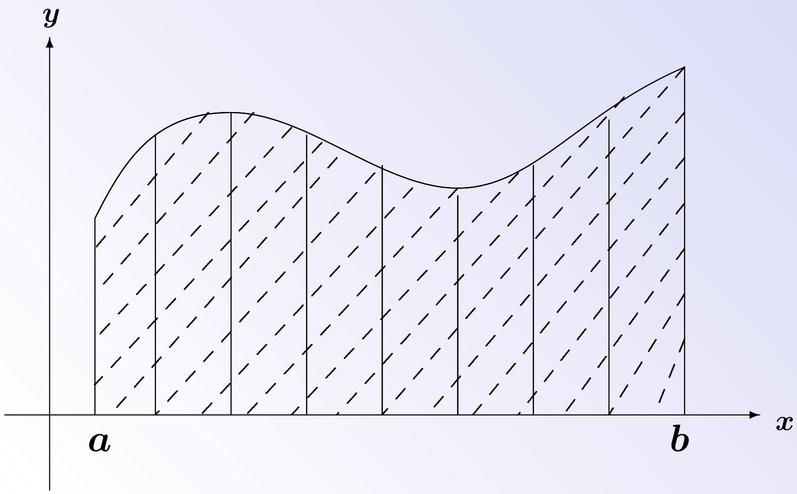

图 5.5

在 a 与 b 中插入 $n-1$ 个分点 $x_1, \cdots, x_{n-1}$, 其中 $x_1 < \cdots < x_{n-1}$, 称为区间 $[a, b]$的一个 “分割”. 若记 $x_0 = a, x_n = b$, 则区间 $[a, b]$ 分成了 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, \cdots, n)$. 在每一个分点上画出与 x 轴垂直的直线, 于是所说的曲边梯形被分成 n 个小 “长条” (如图5.5).

求这些小长条的面积, 难度并未降低, 但可以考虑用小的矩形长条来作近似 (这一过程, 相当于在每个小区间上用 f 在其中某个点的值代替 $f(x)$). 我们用 S_n 表示这样得到的 n 个小矩形面积之和. 在直观上可以看出, 若区间 $[a, b]$ 分割得越来越细, 即 n 无限增大时, 诸小区间的最大长度趋向于零, 则 "近似值" S_n 趋向于曲边梯形的面积. 这样, 曲边梯形的面积表示成了这些小矩形的面积和的极限.

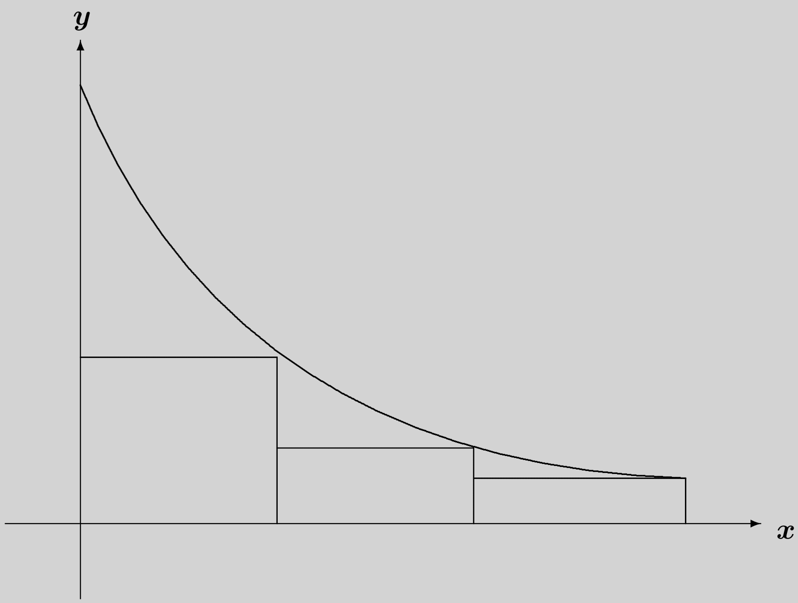

图 5.6

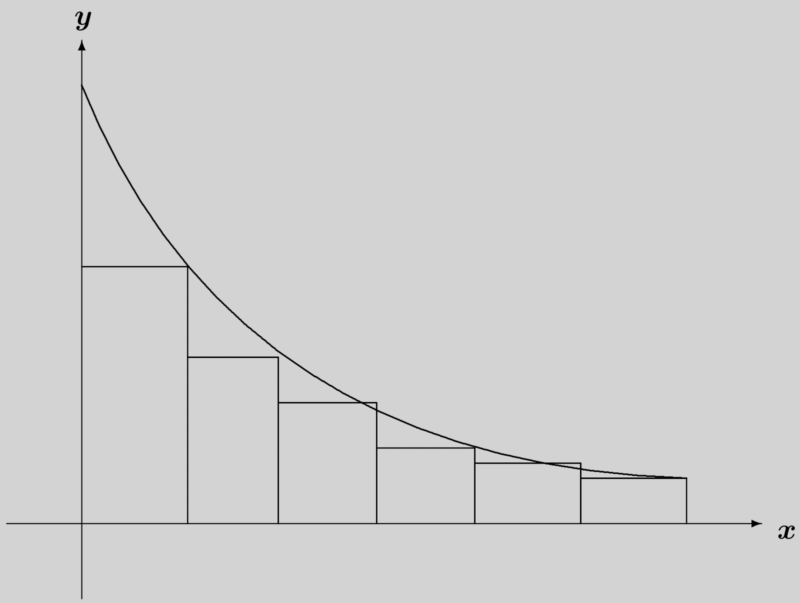

图 5.7

现在我们不靠直观预先认定所说的曲边梯形存在面积, 而是首先考虑上面定义的和 S_n, 当分割越来越细时, 如果这些和趋于一个确定的极限, 我们就将这个极限值定义为曲边梯形的面积. 这样我们就给出了定义面积的一种方式.

更确切地说, 我们在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任意取一个点 ξ_i, 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则每一小块矩形的面积是 $f(\xi_i)\Delta x_i$, 它们的和式为

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

如果当 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$ 时, 无论分点 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ 及点 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 怎样选取, 和 S_n 都有极限; 这一极限值就可定义为所说的曲边梯形 (图5.4) 的面积.

质点沿直线运动走过的路程

一个质点沿直线运动, 且在时间区间 $[a,b]$ 内任一时刻 t 的速度为 $v=v(t)$, 我们考虑质点在这一段时间内走过的路程.

从物理意义上来看, 所说的路程当然存在. 为了求出这一路程, 我们用分点 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$, 将区间 $[a,b]$ 分为 n 个小区间 $[t_{i-1},t_i](i=1,\cdots,n)$. 在每个区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上任取一点 ξ_i, 将质点在时间区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上的运动近似为以速度为 $v(\xi_i)$ 的匀速运动. 由此, 可得到质点从 $t=a$ 到 $t=b$ 走过的路程的近似值为

$$S_n'=\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)\Delta t_i.$$

直观上看, 当 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i\to 0(n\to\infty)$ 时, 近似值 S_n' 便趋于所求的路程.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义. 用分点

$$T: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将区间 $[a,b]$ 分割成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, \cdots, n)$. 在每一个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i, 并记

$$\|T\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

称为分割的“宽度”. 和式

$$S_n(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上对应于分割 T 的一个Riemann（黎曼）和. 如果当 $\|T\| \to 0$ $(n \to \infty)$ 时, 无论分点 x_i 与点 ξ_i 怎样选取, S_n 总有极限, 则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积; 并将这极限值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分, 记为

$$\int_a^b f(x) dx.$$

例 1 区间 $[a,b]$ 上的常值函数 $f(x)=c$ 是可积的, 且它的积分是

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

证明 因为常值函数在任何点的值都是一样的, 所以

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = c(b-a).$$

因此当 $\|T\|\to 0$ 时, S_n 有极限, 且极限为 $c(b-a)$. 当 $c>0$ 时, 此例的几何意义为: 长、宽分别为 c 与 $b-a$ 的矩形的面积是 $c(b-a)$, 这与初等几何中的定义一致.

例 2 设 $y_0 \in [a,b]$ 则函数

$$J_{y_0}(x) = \begin{cases} 1, & x = y_0, \\ 0, & x \neq y_0 \end{cases}$$

在 $[a,b]$上可积, 且积分为零.

证明 对于 $[a,b]$ 的任意分割 T : $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 以及区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的 ξ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 至多有一个 ξ_i 等于 y_0. 因此

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leqslant \|T\| \to 0.$$

由此可知 $J_{y_0}(x)$ 可积, 且积分为零.

例 3 Dirichlet 函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 是有理数}\\ 0, & x \text{ 是无理数}\end{cases}$

在任意区间上都不是可积的.

证明 对于 $[a,b]$ 的任意分割 T：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中既有有理数也有无理数, 设 ξ_i 是此区间中的一个有理数, 而 η_i 是此区间中的一个无理数. 则 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a.$$

而 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{n} D(\eta_i)\Delta x_i=0.$$

因此 $D(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

定理 1 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证明 由定义易知, 可积函数的 Riemann 和 $S_n(T)$ 当 $\|T\|\to 0$ 时有极限 A, 所以一定是有界的. 取 $\varepsilon=1$, 则存在正数 δ, 使得对于区间 $[a,b]$ 的一个分割 T： $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$, 只要 $\|T\|<\delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant |A|+1$$

注意到上式对于任意一组点 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 都成立. 从上式可得

$$|f(\xi_k)|\Delta x_k \leqslant \left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right| + |A|+1$$

对于固定的 k, 取定 $\xi_1,\cdots,\xi_{k-1},\xi_{k+1},\cdots,\xi_n$, 则上式右端的值是确定的. 由于 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ 可以任意选择. 上式表明 $f(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上有界. 这就是说 $f(x)$ 在每个这样的小区间上都是有界的. 因此在 $[a,b]$ 上也有界. 证毕.

定理 1 能够用来判断某些函数在给定的区间上不可积, 但是定理 1 的逆并不正确. 也就是说有界函数不一定是可积的. 例如, Dirichlet 函数 (即在有理点上取值为 1, 无理点上取值为 0 的函数) 在任一区间 $[a, b]$ 上有界, 但是, 直接利用定义就可判断它在 $[a, b]$ 上是不可积的.

定理 1 还告诉我们, 要讨论哪些函数是可积的, 只要在有界函数的范围内来讨论就可以了.

在后面的小节中我们将证明定义在闭区间 $[a, b]$ 上的单调函数、连续函数、只有有限个间断点的有界函数等都是可积的.

5.1.2 几个例子

例 4 设 $a<b$, 证明 $\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

证明 函数 $f(x)=x$ 的连续性保证了它的可积性. 即无论采取什么样的区间分割方式以及无论取什么样的点 ξ_i, 对应的 Riemann 和的极限存在. 在此前提下, 为了用定义计算积分, 我们可选择某种特殊的分割方式, 取特殊的点 ξ, 以便于处理相应的 Riemann 和. 这里我们将区间 $[a,b]$ 用分点

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \cdots,\ a+(n-1)h,\ a+nh$$

划分为 n 等份, 其中 $h=\frac{b-a}{n}$. 将每个小区间的右端点取作 ξ_i, 则相应的 Riemann 和为

$$\begin{aligned} S_n &= (a+h)h + (a+2h)h + \cdots + (a+nh)h \\ &= nah + \frac{1}{2}n(n+1)h^2 \\ &= a(b-a) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)(b-a)^2. \end{aligned}$$

故当 $n \to \infty$ 时, $S_n \to \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

例 5 设 $a<b$, 证明 $\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$.

证明 因为被积函数 $f(x)=x^2$ 连续, 所以是可积的, 采用等分点

$$a, a+h, a+2h, \cdots, a+(n-1)h, a+nh=b$$

将区间 $[a,b]$ 划分为 n 等份, 其中 $h=\frac{b-a}{n}$. 将每个小区间的右端点取作 ξ_i, 则积分和

$$\begin{aligned} S_n &= (a+h)^2h+(a+2h)^2h+\cdots+(a+nh)^2h \\ &= na^2h+n(n+1)ah^2+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)h^3 \\ &= a^2(b-a)+\left(1+\frac{1}{n}\right)a(b-a)^2+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)(b-a)^3. \end{aligned}$$

由此易知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$.

例 6 求 $\int_a^b \cos x\,dx$.

解 将区间 $[a,b]$ 进行 n 等分, 分点为

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a),\ k = 0, 1, \cdots, n.$$

取 $\xi_k = x_k,\ k = 1, 2, \cdots, n$. 则相应的 Riemann 和为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos x_k$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{b-a}{2n}}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{b-a}{2n}\cos\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)$$

$$= \frac{\frac{b-a}{2n}}{\sin\frac{b-a}{2n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(a+\frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right)-\sin\left(a+\frac{(2k-1)(b-a)}{2n}\right)\right)$$

因此, 有

$$S_n = \frac{\frac{b-a}{2n}}{\sin\frac{b-a}{2n}}\left(\sin\left(a+\frac{(2n+1)(b-a)}{2n}\right)-\sin\left(a+\frac{b-a}{2n}\right)\right).$$

令 $n\to\infty$, 可得

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a.$$

同理, 可得

$$\int_a^b \sin x\,dx = -(\cos b - \cos a).$$

特别有

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = 2.$$