微分方程

关于达朗贝尔公式的分析

一维波动方程的初值（Cauchy）问题

$$(1)\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx},\ x\in\mathbb{R},t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

的解为

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds}$$

d'Alembert(达朗贝尔)公式

注：初值问题(1)的解的存在性由达朗贝尔公式给出，唯一性由能量法给出。

推论： 设$\varphi(x)\in C^2(\mathbb{R}),\psi(x)\in C^1(\mathbb{R})$且均有界,则对任意给定$T>0$, 初值问题(1)的解在$\mathbb{R}\times[0,T]$上是稳定的，从而初值问题是适定的。

证明： 令u_i为对应于初值φ_i,ψ_i的解, $i=1,2$, 再令$w=u_1-u_2$.若

$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\delta, |\psi_1(x)-\psi_2(x)|<\delta, x\in\mathbb{R}, 0\le t\le T,$

则由达朗贝尔公式有

$$|w|\le\frac{1}{2}[|\varphi_1(x+ct)-\varphi_2(x+ct)|+|\varphi_1(x-ct)-\varphi_2(x-ct)|]$$

$$+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}|\psi_1(s)-\psi_2(st)|ds$$

$$\le\delta+\frac{1}{2c}2ct\delta\le(1+T)\delta,$$

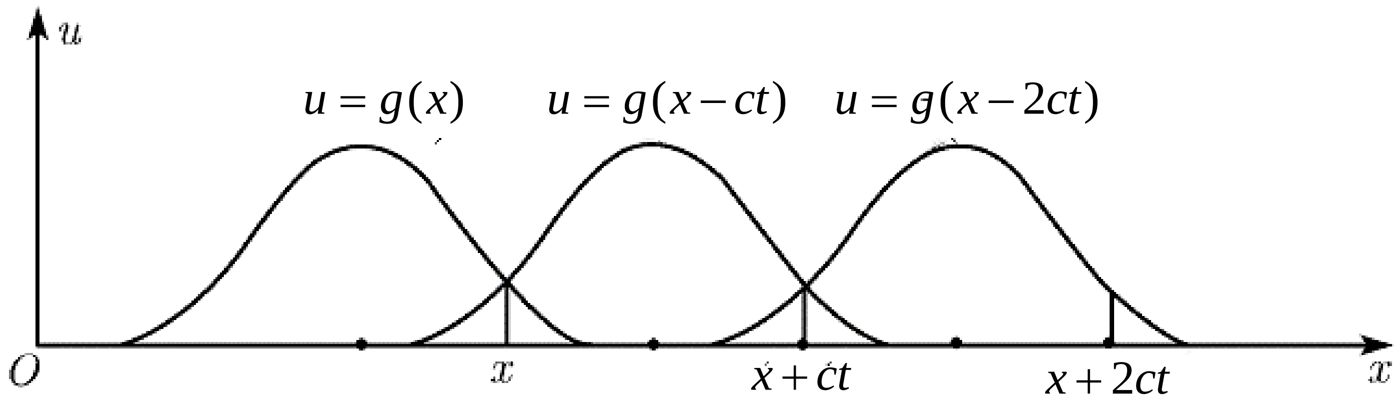
因此$\forall\varepsilon>0$, 取$0<\delta<\dfrac{\varepsilon}{1+T}$, 成立$|w|<\varepsilon$, 从而解稳定。

加上已知解的存在性和唯一性，故(1)在$\mathbb{R}\times[0,T]$上是适定的。

波的传播

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds}$$

刻画波动现象，由左行波和右行波组成。

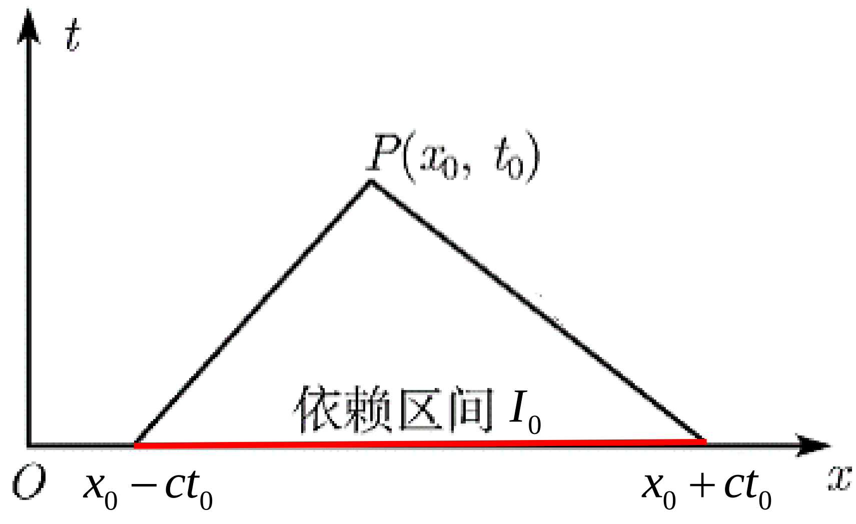


右行波

点的依赖区间

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds}$$

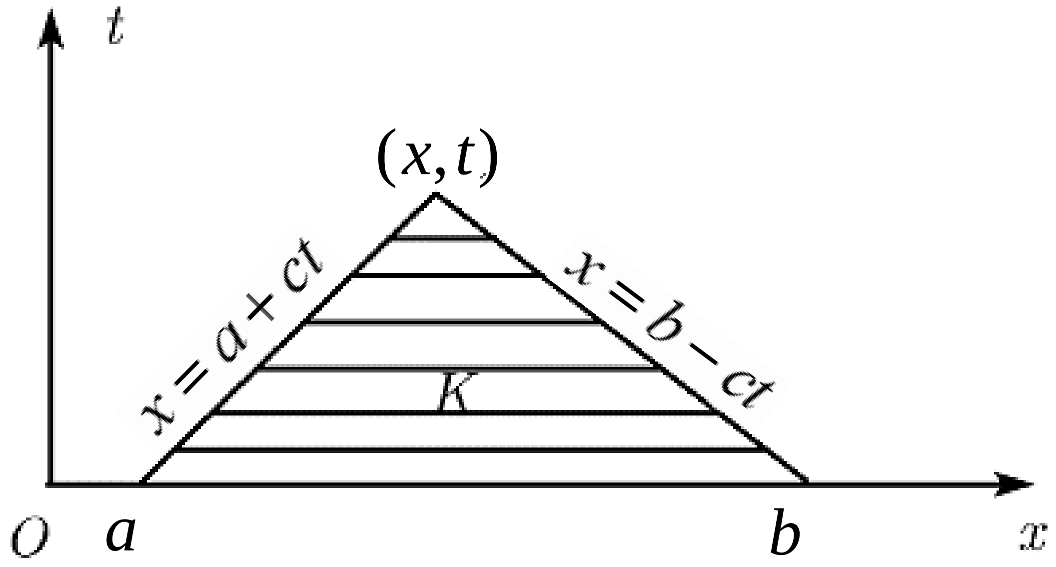
$u(x_0,t_0)$完全由φ, ψ在区间$I_0=[x_0-ct_0, x_0+ct_0]$上的值唯一确定，与其它点的初值无关，称区间I_0为$P(x_0,t_0)$ 的依赖区间。



区间的决定区域

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds}$$

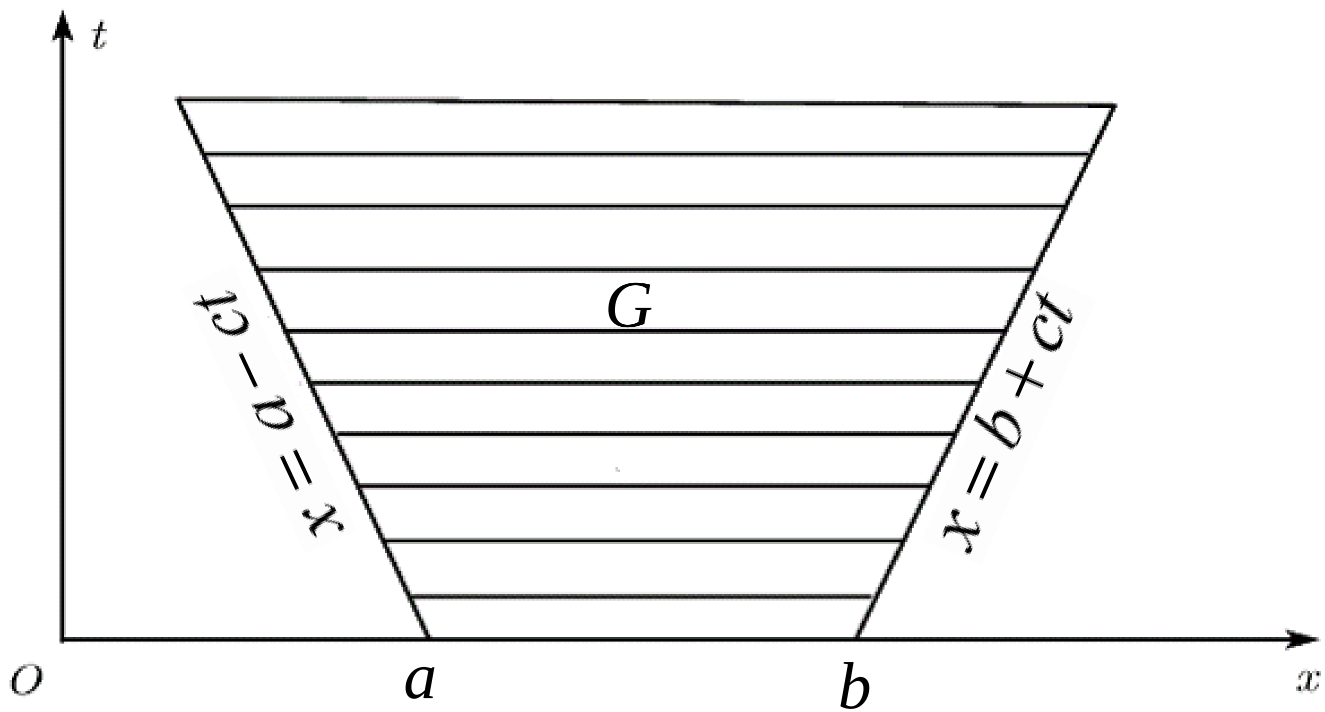
x轴上的区间$[a,b]$及过点a,b 的两条特征线围成的三角形区域K称为区间$[a,b]$ 的决定区域。



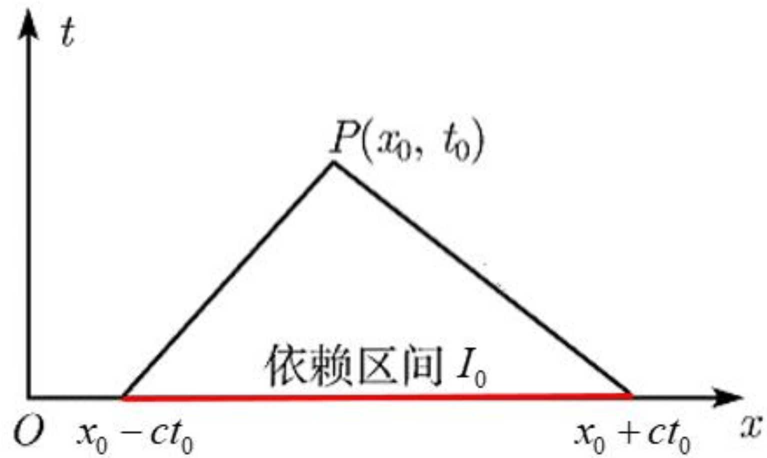
区间的影响区域

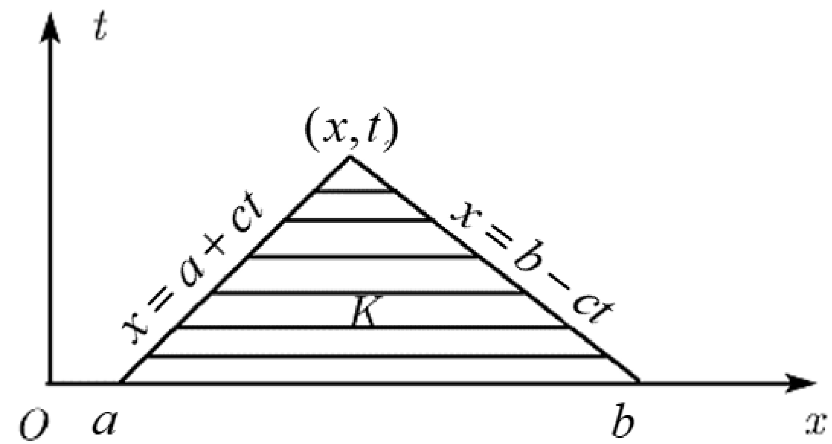
$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$$

x轴上的区间$[a,b]$及过点a,b 的两条特征线围成的无界梯形区域G称为区间$[a,b]$ 的影响区域。

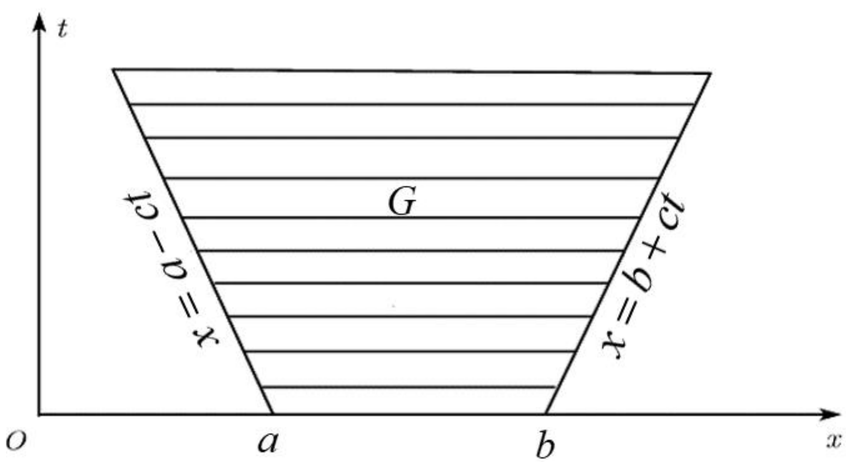


利用达朗贝尔公式，可以看出O_{xt}平面上的两条特征线$x \pm ct =$常数在研究一维波动方程中有重要作用, 故行波法也称特征线法。





决定区域



影响区域