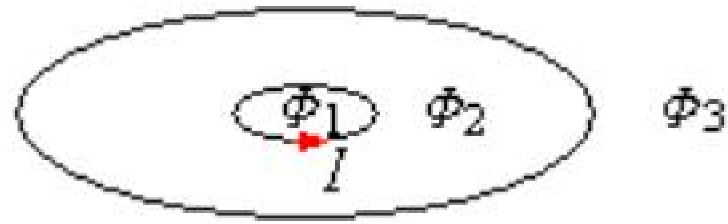
思考题讨论

- 思考题7.2 如果例7.4中a, b之间以直导线相连，求U_{ab}。
- 思考题7.3 例题7.6另解：考虑小线圈在大线圈中的磁通，计算互感。

- 思考题7.3 解：



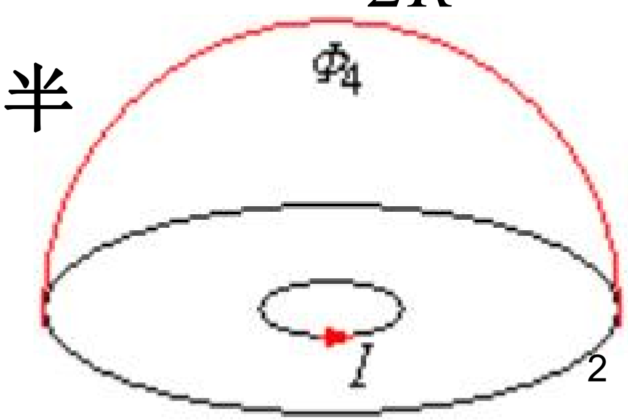
如图，根据磁感应线的闭合性，小线圈在大线圈中的磁通量$=\Phi_1-\Phi_2=\Phi_3$，而小线圈的磁场为

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0\boldsymbol{m}}{4\pi r_1^3}+\frac{3\mu_0\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}_1}{4\pi r_1^5}\boldsymbol{r}_1,$$

线圈平面上$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{r}_1$，所以上式右方次项为零→

$$\Phi_3=\int_R^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 m}{4\pi r_1^3}\mathrm{d}\theta r_1\mathrm{d}r_1=\frac{\mu_0 I\pi r^2}{2R},\quad \therefore M=\frac{\mu_0\pi r^2}{2R}.$$

另法：如图，以大线圈为大圆的半球面上的磁通Φ_4即为所求磁通。



第二十五讲 2022-05-26

第7章 电磁感应

§ 7.1 电磁感应定律

§ 7.2 动生电动势与感生电动势

§ 7.3 互感与自感

§ 7.4 暂态过程

2. 自感

- 当一个线圈中的电流发生变化时，它所激发的磁场穿过自身每匝线圈的磁通量也随之改变，使线圈产生感应电动势，这种现象称为自感。
- 设线圈电流I，若线圈的位形不变，$\Psi \propto B \propto I$，于是可令$\Psi = LI$，比例系数L称为自感系数，简称自感。
- 自感电动势 $$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

[例7.7] 求长l、截面积S、匝数N的长直螺线管的自感。

[解] $B = \dfrac{\mu_0 NI}{l}$，$\Psi = NBS = \dfrac{\mu_0 N^2 S}{l} I$，$L = \dfrac{\Psi}{I} = \dfrac{\mu_0 N^2 S}{l}$.

[例7.8] 同轴电缆由半径为R_1的实心导线和共轴的半径为R_2的圆柱导体壳组成，其间填满μ~μ_0的绝缘磁介质。在高频近似下求单位长度电缆的自感。

[解]高频近似下，趋肤效应导致电流沿实心导体的外表面分布，两导体间的磁场

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

其他区域磁场为零。于是穿过长度l电缆的磁通量

$$\Phi=\iint_S B\mathrm{d}S=\int_{R_1}^{R_2} Bl\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

单位长度电缆的自感

$$\frac{L}{l}=\frac{\Phi}{Il}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

3. 两线圈的串联和并联

1) 同名端与异名端

- 当两线圈的电流从同名端流入(或流出)时，同一线圈的自感磁通和互感磁通同符号。
- 反之，若两线圈的电流从异名端流入 (或流出) 时，同一线圈的自感磁通和互感磁通反符号。
- 两个线圈串联或并联后都可以等效为一个自感线圈，但通常新线圈的自感并不简单地等于各线圈自感的串联或并联，还与二者的互感以及连接同名端或异名端有关。

2) 两个串联线圈的自感

- 顺接

➢ 当两个线圈的电流从同名端流入时，每个线圈的磁通匝链数都是自感和互感磁通匝链数相加，

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{21},\quad \Psi_2 = \Psi_{12} + \Psi_{22}.$$

➢ 串联时$I_1=I_2=I$，所以每个线圈的感应电动势为

$$\mathcal{E}_{1,2} = -\frac{\mathrm{d}\Psi_{1,2}}{\mathrm{d}t} = -\left(L_{1,2} + M\right)\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

➢ 新线圈的总电动势$\mathcal{E}=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2=-(L_1+L_2+2M)\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$,

总自感 $L=L_1+L_2+2M$。

➢ 可见，顺接时两线圈的总自感>各自感之和。

- 反接

➢ 当两个线圈的电流从异名端流入时，每个线圈的磁通匝链数都是自感和互感磁通匝链数相减，

$$\Psi_1 = \Psi_{11} - \Psi_{21},\quad \Psi_2 = \Psi_{22} - \Psi_{12}.$$

➢ 类似顺接推导，可得此时总自感$L=L_1+L_2-2M$.

➢ 可见，反接时两线圈的总自感<各自感之和。

➢ 为保证$L\geq 0$ (?回忆楞次定律与能量守恒)，必须

$$M \leq (L_1+L_2)/2.$$

3) 两个并联线圈的自感

- 同名端并接

此时$\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_2=\mathcal{E}$，$I=I_1+I_2$，

$$\therefore \begin{cases} \mathcal{E}=-\left(L_1\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}+M\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}\right)=-\left(L_2\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}+M\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}, \end{cases}$$

可解得

$$\mathcal{E}=-\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},$$

$$\therefore L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}.$$

- 异名端并接

➢ 将上式中的M代之以$-M$就可得到此时的总自感

$$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}.$$

➢ 为保证$L\geq 0$，必须$L_1L_2-M^2\geq 0$,

$$\therefore M\leq\sqrt{L_1L_2}. \qquad (*)$$

$$令M\equiv k\sqrt{L_1L_2},\quad 0\leq k\leq 1,$$

k为耦合系数。k=0时，无耦合；k=1时，理想耦合。

(*)式对M的限制强于$M\leq(L_1+L_2)/2$.

- 理想耦合 $M=\sqrt{L_1L_2}$ 情形的讨论

➢ 相同线圈反接串联，则$L=L_1+L_2-2M=2L_1-2L_1=0$.

应用：导线对折后绕成线圈无自感。

➢ 异名端并接，$L=\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}=\dfrac{0}{L_1+L_2+2\sqrt{L_1L_2}}=0$.

➢ 同名端并接时，有两种情况。

当$L_1\neq L_2$时，$L=\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}=\dfrac{0}{L_1+L_2-2\sqrt{L_1L_2}}=0$;

当$L_1=L_2$时，$M=L_1$，$L=\dfrac{L_1^2-M^2}{2L_1-2M}=\dfrac{L_1+M}{2}=L_1$.

后一种情况值得进一步讨论，意义深远。

§7.4 似稳电路和暂态过程

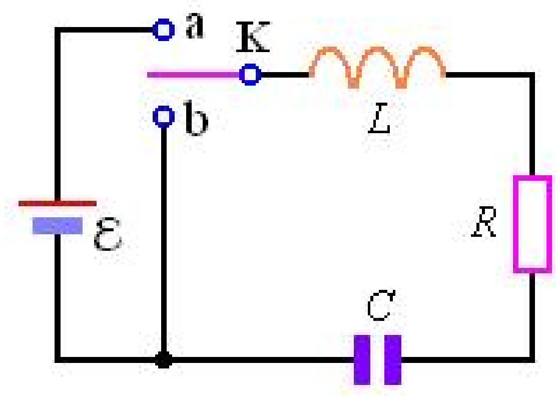
1. 似稳条件

- 非稳恒电路各部分对电源的响应一般有推迟效应，但如果最大推迟时间<<电源的变化周期，则可近似认为各部分的电流随电动势同步变化，与稳恒电路情形相同，于是计算难度大大降低。此时的电路称为似稳电路。
- 设电路的尺寸为l，电源频率为f，电场的传播速度为c，则似稳条件为$l/c \ll 1/f$，即$\lambda \gg l$。

[例] 市电$3\times10^5/50=6000\text{km} \gg 600\text{km}$ (似稳电路尺寸)。

2. 似稳电路方程 基本定律 (定理) 的应用

- 欧姆定律



$$j=\sigma E=\sigma(E_{势}+E_{旋}+K),$$

$$\therefore\ E_{势}=j/\sigma-E_{旋}-K.$$

- 环路定理

$$\oint E_{势}\cdot \mathrm{d}l=\left(\int_{源}+\int_{阻}+\int_{容}+\int_{感}\right)E_{势}\cdot \mathrm{d}l=0.$$

- 电源区

$$E_{旋}=0,\ \ \sigma\to\infty,\ j/\sigma=0,\ \ \therefore\ E_{势}=-K.$$

$$\therefore\int_{源}E_{势}\cdot \mathrm{d}l=-\int_{源}K\cdot \mathrm{d}l=-e.$$

- 电阻区

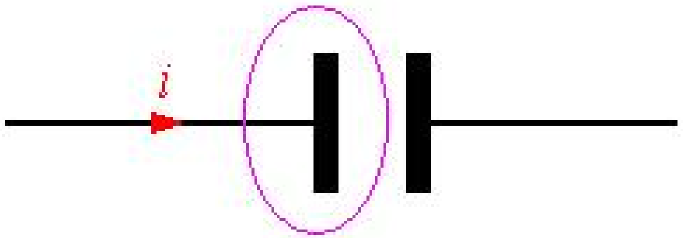
$$\boldsymbol{E}_{旋}=0,\ \ \boldsymbol{K}=0,\ \ \therefore\ \boldsymbol{E}_{势}=\boldsymbol{j}/\sigma.$$

$$\therefore u_R=\int_{阻}\boldsymbol{E}_{势}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{阻}\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{阻}\frac{jS}{\sigma S}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=iR.$$

- 电容区

$$\boldsymbol{E}_{旋}=\boldsymbol{K}=\boldsymbol{j}=0,\ \ \sigma=0,\ \ \therefore\ \boldsymbol{E}_{势}=\boldsymbol{j}/\sigma=0/0$$ (不定式)。

但可以用定义式$u_C=q/C$。



由电荷守恒定律

$$-i=\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t},\quad \rightarrow q=\int i\mathrm{d}t,\quad \therefore u_C=\frac{q}{C}=\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t.$$

- 电感区 (有L和M)

$$\boldsymbol{K}=0,\ \ \sigma\to\infty,\ \ \boldsymbol{j}/\sigma=0,\ \ \therefore \boldsymbol{E}_{势}=-\boldsymbol{E}_{旋}.$$

$$\therefore u_L=\int_{感}\boldsymbol{E}_{势}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_{感}\boldsymbol{E}_{旋}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-e_L\,.$$

电磁感应定律→ $$e_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}-M\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t},$$

$$\therefore u_L=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t}.$$

- 将各区域的结果代入环路定理 $-e+u_R+u_C+u_L=0$得

$$e=iR+\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t}.$$

这就是似稳电路的基本方程，可用于求解似稳电路，例如暂态过程和低频交流电路。

3. 多回路电路的基尔霍夫定律

- 基尔霍夫第一定律：在同一时刻，流入任一节点的电流等于从该节点流出的电流，即

$$\sum i_{入}(t)=\sum i_{出}(t).$$

- 基尔霍夫第二定律：在同一时刻，沿任一回路电源电动势的代数和等于全部元件电压的代数和，即

$$\sum e(t)=\sum i(t)R+\sum\frac{1}{C}\int i(t)\mathrm{d}t+\sum\left(L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+M\frac{\mathrm{d}i'(t)}{\mathrm{d}t}\right).$$

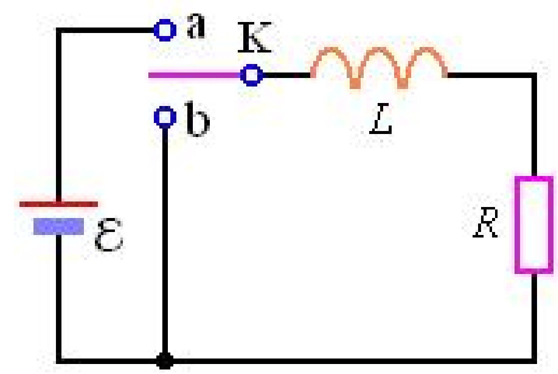
- 正负号约定

➢ 凡与回路绕行方向一致的电动势(?)和电流取正；

➢ 互感项与主回路电流从同名端流入取正。

4. 暂态过程

1) *RL*电路的暂态过程



- 当电键K掷向a点时，电流从零开始增长 (充电) →线圈产生$\mathcal{E}_{感}$，以阻碍原电流增长→总电流达到稳定值需要一个短暂的时间过程，称为暂态过程。

- 当电流稳定后，如突然把K从a断开掷向b，即把电源突然撤去，电路中的电流开始下降 (放电)。此时线圈中也将产生$\mathcal{E}_{感}$，以阻碍原电流下降，总电流不能立即降为零，这是另一类暂态过程。

先讨论充电过程

- 无线圈存在，**K**合上时，电流迅速达到稳定值$I_0=\mathcal{E}/R$.
  有线圈存在，**K**合上时，电路中的电流从无到有，随时间变化，所以$\mathrm{d}I/\mathrm{d}t\neq 0$，线圈中产生自感电动势

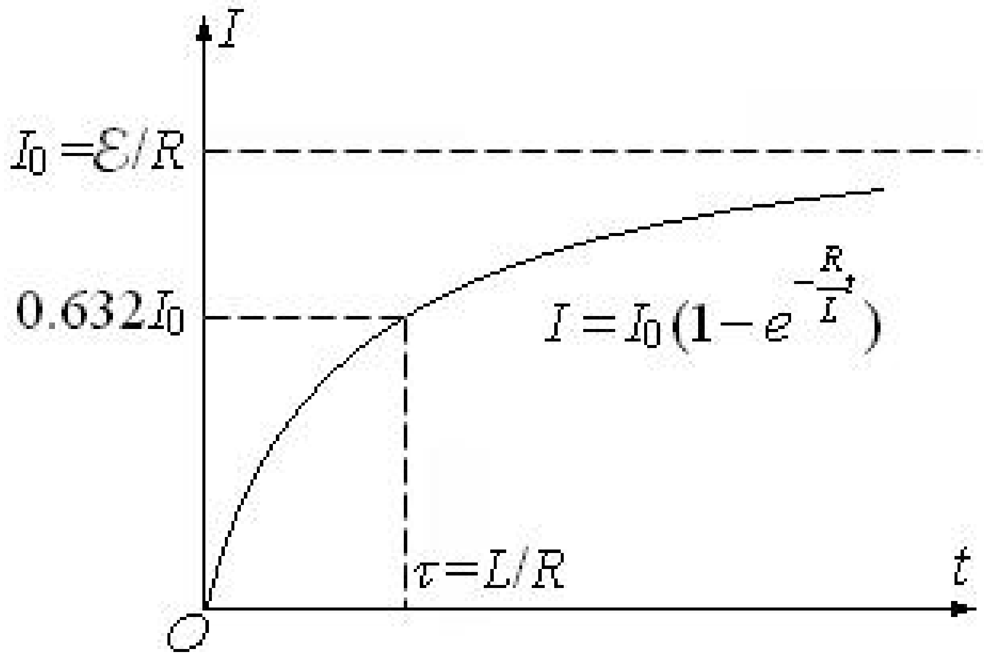
$$\mathcal{E}_{感}=-L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t.$$

- 这个感应电动势和原电动势串联在电路中，选取顺时针方向为电流方向，由似稳电路的基本方程得到

$$\mathcal{E}-IR-L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t=0.$$

- 结合初始条件$I|_{t=0}=0$，解得

$$I=I_0(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}).$$



- 从理论上说，要达到稳定值I_0需要无限长时间。
- 但实际上，当$t=\tau=L/R$，$I=I_0(1-e^{-1})=\mathbf{0.632}I_0$，即经过时间$\tau$，电流已经达到稳定值的**63.2%**。$\tau$称为$RL$ 电路的时间常数。

再讨论放电过程

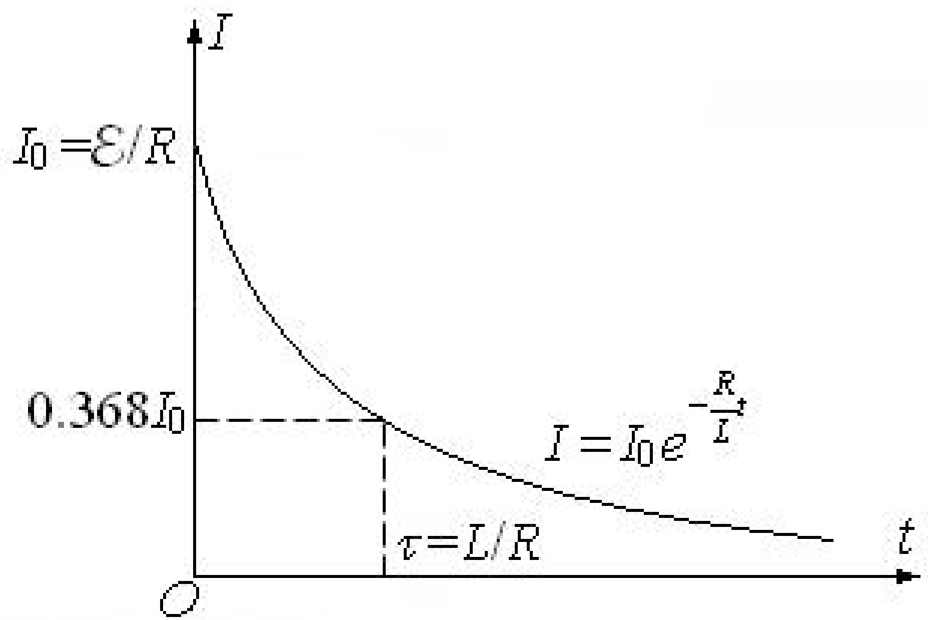
- 当电流稳定后，把电键掷向b，突然撤去电源，电流从I_0下降，于是线圈产生感应电动势，企图阻碍电流的减少。此过程的回路基本方程和初始条件分别是

$$IR+L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t=0,\ I|_{t=0}=I_0.$$

- 解得

$$I=I_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.$$

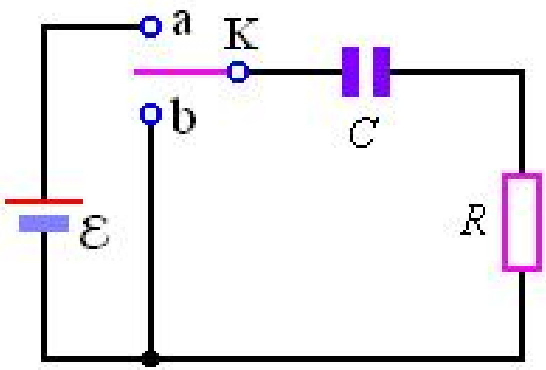
可见电流以负指数形式随时间下降，当$t=\tau$时，电流降到原来的36.8%。



2) *RC*电路的暂态过程

先讨论充电过程

- 如图，把电键K突然合到a点， 电容器将被充电，两极板的电压$U_C=q/C$随着电量q的逐渐增加而增加。
- 电路的充电电流为$I=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$.
- 基本方程和初始条件分别是



$$q/C+IR=q/C+R\mathrm{d}q/\mathrm{d}t=\mathcal{E},\quad q|_{t=0}=0.$$

- 设$q_0=C\mathcal{E}$, $\tau=RC$，解得

$$q=q_0(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}),\ \rightarrow U_c=q/C=\mathcal{E}(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}).$$

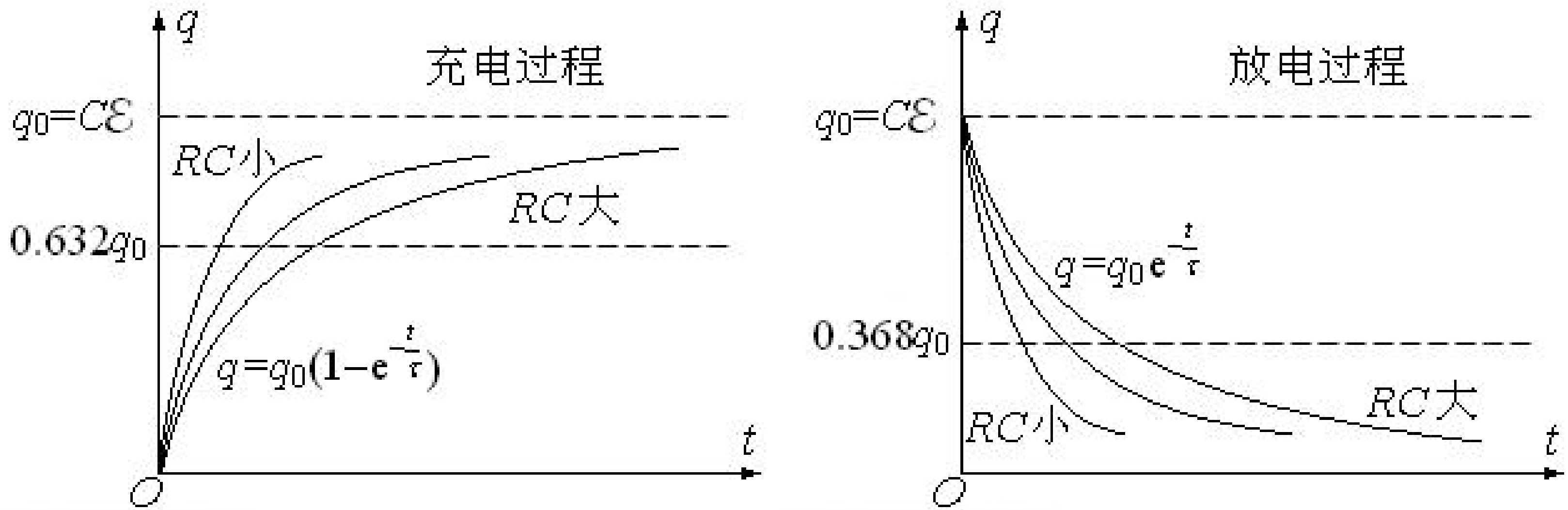
τ称为*RC* 电路的时间常数。

再讨论放电过程

- 当电容充电完成后，把K从a点突然接到b点，电容器将放电，两极板上的电荷由q_0渐趋于零。
- 基本方程和初始条件分别是

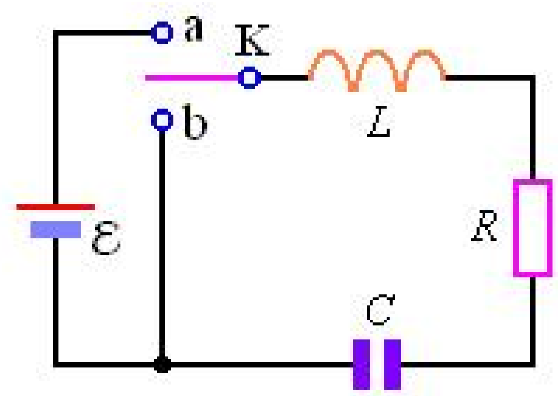
$$q/C+R\mathrm{d}q/\mathrm{d}t=0,\ q|_{t=0}=q_0.$$

解得
$$q=q_0\mathrm{e}^{-t/\tau},\ \rightarrow U_c=q/C=\mathcal{E}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$



3) RLC电路的暂态过程

- 充电情形：当RLC电路中突然接入电源时， 类似于前面的讨论，电容器上的电荷满足微分方程



$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=\mathcal{E},$$

令$\beta=R/2L$，$\omega_0=(LC)^{-1/2}$，$q_0=C\mathcal{E}$，

由上式可得阻尼振荡方程

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2q=\omega_0^2q_0,$$

其中β为阻尼系数，ω_0为电路的固有频率。

初始条件：$q|_{t=0}=0$，$\mathrm{d}q/\mathrm{d}t|_{t=0}=0$.

根据β和ω_0的相对大小，方程解有三种情况。

a. 欠阻尼($\beta<\omega_0$)

此时的解为$q=q_0-q_0e^{-\beta t}[\cos\omega t+(\beta/\omega)\sin\omega t]$，其中

$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$. q随时间衰减振荡。

b. 过阻尼($\beta>\omega_0$)

此时的解为$q=q_0-q_0(e^{-\beta t}/2\gamma)[(\beta+\gamma)e^{\gamma t}-(\beta-\gamma)e^{-\gamma t}]$，其中

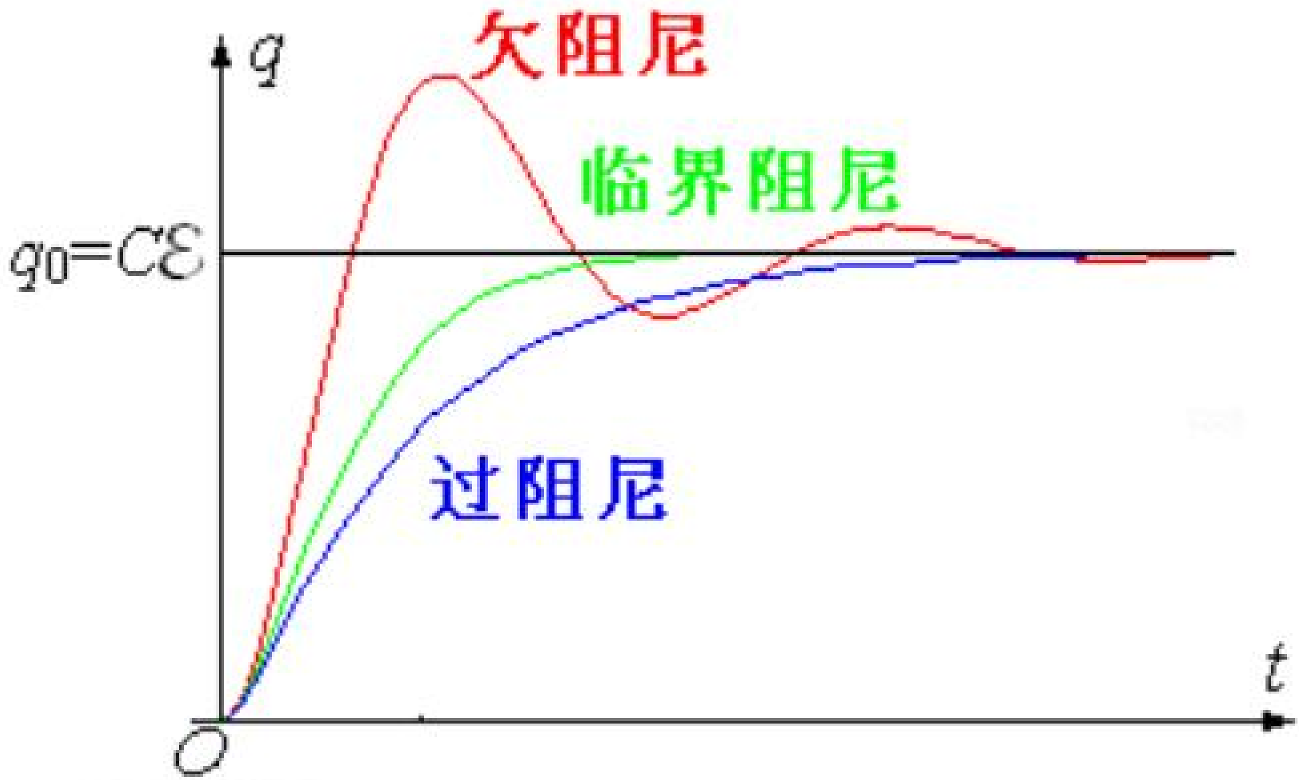
$\gamma=\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$. q随时间单调上升，β越大上升越慢。

当$\beta\to\infty$ (即$L\to0$)时，上式回到RC 电路解。

c. 临界阻尼($\beta=\omega_0$)

此时的解为$q=q_0-q_0(1+\beta t)e^{-\beta t}$.

q随时间单调上升，但比过阻尼情形上升的快 (?)。



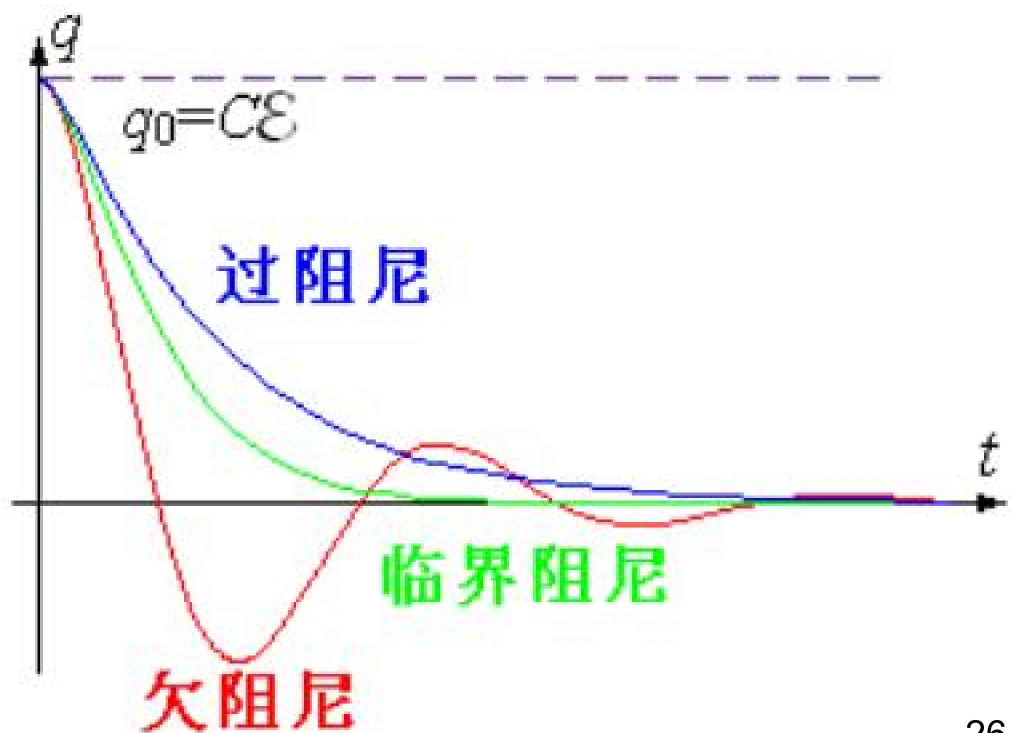
充电时三种阻尼情况下
极板电荷随时间的变化曲线

- 放电情形：当RLC电路达到稳定后，突然撤去电源，电路方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2 q'}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta \frac{\mathrm{d}q'}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 q' = 0.$$

初始条件：$q'|_{t=0}=q_0$，$\mathrm{d}q'/\mathrm{d}t|_{t=0}=0$.

解为$q'=q_0-q$，其中q是充电时的电荷解。显然，q'的解也分为三种情况，如图所示。



作业、预习及思考题

- 作业：**7.8~7.16**
- 预习： 第8章 磁能所有小节

下次课讨论

- 思考题7.4 用$\mathcal{E}=-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$和$\mathcal{E}=\int(\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$计算动生电动势必然一致吗？提示见下页

颠覆还是修正?

p186例7.1用$\mathcal{E}=-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$**和**
$\mathcal{E}=\int(\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$两种方法得
到相同的动生电动势。

问题：这两种方法计算
动生电动势必然一致吗?

$\boxed{\mathcal{E}=-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t}$ **vs**

$\boxed{\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B}),\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t}$

谁更基本?