微分方程

二维、三维Laplace方程的分离变量法

二维、三维Laplace方程的边值问题

- 矩形域上的边值问题

散热片的横截面为一矩形 $[0,a]\times[0,b]$，它的一边 $y=b$ 保持较高温度 U，其它三边保持零度。求横截面上的稳态温度分布。

$$解:\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0,\ (x,y)\in(0,a)\times(0,b) \\ u|_{x=0}=u|_{x=a}=0,\ y\in[0,b] \\ u|_{y=0}=0, u|_{y=b}=U,\ x\in[0,a] \end{cases}$$

考虑分离解 $X(x)Y(y)\not\equiv 0$ 且 $X(0)=X(a)=0.$ 代入方程有

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}:=-\lambda \Rightarrow \begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0, 0<x<a \\ X(0)=X(a)=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 特征值$\lambda_n=(\frac{n\pi}{a})^2$，特征函数$X_n(x)=\sin(\frac{n\pi}{a}x), n\geq 1.$

而$Y''(y)-\lambda_n Y(y)=0$的通解

为$Y_n(y)=C_n\cos h(\frac{n\pi}{a}y)+D_n\sin h(\frac{n\pi}{a}y).$

令形式解$u(x,y)=\sum_{n\geq 1}X_n(x)Y_n(y)$

$$=\sum_{n\geq 1}[C_n\cos h(\frac{n\pi}{a}y)+D_n\sin h(\frac{n\pi}{a}y)]\sin(\frac{n\pi}{a}x),$$

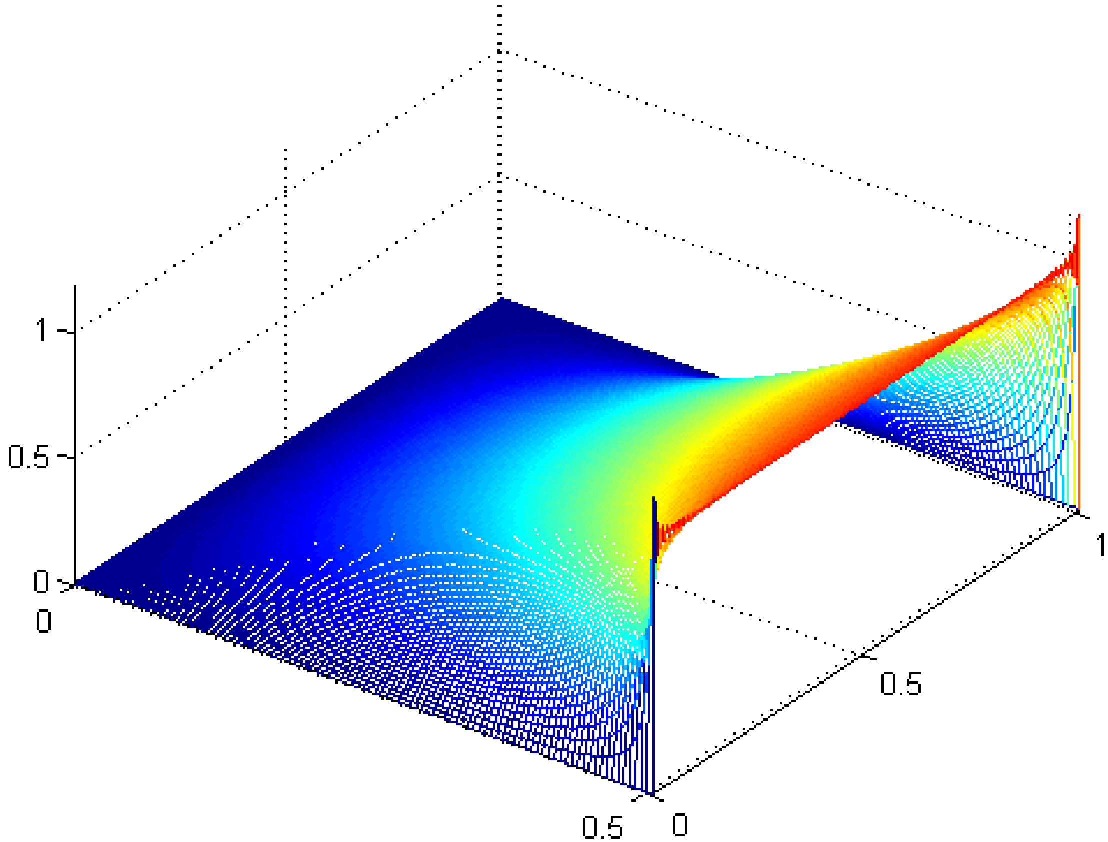
代入边界条件$u|_{y=0}=0, u|_{y=b}=U$，有

$$\sum_{n\geq 1}C_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)=0\Rightarrow C_n=0,$$

$$\sum_{n\geq 1}D_n\sin h(\frac{n\pi}{a}b)\sin(\frac{n\pi}{a}x)=U\Rightarrow D_n=\frac{1}{\sin h(\frac{n\pi}{a}b)}\frac{<U,X_n>}{\|X_n\|^2}$$

$$=\frac{1}{\sin h(\frac{n\pi}{a}b)}\frac{U\int_0^a\sin(\frac{n\pi}{a}x)dx}{\int_0^a\sin^2(\frac{n\pi}{a}x)dx}=\frac{1}{\sin h(\frac{n\pi}{a}b)}\frac{U\frac{a}{n\pi}[1-(-1)^n]}{\frac{a}{2}}=\frac{2U[1-(-1)^n]}{n\pi\sin h(\frac{n\pi}{a}b)}.$$

$$\therefore u(x,y)=\frac{4}{\pi}U\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{\sinh\left(\frac{2n+1}{a}\pi y\right)}{\sinh\left(\frac{2n+1}{a}\pi b\right)}\sin\left(\frac{2n+1}{a}\pi x\right)$$



参数选取

$$a=1$$

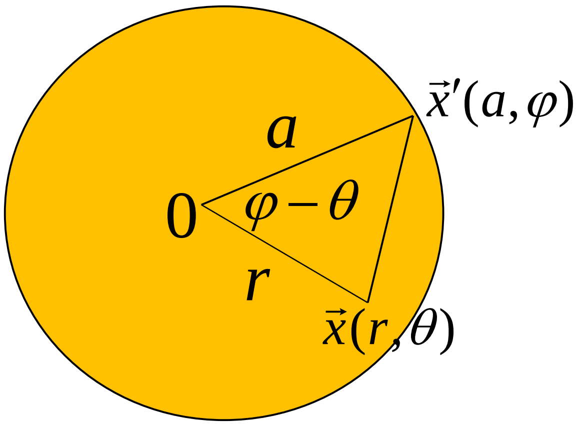
$$b=\frac{1}{2}$$

$$U=1$$

圆域内的边值问题

一个半径为a的薄圆盘，上下两面绝热，圆周边缘的温度分布为已知函数 $F(x,y)$，求稳恒状态时圆盘内的温度分布。

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \quad x^2+y^2<a^2 \\ u\big|_{x^2+y^2=a^2}=F(x,y) \end{cases}$$



前面已解决且有Poisson公式

$$u(r,\theta)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)}d\varphi.$$

注：1. 由余弦公式易得$u(\vec{x})=\dfrac{a^2-|\vec{x}|^2}{2\pi a}\displaystyle\int_{|\vec{x}'|=a}\frac{u(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^2}dS(\vec{x}')$

2.成立平均值公式$u(\vec{0})=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2\pi a^2}\int_{|\vec{x}'|=a}u(\vec{x}')dS(\vec{x}')$

球域内Laplace方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta_3 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < a^2 \\ u\big|_{x^2+y^2+z^2=a^2} = F(x, y, z) \end{cases}$$

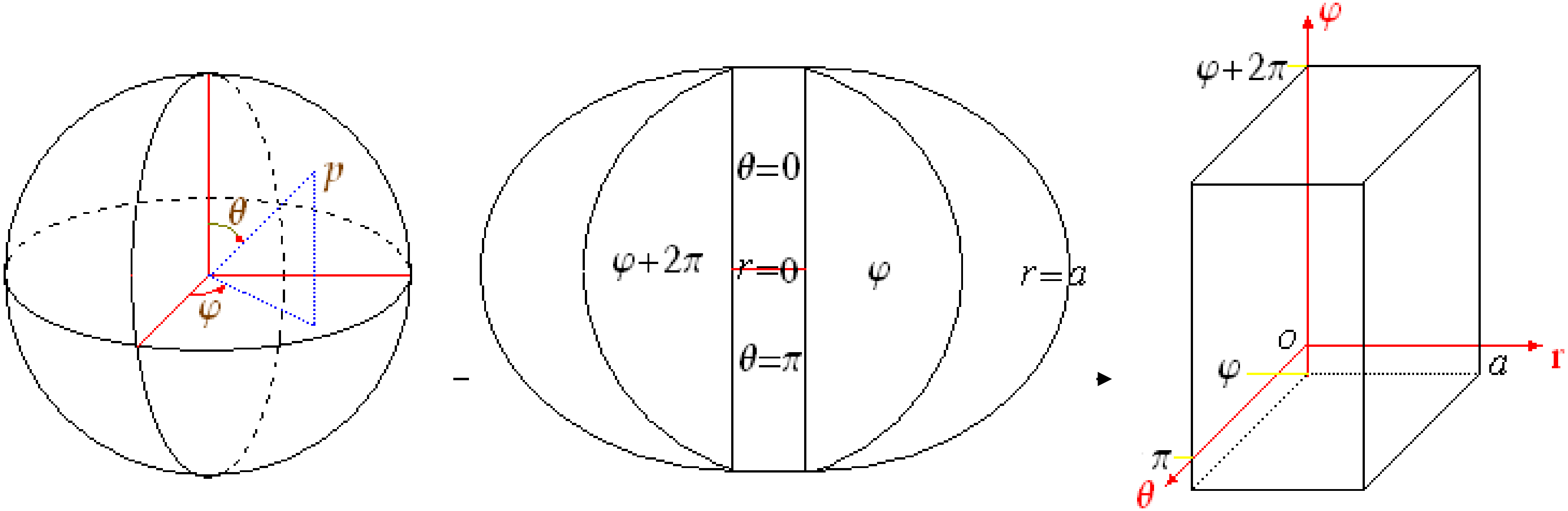
球坐标变换

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$0 \le r \le a$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$



$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0, \\
u\big|_{r=a}=F(a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta):=f(\theta,\varphi) \\
u\big|_{r=0}=\text{有限值}, \\
u(r,\theta,\varphi)=u(r,\theta,\varphi+2\pi), \\
u\big|_{\theta=0,\pi}=\text{有限值},
\end{cases}
$$

隐含着的周期边值条件和球内约束条件

第一步：求满足方程、周期边界条件和球内约束条件的分离解 $u(r,\theta,\varphi)=R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$.

将分离解代入方程并对自变量逐层分离，有

$$\frac{(r^2R')'}{R}+\frac{(\sin\theta\Theta')'}{\sin\theta\Theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\Phi''}{\Phi}=0,$$

$$R(r):\begin{cases}(r^2R')'-\lambda R:=(r^2R')'-l(l+1)R=0\\ R(0)=\text{有限值}\end{cases}$$

$$\Phi(\varphi):\begin{cases}\Phi''+\mu\Phi:=\Phi''+m^2\Phi=0\\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)\end{cases}$$

$$\Theta(\theta):\begin{cases}\sin\theta(\sin\theta\Theta')'+\left[l(l+1)\sin^2\theta-m^2\right]\Theta=0\\ \Theta\big|_{\theta=0,\pi}=\text{有限值}\end{cases}$$

第二步：求$R(r),\Phi(\varphi),\Theta(\theta)$的具体表示式.

$$R(r):\begin{cases}(r^2R')'-l(l+1)R=0\\ R(0)=\text{有限值}\end{cases}$$

欧拉方程

$$R(r)=A_l r^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}}\Rightarrow \quad R(r)=A_l r^l$$

$$\Phi(\varphi):\begin{cases}\Phi''+m^2\Phi=0\\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Phi(\varphi)=C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi,\ \ m\geq 0$$

$$\Theta(\theta):\begin{cases}\sin\theta(\sin\theta\Theta')'+\left[l(l+1)\sin^2\theta-m^2\right]\Theta=0\\ \Theta\big|_{\theta=0,\pi}=\text{有限值}\end{cases}$$

作变量变换$x=\cos\theta$，令$y(x)=\Theta(\theta)=\Theta(\arccos x)$，则易得

$$\begin{cases}(1-x^2)y''-2xy'+[l(l+1)-\dfrac{m^2}{1-x^2}]y=0\\ y\big|_{x=\pm1}=\text{有限值}\end{cases}$$

伴随勒让德方程

$$\Theta(\theta)=y(\cos\theta)=P_l^m(\cos\theta),\quad l\geq0,0\leq m\leq l$$

（详细推导可以参考季孝达“数学物理方程”第二版P104-P107）

第三步：利用边界条件求解

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{l} r^{l}\left(C_{lm}\cos m\varphi + D_{lm}\sin m\varphi\right)P_l^m(\cos\theta)$$

$$C_{lm}=\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi\delta_m a^l(l+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$D_{lm}=\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi a^l(l+m)!}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\delta_m=\begin{cases}2, & m=0\\ 1, & m\neq 0\end{cases}$$

例 半径为a的球内部没有电荷，球面上的电势为 $\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi$，求球形区域内部的电势分布.

解：$\begin{cases}\Delta u = 0, & r < a \\ u\big|_{r=a} = \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\end{cases}$

$$u(a,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{l} a^l\left(C_{lm}\cos m\varphi + D_{lm}\sin m\varphi\right)P_l^m(\cos\theta)$$

$$= \sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{6}3\sin^2\theta\sin 2\varphi$$

$$= \frac{1}{6}P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi \ (\because P_2^2(x) = 3(1-x^2))$$

$\Rightarrow D_{22} = \dfrac{1}{6a^2}$,其它系数全部为0.

$$\boxed{u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{6a^2} r^2 P_2^2(\cos\theta)\sin 2\varphi}$$

注：

对于其它特殊区域上的定解问题可以利用分离变量法进行求解

例如：

半球内或球外、圆柱上的Laplace方程的边值问题