2023 春复分析每日一练 (VI)

黄天一

2023 年 6 月 23 日

1 核心内容回顾

1. 解析开拓的基本概念.

2. 通过 Schwarz 对称进行解析开拓: (1) 区域关于实轴对称; (2) 区域关于一般的圆周对称.

3. 幂级数和函数沿半径解析开拓: (1) 正则点与奇点的概念; (2) 幂级数在收敛圆周上必有奇点; (3) 一些有自然边界的幂级数例子.

2 判断题

1. (22 期末) 定义在实轴上的实函数 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 不能解析开拓到复平面上.

2. 设 $D=B(\infty,R)$, $f,g\in H(D)\cap C(\overline{D})$ 满足 $f(z)=g(z),\forall|z|=R$, 则 f 恒等于 g.

3. 存在收敛半径为 1 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, 它在 $\partial B(0,1)$ 上恰好有一个奇点.

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在收敛圆周上必有正则点.

3 证明与计算题

1. 设 γ 是圆周 $\partial B(z_0,R)$ 上的一段开圆弧, 证明: 若 f 在 $B(z_0,R)$ 上全纯, 在 $B(z_0,R)\cup\gamma$ 上连续, 并且在 γ 上恒为零, 则 f 在 $B(z_0,R)$ 上也恒为零.

2. 利用解析开拓证明下面两个命题:

(1) (21 期末) 若 $f\in H(\mathbb{D})\cap C(\overline{\mathbb{D}})$ 满足 $|f(z)|=1,\forall|z|=1$, 则 $f(z)$ 为有理函数.

(2) (20 期末) 设 f 为整函数, 且 $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$, $f(\mathrm{i}\mathbb{R})\subset\mathrm{i}\mathbb{R}$, 证明 f 是奇函数.

3. (1) 设区域 D 关于实轴对称, $f\in H(D)$. 证明: 存在 D 上的全纯函数 f_1,f_2, 使得 f_1,f_2 在实轴上取实值, 且 $f(z)=f_1(z)+\mathrm{i}f_2(z)$.

(2) 设 D 是由两条简单闭曲线 γ_1,γ_2 围成的二连通域, 其中 γ_2 位于 γ_1 的内部. 设 $f\in H(D)$, 证明: $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$, 其中 f_1 在 γ_1 内部全纯, f_2 在 γ_2 外部全纯.

4. 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2^n}}{2^n}$ 的收敛圆周上的每个点都是和函数的奇点.

5. 设和函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 的收敛圆周上存在点 z_0, 使得 $f(z)$ 可以解析开拓到 $B(z_0,r)\setminus z_0$ 上, 并且 z_0 是开拓后函数的极点. 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在收敛圆周上处处发散.