§0.1 欧式空间

§0.1.1 欧式向量空间中一些微分运算、代数运算

（1）几个微分运算：

选定欧式空间$\mathbb{R}^n$的一组单位正交基。设有光滑向量值函数$a(t) \in \mathbb{R}^n$，例如$a(t)$代表一个运动粒子在t时刻的位置、速度等，其分量形式为

$$a(t) = (a^1(t), a^2(t), \cdots, a^n(t))$$

则

$$\frac{d}{dt}a(t) := \lim_{h\to 0}\frac{a(t+h)-a(t)}{h} = (\frac{da^1}{dt}, \cdots, \frac{da^n}{dt}).$$

设$\lambda = \lambda(t)$，由Leibniz求导法则可得

$$\frac{d}{dt}(\lambda a) = \frac{d\lambda}{dt}a + \lambda\frac{da}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\langle a, b\rangle = \langle \frac{da}{dt}, b\rangle + \langle a, \frac{db}{dt}\rangle.$$

例：设有C^1向量值函数$r : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$，以及$t_0 \in (a, b)$使得

$$|r(t_0)| = \min_{t\in I}|r(t)| > 0.$$

则

$$0 = \frac{d}{dt}|_{t=t_0}\langle r(t), r(t)\rangle = 2\langle r(t_0), r'(t_0)\rangle,$$

即

$$r'(t_0) \perp r(t_0).$$

两个一阶线性微分算子：(i)函数$f(x^1, \cdots, x^n)$的梯度

$$\mathrm{grad}f = \nabla f := (\frac{\partial f}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}).$$

(ii)向量场$X = X(x^1, \cdots, x^n) = (X^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, X^n(x^1, \cdots, x^n))$的散度

$$\mathrm{div}X = \nabla \cdot X := \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial X^n}{\partial x^n}.$$

容易验证：

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f,$$

$$\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}(X) + \langle \nabla f, X\rangle.$$

（2）三维欧式空间中外积、混合积、旋度：

取$\mathbb{R}^3$自然定向（右手系）的单位正交基$(e_1, e_2, e_3)^T$。$a, b \in \mathbb{R}^3$的外积定义为

$$a \wedge b := (a^2b^3 - a^3b^2, a^3b^1 - a^1b^3, a^1b^2 - a^2b^1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

a, b, c的混合积定义为

$$(a, b, c) = \langle a, b \wedge c \rangle = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (c, a, b) = \langle c, a \wedge b \rangle = \langle a \wedge b, c \rangle.$$

即a, b, c三个向量张成的平行六面体的有向体积。也可以反过来通过混合积以及关系式

$$(a, b, c) = \langle a, b \wedge c \rangle, \quad \forall a \in \mathbb{R}^3$$

来定义外积$b \wedge c$。由行列式的线性性，外积与混合积关于每一个变量都是线性的。

由于

$$0 = (a, a, b) = \langle a, a \wedge b \rangle, \quad 0 = (b, a, b) = \langle b, a \wedge b \rangle,$$

$a \wedge b$与a, b都垂直。由混合积对应有向体积，取(c, a, b)中$c = \frac{a \wedge b}{|a \wedge b|}$ 为垂直于a, b的单位向量，因此$|(c, a, b)| = |a \wedge b|$，由此可见$|a \wedge b|$等于$a, b$张成平行四边形的面积。$a, b$线性无关时混合积$(a \wedge b, a, b) = |a \wedge b|^2 > 0$，$(a \wedge b, a, b)$构成右手系。可直接验证

$$b \wedge a = -a \wedge b,$$
$$\frac{d}{dt}(a \wedge b) = \frac{da}{dt} \wedge b + a \wedge \frac{db}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}(a, b, c) = (\frac{da}{dt}, b, c) + (a, \frac{db}{dt}, c) + (a, b, \frac{dc}{dt}).$$

注意外积不满足结合律：

$$(e_1 \wedge e_1) \wedge e_2 = 0, \quad e_1 \wedge (e_1 \wedge e_2) = e_1 \wedge e_3 = -e_2.$$

$\mathbb{R}^3$中向量场$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$的旋度

$$\mathrm{rot} F = \nabla \wedge F := (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

容易验证：

$$\mathrm{rot}(fF) = f\mathrm{rot}(F) + \nabla f \wedge F.$$

作业：习题一2，3

§0.2 曲线的概念

质点运动对应为一个向量值函数

$$r : I = (a, b) \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto (x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t)).$$

$n = 2$时简称为平面曲线，$n = 3$时简称为空间曲线。主要讨论（参数形式、或称参数化）正则(regular)曲线：

定义0.1. *如果$r : I = (a, b) \to \mathbb{R}^n$使得*

(i) 每个分量$x^i(t) \in C^\infty$;（光滑性，可对t求任意次导数）

(ii) $|\frac{dr(t)}{dt}| = |r'(t)| > 0, \forall t \in (a, b)$;（$\Rightarrow$存在局部1-1微分同胚）

则称$r(t)$为正则曲线。像集$r(I) \subset \mathbb{R}^n$称为曲线的轨迹。

对于参数形式正则曲线，$\frac{dr(t)}{dt} = r'(t)$称为切向量（或速度向量），曲线在$t = t_0 \in (a, b)$处切向量的分量形式为

$$\begin{aligned} r'(t_0) &= \frac{dr}{dt}(t_0) := \lim_{t \to t_0} \frac{r(t) - r(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(x^1(t) - x^1(t_0), \cdots, x^n(t) - x^n(t_0)) = (\frac{dx^1}{dt}(t_0), \cdots, \frac{dx^n}{dt}(t_0)). \end{aligned}$$

曲线$r(t)$在$t = t_0$的切线l的参数方程为

$$l(t) = r(t_0) + r'(t_0)(t - t_0),$$

$$x^i(t) = x^i(t_0) + \frac{dx^i(t_0)}{dt}(t - t_0), \quad i = 1, \cdots, n.$$

即$r(t)$的Taylor展开式前两项(一阶近似)。显然有$l(t_0) = r(t_0), l'(t_0) = r'(t_0)$。

注：(i) 因为可能发生$r(t_1) = r(t_2), t_1 < t_2$，所以$r'(t_1)$与$r'(t_2)$可能是不同的向量。因此需要明确指出$t = t_1$或$t = t_2$处的切向量。如果$r : I \to r(I)$是一一映射，则称$r(t)$为简单(simple)曲线。

(ii) 轨迹相同的曲线并不一定是同一条曲线。严格来说同一条曲线指的是$r(t)$作为映射相同。正规曲线的参数化确定了曲线的一个定向，即t增加的方向。对正则曲线$r(t)$，经常会采用同定向的不同参数化。即选取新参数$\sigma \in I_1 = (a_1, b_1)$，$t = t(\sigma)$是$I_1, I$之间的一一映射，并且$0 < \frac{dt(\sigma)}{d\sigma} < \infty$，则由复合映射

$$I_1 \xrightarrow{t=t(\sigma)} I \xrightarrow{r=r(t)} \mathbb{R}^n$$

所定义的参数曲线$r(t(\sigma))$为同定向正则曲线，或记作$r(\sigma)$。

(iii) 如果$r'(t)=0$，则称曲线在t奇异(singular)。

有可能出现某参数曲线$r(t)$含有奇异点，但选取新的参数化使得它成为正则曲线。例如平面直线$\{y=0\}$的参数化$r(t)=(t^3,0)$包含奇异点$t=0$。

如果$r'(t_0)=0$，则曲线可能不存在参数化使它成为一条正则曲线，曲线还可能在$t=t_0$不存在切线。这是为什么这里通常仅考虑正则曲线的一个原因。

例：平面参数曲线
$$r(t)=(t^3,t^2),\quad t\in\mathbb{R},$$
其轨迹为
$$y=x^{\frac{2}{3}},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$
由
$$r'(t)=(3t^2,2t),$$
曲线在$t=0$处奇异。另一方面，$y=x^{\frac{2}{3}}$并不存在参数化使它成为一条正则曲线：否则设$r(\sigma)$是一条轨迹$r(I)=\{y=x^{\frac{2}{3}}\}$的正则曲线，对于参数$\sigma$，不妨设
$$r(0)=(0,0),\quad r'(0)\neq 0,$$
并且
$$r((-\epsilon,0))\subset\{y=x^{\frac{2}{3}},x<0\},\quad r((0,\epsilon))\subset\{y=x^{\frac{2}{3}},x>0\},$$
则有
$$r'(0+)=(0,c_1),\quad c_1>0;\quad r'(0-)=(0,c_2),\quad c_2<0.$$
所以$r'(0)$事实上不存在，矛盾。

由正则性条件(ii)，切向量的长度
$$|r'(t)|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\frac{dx^i}{dt}(t))^2}>0.$$
设$[c,d]\subset(a,b)$，则曲线$r(t)(t\in[c,d])$的弧长为
$$L(r[c,d]):=\int_c^d|r'(t)|dt.$$
以$t=c$为初始点，定义弧长函数
$$s(t):=\int_c^t|r'(u)|du.$$

弧长是一个几何量，它与参数化无关，它也是仅有的局部内蕴量(即当不区分曲线的外在浸入方式时等长的曲线可以等同)。

由

$$\frac{ds}{dt}(t) = |r'(t)| > 0,$$

$s(t)$为严格单调增函数，有反函数$t = t(s)$(即$t(s(t)) = t$)。以弧长s作为新参数，即$r(t)$复合反函数$t = t(s)$得到

$$r(s) = (x^1(s), \cdots, x^n(s)) := (x^1(t(s)), \cdots, x^n(t(s))),$$

称为弧长参数曲线。它的切向量

$$r'(s) = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}(t(s))\frac{dt(s)}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}(t)}r'(t) = \frac{1}{|r'(t)|}r'(t),$$

特别对于弧长参数曲线

$$|r'(s)| \equiv 1, \quad \langle r''(s), r'(s)\rangle = 0.$$

例：设$r : [a, b] \to \mathbb{R}^n$为$C^1$曲线，证明

$$|r(b) - r(a)| \leq L(r[a, b]) = \int_a^b |r'(t)|dt.$$

证明：不妨设$r(b) \neq r(a)$。对任意单位向量$v \in \mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned} L(r[a,b]) &= \int_a^b |r'(t)|dt \geq \int_a^b \langle r'(t), v\rangle dt \quad \text{Cauchy-Schwarz不等式} \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\langle r(t), v\rangle dt \\ &= \langle r(t), v\rangle|_a^b \\ &= \langle [r(b) - r(a)], v\rangle. \end{aligned}$$

取

$$v = \frac{r(b) - r(a)}{|r(b) - r(a)|},$$

则得

$$L(r[a, b]) \geq |r(b) - r(a)|.$$

□