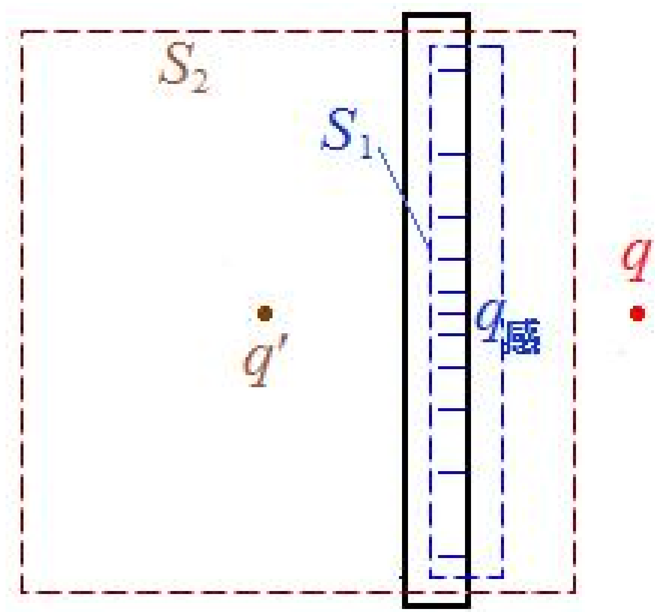
思考题讨论

- **思考题3.1** 电子的静止能量除了静电能外还有其他来源W_x。为解释电子的半径$<<r_e$，W_x是正还是负？与mc^2相比大小如何？

- 思考题2.11 用电像法求解导体系统时，像电荷q'是否一定等于感应电荷总量$q_{感}$?

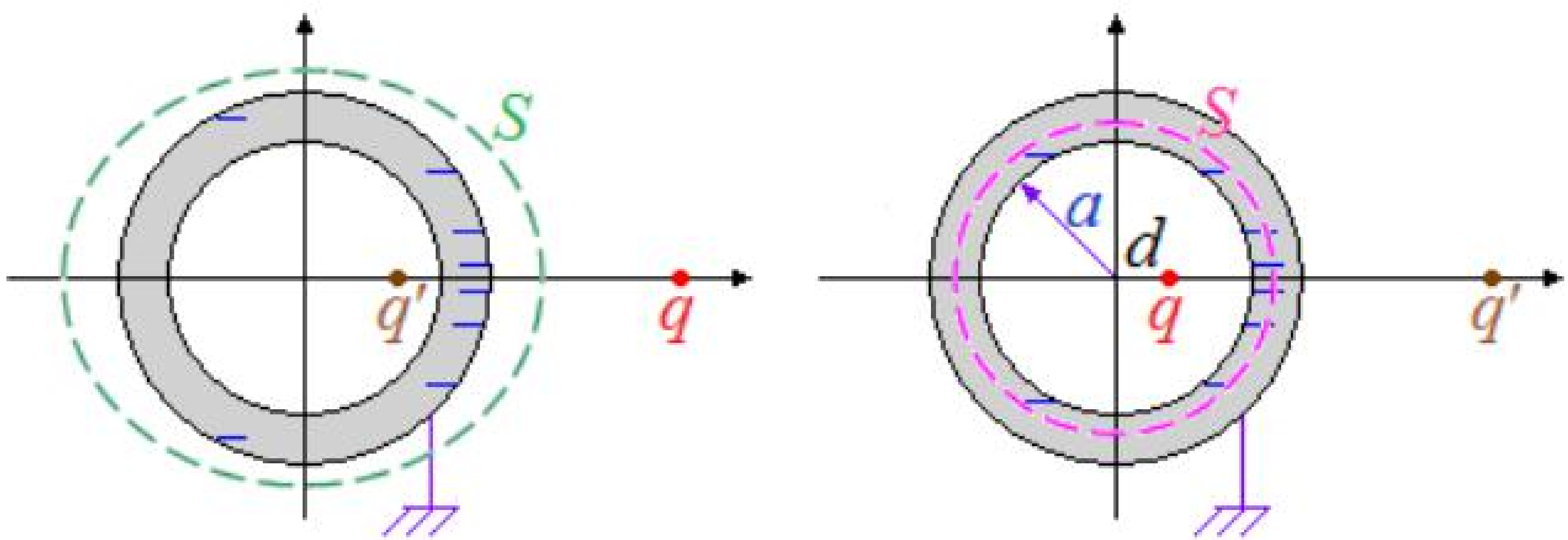
➢无限大导体板情形



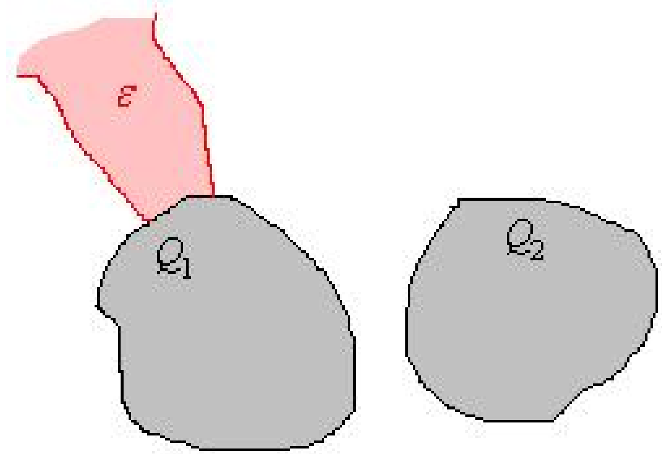
$q_{感}$和q'在右侧发出相同电场线，通量都是总通量的一半(考察各自高斯面S_1和S_2)。→ $q'=q_{感}$

球形导体壳情形有二

- q在外部：由于q'与感应电荷在导体球外部有相同电场，所以在S上有相同的通量。$\rightarrow q'=q_{感}$
- q在内部：S上电场处处为零，所以S上通量为零$\rightarrow$腔表面感应电荷为$-q$，但$q'=-aq/d \rightarrow q'\neq q_{感}$



- 思考题2.12 电场线与介质界面重合情形是否总能按照$E=\alpha E_0$求解？例子：两个导体，介质填充在左导体的电场线管内。



- 加入介质后，导体1表面的自由电荷必然重新分布，使得总电荷面密度与无介质时自由电荷面密度的分布成比例，比例系数α<1。
- 这就要求导体2上的总电荷面密度同步下降，总电量也同步下降。但导体2上只有自由电荷，加入介质前后的电荷总量应该不变！
- 如何解决矛盾？书中方法失效！

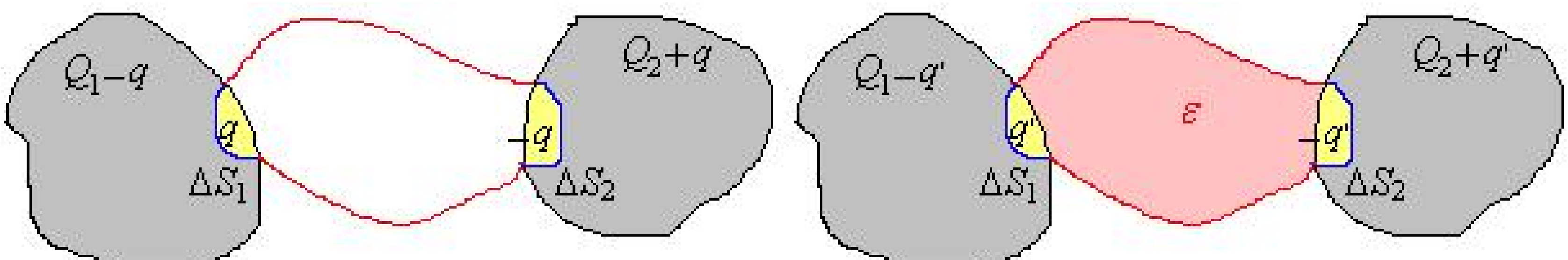
问题出现在什么地方？

- 书中方法有效的前提是，体系容许有介质时的总电荷与无介质时的自由电荷有相同分布形式：

$$\sigma_e = \alpha \sigma_{e0}$$

但并非任何情况下都能做到这一点。

- 其他例子：两个导体 ($U_1 > U_2$) 之间的一电场线管填充电介质。($\pm q$和$\pm q'$分别是填充介质前后导体表面在电场线管两个端面处的自由电荷)



第十三讲 2022-04-12

第4章 稳恒电流

§3.6 利用静电能求静电力

§4.1 稳恒条件

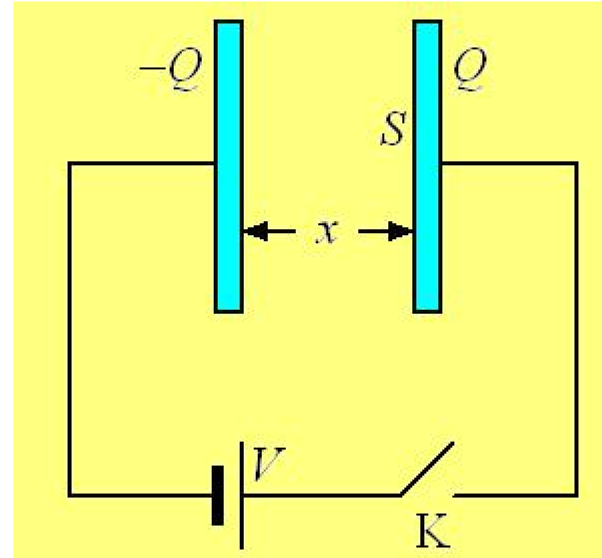
§4.2 欧姆定律与焦耳定律

§4.3 电源与电动势

§4.4 基尔霍夫定律

§4.5 稳恒电流与静电场的综合求解

[例3.6] 真空平行板电容器，极板面积S，相距x，充电至电压$U=V$，求正极板受力。



[解]电容器静电能 $W_e=\dfrac{CU^2}{2}=\dfrac{Q^2}{2C}$

若K断开，Q不变

$$F_x=-\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_Q=-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)\right]_Q=\frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial x}$$

若K闭合，U不变

$$F_x=\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_U=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{CU^2}{2}\right)\right]_U=\frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial x}$$

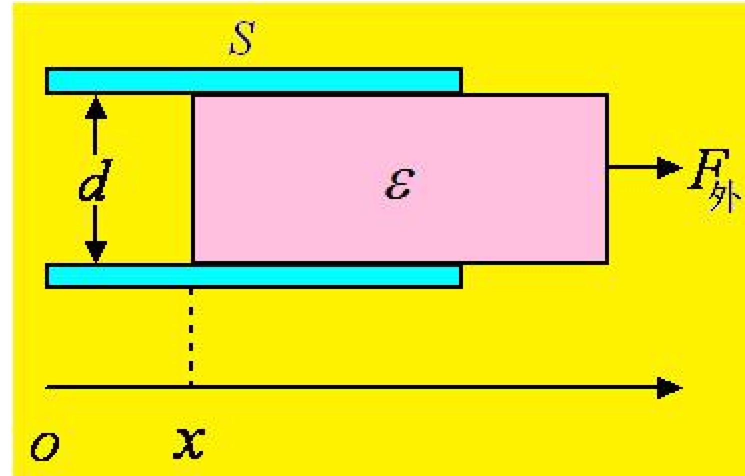
吸引

将$C=\varepsilon_0 S/x$代入，两式结果相同， $F_x=-\dfrac{\varepsilon_0 S V^2}{2x^2}$

直接法计算？

[例3.7] 平行板电容器极板面积S，极板间距d，其间充满ε介质，求将介质从极板间完全取出时外力所做的功：

1) U不变；2) Q 不变。



[解] 设介质从极板间移出的距离为x，极板长l，

x=0时，$C_1=\varepsilon S/d$；$x=l$时，$C_2=\varepsilon_0 S/d$, 介质全部抽出。

1) U不变时，静电力 $F_x=\left(\dfrac{\partial W_e}{\partial x}\right)_U=\dfrac{U^2}{2}\dfrac{\partial C}{\partial x}$

外力作功

$$A_1'=-\int F\mathrm{d}x=-\int_{C_1}^{C_2}\frac{U^2}{2}\mathrm{d}C=\frac{1}{2}U^2(C_1-C_2)=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)S}{2d}U^2$$

2) Q 不变时，静电力 $F_x = -\left(\dfrac{\partial W_\mathrm{e}}{\partial x}\right)_Q = \dfrac{Q^2}{2C^2}\dfrac{\partial C}{\partial x}$

外力作功

$$A_2' = -\int F\mathrm{d}x = -\int_{C_1}^{C_2} \frac{Q^2}{2C^2}\mathrm{d}C = \frac{(C_1 - C_2)Q^2}{2C_1C_2} = \frac{\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_0)S}{2\varepsilon_0 d}U^2 \neq A_1'$$

说明：这是两种不同的真实物理过程

1) U不变，接电源。抽出介质时，C减小，Q变小，外力做功和电容器减少的静电能都转化为电源储能。

$$\Delta W_{\mathrm{e}1} = \tfrac{1}{2}U^2(C_2 - C_1) = -A_1' < 0$$

2) Q不变，孤立系。外力作功等于系统静电能的增加。

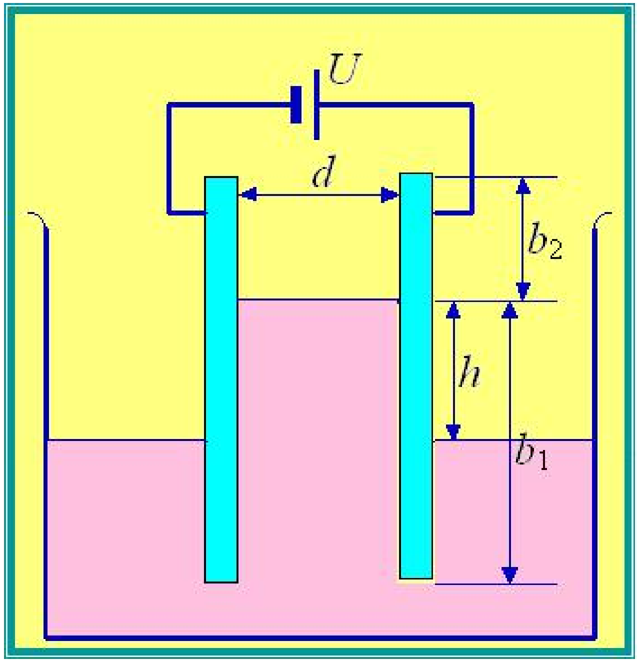
$$\Delta W_{\mathrm{e}2} = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = A_2' > 0$$

[例3.8] 平行板电容器极板面积为S，极板间距为d，插入介电常数为ε、密度为ρ的液体介质中，维持电容器的电压U不变，求液面在电容器中上升的高度h。

[解] 设极板高为$b=b_1+b_2$，宽为a，则$S=ab$，其中b_1和b_2分别为电容器中液柱和空气柱的高度。

$$C=\frac{(b_1\varepsilon+b_2\varepsilon_0)a}{d}=\frac{[b\varepsilon_0+b_1(\varepsilon-\varepsilon_0)]a}{d}$$

$$F=\left(\frac{\partial W_{\mathrm{e}}}{\partial b_1}\right)_U=\frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial b_1}=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)aU^2}{2d}$$



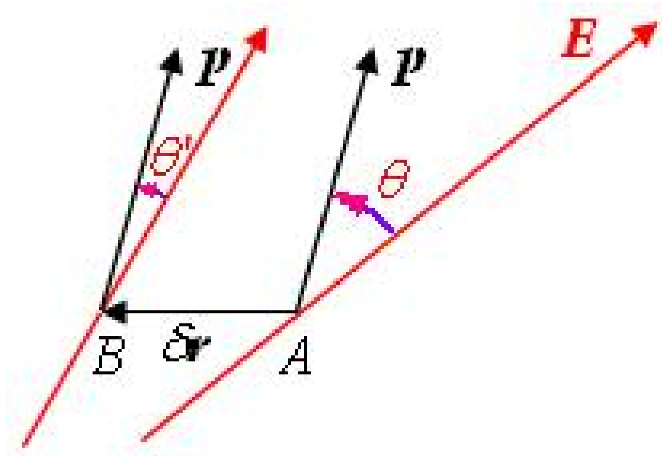
平衡时$F=mg$，$m=ahd\rho$，

$$\therefore h=\frac{m}{ad\rho}=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)U^2}{2d^2\rho g}.$$

静电能+重力势能守恒吗？

[例3.9] 求在电场$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$中，电偶极子$\boldsymbol{p}$所受的力和力矩。

[解] 电偶极子在外场中的静电能



$$W_{互}=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}=-pE\cos\theta,$$

电偶极子在平移时$\boldsymbol{p}$不变，于是

$$\boldsymbol{F}=-\nabla(W_{互})_{\boldsymbol{p}}=[\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{p}}$$

根据矢量微分公式：$[\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{p}}=(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{p}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})$

由于$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，有$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}$，与例2.2结果一致。

注意：在偶极子平移过程中，θ不是常数，所以

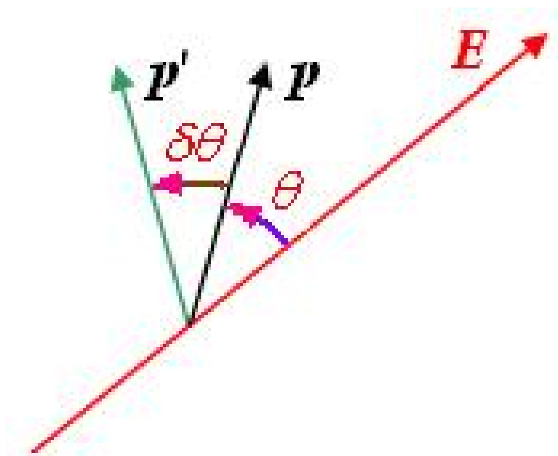
$$\boldsymbol{F}=[\nabla(pE\cos\theta)]_{\boldsymbol{p}}=p\cos\theta(\nabla E) \times$$

$$\boldsymbol{F}=[\nabla(pE\cos\theta)]_{\boldsymbol{p}}=p(\cos\theta\nabla E-E\sin\theta\nabla\theta) \surd$$

下面求电偶极子所受的力矩。为此，设电偶极子作一角位移$\delta\theta$，此时$\boldsymbol{p}$的大小不变，仅方向会发生变化。于是得

$$L_\theta = -\left(\frac{\partial W_{互}}{\partial \theta}\right)_p = \frac{\partial}{\partial \theta}(pE\cos\theta) = -pE\sin\theta.$$

注意：电偶极子的位置未挪动，所以E可近似为常数。上式表明，在L_θ(>0)作用下，角θ减小，写成矢量形式有



$$\boldsymbol{L}_\theta = -\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}$$

与例2.2的结果一致。

本例不是由总静电能，而是由互能求力和力矩

第三章 小结

超距作用观点　　近距作用观点

点电荷间的$W_{互}$ → 电场能量 (密度)

↓　　↓

连续电荷体$W_e=W_{自}+W_{互}$　　介质$W_e=W_{e0}+W_{极}$

↓　　↓

外场中的静电能　　非线性介质$W_{极}<$极化功

应用：Q不变/U不变，由静电能求静电力(矩)

第3章补遗

1. 介质体系的电容

- 定义式$C=Q/U$对导体有效，因为导体等势，U唯一取值。但介质的电势不是常数，该定义无效！
- 另辟途径：从场观点计算W_e，$C=Q^2/(2W_e)$。
- 例子：均匀荷电介质球的静电能为 $W_e=\frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$\Rightarrow C=10\pi\varepsilon_0 R/3$$

等效电容与电荷分布方式的关系？

2. 场观点下点电荷系的互能

- 两个点电荷的互能

两个带电体的总静电能为

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\iiint_V \varepsilon_0 (\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2)^2 \,\mathrm{d}V,$$

其中的自能和互能分别是

$$W_{\text{自}} = \frac{1}{2}\iiint_V \varepsilon_0 (E_1^2 + E_2^2)\mathrm{d}V,$$

$$W_{\text{互}} = \iiint_V \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 \,\mathrm{d}V,$$

当两个带电体退化为两个点电荷时，自能发散，但互能公式依然有效！

可以证明：将点电荷电场表达式

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{q_1^2 \boldsymbol{r}_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^3}, \quad \boldsymbol{E}_2 = \frac{q_2^2 \boldsymbol{r}_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}$$

代入场观点下的$W_{互}$表达式，经全空间积分后恰等于电荷观点下的

$$W_{互} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

- N个点电荷体系的推广是直截了当的。

$$W_{互} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1,j=1\\ i\neq j}}^{N} \iiint_V \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_i \cdot \boldsymbol{E}_j \mathrm{d}V.$$

§4.1 稳恒条件

1. 电流强度和电流密度

- 电流强度

中学的直流电路部分曾引入电流强度

$$I=\Delta q/\Delta t.$$

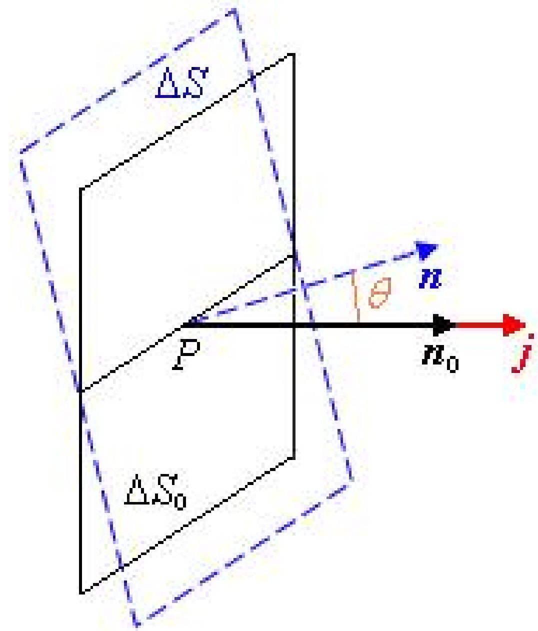
电流强度的单位为库仑/秒，即安[培]，符号为A。

用电流强度描述导体中电荷的宏观流动性质太“粗糙”，不能描述导体中各点电流的大小和方向。

为此，引入一个“精细”物理量——电流密度。

- 电流密度

在导体内P点沿电流方向作单位矢量$\boldsymbol{n}_0$，并取面元$\Delta \boldsymbol{S}_0 \perp \boldsymbol{n}_0$。设通过$\Delta S_0$的电流强度为$\Delta I$，定义$P$点的电流密度



$$\boldsymbol{j} = \frac{\Delta I}{\Delta S_0} \boldsymbol{n}_0 .$$

- 电流密度是位置的矢量函数，能细致反映电流的空间分布。
- 电流线形象描述电流场，一束电流线围成电流管。
- $\Delta I = j\Delta S_0 = j\Delta S\cos\theta = \boldsymbol{j}\cdot\Delta \boldsymbol{S}$, → 通过曲面$S$的电流强度

$$I = \iint_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} .$$

2. 电流的物理图像

- 电流是导体中载流子 (例如金属中的自由电子) 在外力 (例如电场力) 作用下的定向运动。
- 如果导体中有k种载流子，其中第i种的电量、数密度和定向速度分别为q_i, n_i和$\boldsymbol{u}_i$，则有 (参见4.2节)

$$\boldsymbol{j} = \sum_{i=1}^{k} q_i n_i \boldsymbol{u}_i$$

- 例子：一般载流金属导线，$j \sim 10^6 \mathrm{A/m^2}$, $n \sim 10^{29} \mathrm{m^{-3}}$, $q = e \sim 10^{-19} \mathrm{C} \rightarrow u = j/en \sim 10^{-4} (\mathrm{m/s})$

  可见电子的定向速度很慢！但为何电源一接通立即灯亮呢？ ←电场以光速量级传播！

3. 电流连续方程——电荷守恒定律的数学表示。

- 在导体内任取一闭合曲面S，所围区域为V，单位时间内由S面流出的电量为

$$\oiint_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

单位时间内V中电量的减少为

$$-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho_{\mathrm{e}}\mathrm{d}V=-\iiint_V \frac{\partial\rho_{\mathrm{e}}}{\partial t}\mathrm{d}V,$$

- 电荷守恒定律要求

$$\therefore \oiint_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\iiint_V \frac{\partial\rho_{\mathrm{e}}}{\partial t}\mathrm{d}V,$$

这就是积分形式的电流连续方程。

- 由数学高斯公式得

$$\iiint_V (\nabla\cdot \boldsymbol{j})\mathrm{d}V = -\iiint_V \frac{\partial \rho_\mathrm{e}}{\partial t}\mathrm{d}V,$$

鉴于V的任意性，可得电流连续方程的微分形式

$$\nabla\cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho_\mathrm{e}}{\partial t} = 0. \quad (\text{vs}\ \ \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho_\mathrm{e}}{\varepsilon_0})$$

- 电荷守恒定律的普适性→电流连续方程普遍成立
- 电流线性质：只能起、止于电荷随时间变化处。电流线的起点附近区域$\mathrm{d}q/\mathrm{d}t<0$，累积负电荷；终点附近区域$\mathrm{d}q/\mathrm{d}t>0$，累积正电荷；电荷不随时间变化处，电流线不会中断。

4. 稳恒条件

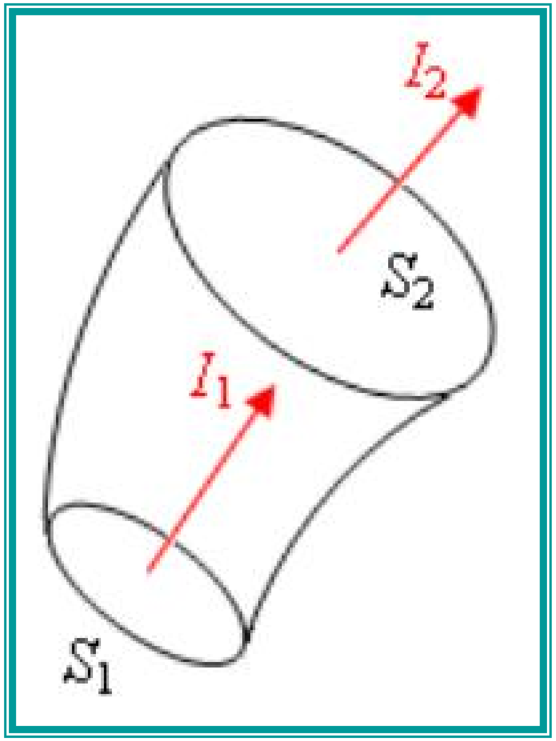
- 稳恒电流，意味着j与时间无关，电流连续方程的左边不含时，所以$\partial\rho_e/\partial t$和$\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$均应为与时间无关的常数。
- 为避免电荷的无限积累，这两个常数只能为零，即$\partial\rho_e/\partial t=0$，$\mathrm{d}q/\mathrm{d}t=0$，于是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0,\quad \text{or}\quad \oint\!\!\oint_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0,$$

  上二式分别称做稳恒条件的微分和积分形式。
- 鉴于电荷分布与时间无关，由这些稳定电荷产生的电场必然是静电场。

- 稳恒条件下的电流线不可能有起点和终点，即稳恒电流的电流线或电流管一定是闭合的。
- 同一电流管各截面电流强度相等。

推论：直流电路 (稳恒电路) 通常由导线连接而成，电流线沿导线分布，从而导线就是一个电流管。由上述结论可知，直流电路应当是闭合的；且沿一段没有分支的电路，电流强度处处相等。



沿电流管的电流强度相等

§ 4.2 欧姆定律与焦耳定律

导体中电流和电场的关系怎样?

1. 欧姆定律

由实验得，在稳恒电路的导线内，有欧姆定律 (积分形式)

$$I=U/R \text{ 或 } U=IR$$

- 电阻的倒数称为电导G，单位是西[门子]S (Ω^{-1})。
- 实验表明，一段横截面S、长l的均匀导体，其电阻$R=\rho l/S$，其中ρ是电阻率。
- 电阻率的倒数称为电导率σ，$\sigma=1/\rho$，单位是$S\cdot m^{-1}$。

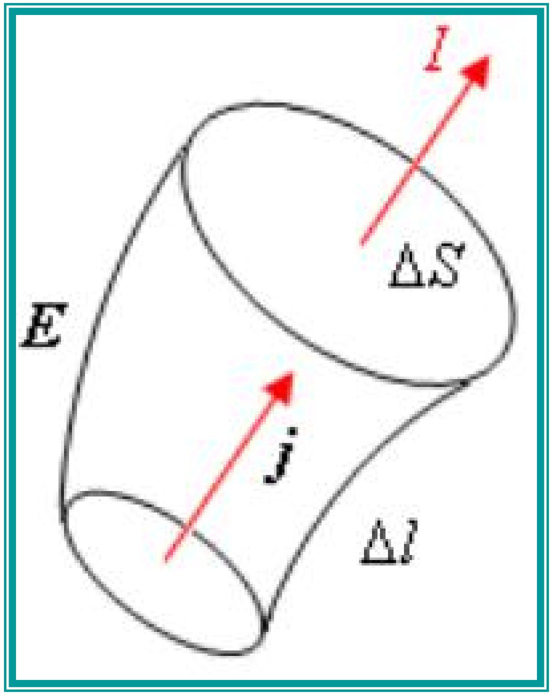
为了更细致地描述导体的导电规律，我们应当逐点分析电流密度*j*和电场强度*E*之间的关系。

取一段电流管如图，则 $\Delta I=\Delta U/R$，式中

$$\Delta I = j\Delta S,\quad \Delta U = E\Delta l,\quad R = \rho\frac{\Delta l}{\Delta S} = \frac{\Delta l}{\sigma\Delta S},$$

$$\therefore\ j\Delta S = \frac{E\Delta l}{\Delta l/(\sigma\Delta S)} = \sigma E\Delta S,$$

$$\therefore\ j=\sigma E,$$



因为*j*//*E*，上式的矢量式为

$$j=\sigma E.$$

这就是欧姆定律的微分形式。

作业、预习及思考题

- 作业：3.11~3.15, 4.1~4.5
- 预习：4.2余下内容、4.3 电源与电动势、4.4 基尔霍夫定律

- 思考题3.2 用直接法计算例3.6。
- 思考题3.3 从电荷、电场角度定性分析例3.7中电介质板所受静电力的方向。
- 思考题3.4 点电荷q与接地无穷大导体平板相距a，求体系总静电能、感应电荷的自能。