数理统计复习

2024 年 1 月 3 日

1 预备知识

Theorem (2.1)

[【0】定理2.2.1] 设随机变量$X_1, \ldots, X_n$相互独立，且$X_k \sim N(a_k, \sigma_k^2)$，$k = 1, \ldots, n$。令$c_1, \ldots, c_n$为常数，记$T = \sum_{k=1}^n c_k X_k$，则

$$T \sim N(\mu, \tau^2),$$

其中$\mu = \sum_{k=1}^n c_k a_k$，$\tau^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 \sigma_k^2$。

Theorem (2.3)

[【0】定理2.2.3] 设$X_1, \ldots, X_n \quad i.i.d. \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

(1) $\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$;

(2) $\frac{n-1}{\sigma^2} S_X^2 \sim \mathcal{X}_{n-1}^2$;

(3) $\overline{X}$与S_X^2相互独立。

1.1 $\mathcal{X}^2$ 分布

- 定义
- $X \sim Gamma(2/n, 1/2)$
- $EX = n, VarX = 2n$

1.2 t 分布

- 定义 尤其要说明独立
- $n > 1$ 时，$EX = 0$
- $n > 2$ 时，$VarX = \frac{n}{n-2}$

1.3 F 分布

- 定义 尤其要说明独立

1.4 一些相关结论

- $X_1, ..., X_n \sim Exp(\lambda)$ $i.i.d$ 时，有 $2\lambda n\bar{X} \sim \mathcal{X}^2_{2n}$（比较重要）
- $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ $i.i.d$ 时，有 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{n-1}$
- $X_1, ..., X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ $i.i.d$ 时，有 $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$
- $X_1, ..., X_m \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $i.i.d$ 以及 $Y_1, ..., Y_n \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 且两样本独立时，有 $\frac{\frac{S_X^2}{\sigma_1^2}}{\frac{S_Y^2}{\sigma_2^2}} \sim F_{m-1,n-1}$

1.5 次序统计量

- 离散形式和连续形式公式不同
- $X_{(i)}$ 的密度公式
- $(X_{(i)}, X_{(j)})$ 的联合密度密度公式
- 极差密度公式

1.6 指数族

- 形式：$f(\vec{x}|\vec{\theta}) = C(\vec{\theta})exp\{\Sigma Q_i(\vec{\theta})T_i(\vec{x})\}h(\vec{x})$
- 验证不是指数族要验证 f 的支撑集不依赖于参数，而不是所谓的不能写成上述形式
- 自然形式：$f(\vec{x}|\vec{\eta}) = C(\vec{\eta})exp\{\Sigma \eta_i T_i(\vec{x})\}h(\vec{x})$

1.7 充分 & 完全统计量

验证充分统计量的几种方式：

- 通过定义验证：条件分布在已知统计量 T 时与参数无关，即：$P(\vec{X}=\vec{x}|T=t)$ 与 θ 无关
- 因子分解定理：

Theorem (5.1, 因子分解定理 The factorization theorem)

[【0】定理2.7.1，【1】TH6.2.6] 设样本$\vec{X}=(X_1,\ldots,X_n)$的联合概率密度/质量函数（p.d.f./p.m.f.）为$f(\vec{x}|\vec{\theta})$。统计量$T(\vec{X})$是$\vec{\theta}$的充分统计量当且仅当存在函数$g(\vec{t}|\vec{\theta})$和$h(\vec{x})$，$s.t.\forall$ 样本点$\vec{x}$和参数向量$\vec{\theta}$，都有

$$f(\vec{x}|\vec{\theta})=g(\vec{T}(\vec{x})|\vec{\theta})h(\vec{x}). \tag{1}$$

- 推论：设 T 为 θ 的充分统计量，若存在一个可测函数 ϕ 和另一个统计量 S，s.t.$T=\phi(S)$，这 S 也为 θ 的充分统计量

完全统计量：

- 辅助统计量：分布不依赖于参数的统计量
- 完全统计量定义：对任意满足 $E_{\vec{\theta}}\phi(T(\vec{X}))\equiv 0,\forall\vec{\theta}\in\Theta$ 的函数 ϕ，都有 $\phi\equiv 0$
- 推论：对任意统计量 T，如果存在非平凡可测函数 V，s.t. V(T) 是辅助统计量，则 T 必不是完全统计量
- 完全统计量的判断：

Theorem (5.3)

[【0】定理2.8.1] 设简单样本$\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_n)$的总体是具有如下自然参数形式的概率密度函数的指数族

$$f(x|\overrightarrow{\theta}) = C(\overrightarrow{\theta}) \exp\left\{\sum_{i=1}^{k} \theta_i T_i(x)\right\} h(x),$$

其中$\overrightarrow{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_k) \in \Theta$. 如果参数空间$\Theta$作为$\mathbb{R}^k$的子集有内点，则统计量$\overrightarrow{T}(\overrightarrow{X}) = (\sum_{j=1}^{n} T_1(X_j), \cdots, \sum_{j=1}^{n} T_k(X_j))$是完全统计量。

- Basu 定理（重要）:

Theorem (5.4, Basu's Theorem)

[【0】定理2.8.2] 设随机样本$\overrightarrow{X}$取自服从统计模型$\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ 的总体，V和T是它的两个统计量。如果V是辅助统计量，而T是（有界）完全充分统计量，则V和T关于$\mathcal{P}$相互独立。

2 点估计

2.1 矩估计

- 就考试而言一般只用一阶二阶矩，三阶以上计算可能过于复杂
- 分母一定是 n 而不是 n-1

2.2 极大似然估计

- 若似然函数（即密度函数）不可导，要考虑从定义出发求 MLE

- 若可导，先求出对数似然，考虑一阶导为 0 的点，要验证二阶导矩阵在此处负定（一元情形即判断该点二阶导非正）

2.3 UMVUE

- 定义：（1）无偏，（2）方差最小
- 判断方法（1）：C-R 不等式：

  Fisher 信息量：$I(\theta)=E_\theta\{[\frac{\partial logf(X|\theta)}{\partial\theta}]^2\}$

  样本关于 θ 的 Fisher 信息量：$I_n(\theta)=E_\theta\{[\frac{\partial logf(\vec{X}|\theta)}{\partial\theta}]^2\}$

  若 $f(x|\theta)$ 满足:$\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta[\frac{\partial}{\partial\theta}logf(X|\theta)]=\int\frac{\partial}{\partial\theta}\{[\frac{\partial}{\partial\theta}logf(x|\theta)]f(x|\theta)\}dx$，则 $I(\theta)=-E_\theta[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}logf(X|\theta)]$

  C-R 不等式：在满足一系列条件以后（ppt 上定理 2.1），若有样本 $X=(X_1,...,X_n)$，则对于任意 $g(\theta)$ 的无偏估计 $g(\hat{X})$，有：

  $$Var_\theta(g(\hat{X}))\geq\frac{(g'(\theta))^2}{nI(\theta)}$$

  注：这部分的各种证明在教材 110 页基本上都能找到

- 判断方法（2）：零无偏估计法：

  R-B 引理：

Lemma (2.1, Rao-Blackwell Theorem, 简记R-B引理)

（【0】引理3.4.1，【1】定理7.3.17）设W是$\tau(\theta)$的任意一个无偏估计量，而T是关于θ的一个充分统计量，定义$\phi(T)=\mathbb{E}(W|T)$，则$\mathbb{E}_\theta\phi(T)=\mathbb{E}_\theta W=\tau(\theta)$，而且

$$Var_\theta[\phi(T)]\leq Var_\theta(W),\forall\theta\in\Theta.$$

即$\phi(T)$是比W更有效的$\tau(\theta)$的无偏估计量。

定理及推论：

Theorem (2.2)

（【0】定理3.4.1，【1】定理7.3.20）
设$\mathbb{E}_\theta(W) = \tau(\theta)$，$Var_\theta W < \infty$，则$W$是$\tau(\theta)$的$UMVUE$当且仅当$W$与0的所有无偏估计量不相关。

Corollary (2.4)

（【0】推论3.4.1） 设$T = T(\vec{X})$是θ的充分统计量，$h(T)$是$\tau(\theta)$的一个无偏估计，$Var(h(T)) < \infty$, $\forall\theta \in \Theta$。则$h(T)$ 是$\tau(\theta)$的$UMVUE$，当且仅当$h(T)$与任一零无偏估计$U(T)$都不相关。

- 判断方法（3）：充分完全统计量法 L-S 定理：

Theorem (2.3, Lehmann-Scheffè 定理，简记L-S定理)

（【0】定理3.4.2，【1】定理7.3.23） 设T是参数θ的充分完全统计量，而$\phi(T)$是任意一个仅基于T的估计量，且$\mathbb{E}_\theta\phi(T) = \tau(\theta)$，则$\phi(T)$是$\tau(\theta)$的$UMVUE$.

3 假设检验

3.1 似然比检验

- LRT 定义：$\lambda(\vec{x}) = \frac{sup_{\vec{\theta}\in\Theta_0}L(\vec{\theta}|\vec{x})}{sup_{\vec{\theta}\in\Theta}L(\vec{\theta}|\vec{x})}$
- 拒绝域 $\{\vec{x} : \lambda(\vec{x}) \le c\}$

3.2 错误概率和功效函数

- 第一类错误：原假设正确，但假设检验判定为拒绝原假设
- 第二类错误：原假设错误，但假设检验判定为接受原假设

- 功效函数：一个拒绝域为 R 的假设检验的功效函数为：

$$\beta(\vec{\theta}) = P_{\vec{\theta}}(\vec{X} \in R)$$

- 水平为 α 的检测：$sup_{\hat{\theta}\in\Theta_0}\beta(\vec{\theta}) \le \alpha$

3.3 正态总体参数的假设检验

表 5.2.1 单个正态总体均值的假设检验

	H_0	H_1	检验统计量及其分布	否定域
σ^2 已知	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$U = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$ $U\|\mu = \mu_0 \sim N(0,1)$	$\|U\| > u_{\alpha/2}$
	$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$U > u_\alpha$
	$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$U < -u_\alpha$
σ^2 未知	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$ $T\|\mu = \mu_0 \sim t_{n-1}$	$\|T\| > t_{n-1}(\alpha/2)$
	$\mu \leqslant \mu_0$	$\mu > \mu_0$		$T > t_{n-1}(\alpha)$
	$\mu \geqslant \mu_0$	$\mu < \mu_0$		$T < -t_{n-1}(\alpha)$

表 5.2.2 单个正态总体方差的假设检验

	H_0	H_1	检验统计量及其分布	否定域
μ 已知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi_\mu^2 = nS_\mu^2/\sigma_0^2$ $\chi_\mu^2\|\sigma_0^2 \sim \chi_n^2$	$nS_\mu^2/\sigma_0^2 < \chi_n^2(1-\alpha/2)$ 或 $nS_\mu^2/\sigma_0^2 > \chi_n^2(\alpha/2)$
	$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$nS_\mu^2/\sigma_0^2 > \chi_n^2(\alpha)$
	$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$nS_\mu^2/\sigma_0^2 < \chi_n^2(1-\alpha)$
μ 未知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ $\chi^2\|\sigma_0^2 \sim \chi_{n-1}^2$	$(n-1)S^2/\sigma_0^2 < \chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)$ 或 $(n-1)S^2/\sigma_0^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha/2)$
	$\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$		$(n-1)S^2/\sigma_0^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha)$
	$\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$		$(n-1)S^2/\sigma_0^2 < \chi_{n-1}^2(1-\alpha)$

表 5.2.3 两个正态总体均值差的假设检验

	H_0	H_1	检验统计量及其分布	否定域
σ_1^2 σ_2^2 已知	$\mu_2-\mu_1=\mu_0$	$\mu_2-\mu_1\neq\mu_0$	$U=\dfrac{\bar{Y}-\bar{X}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}$ $U\mid\mu_0\sim N(0,1)$	$\lvert U\rvert>u_{\alpha/2}$
	$\mu_2-\mu_1\leqslant\mu_0$	$\mu_2-\mu_1>\mu_0$		$U>u_\alpha$
	$\mu_2-\mu_1\geqslant\mu_0$	$\mu_2-\mu_1<\mu_0$		$U<-u_\alpha$
σ_1^2 σ_2^2 未知	$\mu_2-\mu_1=\mu_0$	$\mu_2-\mu_1\neq\mu_0$	$T_w=\dfrac{\bar{Y}-\bar{X}-\mu_0}{S_w}\sqrt{\dfrac{mn}{m+n}}$ $T_w\mid\mu_0\sim t_{n+m-2}$ $S_w^2=\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{n+m-2}$	$\lvert T_w\rvert>t_{n+m-2}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$
	$\mu_2-\mu_1\leqslant\mu_0$	$\mu_2-\mu_1>\mu_0$		$T_w>t_{n+m-2}(\alpha)$
	$\mu_2-\mu_1\geqslant\mu_0$	$\mu_2-\mu_1<\mu_0$		$T_w<-t_{n+m-2}(\alpha)$

表 5.2.4 两个正态总体方差比的假设检验

	H_0	H_1	检验统计量及其分布	否定域
μ_1 μ_2 已知	$\sigma_2^2=\sigma_1^2$	$\sigma_2^2\neq\sigma_1^2$	$F_*=S_{2*}^2/S_{1*}^2$ $F_*\mid_{\sigma_2^2=\sigma_1^2}\sim F_{n,m}$ $S_{1*}^2=\dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^m(X_i-\mu_1)^2$ $S_{2*}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n(Y_i-\mu_2)^2$	$F_*<F_{n,m}(1-\alpha/2)$ 或 $F_*>F_{n,m}(\alpha/2)$
	$\sigma_2^2\leqslant\sigma_1^2$	$\sigma_2^2>\sigma_1^2$		$F_*>F_{n,m}(\alpha)$
	$\sigma_2^2\geqslant\sigma_1^2$	$\sigma_2^2<\sigma_1^2$		$F_*<F_{n,m}(1-\alpha)$
μ_1 μ_2 未知	$\sigma_2^2=\sigma_1^2$	$\sigma_2^2\neq\sigma_1^2$	$F=S_2^2/S_1^2$ $F\mid_{\sigma_2^2=\sigma_1^2}\sim F_{n-1,m-1}$ $S_1^2=\dfrac{1}{m-1}\sum_{i=1}^m(X_i-\bar{X})^2$ $S_2^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n(Y_j-\bar{Y})^2$	$F<F_{n-1,m-1}(1-\alpha/2)$ 或 $F>F_{n-1,m-1}(\alpha/2)$
	$\sigma_2^2\leqslant\sigma_1^2$	$\sigma_2^2>\sigma_1^2$		$F>F_{n-1,m-1}(\alpha)$
	$\sigma_2^2\geqslant\sigma_1^2$	$\sigma_2^2<\sigma_1^2$		$F<F_{n-1,m-1}(1-\alpha)$

3.4 UMPT

- 记 ϕ 为水平为 α 的检验，若对于其他任何水平为 α 的检验 ϕ_1，有:

$$\beta_{\phi}(\theta) > \beta_{\phi_1}(\theta), \forall \theta \in \Theta_0^c$$

则 ϕ 为水平 α 的 UMPT

- 针对简单假设，使用 N-P 引理：

Theorem (3.1, Neyman-Pearson 引理，简记N-P引理)

（【0】定理5.4.1，【1】定理8.3.12） 设样本联合概率密度/质量函数为$f(\vec{x}|\theta)$，考虑检验问题：

$$\text{(I)} \qquad H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1,$$

如果一个检验对应的拒绝域R满足对于某个常数$k > 0$，

$$\left.\begin{array}{ll} \text{若} f(\vec{x}|\theta_1) > kf(\vec{x}|\theta_0), & \text{则} \vec{x} \in R \\ \text{若} f(\vec{x}|\theta_1) < kf(\vec{x}|\theta_0), & \text{则} \vec{x} \in R^c \end{array}\right\} \quad (3.1)$$

而且 $$\mathbb{P}_{\theta_0}(\vec{X} \in R) = \alpha \qquad (3.2)$$

则此检验是检验问题(I)的水平α的$UMPT$.

Corollary (3.1)

（【1】推论8.3.13） 考虑定理3.1中的假设检验问题，设$T(\vec{X})$是一个关于$\vec{\theta}$的充分统计量，$g(\vec{t}\,|\,\vec{\theta})$是$T$的概率密度/质量函数，则任何一个基于$T$的拒绝域$\widetilde{R}$的检验，如果满足对于某个常数$k > 0$，

$$\left.\begin{array}{ll} \text{若} g(\vec{t}\,|\,\vec{\theta}_1) > kg(\vec{t}\,|\,\vec{\theta}_0), & \text{则} \vec{t} \in \widetilde{R} \\ \text{若} g(\vec{t}\,|\,\vec{\theta}_1) < kg(\vec{t}\,|\,\vec{\theta}_0), & \text{则} \vec{t} \in \widetilde{R}^c \end{array}\right\} \quad (3.1')$$

而且 $$\mathbb{P}_{\vec{\theta}_0}(T \in \widetilde{R}) = \alpha \qquad (3.2')$$

则这个检验就是检验问题(I)的水平α的$UMPT$。

- 针对单边假设，使用 K-R 引理：

Theorem (3.2, Karlin-Rubin (简记K-R)定理)

（【1】定理8.3.17） 考虑检验问题：

$$\text{(II)} \qquad H_0 : \theta \le \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0.$$

设T是一个关于θ的充分统计量，并且T的概率密度/质量函数$g(t|\theta)$, $\theta \in \Theta$ 关于θ具有非降MLR，则对于任何t_0, 检验

$$当T > t_0时拒绝H_0$$

是一个水平为α的$UMPT$，其中$\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(T > t_0)$.

Corollary (3.2)

考虑检验问题$H_0 : \theta \ge \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta < \theta_0$。设$T$是一个关于$\theta$的充分统计量，并且$T$的概率密度/质量函数$g(t|\theta), \theta \in \Theta$ 关于θ具有非降MLR，则对于任何t_0, "当$T < t_0$时拒绝H_0"的检验是一个水平为α的$UMPT$，其中$\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(T < t_0)$.

注：若遇到 MLR 非增情况，则考虑 $-\theta$

4 区间估计

- 区间估计求法：（1）枢轴变量法，（2）反转一个检验统计量
- 单个和两个正态总体参数的区间估计（见上述表格及对应的区间估计）
- 最短枢轴区间（把几个例题和作业题弄会即可）

5 贝叶斯

5.1 贝叶斯估计

- 先验分布 $\pi(\theta)$
- 后验分布 $\pi(\theta|\vec{x}) = \frac{f(\vec{x}|\theta)\pi(\theta)}{\int_\Theta f(\vec{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta}$
  或更简便地，使用核方法
- 本门课中，贝叶斯估计视作后验分布的期望：$\hat{\theta} = E(\theta|\vec{X})$

5.2 贝叶斯检验

Definition (贝叶斯检验)

对于检验问题 $H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$,

1. 分别计算H_0和H_1为真/成立的后验概率

$$\alpha_0 = \mathbb{P}(H_0|\vec{x}) = \mathbb{P}(\theta \in H_0|\vec{x})$$
$$\alpha_1 = \mathbb{P}(H_1|\vec{x}) = \mathbb{P}(\theta \in H_1|\vec{x})$$

2. 设定检验法则：对于固定常数$b > 0$,
   当$\frac{\alpha_0}{\alpha_1} < b$时拒绝$H_0$，否则接受$H_0$.

为简化问题，在本课程中，我们约定取$b = 1$（参考【0】7.3.3(1)）。

6 补充

- 示性函数
- 查表
- 一些分布如指数、Poisson、几何分布的均值和方差
- 均方误差 MSE 定义，由两部分组成：Var 和 Bias

7 大致题型

- 三大分布 & 次序统计量
- 矩估计 & 极大似然估计
- 利用 C-R 不等式计算效率（类似作业题）
- UMVUE（零无偏/充分完全）
- 似然比检验
- 正态检验（用上述表格）
- UMPT
- 枢轴变量求预测区间
- 贝叶斯（估计 & 检验）