《近世代数》第五次习题课 (初稿)

刘助教 2023.4.22

问题 1: 部分矩阵群的有限子群的结构.

$Case1$:$SO_2(\mathbb{R})$ 的有限 (离散) 子群为循环群.

由于 $SO_2(\mathbb{R})$ 同构于 S^1, 从而考虑 S^1 的离散子群 H. 不妨设 e^{ia_1} 与 e^{ia_2} 所夹的弧度最小, 从而 $e^{i(a_1-a_2)}\in H$, 下证其生成了 H. 若不然存在点 e^{ib_1}, e^{ib_2} 所夹弧度不为 a_1-a_2 的倍数, 则由欧几里得除法知存在两个点其所夹弧度小于 $|a_1-a_2|$, 矛盾.

$Case2$:$O_2(\mathbb{R})$ 的有限子群为循环群或二面体群.

假设 G 为 $O_2(\mathbb{R})$ 的有限子群, 若 $G\subset SO_2(\mathbb{R})$, 则由$Case1$知其为循环群. 若不然令 $H=G\cap SO_2(\mathbb{R})$, 则 H 为 G 的指数为 2 的循环子群, 从而正规. 取 H 的生成元 A 以及 $B\in G-H$. 由于 B 为反射, 从而 $B^2=I$. 若 $A=I$, 则 G 为 2 阶循环群. 若不然, 则由 $A^n=I, B^2=I, BA=A^{-1}B$ 知其同构于 D_n.

$Case3$:$GL_2(\mathbb{Z})$ 的有限子群.

对于 $\mathbb{R}^2$ 上的任意内积 $<,>_i$, 考虑 $GL_2(\mathbb{R})$ 在其上的作用:$g<w,v>_i=<gw,gv>_i$, 其中 w,v 为任意向量. 若 G 为 $GL_2(\mathbb{R})$ 的有限子群, 定义 $<w,v>_G=\sum_{g\in G}\frac{g<w,v>}{|G|}$, 其中 $<,>$ 为标准内积.

(1) 说明 $<,>_G$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的内积且存在 $h\in GL_2(\mathbb{R})$ 使得 $<w,v>_G=h<w,v>$.(提示: 欧式空间中的任意内积都有到标准内积的保距同构)

(2) 令 S, S_G 分别为 $<,>, <,>_G$ 的稳定子群, 说明存在 $h\in GL_2(\mathbb{R})$ 使得 $S_G=hSh^{-1}$.

(3) 证明 $\forall g\in G$ 都有 $g<w,v>_G=<w,v>_G$, 从而 g 是关于内积 $<,>_G$ 的正交矩阵.

(4) 利用 (2), (3) 说明存在 $h\in GL_2(\mathbb{R})$ 使得 $hGh^{-1}\subseteq O_2(\mathbb{R})$.

(5) 证明 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的有限子群为循环群.(提示: 利用 (5) 以及第三次作业选做题 8)

(6) 说明哪些 D_n 可以作为 $GL_2(\mathbb{Z})$ 的子群.

证明:(1) 取 $<,>_G$ 的正交基 $\{E_1,E_2\}$, 对于 $v=v_1E_1+v_2E_2$, 定义线性映射 $h(v)=v_1e_1+v_2e_2$, 其中 $\{e_1,e_2\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的标准基. 此时 $<v,w>_G=<v_1E_1+v_2E_2, w_1E_1+w_2E_2>_G=v_1w_1+v_2w_2=<v_1e_1+v_2e_2, w_1e_1+w_2e_2>=h<v,w>$.

(2) 由 (1) 易知,(3) 显然.

(4) 由 (3) 知 $G\subset S_G$, 从而由 (2) 知 $hGh^{-1}\subseteq O_2(\mathbb{R})$.

(5) 由 (4) 知 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的有限子群 G 可以共轭到 $SO_2(\mathbb{R})$ 的有限子群, 从而由$Case1$知是循环群.

(6) 由第二次习题课问题 4 知 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的有限子群为 $1,2,3,4,6$ 阶循环群. 从而由 (4) 以及$Case2$知可能的二面体群为 D_1, D_2, D_3, D_4, D_6.

$Case4$:$SO_3(\mathbb{R})$ 的有限子群为循环群, 二面体群以及正多面体对称群. 证明参考 *M.A.Armstrong* 的 *Groups and Symmetry*. 第一次习题课讲义证明了 $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$, 而 *Mckay Correspondence* 给出了 $SU(2)$ 有限子群与代数几何, 导出范畴, 李代数等等论题的联系, 参见 *Joris van Opdam* 的 *Platonic solids, binary polyhedral groups, Klein singularities and Lie algebras of type* A, D, E.

问题 2: 求 D_n 的共轭类, 正规子群以及中心.
当 n 为奇数时, 共轭类为 $\{e\}, \{a^i, a^{n-i}\}_{1 \le i \le \frac{n-1}{2}}, \{b, ba, \cdots, ba^{n-1}\}$. 相应的非平凡正规子群为 $< a^k > (k|2n)$, 中心为 $\{e\}$.
当 n 为偶数时, 共轭类为 $\{e\}, \{a^{\frac{n}{2}}\}, \{a^i, a^{n-i}\}_{1 \le i < \frac{n}{2}}, \{b, ba^2, \cdots, ba^{n-2}\}, \{ba, ba^3, \cdots, ba^{n-1}\}$.
非平凡正规子群为 $< a^k > (k|2n), \{e, a^2, \cdots, a^{n-2}, b, ba^2, \cdots, ba^{n-2}\}, \{e, a^2, \cdots, a^{n-2}, b, ba^3, \cdots, ba^{n-1}\}$
中心为 $\{e, a^{\frac{n}{2}}\}$.

问题 3: 令 G 为 S_{999} 的阶为 1111 的子群, 证明存在 $i \in \{1, \cdots, 999\}$ 使得对任意 $\sigma \in G$ 都有 $\sigma(i) = i$.
由于 $1111 = 11 \times 101$, 从而为循环群且生成元 σ 的型为 $1^x 11^y 101^z$ 其中 $x + 11y + 101z = 999$. 若 $x > 0$, 则显然成立. 若不然, 则有 $11y + 101z = 999$, 两边模 11 便得 $z \equiv 10 \ (mod\ 11)$. 由于 11 不整除 999, 从而 $z \ge 10$, 故 $11y + 101z \ge 1010 > 999$，矛盾.

问题 4:polya 计数
to be continued.