《运筹学讲义》

陈士祥，杨周旺

中国科学技术大学
数学科学学院

2023 年 9 月

参考资料

- A. Ravindran, D. Phillips, J. Solberg, "Operations Research: Principles and Practice". 2nd Ed. John Wiley, 1987.
- Hamdy A. Taha, "Operations Research: An Introduction". 8th Ed. Pearson Prentice Hall, 2007.
- Jorge Nocedal, Stephen J. Wright, "Numerical Optimization". Second Edition, Springer, 2006.
- Frederick S. Hillier, "Introduction to Operations Research". McGraw-Hill Education, 2012.
- Nesterov, Yurii. Introductory lectures on convex optimization: A basic course. Vol. 87. Springer Science & Business Media, 2003.
- ...

课程考核

(1) 课堂测试 (10%)

(2) 课后习题 (20%)，共 5 次，需要在布置作业后 3 周内提交

(3) 课程作业 (20%)，共 2 次。要求：实现一个算法代码

(4) 期末考试 (50%)

我的联系方式：shxchen@ustc.edu.cn。答疑时间：每周三下午 4 点-5 点，办公室管理学院 1307，请通过邮件预约。

助教：白巨豪（bjh123@mail.ustc.edu.cn）、周子盛（zzs935@mail.ustc.edu.cn）、张景浩（jinghaozhang6@mail.ustc.edu.cn）

Outline

Outline

Outline

Outline

Outline

Outline

Outline

Outline

学科起源

运筹学 (Operations Research, OR) 是从二十世纪三四十年代（即二战期间）发展起来的一门应用性很强的学科。它的研究对象是人类对各种资源的运用及筹划活动，如战争、后勤、生产规划、经营管理、资本运作、工程设计等。研究内容就是资源筹划活动中各种问题的模型化及其数学方法。

学科分支

Mathematical programming

Network optimization

Decision analysis

Queuing theory

Game theory

Industrial engineering

Logistics

Supply chain management

Financial engineering

...

定性分析

解决实际问题的第一步往往是定性分析，具体的说

- 要有一个初步概念，即主要的决策是什么?
- 在选取决策方案时，有效性的度量是什么?
- 在对各方案进行比较时，这些度量之间可能要做哪些权衡?

  .....

定量分析

定量分析对管理决策过程有着重要意义...

定量分析方法的标准步骤

- 表达问题 (Definition of the problem)
- 建立模型 (Construction of the model)
- 分析求解 (Solution of the model)
- 检验和改进 (Validation of the model)
- 解的实施 (Implementation of the solution)

表达问题

表达问题：列出问题的各种要素，它们包括一些可控的变量（或称决策变量），不可控变量（参数），各变量的约束条件以及为确定最佳解决方案拟采用的目标度量。

建立模型

建立模型：即把问题中的可控变量，参数，约束及目标的关系用一定的数学模型刻画出来。

分析求解

分析求解：分析模型并用各种数学方法和手段来求解模型，进而确定解对模型的技术条件的灵敏度。

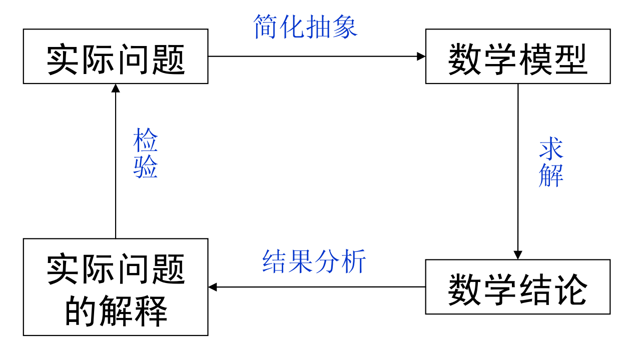
检验和改进

检验和改进：将模型的解应用到实际问题中，检验解的合理性和有效性，可能产生的问题和修改模型。

解的实施

解的实施：模型的解应用于实际问题，并最终解决实际问题。

建模过程



建模的重要性

建立模型：实际问题 $\longrightarrow$ 反映实际问题的数学模型（如：微分方程模型，统计模型，最优化模型等）。

各种优化模型及其求解的数学方法构成了运筹学的大部分内容，这些代表性模型可供选择但并不能完全适用于所有实际问题。

一般的运筹学参考书不会着重叙述建立模型的过程，这并不是说建模不重要；相反，建模在任何时候任何场合都是极其重要的。

最优化

在很多实际应用问题中，从数学上看都是非适定的 (ill-posed), 即解不唯一。对于这样的实际问题，人们往往通过制定相应的目标准则，然后从众多的解中选出在一定条件下最好的解。

这些正是最优化理论与方法所研究的内容，本节对最优化的基本概念作一些简要的介绍，并给出最优化建模方法的相关知识。

概述

最优化讨论的是为找出实际问题的最优解决策略而采取的模型化及方法，其过程是：

- 先把待解决的问题用最优化形式描述为在给定的约束条件下找出使某个目标函数达到最大（小）的解；
- 然后再采用数学上严密的算法来求解。

概述

在这里我们强调最优化方法作为数学工具在现实中被广泛应用的事实，大多数有代表性的最优化算法都已有程序库和软件包。但是，有效利用这些成果是以有待解决的问题已被模型化成最优化问题的形式为前提的，而这一过程并非简单。

这个模型化的过程要求：在收集客观数据的同时要有敏锐的洞察力和综合能力；兼蓄有针对性的领域知识和技能。

应用

最优化方法在生产规划、经济管理、工业工程、交通运输、国防等重要领域中有广泛的应用，并已受到政府部门、科研机构和产业界的高度重视。

例如：选址问题，是运筹学和计算几何的一个交叉分支。

选址问题关注的是设施的最佳位置以减少诸多社会成本（如交通、时间等），同时要考虑类似“避免扰民或居民区附近放置危险物品”等因素。

应用

很多机器学习任务本质上是（可转化为）最优化模型：

- Supervised learning (Regression, Classification. SVM)
- Unsupervised learning (Clustering, K-means, PCA)
- Deep learning
- Reinforcement learning
- Collaborative filtering
- Nonparametric Bayesian inference
- Social activity modeling for networks
- ......

"Optimization lies at the heart of machine learning."

应用

很多机器学习任务本质上是（可转化为）最优化模型：

- Supervised learning (Regression, Classification. SVM)
- Unsupervised learning (Clustering, K-means, PCA)
- Deep learning
- Reinforcement learning
- Collaborative filtering
- Nonparametric Bayesian inference
- Social activity modeling for networks
- ......

"Optimization lies at the heart of machine learning."

数学描述

最优化 (optimization) 一般是指在某种条件下作出最好的决策，或者是从众多的方案中选出最好的。这种问题经常用下面的数学模型描述：

> 在给定的约束条件 *(constraint)* 下，找出决策变量 *(decision variable)* 的一个值，使得被称为目标函数 *(objective function)* 的表达愿望尺度的函数值达到最小或最大。

最优化模型

一般说来决策变量有多个，因此用 n 维向量 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ 来表示，于是把问题写成如下形式

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in S \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

在此，目标函数 f 是定义在包含 S 的适当集合上的实值函数。进一步，S 是该问题变量 $\mathbf{x}$ 的可取值之集合，称为问题的可行域 (feasible region).

最优化问题的分类

— 如果可行域 $S=\mathbb{R}^n$, 则称为无约束最优化问题:

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \tag{2}$$

— 带约束最优化问题通常可写为:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & c_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i \in \mathcal{E}, \\ & c_i(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{3}$$

这里 $c_i(\mathbf{x})$ 是约束函数，$\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{I}$ 分别是等式约束的指标集和不等式约束的指标集。

最优化问题的分类

— 当目标函数和约束函数均为线性函数时，问题称为线性规划 (Linear Programming)；

— 当目标函数与约束函数中至少有一个是变量 x 的非线性函数时，问题称为非线性规划 (Nonlinear Programming)。

— 此外，根据决策变量、目标函数和要求的不同，最优化还被分为整数规划、动态规划、网络规划、非光滑规划、随机规划、多目标规划等。

最优化问题的解

满足约束条件 $\mathbf{x} \in S$ 的 $\mathbf{x}$ 称为问题的可行解 (feasible solution), 如果可行解 $\mathbf{x}^* \in S$ 进一步满足

$$f(\mathbf{x}^*) \leqslant f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in S. \tag{4}$$

则称 $\mathbf{x}^*$ 为问题(1)的全局最优解 (global optimal solution). 另外，在包含可行解 $\mathbf{x}^* \in S$ 的适当邻域 $U(\mathbf{x}^*)$ 里，成立

$$f(\mathbf{x}^*) \leqslant f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in S \cap U(\mathbf{x}^*). \tag{5}$$

此时称 $\mathbf{x}^*$ 为问题(1)的局部最优解 (local optimal solution).

不少问题的目标函数或约束条件可能很复杂，要找出全局最优解非常困难，这时我们的目标就会是求出局部最优解。

最优性条件

最优性条件：问题的最优解所满足的必要或者充分条件。它为最优化问题求解算法的设计、分析提供必不可少的理论基础。

无约束问题的极值条件

命题 I. 一阶必要条件：设目标函数 $f(\mathbf{x})$ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处可微，若 $\bar{\mathbf{x}}$ 是局部极小点，则 $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

命题 II. 二阶必要条件：设目标函数 $f(\mathbf{x})$ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处二次可微，若 $\bar{\mathbf{x}}$ 是局部极小点，则 $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, 并且 Hesse 矩阵 $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}}) \geq 0$.

命题 III. 二阶充分条件：设目标函数 $f(\mathbf{x})$ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处二次可微，若 $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ 且 $\nabla^2 f(\bar{\mathbf{x}}) > 0$, 则 $\bar{\mathbf{x}}$ 是局部极小点。

命题 IV. 充要条件：设 $f(\mathbf{x})$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的可微凸函数，则 $\bar{\mathbf{x}}$ 是整体极小点（全局最优解）的充要条件是 $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

证明

1. 命题 I. 对于 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, 由于 $f(x)$ 可微，$\exists U$ 为 $\bar{x}$ 的邻域，我们有 $y \in U$,
$$f(y) \geq f(\bar{x}) \text{ 且} f(y) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^\top (y - x) + o(||y - x||_2).$$
假设 $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, 令 $y = x - t\frac{\nabla f(\bar{x})}{||\nabla f(\bar{x})||_2}$, t 充分小。则 $y \in U$, 且
$$f(y) = f(\bar{x}) - t||\nabla f(\bar{x})||_2 + o(t).$$
这与 $f(\bar{x}) \leq f(y), \forall y \in U$ 矛盾。
2. 命题 II. 假设 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 非半正定，设 v 是 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 的负特征根方向，即 $v^\top \nabla^2 f(\bar{x}) v = \lambda$, $\lambda < 0$. 因为 $f(x)$ 二次可微，$\exists U$ 为 $\bar{x}$ 的邻域，我们有 $y \in U$,
$$f(y) \geq f(\bar{x}) \text{ 且} f(y) = f(\bar{x}) + (y - x)^\top \nabla^2 f(\bar{x})(y - x) + o(||y - x||_2^2).$$
令 $y = x + tv$, t 充分小。则 $y \in U$, 且
$$f(y) = f(\bar{x}) - t^2\lambda + o(t^2).$$
这与 $f(\bar{x}) \leq f(y), \forall y \in U$ 矛盾。
3. 命题 III. (习题 1.1)

凸函数

凸函数的定义
$f(x)$ 为 R^n 上的实值函数，我们称 $f(x)$ 为凸函数，如果对于任意 $x, y \in \mathrm{R}^n$ 和 $0 \leq t \leq 1$, 有如下不等式成立

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

证明命题 IV 必要性已由命题 I 得到。下面证明充分性,

- 我们只需要证明如下不等式成立, 对于 $\forall x, y$,
  $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y - x)$
  由凸函数定义可知, 对 $\forall t \in [0, 1]$,
  $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$,
  $t(f(y) - f(x)) \geq f((1-t)x + ty) - f(x) = \nabla f(x)^\top (t(y-x)) + o(t\|y-x\|_2)$.
  两边同时除以 t, 令 $t \to 0^+$，得证。

凸函数

此外，对于凸函数我们还有如下结论。

定理：凸函数的局部最小值点为全局最小值点。

设 $\bar{x}$ 为其邻域 U 内的最小值点，假设 $\bar{x}$ 非全局最小值点，即存在 y s.t. $f(y) < f(x)$. 由于 $f(x)$ 的凸性，对于 $0 \leq t \leq 1$，我们有 $f((1-t)\bar{x} + ty) \leq (1-t)f(\bar{x}) + tf(y) < f(\bar{x})$. 当 t 充分小时，$(1-t)\bar{x} + ty \in U$. 矛盾。

如何判断函数是否为凸函数，除了使用定义，若函数满足下列任一条件，则也为凸函数：

- 若 $f(x)$ 可微，且对于 $\forall x, y$, 满足 $f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^\top (y-x)$
- 若 $f(x)$ 二次可微，任意一点的 Hessian 矩阵满足 $\nabla^2 f(x) \geq 0$(半正定).

如果函数 $f(x)$ 不是凸函数，则称其为非凸函数，对应的优化问题成为非凸问题。大部分问题均为非凸问题。

约束问题的最优性条件

Karush-Kuhn-Tucker(KKT condition) 必要条件：设 $\bar{\mathbf{x}}$ 为约束问题(3)的**可行点**，
定义 Lagrange 函数 $L(\mathbf{x},\lambda,\mu)=f(\mathbf{x})-\sum_{i\in\mathcal{I}}\lambda_i c_i(\mathbf{x})-\sum_{i\in\mathcal{E}}\mu_i c_i(\mathbf{x})$. 若优化问题满足**某种约束规范性条件**，如果 $\bar{\mathbf{x}}$ 为问题局部最优解，则存在乘子向量 $\bar{\lambda}\geq 0,\bar{\mu}$ 使得 $\nabla_{\mathbf{x}}L(\bar{\mathbf{x}},\bar{\lambda},\bar{\mu})=0$.

此时，一阶必要条件可以表达为

$$
(\mathrm{KKT})\begin{cases}
\nabla_{\mathbf{x}}L(\mathbf{x},\lambda,\mu)=0, & \text{(稳定条件)}\\
c_i(\mathbf{x})=0, i\in\mathcal{E}, & \text{(原问题可行)}\\
c_i(\mathbf{x})\geq 0, i\in\mathcal{I}, & \text{(原问题可行)}\\
\lambda_i c_i(\mathbf{x})=0, i\in\mathcal{I}, & \text{(松弛互补)}\\
\lambda_i\geq 0, i\in\mathcal{I}. & \text{(对偶可行)}
\end{cases}\tag{6}
$$

约束规范性条件 1：线性独立约束规范条件 Linear independence constraint qualification (LICQ)

记 $\mathcal{I}_e = \{i \in \mathcal{I} \mid c_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$, f 和 $c_i(i \in \mathcal{I}_e)$ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 可微，
$c_i(i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_e)$ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 连续，$c_i(i \in \mathcal{E})$ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 连续可微，
向量集 $\{\nabla c_i(\bar{\mathbf{x}}) \mid i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}_e\}$ 线性无关。

约束规范性条件 2：Slater 条件

目标函数 $f(x)$ 为凸函数，等式约束函数 $c_i(x), i \in \mathcal{E}$ 是仿射函数，不等式约束函数 $c_i(x), i \in \mathcal{I}$ 为凸函数，并且存在一个可行点 x^* 满足 $c_i(x^*) > 0, i \in \mathcal{I}$.

约束规范条件 3：当等式约束和不等式约束函数均为线性函数时，无需验证规范条件。

...

最优性条件

KKT 条件为充分条件：Slater 条件

目标函数 $f(x)$ 为凸函数，等式约束函数 $c_i(x), i \in \mathcal{E}$ 是仿射函数（形如 $c_i(x) = a_i^\top x - b_i$），不等式约束函数 $c_i(x), i \in \mathcal{I}$ 为凸函数，并且并且存在一个可行点 x^* 满足 $c_i(x^*) > 0, i \in \mathcal{I}$.

习题 1.2 说明如下问题是凸问题，但是 LICQ 不满足，KKT 条件不成立。

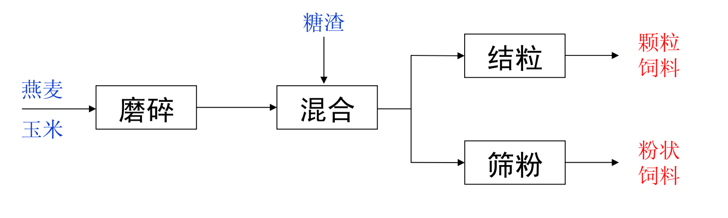
$$
\begin{aligned}
\min_{x,y} \ & y \\
\text{s.t.} \ & (x-1)^2 + y^2 = 1 \\
& (x+1)^2 + y^2 = 1.
\end{aligned}
$$

线性规划模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & A_e\mathbf{x} = \mathbf{b}_e \\ & A\mathbf{x} \le \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{7}$$

例子：饲料配制

某饲料公司要生产两种类型的动物饲料：粉状饲料和颗粒饲料。生产这些饲料所需的原料由燕麦、玉米和糖渣组成。首先需要将这些原料（除糖渣外）磨碎，然后将所有原料混合形成饲料半成品。在最后一个生产工序中，将半成品制成颗粒状或粉末状，从而得到最终的饲料产品。



例子：饲料配制

饲料产品都要满足一些营养成分需求。表 1 列出了各种原料的蛋白质，脂肪和纤维含量百分比，以及最终产品的相应含量要求。

Table: 营养成分含量百分比

原料	蛋白质	脂肪	纤维素
燕麦	13.6	7.1	7.0
玉米	4.1	2.4	3.7
糖渣	5.0	0.3	25.0
含量要求	$>= 9.5$	$>= 2.0$	$<= 6.0$

各种原料的可用量也有限制。表 2 给出了各种原料的可用量以及对应的价格。

Table: 原料可用量与价格

原料	可用量（千克）	价格（元/千克）
燕麦	11900	1.3
玉米	23500	1.7
糖渣	750	1.2

例子：饲料配制

表 3 列出了各道工序的成本。

Table: 加工成本

磨碎	混合	结粒	筛粉
2.5	0.5	4.2	1.7

如果每天需求量为 9 吨颗粒饲料，12 吨粉状饲料，则各种原料应分别使用多少进行混合才能使得总成本最低?

模型表达

在这里，燕麦、玉米、糖渣的使用量为决策变量，并分别设为 x_1 千克，x_2 千克，x_3 千克。

饲料配制最优化模型：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & (1.3x_1 + 1.7x_2 + 1.2x_3) + 2.5(x_1 + x_2) + 0.5(x_1 + x_2 + x_3) \\
\text{s.t.} \quad & 13.6x_1 + 4.1x_2 + 5.0x_3 \geq 9.5(x_1 + x_2 + x_3), \\
& 7.1x_1 + 2.4x_2 + 0.3x_3 \geq 2.0(x_1 + x_2 + x_3), \\
& 7.0x_1 + 3.7x_2 + 25.0x_3 \leq 6.0(x_1 + x_2 + x_3), \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 9000 + 12000, \\
& 0 \leq x_1 \leq 11900, \\
& 0 \leq x_2 \leq 23500, \\
& 0 \leq x_3 \leq 750.
\end{aligned} \tag{8}
$$

linprog

Solve a linear programming problem

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & f^T x \\ \text{s.t.} \quad & A\,x \le b \\ & A_{eq}\,x = b_{eq} \\ & lb \le x \le ub \end{aligned} \tag{9}$$

where f, x, b, b_{eq}, lb, and ub are vectors and A and A_{eq} are matrices.

[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0,options)

$$f = [4.3; 4.7; 1.7];$$
$$A = [-4.1, 5.4, 4.5; -5.1, -0.4, 1.7; 1, -2.3, 19; -1, -1, -1];$$
$$b = [0; 0; 0; -21000];$$
$$lb = zeros(3, 1);$$
$$ub = [11900; 23500; 750];$$

[x,fval,exitflag,output,lambda] = linprog(f,A,b,[],[],lb,ub);

模型结果

生产出需求的 9 吨颗粒饲料和 12 吨粉状饲料，最低成本为 150868 元。详细的结果如下所示：

Table: 饲料配制的最佳方案

原料	燕麦（千克）	玉米（千克）	糖渣（千克）
使用量	11897	8678.9	424.47

例子：生产计划

某农场在现有土地上种植不同农作物的生产计划安排

定性分析：合理分配土地资源，在约束条件及一定假设下获得好收成。

Table: 农作物生产相关数据

农作物	土地	用工	粪肥	化肥	利润
A	1	450	35	350	1500
B	1	600	25	400	1200
C	1	900	30	300	1300
总资源	100	63000	3300	33000	

例子：生产计划

分析并建立模型
设农作物 A, B, C 的种植面积分别为 x_1, x_2, x_3 公顷，则总利润是

$$1500x_1 + 1200x_2 + 1800x_3$$

资源约束：
土地限制 $x_1 + x_2 + x_3 \leq 100,$
劳力限制 $450x_1 + 600x_2 + 900x_3 \leq 63000,$
粪肥限制 $35x_1 + 25x_2 + 30x_3 \leq 3300,$
化肥限制 $350x_1 + 400x_2 + 300x_3 \leq 33000,$
此外，实际种植面积的非负性限制，即 $x_1, x_2, x_3 \geq 0.$

例子：生产计划

综上所述，得到农业生产计划安排问题的数学模型（线性规划）为：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 1500x_1 + 1200x_2 + 1800x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 100, \\
& 450x_1 + 600x_2 + 900x_3 \leq 63000, \\
& 35x_1 + 25x_2 + 30x_3 \leq 3300, \\
& 350x_1 + 400x_2 + 300x_3 \leq 33000, \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

线性规划的一般形式：

$$
\begin{aligned}
\min(\max) \quad & z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leq (=, \geq) b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leq (=, \geq) b_m
\end{aligned}
\tag{11}
$$

线性规划标准型

线性规划问题总可以写成如下标准形式：

$$
\text{(LP)} \qquad \begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \cdots, m \\ & x_j \geq 0, j = 1, \cdots, n. \end{aligned} \tag{12}
$$

或者用矩阵表示为：

$$
\text{(LP)} \qquad \begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{13}
$$

其中矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{c}$ 是 n 维列向量，$\mathbf{b}$ 是 m 维列向量。为了后面单纯形方法的计算需要，我们还可以假设 $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

标准化步骤

可能的标准化步骤有:

- 目标函数 $\max f(\mathbf{x}) \longrightarrow \min -f(\mathbf{x})$
- 不等式约束的等式化（引入松弛变量或者剩余变量）
- 自由变量的非负化 $x_j = x_j^{'} - x_j^{''}, x_j^{'}, x_j^{''} \geq 0$
- 变量上下界的处理

结论 1：在线性规划中，约束条件均为线性等式及线性不等式，所以可行域 S 是凸集。

极点：设 $\mathcal{S}$ 是非空凸集，若 $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}$, $\lambda \in (0,1)$, $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in \mathcal{S}$, 必有 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)}$, 则称 $\mathbf{x}$ 是凸集 $\mathcal{S}$ 的极点。

结论 2：对于有界闭凸集，任何一点都能表示成极点的凸组合。

结论 2 对无界集并不成立，为此需引入极方向的概念。

设 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ 是闭凸集（可能无界），$\mathbf{d}$ 为非零向量。如果对 S 中的每个 $\mathbf{x}$ 都有射线 $\{\mathbf{x}+\lambda\mathbf{d} \mid \lambda \geq 0\} \subset \mathcal{S}$, 则称向量 $\mathbf{d}$ 为 $\mathcal{S}$ 的方向。

又设 $\mathbf{d}^{(1)}$ 和 $\mathbf{d}^{(2)}$ 是 $\mathcal{S}$ 的两个方向，若对任何正数 λ 有 $\mathbf{d}^{(1)} \neq \lambda\mathbf{d}^{(2)}$, 则称 $\mathbf{d}^{(1)}$ 和 $\mathbf{d}^{(2)}$ 是两个不同的方向。

极方向：若 $\mathcal{S}$ 的方向 $\mathbf{d}$ 不能表示成该集合的两个不同方向的正的线性组合，则称 $\mathbf{d}$ 为 $\mathcal{S}$ 的极方向