微分方程

一般的非齐次方程边值问题

内容:

1. 三类典型问题

- 有界弦的受迫振动问题
- 有限长杆的有源热传导问题
- 二维泊松方程的边值问题

2. 三种主要方法

- Fourier展开法(特征函数展开法)
- 特解法
- 齐次化原理法(Duhamel原理，冲量原理)

3. 方法比较

一、有界弦的受迫振动问题

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0<x<l, t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = g_1(t),\ u|_{x=l} = g_2(t) \end{cases} \quad \text{(u)}$$

$$u(x,t) = ?$$

思路：1. 先边界条件齐次化，即引入辅助函数

$$h(x,t) = \begin{cases} A(t)x + B(t) & \text{(对一、三类边界，线性拟合)} \\ A(t)x^2 + B(t)x & \text{(对二类边界，二次拟合)} \end{cases}$$

2. 再利用叠加原理求解 $v(x,t) = u(x,t) - h(x,t)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u(x,t) = h(x,t) + v(x,t)}$$

第一类边界下具体函数式:

辅助函数 $h(x,t)=\dfrac{g_2(t)-g_1(t)}{l}x+g_1(t)$

则函数 $v(x,t)=u(x,t)-h(x,t)$ 满足

$$\begin{cases} v_{tt}=c^2v_{xx}+\tilde{f}(x,t),\ 0<x<l,t>0 \\ v|_{t=0}=\tilde{\varphi}(x),\ v_t|_{t=0}=\tilde{\psi}(x) \\ v|_{x=0}=0,\ v|_{x=l}=0 \end{cases} \qquad \text{(v)}$$

其中 $\tilde{f}(x,t)=f(x,t)-h_{tt}(x,t),$

$$\tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)-h\big|_{t=0},\ \tilde{\psi}(x)=\psi(x)-h_t\big|_{t=0}$$

用叠加原理分解问题:

由叠加原理，(v)的解 $v(x,t)=w(x,t)+p(x,t)$,

$w(t,x)$ 和 $p(t,x)$ 分别满足如下定解问题：

$$\begin{cases} w_{tt}=c^2 w_{xx}+\tilde{f}(x,t),\ 0<x<l, t>0 \\ w\|_{t=0}=0,\ w_t\|_{t=0}=0 \\ w\|_{x=0}=0,\ w\|_{x=l}=0 \end{cases} \qquad \text{(w)}$$

$$\begin{cases} p_{tt}=c^2 p_{xx},\ 0<x<l, t>0 \\ p\|_{t=0}=\tilde{\varphi}(x),\ p_t\|_{t=0}=\tilde{\psi}(x) \\ p\|_{x=0}=0,\ p\|_{x=l}=0 \end{cases} \qquad \text{(p)}$$

问题(p)描述弦自由振动，其解为

$$\boxed{p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{cn\pi}{l}t+D_n\sin\frac{cn\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x}$$

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\tilde{\varphi}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad D_n=\frac{2}{cn\pi}\int_0^l\tilde{\psi}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

未知！

为求原问题的解 $u(x,t)=h(x,t)+w(x,t)+p(x,t)$

只须考察纯受迫振动问题(w)，主要方法有三种：

- Fourier展开法(特征函数展开法)：通用方法
- 特解法：特殊方法
- 齐次化原理法(Duhamel原理，冲量原理)：经典方法

Fourier展开法(特征函数展开法):

下面讨论齐次初始与边界条件下纯受迫振动问题：

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + \tilde{f}(x,t), \ 0<x<l, t>0 \\ w|_{t=0} = 0, \ w_t|_{t=0} = 0 \\ w|_{x=0} = 0, \ w|_{x=l} = 0 \end{cases} \qquad (w)$$

1. 求出与(w)相应的齐次方程在齐次边界下的特征值和特征函数:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \quad (n \geq 1)$$

2. 将w及$\tilde{f}$按完备正交特征函数系$\{X_n(x)\}$作广义Fourier展开

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \ \tilde{f}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

其中 $\tilde{f}_n(t)=\dfrac{2}{l}\int_0^l \tilde{f}(x,t)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx$, 代入(w)并利用正交性得

$$\begin{cases} T_n''(t)+(\dfrac{cn\pi}{l})^2 T_n(t)=\tilde{f}_n(t) \\ T_n(0)=0, T_n'(0)=0 \end{cases}$$

3. 利用常数变易法求出上述常微分方程初值问题的解

$$T_n(t)=\frac{l}{cn\pi}\int_0^t \tilde{f}_n(\tau)\sin\frac{cn\pi(t-\tau)}{l}d\tau$$

$$\Rightarrow\ w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{cn\pi}\int_0^t \tilde{f}_n(\tau)\sin\frac{cn\pi(t-\tau)}{l}d\tau\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{u(x,t)=h(x,t)+w(x,t)+p(x,t)}$$

两点注记：

- Fourier展开法同样适用于求解问题(v)，此时

$$\begin{cases} T_n''(t)+(\dfrac{cn\pi}{l})^2 T_n(t)=\tilde{f}_n(t) \\ T_n(0)=\tilde{\varphi}_n, T_n'(0)=\tilde{\psi}_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_n(t)=\tilde{\varphi}_n\cos\frac{cn\pi t}{l}+\frac{l}{cn\pi}\tilde{\psi}_n\sin\frac{cn\pi t}{l}$$

$$+\frac{l}{cn\pi}\int_0^t \tilde{f}_n(\tau)\sin\frac{cn\pi(t-\tau)}{l}d\tau$$

$$\Rightarrow v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}\Rightarrow u(x,t)=h(x,t)+v(x,t)$$

- 边界条件的齐次化，一般将导致方程的非齐次化，故Fourier展开法具有普适性

特解法:

由叠加原理, 非齐次方程通解=齐次方程通解+非齐次方程特解

- 对一般非齐次定解问题，先边界齐次化再用特解法较好
- 对一般非齐次项，很难找到特解。但在某些特殊情况下能找到。例如，若问题(v)中$\tilde{f}(x,t)=F(x)$时取$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$满足常微分方程

$$\begin{cases} c^2 y''(x)+F(x)=0,\ 0<x<l \\ y(0)=y(l)=0 \end{cases}$$

则$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$满足

$$\begin{cases} V_{tt}=c^2V_{xx}, 0<x<l, t>0 \\ V\big|_{t=0}=\tilde{\varphi}(x)-y(x),\quad V_t\big|_{t=0}=\tilde{\psi}(x) \\ V\big|_{x=0}=0,\quad V\big|_{x=l}=0 \end{cases}$$

易求解！

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t)=h(x,t)+y(x)+V(x,t)}$$

齐次化原理法(Duhamel原理,冲量原理)：

对有界区间上满足齐次边界条件的混合问题，齐次化原理仍然成立，可将非齐次方程化为齐次方程，例如

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + \tilde{f}(x,t),\ 0<x<l, t>0 \\ w|_{t=0} = 0,\ w_t|_{t=0} = 0 \\ w|_{x=0} = 0,\ w|_{x=l} = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{w})$$

作时间变量
平移后求解

$$\Rightarrow \begin{cases} z_{tt} = c^2 z_{xx},\ 0 < x < l, t > \tau \\ z\big|_{t=\tau} = 0,\quad z_t\big|_{t=\tau} = \tilde{f}(x,\tau) \\ z\big|_{x=0} = 0,\quad z\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow w(x,t) = \int_0^t z(x,t;\tau)d\tau \Rightarrow \boxed{u(x,t) = h(x,t) + w(x,t) + p(x,t)}$$

三种方法的比较：

- 三种方法均需要先边界齐次化，本质上还是“化偏为常”
- 三者中特解法相对来说比较简单，但只能处理特殊的非齐次项
- Fourier展开法和齐次化原理法计算比较繁琐，却是普适的方法，重点推荐
- 对一般线性非齐次定解问题，Fourier展开法从数值计算角度看比较合适，类似高维偏微分方程中的**Galerkin**方法
- 处理特殊情形时加强培养观察能力，边界条件和方程配合得好可以快速简化问题

两个例子：

例1 求解定解问题：令常数 $A,\omega>0$

$$\begin{cases} w_{tt}=c^2w_{xx}+A\sin\omega t\ ,0<x<l,t>0 \\ w\big|_{t=0}=0,\quad w_t\big|_{t=0}=0 \\ w_x\big|_{x=0}=0,\quad w_x\big|_{x=l}=0 \end{cases}$$

(i) Fourier展开法：对应的齐次方程特征值问题为

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X'(0)=0,\ X'(l)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, X_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{l}, n\geq 0$$

令 $w(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\frac{n\pi x}{l}$，则

$$\begin{cases} T_0''(t) = A\sin\omega t \\ T_0(0) = T_0'(0) = 0 \end{cases} (n=0) \Rightarrow T_0(t) = \frac{A}{\omega}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = 0 \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0 \end{cases} (n \geq 1) \Rightarrow T_n(t) \equiv 0 \ (n \geq 1)$$

➡ 解 $$\boxed{w(x,t) = \frac{A}{\omega}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)}$$

- 观察： $\lim\limits_{t \to +\infty} w(x,t) = +\infty$

(ii) 特解法： 令 $y(t)$ 满足常微分方程

$$\begin{cases} y''(t) = A\sin\omega t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{A}{\omega}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \quad w(x,t) = y(t) = \frac{A}{\omega}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

$$\because \begin{cases} \bar{w}_{tt} = c^2\bar{w}_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ \bar{w}\big|_{t=0} = 0, \quad \bar{w}_t\big|_{t=0} = 0 \\ \bar{w}_x\big|_{x=0} = 0, \quad \bar{w}_x\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

只有零解！

(iii)齐次化原理法:

$$\begin{cases} z_{tt} = c^2 z_{xx}, \quad 0 < x < l, t > \tau \\ z\big|_{t=\tau} = 0, \quad z_t\big|_{t=\tau} = A\sin\omega\tau \\ z_x\big|_{x=0} = 0, \quad z_x\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

令 $t' = t - \tau$, 对齐次方程的特征值问题有

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, n \ge 0$$

令 $z(x,t;\tau) = C_0 + D_0(t-\tau)$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n cos\frac{cn\pi(t-\tau)}{l} + D_n sin\frac{cn\pi(t-\tau)}{l})\cos\frac{n\pi}{l}x$$

代入有初始条件得 $C_n = 0, n \ge 0; D_0 = A\sin\omega\tau, D_n = 0, n \ge 1$

$$\Rightarrow \boxed{w(x,t) = \int_0^t z(x,t;\tau)d\tau = \frac{A}{\omega}(t - \frac{\sin\omega t}{\omega})}$$

例2 求解定解问题：令常数 $A,\omega>0$

$$\begin{cases} w_{tt}=c^2w_{xx}+A\sin\omega t\cos\dfrac{\pi x}{l},\ 0<x<l,t>0 \\ w\big|_{t=0}=0,\quad w_t\big|_{t=0}=0 \\ w_x\big|_{x=0}=0,\quad w_x\big|_{x=l}=0 \end{cases}$$

Fourier展开法：易有 $\lambda_n=(\dfrac{n\pi}{l})^2, X_n(x)=\cos\dfrac{n\pi x}{l}, n\geq 0$

令 $w(x,t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\dfrac{n\pi x}{l},$

代入方程并比较等式两边系数即得

$$T_n''+(\frac{cn\pi}{l})^2T_n=0\ (n\neq 1), T_1''+(\frac{c\pi}{l})^2T_1=A\sin\omega t$$

由初始条件得 $T_n(0)=T_n'(0)=0, n\geq 0$

$\Rightarrow$ $T_n(t)=0\ (n\neq 1)$

$$T_1(t)=\frac{l}{c\pi}\int_0^t A\sin\omega\tau\sin\frac{c\pi(t-\tau)}{l}d\tau$$

$$=\frac{Al}{2c\pi}\left\{\int_0^t\cos\left[\left(\omega+\frac{c\pi}{l}\right)\tau-\frac{c\pi}{l}t\right]d\tau-\int_0^t\cos\left[\left(\omega-\frac{c\pi}{l}\right)\tau+\frac{c\pi}{l}t\right]d\tau\right\}$$

$$=\frac{Al}{c\pi}\cdot\frac{\omega\sin\frac{c\pi t}{l}-\frac{c\pi}{l}\sin\omega t}{\omega^2-(\frac{c\pi}{l})^2}$$

$$\boxed{w(x,t)=\frac{Al}{c\pi}\cdot\frac{1}{\omega^2-(\frac{c\pi}{l})^2}(\omega\sin\frac{c\pi t}{l}-\frac{c\pi}{l}\sin\omega t)\cos\frac{\pi x}{l}}$$

- **观察：** $\omega=c\pi/l$ 发生共振！

二、有限长杆的有源热传导问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0<x<l, t>0 \\ u\,|_{t=0} = \varphi(x) \\ u\,|_{x=0} = 0,\ u\,|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

令$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$,满足

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t),\ 0<x<l, t>0 \\ v\big|_{t=0} = 0 \\ v\big|_{x=0} = v\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx},\ 0<x<l, t>0 \\ w\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ w\big|_{x=0} = w\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

利用标准分离变量法易得

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds\; e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

作广义Fourier展开

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\; f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

代入原方程得 $T_n'(t)+(\frac{an\pi}{l})^2 T_n(t)=f_n(t)$， $T_n(0)=0$

利用常数变易法得 $T_n(t)=\int_0^t f_n(\tau)e^{-(\frac{an\pi}{l})^2(t-\tau)}d\tau$ ⇨

$$\boxed{\begin{aligned}&u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\int_0^t f_n(\tau)e^{-(\frac{an\pi}{l})^2(t-\tau)}d\tau+\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds\; e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t}\Big]\sin\frac{n\pi x}{l}\end{aligned}}$$

三、二维泊松方程的边值问题

对某些特殊区域如矩形，圆盘，扇形等可用分离变量法求解。

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=F(x,y),\ 0<x<a,\ 0<y<b \\ u\big|_{x=0}=f_1(y), u\big|_{x=a}=f_2(y) \\ u\big|_{y=0}=g_1(x), u\big|_{y=b}=g_2(x) \end{cases}$$

思路： 在两种边界上分别取线性拟合函数

$$h_1(x,y)=\frac{f_2(y)-f_1(y)}{a}x+f_1(y),$$

$$h_2(x,y)=\frac{g_2(x)-g_1(x)}{b}y+g_1(x)$$

$\Rightarrow$ $v(x,y)=u(x,y)-h_1(x,y), w(x,y)=u(x,y)-h_2(x,y)$

必定满足某边界齐次条件，用Fourier展开法求解即可

一个例子：

例 $\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=-2x, & x^2+y^2<1 \\ u\big|_{x^2+y^2=1}=0 \end{cases}$

Fourier展开法：因区域是圆域，作极坐标变换

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,\ 0<r<1, \theta\in(-\infty,\infty)$$

仍记 $u=u(r,\theta)=u(r\cos\theta, r\sin\theta)$，则

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}(ru_r)_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=-2r\cos\theta,\ 0<r<1 \\ u\big|_{r=1}=0 \end{cases}$$

考虑齐次方程 $u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$ 的分离解 $R(r)\Theta(\theta)$ 满足

$$\Theta''+\lambda\Theta=0,\ \ \Theta(\theta+2\pi)=\Theta(\theta)$$

$\Rightarrow$ $\lambda_n = n^2, \Theta_n(\theta) = \cos n\theta \ (n \ge 0)$或$\sin n\theta \ (n \ge 1)$

令形式解$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(r)\cos n\theta + b_n(r)\sin n\theta\right]$, 代入原方程并比较两端$\cos n\theta$，$\sin n\theta$的系数，有

$$\begin{cases} a_1'' + \dfrac{1}{r}a_1' - \dfrac{1}{r^2}a_1 = -2r \\ a_n'' + \dfrac{1}{r}a_n' - \dfrac{n^2}{r^2}a_n = 0,\ n \ne 1 \\ b_n'' + \dfrac{1}{r}b_n' - \dfrac{n^2}{r^2}b_n = 0,\ n \ge 0 \end{cases}$$

后两式是齐次Euler方程，其通解形式为 $A_n r^n + B_n r^{-n}$

由边界条件 $a_n(1) = 0, |a_n(0)| < +\infty$， $b_n(1) = 0, |b_n(0)| < +\infty$

$$a_n(r)=0\ (n\neq 1),\quad b_n(r)=0\ (n\geq 0)$$

另外，非齐次Euler方程通解 $a_1(r)=c_1 r+c_2 r^{-1}-\frac{1}{4}r^3$

由边界条件得 $c_1=\frac{1}{4},\ c_2=0$

$$\boxed{\begin{aligned} u=u(r,\theta)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n(r)\cos n\theta+b_n(r)\sin n\theta\right]\\ &=\frac{1}{4}(1-r^2)r\cos\theta=\frac{1}{4}(1-x^2-y^2)x \end{aligned}}$$

特解法： $$\begin{cases} \dfrac{1}{r}(ru_r)_r + \dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = -2r\cos\theta,\ 0<r<1 \\ u\big|_{r=1} = 0 \end{cases}$$

思路： 观察到方程有一个**特解** $w = -\dfrac{1}{4}r^3\cos\theta,$

令 $u = u(r,\theta) = v(r,\theta) + w = v(r,\theta) - \dfrac{1}{4}r^3\cos\theta,$ 则

$$\begin{cases} v_{rr} + \dfrac{1}{r}v_r + \dfrac{1}{r^2}v_{\theta\theta} = 0,\ 0<r<1 \\ v\big|_{r=1} = \dfrac{1}{4}\cos\theta \end{cases}$$

即 $$\begin{cases} \Delta_2 v = 0,\ x^2+y^2<1 \\ v\big|_{x^2+y^2=1} = \dfrac{1}{4}x \end{cases}$$ $\Rightarrow$ $v = \dfrac{1}{4}x$

$\Rightarrow$ $$\boxed{u = v(r,\theta) + w = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}(x^2+y^2)x}$$

回忆：常数变易法

1. 应用常数变易法求解二阶线性非齐次常微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \qquad (*)$$

步骤： 先写出方程(*)所对应的齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的通解形式 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$.

此时C_1，C_2为任意常数，$y_1(x)$，$y_2(x)$ 线性无关.

假设非齐次方程(*)的通解形式为

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x) \qquad (**)$$

将(**)式代入非齐次方程(*)可得

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases} \Longrightarrow C_1',\ C_2' \Longrightarrow C_1,\ C_2$$

2. 如下常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} T_n''(t) + \left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0 \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

的解为

$$\boxed{T_n(t) = \frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi(t-\tau)}{l}d\tau \;\; (n \geq 1)}$$

3. 如下常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} T_n'(t) + \left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = 0 \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

的解为

$$\boxed{T_n(t) = \int_0^t f_n(\tau)e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2(t-\tau)}d\tau \;\; (n \geq 1)}$$