# 思考题讨论

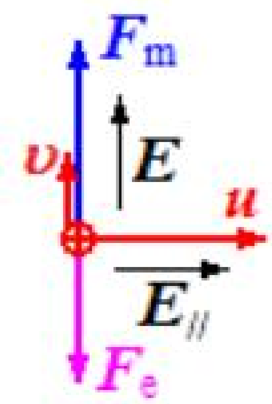
- 思考题5.6 质量为$m$、均匀带电为$q$的圆环沿水平面以速度$\upsilon$做无滑滚动，加上垂直于环面的水平均匀磁场$B$后，求环所受磁力。

- 思考题5.7 求存在两种载流子时的霍耳系数。

➢ 由于$E=\upsilon_1 B$和$E=\upsilon_2 B$无法同时满足，模仿单一载流子的推导不可行。

➢ 将单一载流子时的条件横向受力为零更普适地表述为多种载流子时的条件横向电流为零。

$j=\sigma(E+K_0)=nqu \rightarrow u=(\sigma/nq)(E+K_0)$，$K_0$是非静电力。定义迁移率$\mu=u/(E+K_0)=\sigma/nq$，漂移速度与单位电荷驱动力之比




$u_1$和$u_2$由纵向电场驱动$\rightarrow u_{1,2}=\mu_{1,2}E_{//}$

单位电荷横向力$u_{1,2}B+E=\mu_{1,2}E_{//}B+E$

该力驱动横向速度$\upsilon_{1,2}=\mu_{1,2}(\mu_{1,2}E_{//}B+E)$

横向电流密度为零

$$n_1q_1\upsilon_1+n_2q_2\upsilon_2=n_1q_1\mu_1(\mu_1E_{//}B+E)+n_2q_2\mu_2(\mu_2E_{//}B+E)=0$$

$$\therefore E=-(n_1q_1\mu_1^2+n_2q_2\mu_2^2)E_{//}B/(n_1q_1\mu_1+n_2q_2\mu_2)$$

纵向电流密度$j=n_1q_1u_1+n_2q_2u_2=(n_1q_1\mu_1+n_2q_2\mu_2)E_{//}\rightarrow$

$$K=\frac{|E|}{Bj}=\frac{n_1q_1\mu_1^2+n_2q_2\mu_2^2}{(n_1q_1\mu_1+n_2q_2\mu_2)^2}.$$

推广：$K=\dfrac{\sum_i n_iq_i\mu_i^2}{(\sum_i n_iq_i\mu_i)^2}$.

或$\dfrac{\sum_i \sigma_i^2/n_iq_i}{(\sum_i \sigma_i)^2}$.

# 第二十讲 2022-05-10

# 第6章 静磁场中的磁介质

§ 6.1 磁场对电流的作用

§ 6.2 磁介质及其磁化强度*M*

§ 6.3 磁介质中静磁场的基本定理

§ 6.4 介质的磁化规律

§ 6.5 边值关系和唯一性定理 ~~§ 6.6 磁像法~~

§ 6.7 磁路定理及其应用

§ 6.8 磁荷法

# § 6.1 磁场对电流的作用

## 1. 磁场对电流的力和力矩

磁场对物质的作用，本质上是磁场对物质内部电流的作用。

### 1) 外磁场*B*易求情形

***B***对不同电流体系的作用力和力矩分别为

线电流：$\boldsymbol{F}=\int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$, $\quad\boldsymbol{L}=\int_L I\boldsymbol{r}\times(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})$,

面电流：$\boldsymbol{F}=\iint_S \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}S$, $\quad\boldsymbol{L}=\iint_S \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}S$,

体电流：$\boldsymbol{F}=\iiint_V \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}V$, $\quad\boldsymbol{L}=\iiint_V \boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}V$.

## 2) 外磁场$\boldsymbol{B}$不易求情形

设总磁场和电流体自场分别是$\boldsymbol{B}_t$和$\boldsymbol{B}_1$，则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_t-\boldsymbol{B}_1.$$

类于求静电力，设法用有效磁场来等效$\boldsymbol{B}$。可证闭合的稳恒电流的其他部分对电流元的内力 (矩) 相抵为零，$\boldsymbol{B}_1$中只需考虑电流元自身产生的磁场。

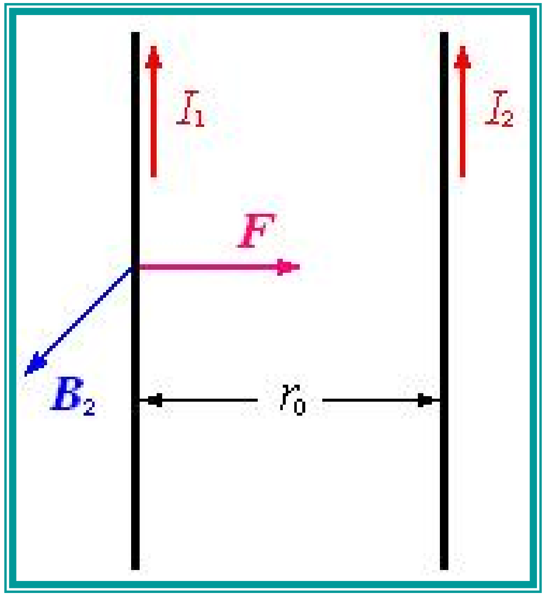
- 体电流元：$B_1\sim \mathrm{d}V/r^2\sim r\to 0$，不需考虑。
- 面电流元：两侧$B_1=\pm\mu_0 i/2$，有跳变，$\boldsymbol{B}_1$//面元且⊥面电流，但由于$\boldsymbol{B}_t$有相同跳变，$\boldsymbol{B}$在该处连续。
- 线电流元：$B_1\to\infty$，线电流近似失效。

## 2. 计算举例

**[例6.1] 两根无限长平行直载流导线，电流强度分别为$I_1$和$I_2$，相距$r_0$，求其中一根单位长度受的力。**

**[解] 导线2在导线1处产生的磁场为$B_2=\mu_0 I_2/(2\pi r_0)$，方向如图所示。由式 (6.1.2) 求得导线1单位长度受力**

$$F = I_1 B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r_0} = 2\times 10^{-7}\,\frac{I_1 I_2}{r_0}.$$




$I_1$和$I_2$同向时，该力为引力。

**1948年第9届国际计量大会由上式定义电流强度的单位“安培”。**

[例6.2] 求一电流强度为$I$的载流线圈在均匀磁场$\boldsymbol{B}$中所受的力和力矩。

[解]
$$\boldsymbol{F}=\int I\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B}=\left(\int\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right)\times I\boldsymbol{B}=0,$$

$\rightarrow$均匀磁场中载流线圈不受力。

$$\boldsymbol{L}=\oint I\boldsymbol{r}\times(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{m}\boxed{?}\boldsymbol{B}.$$

向全微分和磁矩形式凑

$$(\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}\boldsymbol{r}-(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{r}$$

$$\mathrm{d}\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{r}\right]=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}\boldsymbol{r}+(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{r}$$

$$\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}+\tfrac{1}{2}\mathrm{d}\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{r}\right]=\boxed{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{r}\times(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B})=\boxed{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}\boldsymbol{r}}-(\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{r}\times(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B})=\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}+\tfrac{1}{2}\cancel{\mathrm{d}\left[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{r}\right]}-\cancel{(\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})\boldsymbol{B}}.$$

$$\therefore \boldsymbol{L} = \int I\boldsymbol{r} \times (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}) = \int I \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}. \qquad (*)$$

- 非均匀磁场情形

当线圈尺寸<<磁场非均匀尺寸时 (如何用数学来表述？)，相对于线圈中心点，线圈所受力矩仍由(*)式表示，但可证明受力

$$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}$$

不为零。(类比电偶极子受力$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}$)

[例6.3] 求电流强度为$I$、单位长度匝数为$n$的无限长螺线管单位表面受力。

[解] 螺线管在管内、外沿轴向的$B_t$分别为$\mu_0 nI$ 和0，而面电流密度$i=nI$，面元$\Delta S$对内、外侧磁场的贡献为$\pm\mu_0 nI/2$，所以$\Delta S$附近，有，

$$B = B_t - B_1 = \begin{cases} \mu_0 nI - \frac{1}{2}\mu_0 nI = \frac{1}{2}\mu_0 nI & \text{内侧} \\ 0-(-\frac{1}{2}\mu_0 nI) = \frac{1}{2}\mu_0 nI & \text{外侧} \end{cases}$$

于是$\Delta F/\Delta S=iB=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$，与表面垂直并指向外侧。

而等效轴向电流的力$\Delta F'/\Delta S=i'B'=\mu_0 I^2/(8\pi^2 R^2)$,

指向轴线 (注意：$n>>1/2\pi R \rightarrow \Delta F/\Delta S >> \Delta F'/\Delta S$)。

# § 6.2 磁介质及其磁化强度*M*

- 狭义磁性：磁体与铁磁性物质之间相互吸引的能力。
- 广义磁性：处于磁场中的物质都具有磁性，只是强度一般远小于铁磁性物质的磁性。
- 磁化：使物质具有磁性的物理过程。
- 磁介质：一切能够磁化的物质。

如何定量描述磁介质磁化？

不同磁介质磁化规律有何不同？

各自的微观机制怎样？

## 1. 磁化强度

根据安培分子电流假说，已磁化物质的磁性来源于物质内部有规则排列的分子电流。用$\sum \boldsymbol{m}_{分子}$表示体积元$\Delta V$中所有分子磁矩的矢量和，定义

$$\boldsymbol{M}=\sum \boldsymbol{m}_{分子}/\Delta V$$

为磁化强度矢量。其方向代表磁化的方向，大小代表磁化的程度。

在无外磁场时，分子固有磁矩为零，或分子磁矩的取向杂乱无章，都导致$\sum \boldsymbol{m}_{分子}=0$。于是$\boldsymbol{M}=0$，磁介质处于非磁化态。

## 2. 磁化电流

- 定义

在磁化状态下，由于分子电流的有序排列，磁介质中出现的宏观电流。

- 与传导电流比较

| 磁化电流 | 传导电流 |
| --- | --- |
| 无电荷的宏观移动 | 有电荷的宏观移动 |
| 可存于一切磁介质中 | 只存在于导体中 |
| 无焦耳热效应 | 有焦耳热效应 |

都能激发磁场和受磁场作用

- 磁化电流和磁化强度关系

二者都源于微观磁化，必然有关联。

可证：$\boldsymbol{M}$在一闭合回路的环路积分等于该闭合回路中穿过的磁化电流之和 (证明见附件1)。

$$\oint_L \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I'$$

- 推论：因为均匀磁化的介质$\boldsymbol{M}$为常量，所以

$$\oint_L \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

即磁化电流只可能出现在非均匀磁化介质内部或介质界面上。(但注意：非均匀磁化的线性均匀介质内磁化电流为零，只要该处无传导电流)

# * 附件1： $\oint_L \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I'$ 的证明

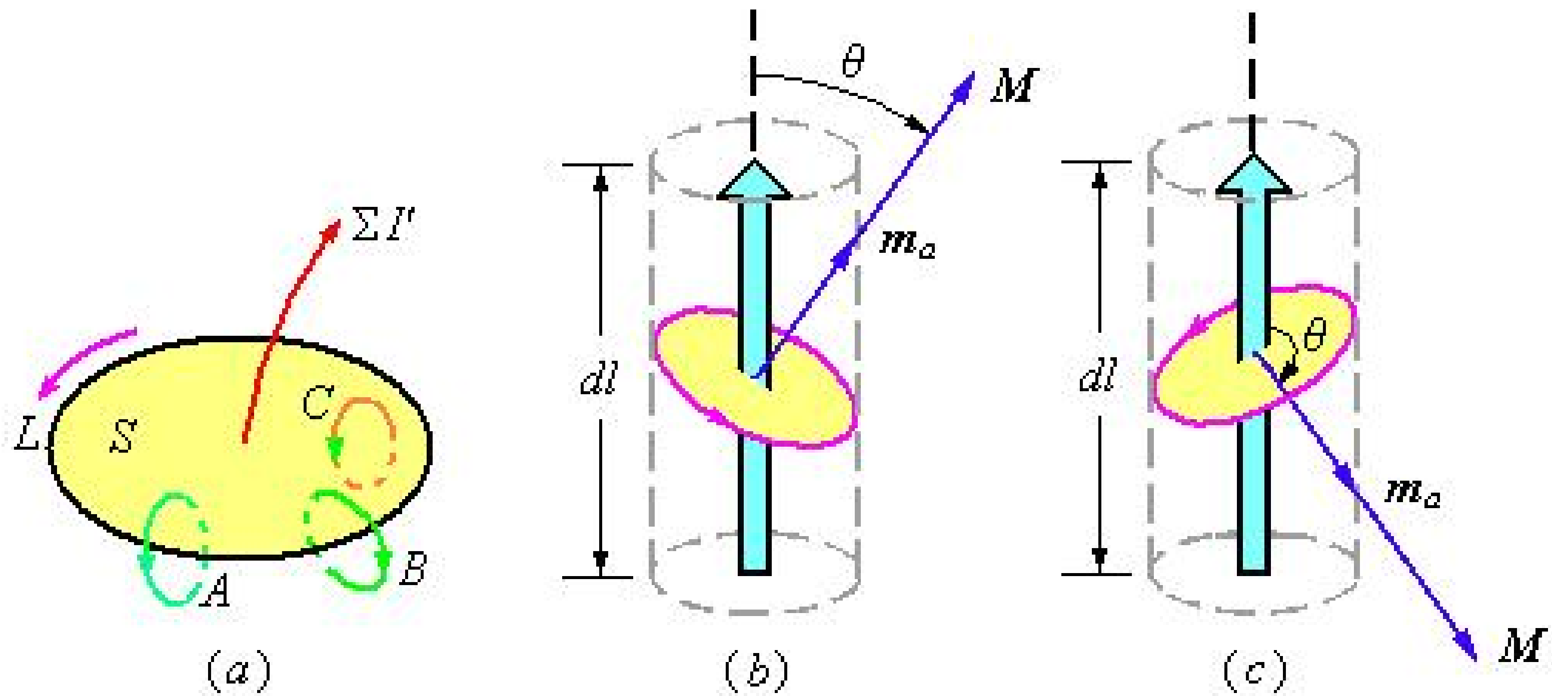


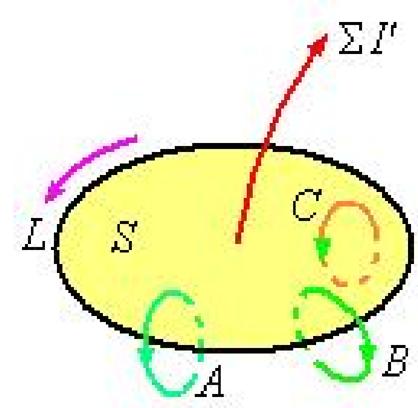

图6-2-1 磁化强度和磁化电流的关系

设所有分子具有相同磁矩$\boldsymbol{m}_a$，则$\boldsymbol{M}=n\boldsymbol{m}_a$，其中$n$为分子数密度。再设$\boldsymbol{m}_a$由一等效分子电流产生，则$\boldsymbol{m}_a=I_a\boldsymbol{S}_a$。

考虑磁介质中任一回路$L$和以它为周线的曲面$S$(图$a$)，设通过的总磁化电流为$\Sigma I'$，其正向与绕行方向满足右手定则。

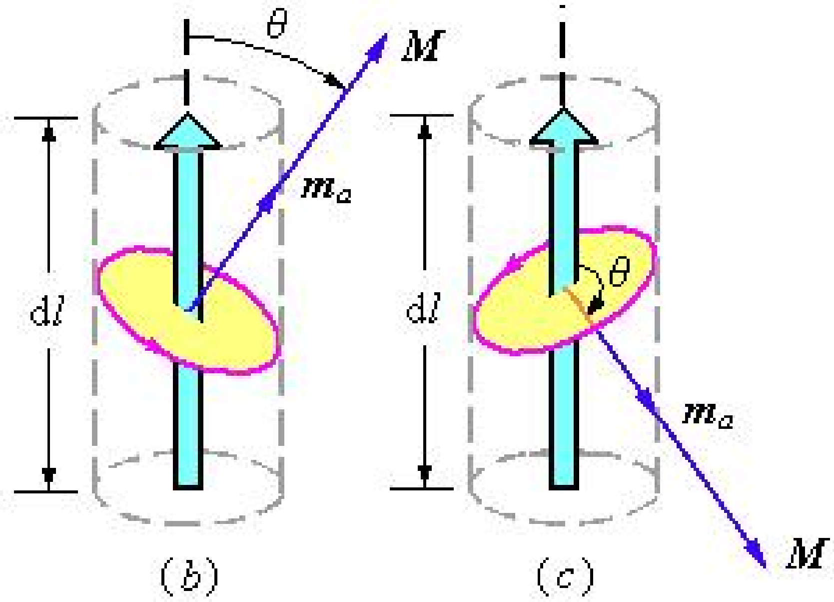
显然，只有从$S$内穿过，且在$S$外闭合的分子电流对$\Sigma I'$有贡献。

考虑$L$上的弧元d$\boldsymbol{l}$，设该处$\boldsymbol{M}$与d$\boldsymbol{l}$夹$\theta$角。



($a$)

当$\theta$<90°时 (图$b$)，对$\Sigma I'$有贡献的分子，其中心位于以d$\boldsymbol{l}$为轴，$S_a\cos\theta$为底，d$l$为高的圆柱体中，总数为$nS_a\cos\theta\,\mathrm{d}l$，产生磁化电流




$$I_a n S_a \cos\theta \mathrm{d}l = n\boldsymbol{m}_a \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}。$$

当$\theta$>90°时 (图$c$)，$I'$和$\cos\theta$都变号，上式仍成立。

所以穿过的总磁化电流满足 $\oint_L \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I'$.

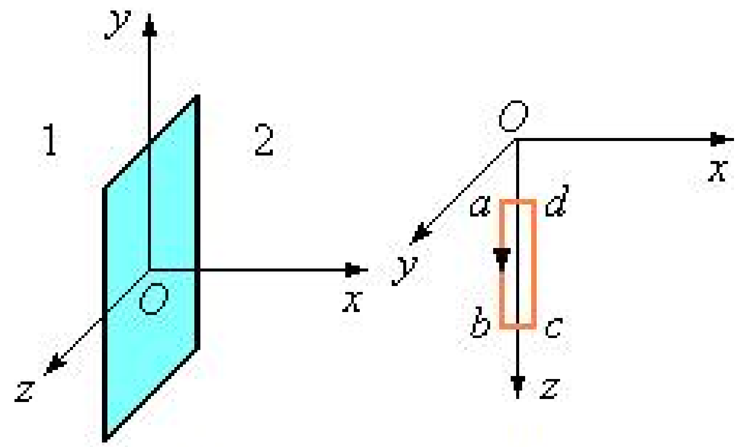
推广：各分子具有不同磁矩时，上式仍成立！提示：将分子按磁矩的不同分类，第$i$类有 $\oint_L \boldsymbol{M}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \sum I_i'$，再利用线性叠加原理就能得到结论。

- 边值关系

磁化电流不仅出现在非均匀磁化介质中，还能存在于介质表面。磁化面电流和磁化强度间的关系?

两介质界面上取任一面元，使之位于$yz$平面，$x$轴平行于由介质1指向2的法线$\boldsymbol{n}$。

将图(a)绕$x$轴转90°得到(b)，在$xz$平面作横跨$y$轴的矩形回路$abcd$，绕行方向与$y$轴满足右手定则，且$ad \ll ab$。



(a) (b)

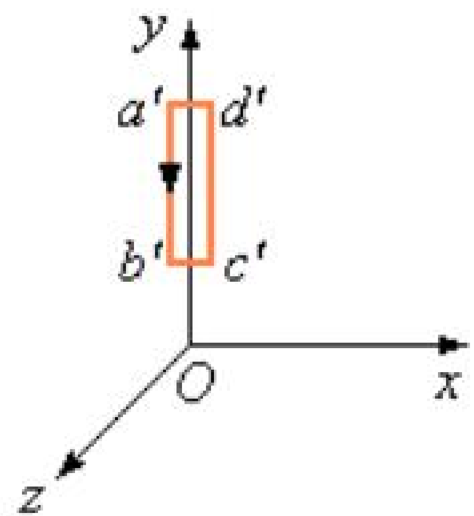
$$由\oint \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I' \rightarrow (M_{1z}-M_{2z})ab=i'_y ab$$

$$\rightarrow i'_y = M_{1z}-M_{2z}.$$

如图(c)，在$xy$平面内作横跨$y$轴的矩形回路$a'b'c'd'$，$a'd' << a'b'$，且绕行方向与$z$轴满足右手定则，则

$$-(M_{1y}-M_{2y})a'b' = i'_z a'b',$$

$$\therefore i'_z = M_{2y}-M_{1y}.$$

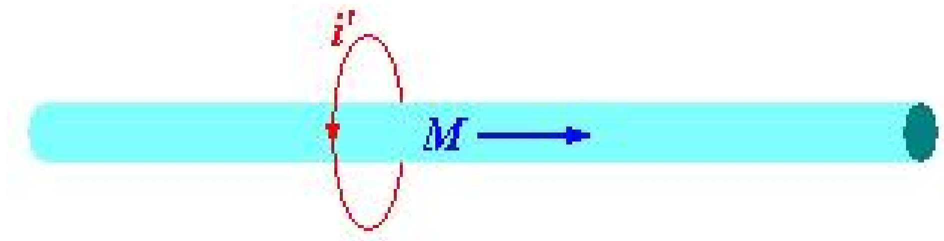


(c)

综上所得，有

$$\boldsymbol{i}' = \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1).$$

[例6.4] 求沿轴均匀磁化的磁介质圆棒轴线上的磁场分布，设棒长$l$，半径$R$，磁化强度$\boldsymbol{M}$。



均匀磁化圆棒

[解] 边值关系→介质棒底面$i'=0$，侧面$i'=M$，与$\boldsymbol{M}$成右手螺旋。电流分布类于有限长直螺线管 **(例5.4)**

$$\therefore B' = \frac{\mu_0 i'}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1) = \cdots\cdots$$

讨论：细长棒情形，$l >> R$，端点处$B'=\mu_0 i'/2$，

远离端点处$B'=\mu_0 i'$；

圆薄片情形，$l<<R$，$B'=\mu_0 M\, l/2R \approx 0$。

# § 6.3 磁介质中静磁场的基本定理

## 1. $\boldsymbol{B}$所满足的两定理

设由传导电流$I_0$和磁化电流$I'$产生的磁感应强度分别是$\boldsymbol{B}_0$和$\boldsymbol{B}'$，则总磁感应强度$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}'$。$\boldsymbol{B}_0$和$\boldsymbol{B}'$均由毕—萨定律确定，因而均遵守真空中的高斯定理和安培环路定理：

$$\iint_S \boldsymbol{B}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0, \quad \int_L \boldsymbol{B}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum I_0,$$

$$\iint_S \boldsymbol{B}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0, \quad \int_L \boldsymbol{B}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum I'.$$

$$\rightarrow \oiint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0, \quad \oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum I_0 + \mu_0 \sum I'.$$

## 2. 磁场强度

用上页最后式除以$\mu_0$后减去$\oint_L \boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I'$得

$$\oint_L (\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{M})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I_0.$$

令$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{M}$，则上式简化为

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I_0.$$

上页倒数第二式和上式分别是一般磁介质中的高斯定理和安培环路定理。引入辅助矢量$\boldsymbol{H}$后，安培环路定理中不出现磁化电流。

# §6.4 介质的磁化规律

## 1. 介质按磁化规律分类

- 顺磁质和抗磁质 弱磁性物质

1) 各向同性

$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{H}$成正比 $\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}$，

代入$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{M}$得磁介质性能方程

$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，

其中$\chi_m$为磁化率，$\mu=\mu_0(1+\chi_m)$为磁导率。

顺磁质：$\chi_m>0$，$\mu>\mu_0$，$\chi_m 10^{-4}\sim10^{-5}$；

抗磁质：$\chi_m<0$，$\mu<\mu_0$，$|\chi_m| 10^{-5}\sim10^{-7}$。

## 温度效应

实验发现，抗磁质的磁化率不随温度变化而改变；而顺磁质的磁化率随温度$T$降低而增大，遵从居里定律：

$$\chi_m = C/T,$$

式中$C$是居里常数，由实验确定。

## 2) 各向异性

$\boldsymbol{M} = \chi_m \cdot \boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{B} = \mu \cdot \boldsymbol{H}$，$\chi_m$和$\mu$均为对称二阶张量。

# 作业、预习及思考题

- 作业：6.1~6.7
- 预习：6.4 余下、6.5 边值关系和唯一性定理

## 下次课讨论

- 思考题6.1 如何数学表述线圈尺寸<<磁场非均匀尺寸？
- 思考题6.2 为什么介质界面处$B$线可以不中断？