微分方程

带源的波和扩散

（非齐次定解问题）

一个例子：

一无限长的均匀弦，因受其力密度为 bxt 的外力作用做振幅极其微小的横振动。若弦的初位移为0，初速度为 $l-x$，试求该弦的振动规律。

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + bxt, \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u\,|_{t=0} = 0, \ u_t\,|_{t=0} = l - x \end{cases}$$

$$u(x,t) = ?$$

一般的带源波动方程直线问题：

$$(\mathrm{P}_1)\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}+f(x,t),\ x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t)=?$$

思路：化有源(有外力)问题为无源(无外力)问题，利用叠加原理和齐次化原理求解。

解题思路示意图：

$$(\mathrm{P}_1)\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}+f(x,t),\ x\in\mathbb{R},t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

利用叠加原理，令$u=v+w$，其中v,w满足：

$$v:\begin{cases} v_{tt}=c^2v_{xx},\quad x\in\mathbb{R},t>0 \\ v|_{t=0}=\varphi(x),\ v_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

自由振动

$$w:\begin{cases} w_{tt}=c^2w_{xx}+f(x,t) \\ w|_{t=0}=0,\ w_t|_{t=0}=0 \end{cases}$$

纯受迫振动

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds + \boxed{\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau}$$

直线问题(P_1)的解公式(*)

v由d'Alembert公式得到，w由齐次化原理得到。

从物理与数学角度理解叠加原理：

1、物理角度：在研究物理学问题时，常将几种不同原因综合所产生的效果，可用这些不同原因单独产生的效果的累加来代替，这就是叠加原理。

2、数学角度：叠加原理对应于线性方程或线性定解条件。

设 L 为线性微分算符，则

$$\boxed{Lu = f}$$

表示线性方程或线性定解条件。

叠加原理：

(1) 有限叠加：若$Lu_i=f_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，且$u=\sum_{i=1}^{n}c_iu_i$,

则 $$\boxed{Lu=\sum_{i=1}^{n}c_i f_i}$$

(2) 级数叠加：若$Lu_i=f_i\ (i=1,2,\cdots)$，且$u=\sum_{i=1}^{\infty}c_iu_i$一致收敛，

则 $$\boxed{Lu=\sum_{i=1}^{\infty}c_i f_i}$$

(3) 积分叠加：若$Lu=f(M,M_0)$，且$U=\int u(M,M_0)dM_0$一致收敛，

则 $$\boxed{LU=\int f(M,M_0)dM_0}$$

从物理角度理解齐次化原理：

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} + f(x,t) \\ w|_{t=0} = 0,\ w_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

分析外力$f(x,t)$的作用情况：

瞬时力

瞬时力引起的振动

(1) $f(x,t) = \sum f(x,\tau),\ 0 < \tau < t$

$$w(x,t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{\tau=0}^{t} \gamma(x,t;\tau)$$

(2) $f(x,\tau)$在$\Delta\tau$时间间隔内引起的振动为

$$\begin{cases} \gamma_{tt} = c^2 \gamma_{xx},\quad \tau < t < \tau + \Delta\tau \\ \gamma|_{t=\tau} = 0,\ \gamma_t|_{t=\tau} = f(x,\tau)\Delta\tau \end{cases}$$

齐次化原理：

令$\gamma(x,t;\tau)=z(x,t;\tau)\Delta\tau$，则

$$\boxed{\begin{cases}\gamma_{tt}=c^2\gamma_{xx}, & \tau<t<\tau+\Delta\tau \\ \gamma\big|_{t=\tau}=0, & \gamma_t\big|_{t=\tau}=f(x,\tau)\Delta\tau\end{cases}} \longrightarrow \boxed{\begin{cases}z_{tt}=c^2 z_{xx}, & x\in\mathbb{R}, t>\tau \\ z\big|_{t=\tau}=0, & z_t\big|_{t=\tau}=f(x,\tau)\end{cases}}$$

$$(3)\, w(x,t)=\int_0^t z(x,t;\tau)d\tau$$

利用变量变换$t\rightarrow t-\tau=t'$及d' Alembert公式$\Rightarrow$

$$\boxed{w(x,t)=\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)\,ds\,d\tau}$$

一般的齐次化原理(Duhamel原理,冲量原理):

设L为t和$x\in\mathbb{R}^n$ 的线性偏微分算子且关于t 的导数不超过$m-1$阶,

则非齐次方程初值问题
$$\begin{cases}\dfrac{\partial^m w}{\partial t^m}=Lw+f(x,t),x\in\mathbb{R}^n,t>0\\[2ex] w\big|_{t=0}=w_t\big|_{t=0}=\cdots=\left.\dfrac{\partial^{m-1}w}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0}=0\end{cases}$$
的解为

$w(x,t)=\int_0^t z(x,t;\tau)d\tau$,其中$z(x,t;\tau)$满足齐次方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^m z}{\partial t^m}=Lz,x\in\mathbb{R}^n,t>\tau>0\\[2ex] z\big|_{t=\tau}=z_t\big|_{t=\tau}=\cdots=\left.\dfrac{\partial^{m-2}z}{\partial t^{m-2}}\right|_{t=\tau}=0,\left.\dfrac{\partial^{m-1}z}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=\tau}=f(x,\tau)\end{cases}$$

回到例子：

求解初值问题：$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + bxt, \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = l - x \end{cases}$

解： 令$f(x,t)=bxt, \varphi(x) = 0, \psi(x) = l - x,$

则由解公式(*)有

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}(l-s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} bs\tau ds d\tau$$

$$= t(l-x) + \frac{b}{6}xt^3$$

带源一维波动方程的半直线问题

$$
(\mathrm{P}_2)\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}+f(x,t),\ x>0,t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ x\geq 0 \\ u|_{x=0}=0,\ t\geq 0 \end{cases}
$$

“左端点固定”

思路：利用奇延拓将问题转化为直线问题。

奇延拓：$u\to U,\ f\to F,\ \varphi\to\Phi,\ \psi\to\Psi$

延拓后：$\begin{cases} U_{tt} = c^2 U_{xx} + F(x,t),\ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U|_{t=0} = \Phi(x),\ U_t|_{t=0} = \Psi(x) \end{cases}$

$$\boxed{U(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+ct) + \Phi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\Psi(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(s,\tau)dsd\tau}$$

$\Rightarrow$ 半直线问题的解$u(x,t)=U(x,t)|_{x\geq 0}$

半直线问题(P_2)的解$u(x,t)$

$$
=\begin{cases}
\dfrac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds \\
\qquad +\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau,\ 0\le t\le\dfrac{x}{c} \\
\dfrac{1}{2}[\varphi(x+ct)-\varphi(ct-x)]+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(s)ds \\
\quad +\dfrac{1}{2c}\Big[\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{c}}\int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau+\int_{t-\frac{x}{c}}^{t}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau\Big],\ t>\dfrac{x}{c}
\end{cases}
$$

修改端点条件：

若半直线问题中上述端点条件改为$u|_{x=0}=g(t)$,

则$v(x,t):=u(x,t)-g(t)$满足

$$\begin{cases} v_{tt}=c^2v_{xx}+\tilde{f}(x,t),\ x>0,t>0 \\ v|_{t=0}=\tilde{\varphi}(x),\ v_t|_{t=0}=\tilde{\psi}(x),\ x\geq 0 \\ v|_{x=0}=0,\ t\geq 0 \end{cases}$$

其中$\tilde{f}(x,t)=f(x,t)-g''(t),\ \tilde{\varphi}(x)=\varphi(x)-g(0),$

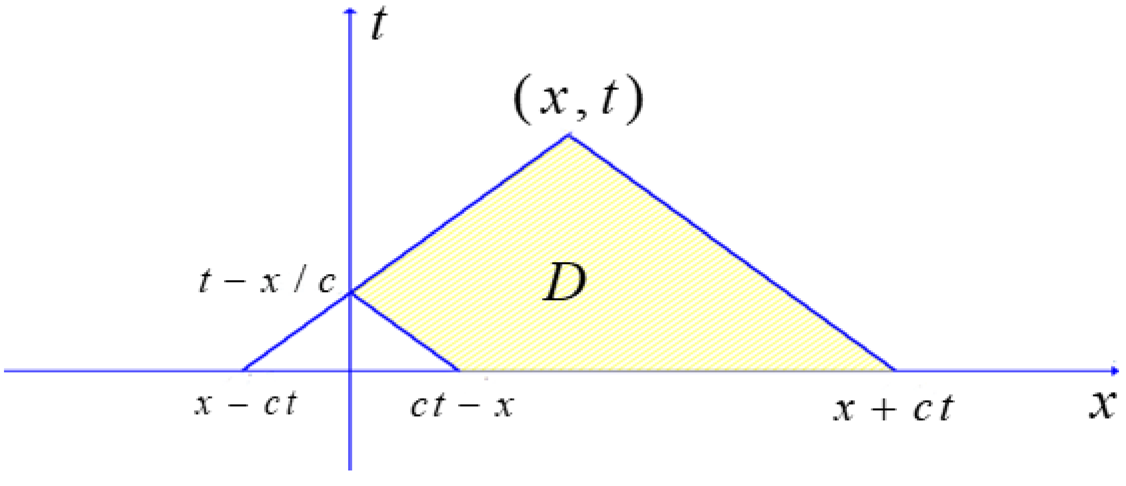
$\tilde{\psi}(x)=\psi(x)-g'(0)$, 则前述结果$\Rightarrow v(x,t)\Rightarrow u(x,t).$

$$(\mathrm{P}_3)\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}+f(x,t),\ x>0,t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\ x\geq 0 \\ u|_{x=0}=g(t),\ t\geq 0 \end{cases}$$

半直线问题(P_3)的解$u(x,t)$

$$
=\begin{cases}
\dfrac{1}{2}[\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)]+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds \\
\qquad +\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau,\ 0\le t\le\dfrac{x}{c} \\
\dfrac{1}{2}[\varphi(x+ct)-\varphi(ct-x)]+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(s)ds+g(t-\dfrac{x}{c}) \\
\quad +\dfrac{1}{2c}\Big[\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{c}}\int_{c(t-\tau)-x}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau+\int_{t-\frac{x}{c}}^{t}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau\Big],\ t>\dfrac{x}{c}
\end{cases}
$$

➢ 最后一式中括号的部分可以简写为$\iint_D f$，其中区域D见右图黄色部分。



带源热方程直线问题：

$$(\mathrm{P}_4)\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x,t), \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

利用叠加原理，令$u=v+w$，其中v, w满足：

$$v: \begin{cases} v_t = kv_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$w: \begin{cases} w_t = kw_{xx} + f(x,t), \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$z: \begin{cases} z_t = kz_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, t > \tau \\ z|_{t=\tau} = f(x,\tau) \end{cases}, \quad w = \int_0^t z(x,t;\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow v=\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\varphi(y)dy$$

$$w=\int_0^t\frac{1}{\sqrt{4k\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}}f(y,\tau)dyd\tau$$

直线问题(P_4)的解

$$u(x,t)=v+w$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\varphi(y)dy+\int_0^t\frac{1}{\sqrt{4k\pi(t-\tau)}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-\tau)}}f(y,\tau)dyd\tau$$