1.2. (1) $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2} a + \cdots + a^{n-1})$.

(2) $x^n + a^n = x^n - (-a)^n$. 同(1).

$\square$.

1.4. 对 $m,n$ 归纳. $m=n=1$ 时, 显然成立. 设 $\max\{m,n\} \le k$ 时成立.

不妨设 $m > n$, ($m=n$ 时显然成立). $\cancel{(x^m - x^n)}$ $(x^m-1, x^n-1)$

$= (x^m - x^n + x^n - 1, x^n - 1) = (x^m - x^n, x^n - 1) = (x^{m-n} - 1, x^n - 1)$

当 $m = k+1$, $m-n \le k \Rightarrow (x^{m-n}-1, x^n-1) = (x^{(m-n,n)} - 1) = x^{(m,n)} - 1$. 得证

$\square$

1.6. (1) 令 $f(x) = d(x) f_1(x)$ $g(x) = d(x) g_1(x)$, $(f_1(x), g_1(x)) = 1$.

$\exists$ $u_1(x), v_1(x)$ s.t $u_1(x) f_1(x) + v_1(x) g_1(x) = 1$.

若 $\deg u_1 \ge \deg g_1$, $u_1(x) = q(x) g_1(x) + r(x)$. $\deg r < \deg u_1$

$\Rightarrow r(x) f_1(x) + (v_1(x) - q(x) f_1(x)) g_1(x) = 1$. 取 $u = r$ 即得 $\deg u_1 < \deg r$.

此时 $u(x) f_1(x) + v(x) g_1(x) = 1$ 即 $u(x) f(x) + v(x) g(x) = d(x)$.

$\deg u < \deg g_1 = \deg g - \deg d$.

(2). 由. $\deg u + (\deg f - \deg d) = \deg v + (\deg g - \deg d)$ 知.

$\deg v < \deg f - \deg d$.

(3). 若存在 $u'(x), v'(x)$ 满足(1),

即 $(u(x)-u'(x))f_1(x)+(v(x)-v'(x))g_1(x)=0$.

$g_1(x) \mid \cancel{f}\,u(x)-u'(x)$ （因为 $(f_1,g_1)=1$）.

$\deg u,\ \deg u' < \deg g_1 \Rightarrow u-u'=0$ 同理 $v-v'=0$，即唯一 □.

1.7. (1) $\exists\, u, v$. $u(x)a(x)+v(x)b(x)=1$.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{a(x)b(x)}=\frac{u(x)}{b(x)}+\frac{v(x)}{a(x)}.$$ 由 1.6，可选 $\deg u<\deg b$,

$\deg v<\deg a$. 即 $\frac{u}{b}, \frac{v}{a}$ 均为有理真分式.

唯一性：若 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{u'(x)}{b(x)}+\frac{v'(x)}{a(x)}=\frac{u(x)}{b(x)}+\frac{v(x)}{a(x)}$

$\Rightarrow (u'-u)\cdot a=-(v'-v)\,b$. 同上.

(2). 与(1)同理. 注意到 $q_i(x)=\dfrac{\prod_{k=1}^{l}p_k^{m_k}(x)}{p_i^{m_i}(x)}$, $(q_1,\cdots,q_l)=1$.

取 $u_1,\cdots,u_l$ s.t $u_1q_1+\cdots+u_lq_l=1$ 即可.

(3). (类似 $p$ 进制，任一正整数 $a$ 与固定素数 $p$. $a=a_0+a_1p+\cdots+a_mp^m$,

$0\le a_i\le p-1$). 由于 $\deg h< \cancel{\deg}\ m\cdot\deg p$.

$h$ 可唯一表示成 $h(x)=\alpha_m(x)+\alpha_{m-1}(x)p(x)+\alpha_{m-2}p^2(x)+\cdots+\alpha_1(x)p^{m-1}(x)$.

$\deg \alpha_i(x)<\deg p(x)$. （归纳可证）. 代入即得.

(4) 代入(2).(3) 结论.

□.

1.8. (1) 令 $g = (\qquad)$. $g'''(a)=0$. (类似 Taylor 展开). 至少三重.

(2) $h = (\qquad)$. $h'''(a)=0$. 至少三重.

1.10. $f = (\qquad)$. $f(1)=f'(1)=f''(1)=0$, $f'''(1)\neq 0$.

1.12. (椭圆曲线) $a=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

$b=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$. $d=\dfrac{x_1(y_2^2-x_2^3)-x_2(y_1^2-x_1^3)}{x_1-x_2}$.

$c=\dfrac{(y_1^2-x_1^3)-(y_2^2-x_2^3)}{x_1-x_2}$

1.16. 归纳. 设对 n-1 成立. $\cancel{x^n+x^{-n}=x}$ $(x+x^{-1})(x^{n-1}+x^{1-n})$

$=x^n+x^{-n}+x^{n-2}+x^{2-n} \Rightarrow x^n+x^{-n}=(x+x^{-1})(x^{n-1}+x^{1-n})-(x^{n-2}+x^{2-n})$.

(在证明 $\mathbb{Q}(\zeta_n+\zeta_n^{-1})=\mathbb{Q}(\zeta_n)\cap\mathbb{R}$ 时重要的一步 $\zeta_n^k+\zeta_n^{-k}=P_n(\zeta_n+\zeta_n^{-1})$.)

1.17 (1). $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$

$$=(x^2+2)-(2x)^2=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2) \quad (\mathbb{Q},\mathbb{R}).$$

$\mathbb{C}$: $=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为根).

1.19. (1). 法一：$x^4+3x+5$ 无有理根，故若可约一定为 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

比较系数可知无解.

法二：考虑 $\bar{f}(x)\in\mathbb{F}_3[x]=x^4+5$，在 $\mathbb{F}_3$ 上无根.

故只可能分为二次多项式之积. 而 $\mathbb{F}_3[x]$ 上二次不可约多项式
不可约

为 $x^2+1$，$x^2+x+2$，$x^2+2x+2$，$2x^2+2$，$2x^2+2x+1$，$2x^2+x+1$. 均不整除 $f(x)$.

(在 $\mathbb{F}_2[x]$ 上亦可，$\bar{f}(x)=x^4+x+1$，无根在 $\mathbb{F}_2$，且 $\mathbb{F}_2[x]$ 上唯一二次

不可约多项式为 $x^2+x+1$)

1.20. 若 $n$ 不为素数，$n=ab$，$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{x^n-1}{x-1}=\dfrac{x^{ab}-1}{x-1}$

$=\dfrac{(x^a-1)}{x-1}(1+x^b+\cdots+x^{(a-1)b})$ 而 $x-1\mid x^a-1$ 故可约，矛盾！ □.

注：$\Phi_p(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}$ 为分圆多项式，故原题是充要条件！