§1.2 数列极限

1.2.1 数列极限的定义

什么是数列

数列就是一个接一个且永无尽头的数的排列. 例如,

$$\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \cdots,\ \boldsymbol{n},\ \cdots$$

$$\mathbf{1},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^2},\ \cdots,\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^n},\ \cdots$$

特点是有头无尾, 有限个数不称为数列.

数列的表示

一般地, 数列可以表示为

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \cdots,\ \boldsymbol{a}_n,\ \cdots$$

也可简单表示为 $\{\boldsymbol{a}_n\}$, 其中 $\boldsymbol{a}_n$ 称为数列的通项, $\boldsymbol{n}$ 称为下标, 下标不具有实

质意义, 它只是表明 a_n 为数列的第 n 项, 下标应从小到大顺序跑遍所有自然数, 下标可以用其它字母替代. 象这种可以用其它字母替代的符号称为 哑符号. 重要的是数列的通项表达式, 它给出了数列的排列规律, 知道了通项也就知道了整个数列.

收敛数列和发散数列

有一类数列具有特别重要的意义, 它的项的值随着下标增大而趋于一个特定的数. 这种数列称为收敛数列. 例如,

$$\mathbf{0.3},\ \mathbf{0.33},\ \mathbf{0.333},\ \cdots,\ \mathbf{0.}\overbrace{\mathbf{33\cdots3}}^{n\text{ 个}},\ \cdots \tag{1.1}$$

$$\mathbf{3.1},\ \mathbf{3.14},\ \mathbf{3.141},\ \mathbf{3.1415},\ \cdots \tag{1.2}$$

另一类数列是通项不趋向于一个数, 例如,

$$\mathbf{1},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{1},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \cdots,\ \mathbf{1},\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}},\ \cdots \tag{1.3}$$

定义 1 设 $\{a_n\}$ 是给定的数列. 如果有一个实数 a 具有下列性质: 对任意给定的一个正数 ε, 总存在一个自然数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

成立, 则称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限, 或数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限, 也称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a. 记成

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{或} \quad \lim a_n = a,$$

也可以记成 $a_n \to a\,(n \to \infty)$, 称为"当 n 趋于无穷时, a_n 趋于 a".

一个数列若不是收敛数列, 就称为发散数列, 或称数列是发散的.

对于 (1.1) 中的数列, 因为

$$a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \times 10^n},$$

所以, 对于任意正数 ε, 可取 $N = [1/\varepsilon] + 1$, 当 $n > N$ 时, 就有

$$\left| a_n - \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3 \times 10^n} < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

这就说明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

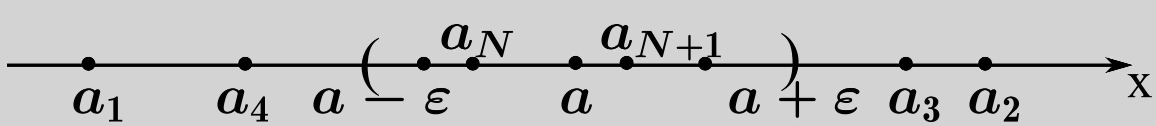
两点说明:

1. 定义中 ε 必须是任意给定的正数, 而不是某个正数, 任意性强调的是 "任意地小" 的方面, 而不是 "任意大" 的方面.

2. 当 ε 给定后, 再来寻求满足条件的 N, 因而 N 通常与 ε 有关. 一般来说, 当 ε 变小时, N 会变大. 例如上面的 $N = [1/\varepsilon] + 1$. 当 N 满足要求时, $N + 1, N + 1$ 等都满足要求, 并不需要找出满足要求最小的 N, 实际上只要指出 N 的存在性.

几何解释:

数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的几何描述是: 对于任意的正数 ε, 都存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 在实数轴上与 $\{a_n\}$ 对应的点都落在以 a 为中心以 ε 为半径的开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 中.



例 1 若 $\alpha > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

证明 分析: 希望 $|\frac{1}{n^\alpha} - 0| < \varepsilon$, 即 $\frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon$, 即

$$n^\alpha > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha},$$

只要取 $N = [(\frac{1}{\varepsilon})^{1/\alpha}] + 1$.

书写: $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N = [(\frac{1}{\varepsilon})^{1/\alpha}] + 1$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \frac{1}{N^\alpha} < \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

例 2 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$

证明 因为

$$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}},$$

所以 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N=[\frac{1}{\varepsilon^2}]+1$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n-0|<\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{N}}<\frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon^2}}=\varepsilon,$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0.$

例 3 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

证明: 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 根据数列收敛的定义, 对任意正数 ε, 存在自然数 n_1 使得当 $n>n_1$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon/2$. 现取自然数 n_2 使得

$$n_2>\frac{2(|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{n_1}-a|)}{\varepsilon}.$$

于是当 $n>N=n_1+n_2$ 时, 有

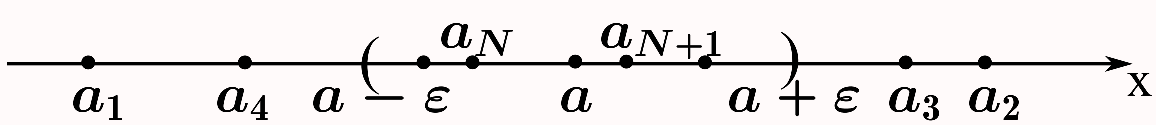
$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{a_1-a+a_2-a+\cdots+a_n-a}{n}\right|\\
\leqslant&\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{n_1}-a|}{n}+\frac{|a_{n_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\
\leqslant&\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{n_1}-a|}{n_2}+\frac{|a_{n_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n-n_1}\\
\leqslant&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

根据极限的定义知, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

数列 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限的陈述

若存在一个正数 ε_0, 使得对任意自然数 N, 都可以找到自然数 $n > N$ 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon_0$, 则 $\{a_n\}$ 不以 a 为极限.

从几何上说就是存在一个以 a 为中心的开区间, 使得这个开区间之外有无穷多个与该数列对应的点.



1.2.2 收敛数列的性质

性质 1 (**极限的唯一性**) 收敛数列的极限是唯一的.

证明 如果 $\{a_n\}$ 有两个极限值 a 和 b. 根据极限的定义可知, 对于任意的正数 ε, 对应两个极限值, 分别存在正整数 N_1 和 N_2, 使得当

$$n > N_1 \text{ 时有 } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$n > N_2 \text{ 时有 } |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

因此, 当 $n > \max(N_1, N_2)$ 时 (即 n 同时满足 $n > N_1$, $n > N_2$) , 上面两个不等式都满足, 所以

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

两个数的距离要小于任意一个数, 这两个数必须相等, 即 $a = b$. 证毕.

性质 2 (收敛数列的有界性) 收敛数列是有界的, 即, 数列中的所有项的绝对值不会超过某个固定的正数.

证明 设 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 由定义知道, 对于 $\varepsilon = 1$, 存在一个自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < 1$, 即当 $n > N$ 时, 有 $|a_n| < |a| + 1$.

取

$$M = \max(|a| + 1, \ |a_1|, \ |a_2|, \ \cdots, \ |a_N|),$$

注意到, 第一, 有限个数中一定能取到一个最大的; 第二, 上面确定的 M 显然与 n 无关. 则对所有自然数 n, 也就是数列的所有项, 都有 $|a_n| \leqslant M$.

性质 3 (数列极限的比较) 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a 和 b.

1° 如果 $a < b$, 则当 n 充分大时, 有 $a_n < b_n$.

2° 如果当 n 充分大时有 $a_n \geqslant b_n$, 则 $a \geqslant b$;

证明 1° 设 $a < b$, 取 $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, 则由定义知, 即存在正数 N_1, 使得当 $n > N_1$时, 有 $a_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$. 同理, 存在 N_2, 当 $n > N_2$ 时, 有 $b_n > b - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$. 所以当 $n > \max(N_1, N_2)$ 时, 就有 $a_n < b_n$,

2° 这是 1° 的推论. 证毕.

1.2.3 子数列

从数列 $\{a_n\}$ 中取出无穷多项按照原来的顺序排列的数列 $\{a_{n_k}\}$ 称为 $\{a_n\}$ 的子数列.

定理 1 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\{a_n\}$ 的任何子列也收敛于 a.

证明 设 $\{a_{n_k}\}$ $(k \geqslant 1)$ 是 $\{a_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 的一个子列, 对于任意给定的正数 ε, 我们要指出, 存在一个正数 K, 使得 $k > K$ 时, 有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$

事实上, 由于 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 所以对于上述的 ε, 一定存在一个正数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

因为 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 而且都是正整数, 所以一定存在某个 K, 使得当 $k > K$ 时, $n_k > N$, 于是, 当 $k > K$ 时, 有

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. 证毕.

推论 1 若数列 $\{a_n\}$ 有两个子数列分别收敛于不同的数, 则 $\{a_n\}$ 发散.

由此容易说明数列 $\{(-1)^n\}$ 是发散的.

1.2.4 收敛数列的四则运算

性质 4 (数列极限的四则运算) 设 c 是常数, 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a 和 b, 则

$1°$ $\{a_n \pm b_n\}$ 收敛于 $a \pm b$;

$2°$ $\{ca_n\}$ 收敛于 ca;

$3°$ $\{a_nb_n\}$ 收敛于 ab;

$4°$ 若 $b \neq 0$, 则 $\{a_n/b_n\}$ 收敛于 a/b.

证明 $1°$ 首先对求和的情况进行证明. 即要证明, 对于任意的正数 ε, 可找到一个整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$.

由于 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 分别收敛于 a 和 b, 所以对于上述 ε, 分别存在 N_1 和 N_2 使得,

$$\text{当 } n > N_1 \text{ 时, 有 } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

以及

$$\text{当 } n > N_2 \text{ 时, 有 } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

因此, 若取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时, 上面两个式子同时成立, 所以有

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

同样可证明两个数列相减的情况.

3° 首先注意到

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leqslant |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|. \end{aligned}$$

其次注意到, 由于 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是收敛数列, 故都是有界的, 取一个大的界 M, 使得

$$|a_n|, \ |b_n| < M \quad (n \geqslant 1).$$

因而 $|b| \leqslant M$. 而且, 对于任意的正数 ε, 存在一个整数 N, 使得当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

同时成立. 所以当 $n > N$时, 有

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &< M|b_n - b| + M|a_n - a| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

4° 因为

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n},$$

由 3° 可知, 只需证明数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 收敛于 $\frac{1}{b}$ 即可.

不妨假定 $b > 0$. 我们有

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|}.$$

所以, 对于任意给定的正数 ε, 存在 N, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$b_n > b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

及

$$|b_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}.$$

故知, 当 $n > N$ 时

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \frac{2}{b^2} \cdot \frac{b^2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. 证毕.

例 4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-n+5}{2n^3+n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=\frac{3}{2}.$$

例 6 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5\cdot 3^n}{3^n+5\cdot 2^n}.$$

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5\cdot 3^n}{3^n+5\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+5}{1+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}=5.$$

这里用到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0.$$

1.2.5 夹逼原理

定理 2 (**夹逼原理**) 若数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 都收敛于 a, 且对充分大的 n, 有

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n,$$

则数列 $\{c_n\}$ 也收敛, 而且极限也为 a.

证明 因为 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛于 a, 所以对于任意给定的正数 ε, 一定存在相应的正整数 N_1 和 N_2, 使得当 $n > N_1$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$, 从而

$$a - \varepsilon < a_n.$$

当 $n > N_2$ 时, $|b_n - a| < \varepsilon$, 从而

$$b_n < a + \varepsilon.$$

条件中所谓 "对充分大的 n" , 即表明存在整数 N_3, 使得当 $n > N_3$ 时, 有

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n.$$

现在取 $N = \max(N_1, N_2, N_3)$, 则当 $n > N$ 时, 上述三个不等式同时满足, 进而有

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a + \varepsilon.$$

即 $|c_n - a| < \varepsilon$, 这表明 $\{c_n\}$ 收敛于 a. 证毕.

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}}$, 其中 α 是给定的正实数.

解 当 $\alpha > 0$ 时, 显然有

$$1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} < 1 + \frac{1}{n^\alpha}$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1$, 所以应用定理 2, 所求极限为 1.

例 8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 注意到

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}},\quad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

所以, 利用定理 2, 可知所求的极限为 1.

例 9 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明 命 $\sqrt[n]{n} = 1 + \lambda_n$, 则有

$$n = (1+\lambda_n)^n = 1 + n\lambda_n + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2 + \cdots > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2,$$

由上式解得 $\lambda_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$, 故有

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 = \lambda_n < \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

由两边夹定理, 就得到所证结果.

1.2.6 Stolz 定理

下面的定理在求数列的极限时, 也是常用的.

定理 3 ($\frac{\infty}{\infty}$ **型** Stolz **定理**) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\{b_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A,$$

其中 A 可以是实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

证明 我们只证 A 是实数的情况, 其他情况可以类似证明. 不妨设 $\{b_n\}$ 是正数列. 假设条件成立, 则对任意正数 ε, 存在自然数 k 使得

$$A-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<A+\varepsilon,\quad n\geqslant k,$$

即,

$$(A-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < (A+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n), \quad n \geqslant k.$$

在上面不等式中, 令 n 分别取 $k, k+1, \cdots, k+p-1$ 并将所得不等式求和, 得到

$$(A-\varepsilon)(b_{k+p}-b_k) < a_{k+p}-a_k < (A+\varepsilon)(b_{k+p}-b_k).$$

因此,

$$\frac{a_k}{b_{k+p}}-\frac{Ab_k}{b_{k+p}}-\varepsilon\left(1-\frac{b_k}{b_{k+p}}\right) < \frac{a_{k+p}}{b_{k+p}}-A < \frac{a_k}{b_{k+p}}-\frac{Ab_k}{b_{k+p}}+\varepsilon\left(1-\frac{b_k}{b_{k+p}}\right).$$

注意到 $\{b_n\}$ 趋于 $+\infty$, 对固定的 k 存在自然数 q, 使得当 $p>q$ 时, 有

$$-\varepsilon < \frac{a_k}{b_{k+p}}-\frac{Ab_k}{b_{k+p}} < \varepsilon.$$

于是当 $p>q$ 时, 有

$$-2\varepsilon < \frac{a_{k+p}}{b_{k+p}}-A < 2\varepsilon.$$

从而定理得证.

例 10 设 $\{a_n\}$ 是数列, 且 $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

证明 令 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = n$. 则 $\{B_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}-A_n}{B_{n+1}-B_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. 根据 Stolz 定理, 即得结论.

例 11 设 k 是自然数. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$.

解 根据 Stolz 定理, 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{\sum_{i=0}^{k} C_{k+1}^{i} n^i} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^k}{\sum_{i=0}^{k} C_{k+1}^{i} (1/n)^{k-i}} = \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

1.2.7 确界原理

设 X 是一个由一些实数组成的非空集合. 如果 $a \in X$, 且对任意 $x \in X$, 有 $x \leqslant a$, 那么 a 称为 X 的极大元. 如果 $a \in X$, 且对任意 $x \in X$, 有 $x \geqslant a$, 那么 a 称为 X 的极小元. 如果存在一个实数 A, 使得对于任何 $x \in X$, 有 $x \leqslant A$, 则称 A 是数集 X 的一个上界. 如果存在实数 B, 使得对于任何 $x \in X$, 有 $x \geqslant B$, 则称 B 是数集 X 的一个下界. 如果数集 X 既有上界, 又有下界, 则称 X 是有界集合.

显然, 极大元是一个上界, 极小元是一个下界, 而且极大元和极小元都是唯一的. 但是如果数集 X 有上界 (或者下界), 则它的上界 (或者下界) 一定不是唯一的. 我们感兴趣的是最小的上界或最大的下界.

所谓数集 X 的最小的上界 A 是指: 第一, A 是它的一个上界; 第二, 比 A 小一点点的数都不是它的上界. 用数学的语言来描述就是, 对于任意的正数 ε, 数 $A-\varepsilon$ 都不是 X 的上界, 因此一定存在一个数 $x_\varepsilon \in X$, 使得 $x_\varepsilon > A-\varepsilon$. 这种最小的上界称为 X 的上确界, 记为 $\sup X$. 同理可定义下确界, 记为 $\inf X$. 容易看出, 上确界是上界中的极小元, 而下确界是下界中极大元, 因此上确界和下确界只要存在必定是唯一的.

例如:

$$\inf\left\{\frac{1}{n},\ n=1,2,\cdots\right\}=0,\quad \sup\left\{\frac{1}{n},\ n=1,2,\cdots\right\}=1$$

$$\inf(0,\ 1)=0,\quad \sup(0,\ 1)=1$$

顺便指出, 如果 X 没有上界, 则记 $\sup X=+\infty$. 如果 X 没有下界, 则记 $\inf X=-\infty$.

定理 4 (**确界原理**) 非空有上界的数集 X 必有上确界; 非空有下界的数集 X 必有下确界.

证明 设 X 是一个非空有上界的集合, 记 Y 是 X 的所有上界构成的集合, 当然 Y 是非空数集, 且对于任意 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 有 $x \leqslant y$. 根据完备公理, 存在实数 c 使得对于任意 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 有 $x \leqslant c \leqslant y$. 这说明 c 是 X 一个上界, 而且 Y 中任意元素都不比它小, 因此, c 是 X 的最小上界, 即, 上确界. 同理可证下确界的情况. 证毕.

定理 5 (单调有界判别法) 单调数列收敛的充分必要条件是其为有界数列.

证明 设数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 因此根据确界原理, 数集

$$X = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$$

必有上确界, 记为 a. 我们将看到, a 就是数列 $\{a_n\}$ 的极限. 注意到, 对于任意给定的正数 ε, 数 $a-\varepsilon$ 不是 X 的上界, 因此数列中存在一个项 $a_N \in X$, 使得 $a_N > a-\varepsilon$. 又因为 $\{a_n\}$ 是单调递增的, 所以当 $n > N$ 时, 有 $a_n \geqslant a_N > a-\varepsilon$ 显然 $a+\varepsilon > a \geqslant a_n$ 对任何 n 成立. 所以当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 因而, $\lim a_n = a$. 证毕.

例 12 设 $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (n 重根式), 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 a_n 就是由如下递推关系 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ 定义的一个数列. 首先观察到: $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > a_1$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} > \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$. 如果 $a_n > a_{n-1}$ 成立, 则

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + 2} - \sqrt{a_{n-1} + 2} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{a_n + 2} + \sqrt{a_{n-1} + 2}} > 0,$$

即 $a_{n+1} > a_n$, 所以由归纳法证得, $\{a_n\}$ 是单调递增的.

另一方面, 显然 $a_1 < 2$, 若 $a_n < 2$, 则 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} < 2$. 即数列 $\{a_n\}$ 是有上界的. 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设其极限为 a. 将递推公式变为

$$a_{n+1}^2 = a_n + 2$$

在上式两端令 $n \to \infty$ 得 $a^2 = a + 2$, 解得 $a = -1$ 或 $a = 2$. 但是 $a_n > 0$, 故 $a \geqslant 0$, 从而可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

定理 6 (Bolzano-Weierestrass **定理**) 有界数列一定存在收敛的子列.

证明 设 $\{a_n\}$ 是一个有界的数列, 不妨设 $\{a_n\} \subset [c, d]$. $[c, \frac{c+d}{2}]$ 和 $[\frac{c+d}{2}, d]$ 这两个区间中至少有一个含有数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 记这个区间为 $[c_1, d_1]$. 同样, 在 $[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}]$ 和 $[\frac{c_1+d_1}{2}, d_1]$ 这两个区间中至少有一个含有数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 记这个区间为 $[c_2, d_2]$. 继续做下去, 可得一列区间 $[c_k, d_k]$, $k = 1, 2, \cdots$, 使得每个这样的区间都含有数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 且

$$d_k - c_k = \frac{1}{2^k}(d - c),\ k = 1, 2, \cdots ,$$

$$c \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_{k-1} \leqslant c_k < d_k \leqslant d_{k-1} \leqslant \cdots \leqslant d_1 \leqslant d.$$

由这两个式子并根据定理 5, 可知

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} d_k = a.$$

在 $[c_1, d_1]$ 中取数列的一项 a_{n_1}, 接着在 $[c_2, d_2]$ 中取 a_{n_2}, 且 $n_2 > n_1$. 继续下去, 可取 $\{a_n\}$ 的子列 $a_{n_k} \in [c_k, d_k]$. 根据两边夹定理得 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. 证毕.

定义 2 数列 $\{a_n\}$ 称为 Cauchy 数列 (或基本列), 若对任意给定的正数 ε, 存在整数 $N = N(\varepsilon)$ (即 N 可能依赖于 ε), 使得当 $m, n > N$ 时, 就有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

注意, 基本列的条件也可以说成: 对任意给定的正数 ε, 存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

对所有自然数 p 成立.

定理 7 (Cauchy **准则**) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是: $\{a_n\}$ 是基本列.

证明 必要性是容易证明的, 下面证明充分性. 对于正数 1, 存在整数 N_1, 使得当 $m, n \geqslant N_1$ 时, 有 $|a_m - a_n| < 1$. 令

$$M = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{N_1}|, |a_{N_1}| + 1).$$

则有 $|a_n| \leqslant M, n = 1, 2, \cdots$. 这说明 $\{a_n\}$ 是有界的. 由定理 6, 存在收敛的子列 $\{a_{n_k}\}$.

因为 $\{a_n\}$ 是基本列, 所以对任意正数 ε, 存在整数 N_2, 使得当 $m, n \geqslant N_2$ 时, 有 $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. 因为 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$, 对于这个 ε, 存在一个整数 K, 使得当 $k > K$ 时, 有 $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 特别可取一个 n_k 使得 $n_k > N_2$ 且 $k > K$. 于是, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 证毕.

例 13 设 $a_n = \frac{\sin 1}{1^2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2}$, 求证 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 因为

$$\begin{aligned}|a_{n+p} - a_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

所以, 对于任意给定的正数 ε, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n > N$ 时, 对任何自然数 p 都有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

由 Cauchy 准则可知 $\{a_n\}$ 收敛.

例 14 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. 求证 $\{a_n\}$ 发散.

证明 对任何自然数 n, 取 $p = n$, 则有

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

由 Cauchy 准则可知 $\{a_n\}$ 发散.

一般地, 设 $\alpha > 1$,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha},$$

则 $\{a_n\}$ 收敛.

1.2.8 自然对数底 e

定理 8 设 $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geqslant 1$, 则数列 $\{e_n\}$ 收敛.

证明 由平均不等式

$$e_n = 1 \cdot \overbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdots \left(1+\frac{1}{n}\right)}^{n\text{ 个}}$$

$$< \left(\frac{1+n(1+\frac{1}{n})}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}.$$

这说明 $\{e_n\}$ 是单调递增数列.

令 $d_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. 由平均不等式

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = 1 \cdot \overbrace{\frac{n}{n+1} \cdots \frac{n}{n+1}}^{n+1\text{ 个}}$$
$$< \left(\frac{1 + (n+1)\frac{n}{n+1}}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2},$$

即 $\frac{1}{d_n} < \frac{1}{d_{n+1}}$, 因而 $d_n > d_{n+1}$. 于是有

$$e_1 < e_2 < \cdots < e_n < d_n < d_{n-1} < \cdots < d_2 < d_1.$$

由此可知数列 $\{e_n\}$ 严格单调递增有上界, 所以此数列收敛.

记

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

以后我们将用 Taylor 展开的方法进一步证明, e 是一个无理数, 其数值是 $e = 2.718281828\cdots$. 在微积分以及在工程技术运用中, 常用到以 e 为底的对数, 这种对数称为自然对数, 简记为 ln.

例 15 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) \\ &= e.\end{aligned}$$

1.2.9 发散到无穷大的数列

定义 3 设 $\{a_n\}$ 是给定的数列, 若对于任意给定的正数 M, 都存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n| > M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散到无穷大, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \text{或} \quad a_n \to \infty \ (n \to \infty)$$

例如, $\{n\}$, $\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\}$, $\{-\sqrt{n}\}$, $\{(-1)^n n\}$.

定义 4 设 $\{a_n\}$ 是给定的数列, 若对于任意给定的正数 M, 都存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散到正无穷大, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, \quad \text{或} \quad a_n \to +\infty \ (n \to \infty)$$

定义 5 设 $\{a_n\}$ 是给定的数列, 若对于任意给定的正数 M, 都存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < -M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 发散到负无穷大, 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, \quad \text{或} \quad a_n \to -\infty \ (n \to \infty)$$

定理 9 单调数列发散到无穷大的充分必要条件是其为一个无界数列.

证明 条件的必要性是显然的. 现在证明充分性, 我们考虑单调递增的情形, 即: 如果 $\{a_n\}$ 是单调递增但无上界的数列, 则 $a_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$.

事实上, 对任意的正数 M, 因为 $\{a_n\}$ 无上界, 故必然存在自然数 N, 使得 $a_N > M$. 由于数列是单调递增的, 所以当 $n > N$ 时, 有 $a_n > a_N > M$. 这就是所要的证明. 证毕.

1.2.10 上极限与下极限

我们知道收敛数列是有界的而且任何子列与原数列有相同的极限. 又根据定理 6, 有界数列必有收敛子列. 一般来说有界数列可能有许多有不同极限的子列. 如果 a 是数列 $\{a_n\}$ 的某个子列的极限, 那么称 a 为 $\{a_n\}$ 的一个部分极限. 我们要问: 当有界数列的任何收敛子列都有相同的极限时, 也就是只有一个部分极限, 该有界数列是否收敛? 回答是肯定的, 证明留作习题.

因此, 不收敛的有界数列至少有两个子列分别收敛到不同的数. 显然有界数列的所有子列的极限所成的集合仍是有界的集合, 这个集合有确定的上确界和下确界. 对于无界的数列, 也可以取出趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 的子列.

对于数列 $\{a_n\}$, 集合

$$\mathrm{E} = \{l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} : \ a_n \text{ 中有子列 } a_{k_n} \to l,\, n \to \infty\}$$

总是非空的. 令 $a^* = \sup \mathrm{E}$, $a_* = \inf \mathrm{E}$, 他们分别被称为数列 $\{a_n\}$ 的上极限和下极限, 记作

$$\limsup_{n\to\infty} a_n, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n, \quad \text{或者} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

根据上确界和下确界的定义, 可以证明 a^* 和 a_* 都在 E 中, 因此有界数列 $\{a_n\}$ 的上(下)极限正是它的一切收敛子列的极限所组成的集合中的最大(小)者. 显然下确界不超过上确界, 而且不难证明 $a_n \to a$ 等价于 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = a$.

返回 全屏 关闭 退出

定理 10 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} a_k$, $\quad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} a_k$.

证明 我们只对有界数列的情况证明. 设 $\{a_n\}$ 是一个有界数列, 则集合 $B_n = \{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$ 是有界数集, 记

$$\beta_n = \inf B_n = \inf_{k\geqslant n} a_k.$$

不难看出 $\{\beta_n\}$ 单调递增且有界, 因此有极限 $\beta = \lim \beta_n$. 利用下确界的定义, 存在自然数 k_1 使得

$$\beta_1 \leqslant a_{k_1} < \beta_1 + 1.$$

又存在 $k_2 \geqslant k_1 + 1$ 使得

$$\beta_{k_1+1} \leqslant a_{k_2} < \beta_{k_1+1} + \frac{1}{2}.$$

按此法可归纳地选出自然数 k_n 使得

$$\beta_{k_{n-1}+1} \leqslant a_{k_n} < \beta_{k_{n-1}+1} + \frac{1}{n},$$

以及 $k_{n-1} < k_n$. 因为 $\{\beta_{k_{n-1}+1}\}$ 是 $\{\beta_n\}$ 的子列, 它有极限 β, 所以根据夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \beta$. 这说明 β 是一个部分极限.

β 也是最小的部分极限, 因为对每个 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 n, 使得 $\beta - \varepsilon < \beta_n$. 因此当 $k \geqslant n$ 时, 有 $a_k \geqslant \beta_n > \beta - \varepsilon$. 由此知 $\{a_n\}$ 的部分极限都不会比 $\beta - \varepsilon$ 小. 因为 ε 是任意正数, 所以部分极限都不会比 β 小, 这说明 β 是最小的部分极限. 即, $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$. 同理可证明上极限的情况.

性质 5

$$\varliminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} a_n \tag{1}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\varliminf_{n\to\infty} a_n \tag{2}$$

性质 6 下面的式子两端都有意义时成立:

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \tag{3}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \tag{4}$$

当 a_n, b_n 都非负时, 上面式子中的加号改为乘号时也成立.

证明 设 $a = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 任意自然数 N, 存在自然数 $n > N$ 使得 $a_n < a + \varepsilon,\quad b_n < b + \varepsilon$. 因而

$$a_n + b_n < a + b + 2\varepsilon.$$

这说明

$$\varliminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leqslant a + b + 2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$, 即得 (3) 右端的不等式. 其它相关不等式可类似证明.