# 思考题讨论

- 思考题2.3 比较感应电荷与极化电荷、极化电荷与束缚电荷的区别。
- 思考题2.4 如何理解温度对两种极化的影响？

# 第八讲 2022-03-17

# 第2章 静电场中的导体和电介质

§ 2.1 物质的电性质

§ 2.2 静电场中的导体

§ 2.3 电容与电容器

§ 2.4 电介质

§ 2.5 极化强度矢量***P***

§ 2.6 电介质中静电场的基本定理

§ 2.7 边值关系和唯一性定理

§ 2.8 电像法

# §2.5 极化强度矢量$\boldsymbol{P}$

## 1. 极化强度矢量$\boldsymbol{P}$

- 引入：电介质极化后，在其内部任意体积元$\Delta V$内$\sum \boldsymbol{p}_{分子} \neq 0$，如何在宏观上定量描述介质的极化？
- 定义：单位体积内分子电偶极矩的矢量和为极化强度矢量。

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \boldsymbol{p}_{分子}}{\Delta V}$$

➢描述介质在外电场作用下被极化的程度

➢单位：库仑/米$^2$，$\mathrm{C \cdot m^{-2}}$。

$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum \boldsymbol{p}_{分子}}{\Delta V}$$

微观量

宏观量

介质的体积元，
宏观小微观大

- 极化强度是一个宏观矢量，微观尺度下无意义
- 电介质中每一个点有唯一的极化强度，
- 若$\boldsymbol{P}$值处处相同，则称电介质在电场中均匀极化
- 极化强度是分子电偶极矩大小和空间有序化程度的综合反映

- 极化电荷分布

➢ 面分布：对于均匀极化，$q'$只能出现在介质表面

➢ 体分布：非均匀极化，$q'$还可能出现在介质内部

- 极化过程分析

➢ 极化电荷产生与外场相反或大致相反的附加场$\boldsymbol{E}'$，减弱外场对介质的影响，故而$\boldsymbol{E}'$也称退极化场

➢ 总电场$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'$决定介质的极化程度

➢ $\boldsymbol{E}'$与极化程度，因而与极化电荷相关，所以极化过程中，极化电荷与外场相互影响、相互制约，直至达到平衡

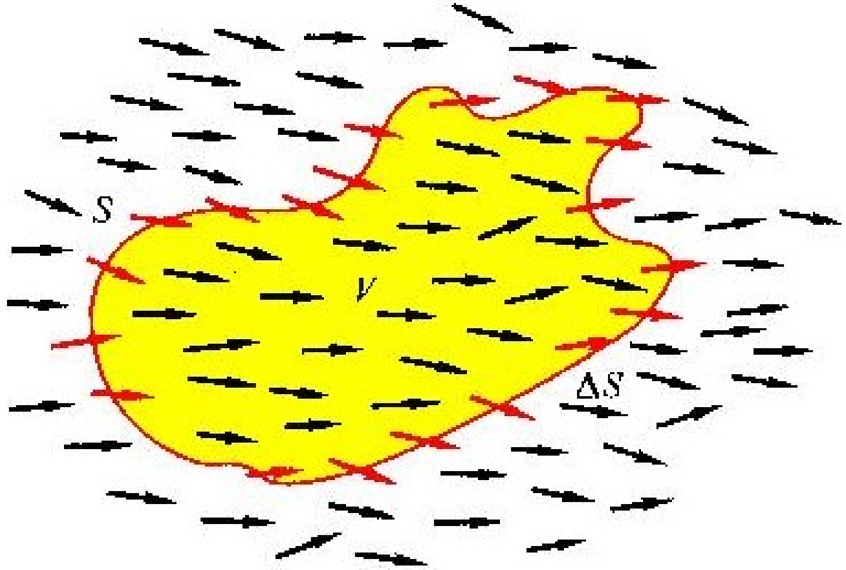
## 与极化相关物理量

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{P} \\ q'(\sigma'_{\mathrm{e}}, \rho'_{\mathrm{e}}) \\ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}' \end{array}\right\} \text{描述极化}$$

三者分别从极化程度、极化电荷和极化电场这三个不同角度来描绘介质极化这一件事情，所以它们之间大概率有关系！这些关系就是电介质极化遵循的规律。

## 2. $\boldsymbol{P}$与极化电荷的关系

1) $\boldsymbol{P}$与$\rho_e'$关系：



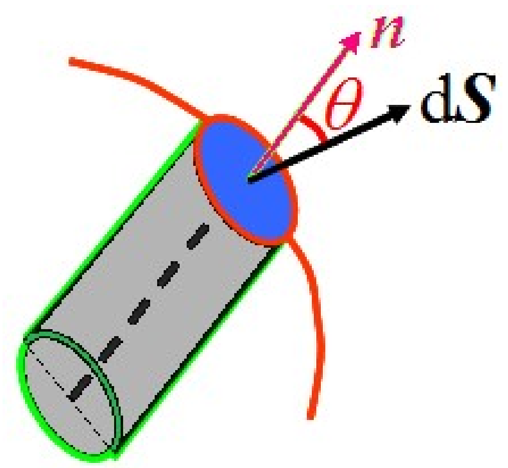

以$S$为边界的区域$V$中的极化电荷等于$S$内侧附近的极化电荷！因为远离$S$的分子没有净的贡献。

先考虑位移极化：每个分子有相同感应电偶极矩，

$$\boldsymbol{P} = \frac{\Delta N q \boldsymbol{l}_{分子}}{\Delta V} = nq\boldsymbol{l}_{分子} = n\boldsymbol{p}_{分子}$$

其中$n$是分子数密度，以下略去下标“分子”。

考查面元d$\boldsymbol{S}$，设$\boldsymbol{p}$和d$\boldsymbol{S}$夹$\theta$角。




当$\theta$<90°时，每个横跨d$\boldsymbol{S}$的分子产生极化电荷$-q$。这些分子的负电中心位于底面为d$S$，长为$l$的斜柱体内，数目$nl\mathrm{d}S\cos\theta$，贡献极化电荷

$-qnl\mathrm{d}S\cos\theta=-n\boldsymbol{p}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$。

当$\theta$>90°时，每个横跨d$\boldsymbol{S}$的分子产生极化电荷$+q$。斜柱体贡献的极化电荷仍然是$-\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，因为此时$\cos\theta<0$。于是$V$中的总极化电荷

$$Q' = -\oiint_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \rho_e'\mathrm{d}V$$

再考虑取向极化：这时分子的电偶极矩有不同取向，设电偶极矩为$\boldsymbol{p}_i$的分子数密度为$n_i$，在d$S$上贡献极化电荷

$$\mathrm{d}Q_i' = -n_i \boldsymbol{p}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

d$S$上总极化电荷

$$\mathrm{d}Q' = \sum_i \mathrm{d}Q_i' = -\sum_i n_i \boldsymbol{p}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \quad (\Leftarrow \boldsymbol{P} = \sum_i n_i \boldsymbol{p}_i)$$

$$\therefore Q' = -\oiint_S \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \rho_{\mathrm{e}}' \mathrm{d}V$$

可见，取向极化和位移极化虽然微观机制不同，但两情形下的极化强度与极化电荷的关系一样。回顾推演过程，体系的线性性起到了关键作用。

微分形式

利用数学上的高斯定理可得

$$-\oiint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{P}\,\mathrm{d}V = \iiint_V \rho_e'\,\mathrm{d}V$$

其中$V$是$S$所包围的体积。由于$S$的任意性，$V$也是任意的，所以上式中的两个体积分可同时去掉，得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{P} = -\rho_e'.$$

(类似地，从关于$\boldsymbol{E}$的积分形式的高斯定理

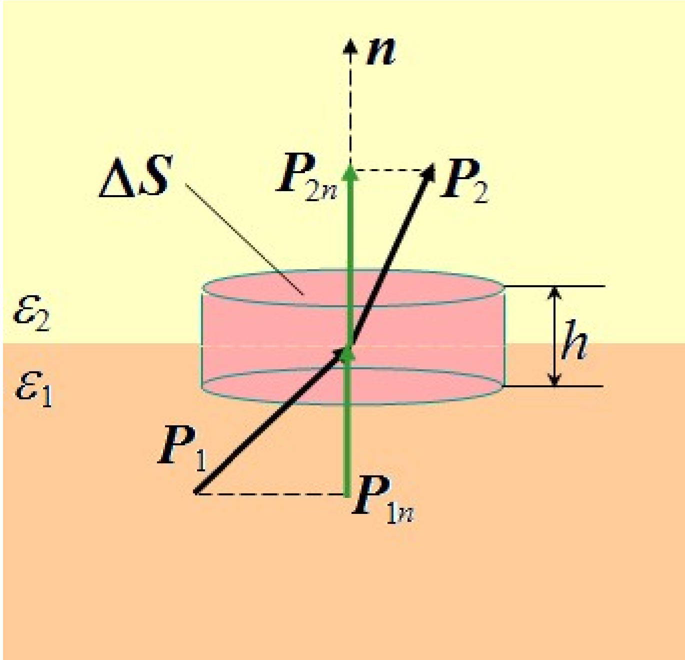
$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \rho_e\,\mathrm{d}V/\varepsilon_0$$

可得其微分形式 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_e/\varepsilon_0$)

推论：极化体电荷只出现在非均匀极化处。

## 2) $\boldsymbol{P}$与$\sigma_e'$关系

在介质分界面取面元$\Delta \boldsymbol{S}$，过$\Delta \boldsymbol{S}$作扁柱形高斯面 ($h\to 0$)




$$Q' = -\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\sigma_e' \,\mathrm{d}S = -(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

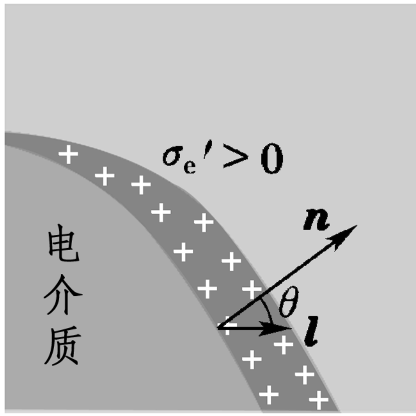
$$\sigma_e' = -(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1)\cdot \boldsymbol{n}$$

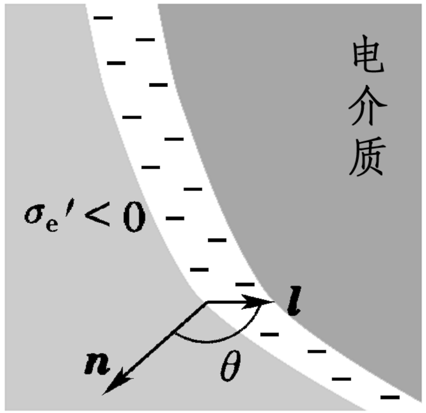
特别地，电介质2为真空时

$$\sigma_e' = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} \quad (\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{P}_2 = 0)$$

$$\theta < 90^\circ,\ \sigma_e' = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = P_n > 0$$

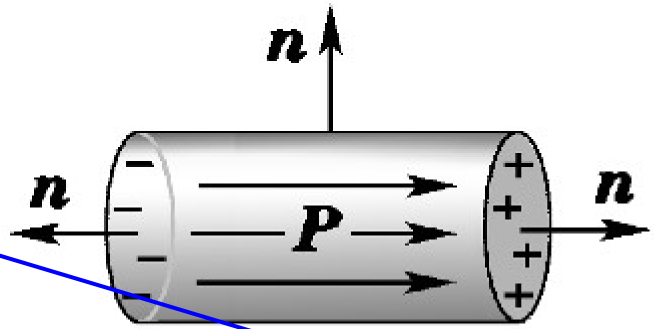
$$\theta > 90^\circ,\ \sigma_e' = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = P_n < 0$$



[例2.3] 沿轴均匀极化的电介质圆棒，长$2l$，半径$R$，极化强度矢量$\boldsymbol{P}$。求极化电荷分布和体内轴线上的$\boldsymbol{E}'$。

[解] 1) $\boldsymbol{P}$是常数→ $\rho_e' = -\nabla\cdot\boldsymbol{P} = 0$




2) $\sigma_e' = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}.$ $\theta=\pi,\ \sigma_e' = -P;$

$\theta=\pi/2,\ \sigma_e'=0;$ $\theta=0,\ \sigma_e'=P.$

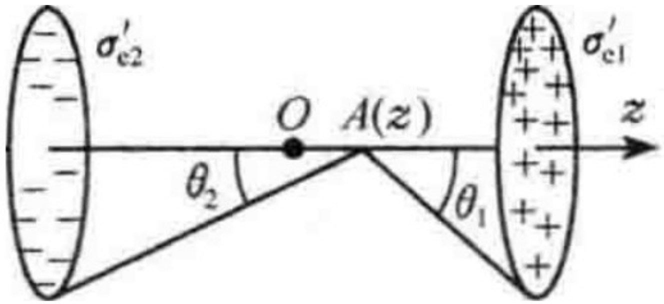
3) 退极化场等效于两圆盘产生的电场[例1.10]

左端面

$$\boldsymbol{E}' = -(\boldsymbol{P}/2\varepsilon_0)(2-\cos\theta_1-\cos\theta_2).$$

侧面 右端面

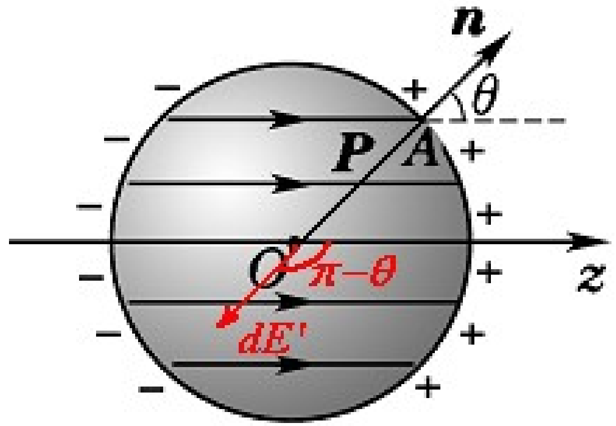
极端情形




- $\theta_1,\ \theta_2=\pi/2$，薄圆盘：$\boldsymbol{E}' = -\boldsymbol{P}/\varepsilon_0$；
- $\theta_1,\ \theta_2=0$，长细棒内部：$\boldsymbol{E}'=0$；
- $\theta_1=\pi/2,\ \theta_2=0$或下标互换，长细棒端点：$\boldsymbol{E}'=-\boldsymbol{P}/2\varepsilon_0$。

[例2.4] 均匀极化的电介质球，半径为$R$，极化强度矢量$\boldsymbol{P}$，求表面上极化电荷分布和球心处的退极化场。

[解] 1) 球关于$z$轴旋转对称，其表面任意一点的$\sigma'_e$只与$\theta$有关，则有




$$\sigma'_e = P\cos\theta \begin{cases} >0,\ \theta<\pi/2\ (\text{右半球}); \\ <0,\ \theta>\pi/2\ (\text{左半球}); \\ 0,\ \theta=\pi/2; \end{cases}$$

最大$P$, $\theta=0$；最小$-P$, $\theta=\pi$

2) 球心退极化场 (取小面元$\mathrm{d}S$，极化电荷为$\mathrm{d}q'=\sigma_e'\mathrm{d}S$)

$$\mathrm{d}E'_z = \frac{\sigma'_e \mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos(\pi-\theta) = -\frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\cos\theta,$$

$$E' = \int \mathrm{d}E'_z = -\frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = -\frac{P}{3\varepsilon_0}.$$

任意场点的$\boldsymbol{E}'$=?

## 3. *P*与*E*的关系

- 极化规律：***P~E***，即***P***对于***E***的响应
  - 电介质内任一点的***P***是由该点的总电场决定的
  - 不同电介质的极化规律不同，可由实验来测定
- 介质分类：

  根据极化规律的不同，可将介质分为
  - 各向同性电介质
  - 各向异性电介质
  - 铁电体
  - 永电体等

- 各向同性电介质

➢ $\boldsymbol{P}//\boldsymbol{E}$，且有正比关系$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}$，$\chi_e\geq 0$，称电极化率

➢ $E$不很大时，$\chi_e$与$\boldsymbol{E}$无关，线性介质

➢ $E$很大时，$\chi_e$与$\boldsymbol{E}$有关，非线性介质

- 各向异性电介质

$$\begin{cases} P_x = (\chi_e)_{xx}\varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{xy}\varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{xz}\varepsilon_0 E_z, \\ P_y = (\chi_e)_{yx}\varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{yy}\varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{yz}\varepsilon_0 E_z, \\ P_z = (\chi_e)_{zx}\varepsilon_0 E_x + (\chi_e)_{zy}\varepsilon_0 E_y + (\chi_e)_{zz}\varepsilon_0 E_z. \end{cases}$$

➢ $\boldsymbol{P}$与$\boldsymbol{E}$一般不平行，$\boldsymbol{P}=\hat{\chi}_e\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{E}$

➢ $\hat{\chi}_e$为张量形式，称作电极化率张量

➢ 线性介质$\hat{\chi}_e$与$\boldsymbol{E}$无关，且$(\chi_e)_{ij}=(\chi_e)_{ji}$，对称张量

- 铁电体

➢极化状态与极化历史有关

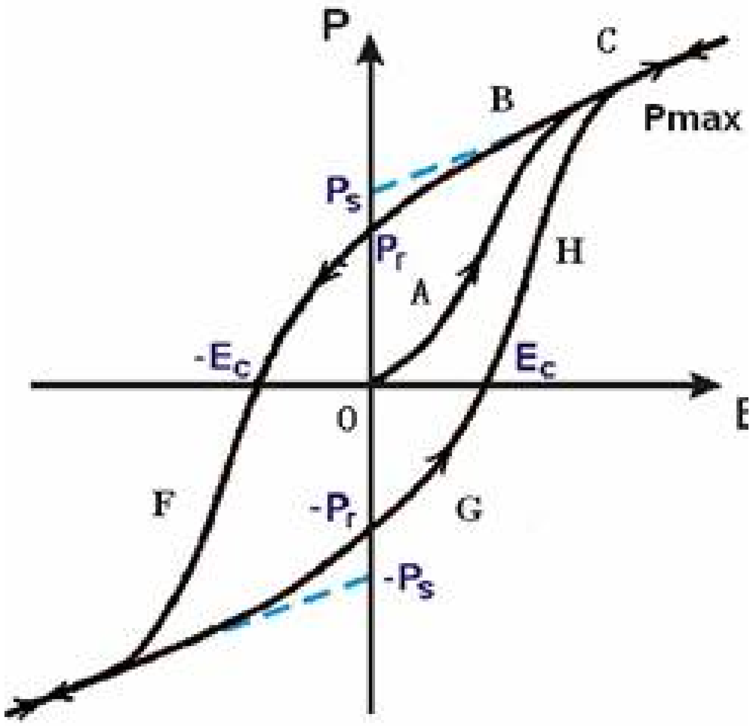
➢极化强度*P*随外场的变化非线性，呈电滞回线，有剩余极化强度，$\chi_e$随*E*变化

➢超过居里温度时铁电性消失

➢铁电体一定是压电体，但压电体不一定是铁电体

➢典型材料：酒石酸钾钠单晶、钛酸钡陶瓷等

电滞回线




*C*：饱和点

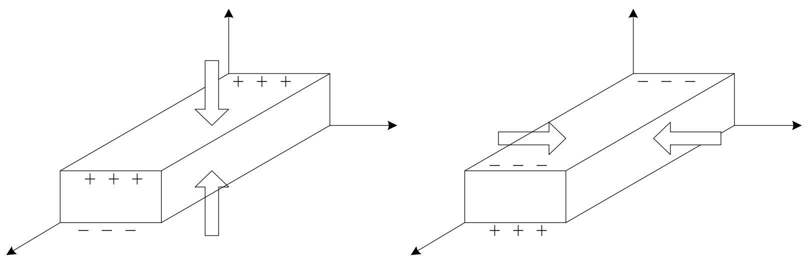
$P_r$：剩余极化强度

- 正压电效应

➢ 当晶体受到某固定方向外力的作用时，产生电极化现象，在某两个表面上产生异号电荷

➢ 当外力撤去后，晶体又恢复到不带电的状态

➢ 当外力作用方向改变时，电荷的极性也随之改变；产生的电量∝外力大小



- 逆压电效应

对晶体施加交变电场引起晶体机械变形的现象，又称电致伸缩效应。

- 驻极体（永电体）~永磁体

➢ 定义：一种具有持久性极化的固体电介质。

➢ 制作：如当蜡和松香的混合物在外加强电场中从融熔态固化后，再除去外电场时，混合物固体会长期保持极化状态。

➢ 性质：室温下驻极体的极化状态可以长期保存，但在高温下则衰减得很快。

➢ 应用：驻极体可作为静电场的源，如在电容式声电换能器中，可用驻极体代替电容的一个极板，从而省去了直流偏压。

## 从三种不同的角度来描述介质的性质

- ***P*与*E*是否成比例**

  满足—线性介质，不满足—非线性介质

- 空间均匀性

  $\chi_e$常数—均匀介质，$\chi_e$坐标函数—非均匀介质

- 方向均匀性

  $\chi_e$标量—各向同性介质，$\chi_e$张量—各向异性介质

- 例子

  空气：各向同性、线性、非均匀介质

  水晶：各向异性、线性、均匀介质

  酒石酸钾钠、钛酸钡：各向同性非线性均匀介质

[例2.5] 平行板电容器间充满极化率为$\chi_e$的各向同性均匀介质，极板自由电荷面密度为$\pm\sigma_{e0}$，求介质的$\sigma'_e$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{E}$和电容$C$。

[解] $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{E}_0$和$\boldsymbol{E}$均与极板垂直，

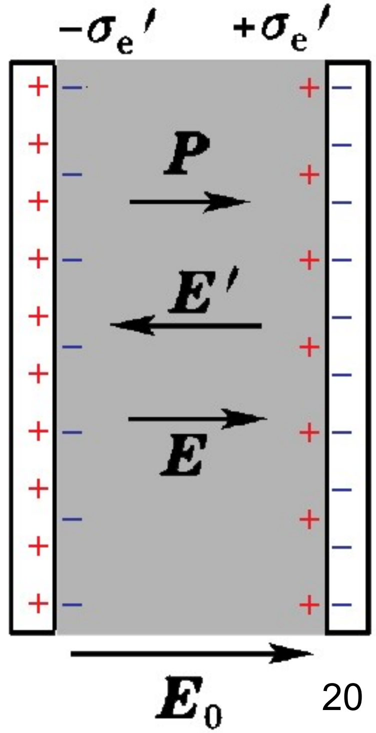
$$E = E_0 + E',\quad E_0 = \sigma_{e0}/\varepsilon_0,\quad E' = -\sigma'_e/\varepsilon_0 = -P/\varepsilon_0 = -\chi_e E$$

解得 $E = E_0/(1+\chi_e) = \sigma_{e0}/[(1+\chi_e)\varepsilon_0]$

$$\sigma'_e = P = \chi_e\varepsilon_0 E = \frac{\chi_e\sigma_{e0}}{1+\chi_e}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_{e0}S}{Ed} = \frac{(1+\chi_e)\varepsilon_0 S}{d} = (1+\chi_e)C_0 = \varepsilon_r C_0$$

其中相对介电常数$\varepsilon_r = 1+\chi_e$。



# 作业、预习及思考题

- 作业：**2.12~2.14**
- 补充作业：求例**2.4**中电介质球内外任一点的电场强度。
- 预习：**2.6** 电介质中静电场的基本定理、**2.7** 边值关系和唯一性定理

## 下次课讨论

- 思考题**2.5** 举例说明一般情形下$\boldsymbol{E}'$与$\boldsymbol{E}_0$大致相反，而非严格反平行。
- 思考题**2.6** 找一个类于“电滞回线”的例子。