中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

2.1 解：由 Dijkstra 算法，有 $1 \to 3 \to 5$ 是 $1 \to 5$ 的最短路径，cost 为 12500

2.2. (1) 最短路问题：网络 $N=(G, s, t, c)$，引入哑元终点和新边：$\tilde{t}$，$(v, \tilde{t})$ s.t. $c(v, \tilde{t})=0$，$u(v, \tilde{t})=1$ $\forall v \in V$

则最短路径问题化为求解 $f^* = n = |V|$ 的最小成本流问题.

∵ $u(v, \tilde{t}) = 1$，$\forall v \in V$ 且 $f^* = n = |V|$

∴ $s \to t'$ 的最小成本流是 s 到 $\forall v \in V$ 的成本最小

又∵ 原网络中边容量 $u(e) = \infty$，$\forall e \in E$

∴ 是最短路径.

(2) 最大流问题：引入哑元始点和新边：

$\tilde{s}$．$(\tilde{s}, s)$ s.t. $c(\tilde{s}, s) = 0$，$u(\tilde{s}, s) = \infty$

$(\tilde{s}, t)$ s.t. $c(\tilde{s}, t) = 1$，$u(\tilde{s}, t) = \infty$

令原网络中 $c(e)=0$，$\forall e \in E$，设流值 $f^* = \sum_{e \in E} u(e)$，则最大流问题转化为求解 $\tilde{s} \to t$ 的最小成本流问题.

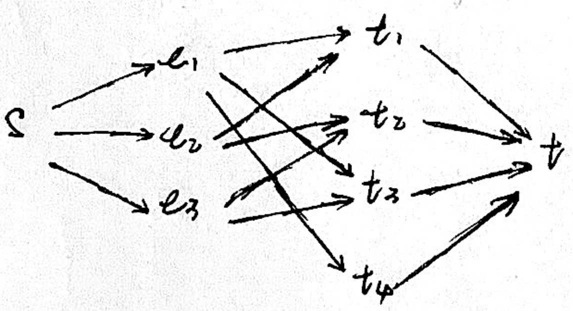
∵ $c(e) = 0$，$\forall e \in E$

∴ 若成本最小，则流经原网络流最大，其余部分由 $\tilde{s} \to t$.

∴ 是最大流

2.3. 解：参考最大二分匹配问题

(1) 流网络图：



其中，$u(s, e_i) = c_i$

$u(e_i, t_j) = 1$

$u(t_j, t) = 1$

$i = 1, 2, 3$ $j = 1, 2, 3, 4$.

(2) 最大分配任务数量为 4.

(3) $e_1 \to \{t_1, t_4\}$，$e_2 \to \{t_2\}$，$e_3 \to \{t_3\}$ (不唯一)

(4) 引入任务节点 t_5，引入新边 (e_1, t_5)，(e_3, t_5)，(t_5, t)，容量分配同 (1)，最大流量分配：

$e_1 \to \{t_1, t_4\}$，$e_2 \to \{t_2\}$，$e_3 \to \{t_3, t_5\}$ (不唯一)

中国科学技术大学

UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA

地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

3.1 解：设 $f_i(t)$ 表示第 i 年，设备年限 t 时所创造的收益

∵ 只考虑 $i=1,2,3,4,5$，不妨设 $f_6(t)=0$.

有状态转移方程：$f_i(t) = \max\begin{cases} -C_0 + V_t - P_i + f_{i+1}(1) & R(Replace) \\ -C_t + f_{i+1}(t+1) & K(Keep) \end{cases}$

∴

$f_5(4) = -90$ (K) $f_4(5) = -183$ (R) $f_3(4) = -225$ (R) $f_2(3) = -290$ (R)

$f_5(3) = -75$ (K) $f_4(3) = -165$ (K) $f_3(2) = -205$ (R) $f_2(1) = -245$ (K)

$f_5(2) = -50$ (K) $f_4(2) = -125$ (K) $f_3(1) = -165$ (K)

$f_5(1) = -40$ (K) $f_4(1) = -90$ (K)

∴ $f_1(2) = -340$ (K)

注意到，虽然计算数值时是由 $i=5 \to i=1$，但逻辑上是先有 $f_i(t)$，才需要计算对应的 $f_{i+1}(t+1)$ 和 $f_{i+1}(1)$

若第六年不卖设备，收益为 -340；若出售设备，则收益 -335

最优更新策略：KRKKK

3.2 解：(1) 设 $dp(i,j)$ 是到达 (i,j) 的最小代价.

状态转移方程：$dp(i,j) = \min\begin{cases} c_{ij} + dp(i-1,j) & down \\ c_{ij} + dp(i,j-1) & right \end{cases}$

$dp(3,3) = 9$，最小代价路径：right, right, down, down

(2) 从 $(0,0)$ 到 (m,n) 共需要 $m+n$ 步，其中 m 步向下，故共有 C_{m+n}^{m} 种不同的路径.

设 $dp[i,j]$ 是从 $(0,0)$ 到 $[i,j]$ 的不同路径数量.

状态转移方程：$dp[i,j] = \begin{cases} 1 & i=0 \text{ or } j=0 \\ d[i-1,j] + d[i,j-1] & else \end{cases}$

分别对 i, j 进行数学归纳得：$dp[i,j] = C_{i+j}^{i}$

补 2.1 中 Dijkstra 过程：

X \ V-X	2	3	4	5
{1}	4000	5400	9800	∞
{1,2}		5400	9800	12700
{1,2,3}			9800	12500
{1,2,3,4}				12500

更新 $d(v)$