- **定义3.1** （【0】定义5.4.1，【1】定义8.3.11） 设$\mathcal{C}$是一个关于$H_0: \vec{\theta} \in \Theta_0 \leftrightarrow H_1: \vec{\theta} \in \Theta_0^c$的检验类，$\mathcal{C}$中一个功效函数为$\beta(\vec{\theta})$的检验是一个一致最大功效$\mathcal{C}$类检验（Uniformly Most Powerful class $\mathcal{C}$ Test），简记*UMPT*，如果对于每一个$\vec{\theta} \in \Theta_0^c$ 与每一个$\mathcal{C}$中的检验的功效函数$\widetilde{\beta}(\vec{\theta})$，都有$\beta(\vec{\theta}) \geq \widetilde{\beta}(\vec{\theta})$。

注 若我们只考虑$\mathcal{C} = \{$ 水平为α的检验$\}$，此时定义3.1中UMPT也称为水平为α的UMPT.

问题 如何找到水平为α的一致最大功效检验（UMPT）？

Theorem (3.1, Neyman-Pearson 引理，简记N-P引理)

（【0】定理5.4.1，【1】定理8.3.12）设样本联合概率密度/质量函数为$f(\vec{x}|\theta)$，考虑检验问题：

$$\text{(I)} \qquad H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1,$$

如果一个检验对应的拒绝域R满足对于某个常数$k > 0$，

$$\left.\begin{array}{ll} \text{若} f(\vec{x}|\theta_1) > kf(\vec{x}|\theta_0), & \text{则} \vec{x} \in R \\ \text{若} f(\vec{x}|\theta_1) < kf(\vec{x}|\theta_0), & \text{则} \vec{x} \in R^c \end{array}\right\} \quad (3.1)$$

而且 $$\mathbb{P}_{\theta_0}(\vec{X} \in R) = \alpha \qquad (3.2)$$

则此检验是检验问题(I)的水平α的$UMPT$.

注 N-P引理描述了简单假设（Simple Hypotheses）情形下，哪些检验是水平为α的UMPT。这里简单假设指的是H_0和H_1中都只含有一个关于总体的概率分布。

Corollary (3.1)

（【1】推论8.3.13） 考虑定理3.1中的假设检验问题，设$T(\vec{X})$是一个关于$\vec{\theta}$的充分统计量，$g(\vec{t}\,|\,\vec{\theta})$是$T$的概率密度/质量函数，则任何一个基于$T$的拒绝域$\widetilde{R}$的检验，如果满足对于某个常数$k>0$，

$$\left.\begin{array}{ll} 若 g(\vec{t}\,|\,\vec{\theta}_1) > kg(\vec{t}\,|\,\vec{\theta}_0), & 则 \vec{t} \in \widetilde{R} \\ 若 g(\vec{t}\,|\,\vec{\theta}_1) < kg(\vec{t}\,|\,\vec{\theta}_0), & 则 \vec{t} \in \widetilde{R}^c \end{array}\right\} \quad (3.1')$$

而且
$$\mathbb{P}_{\vec{\theta}_0}(T \in \widetilde{R}) = \alpha \qquad (3.2')$$

则这个检验就是检验问题(I)的水平α的$UMPT$。

Example (3.1)

（【0】例5.4.1） 设$X_1, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\sigma^2 > 0$ 已知，求检验问题$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu = \mu_1$ 水平为α的UMPT，这里$\mu_0 > \mu_1$.

Example (3.2)

（【0】例5.4.2） 设$X_1, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim Bernoulli(p)$，$p \in (0, 1)$ 未知，求检验问题$H_0 : p = p_0 \leftrightarrow H_1 : p = p_1$ 水平为α的UMPT，这里$p_0 < p_1$.

- **定义3.2** 称一元随机变量T的概率密度/质量函数$g(t|\theta), \theta \in \Theta$ 关于实值参数θ具有**单调似然比**(Monotone Likelihood Ratio, 简记MLR), 如果对于任意$\theta_2 > \theta_1$，函数$\frac{g(t|\theta_2)}{g(t|\theta_1)}$ 在$\{t : g(t|\theta_1) > 0或t : g(t|\theta_2) > 0\}$ 上都是t 的单调非降或非增函数。

注1 定义中如果出现$0 = g(t|\theta_1) < g(t|\theta_2) = c$，则定义$\frac{c}{0} = \infty$.

注2 任意一个（正则）指数族$g(t|\theta) = h(t)c(\theta)e^{w(\theta)t}$，其中$w(\theta)$是一个单调非降或非增函数，都有MLR.

注3 若T的概率密度/质量函数$g(t|\theta)$ 关于θ具有非降MLR，则对于任意$t_0 \in \mathbb{R}$，$\mathbb{P}_\theta(T > t_0)$是$\theta$ 的一个非降函数，$\mathbb{P}_\theta(T < t_0)$是$\theta$ 的一个非增函数。（参考【1】习题8.34，【2】定理3.7）

Theorem (3.2, Karlin-Rubin (简记K-R)定理)

（【1】定理8.3.17） 考虑检验问题：

$$\text{(II)} \qquad H_0 : \theta \le \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0.$$

设T是一个关于θ的充分统计量，并且T的概率密度/质量函数$g(t|\theta)$, $\theta \in \Theta$ 关于θ具有非降MLR，则对于任何t_0, 检验

$$当T > t_0时拒绝H_0$$

是一个水平为α的$UMPT$，其中$\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(T > t_0)$.

- **证明** 见【1】.

注 由上述定理证明过程可知，在与定理2.2具有相同条件（T存在非降MLR）下，“当$T > t_0$时拒绝H_0”是检验问题

$$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta = \theta_1, \text{其中}\theta_1 > \theta_0$$

水平为α的UMPT，其中$\alpha = \mathbb{P}_{\theta_0}(T > t_0)$.

K-R定理推论

Corollary (3.2)

考虑检验问题$H_0:\theta\ge\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta<\theta_0$。设$T$是一个关于$\theta$的充分统计量，并且$T$的概率密度/质量函数$g(t|\theta),\theta\in\Theta$ 关于θ具有非降MLR，则对于任何t_0，"当$T<t_0$时拒绝H_0"的检验是一个水平为α的$UMPT$，其中$\alpha=\mathbb{P}_{\theta_0}(T<t_0)$.

练习1 例3.1中，验证充分统计量$T(\vec{X})=\overline{X}$的分布具有非降MLR。因此若考虑检验问题

$$H_0:\mu\ge\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu<\mu_0, \qquad (*)$$

则由K-R 定理的推论3.2 可知，检验

$$\text{当}\overline{X}<\mu_0-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha\text{时拒绝}H_0$$

是检验问题$(*)$水平为α的UMPT。

练习2 利用K-R定理证明，例3.2中所得检验“当$T=\sum_{i=1}^n X_i>t_0$时拒绝H_0”是检验问题$H_0:p\le p_0\leftrightarrow H_1:p>p_0$水平为$\alpha$的UMPT。

举例说明

Example (3.3)

设$X_1,\ldots,X_n$ $i.i.d.\sim U(0,\theta)$，$\theta>0$ 未知，求检验问题$H_0:\theta\le\theta_0 \leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$ 水平为α的UMPT.

注　由例3.3以及K-R定理的注可知，对于【0】例5.4.3中检验问题：$H_0:\theta=\theta_0 \leftrightarrow H_1:\theta=\theta_1$, 其中$\theta_1>\theta_0>0$，

$$\text{当}T=X_{(n)}>\theta_0(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}\text{时拒绝}H_0$$

是水平为α的UMPT。

练习　【0】例5.4.4 $\sim$ 5.4.8.

作业

作业1 设$X_1,\ldots,X_n$ $i.i.d. \sim N(0,\sigma^2)$，$\sigma^2>0$ 未知，求检验问题

$$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \leftrightarrow H_1:\sigma^2=\sigma_1^2，其中\sigma_0^2<\sigma_1^2$$

水平为α 的UMPT.

作业2 设$X_1,\ldots,X_n$ $i.i.d. \sim Poisson(\lambda)$，$\lambda>0$ 未知，求检验问题

$$H_0:\lambda=\lambda_0 \leftrightarrow H_1:\lambda=\lambda_1，其中\lambda_0<\lambda_1$$

水平为α 的UMPT.

1. 习题5，Ex. 42, 43, 44, 45, 46, 48.

Theorem (3.3)

（【2】定理3.10） 设随机样本$\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$的分布族是单参数指数族，概率密度/质量函数为

$$f(\vec{x}|\theta) = c(\theta)\exp\{Q(\theta)T(\vec{x})\}h(\vec{x})$$

如果$Q(\theta)$关于θ严格单调增，则对于检验问题：

$$\text{(III)} \qquad H_0 : \theta \le \theta_1 \text{或} \theta \ge \theta_2 \leftrightarrow H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2.$$

它的一个水平为α的$UMPT$为

$$\text{当} t_1 < T < t_2 \text{时拒绝} H_0$$

其中t_1, t_2满足$\mathbb{P}_{\theta_1}(t_1 < T < t_2) = \mathbb{P}_{\theta_2}(t_1 < T < t_2) = \alpha.$

- **证明** （略）

举例说明

注 定理3.3条件"样本分布族为指数族"也可换为参数θ的充分统计量T的概率密度/质量函数为指数族，i.e.

$$g(t|\theta) = \widetilde{c}(\theta)\exp\{\omega(\theta)t\}\widetilde{h}(t)$$

且$\omega(\theta)$关于θ严格单调增，结论一致。

Example (3.4)

设$X_1, \ldots, X_{16}$ $i.i.d. \sim N(\mu, 1)$，$\mu \in \mathbb{R}$未知，求检验问题

$$H_0 : \mu \leq -1 \text{或} \mu \geq 1 \leftrightarrow H_1 : -1 < \theta < 1.$$

水平为$\alpha = 0.05$的UMPT.

UMPT不存在情形：举例说明

- 对于单参数指数族,如下两种双边检验问题均不存在水平为α的UMPT.

(IV) $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leftrightarrow H_1 : \theta < \theta_1$或$\theta > \theta_2$;

(V) $H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$.

Example (3.5)

（【1】例8.3.19） 设$X_1, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\sigma^2 > 0$已知, $\mu \in \mathbb{R}$未知，证明检验问题

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$$

不存在水平为α的UMPT.

注释及作业

注1 不是所有的检验问题（IV）和（V）的UMPT均不存在，其存在性依赖于分布族，见【0】习题5，Ex.55.

注2 如果在所有的水平为α的检验类中UMPT不存在，也可适当进一步缩小检验类的范围，例如考虑在水平为α的无偏检验类中UMPT的存在性。对于单参数指数族，检验问题（IV）和（V）在无偏检验类中UMPT均存在，这样的UMP检验简记UMPUT，参考【0】例5.4.4和【1】例8.3.20。

作业 设$X_1, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim Exp(\lambda)$，概率密度函数

$$f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0,$$

$\lambda > 0$未知，求检验问题

$$H_0 : \lambda \leq 1 \text{或} \lambda \geq 2 \leftrightarrow H_1 : 1 < \lambda < 2.$$

水平为$\alpha = 0.1$的UMPT.

- 假设检验的缺陷：给出检验的拒绝域后，根据样本是否落在拒绝域而判定是否拒绝零假设H_0，但并没有指出：针对不同的样本，作出这一判决的可靠性有多大不同？

Example (4.1)

设$X_1, \dots, X_{16}\ i.i.d. \sim N(\mu, 1)$，$\mu \in \mathbb{R}$未知，由推论3.2练习1可知，检验问题$H_0: \mu \geq 0 \leftrightarrow H_1: \mu < 0$ 的水平$\alpha = 0.05$的一个检验为“当$\overline{X} \leq -0.41125$时拒绝$H_0$”。因此针对如下两组样本均应拒绝$H_0$：

$$\overline{x}_1 = -0.47, \overline{x}_2 = -0.5815.$$

进一步观察，发现$\overline{x}_2$离H_0所在子空间的距离比$\overline{x}_1$更远。相对来说，其支持假设H_0成立的几率也比$\overline{x}_1$更小；也即，检验结果“接受H_1为真”犯（第一类）错误的概率相对会更小，可靠程度更高。具体而言，令

$$p = \sup_{\mu \geq 0} \mathbb{P}_\mu(\overline{X} \leq \overline{x}),$$

在这两组样本下分别计算得$p_1 = 0.03$, $p_2 = 0.01$。显然第二组样本对于判决结果"H_1 为真" 的支持力度比第一组样本大，信任度更高。

p-值

- **定义4.1** （【1】定义8.3.26） 我们称检验统计量$p(\vec{X})$是一个p-值，如果其满足
  1. 对每一个样本点$\vec{x}$，都有$0 \leq p(\vec{x}) \leq 1$;
  2. 如果$p(\vec{X})$的值充分小，则可作为H_1为真的依据。
- 进一步，称这个p值是有效的，如果对于每一个$\theta \in \Theta_0$，都有

$$\mathbb{P}_\theta(p(\vec{X}) \leq \alpha) \leq \alpha\text{，这里}\alpha \in [0, 1].$$

问 如何定义一个有效的p-值？

Theorem (4.1)

（【1】*定理8.3.27*） 设$W(\vec{X})$是这样一个检验统计量，如果W的值大，则可作为H_1为真的依据，此时对于每一个样本点$\vec{x}$，定义

$$p(\vec{x}) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(W(\vec{X}) \geq W(\vec{x})),$$

则$p(\vec{X})$是一个有效p-值。

Example (4.1)

设$X_1,\ldots,X_m$ $i.i.d. \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y_1,\ldots,Y_n$ $i.i.d. \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且样本$\vec{X}$ 和$\vec{Y}$独立，若$\sigma_1^2,\sigma_2^2>0$已知，$\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$未知，考虑检验问题

$$H_0:\mu_1=\mu_2 \leftrightarrow H_1:\mu_1\neq\mu_2.$$

(1) 求水平为$\alpha=0.05$的似然比检验(LRT).

(2) 通过上述检验给出一个有效p-值，并求出当$m=n=32$, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$, $\overline{x}=0.9$, $\overline{y}=1.2$时的p-值。

- 两个正态总体下，部分检验的p值计算公式表(参考【0】表5.5.1)

参数	H_0	H_1	检验统计量	p值公式
σ_1^2,σ_2^2已知	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\tilde{\sigma}}$	$p=\mathbb{P}(\lvert U\rvert\geq\frac{\lvert\overline{x}-\overline{y}\rvert}{\tilde{\sigma}})$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知	$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_{m,n}}$	$p=\mathbb{P}(\lvert T\rvert\geq\frac{\lvert\overline{x}-\overline{y}\rvert}{S_{m,n}})$
$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知	$\mu_1\geq\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$	$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_{m,n}}$	$p=\mathbb{P}(T\leq\frac{\overline{x}-\overline{y}}{S_{m,n}})$

这里，

$$\tilde{\sigma}^2=\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n, \quad S_{m,n}^2=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}.$$

p值计算公式表

- 单个正态总体下，部分检验的p值计算公式表(参考【0】表5.5.1)

参数	H_0	H_1	检验统计量	p值公式
σ^2已知	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$U=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{\sigma}$	$p=\mathbb{P}(\lvert U\rvert\geq\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{\sigma})$
同上	$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	同上	$p=\mathbb{P}(U\leq\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{\sigma})$
σ^2未知	$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$T=\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)}{S}$	$p=\mathbb{P}(\lvert T\rvert\geq\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{S})$
同上	$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	同上	$p=\mathbb{P}(T\leq\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{S})$
μ未知	$\sigma^2\leq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$p=\mathbb{P}(\chi^2\geq\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2})$