

近世代数作业题

叶郁班

Contents

第一次作业	2
第二次作业	3
第 e 次作业	5
第三次作业	6
第四次作业	8
第五次作业	9
第六次作业	11
第七次作业	12
第八次作业	14
第九次作业	16
第十次作业	17

第一次作业

必做题

1: 对于任何集合 X , 我们用 id_X 表示 X 到自身的恒等映射. 设 $f: A \rightarrow B$ 是集合间的映射, A 是非空集合. 试证:

- (1) f 是单射当且仅当存在 $g: B \rightarrow A$, 使得 $g \circ f = id_A$;
- (2) f 是满射当且仅当存在 $h: B \rightarrow A$, 使得 $f \circ h = id_B$;
- (3) f 是双射当且仅当存在唯一的 $g: B \rightarrow A$, 使得 $f \circ g = id_B, g \circ f = id_A$;
- (4) 分别举例说明 (1)(2) 不唯一.

2: 设 $P(A)$ 是集合 A 的全部子集所构成的集族, $M(A)$ 为所有 A 到集合 $\{0, 1\}$ 的映射构成的集合. 试构造 $P(A)$ 到 $M(A)$ 的双射. 特别的, 如 A 为有限集, 试证 $|P(A)| = 2^{|A|}$, 换言之, n 元集共有 2^n 个子集.

3: 证明等价关系的三个条件是互相独立的, 即: 已知任意两个条件不能推出第三个条件.

4: 设集合 A 中关系满足对称性和传递性, 且 A 中任意元素都和某个元素有关系, 证明此关系为等价关系.

5: 证明容斥原理:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \sum_{\{i_1, \dots, i_j\} \subset \{1, 2, \dots, n\}} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$$

其中 $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为某个固定集合 U 的有限子集.

选做题

补充 (粗略, 选做):

下面是集合论中三个等价的著名定理 (在集合论的 ZF 公理系统之下):

(1): Zorn 引理: 令 (A, \leq) 是一个偏序集. 若 A 的每一链 S 在 A 中都有上界, 即:

$$\exists a \in A, \forall s \in S, s \leq a,$$

则 A 有极大元.

(2): 选择公理: 令 $T = \{A_i | i \in I\}$ 为一族非空集合. 则存在映射:

$$\phi: T \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$A_i \longrightarrow \phi(A_i) \in A_i.$$

称 ϕ 为一选择函数.

(3): 任何集合上都可以定义起一个良序 (称一偏序集 (A, \leq) 为良序集, 或称偏序 \leq 为一个良序, 如果 A 的任意非空子集关于 \leq 有最小元).

6: 利用 Zorn 引理或者良序公理证明非空集合 A 上存在极大偏序 (称 A 上的偏序 α 为一极大偏序, 如果关于 A 上的任一偏序 $\beta, \alpha \subset \beta$ 蕴含着 $\alpha = \beta$, 即将 A 上的一个二元关系看成是 $A \times A$ 的子集).

7: 尝试寻找实数集 \mathbb{R} 上的一个良序.

8: 令 $T = \{A_i | i \in I\}$ 是一族非空集合, 证明 $\prod_{i \in I} A_i$ 非空, 其中:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i | \forall i \in I, f(i) \in A_i\}.$$

反之是否成立? 即 $\prod_{i \in I} A_i$ 非空, 则 T 有选择函数.

第二次作业

必做题 (周三)

一: 基础 (定义验证)

1: 令 G 是实数对 $(a, b), a \neq 0$ 的集合. 在 G 上定义: $(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$. 试证 G 是群.

2: 令 Ω 是任意一个集合, G 是一个群, Ω^G 是 Ω 到 G 的所有映射的集合. 对任意两个映射 $f, g \in \Omega^G$, 定义乘积是如下映射:

$$\forall \alpha \in \Omega, (fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha).$$

试证 Ω^G 是群.

3: 令 G 是所有秩不大于 r 的 n 阶复方阵的集合, 试证在矩阵的乘法下 G 成半群.

4: 设 G 是一个半群, 如果:

- (1) G 中含有左幺元 e , 即 $\forall x \in G, ex = x$;
- (2) G 的每个元素 x 有左逆元 x^{-1} 使得 $x^{-1}x = e$.

试证 G 是群.

5: b 是含幺半群中元素 a 的逆元素当且仅当成立 $aba = a$ 和 $ab^2a = 1$.

二: 进阶 (思考思考)

6: 设 G 是一个有限半群, 如果在其内满足左右消去律 ($ax = ay$ 或者 $xa = ya$ 意味着 $x = y$) 则 G 是群, 即有限双消半群是群. 并举例说明一个半群如果只满足单边消去律则不一定是一个群.

7: 令 G 是 n 阶有限群, a_1, a_2, \dots, a_n 是群 G 的任意 n 个元素, 不一定两两不同, 试证: 存在整数 p 和 $q, 1 \leq p \leq q \leq n$, 使得 $a_p a_{p+1} \dots a_q = 1$.

8: 举例:

- (1) 举出一个半群的例子, 其中存在元素有左逆元但是没有右逆元;
- (2) 举出一个半群的例子, 其中存在元素有两个左逆元;
- (3) 举出一个半群的例子, 其中存在元素有无数个左逆元.

选做题

9: 令 S 是一非空集. 定义 S 上的运算: $a \cdot b = a(a \cdot b = b)$. 则 (S, \cdot) 是一个半群, 称其为左 (右) 零半群. 若 S 是一半群, 证明如下三款等价:

- (1) S 是一左零半群, 或者 S 是一右零半群;
- (2) $ab = cd \Rightarrow a = c$ 或者 $b = d$;
- (3) 任意映射 $f: S \rightarrow S, f(ab) = f(a)f(b)$.

10: 令 G 是一个半群. 则 G 是一个群当且仅当

$$\forall a \in G, \exists! b \in G, (ab)^2 = ab.$$

必做题 (周五)

11: (1) 一个 n 阶矩阵称为一个单项矩阵, 如果该方阵的每一行, 每一列都恰有一个非零元素. 证明所有 n 阶单项矩阵构成的集合对于通常的矩阵乘法构成群.

(2) 所有 n 阶严格对角占优矩阵对于通常的矩阵乘法是否构成群?

(3) 定义 $GL_n(R)$ 上运算 $A \circ B = AB - BA$, 那么 $(GL_n(R), \circ)$ 是否构成一个群?

12: 偶数阶群必定存在 $a (\neq e)$ 满足 $a^2 = e$.

13: 令 G 是 n 阶有限群, S 是 G 的一个子集, $|S| > n/2$. 试证: 对任意 $g \in G$, 存在 $a, b \in S$ 使得 $g = ab$.

第 e 次作业 (阅读材料, 不用做)

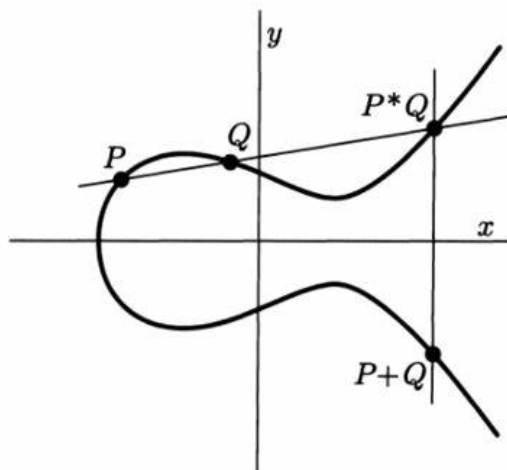
费马于 1630 年左右在 Diophantus 所著《数论》的书页空白处写下“当 $n \geq 3$ 时, 不存在满足 $x^n + y^n = z^n$ 的自然数解”以及“对此我发现了令人惊叹的证明, 但这里空白太小写不下了.”由此引出了三百多年的故事. 我们将从椭圆曲线的角度出发浅探其与 FLT 的关系.

$E: y^2 = x^3 + ax + b$ ($a, b \in Q$), $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, 则称 E 为 Q 上的椭圆曲线. 考虑 E 的解集 $E(Q) = \{(x, y) \in Q \times Q | y^2 = x^3 + ax + b\}$. 我们在 $E(Q)$ 中添加一个特殊的元素 O 并定义:

(i) O 为单位元

(ii) $P, Q \in E(Q), P \neq O, Q \neq O$. 连接 P, Q 的直线与 E 交于第三点 $P^*Q = (x, y)$, 则令 $(x, -y) \in E(Q)$ 为 $P + Q$.

(iii) $P \in E(Q), P \neq O$. 设其坐标为 (x, y) , 则 P 的逆元为 $(x, -y)$.



试解决以下问题 (* 题目仅供娱乐)

*[1] 验证 $E(Q)$ 在上述定义下构成阿贝尔群.

*[2] (Siegel's Theorem) 若 $a, b \in \mathbb{Z}$, 令 $E(\mathbb{Z}) = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | (x, y) \in E(Q)\}$, 证明 $E(\mathbb{Z})$ 为有限阿贝尔群.(更一般的, Mordell 证明了 $E(Q)$ 为有限生成阿贝尔群.)

[3] 费马曾写下“除 1 以外的 3 角数均非立方数”且未给出证明, 其中 3 角数为形如 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的自然数.

(1) 试说明该论断与 $E: y^2 = x^3 + 1$ 之间的关系.(提示: 将 $\frac{n(n+1)}{2} = m^3$ 改写成 $y^2 = x^3 + 1$)

(2) 证明 $\{(0, \pm 1), (-1, 0), (2, \pm 3)\} \in E(\mathbb{Z})$.

(3) 利用 [2] 以及如下定理说明 $E(\mathbb{Z})$ 除 (2) 中解外无其余整数解.

*(Nagell-Lutz Theorem) 对于椭圆曲线 $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$), 令 $D = -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2$, 若 $P = (x, y) \in E(Q)$ 且作为阿贝尔群中的元素其阶数有限, 则 $P \in E(\mathbb{Z})$ 并且要么 $y = 0$, 要么 $y | D$.

(4) 证明费马的论断.

[4] 有学者认为费马利用“无穷递降法”证明了 $n = 4$ 的情形并认为其余情形类似, 因此宣称自己有一个“美妙的证明”. 以下将采用椭圆曲线的知识并利用“无穷递降法”证明费马关于 $n = 4$ 时的论断.

(1) 说明 $x^4 + y^4 = z^4$ 的自然数解与 $E: y^2 = x^3 - x$ 的有理数解之间的关系.(提示: 改写成 $(\frac{x^2z}{y^2})^2 = (\frac{z^2}{y^2})^3 - \frac{z^2}{y^2}$).

(2) 验证 $\{(0, 0), (\pm 1, 0)\} \in E(Q)$ 并证明 E 除此之外无其余有理数解.

提示:

对于有理数 $a = \frac{m}{n}$ 其中 m, n 互素, 定义其高 (Height) 为 $H(a) = \max(|n|, |m|)$. 例如, $H(\frac{-5}{8}) = 8, H(\frac{7}{2}) = 7, H(0) = H(\frac{0}{1}) = 1$. 假设 E 还有其他有理数解, 选取其中 x 坐标的高最小者, 记为 (x_0, y_0) , 则证明此时存在 $(x_1, y_1) \in E(Q)$ 满足 $H(x_1) < H(x_0)$, 因此得到矛盾.

(i) 证明可以取 $x_0 > 1$.

(ii) 于是取 $x_0 > 1$, 证明从 $(x_0 - 1)x_0(x_0 + 1) = x_0^3 - x_0 = y_0^2$ 为有理数的平方推导出 $x_0 - 1, x_0, x_0 + 1$ 都是有理数的平方.

(iii) 此时存在 $(x_1, y_1) \in E(Q)$ 并且 $x_0 = \frac{(x_1^2 + 1)^2}{4(x_1^2 - x_1)}$, 说明 $H(x_1) < H(x_0)$. (3) 证明费马的论断.

*(4) 验证 $E(Q) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. (Mazur, 1977 给出了 $E(Q)$ 所有可能的群结构)

椭圆曲线在 FLT 的证明过程中发挥了重要作用, 对该问题感兴趣的同学可以翻阅加藤和也, 黑川信重以及斋藤毅所著的《数论 1》.

[5] 假定 ABC 猜想成立, 证明费马大定理.

*(ABC conjecture) 对于任意实数 $\epsilon > 0$, 存在与 ϵ 有关的常数 $C(\epsilon)$ 使得: 若互素的 $a, b, c \in \mathbb{Z} - \{0\}$ 满足 $a + b + c = 0$, 则 $\max\{|a|, |b|, |c|\} < C(\epsilon) \text{rad}(abc)^{1+\epsilon}$, 其中 $\text{rad}(N) := \prod p$, p 为满足 $p|N$ 的所有素数.

第三次作业

必做题 (周三)

一: 基础 (定义验证)

1: 对于群同态 $f: G \rightarrow H$, 定义 f 的核为 $\text{Ker}(f) = \{a \in G | f(a) = e \in H\}$, f 的像为 $\text{Im}(f) = \{b \in H | \exists a \in G, b = f(a)\}$. 证明 $\text{Ker}(f)$ 与 $\text{Im}(f)$ 分别为 G 与 H 的子群并且 f 为单射当且仅当 $\text{Ker}(f) = \{e\}$.

2: a, b, c 为群 G 的元素, 证明 $\text{ord}(a) = \text{ord}(a^{-1}), \text{ord}(ab) = \text{ord}(ba), \text{ord}(a) = \text{ord}(cac^{-1})$.

3: 求有理数加法群 \mathbf{Q} 的自同构群 $\text{Aut}(\mathbf{Q})$.

二: 进阶 (思考思考)

4: 找出 $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +)$, $(\text{Aut}(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}), \cdot)$, $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, +)$ 与 $(\text{Aut}(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}), \cdot)$ 之间的同构关系.

选做题

5: 对任意整数 $m, n, r > 1$, 存在有限群 G 以及其中的元素 a, b 满足 $\text{ord}(a) = m, \text{ord}(b) = n, \text{ord}(ab) = r$.

必做题 (周五)

一: 基础 (定义验证)

1: 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

试求 A, B, AB 和 BA 在 $GL_2(\mathbf{R})$ 中的阶

2: 设 a, b 是群 G 的两个元素, a 的阶是 7 且 $a^3b = ba^3$. 证明 $ab = ba$.

3: (1) 设 G 是有限阿贝尔群. 证明:

$$\prod_{g \in G} g = \prod_{a \in G, a^2=1} a$$

(2) 证明 Wilson 定理: 如果 p 是素数, 则 $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

4: 证明 $SL_2(\mathbf{Z})$ 可以由

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

生成.

二: 进阶 (思考思考)

5: 设 H 和 K 分别是有限群 G 的两个子群, $HgK = \{h g k | h \in H, k \in K\}$. 试证:
 $|HgK| = |H| \cdot |K : g^{-1}Hg \cap K|$.

6: 设 A 是群 G 的具有有限指数的子群. 试证: 存在 G 的一组元素 g_1, g_2, \dots, g_n , 它们既可以作为 A 在 G 中的右陪集代表元系, 又可以作为 A 在 G 中的左陪集代表元系.

7: 群论在晶体结构的分类中有着重要应用, 例如二维结晶类对应于 $GL_2(\mathbf{Z})$ 的有限子群 (参见沙法列维奇《代数基本概念》). 我们将分以下几步说明只有有限多个二维结晶类.

(1) 求 $|GL_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})|$.

(2) 证明商映射 $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ 诱导的映射 $f : GL_2(\mathbf{Z}) \rightarrow GL_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ 为乘法群同态且 $\text{Ker}(f) = \{A \in GL_2(\mathbf{Z}) | \exists B \in M_{2 \times 2}(\mathbf{Z}), A = I + 3 \cdot B\}$.

(3) 若 $A \in \text{Ker}(f)$ 且 A 的阶有限, 则 $B = 0$. (提示: 二项式展开后考虑 3 的指数)

(4) $GL_2(\mathbf{Z})$ 的任意有限子群 G 都同构于 $f(G)$, 从而 $|G|$ 整除 $|GL_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})|$ (提示: 说明 f 限制在 G 上为单射)

(5) 证明 $GL_2(\mathbf{Z})$ 只有有限多个互不同构的有限子群.

选做题

8: $SO_2(\mathbf{R})$ 的任何有限子群都是循环群.

9: $SL_n(\mathbf{Z})$ 有限生成.

第四次作业

必做题 (周三)

一: 基础 (定义验证)

1: 群 G 的指数为 2 的子群 N 一定是 G 的正规子群.

2: 设 G 为群, 证明以下问题:

(1) 如果 $N \triangleleft G, N < M, M < G$, 则 $N \triangleleft M$.

(2) 如果 $N \triangleleft M, M \triangleleft G, N$ 是否一定是 G 的正规子群?

(3) 如果 $K < G, N \triangleleft G$, 令 $N \vee K$ 表示 G 中包含 N, K 的最小的子群, 证明:

(i) $NK = N \vee K = KN$. (提示: $N \vee K$ 中元素为一些 $n_1 k_1 \cdots n_r k_r$ 的乘积, 利用 N 的正规性说明可以改写成 nk 的形式)

(ii) 如果 $K \triangleleft G, N \triangleleft G$ 且 $K \cap N = \{e\}$, 则对于任意的 $k \in K, n \in N$ 都有 $kn = nk$.

(4) 如果 $K < G, N < G$, 说明 $[N \vee K : N] \geq [K : N \cap K]$. (提示: $[N \vee K : N \cap K] = [N \vee K : K][K : N \cap K]$)

$$N \cap K])$$

二: 进阶 (思考思考)

3: 共轭作用 σ_g 给出了 $\sigma: G \mapsto \text{Aut}(G)$ 的群同态, 其像为 $\text{Inn}(G)$.

(1) 证明 $\text{Ker}(\sigma) = Z(G)$.

(2) 若 G 有一个阶不为 1 或 2 的元素, 说明 $\text{Aut}(G) \neq \{e\}$. (提示: 反证, 得到 $\text{Ker}(\sigma) = G$, 从而 $g \mapsto g^{-1}$ 是一个非平凡自同构)

4: 以下证明 pq 阶群 G 非单群. ($p > q$, 皆为素数)

(1) G 有 p 阶子群 H . (提示: 选做题 5)

(2) G 至多只有一个 p 阶子群. (提示: 假设另一个为 K , 则 $K \cap H = \{e\}$, 应用第 2 题 (4) 得到矛盾)

(3) H 是正规子群. (提示: 对任意 $g \in G$, $H \cong gHg^{-1}$, 利用 (2))

选做题

5: 令 G 为 $p^r m$ 阶群 (p 为素数且 $(p, m) = 1$), 我们称 p^r 阶子群 P 为 G 的西罗 p 子群. 以下证明 P 存在:

(1) 若 H, K 为 G 的子群, 定义 H, K 的双陪集为 $HaK = \{hak | h \in H, k \in K\}$, 其中 $a \in G$; 说明存在 G 关于 H, K 的双陪集分解即有 $\{g_i\}_{i=1}^s$ 使得 $G = \bigcup_{i=1}^s Hg_iK$ 且若 $g_i \neq g_j$ 则 $Hg_iK \cap Hg_jK = \{\emptyset\}$.

(2) 利用第三次作业 (周五) 第 5 题证明 $|HgK| = \frac{|H||K|}{|H \cap gKg^{-1}|}$.

(3) 若西罗 p 子群 P 存在, 则对 G 的任意子群 H 有 $g \in G$ 使得 $H \cap gPg^{-1}$ 为 H 的西罗 p 子群. (提示: 利用 (1), (2) 说明存在某个 $g \in G$ 使得 p 不整除 $[H : H \cap gPg^{-1}]$, 从而 $H \cap gPg^{-1}$ 为 H 的西罗 p 子群)

(4) 任意有限群可作为某个 $GL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ 的子群. (提示: 矩阵表示)

(5) 令 U 为 $GL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ 中主对角线全为 1 的上三角矩阵全体, 说明 U 为西罗 p 子群. (提示: 容易计算 $|U|$, 第二次习题课讲义计算了 $GL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$)

(6) 利用 (3), (4) 以及 (5) 证明任意有限群 G 存在西罗 p 子群.

必做题 (周五)

一: 基础 (定义验证)

6: 令 $G = \{(a, b) | a \in \mathbf{R}^\times, b \in \mathbf{R}\}$, 乘法定义为

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$$

试证: $K = \{(1, b) | b \in \mathbf{R}\}$ 是 G 的正规子群且 $G/K \cong \mathbf{R}^\times$.

7: 如果 $f: G \mapsto H$ 是满射群同态, 则 G 中包含 $\text{Ker}(f)$ 的正规子群一一对应于 H 的正规子群.

8: 设 $G_i (n \geq i \geq 1)$ 为群, 则:

(1) $Z(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n) = Z(G_1) \times Z(G_2) \times \cdots \times Z(G_n)$:

(2) $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 为阿贝尔群当且仅当每个 G_i 为阿贝尔群.

9: 如果 $N_1 \triangleleft G_1, N_2 \triangleleft G_2$, 则 $N_1 \times N_2 \triangleleft G_1 \times G_2$ 且 $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$.

10: 假设已知 $|GL_n(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})|$, 计算 $|SL_n(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})|$.

二: 进阶 (思考思考)

11: (1) 如果 $G/Z(G)$ 是循环群, 则 G 是阿贝尔群.

(2) 试证非阿贝尔群 G 的自同构群 $Aut(G)$ 不是循环群.

12: 求 $GL_n(\mathbf{R})$ 关于 $O_n(\mathbf{R})$ 的右陪集代表元系.(提示: 应用矩阵的 QR 分解)

第五次作业

必做题 (周五)

(a) 每周三交作业, 周五可以补交, 都放在教室最后一排. 电子版在一周内任何时间都可提交; (b) 每周答疑习题课时间为周六下午 14:30-16:00, 地点为 5301; (c) 有不会的题目可以在群里讨论或者和助教讨论; (d) 习题可能会给一些提示, 但是并非只有提示的做法, 能做出来就行, 无需拘泥.

一: 基础 (定义验证)

1: 将置换 $f: \mathbb{Z}_{29} \rightarrow \mathbb{Z}_{29}, n \mapsto n^3$ 写成 S_{29} 中两两不相交轮换的积.

2: (1) 设 $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_r) \in S_n, \tau \in S_n$, 证明 $\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(i_1) \tau(i_2) \cdots \tau(i_r))$;

(2) 设 $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_n) \in S_n$, 证明 $C_{S_n}(\sigma) := \{\tau \in S_n | \sigma \tau = \tau \sigma\} = \langle \sigma \rangle$;

(3) $C(S_n) = \{1\} (n \geq 3)$.

3: (1) 设 $N \triangleleft G, g$ 是群 G 的任意一个元素. 如果 g 的阶和 $|G/H|$ 互素, 则 $g \in N$;

(2) 如果 N 是 $S_n (n \geq 3)$ 的指数为 2 的正规子群, 证明其包含所有的 3-轮换.

因此 $A_n (n \geq 2)$ 是 S_n 中唯一的指数为 2 的子群.

4: (1) 确定 S_4 中所有置换的型;

(2) 确定 S_4 的全部正规子群 (注意到正规子群是共轭类的并, 而两个置换共轭当且仅当具有相同的型).

二: 进阶 (思考思考)

5: 证明 S_n 中型为 $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$ 的置换共有 $n! / \prod_{i=1}^n \lambda_i! i^{\lambda_i}$ 个, 由此证明:

$$\sum_{\lambda_i \geq 0, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n = n} \frac{1}{\prod_{i=1}^n \lambda_i! i^{\lambda_i}} = 1.$$

(注意到型为 $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \cdots n^{\lambda_n}$ 的置换是对 $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} (\{1, 2, \cdots, n\} \text{ 的一个乱序})$ 的一个划分, 再除掉重复次数.)

6: (1) 证明 $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ 同构于 S_3 (考察 $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ 在 $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{Z}_2\}$ 的三个非零元上的作用. 当然, 也可以说明 6 阶非交换群只有 S_3 , 由 Cauchy 定理知道 6 阶群有 2, 3 阶元, 然后正常分析即可);

(2)(选做) 证明 $PGL_2(\mathbb{F}_3) \cong S_4$, 此处 \mathbb{F}_3 是三元域, 实际就是大家熟知的 \mathbb{Z}_3 (自然的加法和乘法运算). (类似于上一题, 注意到 $\mathbb{F}_3 \oplus \mathbb{F}_3$ 有四个一维 \mathbb{F}_3 -子空间, 记为 $S = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, $GL_2(\mathbb{F}_3)$ 中元素自然给出在 S 上置换, 而且标量矩阵作用平凡, 只需要证明不同的非标量矩阵作用不同再计

算阶数即可);

(3) 证明 $SL_2(\mathbb{Z}_3) \not\cong S_4$ (尝试说明 $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ 的中心非平凡, 而我们知道 $PGL_2(\mathbb{Z}_3)$ 的中心是平凡的, 和第二题 (3) 吻合).

选做题

定义: 称一个群 G 是单群, 如果其没有平凡的正规子群.

8: 旋转群 $SO(3)$ 是单群 (我们在前面的习题证明了 $PSU(2) \cong SO(3)$, 因此利用标准型考虑 $SU(2)$ 或许是一个思路).

7: 如果域 F 有至少四个元素, 则 $SL_2(F)/\{\pm I_2\}$ 是单群 (一般的, $PSL_n(F_p)$ 呢?).

第六次作业

必做题 (周三)

一: 基础 (定义验证)

1: 试证 A_4 没有 6 阶子群.

2: 对 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4]$, 令 $G_f = \{\sigma \in S_4 | f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$.

(1) 证明 G_f 为 S_4 的一个子群.

(2) 求以下情形的 G_f :

(i) $f = x_1x_2 + x_3x_4$, (ii) $f = x_1x_2x_3$, (iii) $f = x_1 + x_2$, (iv) $f = x_1x_2x_3x_4$, (v) $f = \prod_{1 \leq j < i \leq 4} (x_i - x_j)$.

3: (1) S_n 可由 $(12), (13), (14), \dots, (1n)$ 生成.

(2) S_n 可由 $(12), (23), (34), \dots, (n-1, n)$ 生成.

(3) S_n 可由 $(12), (123 \dots n)$ 生成.

二: 进阶 (思考思考)

4: 试证:

(1) 对称群 S_n 是交错群 A_{2n} 的子群.

(2) 对称群 S_n 是交错群 A_{n+2} 的子群. (remark: 当 $n \geq 2$ 时 S_n 不为 A_{n+1} 的子群)

(3) 每个有限群均是某个交错群的子群.

5: (1) $|Aut(S_3)| \leq 6$. (提示: 利用必做题 3 的 (3), 考虑他们在自同构下的像的可能情况)

(2) $Inn(S_3) \cong S_3$. (提示: 利用第五次作业第 2 题 (3))

(3) $Aut(S_3) \cong S_3$.

6: 令 G 为 S_{999} 的阶为 1111 的循环子群, 证明存在 $i \in \{1, \dots, 999\}$ 使得对任意的 $\sigma \in G$ 都有 $\sigma(i) = i$. (提示: 考虑 G 的生成元的型)

选做题

- 7: (1) 构造 S_6 的一个不属于 $\text{Inn}(S_6)$ 的自同构.
 (2) 证明 $n \neq 6$ 时有 $\text{Aut}(S_n) = \text{Inn}(S_n)$.
 (3) 当 $n \neq 2, 6$ 时 $\text{Aut}(S_n) \cong S_n$.

必做题 (周五)

一: 基础 (定义验证)

- 8: 若群 G 在集合 S 上的作用是可迁的, 则 G 的子群 N 是正规子群当且仅当任意 S 在 N 的作用下的每个轨道有同样多的元素. (提示: 反过来考虑到左陪集的左乘作用)
- 9: 二面体群 D_n 是由满足 $\text{ord}(a) = n, \text{ord}(b) = 2, ba = a^{-1}b$ 的元素 a, b 生成的群, 证明以下问题:
 (1) $D_2 \cong K_4, D_3 \cong S_3$.
 (2) $\langle a \rangle \triangleleft D_n, D_n / \langle a \rangle \cong Z_2$.
 (3) (选做) 找出 D_n 的共轭类以及正规子群.
 (4) (选做) 当 n 为奇数时 $Z(D_n)$ 为 e , 当 n 为偶数时 $Z(D_n) \cong Z_2$.
 (5) (选做) 若有限群 G 有两个 2 阶元 a, b , 则存在某个自然数 n 使得 $\langle a, b \rangle \cong D_n$.

10: (Burnside Lemma) 设群 G 作用在集合 S 上, 令 t 表示 S 在 G 作用下的轨道条数. 对任意 $g \in G, F(g)$ 表示 S 在 g 作用下不动点的个数. 即 $F(g) = |\{x \in S | gx = x\}|$. 试证明:

$$t = \frac{\sum_{g \in G} F(g)}{|G|}$$

这就是说, G 的每个元在 S 上的作用平均使得 t 个文字不动.

11: 集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 的旋转群是将 A 映为自身的所有关于原点的旋转构成的群, 而对称群是将 A 映为自身的所有刚体变换构成的群. 求正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体和正二十面体的旋转群和对称群各有多少个元?

二: 进阶 (思考思考)

12: 用四种颜色对正四面体的每个面进行染色, 保证四种颜色均出现且在旋转下相同的染色方案记为同一种, 则有多少种不同的染色方案? (提示: 利用第 10, 11 题)

13: 考虑 $SL_2(\mathbb{R})$ 在上半平面 $H = \{z = x + yi | y > 0\}$ 上的作用:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}$$

- (1) 验证上述作用为群作用. (需要说明 $gz \in H$)
 (2) 证明 $\forall z \in H$, 有 $g \in SL_2(\mathbb{R})$ 使得 $z = gi$ 从而该作用可迁.
 (3) 求 i 的稳定子群.
 (4) 证明 $SL_2(\mathbb{R})$ 关于 $SO_2(\mathbb{R})$ 的左陪集代表元系与 H 一一对应. (提示: $gSO_2(\mathbb{R}) \mapsto gi, x + yi \mapsto \begin{bmatrix} y^{\frac{1}{2}} & xy^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} SO_2(\mathbb{R}))$

(5) 证明任意 $g \in SL_2(\mathbb{R})$ 可写成

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

的形式, 其中 $a > 0, b \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi)$. (提示: 利用 (4))

选做题

14: 对于 \mathbb{R}^2 上的任意内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$, 考虑 $GL_2(\mathbb{R})$ 在其上的作用: $g \langle w, v \rangle_i = \langle gw, gv \rangle_i$, 其中 w, v 为任意向量. 若 G 为 $GL_2(\mathbb{R})$ 的有限子群, 定义 $\langle w, v \rangle_G = \sum_{g \in G} \frac{g \langle w, v \rangle_i}{|G|}$, 其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ 为标准内积.

- (1) 说明 $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ 为 \mathbb{R}^2 上的内积且存在 $h \in GL_2(\mathbb{R})$ 使得 $\langle w, v \rangle_G = h \langle w, v \rangle_i$. (提示: 欧式空间中的任意内积都有到标准内积的保距同构)
- (2) 令 S, S_G 分别为 $\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_G$ 的稳定子群, 说明存在 $h \in GL_2(\mathbb{R})$ 使得 $S_G = hSh^{-1}$.
- (3) 证明 $\forall g \in G$ 都有 $g \langle w, v \rangle_G = \langle w, v \rangle_G$, 从而 g 是关于内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ 的正交矩阵.
- (4) 利用 (2), (3) 说明存在 $h \in GL_2(\mathbb{R})$ 使得 $hGh^{-1} \subseteq O_2(\mathbb{R})$.
- (5) 证明 $SL_2(\mathbb{R})$ 的有限子群为循环群. (提示: 利用 (5) 以及第三次作业选做题 8)
- (6) 尝试找出哪些 D_n 可作为 $GL_2(\mathbb{Z})$ 的子群. (提示: 参考第二次习题课讲义问题 4)

第七次作业

必做题 (周三)

一: 基础 (定义验证)

- 1: 设 p 是一个素数, G 的阶是 p 的方幂. 证 G 的非正规子群个数是 p 的倍数.
- 2: 设 p 是 G 的阶的最小素因子. 若有 p 阶子群 $A \triangleleft G$, 则 $A \leq Z(G)$.
- 3: 设 N 是有限群 G 的正规子群. 若素数 p 与 $|G/N|$ 互素, 则 N 包含 G 的所有 Sylow p -子群.
- 4: 设 P 是有限群 G 的 Sylow p -子群. 若 $N_G(P) \triangleleft G$, 则 $P \triangleleft G$.

二: 进阶 (思考思考)

- 5: 设 G 为有限群, 对 $g \in G$, 令 C_g 为 g 所在的共轭类, 若 $C_g = C_{g^{-1}}$, 称 C_g 为一个实共轭类. 证 G 只有一个实共轭类当且仅当 G 的阶为奇数.
- 6: 确定 S_4 的 Sylow 子群.

必做题 (周五)

一: 基础 (定义验证)

7: 设 N 是有限群 G 的正规子群, P 是 G 的 Sylow p -子群。则

- (1) $N \cap P$ 是 N 的 Sylow p -子群。
- (2) PN/N 是 G/N 的 Sylow p -子群。
- (3) $N_G(P)N/N = N_{G/N}(PN/N)$ 。

8: 设 P 是 G 的 Sylow p -子群, H 是 G 的子群且 $p \nmid |H|$, 则存在 $a \in G$ 使得 $aPa^{-1} \cap H$ 是 H 的 Sylow p -子群。

9: 证明 24, 36, 48 阶群非单群。

10: 设 G 为群, $X \subset G$, $G_X = \{g \in G | gX = X\}$ 。若 $1 \in X$, 则 $X \leq G$ 当且仅当 $|X| = |G_X|$ 。

二: 进阶 (思考思考)

11: 给出 $GL_n(\mathbb{Z}_p)$, $SL_n(\mathbb{Z}_p)$ 的一个 Sylow p -子群, 并计算 $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 的 Sylow p -子群的个数。

12: 确定 S_4 的自同构群 $Aut(S_4)$ 。(考虑所有 Sylow 3-子群的集合)

选做题

13: 若有限群 G 的每一个 Sylow 子群都是正规子群, 则 G 是它 Sylow 子群的直积。

14: 若 G 为 24 阶群且中心平凡, 则 $G \cong S_4$ 。

第八次作业

必做题 (周三)

一: 基础

1: 若有限群 G 的每一个子群都是正规子群 (Dedekind group), 证明若 $d \mid |G|$, 则 G 有 d 阶子群。也就是说 Lagrange 定理的逆在 dedekind 群上是成立的, 特别地, 有限阿贝尔群。

2: 证明 $S_n (n \geq 5)$ 没有指数为 i 的子群, 其中 $2 < i < n$ 。而且 S_n (任意 n) 的指数为 n 的子群同构于 S_{n-1} (在以前的问题中我们已经知道 $S_n (n \geq 2)$ 指数为 2 的子群只有 A_n)。

3: 一般线性群 $GL(n, \mathbb{C})$ 不含有指数有限的真子群。

二: 进阶 (思考思考)

4: 我们已经知道最小的非阿贝尔单群阶数为 60, 实际上其同构于 A_5 。设 G 为 60 阶单群, 试证明:

- (1) G 没有指数为 4 的子群, 进而 G 的 Sylow 2-group 的个数不能为 3;
- (2) G 有 12 阶子群;
- (3) G 同构于 A_5 。

5: 试证有限群 G 的一个真子群的全部共轭子群不能覆盖整个群 G 。该结论对无限群不成立, 能否举出一例? (可以考虑线性代数的例子)

必做题 (周五)

一: 基础

- 1: (1) 设 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, H 是 G 的子群. H 是否形如 $H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$? 其中 H_i 是 G_i 的子群, $1 \leq i \leq n$.
 (2) 令 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$, 且对于任意的 $i \neq j, |G_i|$ 和 $|G_j|$ 互素. 证明 G 的任意子群 H 都是它的子群 $H \cap G_i (1 \leq i \leq n)$ 的直积.
 (3) $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ 当且仅当 $(m, n) = 1$.

2: 试证 20230501 阶群是循环群.

3: 设 p 是一素数.

- (1) 证明 $p^n, n \geq 1$ 阶群有非平凡的中心.
 (2) 分类 p^2 阶群.
 (3) 利用群的表现证明总存在 p^3 阶非阿贝尔群.

4: 令 $G = \langle x_i, i \in \mathbb{Z}_{>0} | x_n^n = x_{n-1}, n > 1 \rangle$, 证明 $(G, \cdot) \cong (\mathbb{Q}, +)$.

定义: 设 S 是任意集合, 表现为

$$F = \langle S | ab = ba, \forall a, b \in S \rangle$$

的群叫做以 S 为基的自由阿贝尔群 (除了交换性条件外没有其他条件). 我们可以证明 $F \cong \bigoplus_{a \in S} \mathbb{Z}$ (群的直和).

5: 给定生成元 $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$, 令 F 是 X 上的自由阿贝尔群, R 为包含 $\{px_0, x_0 - px_1, x_1 - px_2, \cdots, x_{n-1} - px_n, \cdots\}$ 的最小正规子群, p 为一素数, $G = F/R$, 记 $a_n = x_n + R$.

- (1) 证明: $\forall x \in G, \exists n \geq 0$ 使得 $p^n x = 0$.
 (2) $a_n \neq 0, \forall n \geq 0$ 且所有的 a_n 是互异的, 从而 G 是一个无限群.
 (3) 证明 G 的每个真子群都是有限循环群.
 (4) 对于每一个正整数 n, G 有唯一的 p^n 阶子群.
 (5) 令 $U_p = \{e^{\frac{2\pi i k}{p^n}} | k \in \mathbb{Z}, n \geq 0\} \leq \mathbb{C}$ 是所有 p^n 次单位根构成的乘法群, 证明 $G \cong U_p$.

我们将上述群 G 记为 $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

思考: 4, 5 两题的描述有何异同? $\mathbb{Z}(p^\infty)$ 和 \mathbb{Q} 有何联系? 不用做.

二: 进阶

6: (1) (A_{n-1} 型 Coxeter group) 证明 S_n 与下述群同构:

$$\langle x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} | x_i^2 = (x_j x_{j+1})^3 = (x_k x_l)^2 = 1, 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-2, 1 \leq l < k-1 < n-1 \rangle.$$

(2) 令 $A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n-1$, 其中 $a_{ij} = -\cos(\frac{\pi}{m_{ij}}), m_{ij}$ 是 (1) 中群内元素 $x_i x_j$ 的阶. 证明 A 是正定矩阵.

7: 令 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 我们在第三次作业证明了 A, B 是 $SL_2(\mathbb{Z})$ 的一组生成元.

令 $C = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $SL_2(\mathbb{Z})$ 也可以由 A, C 生成. 因此我们有自然群同态 $f: \langle x, y | x^4 = 1, x^2 = y^3 \rangle \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}) (x \mapsto A, y \mapsto C)$ 并且 f 诱导出群同态 $g: \langle x, y | x^2 = y^3 = 1 \rangle \rightarrow PSL_2(\mathbb{Z})$.

- (1) 证明 $\langle x, y | x^4 = 1, x^2 = y^3 \rangle \cong \langle a, b | aba = bab, (aba)^4 = 1 \rangle$.
- (2) 证明 f 是单射当且仅当 g 是单射, 证明 f 是满射当且仅当 g 是满射.
- (3) 尝试证明 f 和 g 都是群同构.

选做题

- 8: 尝试给出 A_n 的一个表示.
- 9: 设 G 是一个无限阿贝尔群.
 - (1) 若 G 的每一个真子群是有限群, 则存在素数 p 使得 $G \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$.
 - (2) 若 G 同构于每一个真子群, 则 $G \cong \mathbb{Z}$.
 - (3) 若 G 同构于每个非平凡商群, 则 $G \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$.
 - (4) 若 G 的每个非平凡商群是有限的, 则 $G \cong \mathbb{Z}$.

第九次作业

必做题 (周五)

一: 基础 (定义验证)

- 1: (1) $n \geq 3$ 时, $A_n \times \mathbb{Z}_2$ 是否同构于 S_n .
 (2) 若 n 为奇数, 证明: $D_{2n} \cong D_n \times \mathbb{Z}_2$.
- 2: (1) $G = \langle x, y | x^5 y^3 = x^8 y^5 = 1 \rangle$, G 是否平凡.
 (2) $G = \langle x, y | ab^3 = b^2 a, a^2 b = ba^3 \rangle$, G 是否平凡.
- 3: 设 \mathbb{Q}^+ 是正有理数乘法群, 试证:
 - (1) \mathbb{Q}^+ 是自由阿贝尔群.
 - (2) \mathbb{Q}^+ 不是有限生成的.

- 4: 设 \mathbb{Q} 是有理数加法群, 试证:
 - (1) \mathbb{Q} 不是自由阿贝尔群.
 - (2) \mathbb{Q} 的任意有限生成的子群都是循环群, 但 \mathbb{Q} 不是循环群.

二: 进阶 (思考思考)

- 5: 令 F_2 为集合 y_1, y_2 生成的自由群:
 - (1) 考虑自同态 $f: y_1 \mapsto y_2, y_2 \mapsto y_1 y_2$, 令 $|*|$ 表示 F_2 中字的长度, 例如 $|y_1 y_2| = 2$, 证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f^{k+1}(y_1)|}{|f^k(y_1)|} = \lambda$, 其中 $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
 - (2) 证明 F_2 中关于每个 y_i 的指数和都能被 n 整除的所有字全体 N 构成正规子群.
 - (3) $F_2/N \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. (提示: 需要考虑换位子)
- 6: (1) 设 G 是有限生成自由阿贝尔群, $\text{rank}(G) = r$. 如果 g_1, \dots, g_n 是 G 的一组生成元, 则 $n \geq r$.
 (2) 令 G 为 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 生成的阿贝尔群, 证明 G 的任意子群 H 最多由 n 个元素生成. (提示: 若 $H \subset \langle x_2, \dots, x_n \rangle$, 归纳知成立. 若不然, 取 H 的元素 $x = m_1 x_1 + \dots + m_n x_n$, 其中 $m_1 > 0$ 且最小, 说明 $H = \langle x, K \rangle, K = H \cap \langle x_2, \dots, x_n \rangle$).

(3)(选做) 令 F 为 $\{a_i\}_{i=1}^m$ 生成的自由阿贝尔群. 令 K 为 $b_1 = r_{11}a_1 + r_{1m}a_m, \dots, b_n = r_{n1}a_1 + r_{nm}a_m$ ($r_{ij} \in \mathbb{Z}$) 生成的子群

(i) 对任意 $i, \{b_1, \dots, b_{i-1}, -b_i, b_{i+1}, \dots, b_n\}$ 与 $\{b_1, \dots, b_{i-1}, b_i + rb_j, b_{i+1}, \dots, b_n\}$ ($r \in \mathbb{Z}, i \neq j$) 都能生成 K .

(ii) 对任意 i, F 可由 $\{a_1, \dots, a_{i-1}, -a_i, a_{i+1}, \dots, a_n\}$ 生成, 此时 K 由 $\{b_j = r_{j1}a_1 + \dots + r_{j,i-1}a_{i-1} - r_{ij}(-a_i) + r_{j,i+1}a_{i+1} + \dots + r_{jm}a_m\}$ 生成.

(iii) 对任意 i 以及 $j \neq i, \{a_1, \dots, a_{j-1}, a_j - ra_i, a_{j+1}, \dots, a_m\}$ ($r \in \mathbb{Z}$) 可生成 F , 此时 K 由 $\{b_k = r_{k1}a_1 + \dots + r_{k,i-1}a_{i-1} + (r_{ki} + rr_{kj})a_i + r_{k,i+1}a_{i+1} + \dots + r_{k,j-1}a_{j-1} + r_{kj}(a_j - ra_i) + r_{k,j+1}a_{j+1} + \dots + r_{km}a_m\}$.

(iv) 若记矩阵 $A = (r_{ij})$, 其表示 F 在某组基下 K 的生成元. 说明 (i)(ii)(iii) 描述的是 F 以及 K 在 A 的初等行列变换下不变.

(4)(选做) 证明如下定理: 设 G 是有限生成自由阿贝尔群, H 为 G 的非零子群, 则 H 也是有限生成自由阿贝尔群且 $\text{rank}(H) \leq \text{rank}(G)$. 更具体地说, 存在 G 的一组基 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 正整数 $r \leq n$, 正整数 $d_1 | d_2 | \dots | d_r$, 使得 H 是以 $\{d_1x_1, d_2x_2, \dots, d_rx_r\}$ 为基的自由阿贝尔群.(提示: 利用 (2),(iv) 以及第二次习题课讲义 Lemma1 也即 A 可经过初等行列变换化为对角矩阵.)

(5)(选做)(i) 若 $\text{rank}(F) = 3, b_1 = 9a_1 + 3a_2 + 6a_3, b_2 = 3a_1 + 3a_2, b_3 = 3a_1 - 3a_2 + 6a_3$. 将商群 F/K 写成循环群的直和.

(ii) 证明商群 F/K 有限当且仅当 $\det(A) \neq 0$, 此时 $|F/K| = |\det(A)|$.

必做题 (周六)

7: 判断以下命题是否成立, 若不然则给出反例:

(1) $H_1 \times H_2 \cong K_1 \times K_2, H_1$ 与某个 K_i 同构.

(2) 以下 $H_i \triangleleft G_i$ ($i = 1, 2$):

(i) 如果 $G_1 \cong G_2$ 并且 $H_1 \cong H_2$, 则 $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$.

(ii) 如果 $G_1 \cong G_2$ 并且 $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$, 则 $H_1 \cong H_2$.

(iii) 如果 $H_1 \cong H_2$ 并且 $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$, 则 $G_1 \cong G_2$.

8: $S_3, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{p^n}$ ($n \geq 1, p$ prime) 都不能写成它们真子群的直积.

9: 自由阿贝尔群 $\{F_i\}_{i \in I}$ 的直和 $\oplus_{i \in I} F_i$ 是自由阿贝尔群.(remark: 该结论对直积不一定成立.)

10: 设 $G = G_1 \times G_2, H \triangleleft G$ 且 $H \cap G_i = \{1\}, i = 1, 2$. 试证 $H \leq Z(G)$. 特别的, H 是阿贝尔群.(三百题原题)

11:(1) 自由阿贝尔群 F 是自由群当且仅当它是循环群.

(2) 有限生成阿贝尔群 G 是有限群当且仅当 G 的一组生成元均是有限阶元.(三百题原题)

(3) 有限生成阿贝尔群 G 是自由阿贝尔群当且仅当 G 的每个非零元都是无限阶元.(三百题原题)

二: 进阶 (思考思考)

12: 令 $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$. 如果 G 的子群 A 具有有限指数 m , 则 A 可以由 $2nm$ 个元素生成.(三百题原题)

13: 设 G_1 和 G_2 是非交换单群, 试证明 $G_1 \times G_2$ 的非平凡正规子群只有 G_1 和 G_2 .(三百题原题)

选做题

13: 若 A, B, C 为阿贝尔群, 试赋予 $\text{Hom}(A, B)$ 阿贝尔群结构, 并解决以下问题:

(1) 求 $\text{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n), \text{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Q}), \text{Hom}(\mathbb{Z}, A), \text{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

(2) 证明 $\text{Hom}(A \oplus B, C) \cong \text{Hom}(A, C) \oplus \text{Hom}(B, C)$ 以及 $\text{Hom}(C, A \oplus B) \cong \text{Hom}(C, A) \oplus \text{Hom}(C, B)$.

(3) 求 $\text{Hom}(\mathbb{Z}_{114} \oplus \mathbb{Z}_{514}, \mathbb{Z}_{1919} \oplus \mathbb{Z}_{810})$.

14: 设 N, H 为群, 给定群同态 $\theta: H \mapsto \text{Aut}(N)$. 定义它们的半直积 $G = N \rtimes_{\theta} H$ 为如下定义的群:

(i) 作为集合 G 为 $N \times H$. (ii) 二元运算为: $(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\theta(h_1)(n_2), h_1h_2)$, 其中 $n_i \in N, h_i \in H$.

(1) 验证 $N \rtimes_{\theta} H$ 为群且 $G/N \cong H$.

(2) 若 H 为 G 的子群, N 为 G 的正规子群, 且满足 $G = NH, H \cap N = \{e\}$, 则 $G = N \rtimes_{\theta} H$, 其中 θ 为共轭.

(3) 构造 θ 使得 $D_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}_2$ ($n \geq 2$), $S_n = A_n \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}_2$ 以及构造非交换 p^3 阶群 (有或者没有 p^2 阶元素).

第十次作业

必做题 (周三)

一: 基础

1: 在同构意义下给出所有 108 阶交换群。

2: 若 m, n 互素, 证明 $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$, 当 m, n 不互素时, $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ 不变因子为 $(m, n), [m, n]$ 。

二: 进阶 (思考思考)

3: 设 H 是有限阿贝尔群 A 的子群, 则有 A 的子群同构于 A/H 。

4: 设 A 为有限阿贝尔群, 则对 $|A|$ 的每个正因子 d , A 都有 d 阶子群和 d 阶商群。

选做题

1: 设 G 为有限交换 p -群, 若 G 只有一个 p 阶子群, 则 G 为循环群。

2: 设 G 为有限交换 p -群, 若 G 只有一个指数为 p 的子群, 则 G 为循环群。

3: 设 G 为有限 p -群, 若 G 只有一个指数为 p 的子群, 则 G 为循环群。

必做题 (周五)

一: 基础 (定义验证)

5: 证明对于含么环, 加法适合交换律可由定义中其他条件给出。

6: 对于下列情形, 各给一个例子。

- (1) 既无左单位元也无右单位元。
- (2) 只有左单位元, 无右单位元。
- (3) 只有右单位元, 无左单位元。

二: 进阶 (思考思考)

7: 对于下列情形, 各给一个例子。

- (1) 环 R 有单位元, 但一个子环 S 无单位元。
- (2) 环 R 无单位元, 但一个子环 S 有单位元。
- (3) 环 R 及其一子环有单位元, 但单位元不同。。

8: 设 \mathbb{F} 为数域, $M_n(\mathbb{F})$ 为 \mathbb{F} 上的 n 阶全矩阵环, 则 $A \in M_n(\mathbb{F})$ 为左零因子当且仅当 A 为右零因子。

选做题

4: 分类 18 阶群。

5: 设 R 为含么环, 若 $a, b \in R$, 且 $a, b, ab - 1$ 都可逆, 则 $ba - 1, a - b^{-1}, (a - b^{-1})^{-1} - a^{-1}$ 也可逆。