线性规划模型及其标准化

我们针对实际问题，可以列出如下问题形式：

$$\begin{aligned} \min(\max) \quad & z = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \leq (=, \geq) b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \leq (=, \geq) b_m \end{aligned} \tag{11}$$

我们可以把(11)转化为如下一般形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \geq b_m \end{aligned} \tag{12}$$

线性规划矩阵一般形式为：

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \end{aligned} \tag{13}$$

凸多面集（Convex polyhedra)

定义 (凸集)

一个集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ 是一个凸集，如果$\forall x, y$ 以及 $t \in [0,1]$,

$$tx + (1-t)y \in S.$$

定义 (超平面，半空间)

给定n维向量a和实数b,

1. 集合$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x = b\}$ 为超平面（hyperplane).
2. 集合$\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^\top x \geq b\}$为半空间（halfspace).

定义 (多面集)

多面集是符合下述定义的集合

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\},$$

其中，矩阵$A \in \mathrm{R}^{m\times n}$, 向量$b \in \mathrm{R}^m$.

多面集（polyhedron, polydedra）

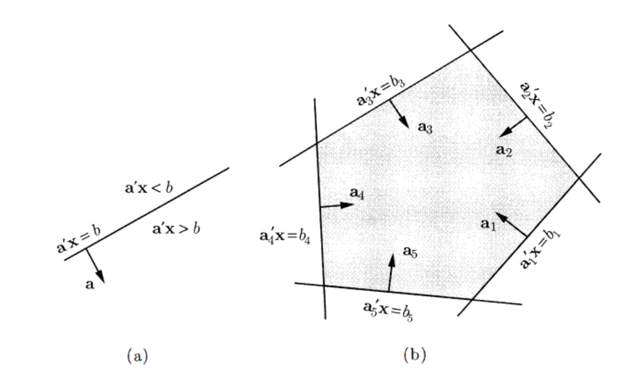
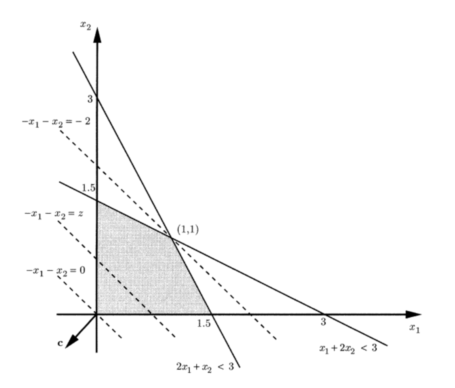


Figure: (a) 超平面和半空间。 (b)多面集

线性规划图解法

简单的线性规划问题，可以使用作图法求解。例如如下问题

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & -x_1 - x_2 \\
\text{subject to} & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{array}
$$



线性规划标准型

线性规划问题总可以写成如下标准形式：

$$
(\mathrm{LP}) \qquad
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \cdots, m \\
& x_j \geq 0, j = 1, \cdots, n.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

线性规划标准型

或者用矩阵表示为:

$$
\text{(LP)} \qquad \begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{15}
$$

其中矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, **c**是$n$维列向量，**b**是$m$维列向量。 **命题:** 线性规划一般形式和标准形式等价。(两个优化问题等价的意义是指，对于一个优化问题的可行解，我们总可以找到另一个问题对应的可行解，使得它们的目标函数值相等。)
标准形式的约束集是一种特殊的多面集。当我们研究线性规划理论时，一般形式更为方便。而在计算时，使用标准形式更为方便。

"数学上等价，但计算上不等效"。–冯康

标准型图示

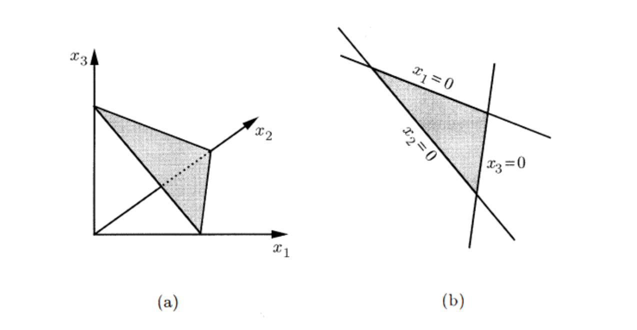


Figure: (a) $\{x_1+x_2+x_3=1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$ (b)截面示意图

标准化步骤

可能的标准化步骤有：

- 目标函数 $\max f(\mathbf{x}) \longrightarrow \min -f(\mathbf{x})$
- 不等式约束的等式化（引入松弛变量或者剩余变量）
- 自由变量的非负化 $x_j = x_j^{'} - x_j^{''}, x_j^{'}, x_j^{''} \geq 0$

习题2.1 证明：对于标准形式，如果矩阵$A \in \mathrm{R}^{m\times n}$的秩为$k$, $k < m$, 其行向量为 $a_1^\top, a_2^\top, \ldots, a_m^\top$. 那么$A$的$k$个线性无关的行向量$a_{i_1}^\top, a_{i_2}^\top, \ldots, a_{i_k}^\top$ 组成的子矩阵 $\tilde{A}$和对应的$\tilde{b}$, 有$P = Q$, 这里 $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$, $Q = \{x \mid \tilde{A}x = \tilde{b}, x \geq 0\}$.

因此，不失一般性，我们考虑标准形式可以假设 A是行满秩的。

对于线性规划基本理论，我们考虑一般形式，记 $P = \{x \mid Ax \geq b\}$.

结论1： 在线性规划中，约束条件均为线性等式及线性不等式，所以可行域P是凸集。

线性规划的基本理论

我们记$P = \{x \mid Ax \geq b\}$为一个凸多面集，不等式约束下标集$\mathcal{I} = \{i : a_i^\top x \geq 0\}$.

- **极点(extreme point)：** $\mathbf{x} \in P$被称作P的极点，若$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}$, $\lambda \in (0,1)$, $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in \mathcal{S}$, 必有$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)}$, 则称$\mathbf{x}$是凸集$\mathcal{S}$的极点。
- **顶点(vertex)：** $\mathbf{x}$被称作P的顶点，如果存在某个$c \in \mathbb{R}^n$，使得$c^\top \mathbf{x} < c^\top y$， $\forall y \in P, y \neq x$.
- **基解(basic solution) 和可行基解(basic feasible solution):** 基解: $\mathbf{x}$被称为一个基解，如果(a).所有的等式约束(若有)都成立，或者说主动/激活（active）; (b). 等式约束下标集合$\mathcal{E}$加上激活的不等式约束下标集$\mathcal{I}_e := \{i \in \mathcal{I} \mid a_i^\top x = b_i\}$中，存在$n$ 个下标i, 使得a_i线性无关。
  一个基解如果也是可行解，我们称其为一个可行基解。

注： 极点和顶点是几何层面的定义，基解是代数层面的定义。

基解和可行基解

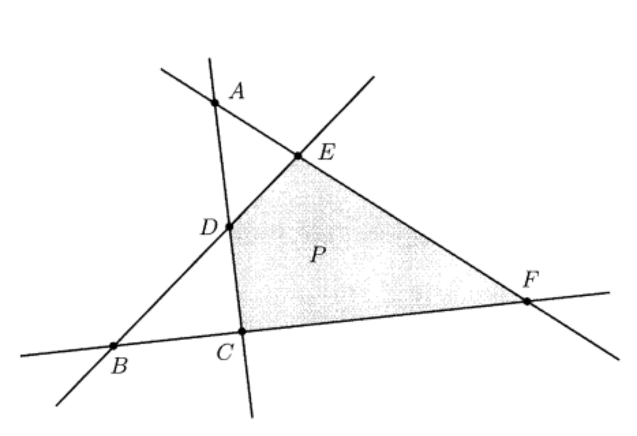


Figure: $\mathbb{R}^2$中，区域P是由四个半平面$\{x : a_i^\top x \le b_i\}, i = 1, 2, 3, 4$围成的多面集，$A, B, C, D, E, F$均为基解，$C, D, E, F$为可行基解。

线性规划的基本理论 I

定理

如果$P=\{x \mid Ax \geq b\}$是一个非空多面集， $x \in P$, 那么下述三种情况等价

1. x是顶点；
2. x是极点；
3. x是可行基解。

Proof.

顶点$\rightarrow$ 极点:

假设x是一个顶点，根据定义，可以找到c 使得 $c^\top x < c^\top y$，$y \in P, y \neq x$. 假设 $x = ty + (1-t)z, t \in [0,1]$, $x \neq y \neq z$, 那么 $c^\top x < c^\top (ty + (1-t)z)$. 这与假设矛盾，因此$x$不能被表示为其余两个可行点的凸组合。所以x是一个极点。

极点$\rightarrow$ 可行基解:

我们证明：如果x不是可行基解，那么x也不是极点。

如果x非可行基解，记$I = \{i : a_i^\top x = b_i\}$, 那么 $|I| < n$. 所以$a_i, i \in I$ 在$\mathbb{R}^n$的一个严格子空间中。可以找到d, 使得$d^\top a_i = 0, i \in I$. 我们令$y = x + \epsilon d, z = x - \epsilon d$, ϵ为一个很小的正数。我们有$a_i^\top y = b_i = a_i^\top z, i \in I$. 对于$i \notin I$, 可以令$\epsilon$充分小，使得$a_i^\top y = a_i^\top x + \epsilon a_i^\top d > b_i$且 $a_i^\top z = a_i^\top x - \epsilon a_i^\top d > b_i$. 故 $y, z \in P$, $x = (y+z)/2$不是极点。

可行基解$\rightarrow$ 顶点:

习题2.2，提示：构造$c = \sum_{i \in I} a_i$. I是主动集。 □

线性规划标准形式的可行基解

定理

考虑约束 $Ax = b$ 和 $x \geq 0$，并假设 $m \times n$ 矩阵 A 的行是线性无关的。向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 是基解当且仅当我们有 $Ax = b$，并且存在下标 $B(1), \ldots, B(m)$ 使得：

1. 列 $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ 是线性无关的；
2. 如果 $i \neq B(1), \ldots, B(m)$，那么 $x_i = 0$。

线性规划的基本理论

设线性规划标准形式

$$(\mathrm{LP}) \qquad \begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{16}$$

假设$A = (B, N)$, 其中B是m阶可逆矩阵（不失一般性）。同时记$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B^T, \mathbf{x}_N^T)^T$, 其中$\mathbf{x}_B$的分量与$B$中的列对应，$\mathbf{x}_N$的分量与$N$中的列对应。

线性规划的基本理论

这样$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$即可写成

$$(B,N)\begin{pmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{pmatrix}=\mathbf{b},$$

即$B\mathbf{x}_B+N\mathbf{x}_N=\mathbf{b}\Longrightarrow \mathbf{x}_B=B^{-1}\mathbf{b}-B^{-1}N\mathbf{x}_N.$

基解/基矩阵：

在上式中，$\mathbf{x}_N$的分量就是线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$的自由变量。特别地令$\mathbf{x}_N=\mathbf{0}$, 则得到解

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_B\\ \mathbf{x}_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

为方程组的一个基解，对应的B称为基矩阵。

$\mathbf{x}_B$的各分量称为基变量，$\mathbf{x}_N$的各分量称为非基变量。若$B^{-1}\mathbf{b}\geq\mathbf{0}$, 则$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}B^{-1}\mathbf{b}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$为(LP)的可行基解，相应的称$B$为可行基矩阵，$\mathbf{x}_B=\begin{pmatrix}\mathbf{x}_{B_1}\\ \vdots\\ \mathbf{x}_{B_m}\end{pmatrix}$为一组可行基变量。

例子：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

[习题2.3：试给出上述例子的所有极点和基解...]

极点、可行基解的存在性

定义

对于一个多面集$P=\{x \mid Ax \geq b\} \subset \mathbb{R}^n$, 如果存在$x \in P$ 和一个非零向量 $d \in \mathbb{R}^n$, 使得对任意实数λ, 有 $x+\lambda d \in P$，那么称P包含一条直线.

定理 (极点存在性定理)

假设$P=\{x \mid Ax \geq b\} \subset \mathbb{R}^n$非空，下列2种情况等价：

1. P中存在至少一个极点。
2. P不包含直线。

推论： 非空有界的多面集，或者非空的标准形式多面集必有可行基解。