每日一练(四) 答案

$\boxed{\text{Laurent 展开}}$

1. 在 $B(\infty,1)$ 上 $\frac{1}{|z|}<1$. 所以

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

2. 首先有 $$\frac{z^2-1}{(z-2)(z-3)} = 1-\frac{3}{z-2}+\frac{8}{z-3} \quad (*)$$

① $2<|z|<3$. 则

$$(*) = 1-\frac{3}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{8}{3-z}$$
$$= 1-\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{8}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\times 2^n}{z^{n+1}} - \frac{5}{3} - \frac{8}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n.$$

② $|z|>3$. 则

$$(*) = 1-\frac{3}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} + \frac{8}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}$$
$$= 1-\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n + \frac{8}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z}\right)^n$$
$$= 1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8\times 3^n - 3\times 2^n}{z^{n+1}}.$$

3. $\frac{z-a}{z-b}$ 将 $B(\infty, \max(|a|,|b|))$ 映为不含原点的半平面, 故 $\mathrm{Log}\frac{z-a}{z-b}$ 可以取出全纯的单值分支.
(因为 1 落在像里, 像区域必不会负实轴)

考虑主支 $\log\dfrac{z-a}{z-b}$ 的Laurent展开.

$$\log\frac{z-a}{z-b}=\log\frac{1-\frac{a}{z}}{1-\frac{b}{z}}=\log\left(1-\frac{a}{z}\right)-\log\left(1-\frac{b}{z}\right)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{z}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{z}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{n}\frac{1}{z^n}.$$

从而 $\operatorname{Log}\dfrac{z-a}{z-b}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n-a^n}{n}\frac{1}{z^n}+2k\pi i\quad(k\in\mathbb{Z})$

证明与计算

1. (1) 可能奇点集合: $\{0,\ 2k\pi i\ (k\in\mathbb{Z}),\ \infty\}$.

由于 $f(z)^{-1}=\dfrac{z(1-e^z)}{e^z}$, 故0是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的2阶零点, $2k\pi i\ (k\neq 0,\ k\in\mathbb{Z})$ 为 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的1阶零点. 对应地, 0是 f 的2阶极点, $2k\pi i\ (k\neq0,\ k\in\mathbb{Z})$ 是 f 的1阶极点. 由此也可得 ∞ 是 f 的非孤立奇点.

(2). 可能奇点集合: $\{0,\ \dfrac{1}{k\pi}\ (k\in\mathbb{Z}, k\neq0),\ \infty\}$

由于 $z\to\dfrac{1}{k\pi}\ (k\neq0,\ k\in\mathbb{Z})$ 时 $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}\to\infty$, 故此时 $\cos\left(\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$ 的极限不存在, $\dfrac{1}{k\pi}$ 是 f 的本性奇点. 由此也可得 $0,\infty$ 是 f 的非孤立奇点

(3). 可能奇点集合: $\{\pm1,\ \infty\}$.

首先. $f(z)=\frac{1}{z^2-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{z+1}\right)=\frac{1}{z^2-1}\sin\frac{\pi(1-z)}{2(z+1)}$

因此 $\lim\limits_{z\to1} f(z)=\lim\limits_{z\to1}\frac{\pi(1-z)}{2(1+z)}\cdot\frac{1}{z^2-1}=-\frac{\pi}{8}\neq\infty$.

1是f的可去奇点.

其次, 当 $z=z_n=\frac{2+n}{2-n}\to-1$ 时, $f(z_n)=0$. 另一方面, 当 $z=w_n=\frac{n}{2-n}\to-1$ 时, $f(z_n)\to\infty$. 所以 -1 是本性奇

最后, $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2}{1-z^2}\cos\frac{\pi}{1+z}$. 故 $\lim\limits_{z\to0} g(z)=0$ 有限, ∞ 是f的可去奇点.

~~2. 首先, 若 $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}$ ($m=1,2,\cdots$) 则 e^f 在 a 附近的Laurent展开为~~

$e^{\cancel{f(z)}}$ $f\in H(B(a,R)\setminus\{a\})$

2. 先证明一个引理. 若 $\exists r>0$, s.t. $\mathrm{Re} f(z)>0$ 在 $B(a,r)$ 上恒成立. 则 a 是 f 的可去奇点.

考虑变换 $\varphi(w)=\frac{w-1}{w+1}$. 则 $\varphi\circ f\in H(B(a,r)\setminus\{a\})$

并且 $\varphi(f(B(a,r)\setminus\{a\}))\subset B(0,1)$. 故 a 是 $\varphi\circ f$ 的可去奇点. 由 φ 可逆即知 a 是 f 的可去奇点.

由引理可得, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists z_n\in B(a,\frac{1}{n})$, s.t. $\mathrm{Re} f(z_n)\le 0$

故 $|e^{f(z_n)}|=e^{\mathrm{Re} f(z_n)}\le1$. 所以 a 不是 e^f 的极点. 又因为 f 在 a 附近无界, 故 a 只能是 e^f 的本性奇点.

Date. /

3. 设 $g(z)=f(z)-\frac{1}{z-1}-\left(\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}\right)-(z+z^2)$，

则 g 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上全纯，从而为常数（或有用 Liouville 定理说明）。又因为 $g(0)=\frac{5}{4}$，所以

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}+z+z^2+\frac{5}{4}.$$

4. 设 $f(z)=\varphi(z)+\psi(z)$，其中 $\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ 是 f 在 ∞ 处的主要部分。由于 φ 在 $B(\infty,R)$ 上收敛，从而在 $\mathbb{C}$ 上收敛，为整函数。另一方面，由于全纯部分 $\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n/z^n$ 在 $B(\infty,R)$ 上是有界的，故由条件 $\mathrm{Re}\,\varphi(z)$ 在 $B(\infty,R)$ 上有界，进而在 $\mathbb{C}$ 上有界。由 Liouville 易证 φ 为常数，矛盾。所以 ∞ 是可去的。

5. (1)(2) 见教材例4.1.10

(3). 在$z=0$附近成立

$$\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}=-\frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{z}{n}}+\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{z}{n}}$$

$$=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^k+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{n}\right)^k$$

$$=-\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^{2k-1}$$

代入部分分式展开可得

$$\cot(\pi z)=\frac{1}{\pi z}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^{2k-1}$$

$$=\frac{1}{\pi z}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)z^{2k-1}$$

$$=\frac{1}{\pi z}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)z^{2k-1}\quad(*)$$

(4). 由(*)可得 $g(z)=\cot(\pi z)-\frac{1}{\pi z}$ 在原点附近全纯.

计算得 $g'(z)=-\frac{\pi}{\sin^2(\pi z)}+\frac{1}{\pi z^2}=\frac{\sin^2(\pi z)-\pi^2z^2}{\pi z^2\sin^2(\pi z)}$

Date.　　/

由于 $\sin^2(\pi z)-\pi^2 z^2 = \left(\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{3!}+\cdots\right)^2 - \pi^2 z^2$

$= -\frac{\pi^4 z^4}{3} + o(z^4)$. 我们有

$$\lim_{z\to 0} g'(z) = \lim_{z\to 0} \frac{-\frac{\pi^4 z^4}{3}+o(z^4)}{\pi^3 z^4 + o(z^4)} = -\frac{\pi}{3}.$$

所以 $\zeta(2) = -\frac{\pi}{2}\lim_{z\to 0} g'(z) = \frac{\pi^2}{6}$. 即著名的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$