微分方程

变系数线性微分方程组

线性微分方程组一般理论

- 解的形式和解的结构
  - 解是向量函数
  - 通解结构：齐次方程和非齐次方程
  - 齐次方程：叠加原理+通解结构
  - 非齐次方程：常数变易法+通解结构

一阶变系数线性微分方程组

一阶线性微分方程组

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

可写为：$\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t),\ A(t) = (a_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}$.

这里$a_{ij}(t), f_k(t)$都是(a,b)上的连续函数.

定义n维函数列向量 $\vec{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$， $\vec{f}(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$

$n\times n$函数矩阵 $A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$

规定： $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$

一阶线性微分方程组的向量形式为：

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}+\vec{f}(t) \qquad (1)$$

当$\vec{f}(t)\equiv 0$，方程(1)称为**齐次的**. 即

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x} \qquad (2)$$

当$\vec{f}(x)\not\equiv 0$，方程(1)称为**非齐次的**.

线性微分方程组解的结构

- 齐次方程
  - **1 叠加原理**
  - **2 线性相关、无关定义**
  - **3 齐次线性方程组有*n*个线性无关的解**
  - **齐次方程组解线性相关性判别命题**
  - **齐次方程组的解要么恒等于0, 要么恒不为0**
- 非齐次方程程
  - **4 通解结构:**
  - **5 特解求解：常数变易法**

1 叠加原理

引理1. 如果

$$\vec{\varphi}_1(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(t)\\ \varphi_{21}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{n1}(t)\end{pmatrix},\vec{\varphi}_2(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{12}(t)\\ \varphi_{22}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{n2}(t)\end{pmatrix},\cdots,\vec{\varphi}_m(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{1m}(t)\\ \varphi_{2m}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{nm}(t)\end{pmatrix}$$

是方程 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}$ (2)的m个解,则它们的线性组合

$C_1\vec{\varphi}_1(t)+C_2\vec{\varphi}_2(t)+\cdots+C_m\vec{\varphi}_m(t)$也是方程(2)的解,

这里$C_1,C_2,\cdots,C_m$是任意常数.

2　向量函数的线性相关性

叠加原理告诉我们:

一阶线性齐次微分方程组(2)的解集合构成了一个线性空间.

为了搞清楚这个线性空间的性质，进而得到方程组(2)的解的结构，我们引入线性相关和线性无关的概念.

定义1： 设$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$是定义在I上的函数,

如果存在m个不全为0 的常数$C_1, C_2, \cdots, C_m$使得

$$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \cdots + C_m x_m(t) = 0$$

在区间I上恒成立,那么称这m个函数线性相关.

否则称之为线性无关.

定义2： 设$\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \cdots, \vec{x}_m(t)$是定义在I上的$n$ 维向量函数,

如果存在m个不全为0 的常数$C_1, C_2, \cdots, C_m$使得

$$C_1 \vec{x}_1(t) + C_2 \vec{x}_2(t) + \cdots + C_m \vec{x}_m(t) = 0$$

在区间I上恒成立,那么称这m个向量函数线性相关.

否则称之为线性无关.

3　齐次方程组有n个线性无关解

引理2. 记$S=\left\{\vec{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\text{满足方程}\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x},t\in I\ \ (2)\right\}$,

那么S是n维线性空间.

$$\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n\leftrightarrow\vec{x}(t)\in S\Rightarrow S\cong\mathbb{R}^n.$$

定理1. 齐次方程组(2)有n个线性无关的解(基本解组)

$$\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\cdots,\vec{\varphi}_n(t)$$

且(2)通解为

$$\vec{x}=C_1\vec{\varphi}_1(t)+C_2\vec{\varphi}_2(t)+\cdots+C_n\vec{\varphi}_n(t).$$

注：当$\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\cdots,\vec{\varphi}_n(t)$是(2)基本解组（线性无关解组），则(2)通解表示为：

$$\vec{x}=C_1\vec{\varphi}_1(t)+C_2\vec{\varphi}_2(t)+\cdots+C_n\vec{\varphi}_n(t).$$

利用基解矩阵$\Phi(t)$,(2)通解可以表示为：$\vec{x}=\Phi(t)\vec{C}$, 这里

$$\Phi(t)=(\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\cdots,\vec{\varphi}_n(t)),\qquad \vec{C}=(C_1,C_2,\cdots,C_n)^T.$$

引理2的证明. 由叠加原理易知S为线性空间.下证$\dim S = n$.

由解的存在唯一性定理(证明见下一章),任意固定$t_0 \in I, \forall \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$,

S中存在唯一元素$\vec{x}(t)$使$\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$, 即存在映射$H:\mathbb{R}^n \to S$,

$H(\vec{x}_0) = \vec{x}(t)$.下证映射$H$是线性同构.

$\forall \vec{x}(t) \in S, \vec{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$且$H(\vec{x}(t_0)) = \vec{x}(t) \Rightarrow H$为满射.

$\forall \vec{x}_0 \neq \vec{x}_0^* \in \mathbb{R}^n$,由解的存在唯一性知$H(\vec{x}_0) \neq H(\vec{x}_0^*) \Rightarrow H$为单射.

再由叠加原理和解的唯一性易知：$H(\alpha \vec{x}_0 + \beta \vec{x}_0^*) = \alpha H(\vec{x}_0) + \beta H(\vec{x}_0^*)$

即H是线性的. 故H是线性同构，从而$\dim S = \dim \mathbb{R}^n = n$.

定理1的证明. 由引理2, n维线性空间S存在一组基$\vec{\varphi}_1(t), \vec{\varphi}_2(t), \cdots, \vec{\varphi}_n(t)$,

则$\forall \vec{x}(t) \in S$可表示为此基的线性组合.

函数向量线性相关性判别条件:

给定n个n维向量函数

$$\vec{\varphi}_1(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(t)\\ \varphi_{21}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{n1}(t)\end{pmatrix},\vec{\varphi}_2(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{12}(t)\\ \varphi_{22}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{n2}(t)\end{pmatrix},\cdots,\vec{\varphi}_n(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{2n}(t)\\ \vdots\\ \varphi_{nn}(t)\end{pmatrix},$$

记

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

其行列式$W(t)=\det\Phi(t)$称为n个向量函数的**朗斯基(Wronsky)行列式.**

函数向量线性相关性判别条件:

如果函数向量线性相关 $\Rightarrow W(t) \equiv 0, \quad \forall t \in I$

如果函数向量线性无关 $\Leftarrow W(t_0) \neq 0, \quad \exists t_0 \in I$

如果这n个函数向量是(2)的解,

$$\text{线性相关} \Leftrightarrow W(t) \equiv 0, \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow W(t_0) = 0, \quad \exists t_0 \in I$$

$$\text{线性无关} \Leftrightarrow W(t) \neq 0, \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow W(t_0) \neq 0, \quad \exists t_0 \in I$$

定理2：若n个向量函数是(2)的解，那么它们

$$\text{线性相关} \Leftrightarrow W(t) \equiv 0, \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow W(t_0) = 0, \quad \exists t_0 \in I$$

$$\text{线性无关} \Leftrightarrow W(t) \neq 0, \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow W(t_0) \neq 0, \quad \exists t_0 \in I$$

- (2)任意n个解的**Wronsky**行列式满足Liouville公式
- (2)解组的**Wronsky**行列式要么恒等于0，要么恒不为0

引理3 (*Liouville*公式) 齐次线性微分方程组(2)任意n个解的*Wronsky*行列式满足：$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}A(s)ds}$，

其中，$\mathrm{tr}A(s)$为矩阵$A(s)$的迹.

注：$W(t)$要么恒为0，要么恒不为0.

证明：Wronsky行列式$W(t)=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \cdots & \varphi_{2n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}$.

由(2)，$\dfrac{d\vec{\varphi}_k(t)}{dt}=A(t)\vec{\varphi}_k(t)\Rightarrow\dfrac{d\varphi_{kl}(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}(t)\varphi_{jl}(t)$，

利用行列式微分性质，有

$$\frac{dW(t)}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{d\varphi_{k1}(t)}{dt} & \cdots & \frac{d\varphi_{kn}(t)}{dt}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{kj}(t)\varphi_{j1}(t) & \cdots & \sum_{j=1}^{n}a_{kj}(t)\varphi_{jn}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}$$

(对$j\neq k$,以$-a_{kj}(t)$乘以j行并加到k行)

$$=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{1n}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{kk}(t)\varphi_{k1}(t) & \cdots & a_{kk}(t)\varphi_{kn}(t)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}(t)W(t)=\mathrm{tr}A(t)W(t)$$

$\Rightarrow W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}A(s)ds}$.证毕.

定理2的证明. 由Liouville公式, $W(t)\neq 0 \Leftrightarrow W(t_0)\neq 0, \exists t_0\in I$

$\Leftrightarrow n$个常列向量$\vec{\varphi}_1(t_0),\cdots,\vec{\varphi}_n(t_0)$线性无关, 即若

$\sum_{k=1}^{n} C_k\vec{\varphi}_k(t_0)=\vec{0}$, 必有$C_k=0, 1\leq k\leq n$.

由引理2的证明知$H(\sum_{k=1}^{n} C_k\vec{\varphi}_k(t_0))=\sum_{k=1}^{n} C_k H(\vec{\varphi}_k(t_0))=\sum_{k=1}^{n} C_k\vec{\varphi}_k(t)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{\varphi}_1(t),\cdots,\vec{\varphi}_n(t)$线性无关.

类似可证线性相关情形.

4 非齐次方程的通解结构

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t) \quad (1)$$

引理4

如果$\Phi(t)$是非齐次方程组(1)对应的齐次方程组(2)的一个基解矩阵，$\vec{\varphi}^*(t)$是(1) 的一个特解，则(1)的任一个解$\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$可以表示为：

$$\vec{\varphi}(t) = \underbrace{\Phi(t)\vec{C}}_{\text{对应齐次方程组通解}} + \underbrace{\vec{\varphi}^*(t)}_{\text{非齐次方程组特解}}.$$

对应齐次方程组通解　非齐次方程组特解

证：(1)任一解$\vec{\varphi}(t)$减去$\vec{\varphi}^*(t)$满足(2)，由定理1即证.

5 非齐次方程的特解与常数变易法

回顾: 一阶线性微分方程的常数变易法

把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

齐次方程的通解为: $x = Ce^{\int -P(t)dt}$

设非齐次方程的解为 $x = \underline{C(t)}e^{-\int P(t)dt}$

将其代回到方程中确定待定函数$C(t)$.

❖ 常数变易法----利用齐次通解求非齐特解

齐次方程组(2)的通解$\vec{x}=\Phi(t)\vec{C}$,　　$\boxed{\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)}$

假设非齐次方程组(1)有特解$\vec{x}=\Phi(t)\vec{C}(t)$,

将$\vec{x}=\Phi(t)\vec{C}(t)$代入(1)，确定待定函数$\vec{C}(t)$. 有

$$\left[\Phi(t)\vec{C}(t)\right]'=A(t)\Phi(t)\vec{C}(t)+\vec{f}(t),$$

即　$\Phi'(t)\vec{C}(t)+\Phi(t)\vec{C}'(t)=A(t)\Phi(t)\vec{C}(t)+\vec{f}(t),$

得　$\Phi(t)\vec{C}'(t)=\vec{f}(t),$

故　$\vec{C}(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds.$

故得非齐次线性微分方程组的通解定理:

定理3 设$\Phi(t)$是(2)的一个基解矩阵, 则线性微分方程组(1)的通解为:

$$\vec{x}=\Phi(t)\vec{C}+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds,$$

且满足初值条件$\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$的解为

$$\vec{x}=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\vec{x}_0+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds.$$

注. 记$\mathbb{M}=\left\{\vec{x}(t)\,\middle|\,\frac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}+\vec{f}(t), A(t)\text{和}\vec{f}(t)\neq 0\text{在}I\text{上连续}\right\}$,

则有如下结论：

- $\mathbb{M}$不是线性空间：$\vec{x}_1,\vec{x}_2\in\mathbb{M}\Rightarrow\vec{x}_1+\vec{x}_2\notin\mathbb{M}$
- $\mathbb{M}$是n维线性流形或仿射空间
- $\mathbb{M}$中任何元素均可由$n+1$个线性无关解的线性组合表示

例 求微分方程组 $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\vec{x} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$ 的通解.

解: 易知

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{3t} \\ -e^{t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

是对应齐次方程的基解矩阵, 求$\Phi(t)$的逆阵得

$$\Phi^{-1}(s) = \frac{1}{2e^{4s}}\begin{pmatrix} e^{3s} & -e^{3s} \\ e^{s} & e^{s} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-s} & -e^{-s} \\ e^{-3s} & e^{-3s} \end{pmatrix}$$

得方程的特解为

$$\vec{x}^*(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{t} & e^{3t} \\ -e^{t} & e^{3t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-s} & -e^{-s} \\ e^{-3s} & e^{-3s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2s} \\ 0 \end{pmatrix} ds$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{t} & e^{3t} \\ -e^{t} & e^{3t} \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{s} \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}-e^{t} \\ e^{3t}-2e^{2t}+e^{t} \end{pmatrix}.$$

所以原方程的通解为

$$\vec{x}(t)=\Phi(t)\vec{C}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{3t}-e^{t} \\ e^{3t}-2e^{2t}+e^{t} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} C_1e^{t}+C_2e^{3t}+\dfrac{1}{2}(e^{3t}-e^{t}) \\ \\ -C_1e^{t}+C_2e^{3t}+\dfrac{1}{2}(e^{3t}-2e^{2t}+e^{t}) \end{pmatrix}.$$

例 对二阶微分方程 $x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=0,$

若$\varphi(t)$是方程的一个非零解, 求它的通解.

解: 原方程化为方程组 $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}:=A(t)\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}.$

设$x(t)$是与$\varphi(t)$不同的解，由**Liouville公式**得

$$W(t)=\begin{vmatrix} \varphi(t) & x(t) \\ \varphi'(t) & x'(t) \end{vmatrix}=\varphi(t)x'(t)-\varphi'(t)x(t)$$

$$=ce^{-\int p(t)dt},\ c=W(t_0).$$

用$\frac{1}{\varphi^2(t)}$乘上式两端并整理得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x(t)}{\varphi(t)}\right)=\frac{c}{\varphi^2(t)}e^{-\int p(t)dt}.$$

由此可得 $\dfrac{x(t)}{\varphi(t)} = \displaystyle\int \frac{c}{\varphi^2(t)} e^{-\int p(t)dt} dt + c_1$

取$c = 1, c_1 = 0,$

则 $x^*(t) = \varphi(t) \displaystyle\int \frac{1}{\varphi^2(t)} e^{-\int p(t)dt} dt$ 就是二阶方程的另一解,

又因为 $W(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & x^*(t) \\ \varphi'(t) & x^{*\prime}(t) \end{vmatrix} = e^{-\int p(t)dt} \neq 0,$

所以x^*是与φ线性无关的解, 从而通解为

$$\boxed{x(t) = c_1\varphi(t) + c_2\varphi(t) \int \frac{1}{\varphi^2(t)} e^{-\int p(t)dt} dt.}$$

总结

- 基解矩阵---------线性齐次方程的通解.
- 线性非齐次方程的通解结构(n+1维)

  齐次通解+非齐次特解

- 线性非齐次方程的特解和常数变易法.
- 线性非齐次方程的通解表达式

$$\vec{x}=\Phi(t)\vec{C}+\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds,$$

$\Phi(t)$基解矩阵，$\vec{C}$任意常数列向量.