思考题讨论

- 思考题5.3 证明$\mathrm{d}\boldsymbol{F}'_{12} - \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = \mathrm{d}[kI_1I_2(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \cdot \boldsymbol{r}_{12})\boldsymbol{r}_{12} / r_{12}^3]$.
- 思考题5.4 电场线管内场线的根数会改变吗？

思考题5.4 证明 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}' - \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12} = \mathrm{d}[kI_1I_2(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})\boldsymbol{r}_{12}/r_{12}^3]$.

Hint: 对回路1积分时$\boldsymbol{r}_2$不变，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}=\mathrm{d}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=-\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1=-\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}' - \mathrm{d}\boldsymbol{F}_{12}$$

$$= -kI_1I_2\boldsymbol{r}_{12}\left[\frac{2(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2)}{r_{12}^3} - \frac{3(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_{12})(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^5}\right]$$

$$-kI_1I_2\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1-(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1)\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

$$= kI_1I_2\left[-\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2)\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3} - \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r_{12}^3} + \frac{3(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{r}_{12})(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^5}\right]$$

$$= \mathrm{d}[kI_1I_2(\boldsymbol{r}_{12}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2)\boldsymbol{r}_{12}/r_{12}^3]\ (\text{Hint: } \mathrm{d}r_{12} = \boldsymbol{r}_{12}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}/r_{12})$$

第十九讲 2022-05-05

第5章 真空中的静磁场

§ 5.1 磁现象与磁场

§ 5.2 毕奥—萨伐尔定律

§ 5.3 安培定律

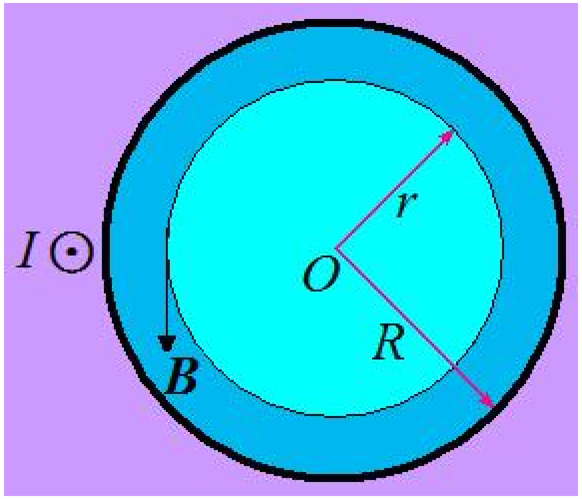
§ 5.4 静磁场的基本定理

§ 5.5 带电粒子在磁场中的运动

5. 安培环路定理应用举例 (一维对称体系)

[例5.5] 一无限长直圆柱导线，截面半径为R，电流I沿截面均匀分布，求导线内、外的磁场分布。

[解] 根据电流分布的轴对称性，$\boldsymbol{B}$沿图示环向，大小只与离轴线的距离有关。设圆回路L的半径为r，则由安培环路定理得



$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2\pi r B = \mu_0 I',$$

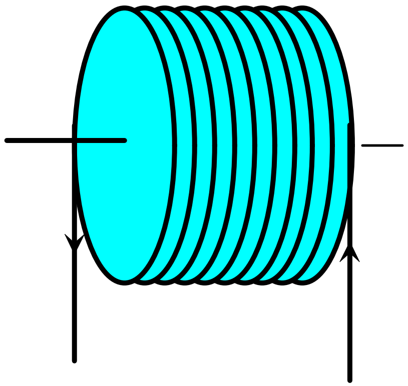
其中I'为穿过圆回路L的电流。易证

$$r < R\text{时，}\ I' = Ir^2/R^2,\ \rightarrow B = \mu_0 Ir/(2\pi R^2),$$

$$r \geq R\text{时，}\ I' = I,\qquad \rightarrow B = \mu_0 I/(2\pi r).$$

[例5.6] 设一无限长螺线管单位长度上的匝数为n，电流强度为I，求管内、外的磁场。

[解]由电流分布的轴对称性可判断管内$\boldsymbol{B}$只有轴向分量，大小只与场点离轴线的距离r有关。

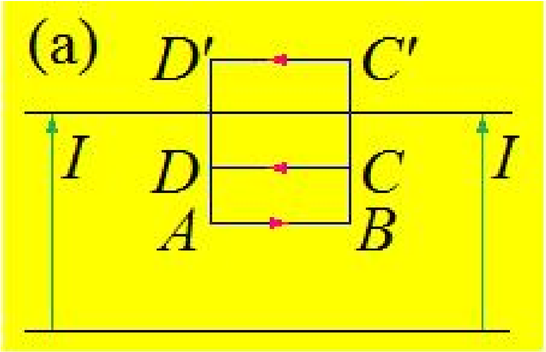


取矩形回路$ABCDA$ 和$ABC'D'A$，AB 位于管轴上，CD 和$C'D'$分别位于管内、外 (图a)。由例5.4，轴线上$B=\mu_0 nI$ 。

对回路$ABCDA$应用安培环路定理得

$$-\mu_0 nI\,\overline{AB}+B_i(r)\overline{CD}=0,\quad \overline{AB}=\overline{CD}$$

$$\therefore B_i(r)=\mu_0 nI \text{ 。}$$



→无限长螺线管内部轴向磁场均匀。

对回路$ABC'D'A$应用安培环路定理得

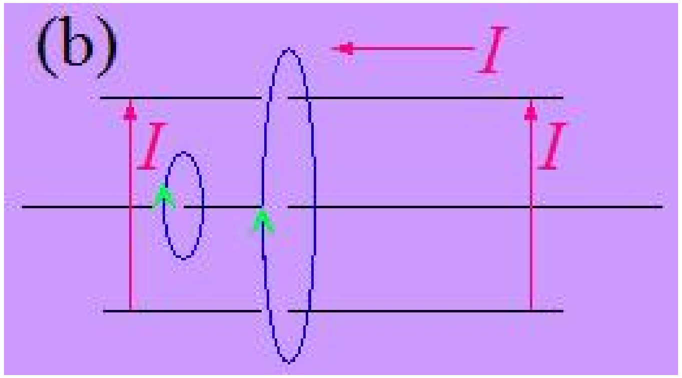
$$\cancel{-\mu_0 nI\overline{AB}}+B_{e//}(r)\overline{C'D'}=\cancel{-\mu_0 nI\overline{AB}},\quad \therefore B_{e//}(r)=0,$$

即无限长螺线管外部轴向磁场处处为零。

另一方面，螺线管存在一自右向左的等效轴向电流I (图b)，可视作沿螺线管表面均匀分布，由它产生的磁感应强度沿环向。选择同螺线管共轴的圆回路并应用安培环路定理，可得管内$\boldsymbol{B}_{i\perp}=0$，管外$\boldsymbol{B}_{e\perp}=\mu_0 I/2\pi r$。

结论：无限长螺线管

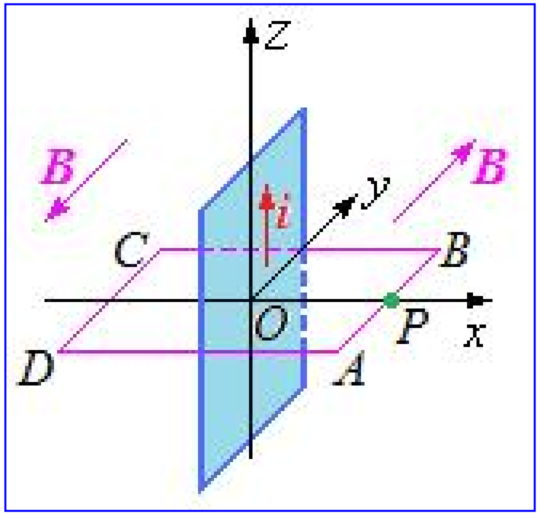
- 内部磁场 // 轴线，均匀分布；
- 外部磁场同无穷长直线电流。



[例5.7] 电流均匀分布在一无穷大平面导体薄板上，面电流密度为$\boldsymbol{i}$，求空间磁场分布。

[解] 设导体板位于y-z平面，电流沿z方向。由对称性，$\boldsymbol{B}$只有y分量，大小只与x有关，且$\boldsymbol{B}(x)=-\boldsymbol{B}(-x)$.

考虑x轴上一点P，以O为中心，在x-y平面过点P作矩形回路$ABCDA$，应用安培环路定理可得



$$B(x)2\overline{AB}=\mu_0 i\,\overline{AB}.$$

$\rightarrow B(x)=\mu_0 i/2$。

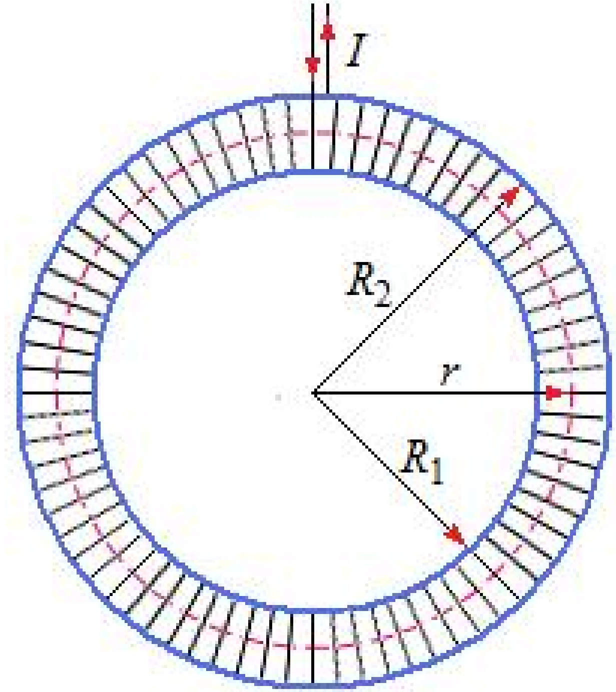
$\rightarrow$无穷大平面电流两侧为等大反向的均匀磁场。

$\rightarrow$有限大小面电流：只要x<<面电流尺寸，同上处理。

[例5.8] 绕在圆环上的线圈叫螺绕环，设螺绕环内、外径分别为R_1和R_2，总匝数为N，电流强度为I，求环管内、外的磁场分布。

[解] 螺绕环的电流~轴对称分布→**B**沿环向，大小只与离轴线的距离有关。在环管内部取半径为 r 的圆周回路，由安培环路定理得$2\pi rB = \mu_0 NI$

→环管内 $B=\mu_0 NI/2\pi r$.



当螺绕环很细时，$R_1 \approx R_2 \approx R$，

$$B=\mu_0 NI/2\pi R=\mu_0 nI.$$

→细螺绕管内磁场大小近似均匀，等于无穷长直螺线管的结果。

进一步讨论：

- 如果在螺绕环管外部取一与环共轴的圆周回路，则穿过该回路的总电流为零，由安培环路定理，螺绕环管外部的环向磁场处处为零。
- 不过，基于和例5.6类似的理由，螺绕环存在一逆时针方向的等效环向电流I，该电流沿环管表面分布。对于细螺绕环，该环向电流在管外的磁场与一电流强度I、半径R的圆线圈的磁场相同。

§ 5.5 带电粒子在磁场中的运动

1. 带电粒子在磁场中运动的特点

1) 洛仑兹力不作功

- 带电粒子在磁场中受到洛仑兹力，其功率为

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\upsilon}=(q\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\upsilon}=0.$$

可见洛仑兹力不作功。

- 由于能量守恒， 在洛仑兹力作用下，粒子的动能和速率不会改变，变化的只是粒子速度的方向。

2) 在均匀磁场中

- 粒子的运动方程为 $m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=q\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B}$
- 设$\boldsymbol{B}$沿z方向，即$B=B_z$， $B_x=B_y=0$， 上式的分量式为

$$\begin{cases} m\ddot{x}=qB\dot{y}, \\ m\ddot{y}=-qB\dot{x}, \\ m\ddot{z}=0. \end{cases}$$

- 定义$\omega_L=qB/m$， 则上述方程可化为

$$\begin{cases} \dddot{x}+\omega_L^2\dot{x}=0, \\ \dddot{y}+\omega_L^2\dot{y}=0, \\ \ddot{z}=0. \end{cases}$$

- 易得解

$$\begin{cases} \dot{x} = \upsilon_\perp \cos(\omega_L t + \delta), \\ \dot{y} = -\upsilon_\perp \sin(\omega_L t + \delta), \\ \dot{z} = \upsilon_{//} = \text{const.} \end{cases} \quad \begin{cases} x = (\upsilon_\perp / \omega_L) \sin(\omega_L t + \delta) + x_0, \\ y = (\upsilon_\perp / \omega_L) \cos(\omega_L t + \delta) + y_0, \\ z = \upsilon_{//} t + z_0. \end{cases}$$

其中$\upsilon_{//}, \delta, x_0, y_0, z_0$为积分常数，由初始条件定。

- $\upsilon_\perp$和$\upsilon_{//}$分别为垂直及平行于磁场的速度分量。因为υ=const, $\upsilon_{//}$=const，所以$\upsilon_\perp$=const。

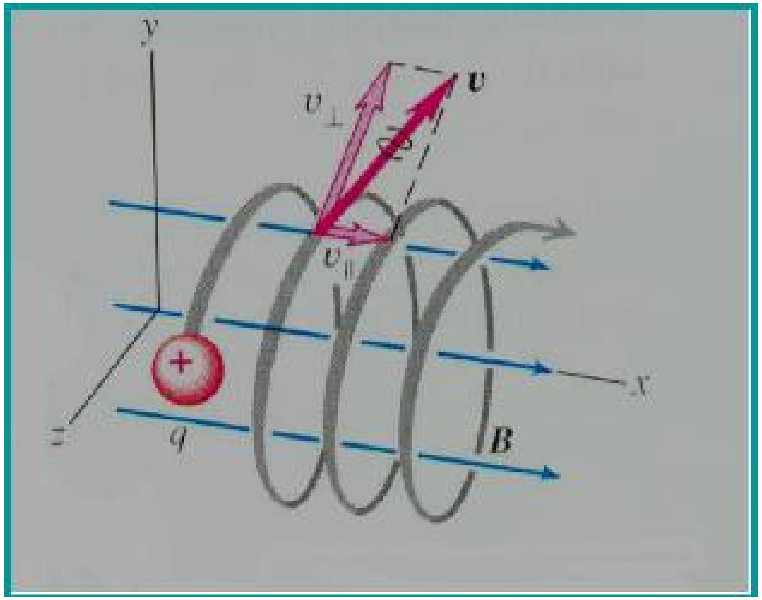
  →粒子速度与磁场的夹角 (投射角) $\theta=\sin^{-1}(\upsilon_\perp/\upsilon)$在粒子运动过程中为常量。

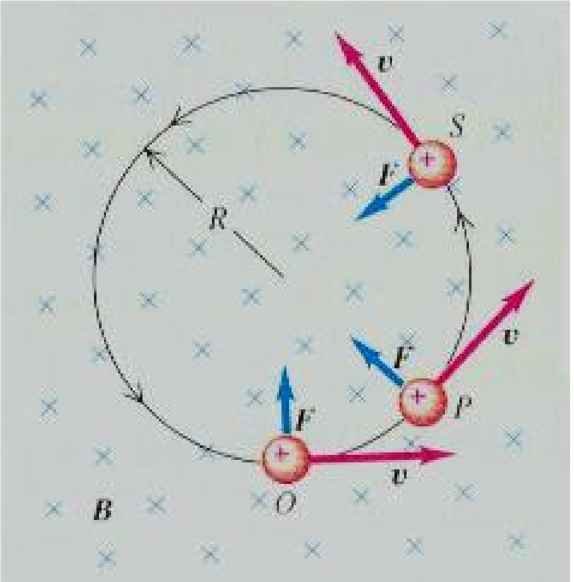
- 由上述解可得

- 磁场中的带电粒子作等距螺旋线运动。
- 轨道在xy平面上的投影是圆，回旋半径

$$R=\upsilon_\perp/\omega_L=\upsilon_\perp m/qB。$$

- 粒子回旋角频率$\omega_L=qB/m$，回旋频率$f=qB/(2\pi m)$，回旋周期$T=2\pi m/(qB)$，均与υ、R无关！





3) 在缓变非均匀磁场中

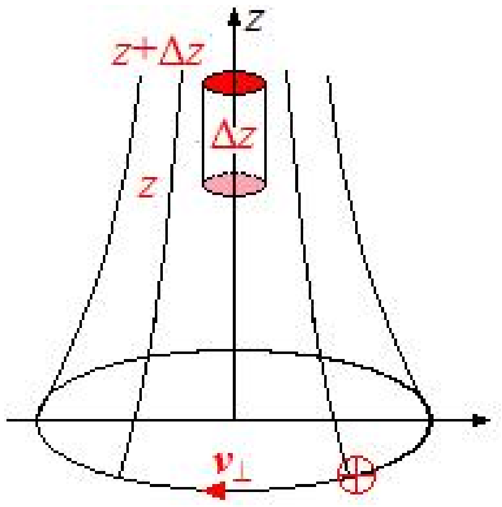
$\omega = qB/m \quad R = \upsilon_\perp/\omega$

- 若磁场的非均匀尺度>>粒子回旋半径，可近似认为粒子绕$\boldsymbol{B}$线作螺旋运动。但$\upsilon_{//}$和$\upsilon_\perp$不守恒。
- 新守恒量：带电粒子绕磁感应线快速旋转形成圆电流环，其磁矩守恒，称回旋磁矩，大小为

$$\mu = I\Delta S = \frac{q\omega}{2\pi}\pi R^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_\perp^2/B$$

- 证明：以轴对称缓变非均匀磁场为例

$$\boldsymbol{B} = B_z\hat{z} + B_r\hat{r},\ \boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_{//}\hat{z} + \upsilon_\perp\hat{\varphi}.$$



取小圆柱形高斯面，由高斯定理

$$B_r 2\pi r\Delta z + [B_z(0, z+\Delta z) - B_z(0,z)]\pi r^2 = 0,$$

$$\therefore B_r = -\frac{r}{2}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{B_z(0,z+\Delta z)-B_z(0,z)}{\Delta z} = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

B_r导致z方向有洛仑兹力，运动方程

$$m\frac{\mathrm{d}\upsilon_{//}}{\mathrm{d}t} = q\upsilon_\perp B_r = -q\upsilon_\perp \frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{m\upsilon_\perp^2}{2B}\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\mu\frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

可见，粒子受到由强场处指向弱场处的磁压力。

将上式两边同乘以$\upsilon_{//}$，又 $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\partial B}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \upsilon_{//}\frac{\partial B}{\partial z}$,

$$\boxed{r = \frac{m\upsilon_\perp}{qB}}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\upsilon_{//}^2\right) = -\mu\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}. \qquad (\#)$$

另一方面，由于$\upsilon^2=\upsilon_{//}^2+\upsilon_{\perp}^2$守恒， 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\upsilon_{//}^2\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\upsilon_{\perp}^2\right)$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu B)=-B\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}-\mu\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t},$$

上式与上页的(#)式比较，得

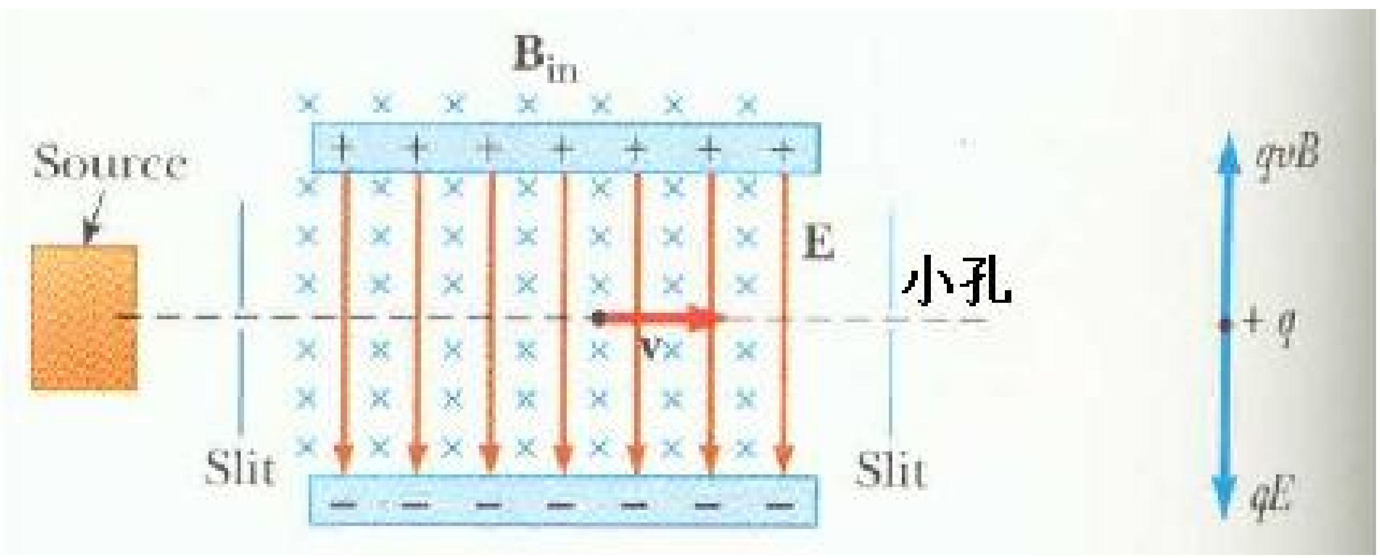
$$\rightarrow\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}=0,\quad \mu\text{守恒}.$$

- 更普遍的结论：随时间、空间缓变磁场中，带电粒子的回旋磁矩守恒。

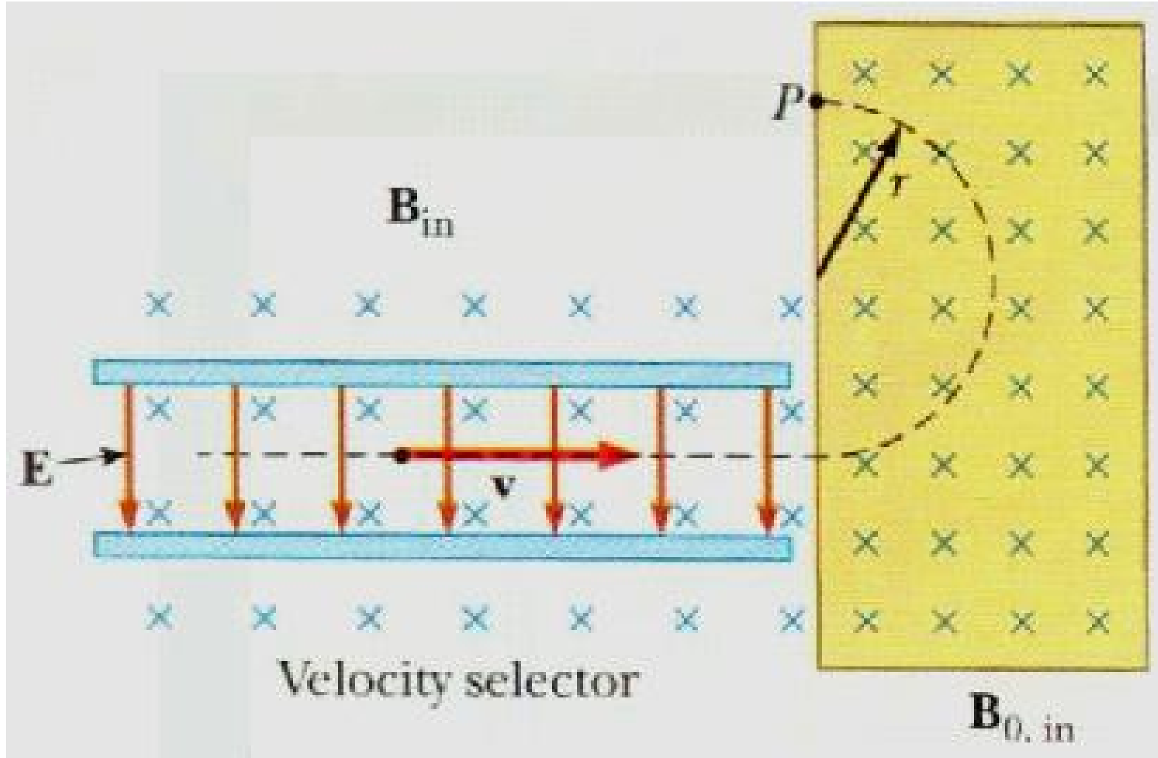
2. 应用举例

1) 速度选择器

　　一束带电粒子射入相互垂直的均匀电场和均匀磁场。能从小孔穿出的粒子必沿虚线运动，要求电力与磁力平衡，$qE=q\upsilon B$，$\therefore \upsilon=E/B$。→该装置只允许特定速率的粒子穿过，无关粒子电荷、质量。



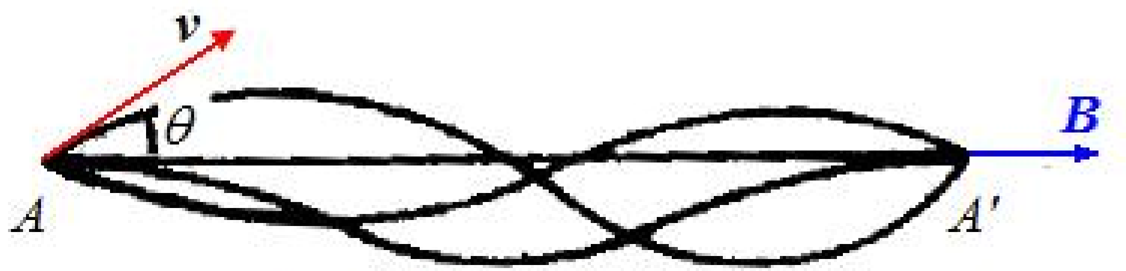
2) 质谱仪



- 基本原理：离子束通过速度选择器，选出特定υ的离子，进入均匀磁场中作圆运动，回旋半径R可由感光胶片来测得。B, υ, R已知，由$q/m=\upsilon/(RB)$可得粒子的荷质比。
- 应用：质谱仪可利用来分离同位素，分析含量。

3) 磁聚焦

- 若无磁场，离子束中各离子近似直线运动→发散。
- 外加均匀磁场，离子束作螺旋线运动，若离子束初始张角较小，$\upsilon_{//}$≈常量，离子回旋频率与回旋速度$\upsilon_{\perp}$无关，经一个周期沿磁场方向聚一次，不发散。

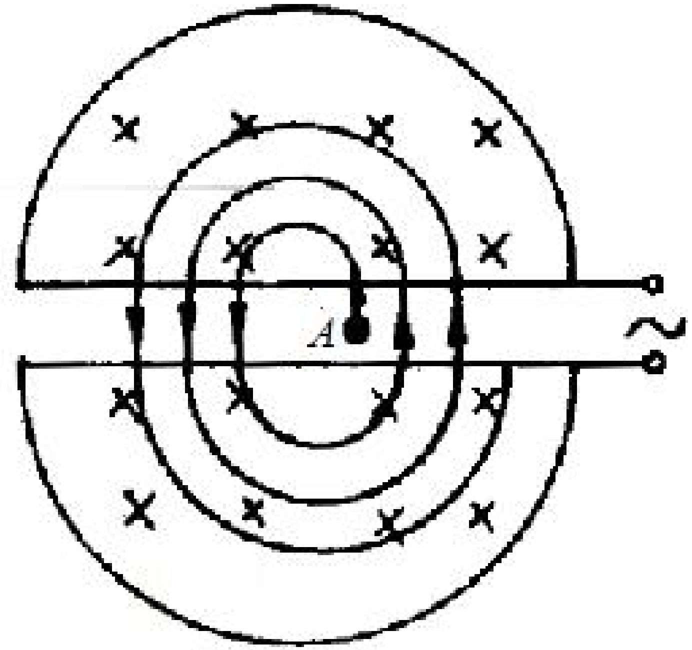


均匀磁场的磁聚焦

- 离子螺旋运动的螺距

$$h=T\upsilon_{//}\approx 2\pi m\upsilon/(qB),\ T=2\pi m/(qB).$$

4) 回旋加速器



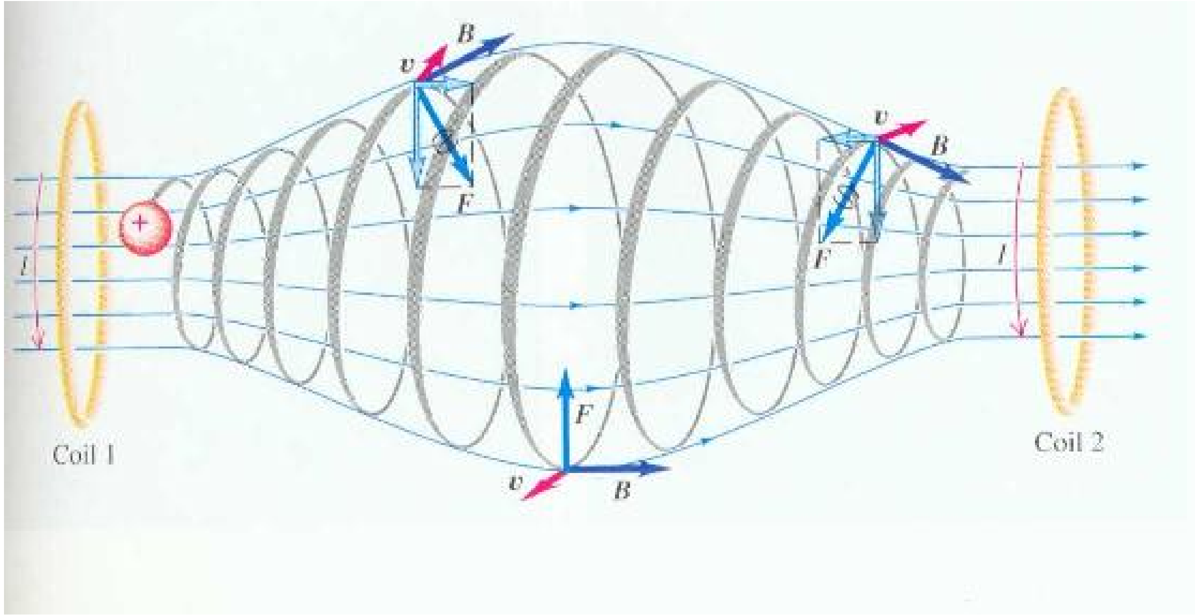
- 利用带电粒子在磁场中运动时回旋周期T与粒子速率、回旋半径无关的特点，可以制成回旋加速器。

  $T=2\pi m/(qB)$, $R=m\upsilon/(qB)$.

- 两个D形盒间隙内加有周期等于回旋周期的交变电场，使粒子在穿过间隙时总被电场加速，当粒子获得很高能量后从D形盒中引出。
- 注意：当速度接近光速时，质量随速度变化，且辐射很严重。一般用来加速重离子。

5) 磁约束等离子体

- 磁镜原理：磁镜装置由两个电流方向相同的线圈组成，产生两端强、中间弱的磁场位形。利用回旋磁矩守恒可推出，符合条件的带电粒子运动到两端区域时会被“反射”回来，于是被约束在中间区域。



- 由 $\mu=\frac{1}{2}m\upsilon_\perp^2/B$ 守恒，粒子在中点$\upsilon_\perp$最小，$\upsilon_{//}$最大；由中点向两边运动时，$B\uparrow$，$\upsilon_\perp\uparrow$，$\upsilon_{//}\downarrow$；一种可能：粒子到达镜点时，$\upsilon_{//}$降至零，不能继续向前运动。受磁压力的作用，粒子作反向螺旋运动。

  →粒子在磁场中来回运动而不能逃逸。

- 只有投掷角大于临界投掷角θ_m的粒子能被捕获，设中心点磁场为B_0，最强磁场为B_m，

$$\because \frac{1}{2}m\upsilon^2\sin^2\theta_m/B_0=\frac{1}{2}m\upsilon^2/B_m,$$

$$\therefore \sin^2\theta_m=B_0/B_m \triangleq 1/R_{mi},$$

磁镜比

- 磁镜装置可以约束等离子体，如地球大气层中的"范阿伦辐射带"。

6) 托卡马克 (环流器)

是“磁线圈圆环室”的俄文缩写。它类似螺绕环，是由封闭环形磁场构成的环形容器，能约束等离子体。将这个带有等离子体的圆环室作为一个大型变压器的次级线圈。当变压器通电后，等离子体内将有很大的电流，造成绕环轴的圆型磁场，$B \propto r$，于是，靠环壁的带电粒子受磁压效应向环轴集中，达到磁悬浮约束等离子体的目的。

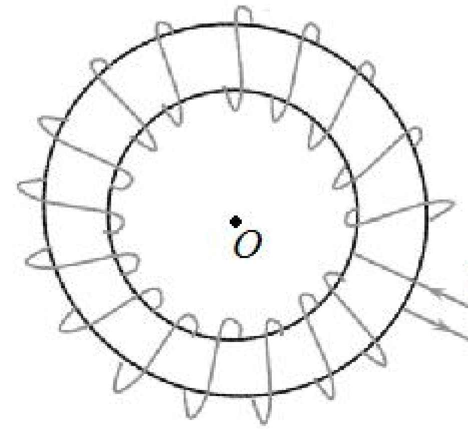


图1. 环流器

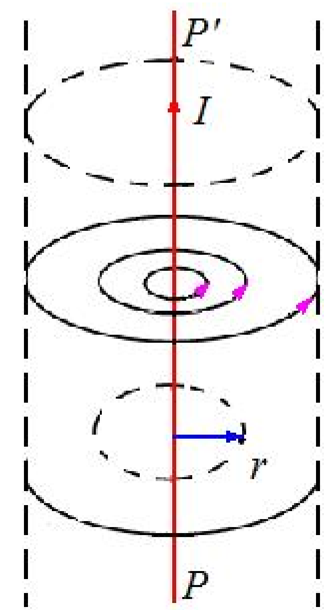


图2. 绕环轴磁场

当等离子体当环内中含大量氘 (D)、氚 (T) 离子，且当等离子体温度达到或高于10^8K时，才能发生聚变反应：

$$D + T \rightarrow {}^4He + n + 17.58MeV,$$

释放出大量核能，又称热核聚变反应。

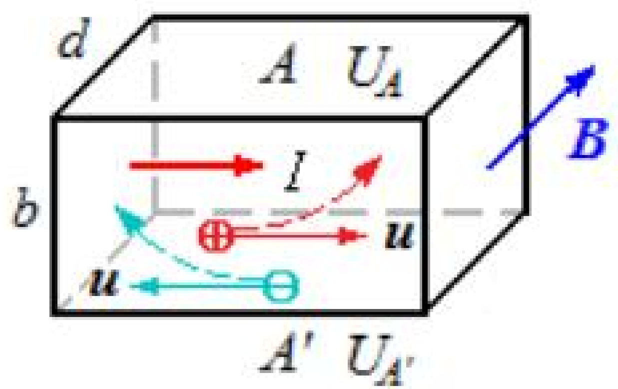
为使这反应能持续进行，还必须使

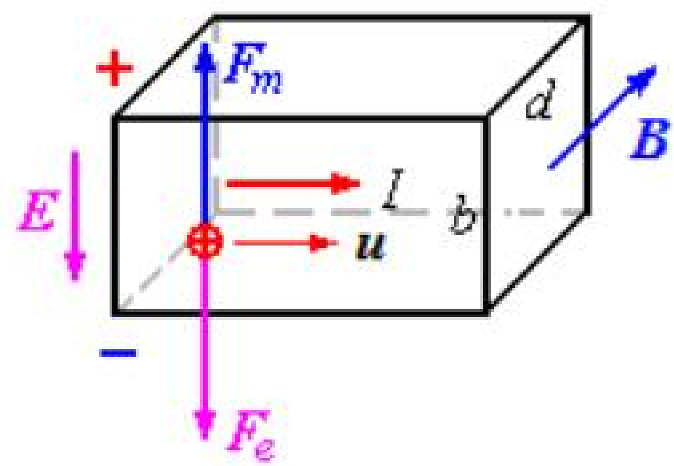
$$n\tau > 3\times10^{20} m^{-3} s$$，称为劳逊条件。

合肥“人造小太阳”装置—EAST

7) 霍尔效应

- 现象：如图，长方体载流导体+磁场，由于载流子受到外磁场的洛伦兹力发生偏转，使得在与电流 I 和外磁场B均垂直的上、下底面之间产生电势差。





- 原理：仅当磁力与电力平衡时，载流子不再偏转。

  此时$E=uB$，又$I=bdnqu$，

$$\therefore U=Eb=uB\frac{I}{dnqu}=\frac{IB}{nqd}=K\frac{IB}{d},$$

  霍尔系数$K=1/nq$.

- 应用：

➢ 给定I, B, d，测U，可得K。若q已知→载流子浓度n。

➢ 由上、下板U的正/负来判定载流子的正/负。

➢ 已知材料的K, d, I，测U，可得磁场。

➢ 用其原理设计磁流体发电机。

存在两种载流子时的霍耳系数?

第5章小结

磁场性质？安培/洛伦兹力 → 安培定律

磁场来源？毕—萨定律 → 电流体磁场

高斯定理 (无源)

安培环路定理 (有旋) → 一维对称电流体磁场

磁场中带电粒子运动

霍尔效应

作业、预习及思考题

- 作业：**5.10~5.18**
- 预习： **6.1~6.4**

- 思考题5.5 质量为m、均匀带电为q的圆环沿水平面以速度υ做无滑滚动，加上垂直于环面的水平均匀磁场B后，求环所受磁力。
- 思考题5.6 求存在两种载流子时的霍耳系数。(提示见下页)

思考题5.6 的思路

- **Hall**系数的符号决定于主导载流子。
- 存在两种载流子时如何表示**Hall**系数？$\boldsymbol{K}_1$和$\boldsymbol{K}_2$的某种组合，如 $1/(n_1q_1)+1/(n_2q_2)$ 或 $1/(n_1q_1+n_2q_2)$，甚至更复杂的形式？
- 由于$E=\upsilon_1B$和$E=\upsilon_2B$无法同时满足，模仿单一载流子的推导不可行，**Hall**系数不可能是上述形式。
- 关键：将单一载流子平衡时横向受力为零这一条件拓展为横向电流为零。前者只是后者的特例。