例 1 设 S 为一切复数列

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)$$

组成的集合,在 S 中定义距离为

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)$,$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots)$. 求证: S 为一个完备的距离空间.

证 $\rho(x,y)$满足距离的正定性、对称性两个条件是显然的. 为了验证 $\rho(x,y)$满足三角不等式,注意到

$$f(t)=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t}\quad(\text{单调增加})$$

$$\Longrightarrow f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|),$$

即

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}$$

$$\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

设 $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_k,\cdots)$, 则有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|(\xi_k-\zeta_k)+(\zeta_k-\eta_k)|}{1+|(\xi_k-\zeta_k)+(\zeta_k-\eta_k)|}\\&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|}\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y).\end{aligned}$$

这就验证了 $\rho(x,y)$满足三角不等式,从而 S 是距离空间.

下面证明 S 的完备性. 设$\{x^{(m)}\}$是 S 中的基本列,其中 $x^{(m)}=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_k^{(m)},\cdots)$,则

$$\rho(x^{(m+p)},x^{(m)})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(m+p)}-x_i^{(m)}|}{1+|x_i^{(m+p)}-x_i^{(m)}|}\to 0$$

$$(m\to\infty,\forall\, p\in\mathbb{N}).$$

由此可以推出: $\forall k\in\mathbb{N}$,

$$|x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)}|\to 0\quad(m\to\infty,\forall\, p\in\mathbb{N}).$$

事实上,对每一个固定的 $k\in\mathbb{N}$,对 $\forall\varepsilon$: $0<\varepsilon<1$,$\exists N_k$,使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(m+p)}-x_i^{(m)}|}{1+|x_i^{(m+p)}-x_i^{(m)}|}<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\quad(m>N_k,\ \forall\, p\in\mathbb{N}).$$

取级数中的第 k 项,它当然不会超过所有项的和,即得

$$\frac{|x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)}|}{1+|x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)}|}<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Longrightarrow|x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)}|<\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}\overset{\text{因为}\varepsilon<1}{<}\varepsilon.$$

由此可见，$\forall k\in\mathbb{N}$，

$$|x_k^{(m+p)}-x_k^{(m)}|\to 0\quad (m\to\infty,\ \forall p\in\mathbb{N}).$$

这意味着 $\forall k\in\mathbb{N}$，$x^{(m)}$ 的每一个坐标序列 $\{x_k^{(m)}\}$ 都是复数集合中的基本列. 由复数集合的完备性，每一个坐标序列 $\{x_k^{(m)}\}$ 都收敛，并存在 x_k，使得 $|x_k^{(m)}-x_k|\to 0(m\to\infty)$. 现在令 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots)$.

下证 $x^{(m)}\xrightarrow{\rho}x(m\to\infty)$. 事实上，就是要证

$$\rho(x^{(m)},x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(m)}-x_n|}{1+|x_n^{(m)}-x_n|}\to 0\quad (m\to\infty),$$

也就是要证，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $m>N$ 时，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(m)}-x_n|}{1+|x_n^{(m)}-x_n|}<\varepsilon.$$

为了其中的无穷多项部分 $<\frac{\varepsilon}{2}$，只要 $n_0>1-\log_2\varepsilon$. 事实上，

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(m)}-x_n|}{1+|x_n^{(m)}-x_n|}<\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n_0}}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

而对每一个 $n\leqslant n_0$，$\exists N_n$，当 $m>N_n$ 时，使得

$$|x_n^{(m)}-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}\quad (n=1,2,\cdots,n_0).$$

取 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_{n_0}\}$，当 $m>N$ 时，便有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(m)}-x_n|}{1+|x_n^{(m)}-x_n|}&<\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}|x_n^{(m)}-x_n|\\&<\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\&=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(m)}-x_n|}{1+|x_n^{(m)}-x_n|}<\varepsilon\quad (\forall m>N)$$

成立. 因此 $\{x^{(m)}\}$ 按距离 ρ 收敛于 x，故 (S,ρ) 是完备的度量空间.

例 2 在一个度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 上，求证：基本列是收敛列，当且仅当其中存在一串收敛子列.

证 基本列是收敛列 $\Longrightarrow$ 存在一串收敛子列是显然的，因为整个基本列就是一串收敛子列.

存在一串收敛子列 $\Longrightarrow$ 基本列是收敛列. 设 $\{x_n\}$ 是基本列，且存在一串收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，要证 $\{x_n\}$ 是收敛列.

首先肯定 $\{x_n\}$ 的收敛点是什么？$\{x_n\}$ 的收敛点当然是 $\{x_{n_k}\}$ 的收敛点. 既然 $\{x_{n_k}\}$ 收敛，设 $x_{n_k}\to x$.

下面证明 $x_n\to x$. 因为 $\{x_n\}$ 是基本列，所以对一切 $\varepsilon>0$，存在 N，使得

$$\rho(x_n,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}\quad (\forall n,m>N).$$

因为 $n_k\to\infty$，所以 $\exists K$，使得 $n_k>N(\forall k>K)$，故有

$$\rho(x_n,x_{n_k})<\frac{\varepsilon}{2}\quad (\forall n>N,\forall k>K).$$

对上式令 $k\to\infty$ 取极限，即得

$$\rho(x_n,x)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\quad (\forall n>N),$$

即证得 $x_n\to x$.

例 1 设 T 是压缩映射,求证 T^n 也是压缩映射,并说明逆命题不一定成立.

证 (1) 因为 T 是压缩映射,所以 $\exists\,\alpha\in(0,1)$,使得 $\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y)$,从而

$$\rho(T^2x,T^2y)\leqslant\alpha\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha^2\rho(x,y).$$

假定 $\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha^n\rho(x,y)$ 成立,则有

$$\rho(T^{n+1}x,T^{n+1}y)\leqslant\alpha\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha\cdot\alpha^n\rho(x,y)=\alpha^{n+1}\rho(x,y).$$

于是根据数学归纳法原理,$\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha^n\rho(x,y)$ 对 $\forall\,n\in\mathbb{N}$ 成立.

又 $0<\alpha<1\Longrightarrow 0<\alpha^n\leqslant\alpha<1$,故有

$$\rho(T^nx,T^ny)\leqslant\alpha\rho(x,y),$$

即 T^n 是压缩映射.

(2) 逆命题不一定成立. 例如,设

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}:[0,1]\to[0,1],$$

易知
$$f^2(x)=\frac{x}{2}:[0,1]\to[0,1]$$

是压缩映射. 但是

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}:[0,1]\to[0,1]$$

不是压缩映射. 事实上,如果

$$f(x):[0,1]\to[0,1]$$

是压缩映射,则 $\exists\,\alpha$: $0<\alpha<1$,使得

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant\alpha|x_2-x_1|$$
$$\Longrightarrow\frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}\leqslant\alpha\quad(\forall\,x_1,x_2\in[0,1]),$$

即差商 $\dfrac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}$ 是有界的. 但是如果取

$$x_1=\frac{1}{n},\quad x_2=2x_1=\frac{2}{n}\quad(n\geqslant 2),$$

则有

$$\frac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}=\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\to\infty\quad(n\to\infty),$$

即知差商 $\dfrac{|f(x_2)-f(x_1)|}{|x_2-x_1|}$ 是无界的,矛盾.