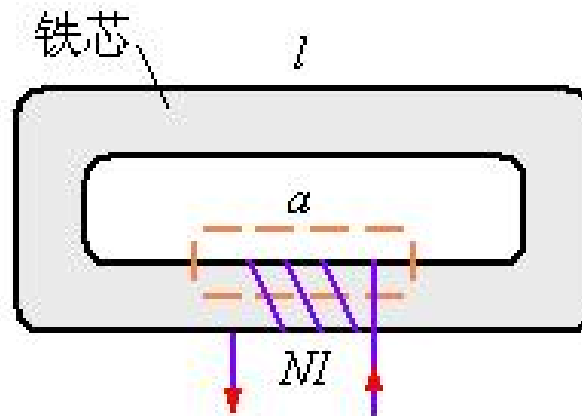


思考题讨论

- 思考题6.5 闭合铁芯周长 l ，线圈安匝数 NI 。
对长边为 a 的狭长矩形环路应用安培环路定理， $Ha=NI$ ， $H=NI/a$ ；对整个回路应用安培环路定理： $Hl=NI$ ， $H=NI/l$ 。



Which is \checkmark ?

第二十三讲 2022-05-19

第7章 电磁感应

§ 6.8 磁荷法

§ 7.1 电磁感应定律

§ 7.2 动生电动势与感生电动势

§ 7.3 互感与自感

§ 7.4 暂态过程

2. 磁荷法和电流法的等效性

- 由 $p_m \leftrightarrow \mu_0 m$ 和 $J = \sum p_{m\text{分子}} / \Delta V$ 、 $M = \sum m_{\text{分子}} / \Delta V$ 得

$$J = \mu_0 M,$$

- 将上式代入 $J = \chi_m \mu_0 H$ 得

$$M = \chi_m H,$$

可见此处与电流法中的 χ_m 相同。

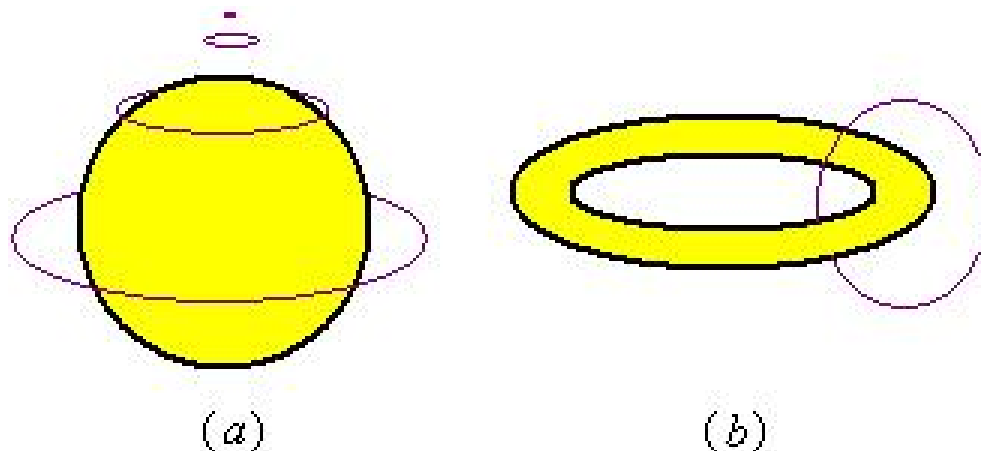
- 这里定义的 H 和 B 与电流观点中的 H 和 B 之间的区别仅仅在于 H 满足不同的环路定理。

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} 0, & \text{磁荷法} \\ \sum I_0, & \text{电流法} \end{cases}$$

- 这一差别决定了磁荷法的适用范围
 - 对有传导电流的空间，因为磁荷法无法反映磁场的有旋性而失效，只能用电流法来求解。
 - 对不存在传导电流的单连通空间，两种方法的环路定理相同，由唯一性定理，两种方法等效。
- 磁荷法求解静磁场的要点
 - 严格限于没有传导电流的单连通空间 (见下页)。
 - 对于此空间外的传导电流，应设法找到等效的磁荷分布。稳恒电流的等效磁荷分布总可以找到：稳恒电流 \Leftrightarrow 元电流环的叠加；元电流环 \Leftrightarrow 磁偶极子。

* 附件：单连通空间

拓扑学中的一个基本概念，在单连通空间中，任何一个闭合回路都可以无限缩小成一点。



图(a) 中**闭合球面之外的空间**为单连通空间

图(b) 中**闭合环面之外的空间**则不是

3. 磁荷法的应用

- 磁荷法在静电场问题和静磁场问题之间搭起一座桥梁，使两类问题可以互相借用解法。两类问题的对应关系如下表：

静磁量	H	B	J	q_m	σ_m	p_m	μ_0	μ	χ_m
静电量	E	D	P	Q	σ	p	ε_0	ε	χ_e

- 在没有传导电流的单连通空间，电流法和磁荷法均适用。哪种方法简便，就采用哪种方法。

[例6.13] 一马蹄形永久磁铁，
两磁极总面积为 $2S$ ，磁化强度
为 M ，求它对衔铁的吸力。

[解] 本题用磁荷法很简便，磁
极上的极化面磁荷密度

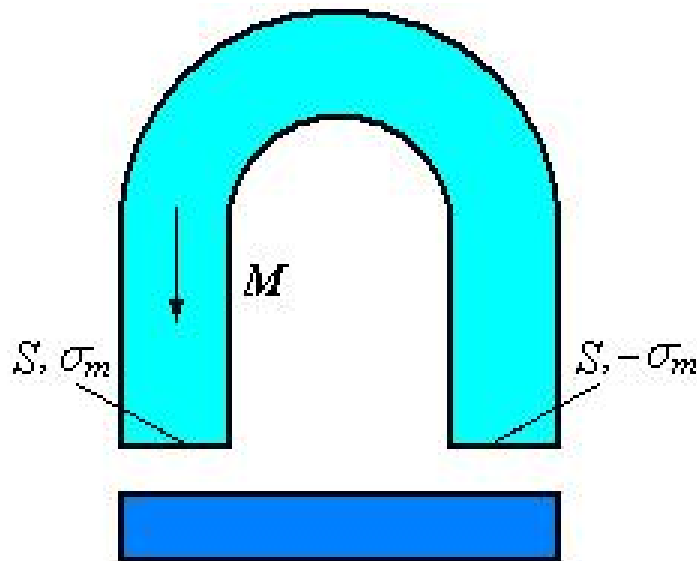
$$\sigma_m = J = \mu_0 M.$$

衔铁离磁极很近的部分会感应出反号面磁荷，其吸力
可由电容器两极板间的吸力 (例3.6)

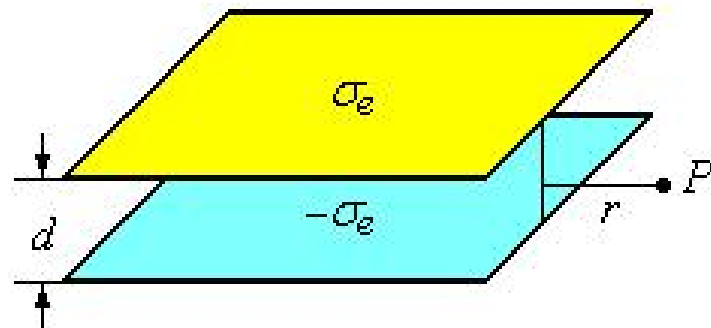
$$F_e = -\sigma_e^2 S / 2\varepsilon_0$$

加倍 (面积是 $2S$)，并通过电-磁量的对应关系求得

$$F_m = -\sigma_m^2 S / \mu_0 = -\mu_0 M^2 S.$$



[例6.14] 求平行板电容器边缘附近的电场分布 (体现边缘效应)。设极板间距为 d ，面电荷密度为 $\pm\sigma_e$ ，场点离电容器边缘的距离 $r \gg d$ ，但 \ll 极板尺寸。



[解] 对应: $\sigma_e \leftrightarrow \sigma_m$

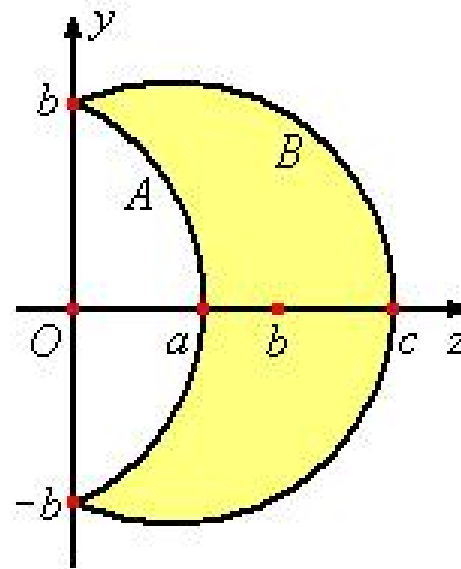
磁偶极子 $p_m = \sigma_m d \Delta S \leftrightarrow$ 磁矩 $m = p_m / \mu_0 = I \Delta S \rightarrow I = \sigma_m d / \mu_0$

所有电流元 \leftrightarrow 四条沿电容器边缘的直线电流 I ，只需考虑离场点最近的一条 (另三条离场点无穷远)

$$H = \frac{I}{2\pi r} = \frac{\sigma_m d}{2\pi\mu_0 r},$$

回到原问题，有 $E = \frac{\sigma_e d}{2\pi\epsilon_0 r}.$

[例6.15] 两无穷长圆弧片状带电导体A和B绝缘，两侧棱边在y轴上 $\pm b$ 处十分靠近，顶部则与z轴分别交于a和c。已知 $a=0.4\text{cm}$ ， $b=0.5\text{cm}$ ， $c=0.8\text{cm}$ ，b处电场强度 $E_b=8000\text{V/cm}$ ，求 U_{AB} 。



[解] 先解对应的磁场问题。通过分析位于y轴上 $\pm b$ 处两无穷长反向直线电流的磁场，发现其等磁势面正好是通过 $\pm b$ 的圆弧柱面(?)，所以z轴上的磁场

$$H_z = \frac{bI}{\pi(b^2 + z^2)} = \frac{2H_b}{1 + (z/b)^2}, \xrightarrow[\text{原问题}]{\text{回到}} E_z = \frac{2E_b}{1 + (z/b)^2}.$$

$$\therefore U_{AB} = \int_a^c E_z dz = 2bE_b \tan^{-1} \left[\frac{b(c-a)}{b^2 + ac} \right] = 2.7 \times 10^3 \text{ V}.$$

[例6.16]用磁荷法求小载流线圈在非均匀外磁场中所受的力。

[解]电偶极子在外电场中所受力为

$$F=(p\cdot\nabla)E,$$

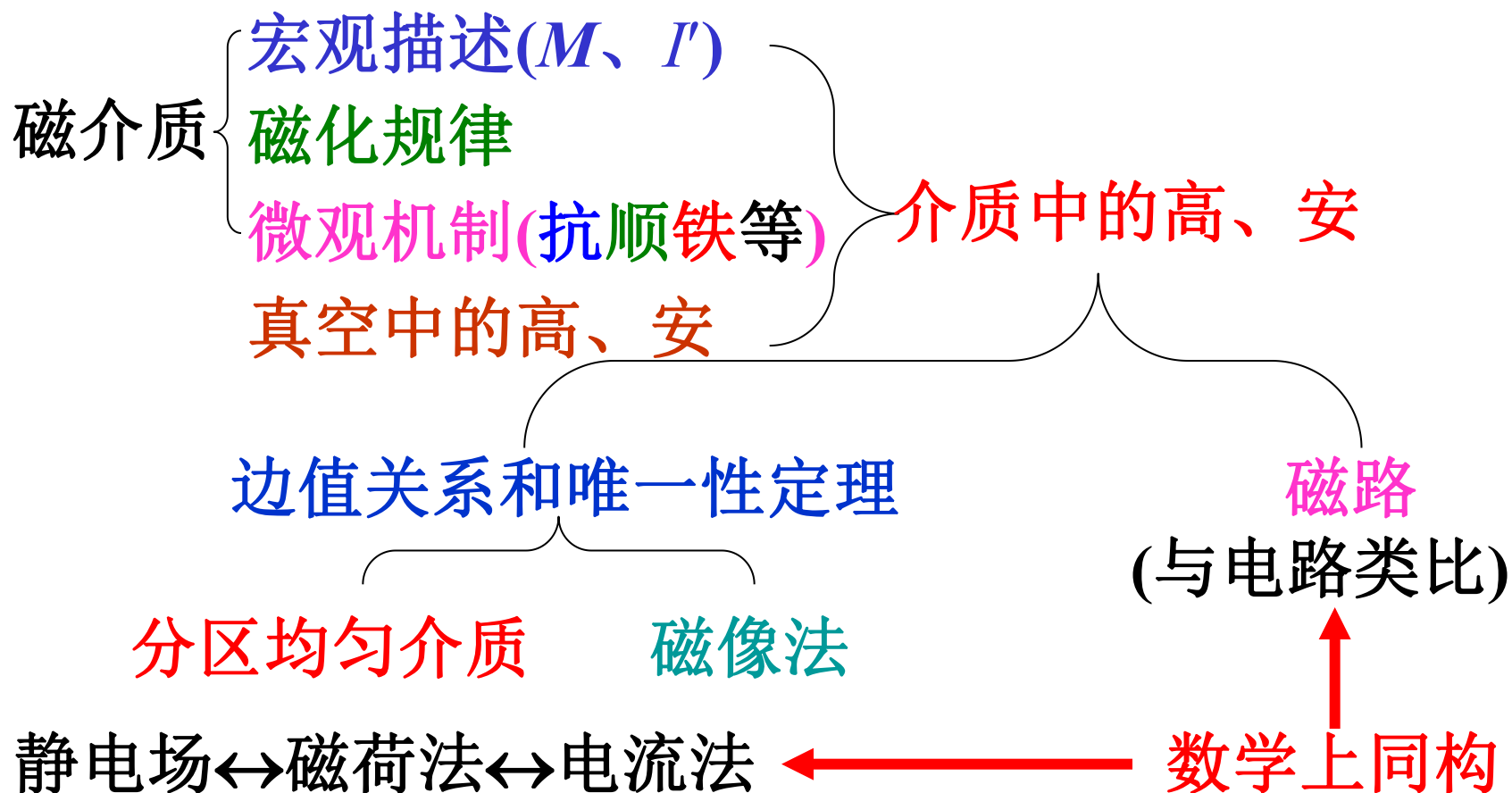
所以磁偶极子所受力为

$$F=(p_m\cdot\nabla)H=(m\cdot\nabla)B.$$

此即小载流线圈在非均匀外磁场中所受的力。

第6章小结

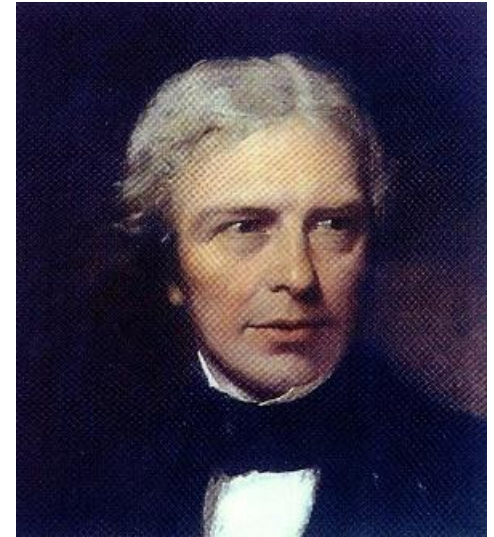
磁场对电流的力和力矩



§ 7.1 电磁感应定律

- 继1820年丹麦物理学家奥斯特发现了电流的磁效应后，人们便关心它的逆效应。1831年法拉第终于发现了电磁感应现象。
- 1845年才由诺依曼和韦伯将其实验成果表达为数学形式，建立了电磁感应定律。
- 这是电磁学发展史上最辉煌的成就之一。
- **应用：**对工业革命、进入电气化时代做出巨大贡献
- **理论：**为麦克斯韦建立普遍的电磁场理论奠定基础

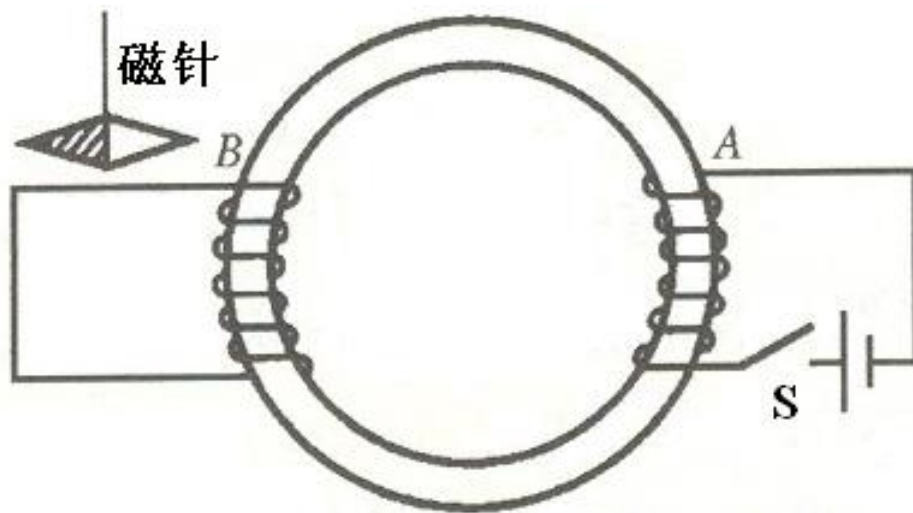
法拉第



- 执着的追求：11年的实验
- 深邃的思想：力统一，场概念。
- 伟大的贡献：电磁感应、电解定律、磁光效应、电动机、发电机、法拉第圆筒
- 淡薄名利：谢绝了皇家学会会长、皇家学院的院长职务、爵士称号。“我是一个普通人。如果我接受皇家学会希望加在我身上的荣誉，那么我就不能保证自己的诚实和正直，连一年也保证不了。”“法拉第出身平民，不想变成贵族”。

1. 电磁感应的发现及其系列实验

- **偶然**：1831年，当法拉第把**电键S闭合的瞬间**，他观察到了磁针的偏转；**而S断开瞬间**磁针会反向偏转。当S稳定后，磁针回零。

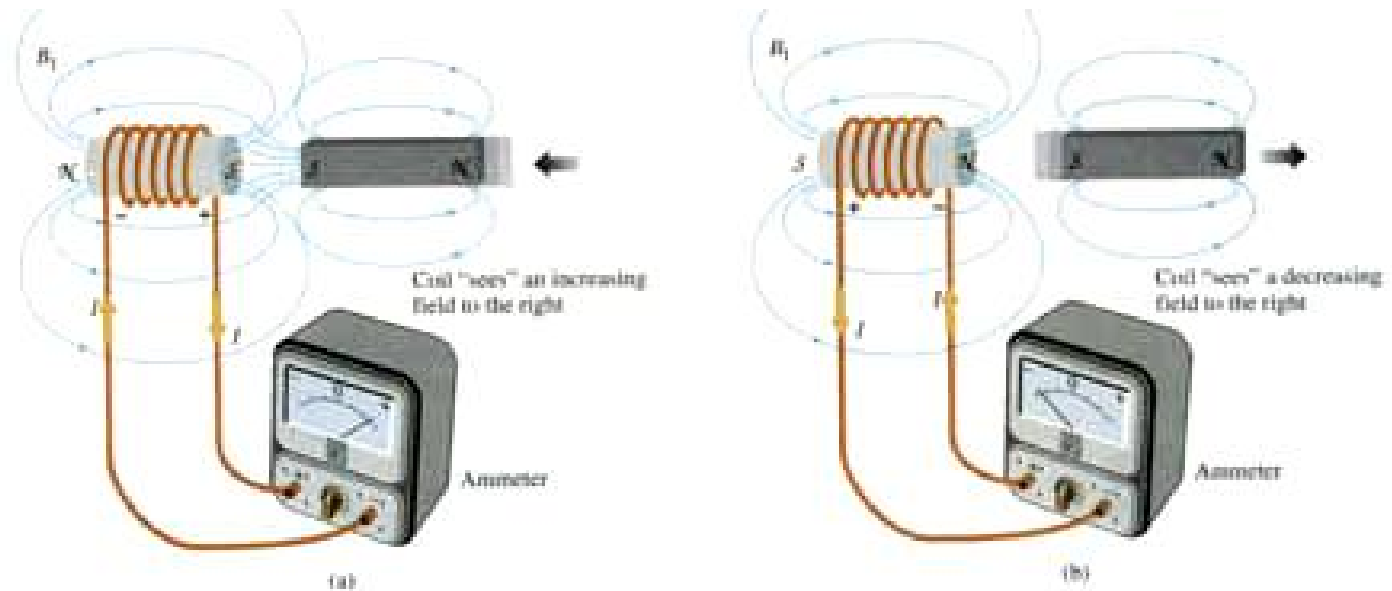


- **结论**：只有**变化的电流**才会在另一线圈中感应出电流，从而产生磁场，使磁针偏转。**稳定的电流不会有此效应。**

- 深入的思考，法拉第的一系列实验

- 1) 是变化的电流还是变化的磁场产生感应电流？

法拉第用运动磁铁代替瞬变通电线圈，又用运动的稳流线圈代替运动磁铁，都得到相同的结果。



结论：变化的磁场产生感应电流。

2) 感应电流还是感应电动势？

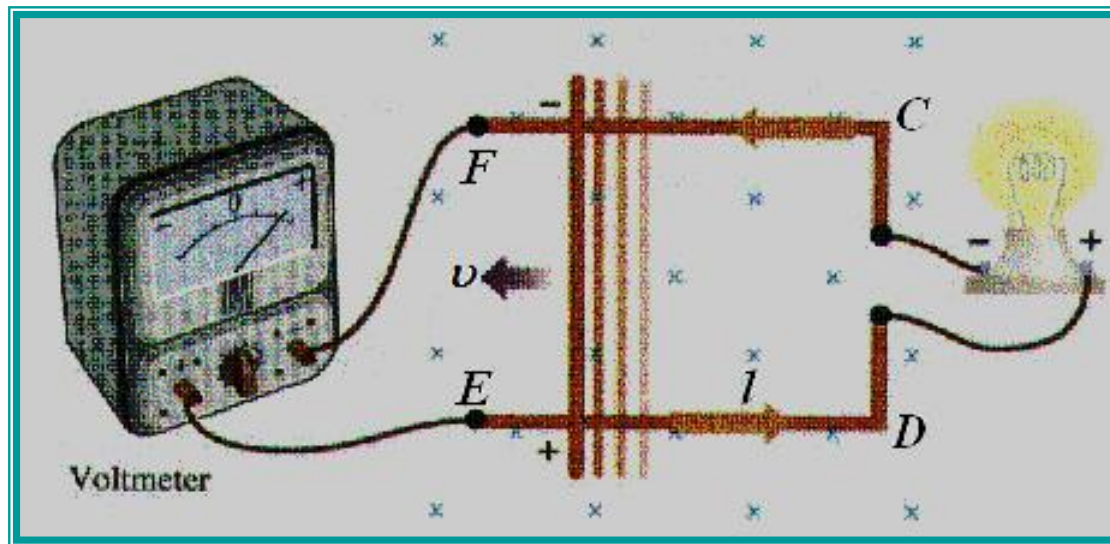
- 在相同实验条件下，几何形状、大小相同而电阻不同的受感应线圈， $I \propto 1/R$ 。
- 推论：这些线圈的感应电动势应该相同，变化的磁场在导体中产生的是感应电动势。

3) 变化的 H 还是变化的 B ？

其他条件不变，比较螺绕环无铁芯和有铁芯时电磁感应现象，会发现后者远强于前者。两种情况下的 H 相同，后者的 B 远大于前者。可见，变化的 B 而非 H 更接近电磁感应的本质。

4) 变化的磁场还是变化的磁通？

- 如图，接有电压表的导体框 $CDEF$ 放于垂直的均匀



- 磁场 B 中，当 EF 以速度 v 向左滑动时， v 越大则电压表指针偏转越大； EF 反向运动时，指针反向偏转。
- 实验中 B 没有变化，但导体框的面积随时间变化，于是通过导体框的磁通量随时间变化。变化的磁通产生感应电动势，单位时间内磁通量变化越大，感应电动势越大。

实验小结

- 电磁感应的实质：变化的磁通产生感应电动势。另：一段孤立导线的两端也会产生感应电动势。
- 感应电动势大小： \propto 磁通量变化的快慢；方向：感应电流产生的附加磁通，总是阻止原磁通的变化。

2. 法拉第电磁感应定律

1) 数学表达

法拉第电磁感应定律被诺依曼、韦伯等人写成数学形式，在SI单位制下为

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

2) 几点说明

- 产生感应电动势的原因不是磁通量，而是它的变化。
- 如果被感应线圈有 N 匝，各匝感应电动势应叠加。

若第 i 圈的磁通量为 ϕ_i ，则有全磁通 $\Psi = \sum_{i=1}^N \phi_i$ ，

各匝磁通量相同时 $\Psi=N\phi$ ，整个线圈的感应电动势

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt} = -N\frac{d\phi}{dt}.$$

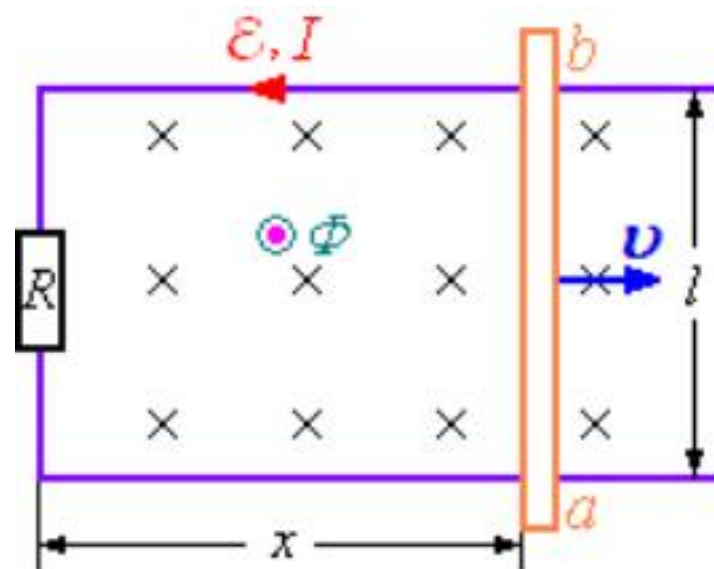
- 通过平面 S 的磁通量为 $\Phi=BS \cos \theta$ ，所以

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -S \cos \theta \frac{dB}{dt} - B \cos \theta \frac{dS}{dt} + BS \sin \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

→ B 、 S 和 θ 中任一个随时间变化，都会有电磁感应。

- 感应电动势“方向”：**感应电流**在回路中的磁通量总**阻碍**引起感应电流的**磁通量的变化**。→**楞次定律**：感应电流的**效果**总是**反抗**引起感应电流的**原因**。(?)
- 两种方法确立感应电动势正负
 - 按 $\mathcal{E}=|d\Phi/dt|$ 计算 \mathcal{E} 大小，再由楞次定律判断其方向。
优点：对简单体系比较简便，物理意义清晰，而且可以“无视”中间的具体过程。
 - 先选定回路的绕行方向，按右手定则标定 \mathcal{E} 和 Φ 的正向，由 $\mathcal{E}=-d\Phi/dt$ 或 $\mathcal{E}=-d\Psi/dt$ 计算 \mathcal{E} 的代数值。若所得 $\mathcal{E}>0$ ，表明电动势“方向”与回路绕行方向一致。
优点：对复杂体系可以**程式化**。

[例7.1] 长度 $l=0.5\text{m}$ 的 ab 段导线可自由滑动， 0.5T 的均匀磁场垂直指向纸内。回路中串接 $R=0.2\Omega$ 的电阻，其余部分电阻忽略不计。若 ab 段导线以速度 $v=5\text{m/s}$ 向右匀速滑动，求回路的感应电流。

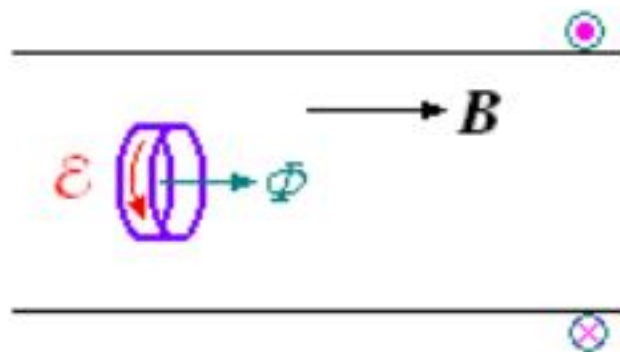


[解] 设绕行方向为逆时针，按右手定则规定 \mathcal{E} 和 Φ 的正向。注意 Φ 的正向与 B 相反，所以 $\Phi=-Blx$ 。故

$$\mathcal{E} = -d\Phi/dt = Bl dx/dt = Blv,$$

$$I = \mathcal{E} / R = Blv / R = 4 \times 0.5 \times 0.5 / 0.2 = 5(\text{A}).$$

[例7.2] 一无穷长螺线管单位长度匝数为 n ，通以交流电流 $I=I_0\cos\omega t$ 。在螺线管内置一圆线圈，匝数 N ，半径 r ，线圈平面与螺线管轴线垂直，求线圈的感应电动势。



[解] 如图，按右手定则规定 \mathcal{E} 和 Φ 的正向。注意 Φ 的正向与 B 一致，所以

$$\Phi = B\pi r^2 = n\mu_0 I_0 \cos\omega t \pi r^2,$$

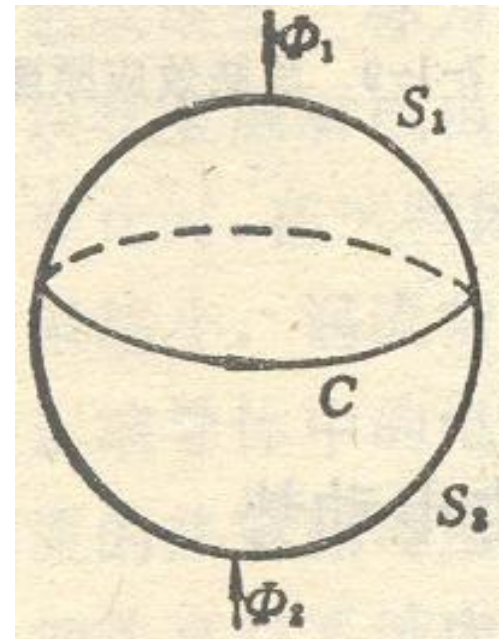
$$\text{故 } \mathcal{E} = -N \frac{d\Phi}{dt} = n\mu_0 \pi r^2 \omega N I_0 \sin\omega t.$$

3. 电磁感应定律与高斯定理关系

- 法·律: $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$

其中 \mathbf{B} 可随时间变化。

- Φ 的合法性: 以回路 C 为周边的曲面不唯一, 如 S_1 或 S_2 , 磁通量以何为依据? 最简单有效的假定是



$$\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S},$$

$$\rightarrow \iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

可见法·律之成立, 预示含时磁场也遵从高斯定律!

§ 7.2 动生电动势与感生电动势

- 法拉第电磁感应定律表明，只要通过回路的磁通量随时间变化，就会在回路中产生感应电动势。而引起磁通量变化的原因有两种：
 - 1) 磁场不变，导体回路或其一部分在磁场中运动，从而使回路中的磁通量发生变化，产生动生电动势。
 - 2) 回路不动，磁感强度随时间变化，从而使通过回路的磁通量发生变化，产生感生电动势。

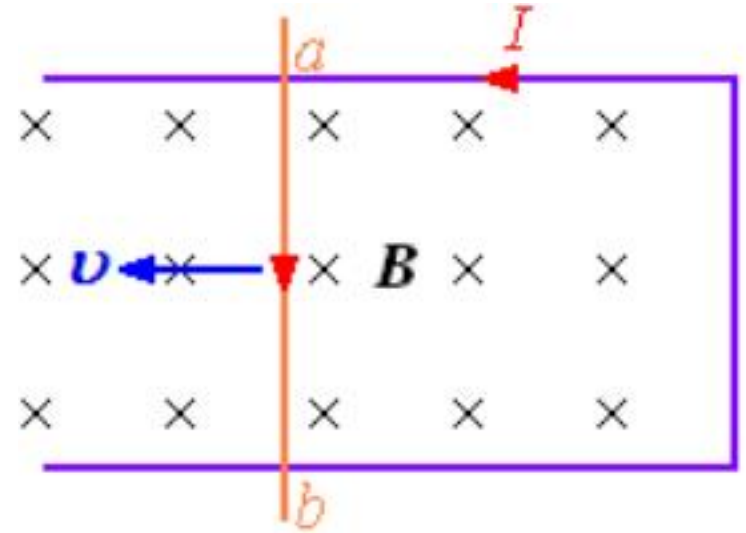
1. 动生电动势

动生电动势的**本质**？

- **特例**：U形导体框置于匀强磁场 B 中，长 l 的导体棒 ab 可

在框上无摩擦滑动，**外力 F** 使棒获得**向左**的速度 v 。

- **定性**：棒内电子也获同样速度，因而受到竖直向上的洛伦兹力而向上运动，引起**负/正**电荷在棒**上/下**端积累，在棒内建立一个自下而上的静电场。当洛伦兹力等于电场力时**达到平衡**， ab 间有稳定的电压，相当于一个电源，其电动势即感应电动势。



作业、预习及思考题

- 作业：6.20~6.22
- 预习：7.2 余下部分、7.3互感与自感

下次课讨论

- 思考题6.6 磁荷法可以求电容器内部的 E 吗？
- 思考题6.7 直接积分计算例6.14的电场。
- 思考题7.1 楞次定律：为何感应电流的效果总是反抗，而不是增强引起感应电流的原因？