1. A less trivial question: (using Ex.2.3.3)

Given a sequence of distribution function $\{F_j\}$. how to construct a sequence of independent R.V. $\{X_j\}$ (on the same probability space) s.t. $X_j \sim F_j$

proof:

由 Ex 2.3.3. 只要证在 $[0,1]$上 ∃一列均匀分布的 R.V. $X_j \sim U(0,1)$ 再 $F_j^{-1}(X_j)$ 即可.

构造 $b_n: [0,1] \longmapsto \{0,1\}$ $(n \geq 1)$

$$b_n(x) = \begin{cases} 0, & \frac{i}{2^{n-1}} \leq x < \frac{2i+1}{2^n},\ \exists i \\ 1, & \frac{2i+1}{2^n} < x \leq \frac{i+1}{2^{n-1}},\ \exists i \end{cases}$$

(Rademacher function)

$[0,1]$上测度 P 取 Lebesgue 测度.

则 可证明 $\{b_n\}$ 为独立同分布的 R.V. $P(b_j=1)=P(b_j=0)=\frac{1}{2}$

则 $X = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} b_j \sim U(0,1)$

将 $\mathbb{N}$ 划分为可数个可数集 S_n, 利用 b_j $(j \in S_n)$ 构造 $X_n \sim U(0,1)$,

then, X_n i.i.d. $\sim U(0,1)$.

Remark: 可用高等概率论中的乘积测度,扩张定理证明.
涉及到无穷个测度的乘积.

Ex 1.7.3: **3.** A symmetric random walk takes place on the integers 0, 1, 2, ..., N with absorbing barriers at 0 and N, starting at k. Show that the probability that the walk is never absorbed is zero.

proof: (法一) 设 $P_k = \mathbb{P}$(从 k 出发, 永远不会被吸收)

则 $\begin{cases} P_k = \frac{1}{2} P_{k-1} + \frac{1}{2} P_{k+1} \\ P_0 = P_N = 0 \end{cases}$ ⇐ $P_k = P_{k+1} \cdot P$(第一步向右) $+ P_{k-1} \cdot P$(第一步向左)

$\Rightarrow P_k = 0$.

(法二)： lemma：一个均匀硬币重复抛，则 $P(\exists n\geq 1$：第 n 次为 $H)=1$。
更一般的，$\forall$ H、T 组成的有限序列，在无穷次抛硬币中出现的概率为 1。

proof of lemma：1° $P(\forall n\geq 1$：第 n 次不为 $H) = \lim_{n\to\infty} P($前 n 次无 $H)$
$= \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$

2° 给定一个有限序列 S，记长度为 k。（例 $S=\{H,T,T\}$，$k=3$）

$P(S$ 出现$) = \lim_{n\to\infty} P(S$ 出现在前 nk 次中$)$

$\geq \lim_{n\to\infty} P(\exists 1\leq m\leq n$ s.t. $(m-1)k+1 \sim mk$ 之间为 $S)$

$= 1 - \lim_{n\to\infty} P(\forall 1\leq m\leq n$, s.t. $(m-1)k+1\sim mk$ 之间不为 $S)$

$= 1 - \lim_{n\to\infty}(1-2^{-k})^n = 1$.

回到原题：从 $0\sim N$ 之间 $\forall$ 位置出发，当路径出现连续向右走 N 步，一定会被吸收。（想象撤掉吸收壁）

由引理：$P($被吸收$) \geq P(\exists$ 连续向右 N 步$) = 1$ $\square$

Ex：甲抛 $n+1$ 个硬币，乙抛 n 个硬币，$H_甲$ 表示甲抛出正面数。求 $\mathbb{P}(H_甲 > H_乙)$

sol：先让甲、乙都抛 n 次，记此时甲正面数 $H_甲'$。

则 $p := \mathbb{P}(H_甲' > H_乙) = \mathbb{P}(H_甲' < H_乙)$ （由对称性）

则 $\mathbb{P}(H_甲' = H_乙) = 1-2p$

$\Rightarrow \mathbb{P}(H_甲 > H_乙) = \mathbb{P}(H_甲' > H_乙) + \mathbb{P}(H_甲' = H_乙$，甲第 $n+1$ 次正面$)$
$= p + \frac{1}{2}(1-2p) = \frac{1}{2}$

§ part 2 拓展内容：浅谈概率论与实分析的联系

§.可测空间与可测函数.

$\boxed{\text{Definition 1}}$ (abstract measure space)

X 某个集合 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ($\mathcal{P}(X)$ 为 X 幂集)

① (σ-algebra) $\mathcal{F}$ 是 σ-algebra . iff $\begin{cases} \phi \in \mathcal{F} \\ \mathcal{F} \text{ 对可数并, 取余集封闭} \end{cases}$

② $(X, \mathcal{F})$ 称为 measurable space (可测空间)

③ μ 称为 $(X, \mathcal{F})$ 上的一个测度 iff

$$\begin{cases} \mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, \infty] \\ \mu(\phi) = 0 \\ \mu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum \mu(E_j), \quad E_j \text{ disjoint} \end{cases}$$

此时称 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 为测度空间.

Rmk: 测度 μ 分类:

finite(有限测度) $\Longleftrightarrow$ $\mu(X) < \infty$

σ-finite $\Longleftrightarrow$ $\exists\ E_j$, s.t. $X = \bigcup_j E_j$, $\mu(E_j) < \infty$, $\forall j$.

Example: 实分析中 Lebesgue 测度: $(\mathbb{R}^n, \underbrace{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}_{\text{可测集}}, m)$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m)$ $\succeq$ σ-finite.

概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\leftarrow$ finite

$\boxed{\text{Def 2}}$ (可测函数)

$f : (X, \mathcal{M}, \mu) \longrightarrow (Y, \mathcal{N}, \nu)$

f 称为 $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ 可测, iff $\forall E \in \mathcal{N}$, $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$

特别地, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ 取 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ 时.

f 称为可测的

$\boxed{\text{Def:}}$ 定义 R.V. X 诱导的 σ-alg，记为 $\sigma(X)$

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

($\sigma(X)$ 的概念在独立性的定义中会充分用到)

Dynkin π-λ theorem

$\mathcal{L}$ 为集族 $\subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

def: π system: closed under finite intersection

λ system: $\mathcal{L}$ is a λ-system $\Leftrightarrow$
$$\begin{cases} 1^\circ\ \Omega \in \mathcal{L} \\ 2^\circ\ A \in \mathcal{L} \Rightarrow A^c \in \mathcal{L} \\ 3^\circ\ n \neq m,\ A_n \cap A_m = \phi \\ \quad A_n \in \mathcal{L} \Rightarrow \cup_n A_n \in \mathcal{L} \end{cases}$$

Thm: $\mathcal{P}$ 为 π-system，$\mathcal{L}$ 为 λ-system，且 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L} \Rightarrow \sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$

proof: (Durrett A.1.4)

application: (1) 如果 P_1, P_2 是 $(\Omega, \mathcal{B})$ 上两个测度，$\mathcal{P}$ 是个 π-system，且 $P_1(A) = P_2(A)$，$\forall A \in \mathcal{P}$。

那么有 $P_1(A) = P_2(A)$，$\forall A \in \sigma(\mathcal{P})$

proof: $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{B} \mid P_1(A) = P_2(A)\}$.

claim: $\mathcal{L}$ is a λ-system.

since: 1° $P_1(\Omega) = P_2(\Omega) = 1$，$\Omega \in \mathcal{L}$

2° $\forall A \in \mathcal{L}$，$P_1(A) = P_2(A)$

$\because P_1(\Omega) = P_1(A \cup A^c) = P_1(A) + P_1(A^c)$

$\therefore P_1(A^c) = 1 - P_1(A) = 1 - P_2(A) = P_2(A^c)$

得到 $A^c \in \mathcal{L}$

3° disjoint 集合列 A_i，$A_i \in \mathcal{L}$

$$P_1(\cup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P_1(A_i) = \sum_{i=1}^\infty P_2(A_i) = P_2(\cup_{i=1}^\infty A_i)$$

即 $\cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{L}$

$\therefore \mathcal{L}$ 为 λ-system.

$\mathcal{P}$ 为 π-system.

由 Dynkin 定理, 得到 $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$

(2) 令 $\Omega = \mathbb{R}$. 若 P_1, P_2 为 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上的概率测度,
且 对应分布函数相等, 即: $F_1(x) = P_1((-\infty, x]) = F_2(x)$
则 在 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上有这两个概率测度相同, $P_1 = P_2$.

proof: 令 $\mathcal{P} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$. $\mathcal{P}$ 为 π-system.

由 Borel 集定义, $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

由 (1). $P_1 = P_2$ 在 $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上成立.

Remark: 此引理说明, 定义在实数上的概率测度可以由分布函数唯一确定.

"Probability theory is a measure theory with a soul"

— M. Kac