Date.　　/

每日一练(一) 答案

本次判断题答案见期中的判断题复习讲义.

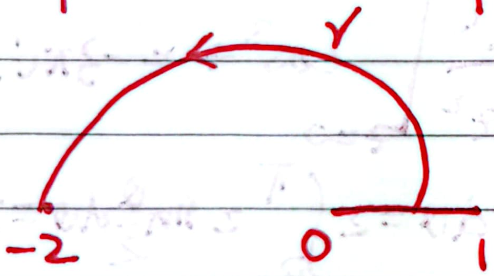
1. 任取 $D=\mathbb{C}\setminus[0,1]$ 中的简单闭曲线 γ, 由于

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg}F(z)=\frac{2}{3}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}z+\frac{1}{3}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(1-z)$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 2\pi+\frac{1}{3}\cdot 2\pi=2\pi.$$

(因为 γ 的内部包含 $0,1$). 因此

$$\Delta_\gamma F(z)=\Delta_\gamma\left(e^{i\operatorname{Arg}F(z)}\right)=e^{i\Delta\operatorname{Arg}F(z)}=0.$$

所以 $F(z)$ 在 D 中可以取出全纯单值分支.



如图所示, 任取 $(0,1)$ 上岸到 -2 的简单曲线 γ. 则

$$\Delta_\gamma \operatorname{Arg}z=\pi,\quad \Delta_\gamma \operatorname{Arg}(1-z)=0$$

从而 $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}F(z)=\frac{2\pi}{3}$. 因此

$$f(-2)=\sqrt[3]{12}\cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

由于 $f(z)^3=z^2(1-z)$. 故 $3f(z)^2f'(z)=2z-3z^2$

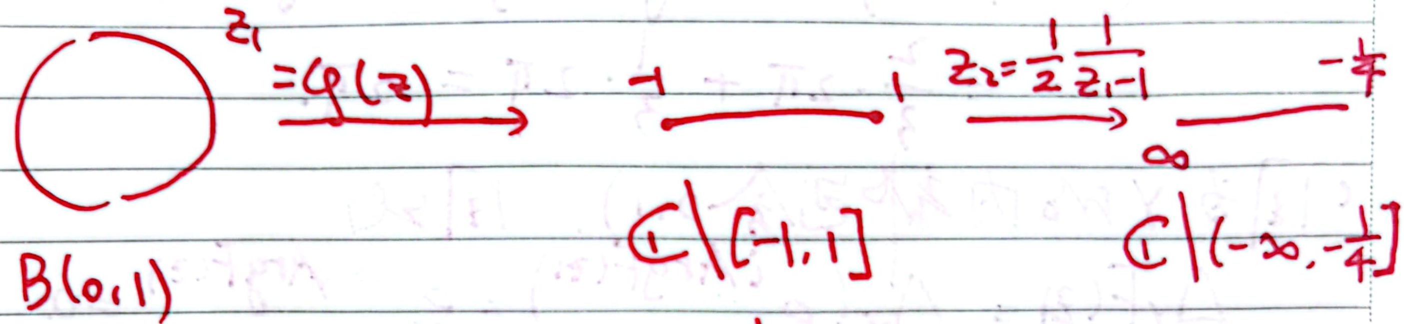
因此

$$3f(-2)^2f'(-2)=-16\Rightarrow f(-2)=-\frac{16}{3\times 12^{\frac{2}{3}}}\cdot e^{-\frac{4\pi}{3}i}$$

2. 设 $\varphi(z)=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ 为儒可夫斯基函数. 那么

$$f(z)=\frac{1}{z+\frac{1}{z}-2}=\frac{1}{2}\frac{1}{\varphi(z)-1}.$$

而 $B(0,1)$ 是 φ 的单叶性域. 从而是 f 的单叶性域.



如上所示. $f(B(0,1))=\mathbb{C}\setminus(-\infty,-\frac{1}{4}]$.

3. (1). $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\cos^3 z}{z^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\Big|_{z=0}\cos^3 z=-3\pi i.$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=1}|1-z|\cdot|dz|=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta=2\int_0^{\pi}2\sin\frac{\theta}{2}d\theta=8.$

Rmk. 这里处理 $|dz|$ 的方法是直接参数化. 还有一类方法是借助 $|dz|=Rd\theta=\frac{R}{iz}dz$ 将其转化为 Cauchy 积分. 视具体题目选择方法.

(3). 设 $f(z)=\frac{z^{10}}{(z^5+1)^2}$. 考虑 $|z+2|=\varepsilon$, $|z+2|=R$, $|z|=\frac{3}{2}$ 围成的三连通域 D. 由 $f(z)/(z+2)\in H(\bar{D})$ 得

$$\int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{f(z)}{z+2}dz=\Big(-\overset{①}{\int_{|z+2|=\varepsilon}}+\overset{②}{\int_{|z+2|=R}}\Big)\frac{f(z)}{z+2}dz$$

Date.　　/

$$\left|②-2\pi i\right| = \left|\int_{|z+2|=R} \frac{f(z)}{z+2}\,dz - 2\pi i\right|$$

$$\leq \int_{|z+2|=R} \frac{|f(z)-1|}{|z+2|}\,dz$$

$$\cancel{R\gg 1}\ \leq \sup_{|z+2|=R} |f(z)-1| \cdot 2\pi \longrightarrow 0 \quad \text{as } R\to\infty$$

$$① = -2\pi i\, f(-2) = -\frac{1024}{961}\cdot 2\pi i$$

令 $R\to\infty$ 可得原积分为

$$2\pi i - \frac{1024}{961}\cdot 2\pi i = -\frac{126}{961}\pi i$$

Date. /

4. 反序多项式 $q(z) \triangleq z^n\overline{p(\frac{1}{\bar{z}})} = \overline{a_0}z^n + \cdots + \overline{a_{n-1}}z + 1$

在单位圆周上，有 $|q(z)| = |\overline{p(z)}| = |p(z)|$. 所以由平均值公式可得

$$|f(0)| = |f(0)q(0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})q(e^{i\theta})|d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})p(e^{i\theta})|d\theta.$$

5. (1). 用零点定理易证.

(2). 只需证 f' 恒非零. 假设 $z_0 \in B(0,r)$, s.t. $f'(z_0) = 0$. 则有

$$1 = f'(0) = \int_{z_0}^{0} f''(z)dz. \quad (*)$$

因为 $\forall z \in B(0,r)$. 有

$$|f''(z)| = \left|\frac{1}{\pi i}\int_{|\zeta - z| = 1-r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}d\zeta\right|$$

$$\le \frac{1}{\pi}\cdot\frac{R}{(1-r)^3}\cdot 2\pi(1-r) \le \frac{2R}{(1-r)^3}.$$

再结合 $(*)$ 有

$$1 \le \frac{2R}{(1-r)^3}\cdot|z_0| < \frac{2Rr}{(1-r)^3}.$$

但是 $0 < r < \delta^*$, 应有 $2Rr < (1-r)^3$. 矛盾!

(3). 由(2)可得 $B(0,r)$ 内恒有 $\mathrm{Re}\, f' > 0$. 从而 f 为单射 (某作业题). 故成立.