2023 春复分析每日一练 (II)

黄天一

2023 年 6 月 16 日

1 核心内容回顾

1. Cauchy 判别法, Weierstrass 判别法, Weierstrass 定理.

2. 幂级数的收敛半径与 Hadamard 公式; 幂级数在收敛圆中内闭一致收敛.

3. 任意全纯函数可以展开为 Taylor 级数.

4. 全纯函数的零点阶数; 唯一性定理.

2 判断题

1. 设 f 在 $|z|<2$ 内全纯, 并且对任意 $n \geqslant 1$, 有

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{(n+1)z-1} \mathrm{d}z = 0,$$

则 f 恒为零.

2. 若区域 D 上的全纯函数 f 有无穷多个零点, 则 f 恒为零.

3. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 1, 则存在 $|z_0|=1$ 使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ 收敛.

4. 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 1, 则存在 $|z_0|=1$ 使得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ 发散.

3 证明与计算题

1. (2022 期中) 计算积分 $\int_{|z|=1} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z-a} \mathrm{d}z$, 其中 $|a|<1$.

2. 设 $\{f_n\}$ 是域 D 上的全纯函数列, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ 在 D 内一致收敛. 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |f_n'(z)|$ 在 D 中内闭一致收敛.

3. (2022 期末) 设 $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 求函数

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1-a_k z}$$

在原点处 Taylor 展开的收敛半径, 并证明:

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \sum_{k=1}^{m} a_k^n \right|^{\frac{1}{n}} = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |a_k|.$$

.

4. (2019 期中) 设 D 是域, $a \in D$, $f \in H(D)$, 并且级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)$ 收敛. 证明:

(1) f 可以被延拓为整函数.

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛.

5. 设 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 $R > 0$. 对任意 $0 < r < R$, 定义 $A(r) = \max\limits_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$, 对任意 $n = 1, 2, \cdots$, 证明:

(1) $a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \mathrm{d}\theta$.

(2) $|a_n| r^n \leqslant 2A(r) - 2 \operatorname{Re} f(0)$.