

原子物理 B 第三次作业答案

助教-何卓尧

2023.10.24

作业内容：《原子物理》陈宏芳 第二章 12, 20

一、作业答案

2.12 质量为 m 的粒子在一维势场 $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ 中运动.

(1) 写出它的定态薛定谔方程;

(2) 已知它的哈密顿算符的本征函数为

$$u_0(x) = e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2}$$
$$u_1(x) = 2\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}xe^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)x^2}$$

试计算每个本征函数的能量本征值;

(3) 试由不确定关系, $\Delta x \Delta p \approx \hbar$, 证明粒子的最低能量 $\approx \hbar\omega$.

解答:

(1) 由定态薛定谔方程 + 本题一维势场条件可知:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]u(\vec{r}) = Eu(\vec{r})$$
$$\Rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right]u(x) = Eu(x)$$

(2) 将 $u(x)$ 代入方程即可算得:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$
$$E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

(3) $x \sim \Delta x$, $p \sim \Delta p$

$$E = \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2 = \frac{\hbar^2}{2m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(\Delta x)^2$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \hbar^2\omega^2} = \hbar\omega = E_{min}$$

2.20 设一个电子在离质子很远处是静止的，在与质子的库伦作用下向质子靠近，求当电子距质子 1m 和 0.5Å 处时，它相应的德布罗意波长。

解答：

本题根据能量（动能 + 势能）守恒列方程求解。动能表达式为非相对论情形下的表达式。

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$
$$-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{h^2}{2m\lambda^2} = 0$$

求得

$$\lambda = \sqrt{\frac{(hc)^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 r}{2mc^2 \cdot e^2}}$$

(1) $r = 1\text{m}$ 时，解得 $\lambda \approx 32.3\mu\text{m}$

(2) $r = 0.5\text{\AA}$ 时，解得 $\lambda \approx 2.3\text{\AA}$