

# 数值代数第四章编程习题第二题迭代式子推导

苏茂江

2023 年 11 月 9 日

## 1 Jacobi 迭代

由原递推公式

$$-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + (4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f(ih, jh)$$

按照  $u_{ij}$  自然顺序排列, 令  $u_i$  为矩阵  $(u_{ij})_{i \times j}$  的第  $i$  列,  $u$  为拉直以后的列向量, 于是拉直得到

$$Au = h^2 f$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} T_1 & -I & & \\ -I & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -I \\ & & -I & T_n \end{bmatrix}$$

观察  $f_i$  有

$$-u_{i-1} + T_i u_i - u_{i+1} = h^2 f_i$$

观察  $j$  行有

$$-u_{i-1,j} - u_{i+1,j} + \sum_{k=1}^{n-1} T_{i,jk} u_{i,k} = h^2 f(ih, jh)$$

对比原递推公式得知

$$T_i = \begin{bmatrix} 4 + h^2 g_{i1} & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 + h^2 g_{in} \end{bmatrix}$$

从而得到 Jacobi 递推关系式子, 对  $i, j$  行, 有

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4 + h^2 g_{ij}} (u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k + h^2 f(ih, jh))$$

## 2 Gauss-Seidel 迭代

G-S 迭代就是在计算  $u_{i,j}^{k+1}$  时, 前面的  $u_{i-1,j}^k$  之类的用  $u_{i-1,j}^k$  代替, 于是有

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4 + h^2 g_{ij}} (u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k + h^2 f(ih, jh))$$

### 3 SOR 迭代

思路是先按照 G-S 迭代计算出  $u^{k+1}$ , 再计算差值

$$r^k = u^{k+1} - u^k$$

再添加  $w$  迭代因子

$$u^{k+1} = u^k + w \cdot r^k$$