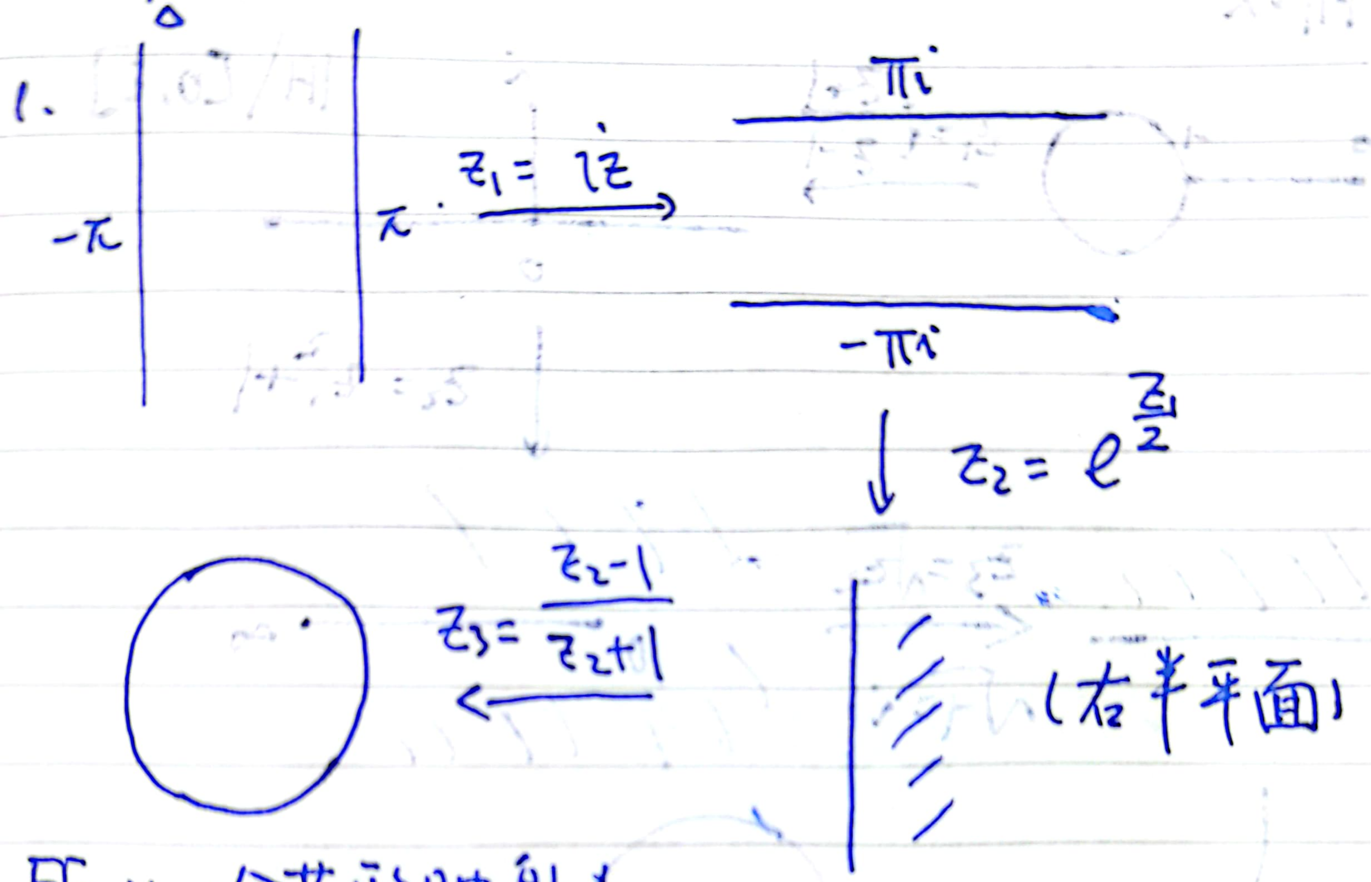
每日一练(七) 答案

共形变换

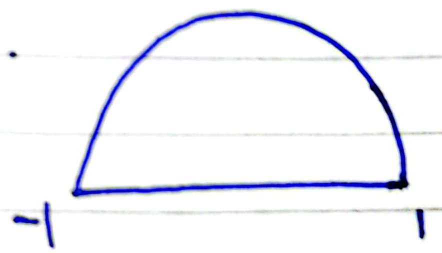
1.



所以一个共形映射为

$$\varphi(z) = \frac{e^{\frac{iz}{2}} - 1}{e^{\frac{iz}{2}} + 1}$$

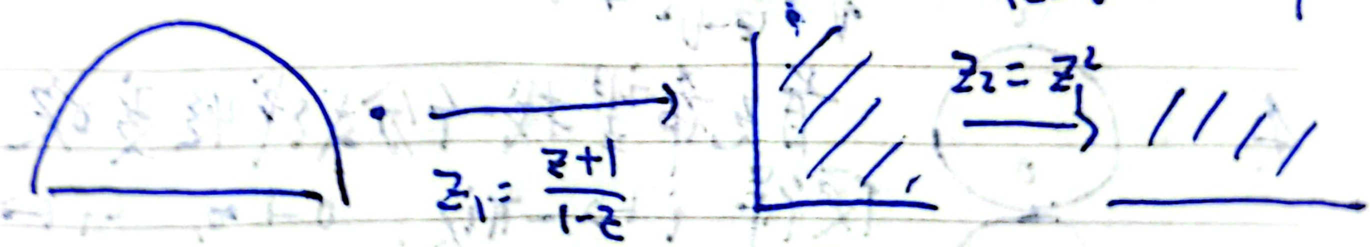
2.



我们将 $-1, 1$ 分别映为 $0, \infty$.

符合要求的一个映射为 $z_1 = \frac{z+1}{1-z}$

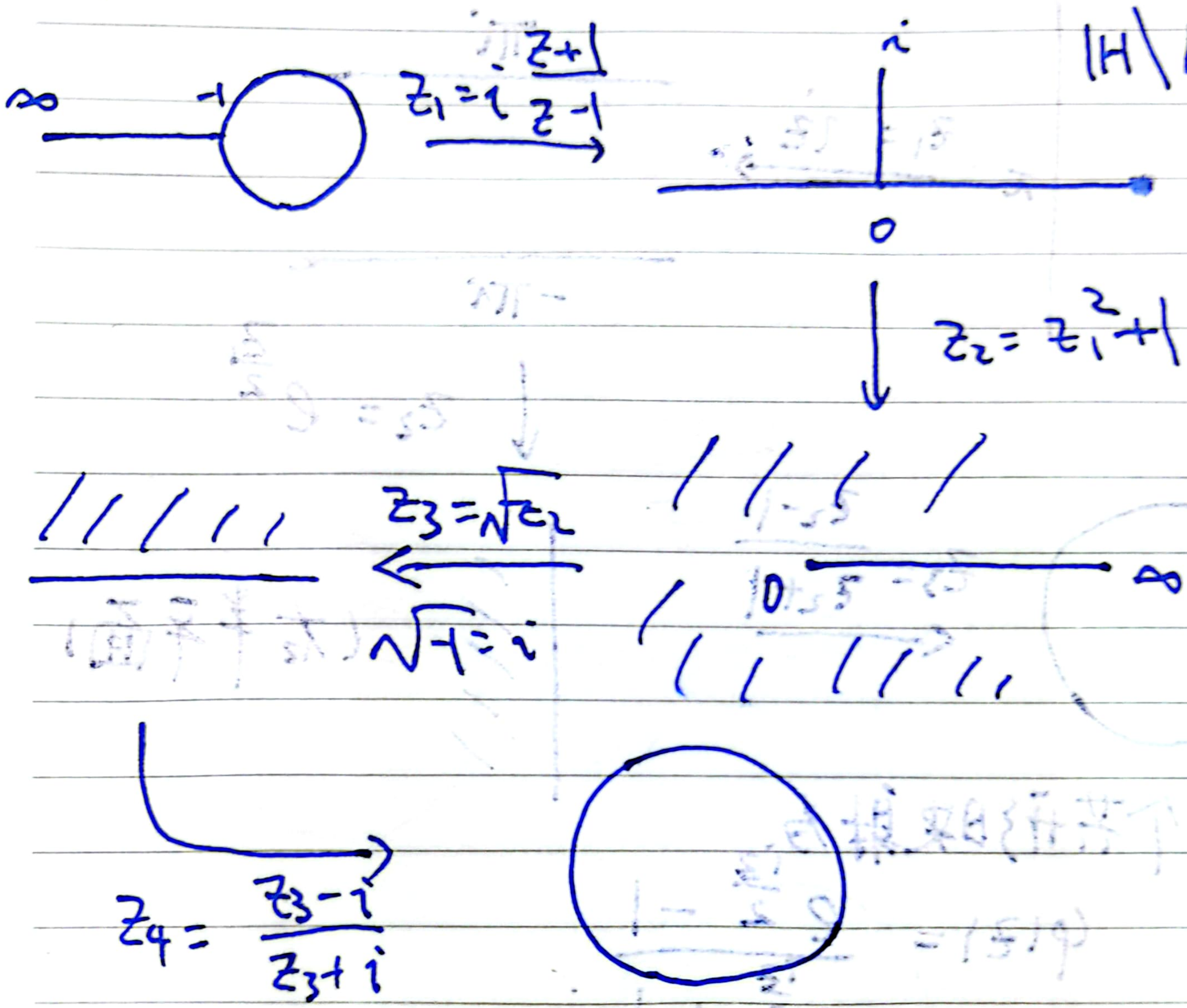
由于 $z_1|_{z=0} = 1$ $z_1|_{z=i} = i$, 所以



一个共形等价映射为 $\varphi(z) = \left(\frac{z+1}{1-z}\right)^2$.

(除去i)

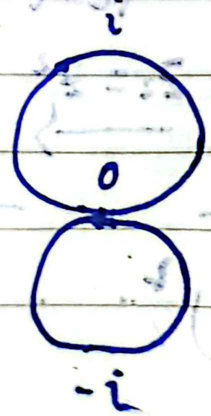
3. 将B(∞,1)映为上半平面的一个分式线性变换为 $z_1 = i\frac{z+1}{z-1}$. 该映射将 $(-\infty,-1]$ 映为 $[0,-i)$.
所以



综上所述，一个共形变换为

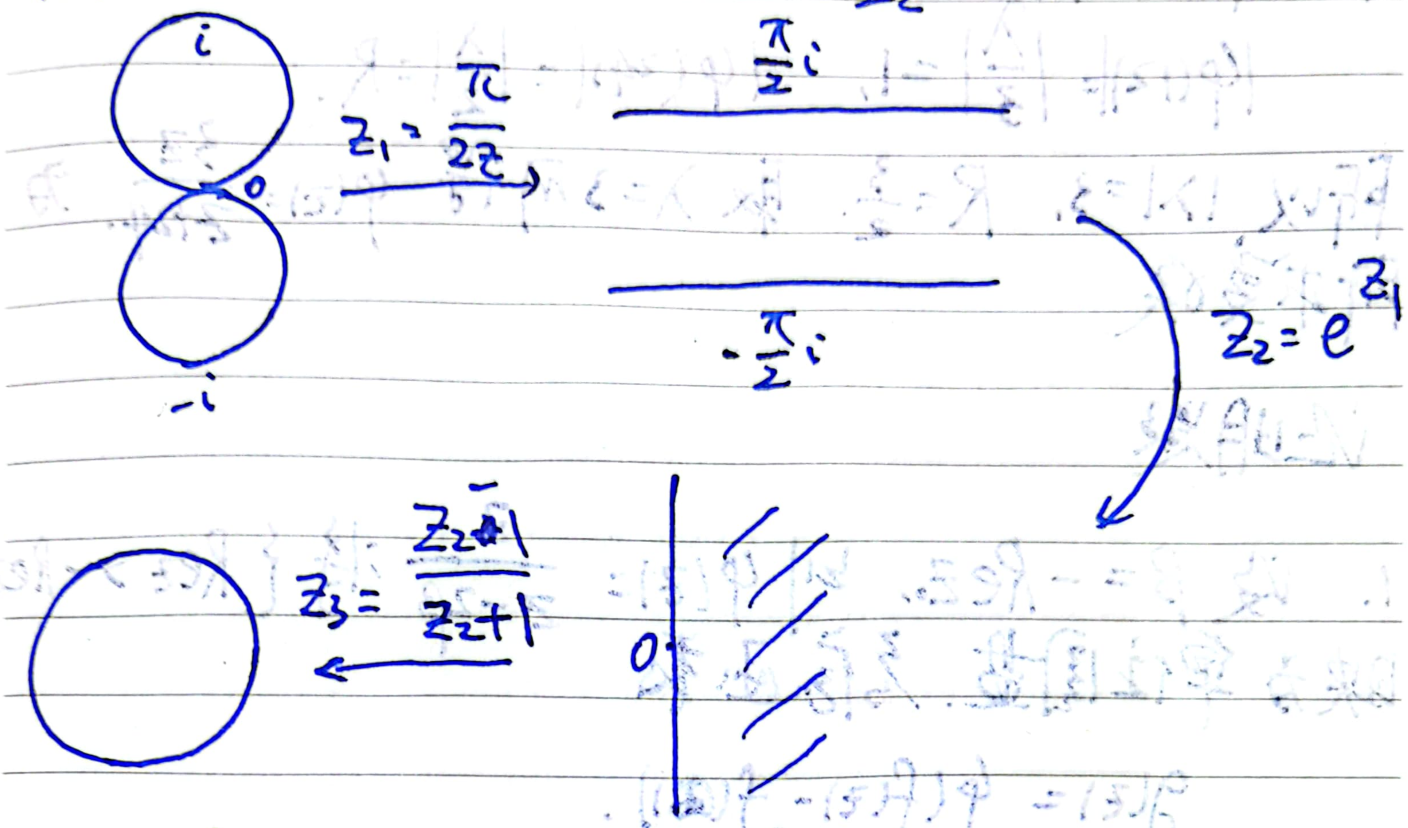
$$\varphi(z)=\frac{\sqrt{-\frac{4z}{(z-1)^2}}-i}{\sqrt{-\frac{4z}{(z-1)^2}}+i}$$

4.



首先希望找一个分式线性变换，使得 $i\mapsto -\pi i/2$. $0\to\infty$, $-i\mapsto \frac{\pi i}{2}$.

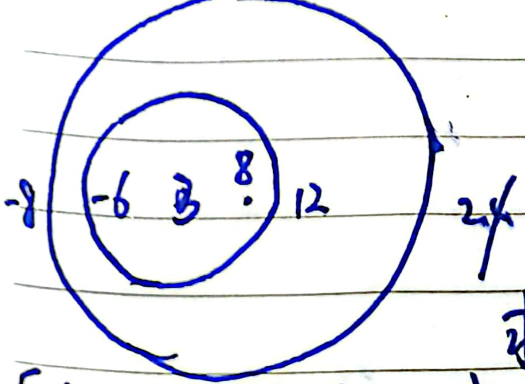
该分式线性变换为 $z_1=\frac{\pi}{2z}$. 所以



符合要求的一个共形变换为

$$\varphi(z)=\frac{e^{\frac{\pi}{2z}}-1}{e^{\frac{\pi}{2z}}+1}.$$

5. 首先求 $|z-3|=9$ 和 $|z-8|=16$ 的一对公共对称点。由几何直观可得，该对对称点落在实轴上，设为 x_1、x_2 ($x_1<x_2$). 则



$$\begin{cases}(x_1-3)(x_2-3)=81\\(x_1-8)(x_2-8)=256\end{cases}$$

解得 $x_1=-24$, $x_2=0$. 同心圆环 $\{1<|w|<R\}$ 的一对公共对称点为 0, ∞. 考虑分式线性变换 $\varphi(z)=\lambda\frac{z}{z+24}$. 设 $|z-3|=9$ 映为 $|w|=1$.

$|z-8|=16$ 映为 $|w|=R$. 则有

$$|\varphi(12)|=\left|\frac{\lambda}{3}\right|=1,\quad |\varphi(24)|=\left|\frac{\lambda}{2}\right|=R.$$

所以 $|\lambda|=3$. $R=\frac{3}{2}$. 取 $\lambda=3$ 可得 $\varphi(z)=\frac{3z}{z+24}$. 为所求变换.

证明题

1. 这题选自龚昇&史济怀书，但是实际写的时候发现题有些困难，不太符合考试难度，所以这里假设"D是不等于$\mathbb{C}$的单连通域"。对一般情形感兴趣的同学可以参考如下回答：

math.stackexchange.com/questions/495848.

Pf. 由Riemann映照，存在从D到$B(0,1)$的双全纯映射φ s.t. $\varphi(a)=0$. 设$\beta=-\mathrm{Re}\, z_0$，则$\psi(z)=\dfrac{z}{z-2\beta}$将$\{\mathrm{Re}\, z > -\mathrm{Re}\, z_0\}$映为$B(0,1)$.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f(z)-z_0"'] & B(0,1) \arrow[d, "g"] \\ \{\mathrm{Re}\, z > -\mathrm{Re}\, z_0\} \arrow[r, "\psi"'] & B(0,1) \end{tikzcd}$$

$g(z) \triangleq \psi(f(\varphi^{-1}(z))-z_0)$，为$B(0,1)$到$B(0,1)$的全纯映射，且

$$g(0)=\psi(f(a)-z_0)=\psi(0)=0$$

Schwarz $\Rightarrow |g(z)| \le |z|$ $(*)$. 任取$K\subset\subset D$，则$\exists\ 0<r<1$，$r=r(K)$. s.t. $\varphi(K)\subset B(0,r)$. 由$(*)$可得$g(\varphi(K))\subset B(0,r)$. 因此由$f(z)-z_0=\psi^{-1}(g(\varphi(z)))$可得$f(K)\subset z_0+\psi^{-1}(B(0,r))$，是一个只与$K$有关的有界集，$\forall f\in\mathcal{F}$. Montel

2. 将 $B(0,1)$ 映为 $\mathbb{C}$ 的全纯映射很多 这里给出一个构造:

$$B(0,1) \xrightarrow{z_1 = i\frac{1+w}{1-w}} //// \xrightarrow{z_2 = z_1^3} \mathbb{C}.$$

但上述映射不是单叶的.

假设存在从 $B(0,1)$ 到 $\mathbb{C}$ 的双全纯映射 φ. 则 φ^{-1} 是有界整函数. Liouville $\Rightarrow$ φ^{-1} 为常数, 矛盾!

3. 由于 0 是 f 的孤立奇点, 且 f 在 0 附近有界, 故 0 是可去奇点, 可以将 f 延拓为 $B(0,1)$ 上的全纯函数 $\tilde{f}$. $\tilde{f}(B(0,1)) \subset \{1 \le |z| \le 2\}$.
由于 0 是内点, 根据开映射定理可得 $\tilde{f}(0) \in \{1<|z|<2\}$. 由于 $f: \{0<|z|<1\} \longrightarrow \{1<|z|<2\}$ 双全纯, 设 $w_0 = f^{-1}(z_0)$, $\tilde{f}(0) \triangleq z_0$, 则 $\exists r>0$, s.t. $B(0,r)$ 和 $B(w_0,r)$ 无交. 再由开映射定理, $\tilde{f}(B(0,r)) \cap f(B(w_0,r))$ 是 z_0 的邻域. 但是, 由于 f 单叶, 可得 $\tilde{f}(B(0,r)) \cap f(B(w_0,r))$ 只能为 $\{z_0\}$, 矛盾! ※