§7.2 函数项级数

7.2.1 基本概念

设 $u_1(x)$, $u_2(x), \cdots, u_n(x)$, $\cdots$ 是定义在 E 上的一列函数. 称和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots .$$

为 E 上的函数项级数. 对 $x_0 \in E$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 就是一个数项级数. 如果收敛, 则称 x_0 为**收敛点**, 如果发散, 则称为**发散点**.

不妨设函数项级数的收敛点集全体为 $[a,b]$, 所以

$$x \in [a,b], \quad x \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$$

定义了一个函数. 或者, 记

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x),$$

为函数项级数的前 n 项的部分和, 如果存在函数 $S(x)$, 使得对任意 $x_0 \in [a, b]$, 数列 $S_n(x_0)$ 收敛到 $S(x_0)$, 则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上逐点收敛于函数 $S(x)$. 称 $S(x)$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数.

从定义中我们得到, 函数项级数的收敛, 就是部分和所构成的函数列的收敛问题.

例 1 讨论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛性.

解 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上都有定义 (对于固定的 x, 就是一个几何级数), 但只在 $(-1, 1)$ 上收敛并有

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

而当 $|x| \geqslant 1$ 时, 级数发散.

在有限求和过程中, 函数的连续性, 以及可导、可积等解析性质都保持. 对于无限求和, 和函数是否也能继承这些性质? 即

问题 1 通项 $u_n(x)$ 都连续, 是否 $\Longrightarrow S(x)$ 连续?

问题 2 通项 $u_n(x)$ 都可导, 是否 $\Longrightarrow S(x)$ 可导? 如果可导, 是否有

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)?$$

问题 3 通项 $u_n(x)$ 都可积, 是否 $\Longrightarrow S(x)$ 可积? 如果可积, 是否有

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx?$$

有很多例子表明如果不加条件, 那么上面的问题的回答都是否定的. 为了得到肯定的结果我们需要添加某些条件.

例 2 设 $u_1(x) = x,\ u_n(x) = x^n - x^{n-1},\ (n = 2, 3, \cdots)$, 则

$$S_n(x) = x^n\ (n = 1, 2, \cdots .)$$

显然 $S_n(x)$ 都在 $[0, 1]$ 上连续且可导. 因为

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1); \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

所以 $S(x)$ 在 1 不连续, 当然也不可导.

此例说明连续函数列的极限不一定连续, 也说明通项是连续函数的级数, 其和函数未必连续.

例 3 设 $\{r_1, r_2, \cdots\}$ 是 $[0,1]$ 上全体有理数. 令

$$S_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}; \\ 0, & x \notin \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}, \end{cases}$$

则

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是 } [0,1] \text{ 中有理数}; \\ 0, & x \text{ 是 } [0,1] \text{ 中无理数}, \end{cases}$$

显然 $S_n(x)$ 在 $[0,1$ 可积, 但 $S(x)$ 在 $[0,1$ 不可积.

此例说明可积函数列的极限不一定可积. 也说明通项都可积的函数项级数的和函数不一定可积.

例 4 设 $S_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $x \in [0, 1]$. 则有

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0.$$

显然 $S_n(x)$ 和 $S(x)$ 都在 $[0, 1]$ 上可积, 但

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = \int_0^1 (-e^{-n^2x^2})'dx = 1 - e^{-n^2} \to 1,\ (n \to \infty),$$

$$\int_0^1 S(x)\,dx = 0.$$

此例说明即便 $S_n(x)$ 和它的极限函数 $S(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 可积, 一般也不一定有

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx.$$

例 5 设 $S_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}}\ (n = 1, 2, \cdots)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 则

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0.$$

显然 $S_n(x)$ 和 $S(x)$ 都在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且 $S'(x) = 0$, 但

$$S_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx \not\to 0 = S'(x) \quad (n \to \infty).$$

此例说明即便 $S_n(x)$ 和它的极限函数 $S(x)$ 都在区间 $[a, b]$ 上可导时, $S_n(x)$ 的导函数可能不一定收敛, 即便收敛也不一定收敛到 $S(x)$ 的导函数.

7.2.2 一致收敛性

先从函数列的收敛来说.

函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于函数 $f(x)$ $\iff$ $\forall\, x_0 \in [a,b]$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N = N(x_0,\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

一般来说, 上面的 N 不仅依赖于 ε 也依赖于 x_0, 它表示的是函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 点的收敛快慢, N 越大收敛得越慢, N 越小收敛得越快. 由于 N 一般与 x_0 有关, 因此在不同点收敛的速度不同, 即快慢不一致.

例如, 函数列 $\{x^n\}$ 在 $(0,1)$ 上收敛于 0. 对于 $x \in (0,1)$ 及任意 $\varepsilon \in (0,1)$, 为了 $|x^n - 0| < \varepsilon$, 必须 $n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$. 因此, 至少需要 $N = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]$. 这样当 x 越靠近 1, N 就越大. 不存在共同的对所有点一致成立的 N.

函数列和函数项级数在收敛域上的收敛性, 本质上是"点态"的收敛. 在各个收敛点有不同的收敛速度. 当收敛速度有某种整体的一致性时, 称其为一致收敛, 准确地说就有下面的定义.

定义 1 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上收敛于 $f(x)$, 如果对任意正数 ε, 都存在 $N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 对所有 $x \in E$ 都有

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

则称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$（或一致趋于 $f(x)$）.

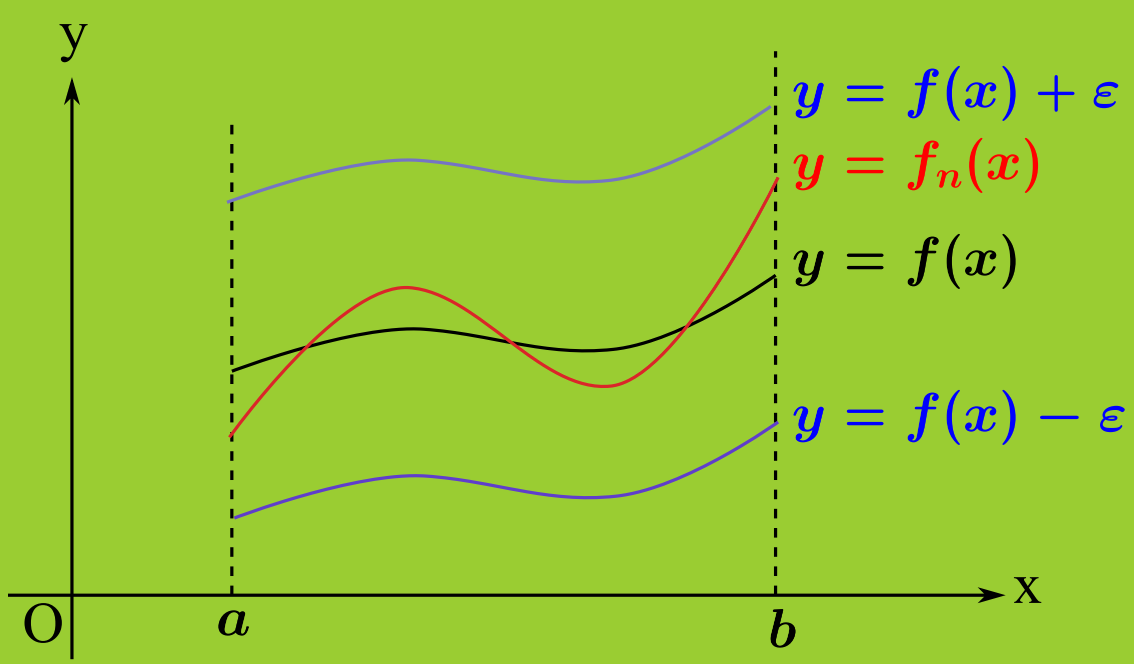
当定义中的函数列是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和时 (即 $f_n(x) = S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$), 上面的定义也就给出了函数项级数的一致收敛性的定义.

一致收敛的几何意义 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon)$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时, 方程

$$y = f_n(x), \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

表示的曲线都落入条形区域

$$\{(x, y):\ x \in [a, b], \quad y \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\}$$



显然 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$ 等价于 $\{f(x)-f_n(x)\}$ 一致趋于零. 因此我们有等价的命题

定理 1 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0,\quad \text{其中},\ \beta_n=\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|.$$

证明 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x) \iff \forall\,\varepsilon>0, \exists\, N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in E$ 成立. 因而有

$$\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon,$$

即当 $n\geqslant N$ 时, 有 $0\leqslant\beta_n\leqslant\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$.

例 6 讨论函数列 $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

解 任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N > \frac{1}{\varepsilon}$, 当 $n > N$ 时,

$$|f_n(x) - 0| = \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$$

对所有 $x \in [0,1]$ 都成立. 所以该函数列在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0. 也可以从

$$\beta_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{n} \to 0$$

得到这个结论.

例 7 函数列 $\{x^n\}$ 在 $[0,1)$ 上不一致收敛于 0.

证明 因为

$$\beta_n = \sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0, \ (n \to \infty),$$

所以 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛于 0.

例 8 讨论函数列 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ 在分别区间 $(0,1)$ 和 $[1,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解 显然 $f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上逐点收敛于 0. 在 $(0,1)$ 上有

$$\beta_n = \sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| \geqslant f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \not\to 0,$$

所以该函数列在区间 $(0,1)$ 上不一致收敛.

在区间 $[1,+\infty)$ 上, 有

$$\beta_n = \sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| \leqslant \sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{nx}{n^2x^2}\right| \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty),$$

所以该函数列在区间 $[1,+\infty)$ 上一致收敛.

问题 该函数列在区间 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 上是否一致收敛?

例 9 讨论函数列 $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$ 在区间 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

解 在区间 $[0,1]$ 上, 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. 又

$$\begin{aligned}\beta_n &= \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| \\ &\geqslant \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 2ne^{-1} \not\to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

所以该函数列在区间 $[0,1]$ 上不一致收敛.

问题 区间 $[0,1]$ 中的哪个点影响了这个函数列的一致收敛性?

定理 2 (函数列一致收敛的 Cauchy 准则) 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛的充分必要条件是: 对任给的正数 ε, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, 对任何正整数 p 和 $x\in E$ 都有

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon.$$

证明 $(\Longrightarrow)$ 设 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$. 则任意 $\varepsilon>0$ $\exists$ $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时,

$$|f_{n+p}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

对一切 $p\in\mathbb{N}$ 及 $x\in E$ 成立. 因而

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

对一切 $p\in\mathbb{N}$ 及 $x\in E$ 成立.

($\Longleftarrow$) 由条件知对每个固定的 $x \in E$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 是 Cauchy 数列, 因而存在一个数, 记为 $f(x)$ 使得 $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$. 于是 $f(x)$ 是定义在 E 上的一个函数, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上逐点收敛于 $f(x)$. 因为对任意 $\varepsilon > 0$, $\exists$ $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

对一切 $p \in \mathbb{N}$ 及 $x \in E$ 成立. 在此不等式中令 $p \to \infty$ 得

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

对一切 $x \in E$ 成立. 于是 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$.

函数项级数的一致收敛

定义 2 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是定义在 E 上的函数项级数, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. 如果函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $S(x)$, 那么就称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛于 $S(x)$.

定理 3 (**函数项级数一致收敛的 Cauchy 准则**) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛的充分必要条件是: 对任给的正数 ε, 存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 对任何正整数 p 和 $x \in E$ 都有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

推论 1 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛, 则 $\{u_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 0.

例 10 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,1)$ 上是否一致收敛?

解 因为

$$\sup_{x\in(0,1)} |ne^{-nx}| \geqslant ne^{-1} \not\to 0,$$

所以通项在 $(0,1)$ 上不一致收敛于 0, 因而 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

例 11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}e^{-nx}$ 在 $(0,1)$ 上是否一致收敛?

解 因为当 $p>n$ 时,

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{1}{n+1}e^{-(n+1)x}+\frac{1}{n+2}e^{-(n+2)x}+\cdots+\frac{1}{n+p}e^{-(n+p)x}\right| \\
&\geqslant \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p} \\
&> \frac{p}{n+p} > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}e^{-nx}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

定理 4 (Weierstrass) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；又在 E 上恒有

$$|u_n(x)| \leqslant a_n,$$

则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

证明 利用条件和 Cauchy 准则, 即可.

例 12 若 $\alpha > 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

证明 因为

$$\left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 在 $\alpha > 1$ 时收敛, 所以原级数一致收敛.

定义 3 设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的函数列. 若存在 $M>0$ 使得

$$|f_n(x)| \leqslant M$$

对一切 $n\in\mathbb{N}$ 及一切 $x\in E$ 成立, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致有界. 若对每个 $x\in E$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 有界, 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上逐点有界.

例 13 讨论函数列 $\{nx^n\}$ 在 $(0,1)$ 上的有界性.

解 对每个 $x\in(0,1)$ 数列 $\{nx^n\}$ 收敛于 0. 因此, 该函数列逐点有界.

若该函数列一致有界, 则存在 $M>0$ 使得

$$|nx^n| \leqslant M$$

对对一切 $n\in\mathbb{N}$ 及一切 $x\in(0,1)$ 成立. 特别有

$$\sqrt{n} = n\left(\frac{1}{\sqrt[2n]{n}}\right)^n \leqslant M$$

对一切 n 成立. 这不可能. 因此该函数列在 $(0,1)$ 上不是一致有界的.

定理 5 (Dirichlet) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 是定义在 E 上的函数项级数. 若

1° $\{b_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 0, 且对每个固定的 x, 是单调递减的;

2° $A_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ 在 E 上一致有界,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

证明 设 $|A_n(x)| \leqslant M$, 对一切 x 及 n 成立, 则

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| = |A_{n+p}(x)-A_n(x)| \leqslant 2M.$$

由 Abel 引理, 得 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2M(|b_{n+1}(x)|+2|b_{n+p}(x)|)$. 由第一个条件知, 对任意 $\varepsilon>0$, $\exists N$ 使得当 $n>N$ 时, 对一切 $x\in E$, 有 $|b_n(x)|<\frac{\varepsilon}{8M}$. 所以当 $n>N$ 时, $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right|<\varepsilon$ 对一切 $x\in E$ 及 $p\in\mathbb{N}$ 成立. 根据 Cauchy 准则, 结论得以证明.

定理 6 (Abel) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 是定义在 E 上的函数项级数. 若

1° $\{b_n(x)\}$ 在 E 上一致有界, 且对每个固定的 x, 是单调的;

2° $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ 在 E 上一致收敛,

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 E 上一致收敛.

证明 设 $|b_n(x)| \leqslant M$. 由条件 2°, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 对一切 x 及 p 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

根据 Abel 引理, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}(|b_{n+1}(x)| + 2|b_{n+p}(x)|) < \varepsilon$$

对一切 x 及 p 成立. 于是根据 Cauchy 准则, 结论得以证明.

例 14 设 a_n 单调减趋于 0, $\delta \in (0,\pi)$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 一致收敛.

证明 因为

$$A_k(x) = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos kx = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

所以

$$|A_k(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

这说明 $\{A_n(x)\}$ 在所给区间上一致有界. 又 $\{a_n\}$ 显然单调减一致趋于 0. 所以原级数在定义的区间上是一致收敛的.

例 15 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 求证: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

证明 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一致收敛(它与 x 根本毫无关系), 而 $\{\frac{1}{n^x}\}$ 对固定的 $x \geqslant 0$ 单调递减, 而且 $|\frac{1}{n^x}| \leqslant 1$ 一致有界. 所以原级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

7.2.3 一致收敛的函数列或级数的性质

定理 7 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 E 上一致收敛于 $S(x)$, 且求和项 $u_n(x)$ 在区间 E 上连续, 则 $S(x)$ 也在 E 上也连续.

定理 8 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项都在在区间 E 上连续, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$, 那么 $f(x)$ 也在 E 上连续.

证明 任取 $x_0 \in E$, 只要证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 即可. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 由一致收敛性可知, 存在 N, 使对任何 $x \in E$ 都有 $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. 再由 $f_N(x)$ 在 x_0 连续性可知, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$. 所以, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\ &\quad + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

定理 9 (Dini **定理**) 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在有限闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且在 $[a,b]$ 上收敛于连续函数 $f(x)$. 如果对每个固定的 x, 数列 $\{f_n(x)\}$ 是递减的, 那么函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 不妨设 $f(x)=0$, 不然考虑 $g_n(x)=f_n(x)-f(x)$. 用反证法证明. 若 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上不一致收敛于 0, 则存在 $\varepsilon_0>0$ 使得对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $x_n\in[a,b]$ 满足

$$f_n(x_n)\geqslant\varepsilon_0.$$

因为 $\{x_n\}$ 是有界的, 所以存在收敛子列. 不妨设 $\{x_n\}$ 本身收敛. 设 $x_n\to y\in[a,b]$. 因此对一切 $n,p\in\mathbb{N}$ 有

$$\varepsilon_0\leqslant f_{n+p}(x_{n+p}).$$

由 $\{f_n(x)\}$ 的递减性, 得

$$\varepsilon_0\leqslant f_n(x_{n+p}).$$

因为 $f_n(x)$ 是连续的, 在上式中令 $p \to \infty$ 得

$$\varepsilon_0 \leqslant f_n(y).$$

再令 $n \to \infty$ 得 $\varepsilon_0 \leqslant 0$. 矛盾!

定理 10 (Dini **定理**) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的通项在有限闭区间 $[a, b]$ 上连续且非负. 如果该级数在 $[a, b]$ 上收敛于连续函数 $S(x)$, 那么该级数在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

注意, Dini 定理中的区间 $[a, b]$ 不能换成开区间 (a, b), 也不能换成无穷区间.

例 16 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $(0, 1)$ 上不一致收敛.

例 17 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}x$, $x \in [0, +\infty)$ 不一致收敛.

例 18 函数列 $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ 在 $(0, 1)$ 上递减趋于 0, 但不一致收敛.

定理 11 (**端点处的连续性**) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的通项在区间 (a,b) 上连续且该级数在 (a,b) 上一致收敛于 $S(x)$. 如果对每个 n 左极限 $\lim\limits_{x\to b^-} u_n(x)$ 存在且有限, 那么 $\lim\limits_{x\to b^-} S(x)$ 存在且

$$\lim_{x\to b^-} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to b^-} u_n(x).$$

证明 定义 $u_n(b) = \lim\limits_{x\to b^-} u_n(x)$, 则 $u_n(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 上一致收敛于 $S(x)$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 N, 当 $n > N$ 时,

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \leqslant \varepsilon,$$

对一切 $x \in (a,b)$ 及一切自然数 p 成立. 令 $x \to b^-$ 知, 上式在 $(a,b]$ 也成立. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(a,b]$ 上一致收敛. 因而结论成立.

例 19 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$. 求 $\lim_{x\to 1} f(x)$.

解 当 $x\in[0,2]$ 时, 有

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$ 收敛, 所以根据 Weierstrass 判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos(n\pi x^2)$ 在区间 $[0,2]$ 上一致收敛. 由于通项是连续函数, 所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续, 因而

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

例 20 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$. 求证 $f(x)$ 是 $(0,2\pi)$ 上的连续函数.

证明 根据 Dirichlet 判别法可知对任意 $x\in(0,2\pi)$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 收敛, 因此 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上有定义. 对任意 $x\in(0,2\pi)$ 取 $0<\delta<\pi$ 使得 $x\in[\delta,2\pi-\delta]$. 根据 Dirichlet 判别法 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致收敛, 因此 $f(x)$ 在 x 连续, 从而 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续.

定理 12 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 的每一项都在在区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 那么 $f(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\gamma \in (0, \frac{\varepsilon}{3(b-a)})$. 由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 故存在 N 使得 $n > N$ 时, 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \gamma \tag{1}$$

对一切 $x \in [a,b]$ 成立. 对固定的 $n_0 > N$, 取 $[a,b]$ 的分割 T 使得

$$\overline{S}(f_{n_0}, T) - \underline{S}(f_{n_0}, T) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2}$$

由 (1) 式, 有 $f(x) < f_{n_0}(x) + \gamma$, 因此

$$\overline{S}(f, T) < \overline{S}(f_{n_0}, T) + \gamma(b-a) < \overline{S}(f_{n_0}, T) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

从 (1) 式, 还可得 $f(x) > f_{n_0}(x) - \gamma$, 因此

$$\underline{S}(f, T) > \underline{S}(f_{n_0}, T) - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

于是

$$\overline{S}(f, T) - \underline{S}(f, T) < \varepsilon.$$

这就说明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积. 又当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx \right| \\ \leqslant & \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \\ \leqslant & \ \gamma(b-a) < \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

推论 2 如果区间 $[a,b]$ 上的可积(连续)函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 那么 $f(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积(连续), 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

定理 13 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$. 如果通项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 那么和函数 $S(x)$ 也在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

例 21 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的和, 这里 $x\in[0,1)$.

解 对于任意 $x\in(0,1)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}$ 在 $[0,x]$ 上一致收敛, 且通项连续. 于是

$$\begin{aligned}
f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,dt\\
&=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\,dt\\
&=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt\\
&=\ln\frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

定理 14 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足下面的条件:

1° 每个 $f_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 有连续的导函数;

2° $\{f_n'(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g(x)$;

3° 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在某点 $x_0 \in [a,b]$ 收敛,

那么 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于某个连续可微的函数 $f(x)$, 且 $f'(x) = g(x)$, $x \in [a,b]$.

证明 由 1° 知 $f_n'(x)$ 连续, 由 2° 及前面的定理知, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. 由 3° 不妨设 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛于 $f(x_0)$. 令

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + f(x_0),$$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $f'(x) = g(x)$, $x \in [a,b]$. 下面证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

由 2° 和 3°, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in [a, b]$ 有

$$|f_n'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left|\left(\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt + f_n(x_0)\right) - \left(\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + f(x_0)\right)\right| \\
&\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|dt\right| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon, \ \forall\, x \in [a, b].
\end{aligned}$$

所以 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

定理 15 如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足下面的条件:

1° 每个 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 有连续的导函数;

2° $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于函数 $g(x)$;

3° 至少有一点 $x_0 \in [a,b]$, 使 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛,

那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛于某个连续可微的函数 $S(x)$, 且 $S'(x) = g(x)$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$