# 2024 春近世代数作业

## 1 第一次作业

**Exercise 1.1** 对任意集合 $X$，我们用 $Id_X$ 表示 $X$ 到自身的恒等映射。设 $f: A \to B$ 为集合间的映射，$A$ 是非空集合，试证:

*(1).* $f$ 是单射 $\Leftrightarrow$ 存在 $g: B \to A$，使得 $g \circ f = Id_A$

*(2).* $f$ 是满射 $\Leftrightarrow$ 存在 $h: B \to A$，使得 $f \circ h = Id_B$

*(3).* $f$ 是双射 $\Leftrightarrow$ 存在唯一的 $g: B \to A$，使得 $g \circ f = Id_A$，$f \circ g = Id_B$

**Exercise 1.2** 证明容斥原理:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_n\} \subset \{1,\ldots,n\}} |A_{i_j} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$$

*hint*: 对 $n$ 归纳

**Exercise 1.3** 令 $G$ 为实数对 $(a,b), a \neq 0$ 的集合,在 $G$ 上定义 $(a,b)(c,d) = (ac, ad+b)$，试证 $G$ 为群

**Exercise 1.4** 令 $G$ 为所有秩不大于 $r$ 的 $n$ 阶复方阵的集合，试证在矩阵乘法下，$G$ 构成半群

**Exercise 1.5** 设 $G$ 是一个半群，若:

*(1).* $G$ 中含有左幺元 $e$，即任意 $x \in G$，有 $ex = x$

*(2).* $G$ 的每个元素 $x$ 都有左逆元 $x^{-1}$，使得 $x^{-1}x=e$ 试证 $G$ 为群

**Exercise 1.6** 举例：

*(1).* 举出一个含幺半群的例子，其中存在元素有左逆元但是没有右逆元

*(2).* 举出一个含幺半群的例子，其中存在元素有无数个左逆元

# 2 第二次作业

## 2.1 周三

**Exercise 2.1** 判断下面哪些 *2* 阶实方阵集合在矩阵乘法意义下构成群：

*(1).* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$，$ac \neq b^2$

*(2).* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & a \end{smallmatrix}\right)$，$a^2 \neq bc$

*(3).* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$，$ac \neq 0$

*(4).* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$，$a,b,c,d \in \mathbb{Z}$，$ad \neq bc$

**Exercise 2.2** 定义 $GL_n(\mathbb{R})$ 上运算 $[A,B]=AB-BA$，则 $(GL_n(\mathbb{R}),[\cdot,\cdot])$ 是否构成群。

**Exercise 2.3** 设 $m,n \in \mathbb{N}^+$,$X \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$,令 $G=\{(A,B)|A \in GL_m(\mathbb{R}), B \in GL_n(\mathbb{R})\}$，$H=\{(A,B)\in G|AXB=X\}$

*(1).* $G$ 上定义乘法 $(A_1,B_1)\cdot(A_2,B_2)=(A_1A_2,B_2B_1)$，则 $(G,\cdot)$ 为群，验证 $H$ 为 $G$ 子群

*(2).* 设 $m,n=2$，$G$ 上定义乘法 $(A_1,B_1)\circ(A_2,B_2)=(A_1A_2,B_1B_2)$，则 $(G,\circ)$ 为群，验证若 $X=I_2$，则 $H$ 不为 $G$ 子群，若 $X=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$，则 $H$ 为 $G$ 子群。

## 2.2 周五

**Exercise 2.4**

*(1).* 证明有理数加法群 $(\mathbb{Q},+)$ 和乘法群 $\mathbb{Q}^{\times}$ 不同构。

*(2).* 对于群 $(G,\cdot)$，定义它的反群为 $(G^{op},\circ)$，其中 $G^{op}$ 作为集合与 $G$ 中元素相同，$G^{op}$ 上面的运算定义为 $a\circ b := ba$，证明 $G$ 与 $G^{op}$ 同构。

**Exercise 2.5** 群 $G$ 的自同构 $f$ 称为没有不动点的自同构，是指任意 $1\neq g\in G$，有 $f(g)\neq g$。证明如果有限群 $G$ 具有一个没有不动点的自同构 $f$ 且 $f^2=1$，则 $G$ 一定是奇数阶 $Abel$ 群。

**Exercise 2.6** 令 $V$ 为 $n$ 维 $\mathbb{Q}$ 线性空间，证明 $Aut(V,+)=GL_n(\mathbb{Q})$。

# 3 第三次作业

## 3.1 周三

**Exercise 3.1** 令 $G=SL_2(\mathbb{Z})=\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)|ad-bc=1,a,b,c,d\in\mathbb{Z}\}$，$S=\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$，$T=\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$，证明 $G=<S,T>$。

**Exercise 3.2** 设 $G$ 为有限交换群，证明 $g\to g^k$ 为 $G$ 的自同构 $\Leftrightarrow k$ 与 $|G|$ 互素。

**Exercise 3.3** 令 $G$，$H$ 为群，定义 $G\times H=\{(g,h)|g\in G,h\in H\}$，上面带有乘法 $(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1g_2,h_1h_2)$，验证下面的群是否为循环群：

*(1).* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

*(2).* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

*(3).* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

## 3.2 周五

**Exercise 3.4** 令 $G$ 为 $n$ 阶有限群，若对 $n$ 的每个因子 $m$，$G$ 中至多只有一个 $m$ 阶子群，则 $G$ 为循环群。

**Exercise 3.5** 设 $H$ 和 $K$ 分别是有限群 $G$ 的两个子群，$HgK = \{hgk | h \in H, k \in K\}$。试证:

*(1).* $|HgK| = |H||K : g^{-1}Hg \cap K|$

*(2).* 对所有 $x, y \in G$，$HxK$ 和 $HyK$ 要么相同，要么不交。

**Exercise 3.6**

*(1).* 设 $G$ 为有限交换群，证明 $\prod_{g \in G} g = \prod_{a \in G, a^2 = 1} a$

*(2).* 证明 *Wilson* 定理：若 $p$ 为素数，则 $(p-1)! \equiv -1 \ mod \ p$