$\Leftrightarrow P(X_1\le a, Y_1\le b, X_2\le c, X_2\le d) = P(X_1\le a, Y_1\le b)\cdot P(X_2\le c, Y_2\le d)$

$\varphi(t)=E[\cos(tX)+i\sin(tX)]=E[\cos(tX)]+iE[\sin(tX)]$存在

定理 特征函数$\varphi(t)$满足

(1) $\varphi(0)=1$, $|\varphi(t)|\le 1$, $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$ (2) $\varphi(t)$是一致连续的函数.

(3) $\varphi(t)$非负定. 对$\forall t_1,\cdots,t_n\in R$, $z_1,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$, $\sum\limits_{k,j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)\cdot z_k\cdot\bar{z}_j\ge 0$

证: (1) $\varphi(0)=E[e^0]=1$ $|\varphi(t)|=|E(e^{itX})|\le E(|e^{itX}|)=1$

$\varphi(-t)=E[e^{-tiX}]=E[\overline{e^{itX}}]=\overline{\varphi(t)}$

(2) $|\varphi(t+h)-\varphi(t)|=|E(e^{i(t+h)X}-e^{itX})|=|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t+h)x}-e^{itx}\,dF(x)|$

$\le\int_{-\infty}^{+\infty}|e^{itx}|\cdot|e^{ihx}-1|\,dF(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}|e^{ihx}-1|\,dF(x)$

对$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$, $|h|<\delta$时, $|e^{ihx}-1|<\varepsilon$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\,dF(x)=E[\varepsilon]=\varepsilon$

$\therefore|\varphi(t+h)-\varphi(t)|<\varepsilon$

(3) $\sum\limits_{k,j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)z_k\cdot\bar{z}_j=\sum\limits_{k,j=1}^{n}E[e^{i(t_k-t_j)X}]z_k\bar{z}_j=E(\sum\limits_{k,j=1}^{n}e^{it_kX}\cdot z_k\cdot\overline{e^{it_jX}}\cdot\bar{z}_j)$

$=E(\sum\limits_{k=1}^{n}e^{it_kX}z_k\overline{\sum\limits_{j=1}^{n}e^{it_jX}z_j})=E(|\sum\limits_{k=1}^{n}e^{it_kX}z_k|^2)\ge 0$

hw: 5.6.2, 5.6.4, 5.7.2, 5.7.3

定理: 若$E(|X|^k)<\infty$, 则$\varphi^{(j)}(0)=i^jE[X^j]$ $j\le k$

$\varphi(t)=1+(it)E[X]+\frac{(it)^2}{2!}E[X^2]+\cdots+\frac{(it)^k}{k!}E[X^k]+o(t^k)$

证: $j\le k$ $\frac{d^je^{itx}}{dt^j}=(ix)^je^{itx}$

$|(ix)^je^{itx}|\le|x|^j$ $E(|X|^j)<\infty$ 故可交换$E[\,]$, 求导顺序.

$\varphi^{(j)}(t)=E[\frac{d^je^{itX}}{dt^j}]=E[(iX)^je^{itX}]\Rightarrow\varphi^{(j)}(0)=i^jE[X^j]$

Taylor公式. $\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)\cdot t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}t^k+o(t^k)$

$=1+(it)E[X]+\frac{(it)^2}{2!}E[X^2]+\cdots+\frac{(it)^k}{k!}E[X^k]+o(t^k)$

定理3 X_1, X_2 相互独立，则 $\varphi_{X_1+X_2}(t)=\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$.

证：$\varphi_{X_1+X_2}(t)=E[e^{it(X_1+X_2)}]=E[e^{itX_1}\cdot e^{itX_2}]=E[e^{itX_1}]\cdot E[e^{itX_2}]=\varphi_{X_1}(t)\cdot\varphi_{X_2}(t)$

推广到 $X_1,\cdots,X_n$ 独立. $Y=X_1+\cdots+X_n$. $\varphi_Y(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}(t)$

例 $\varphi(t)$ 是 r.v. X 的 c.f. $\varphi^n(t)$ 也是1个 c.f. $|\varphi(t)|^2=\varphi(t)\cdot\overline{\varphi(t)}$ 是 c.f.

$a_n\geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$. $\{\varphi_n(t)\}$ 是一列特征函数. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(t)$ 也是特征函数.

因为 $\varphi_n(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,dF_n(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nF_n(x)$ 也是分布函数. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,d\,a_nF_n(x)$

$f(t)=\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$

X	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

例 $\varphi(t)$ 是随机变量 X 的特征函数. 则 $1-|\varphi(2t)|^2\leq 4(1-|\varphi(t)|^2)$

证：$\mathrm{Re}(1-\varphi(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}1-\cos tx\,dF(x)$

$1-\cos tx=2\sin^2\frac{tx}{2}\geq 2\sin^2\frac{tx}{2}\cos^2\frac{tx}{2}=\frac{1}{2}\sin^2 tx=\frac{1}{4}(1-\cos(2tx))$

$\mathrm{Re}(1-\varphi(2t))\leq 4\,\mathrm{Re}(1-\varphi(t))$ $|\varphi(t)|^2$ 也是特征函数.

故 $1-|\varphi(2t)|^2\leq 4(1-|\varphi(t)|^2)$

二. 常见分布的 c.f.

1. Bernoulli 分布

X	0	1
P	1-p	p

$\varphi(t)=E[e^{itX}]=1-p+p\cdot e^{it}$

2. 二项分布 $B(n,p)$ $\varphi(t)=(1-p+p\cdot e^{it})^n$

3. 指数分布 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}, x>0$

$\varphi(t)=\int_0^{+\infty}e^{itx}\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{+\infty}\lambda\cos(tx)e^{-\lambda x}dx+i\int_0^{+\infty}\lambda\sin(tx)e^{-\lambda x}dx$

$=\frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}+\frac{i\lambda t}{\lambda^2+t^2}=\frac{\lambda}{\lambda-it}$

4. $N(0,1)$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos tx+i\underbrace{\sin tx}_{\text{奇}})\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\varphi'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}-x\sin tx\, e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tx\, d e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cos tx\, e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-t\varphi(t)$$

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=-t\Rightarrow \ln\varphi(t)=-\frac{t^2}{2}+c\Rightarrow\varphi(t)=ce^{-\frac{t^2}{2}}\ \text{又}\ \varphi(0)=1\Rightarrow c=1\qquad\therefore\ \varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$Y\sim N(\mu,a^2)\quad Y=aX+\mu,\ X\sim N(0,1)$

$$\varphi_Y(t)=E[e^{itY}]=E[e^{it(aX+\mu)}]=e^{it\mu}\varphi_X(at)=e^{it\mu-\frac{(at)^2}{2}}$$

三.反转公式和唯一性定理

定理：X 的分布函数为$F(x)$，特征函数为$\varphi(t)$.

则对 $\forall a<b$. $\dfrac{F(b)+F(b-0)}{2}-\dfrac{F(a)+F(a-0)}{2}=\lim\limits_{T\to+\infty}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-T}^{T}\dfrac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi(t)dt$

证：$I(T)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-T}^{T}\dfrac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi(t)dt$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{itx}dF(x)\right)dt$$

$|e^{-i(a-b)t}-1|=\left|\int_0^{(b-a)t}e^{ix}dx\right|\le(b-a)t$

$$\left|\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{itx}\right|=\frac{|e^{-ibt}(e^{-i(a-b)t}-1)|}{|t|}\le\frac{|(b-a)t|}{|t|}=|b-a|$$

由Fubini定理

$$I(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{itx}dt\,dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^T\frac{e^{-it(a-x)}-e^{-it(b-x)}}{it}-\int_0^{-T}\frac{e^{-it(a-x)}-e^{-it(b-x)}}{it}dt\right)dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^T\frac{e^{-it(a-x)}-e^{-it(b-x)}}{it}-\frac{e^{it(a-x)}-e^{it(b-x)}}{it}dt\right)dF(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^T\frac{\sin t(x-a)}{t}-\frac{\sin t(x-b)}{t}dt\,dF(x)\qquad a<b$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & a>0\\ 0, & a=0\\ -\frac{\pi}{2}, & a<0\end{cases}=\operatorname{sgn}a\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{T\to+\infty}I_T=\int_{-\infty}^{a}0\,dF(x)+\int_{\{a\}}\frac{1}{2}dF(x)+\int_a^b 1\,dF(x)+\int_{\{b\}}\frac{1}{2}dF(x)+\int_b^{+\infty}0F(x)$$

$$=\frac{1}{2}(F(a)-F(a-0))+F(b-0)-F(a)+\frac{1}{2}(F(b)-F(b-0))$$

$$=\frac{F(b)+F(b-0)}{2}-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}$$

定理(唯一性)：分布函数由特征函数唯一确定.

证：设 C_F 表示 $F(x)$ 连续点全体. 任取 $a, b \in C_F$, $a<b$

$$F(b)-F(a)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi(t)dt$$. 取 $\{a_n\}\subset C_F$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$.

$\lim\limits_{n\to\infty}F(b)-F(a_n)=F(b)$ 唯一确定

若 $a\notin C_F$. 可找到一列 $\{b_n\}\in C_F$. $F(x)$ 右连续. $\lim\limits_{n\to\infty}F(b_n)=F(a)$

定理. 若特征函数 $\varphi(t)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|dt<\infty$, 则 $\varphi(t)$ 对应的分布函数 $F(x)$ 可导.

证：设 C_F 表示 $F(x)$ 连续点全体.

任取 $a\in R$. $\{b_n\}\downarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=a$, $b_n\in C_F$.

$$\begin{aligned}\left|F(b_n)-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}\right| &= \lim_{T\to+\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb_n}}{it}\varphi(t)dt\right| \\ &\le \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb_n}}{it}\varphi(t)\right|dt \\ &\le \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{|e^{-ita}|\cdot|1-e^{it(a-b_n)}|}{|it|}|\varphi(t)|dt \\ &\le \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}|a-b_n|\int_{-T}^{T}|\varphi(t)|dt\to 0 \quad (n\to+\infty)\end{aligned}$$

$$F(b_n)-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}\to F(a)-\frac{F(a)+F(a-0)}{2}=0 \Rightarrow F(a)=F(a-0),\ a\in C_F$$

$$\frac{F(a+\Delta x)-F(a)}{\Delta x}\ \ldots$$

hw: 5.8.5(e), 5.8.9, 5.9.2, 5.9.5, 5.9.8