《近世代数》第八次习题课 (初稿)

刘助教 2023.5.13

2:(1)$G=<x,y|x^5y^3=x^8y^5=1>$,G 是否平凡.
(2)$G=<x,y|xy^3=y^2x,x^2y=yx^3>$,$G$ 是否平凡.
解答:(1)$x^5y^3=x^8y^5\Longrightarrow x^3y^2=1=x^5y^3\Longrightarrow x^2y=1=x^3y^2\Longrightarrow xy=1=x^2y\Longrightarrow x=1$, 从而 $y=x=1$, G 平凡.
(2)$xy^3=y^2x,x^2y=yx^3\Longrightarrow x^{-1}y^2x=y^3,y^{-1}x^2y=x^3\Longrightarrow x^{-1}y^4x=y^6\Longrightarrow x^{-2}y^4x^2=x^{-1}y^6x=(x^{-1}y^2)y^4x=y^3(x^{-1}y^4x)=y^3y^6=y^9$, 从而 $y^9=(x^{-2})y^4x^2=yx^{-3}y^{-1}y^4(x^2)=yx^{-3}y^{-1}y^4yx^3y^{-1}=yx^{-3}y^4x^3y^{-1}$, 因此 $x^{-3}y^4x^3=y^9=x^{-2}y^4x^2$, 故 $xy^4=y^4x\Longrightarrow y^6=x^{-1}y^4x=y^4\Longrightarrow b^2=1\Longrightarrow b=1\Longrightarrow a=1$, 故 G 平凡.

5: 令 F_2 为集合 y_1,y_2 生成的自由群:
(1) 考虑自同态 $f:y_1\mapsto y_2,y_2\mapsto y_1y_2$, 令 $|*|$ 表示 F_2 中字的长度, 例如 $|y_1y_2|=2$, 证明 $lim_{k\to\infty}\frac{|f^{k+1}(y_1)|}{|f^k(y_1)|}=\lambda$, 其中 $\lambda=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
(2) 证明 F_2 中关于每个 y_i 的指数和都能被 n 整除的所有字全体 N 构成正规子群.
(3)$F_2/N\cong\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$.(提示: 需要考虑换位子)
解答:(1) 斐波那契数列
(2) 由于共轭作用上元素 y 不改变每个 y_i 的指数和, 因此 N 正规.
(3)$\forall x,y\in F_2,xyx^{-1}y^{-1}\in N$, 因此 F_2/N 是阿贝尔群: 又因为 $y_1^n,y_2^n\in N$, 因此 F_2/N 中元素具有 $y_1^iy_2^j(0\le i,j<n)$ 的形式且 $<y_1>\cap<y_2>=1$, 故 $F_2/N\cong<y_1>\times<y_2>\cong\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$.

6: (2) 令 G 为 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 生成的阿贝尔群, 证明 G 的任意子群 H 最多由 n 个元素生成.(提示: 若 $H\subset<x_2,\cdots,x_n>$, 归纳知成立. 若不然, 取 H 的元素 $x=m_1x_1+\cdots+m_nx_n$, 其中 $m_1>0$ 且最小, 说明 $H=<x,K>,K=H\cap<x_2,\cdots,x_n>$).
解答: 当 $n=1$ 时显然, 当 $n>1$ 时, 考虑归纳法. 若 $H\subset<x_2,\cdots,x_n>$ 则由归纳知成立. 若不然, 取 H 的元素 $x=m_1x_1+\cdots+m_nx_n$, 其中 $m_1>0$ 且最小.$\forall y=s_1x_1+\cdots+s_nx_n$, 存在整数 q,r $(0\le r<m_1)$ 使得 $s_1=qm_1+r$, 此时 $y-qx=rx_1+\cdots+(s_n-qm_n)x_n$, 与 m_1 的极小性矛盾, 因此 $r=0$, 从而 $H=<x,K>,K=H\cap<x_2,\cdots,x_n>$, 由于 K 最多由 $n-1$ 个元素生成, 所以 H 最多由 n 个元素生成.

(5)(选做)(i) 若 $rank(F)=3$,$b_1=9a_1+3a_2+6a_3,b_2=3a_1+3a_2,b_3=3a_1-3a_2+6a_3$. 将商群 F/K 写成循环群的直和.
(ii) 证明商群 F/K 有限当且仅当 $det(A)\neq 0$, 此时 $|F/K|=|det(A)|$.
解答:(i) 利用 (3)(iv). 对应矩阵可经过初等行列变换化为 $diag(3,6,0)$, 因此 $F/K\cong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}$.
(ii) 假设对应矩阵经过初等行列变换化为 $diag(d_1,\cdots,d_n)$, 则 F/K 有限等价于任意 d_i 非零, 即 $det(A)\neq 0$. 此时 $F/K\cong\mathbb{Z}_{d_1}\times\cdots\times\mathbb{Z}_{d_n}$, 从而 $|F/K|=d_1\times\cdots\times d_n=|det(A)|$.

7: 判断以下命题是否成立, 若不然则给出反例:

(1)$H_1\times H_2\cong K_1\times K_2$, 则 H_1 与某个 K_i 同构.
(2) 以下 $H_i\lhd G_i\ (i=1,2)$:
(i) 如果 $G_1\cong G_2$ 并且 $H_1\cong H_2$, 则 $G_1/H_1\cong G_2/H_2$.
(ii) 如果 $G_1\cong G_2$ 并且 $G_1/H_1\cong G_2/H_2$, 则 $H_1\cong H_2$.
(iii) 如果 $H_1\cong H_2$ 并且 $G_1/H_1\cong G_2/H_2$, 则 $G_1\cong G_2$.
解答: 全都不对, 以下给出反例
(1)$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{15}\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5\cong\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_5$
(2)(i) 令 $<a>\cong\mathbb{Z}_2,<b>\cong\mathbb{Z}_4,G_1=G_2=<a>\times<b>;H_1=<a>\cong\mathbb{Z}_2\cong<2b>=H_2$, 此时 $G_1/H_1\cong\mathbb{Z}_4,G_2/H_2\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 两者不同构.
(ii) 同 (i) 中 G_1,G_2, 令 $H_1=<a>\times<2b>\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,H_2=<b>\cong\mathbb{Z}_4$, 此时 $G_1/H_1\cong\mathbb{Z}_2\cong G_2/H_2$.
(iii) 同 (i) 中 $<a>,<b>$ 并取 $<c>\cong<a>$, 令 $G_1=<a>\times<c>\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,G_2=<b>$ $,H_1=<a>\cong\mathbb{Z}_2,H_2=<2b>\cong\mathbb{Z}_2$, 此时 $G_1/H_1\cong\mathbb{Z}_2\cong G_2/H_2$.

8:$S_3,\mathbb{Z},\mathbb{Z}_{p^n}\ (n\geq 1,p\ prime)$ 都不能写成它们真子群的乘积.
解答: 对于 S_3, 其非平凡子群同构于 $\mathbb{Z}_2$ 或 $\mathbb{Z}_3$, 由于 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ 是交换群, 从而知不可分解性.
对于 $\mathbb{Z}$, 其非平凡子群同构于 $\mathbb{Z}$, 从而若 $\mathbb{Z}\cong\prod_{i\in I}\mathbb{Z}$, 则有子群同构于 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, 其 $rank$ 大于 1, 矛盾.
对于 $\mathbb{Z}_{p^n}$, 其非平凡子群同构于 $\mathbb{Z}_{p^k}(0<k<n)$, 从而若 $\mathbb{Z}_{p^n}\cong\mathbb{Z}_{p^{n_1}}\times\cdots\mathbb{Z}_{p^{n_r}}$, 则右侧无 p^n 阶元, 而左侧有, 矛盾.

13: 若 A,B,C 为阿贝尔群, 试赋予 $Hom(A,B)$ 阿贝尔群结构, 并解决以下问题:
(1) 求 $Hom(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n),Hom(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Q}),Hom(\mathbb{Z},A),Hom(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.
(2) 证明 $Hom(A\oplus B,C)\cong Hom(A,C)\oplus Hom(B,C)$ 以及 $Hom(C,A\oplus B)\cong Hom(C,A)\oplus Hom(C,B)$.
(3) 求 $Hom(\mathbb{Z}_{114}\oplus\mathbb{Z}_{514},\mathbb{Z}_{1919}\oplus\mathbb{Z}_{810})$.
解答:$\forall f,g\in Hom(A,B),\forall a\in A$, 定义其加法为 $(f+g)(a)=f(a)+g(a)$, 取逆为 $(-f)(a)=-f(a)$, 易知其构成阿贝尔群.
(1) 只用看生成元的像即可.
$\forall f\in Hom(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n),mf(1)=f(m)=f(0)=0\Longrightarrow n|mf(1)\Longrightarrow\frac{n}{(n,m)}|\frac{m}{(n,m)}f(1)\Longrightarrow\frac{n}{(n,m)}|f(1)$, 从而可取 $f_k(1)=\frac{kn}{(n,m)}(k=0,\cdots,(n,m))$, 易验证 $Hom(A,B)\cong\mathbb{Z}_{(n,m)}$.
显然 $Hom(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Q})=0,Hom(\mathbb{Z},A)\cong A$.
$\forall f\in Hom(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),mf(1)=f(m)=f(0)=0\Longrightarrow mf(1)=k\Longrightarrow f(1)=\frac{k}{m}(k=0,\cdots,k-1)\Longrightarrow Hom(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}_m$.
(2) 考虑自然嵌入映射 $i_A:A\mapsto A\oplus B,a\mapsto(a,0);i_B:B\mapsto A\oplus B,b\mapsto(0,b);p_A:A\oplus B\mapsto A,(a,0)\mapsto a;p_B:A\oplus B\mapsto B,(b,0)\mapsto b$, 定义映射 $\alpha:Hom(A\oplus B,C)\mapsto Hom(A,C)\oplus Hom(B,C),f\mapsto fi_A\oplus fi_B$ 以及 $\beta:Hom(A,C)\oplus Hom(B,C)\mapsto Hom(A\oplus B,C),f\oplus g\mapsto fp_A+gp_B$, 易验证 $\alpha\beta=id,\beta\alpha=id$. 从而 $Hom(A\oplus B,C)\cong Hom(A,C)\oplus Hom(B,C)$, 余下类似.
(3)$Hom(\mathbb{Z}_{114}\oplus\mathbb{Z}_{514},\mathbb{Z}_{1919}\oplus\mathbb{Z}_{810})\cong Hom(\mathbb{Z}_{114},\mathbb{Z}_{1919})\oplus Hom(\mathbb{Z}_{114},\mathbb{Z}_{810})\oplus Hom(\mathbb{Z}_{514},\mathbb{Z}_{1919})\oplus Hom(\mathbb{Z}_{514},\mathbb{Z}_{810})\cong\mathbb{Z}_{19}\times\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_2$.

14: 设 N,H 为群, 给定群同态 $\theta:H\mapsto Aut(N)$. 定义它们的半直积为 $G=N\rtimes_\theta H$ 为如下定义的群:
(i) 作为集合 G 为 $N\times H$.(ii) 二元运算为:$(n_1,h_1)(n_2,h_2)=(n_1\theta(h_1)(n_2),h_1h_2)$, 其中 $n_i\in N,h_i\in H$.
(1) 验证 $N\rtimes_\theta H$ 为群且 $G/N\cong H$.
(2) 若 H 为 G 的子群,N 为 G 的正规子群, 且满足 $G=NH,H\cap N=\{e\}$, 则 $G=N\rtimes_\theta H$, 其中

θ 为共轭.
(3) 构造 θ 使得 $D_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$ $(n \geq 2)$,$S_n \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$ 以及非交换 p^3 阶群 (有或者没有 p^2 阶元素).
解答: 参考 [https://jmilne.org/math/CourseNotes/gt.html] chapter3 'Semidirect products'.