Lec16 Note of Abstract Algebra

Xuxuayame

日期：2023 年 5 月 6 日

我们回忆，对 S 为集合，$\mathbb{Z}(S) = F\langle S\rangle/\langle x_i x_j x_i^{-1} x_j^{-1},\ x_i, x_j \in S\rangle = \langle S \mid x_i x_j = x_j x_i,\ x_i, x_j \in S\rangle$，称为由 S 生成的自由 Abel 群。

定义 5.3. 设 A, B 为 Abel 群，

$$A \oplus B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \simeq A \times B,$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2, b_1 b_2)$$

称为 A 与 B 的**直和**。

$A_i,\ i \in I$ 为一族 Abel 群，则

$$\prod_{i\in I} A_i \geq \bigoplus_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in A_i,\ \forall\, i,\ \text{只有有限个} a_i \neq 1\}$$

称为 $A_i,\ i \in I$ 的**直和**。

评论. 从猫猫论[1]的角度来说，直积指的是这样一个元素 $\prod_{i\in I} X_i$ 使得下面的图表始终交换：

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} X_i \arrow[d, "p_i"'] & G \arrow[l, "f"'] \arrow[dl, "f_i"] \\
X_i &
\end{tikzcd}$$

换句话讲，$\forall\, \{f_i \colon G \to X_i,\ i \in I\} \Rightarrow \exists!\, f \colon G \to \prod_{i\in I} X_i$，使得 $f_i = p_i \circ f$。

相应地有余积，或者叫自由积 **(Free product)**[2]

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{i\in I} X_i \arrow[r, "f"] & G \\
X_i \arrow[u, "l_i"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

或，$\forall\, \{f_i \colon X_i \to G,\ i \in I\} \Rightarrow \exists!\, f \colon \coprod_{i\in I} X_i \to G$，使得 $f_i = f \circ l_i,\ \forall\, i \in I$。

事实上

$$A \simeq \widetilde{A} = \{(a, 1_B) \mid a \in A\} \leq A \oplus B,$$
$$B \simeq \widetilde{B} = \{(1_A, b) \mid b \in B\} \leq A \oplus B.$$

[1]就是范畴论，category。

[2]它是 Grp 中的余积。

于是

$$A \oplus B = \begin{cases} \widetilde{A} \cdot \widetilde{B} \\ \widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \{(1_A, 1_B)\} \end{cases} .$$

特别考虑 $G_1, G_2 \le G$，那么要使

$$f\colon G_1 \times G_2 \to G,$$
$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$$

为群同构，等价于以下几条：

- $G = G_1 G_2$；
- $G_2 \le Z_G(G_1)$ $(\Leftrightarrow G_1 \le Z_G(G_2))$；
- $G_1 \cap G_2 = \{1_G\}$ $(\Rightarrow G_1 \triangleleft G,\ G_2 \triangleleft G)$。

此时称 G 为两个子群 G_1, G_2 的直积 (如果是 Abel 群，则说直和)。

引理 5.2. $G_1, \cdots, G_n \triangleleft G$，则 *TFAE*:

(1) $G \simeq G_1 \times G_2 \times \cdots G_n,\ g_1 \cdots g_n \leftarrow\!\shortmid (g_1, \cdots, g_n)$；

(2) $\forall\, g \in G,\ \exists!\, (g_1, \cdots, g_n) \in G_1 \times \cdots \times G_n$ 使得 $g_1 g_2 \cdots g_n = g$；

(3) $G = G_1 G_2 \cdots G_n$，且 $G_1 \cdots G_{i-1} \cap G_i = \{1\}$。

证明. 这里仅讨论 $n = 2$ 的情形。

(1)⇒(2)：平凡。

(2)⇒(3)：显然 $G = G_1 G_2$，若 $g_0 \in G_1 \cap G_2$，则 $\forall\, g \in G,\ \exists!\, (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ s.t. $g = g_1 g_2 = g_1 g_0 g_0^{-1} g_2 \Rightarrow g_0 = 1$。从而 $G_1 \cap G_2 = \{1\}$。

(3)⇒(1)：由于 $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = (g_1 g_2 g_1^{-1}) g_2^{-1} \in G_2$，同理也在 G_1 中，从而 $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} = 1 \Rightarrow g_1 g_2 = g_2 g_1,\ \forall\, g_1 \in G_1,\ g_2 \in G_2$，故 $G_1 \le Z_G(G_2)$，于是群同构成立。 □

对于 $\bigoplus\limits_{i \in I} X_i$，若 $X_i \simeq X,\ \forall\, i$，则也可记为 $\bigoplus\limits_{i \in I} X$ 或 $X^{\oplus I}$。那么

$$\mathbb{Z}^{\oplus I} := \bigoplus_{i \in I} X_i,\ X_i \simeq \mathbb{Z},\ \forall\, i.$$

定理 5.3. $\varnothing \neq I$ 为集合，

(1) $\mathbb{Z} I \simeq \mathbb{Z}^{\oplus I}$；

(2) $m \neq n \Rightarrow \mathbb{Z}^m \not\simeq \mathbb{Z}^n$，这里 $\mathbb{Z}^m$ 指的是 m 个 $\mathbb{Z}$ 的直和。

证明. (1) $\mathbb{Z} I = \langle I \mid ij = ji, \forall\, i, j \in I \rangle$, $\mathbb{Z}^{\oplus I} = \{(n_i)_{i \in I} \mid n_i \in \mathbb{Z}, \forall\, i \in I,$ 仅有有限个$n_i \neq 0\}$。

记 $e_i \in \mathbb{Z}^{\oplus I},\ (e_i)_i = 1,\ (e_i)_j = 0,\ j \neq i$，则 $(n_i)_{i \in I} = \sum\limits_{i \in I} n_i e_i$ 为有限和。则将 $i \mapsto e_i$

唯一扩充为满同态[3]：

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}I &\twoheadrightarrow \mathbb{Z}^{\oplus I}, \\ i &\mapsto e_i. \end{aligned}$$

于是设 S 为形如 $i_1^{n_{i_1}} \cdots i_j^{n_{i_j}}$ 的文字组成的集合，那么 S 到 $\mathbb{Z}I$ 存在满射，而 S 到 $\mathbb{Z}^{\oplus I}$ 为单射，因为 $\sum_{i\in I} n_i e_i = \sum_{i\in I} m_i e_i \Leftrightarrow m_i = n_i, \forall\, i$。于是 $\mathbb{Z}I \simeq \mathbb{Z}^{\oplus I}$。

□

定义 5.4. 设 $\{x_i \in F \mid i \in I\}$ 为自由 Abel 群 F 的子集，满足 F 中任一元素可以唯一写成 x_i 的整线性组合，则称 $\{x_i \mid i \in I\}$ 为 F 的一组**基 (Basis)**，$|I|$ 称为 F 的**秩 (Rank)**。

定理 5.4. *F 为有限生成自由 Abel 群，$\{0\} \neq A$ 为 F 的子群，则存在 F 的一组基 $x_1, \cdots, x_n$, $n = \mathrm{rank} F$，以及正整数 $1 \leq r \leq n$, $d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r$，使得 $d_1x_1, \cdots, d_rx_r$ 为 A 的一组基。*

[3]这里实际上是先从集合映射 $I \to \mathbb{Z}^{\oplus I}$ 扩充为同态 $F(S) \to \mathbb{Z}^{\oplus I}$，然后再根据 $\mathbb{Z}^{\oplus I}$ 为 Abel 群得到同态分解成的满同态 $\mathbb{Z}(S) \to \mathbb{Z}^{\oplus I}$。