多缝衍射—光栅

1. 光栅的概念

任何具有周期性的空间结构或光学性能（透射率、折射率）的衍射屏→光栅。

2. 光栅的种类

透射光栅、反射光栅

黑白光栅、正弦光栅

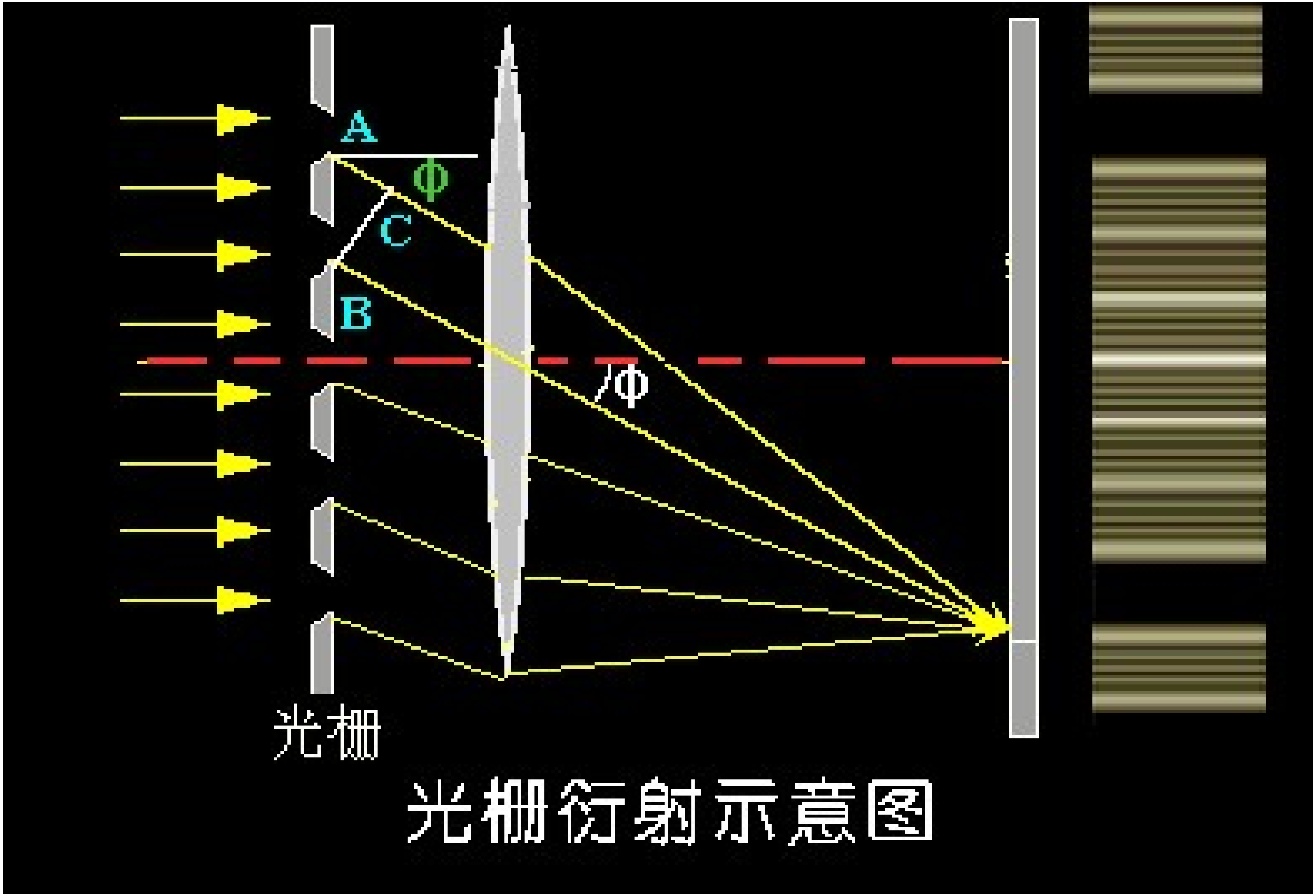
一维, 二维, 三维

3. 光栅常数 $d = a+b$ 是光栅空间周期性的表示

普通光栅刻线为数十条/mm – 数千条/mm

用电子束刻制可达数万条/mm

光谱分析

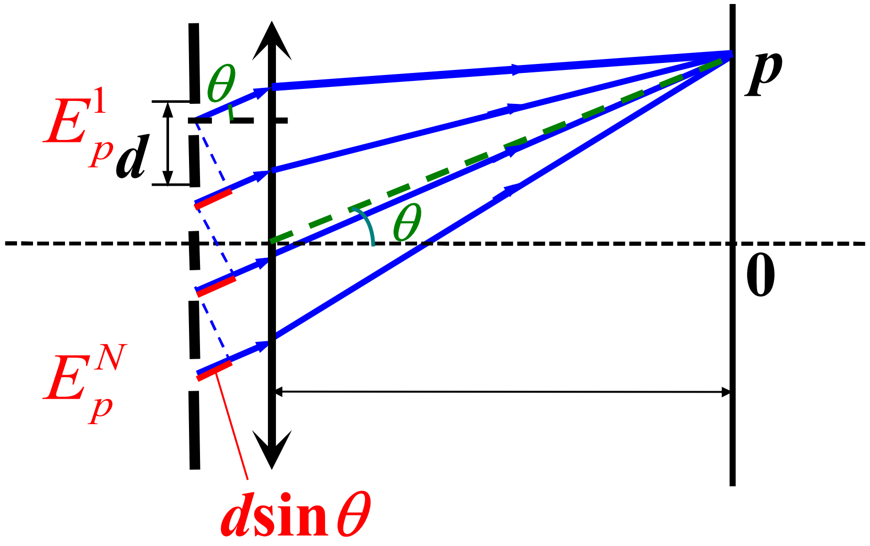

A
Φ
C
B
Φ
光栅
光栅衍射示意图

光栅夫琅和费衍射的光强公式　　复振幅法

第i个缝对p点的复振幅贡献 $E_p^i = E_{0单}^i \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

相邻两束光的位相差相同 $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$

$$\begin{cases} E_p^1 = E \\ E_p^2 = Ee^{i\Delta\varphi} \\ E_p^3 = Ee^{2i\Delta\varphi} \\ \cdots \\ E_p^N = Ee^{i(N-1)\Delta\varphi} \end{cases} \qquad E = E_{0单}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$



$$E_p = E_{0单}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\left(1 + e^{i\Delta\varphi} + e^{2i\Delta\varphi} + \cdots + e^{i(N-1)\Delta\varphi}\right)$$

$$E_p = E_{0单}\frac{\sin\alpha}{\alpha}(1+e^{i\Delta\varphi}+e^{2i\Delta\varphi}+\cdots+e^{i(N-1)\Delta\varphi})$$

$$= E_{0单}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1-(e^{i\Delta\varphi})^N}{1-e^{i\Delta\varphi}} = E_{0单}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1-e^{iN\Delta\varphi}}{1-e^{i\Delta\varphi}}$$

$$I_p = E_pE_p^* = (E_{0单}\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2\cdot\frac{1-e^{iN\Delta\varphi}}{1-e^{i\Delta\varphi}}\frac{1-e^{-iN\Delta\varphi}}{1-e^{-i\Delta\varphi}}$$

$$= (E_{0单}\frac{\sin\alpha}{\alpha})^2\cdot\frac{2-(e^{iN\Delta\varphi}+e^{-iN\Delta\varphi})}{2-(e^{i\Delta\varphi}+e^{-i\Delta\varphi})}$$

$$e^{ix}+e^{-ix}=2\cos x \qquad \cos x = 1-2\sin^2(x/2)$$

$$I_p = I_{0单}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2(N\Delta\varphi/2)}{\sin^2(\Delta\varphi/2)}$$

$$= I_{0单}\underline{\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}\,\underline{\left(\frac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}\right)^2}$$

$$\beta = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

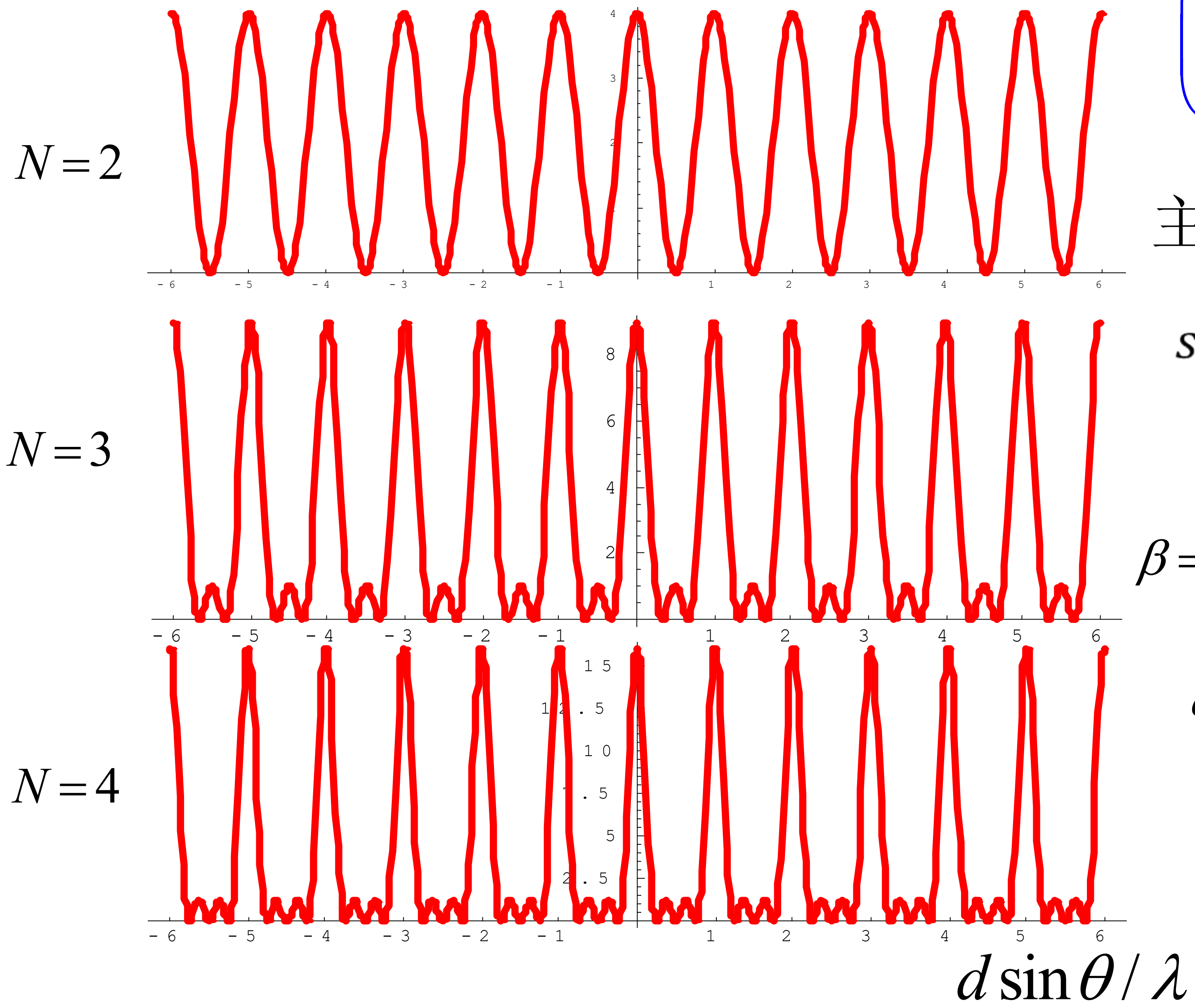
$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$: 单缝衍射因子

$\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$: 缝间干涉因子

多光束干涉因子

缝间干涉因子的特点

$$\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$



主极大

$$\sin N\beta = 0$$
$$\sin\beta = 0$$

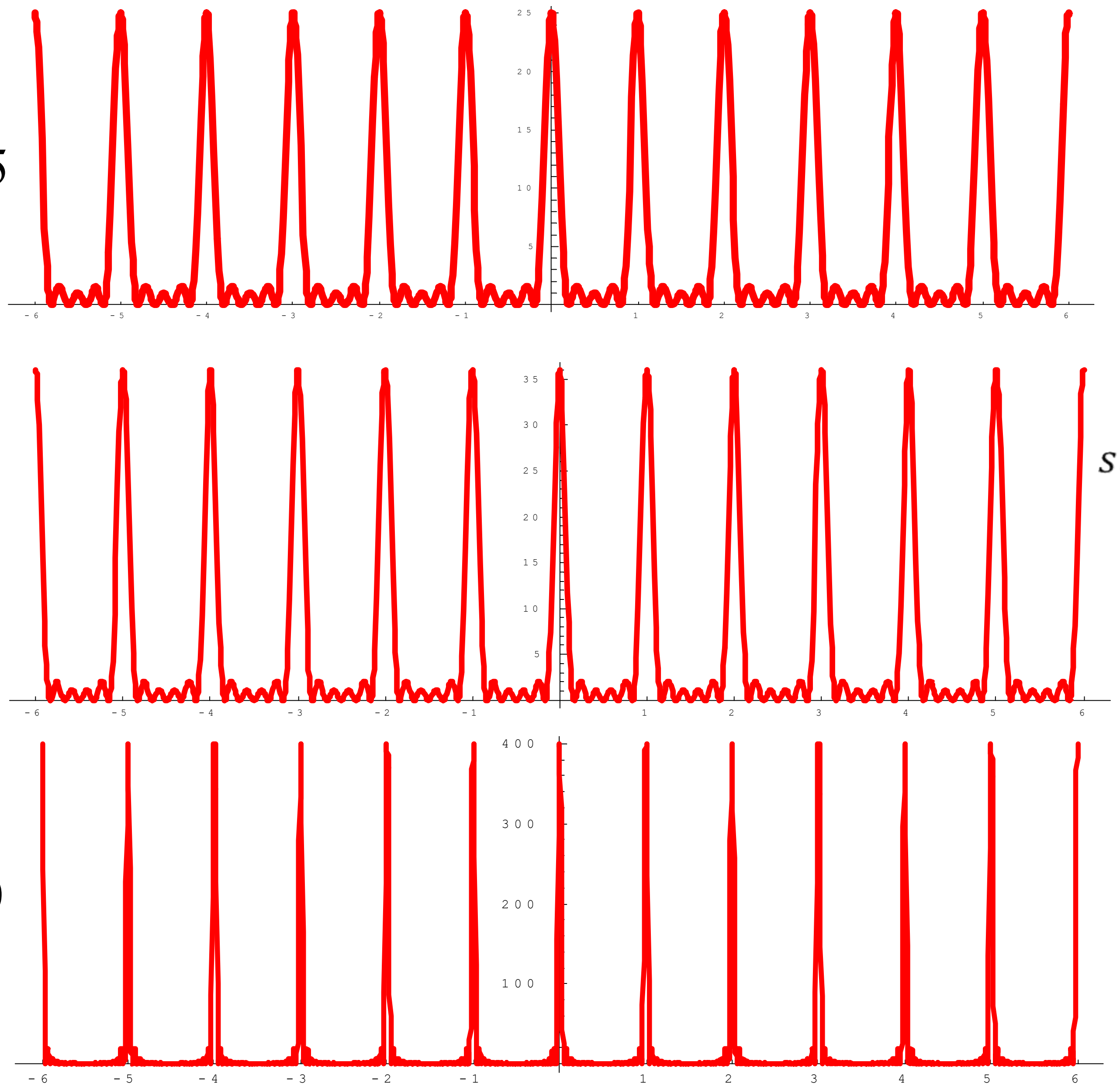
$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta = k\pi$$

$$d\sin\theta = k\lambda$$

$N=5$

$N=6$

$N=20$



$d\sin\theta/\lambda$

零点位置

$$sinN\beta = 0$$
$$sin\beta \neq 0$$
$$\beta = \left(k + \frac{m}{N}\right)\pi$$
$$sin\theta = \left(k + \frac{m}{N}\right)\lambda/d$$

$N-1$个暗纹

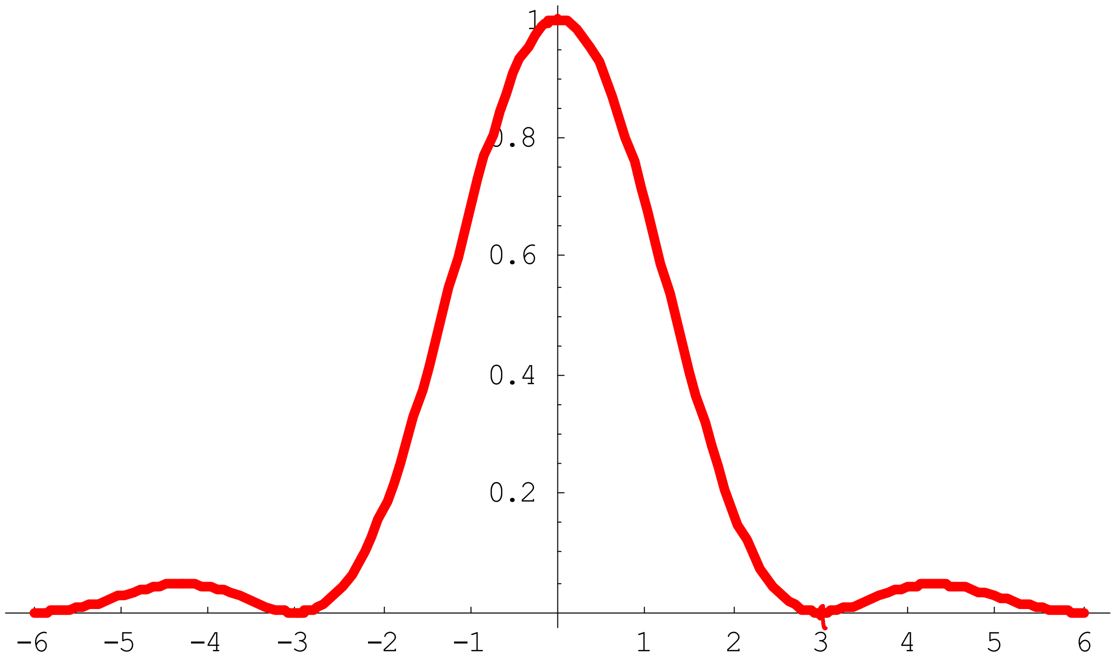
$N-2$个亮纹

单缝衍射因子

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi \mathsf{a}}{\lambda}\sin\theta$$

$$a\sin\theta = n\lambda$$



$$d\sin\theta/\lambda$$

$$d = 3\mathsf{a}$$

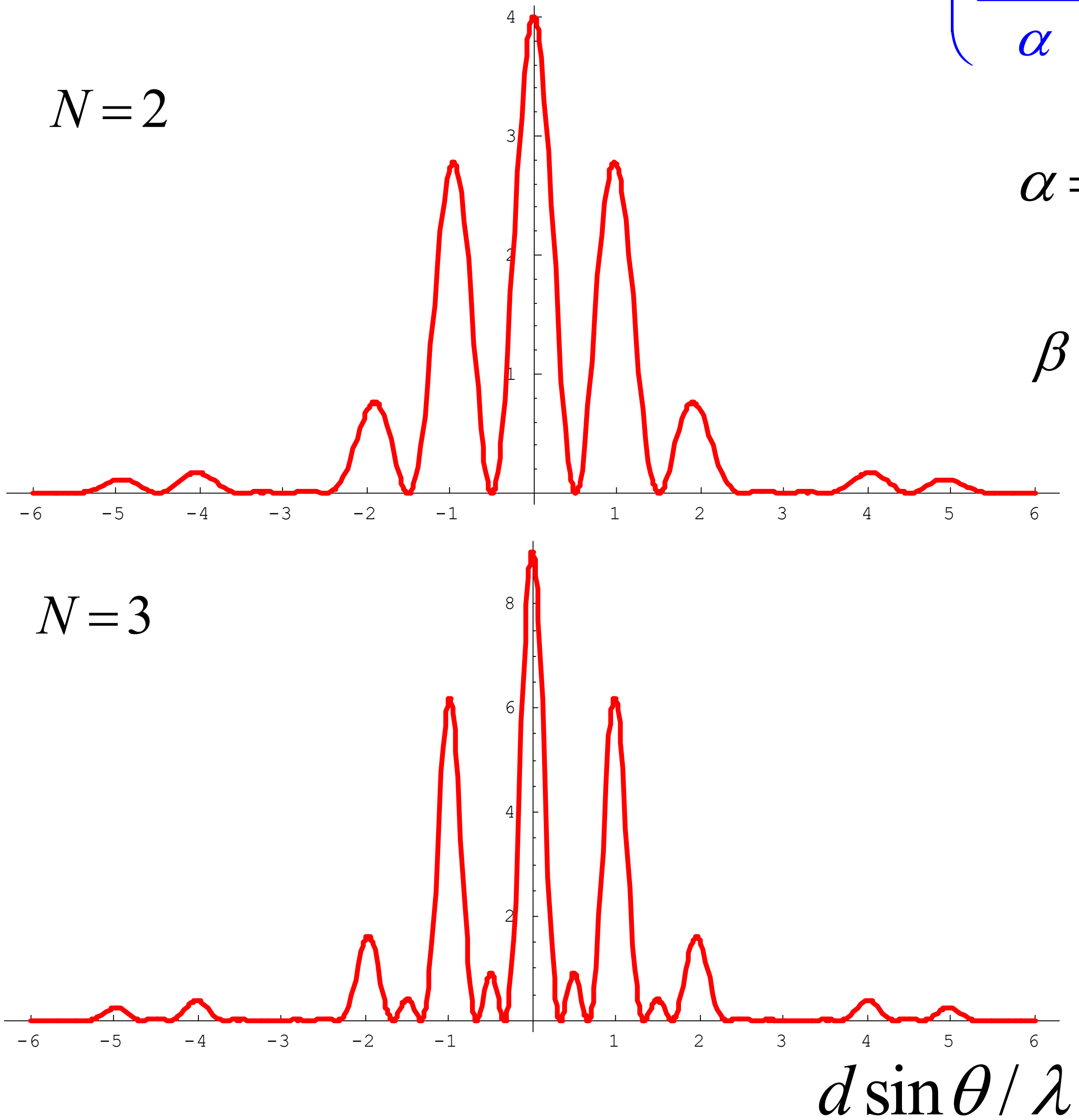
多缝干涉

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

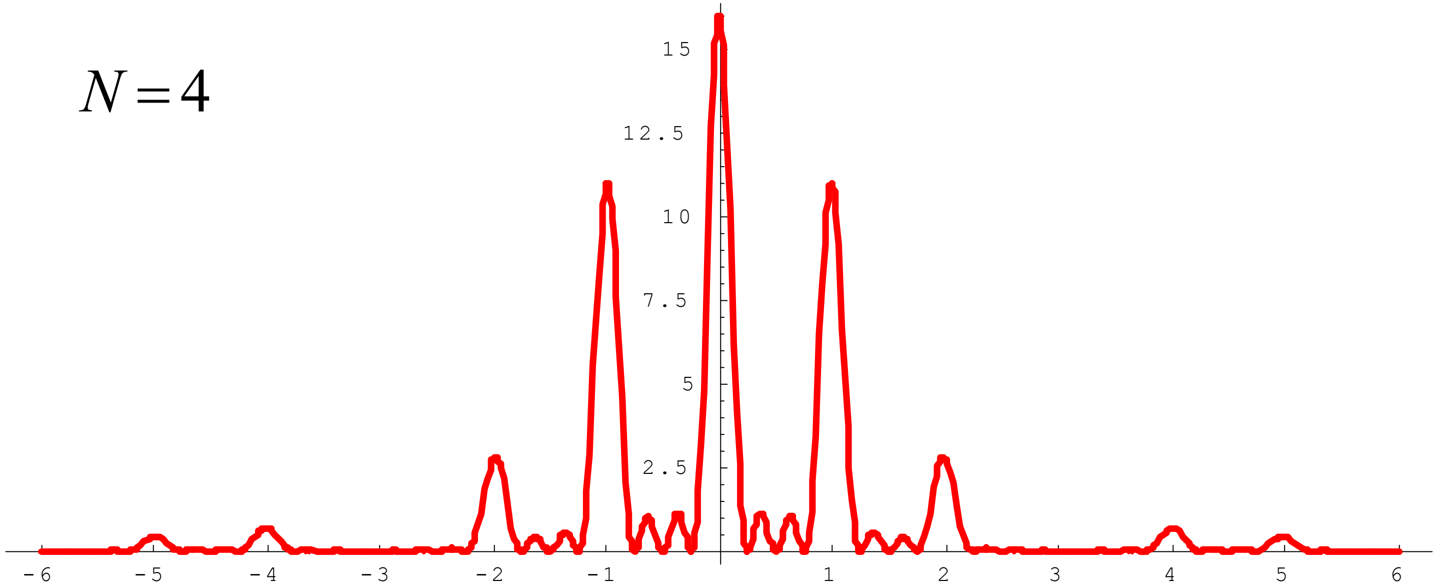
$$\alpha=\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta$$

$$\beta=\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

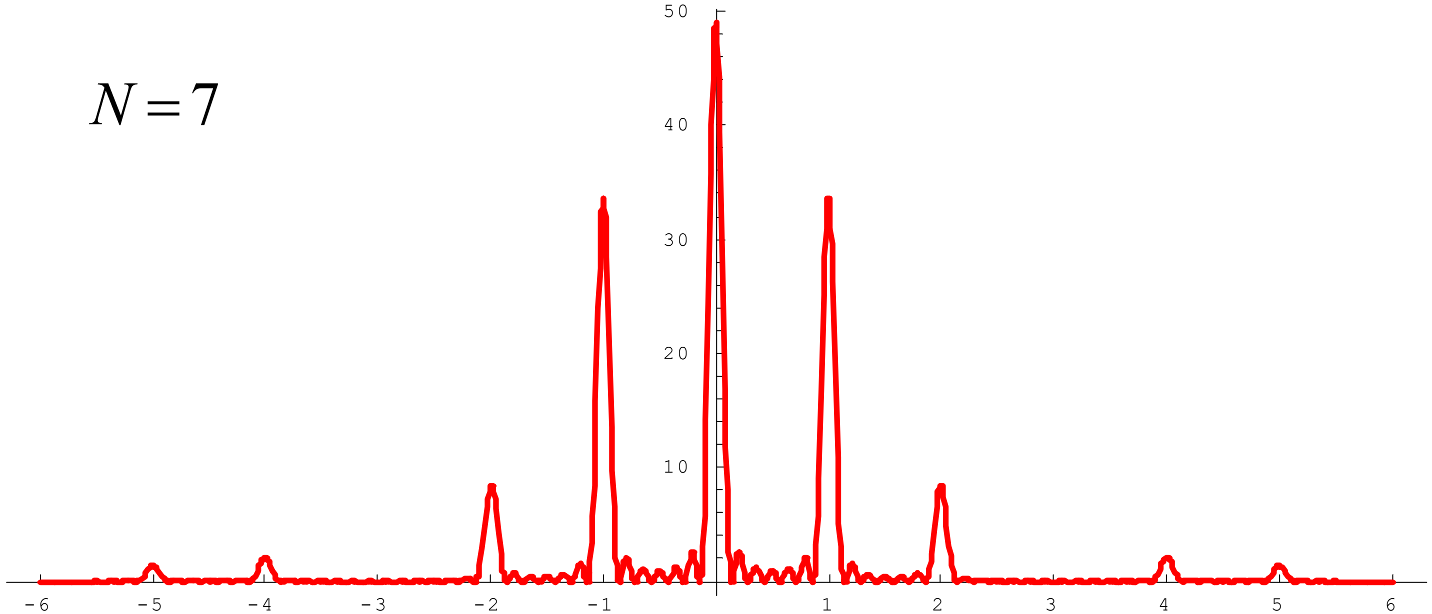
$$d=3a$$



$N = 4$



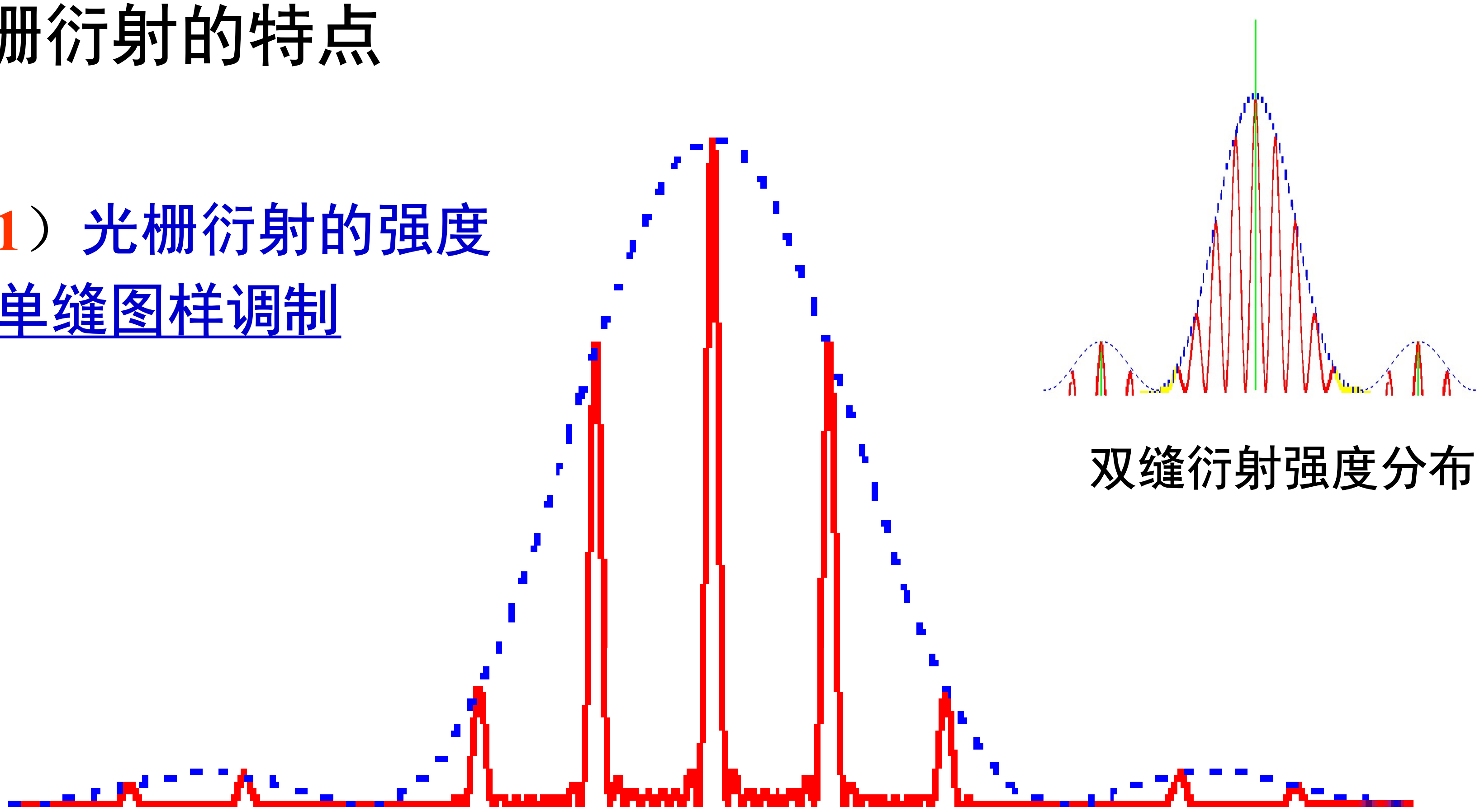
$N = 7$



光栅衍射的特点

（1）光栅衍射的强度

被单缝图样调制

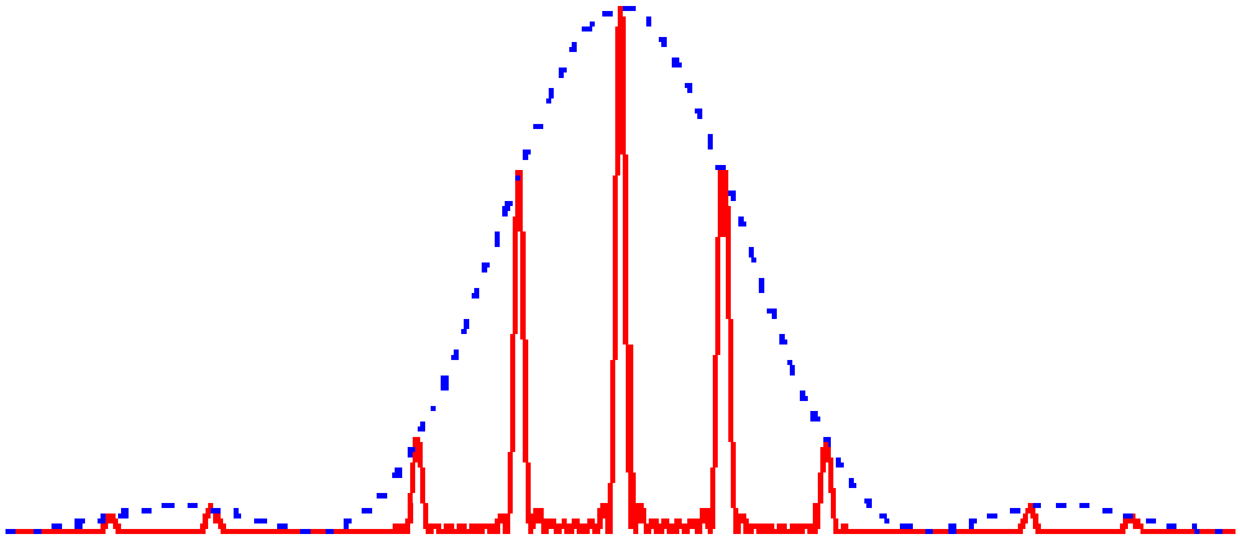


双缝衍射强度分布

光栅衍射强度分布

$$I_\theta = I_{0单}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

（2）主极强是明亮纤细的亮纹，相邻亮纹间是一片宽广的暗区，暗区中存在一些微弱的明条纹，称次极强。



（3）主极强是各缝出来的衍射光干涉而成的，其位置：

$$\sin\beta = 0 \quad \text{and} \quad \sin(N\beta) = 0$$

$$\boxed{d\sin\theta = k\lambda, (k = 0, \pm 1, \pm 2\cdots)\ \max}$$ 光栅方程

主极强是各缝出来的衍射光干涉而成的←缝间干涉因子决定

$$\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$$

$$\beta = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

$$\sin N\beta = 0, \sin\beta = 0 \qquad \sin N\beta / \sin\beta = N$$

$$\boxed{\sin\theta = k\frac{\lambda}{d}}$$

在衍射角满足该式的方向上，出现一个主极强。位置与缝数N无关，强度是单缝在该方向强度的N^2倍

主极强的数目 $\quad |\sin\theta| < 1 \Rightarrow |k| < \dfrac{d}{\lambda}$

当Nβ等于π的整数倍，而β不是π的整数倍

$$\sin N\beta = 0, \sin\beta \neq 0 \qquad \sin N\beta / \sin\beta = 0$$

$$\beta = (k + \frac{m}{N})\pi$$

缝间干涉因子的零点

$$\boxed{\sin\theta = (k + \frac{m}{N})\frac{\lambda}{d}}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots; m = 1, \cdots, N-1$$

每两个主极强之间有（N-1）条暗线（零点）

相邻暗线间有一个次极强，故共有（N-2）个次极强

（4）主极强特别明亮而且尖细，是因为缝多。

每个主极强的宽度是以它两侧的暗线为界，它的中心到邻近的暗线之间的角距离，为该级的半角宽度 $\Delta\theta_k$

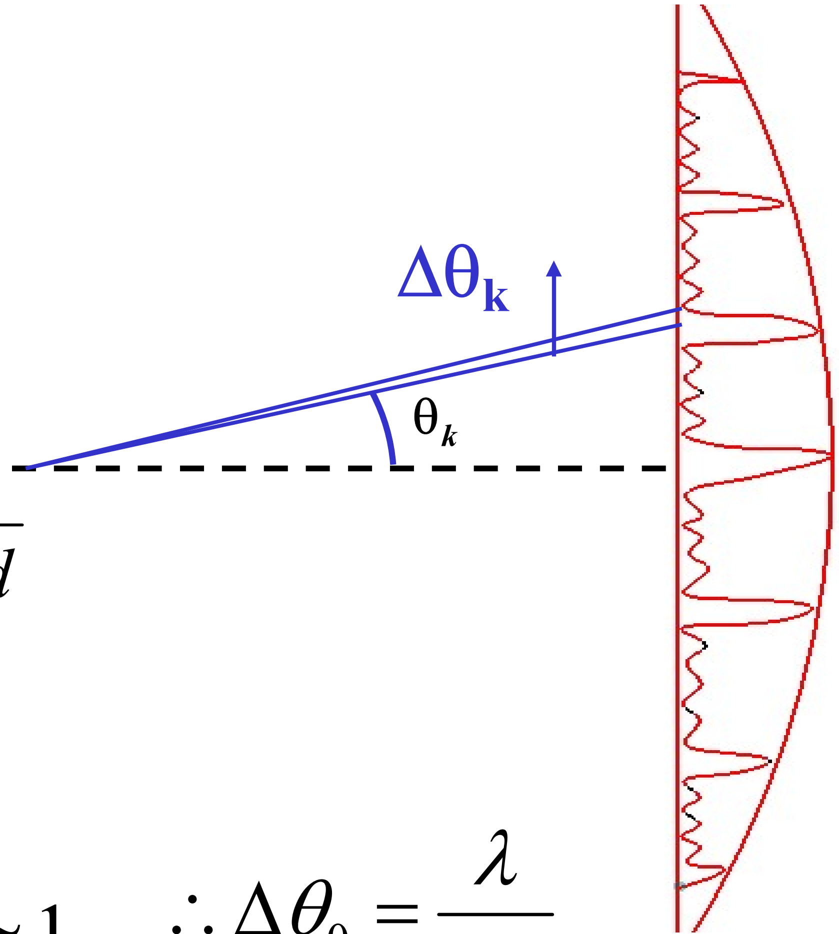
$$\sin\theta_k = k\frac{\lambda}{d}$$

$$\sin(\theta_k + \Delta\theta_k) = (k + \frac{1}{N})\frac{\lambda}{d}$$

$$\sin(\theta_k + \Delta\theta_k) - \sin\theta_k$$

$$\approx (\sin\theta_k)'\Delta\theta_k = \cos\theta_k \cdot \Delta\theta_k = \frac{\lambda}{Nd}$$

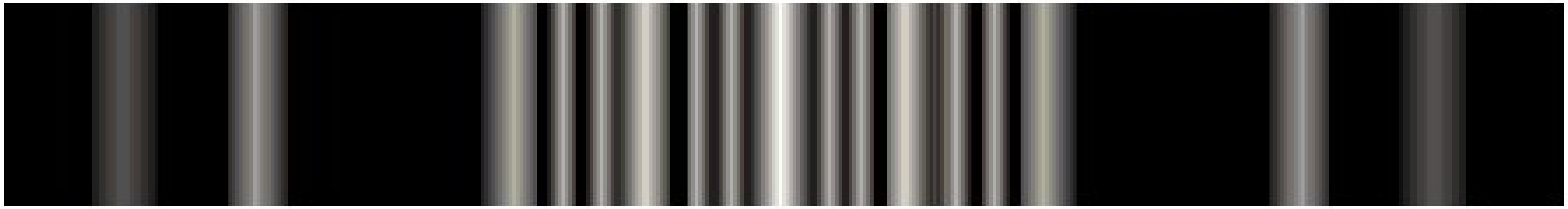
$$\Delta\theta_k = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}$$



中央主极大及偏离屏中心点不远的主极强

$$\cos\theta \approx 1 \qquad \therefore \Delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}$$

（5）缺级现象：



干涉明纹位置：　$d\sin\theta = \pm k\lambda,\ k = 0,1,2,\cdots$

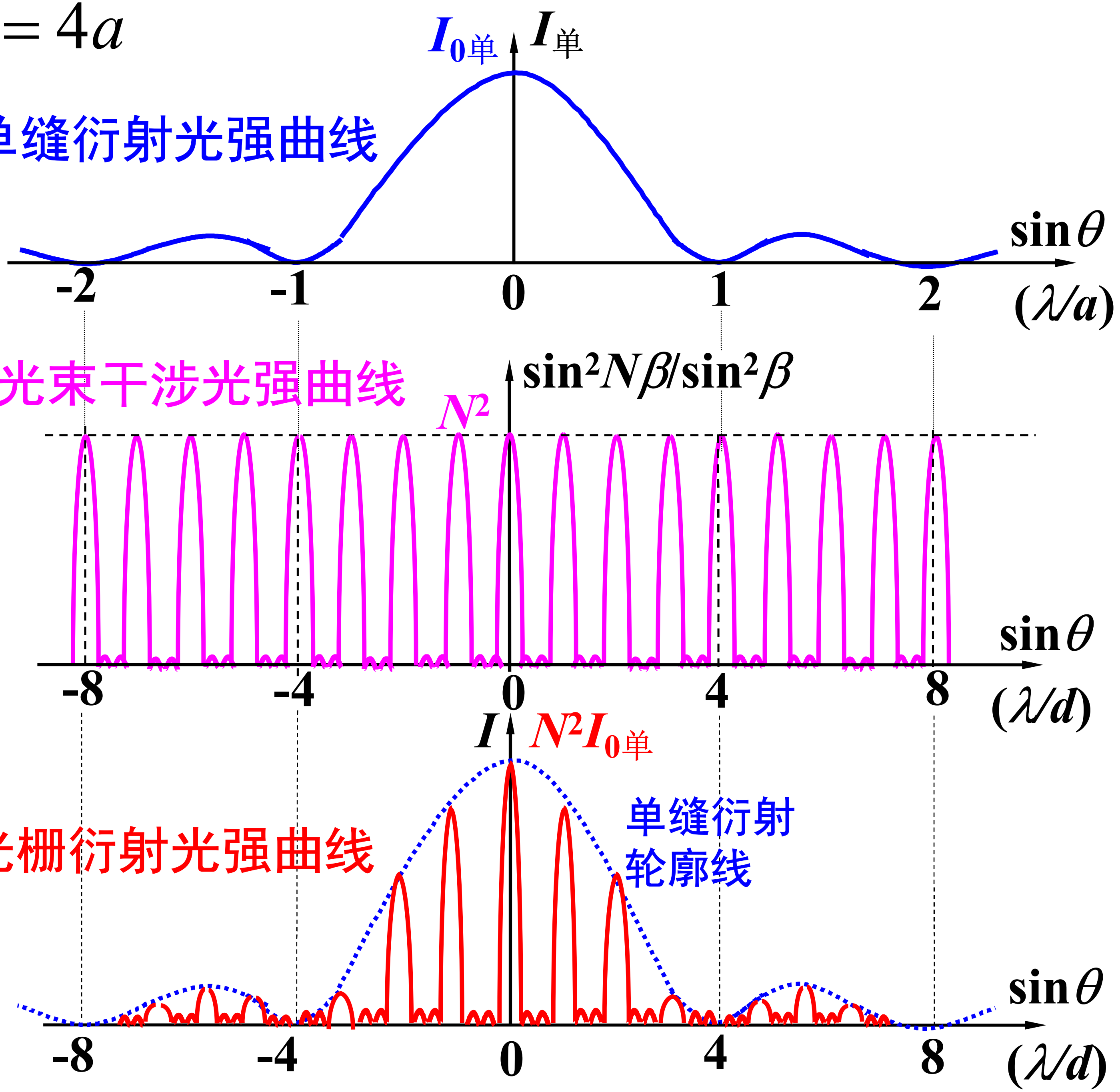
衍射暗纹位置：　$a\sin\theta = \pm k'\lambda,\ \ k' = 1,2,3,\cdots$

$$\frac{d}{a} = \frac{k}{k'},\ k = \frac{d}{a}k'$$

此时在应该干涉加强的位置上没有衍射光到达，从而出现缺级。

例如 $d = 4a$，则缺±4级，±8级…

例 $d=4a$



I0单
I单
单缝衍射光强曲线
sinθ
-2
-1
0
1
2
(λ/a)
多光束干涉光强曲线
sin²Nβ/sin²β
N²
sinθ
-8
-4
0
4
8
(λ/d)
I
N²I0单
单缝衍射
轮廓线
光栅衍射光强曲线
sinθ
-8
-4
0
4
8
(λ/d)

单缝衍射因子的作用：

影响强度在各级主极强间的分配
调制缝间干涉强度 ⇨ **缺级现象**
不改变主极强的位置和半角宽度

缝间干涉因子的作用：

$$\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 \qquad \beta=\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

主极强的位置（光栅方程）$\boxed{d\sin\theta=k\lambda}$

主极强的半角宽度 $$\boxed{\Delta\theta_k=\frac{\lambda}{Nd\cos\theta_k}}$$