思考题讨论

- 思考题2.7 如何理解边界上U连续与$\boldsymbol{E}$的切向分量连续的等价性？

$$U\text{连续}\rightarrow E_t\text{连续}\surd$$

$$E_t\text{连续}\rightarrow U\text{连续}?$$

第十讲 2022-03-24

第2章 静电场中的导体和电介质

§ 2.1 物质的电性质

§ 2.2 静电场中的导体

§ 2.3 电容与电容器

§ 2.4 电介质

§ 2.5 极化强度矢量$\boldsymbol{P}$

§ 2.6 电介质中静电场的基本定理

§ 2.7 边值关系和唯一性定理

§ 2.8 电像法

唯一性定理证明

- 设存在两组解$\{U_1, \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{D}_1\}$和$\{U_2, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{D}_2\}$满足边界条件和附加条件。
- 由于静电场基本方程为线性方程，所以$\{-U_2, -\boldsymbol{E}_2, -\boldsymbol{D}_2\}$必然满足负的边界条件，即原边界条件中所有量变号而得到的边界条件。
- 由叠加原理，$\{U_1-U_2, \boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2\}$满足两种边界条件叠加后的零边界条件，例如$U_S= U_{S1}-U_{S2} =0$。
- 只要能证明零边界条件下只存在零解，即U=0, $\boldsymbol{E}$=0, $\boldsymbol{D}$=0, 则$U_1=U_2, \boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{D}_2$，两组解相同，唯一性定理成立。

1) 给定每个导体电势U_i的情形

- 新边界条件是U_S=0，且每个导体的电势为零。
- 由于附加条件要求导体之外的区域无自由电荷，所以***D***线只可能起、止于导体和*S*边界。
- 但由于真空和各向同性介质中***D***线//***E***线，电势沿***D***线必然下降，所以***D***线不可能起止于电势同为零的导体和*S*边界。
- 唯一结局：*S*内无***D***线，***D***=0，进而***E***=0，*U*=0。

2) 给定每个导体的电量q_i的情形

- 新边界条件是U_S=0，且每个导体的电量为零。
- 若某些导体电势非零，其中必然至少有一导体的电势最高且大于零或者最低且小于零。所以该导体上的***D***线或者全部发出，或者全部进入。
- 作贴近且包围该导体的高斯面，则导体上带正电或负电，与新边界条件矛盾。
- 可见所有导体的电势为零，又回到第一个情形，仍然对应零解。

几点说明

- 唯一性定理提出了定解的充分必要条件，对于解决实际问题有重要意义。
- 求解时，先判断问题的边界条件是否足够，当满足必要的边界条件时，解是唯一的。
- 对于许多问题，常需要针对具体特点提出尝试解，如果尝试解能够满足静电学基本原理和边界条件，它就是该问题的唯一正确的解。
- 不同方法得到的解在形式上可能不同，但一定等价。

3. 应用举例

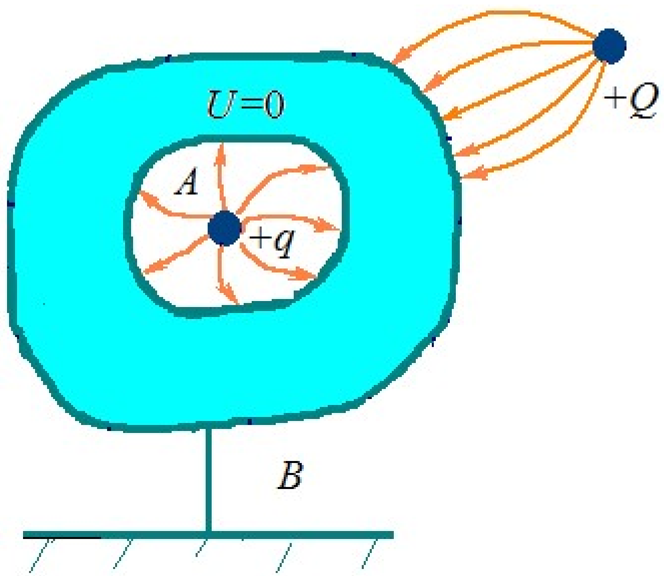
- 静电屏蔽
- 研究分区均匀介质的电场求解问题：

➢ 介质界面与电场线重合的情况

➢ 介质界面与等势面重合的情况

- 电像法 (2.8节)

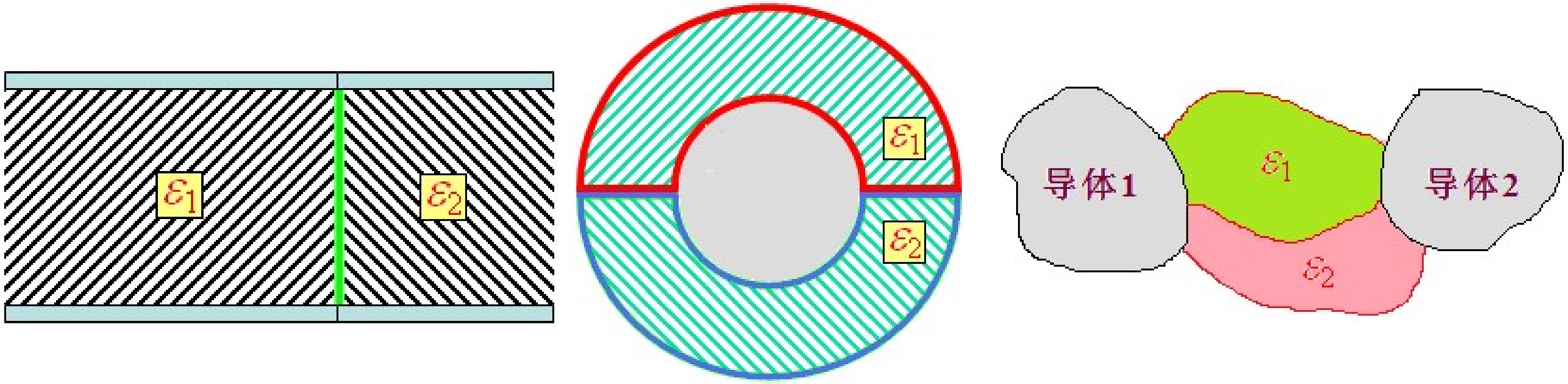
静电屏蔽



- 当导体壳接地时，改变外部电场不影响导体内腔表面U_S=0，以此内表面为边界的空腔中，电场不会变化。
- 当腔内电场变化时，由导体、大地和无穷远处构成的边界U_S=0 ，导体外部区域电场也不会变化。
- 更简单的图像：唯一性定理的实质就是边界决定内部。对边界内部而言，边界以外就像不存在一样，何谈对内部有什么影响。

分区均匀介质的电场

情形一：介质界面与电场线重合



- 条件：空间存在若干导体和均匀各向同性电介质，其中介质界面与撤去电介质时的电场线平行。
- 电场线管：一束电场线围成的管状区域。右图中电场线管起、止于两个导体表面 。
- 本情形也可表述为：电介质按电场线管充满。

分析：

- 猜想：加入电介质不改变电场分布形式，***E***//介质-介质界面 $\rightarrow$ ***P***在该界面没有法向分量 $\rightarrow \sigma'_{\mathrm{e}} = P_n = 0$ $\rightarrow \sigma'_{\mathrm{e}}$只可能存在于介质-导体的界面上。
- σ'_{e}与介质有关，为保证有介质时导体内$\boldsymbol{E}\equiv 0$，导体表面自由电荷分布会自动调整，以使总电荷与无介质时的电荷分布有相同形式，即$\sigma_{\mathrm{e}}=\alpha\sigma_{\mathrm{e}0}$。
- 由电场与电荷的线性关系可得：$\boldsymbol{E}=\alpha\boldsymbol{E}_0$。
- 正如猜想，加上电介质后电场分布形式的确不变，介质界面//真实的电场线。
- 本尝试解满足导体边界为等势面的条件，也不改变其电量。由唯一性定理，该解是唯一正确解。

求解步骤

- 一般情形

设无介质时的各区域电场$\boldsymbol{E}_{0i}$已知，由高斯定理

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \alpha \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i \boldsymbol{E}_{0i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_0$$

由上式求出α，进而$\boldsymbol{E}_i=\alpha\boldsymbol{E}_{0i}$。

- 一维对称问题

此时$\boldsymbol{E}_0$有统一表达式，上式简化为

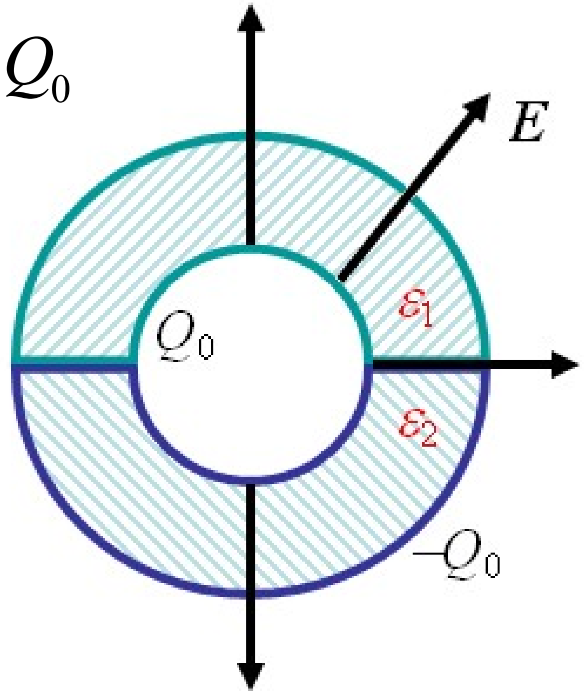
$$\alpha \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i \boldsymbol{E}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_i \iint_{S_i} \varepsilon_i \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_0$$

此时可直接计算$\boldsymbol{E}$，不必引入α。

[例2.7] 球形电容器带电量Q_0，极板间充满介电常数分别为ε_1和ε_2的两种介质，求介质中的$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{E}$。

[解] 介质界面与电场线重合，一维对称性问题，所以可以直接利用高斯定理：

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E(2\pi r^2\varepsilon_1 + 2\pi r^2\varepsilon_2) = Q_0$$

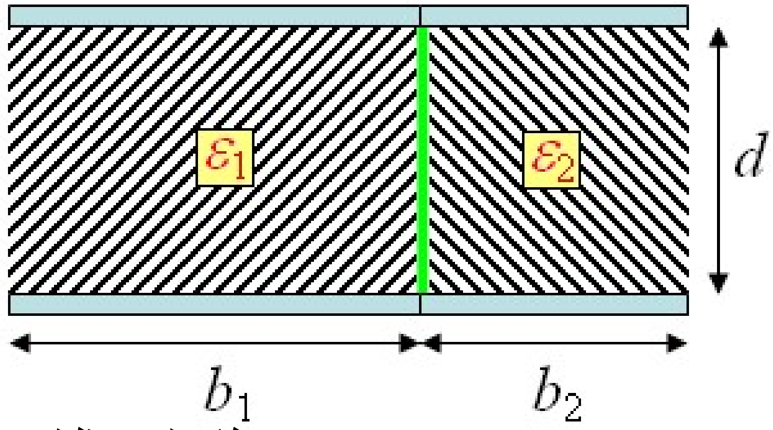


$$\Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{Q_0\boldsymbol{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3}$$

$$\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon_1\boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon_1 Q_0\boldsymbol{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3}$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon_2\boldsymbol{E} = \frac{\varepsilon_2 Q_0\boldsymbol{r}}{2\pi(\varepsilon_1+\varepsilon_2)r^3}$$

[例2.8] 平板电容器带电Q_0，板间距d，长a，宽$b=b_1+b_2$。介电常数为ε_1和ε_2。求电容和极板上自由电荷σ_{e0}。



[解] 介质界面与电场线重合，一维对称

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a = Q_0 \Rightarrow E = \frac{Q_0}{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a}$$

$$C = \frac{Q_0}{Ed} = \frac{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a}{d}$$

$$\sigma_{e01} = D_{n1} = \varepsilon_1 E = \frac{\varepsilon_1 Q_0}{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a} \qquad \sigma_{e02} = \frac{\varepsilon_2 Q_0}{(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2)a}$$

极板上自由电荷分布不均匀，但由于极化电荷的补偿，总电荷均匀分布，因而电场仍均匀。

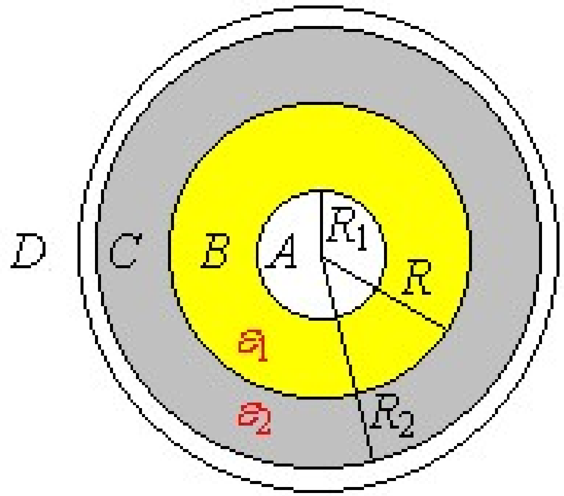
分区均匀介质的电场
情形二：介质界面与等势面重合

- 条件：空间存在若干导体和均匀各向同性电介质，其中介质界面与撤去电介质时的等势面重合，也即与电场线垂直。

  本情形也可表述为：在等势面之间填充各种电介质。

- 尝试解：$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0 \rightarrow \boldsymbol{E}_i=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0/\varepsilon_i$。

  其中$\boldsymbol{E}_i$为各介质内的总电场，$\boldsymbol{E}_0$为无介质时自由电荷的电场。

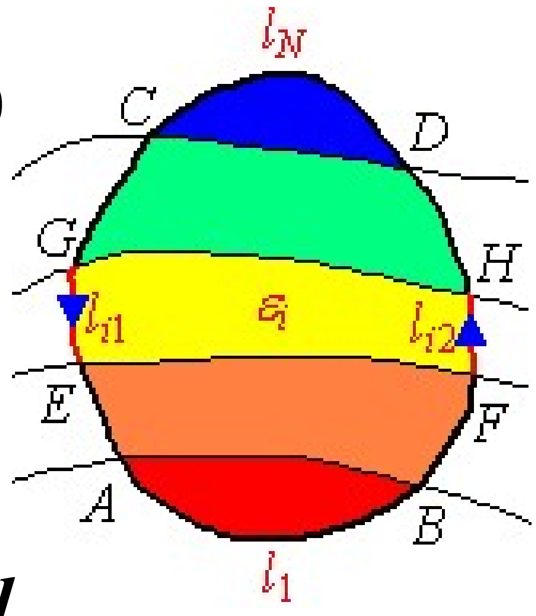


• 分析：尝试解成立是因为

1) $\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$满足$\boldsymbol{D}$的高斯定理 $\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q_0$

$$\oiint_S \boldsymbol{E}_0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q_0/\varepsilon_0 \quad\rightarrow \oiint_S \varepsilon_0\boldsymbol{E}_0\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=Q_0$$

2) $\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0/\varepsilon_i$满足$\boldsymbol{E}$的环路定理 $\oint_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$



$$\int_{l_1}\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0/\varepsilon_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\varepsilon_0U_{AB}/\varepsilon_1=0$$

$$\int_{l_N}\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0/\varepsilon_N\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\varepsilon_0U_{DC}/\varepsilon_N=0$$

$$\int_{l_i}\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0/\varepsilon_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\left(\int_{l_{i1}}+\int_{l_{i2}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0/\varepsilon_i\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=\varepsilon_0(U_{GE}+U_{FH})/\varepsilon_i=0$$

$$\therefore \sum_i \int_{l_i} \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 / \varepsilon_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{l_1} \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 / \varepsilon_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \cdots$$

$$+ \int_{l_i} \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 / \varepsilon_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \cdots + \int_{l_N} \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 / \varepsilon_N \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$$

求解步骤

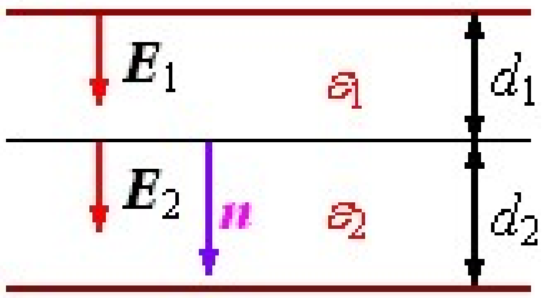
- 首先无视电介质，计算自由电荷产生的电场$\boldsymbol{E}_0$
- 分别利用$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$和$\boldsymbol{E}_i=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0/\varepsilon_i$ 求$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{E}_i$

[例补] 平行板电容器内充满两层介质，厚度和介电常数分别为d_1、d_2和ε_1、ε_2，板间电压为U。求

1) 两板间的电场；

2) 介质界面处的总面电荷密度；

3) 介质界面处的自由面电荷密度。



[解] 介质界面与等势面重合，$E_i = \varepsilon_0 E_0/\varepsilon_i$,

1) $U = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \varepsilon_0 E_0 d_1/\varepsilon_1 + \varepsilon_0 E_0 d_2/\varepsilon_2$

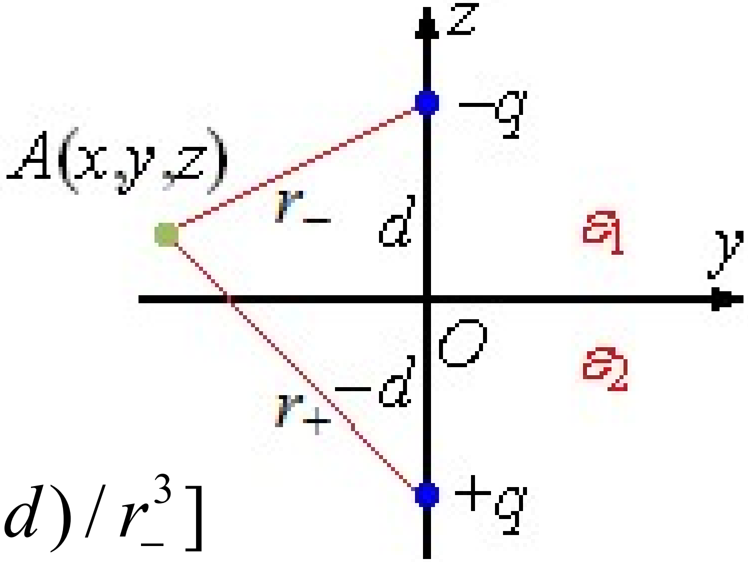
$$E_0 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 U}{\varepsilon_0(\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2)} \Rightarrow E_{1,2} = \frac{\varepsilon_0 E_0}{\varepsilon_{1,2}} = \frac{\varepsilon_{2,1} U}{(\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2)}$$

2) $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = \sigma_{\mathrm{e}}/\varepsilon_0$, $\sigma_{\mathrm{e}} = \varepsilon_0(E_2 - E_1) = \dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)U}{(\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2)}$

3) $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}_2 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0$, $\sigma_{\mathrm{e0}} = \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = 0$

[例2.9] 无限大平面 z=0 将ε_1和ε_2两种电介质隔开，在z轴上z=±d处分别放置点电荷∓q，求空间电场分布。

[解] 当撤去介质，z=0平面恰为两点电荷电场的等势面，介质界面与等势面重合。



$$E_{0x} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0}(1/r_+^3 - 1/r_-^3)$$

$$E_{0y} = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0}(1/r_+^3 - 1/r_-^3)$$

$$E_{0z} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}[(z+d)/r_+^3 - (z-d)/r_-^3]$$

其中 $r_\pm = [x^2 + y^2 + (z \pm d)^2]^{1/2}$,

$$\therefore \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{D}/\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0/\varepsilon_1 (z>0),\ \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{D}/\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0/\varepsilon_2 (z<0)$$

其他情况

- 介质界面与电场线和等势面都不重合，一般用电动力学或数值计算方法处理

- 对于具有简单几何形状导体 **(或介质)** 面的问题，可以利用电像法求解

2.8 电像法

1. 原理

- 问题：当电荷附近有导体 (介质) 时，导体 (电介质) 界面会生成感应电荷 (极化电荷)，这些未知电荷导致无法直接求解电场，必须另辟蹊径。
- 原理：用适量的假想电荷 (称为像电荷) 来代替实际的感应电荷或极化电荷，以满足电场的边界条件。根据唯一性定理，就可以用像电荷来等效这些感应电荷或极化电荷，从而解出静电场。

- 步骤

➢ 在界面另一侧设置一个或若干像电荷，由对称性、边界条件和边值关系确定像电荷的大小和位置

➢ 去掉界面和界面上的感应或极化电荷，由源电荷和像电荷求解静电场

➢ 进一步求解电场力和边界上的感应或极化电荷

- 适用范围

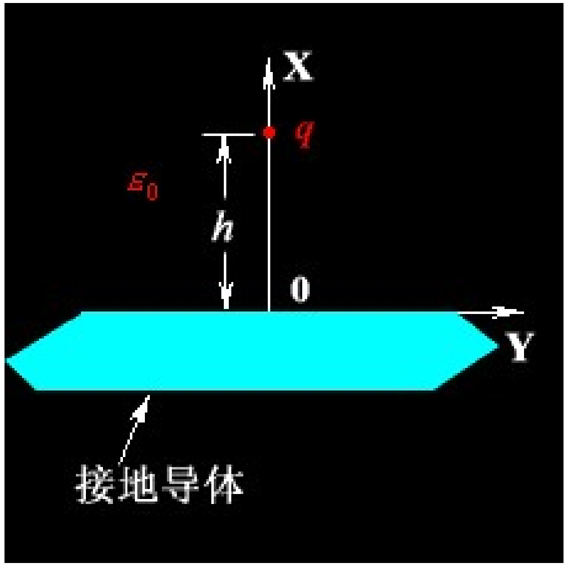
➢ 区域内点电荷数目有限 (可适当推广到连续电荷)

➢ 导体或介质界面的几何形状较简单

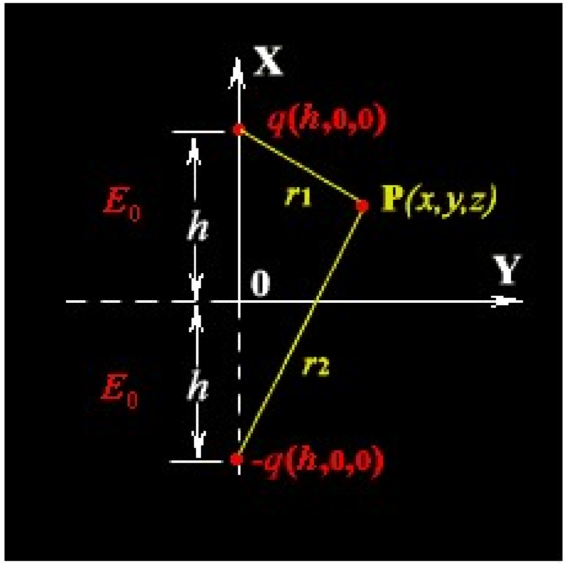
2. 应用举例——平面电像法和球面电像法

[例2.10] 距无限大接地导体板h处有一点电荷q。求q一侧的电场分布、板上的感应电荷分布和q所受的力。

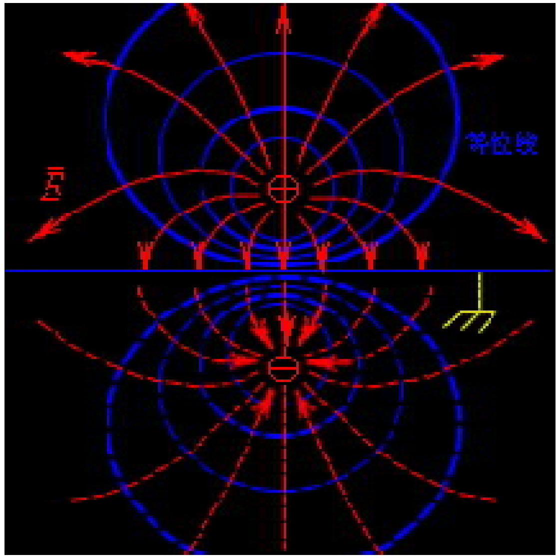
[解]用位于导体面下方h处的镜像电荷$-q$代替导体面上的感应电荷，边界条件$U_{YOZ面}=0$可维持不变。去掉导体面，用源电荷和像电荷求解导体上方区域电场。



接地导体面上方有点电荷q



镜像电荷$-q$



点电荷的平面镜像

电势：$U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-h)^2+y^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+h)^2+y^2+z^2}}\right]$$

电场： $E_x=-\dfrac{\partial U}{\partial x}$， $E_y=-\dfrac{\partial U}{\partial y}$， $E_z=-\dfrac{\partial U}{\partial z}$

当x=0，即在面板上

$$E_y\big|_{x=0}=E_z\big|_{x=0}=0,\ E_x\big|_{x=0}=-\frac{qh}{2\pi\varepsilon_0(h^2+R^2)^{3/2}}$$

其中$R^2=y^2+z^2$

感应电荷： $\sigma_{e0} = \varepsilon_0 E_x \Big|_{x=0} = -\dfrac{qh}{2\pi(h^2+R^2)^{3/2}}$

$$Q = \iint_S \sigma_{e0} \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\infty} \frac{-qh}{2\pi(h^2+R^2)^{3/2}} R\mathrm{d}R$$

$$= -\frac{qh}{(h^2+R^2)^{1/2}}\Bigg|_0^{\infty} = -q = q'$$

电场力(只计算像电荷贡献)

$x = h,\ y = z = 0$时， $E_y = E_z = 0,$

$$E_x = -\frac{q}{16\pi\varepsilon_0 h^2},\quad \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = qE_x\hat{x} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2}\hat{x}$$

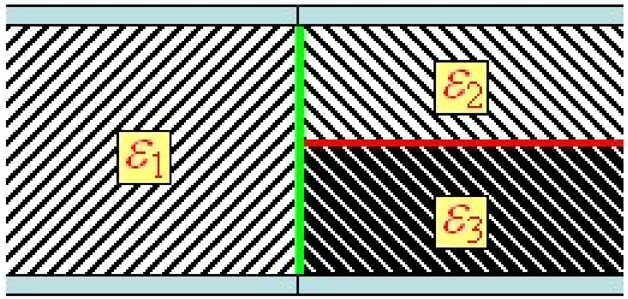
$\boldsymbol{F}$也可以直接由q, q'间库仑力公式计算

作业、预习及思考题

- 作业：**2.19~2.21**
- 预习：**2.8**余下部分、**3.1** 真空中点电荷间的相互作用能

下次课讨论

- 思考题2.8 平板电容器内按图示填充三类电介质，能否解出各介质中的电场？



- 思考题2.9 像电荷能否位于待求电场空间？