2.6.4: V, $\mathbb{R}$上线性空间, $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, V) = ?$ (V).

$f \mapsto f(1)$. 一般地, R为环, $Hom_R(R, V) \simeq V$, (V是R-模).

2.6.3. W中$\{a_n\}$由a_1, a_2唯一确定.

2.7.3. ① $\mathbb{F}^n = W_1 + W_2$

② $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2$.

②: ~~$x_1 = \cdots = x_n = 0$~~. $x = (x_1, \cdots, x_n) \in W_1 \cap W_2$

$\Rightarrow x_1 + \cdots + x_n = 0$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \Rightarrow x = \vec{0}$

①: $\forall$ $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, ~~$c = x_1 + \cdots +$~~ 考虑$(c, \cdots, c) \in W_2$

s.t $(x_1 - c, \cdots, x_n - c) \in W_1$. $\Rightarrow$ $x_1 + \cdots + x_n - nc = 0$

取$c = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$

2.7.5 同理. (A可以写成对称、反称的和).

6.1.5. 定义: $D(f_1,\dots,f_n) = (f_1,\dots,f_n)\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$\qquad (f_1',\dots,f_n') \qquad\qquad (0,f_1,\dots,f_{n-1})$.

6.1.9 直接计算. (11, 12).

6.1.13 为6.3.7 特例.

~~$\ker tr = \{E_{ij}, i$~~ $f(E_{ij})=0 \quad i\neq j$.

$f(E_{11}-E_{jj})=0$. $\quad \ker f = \ker(tr)$.

~~$\mathcal{A}$~~ $V \neq \ker\mathcal{A}\oplus \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$. ($\ker\mathcal{A}\cap\mathrm{Im}\,\mathcal{A}\neq\{0\}$ 时不成立!).

6.3.2. (1) $\dim\ker\mathcal{D} = 1 \qquad \{1\}$.

$\dim\mathrm{Im}\,\mathcal{D} = n-1 \qquad \{1, x, \dots, x^{n-2}\}$.

(2). 不是, 这是由于 ~~$\ker\mathcal{D}\cap\mathrm{Im}\,\mathcal{D}\neq\{0\}$~~

$\ker\mathcal{D}\cap\mathrm{Im}\,\mathcal{D}\neq\{0\}$!

6.3.5. (1) $\ker \mathscr{A} \cap \operatorname{Im} \mathscr{A} = \{0\}$.

(2). 由后面的知识知 $\mathscr{A}$ 可对角化.

特征值只能为 $0, 1$. tr. 在相似变换下保持不变.

(3). 由(2)可得.

Exe.

1. A幂零 $\Longleftrightarrow$ A的特征值全为 0 $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{tr}(A^k)=0$ 对 $\forall k$ 成立.

2. $S: A \mapsto A^T$ 是否可对角化

$M_{n\times n}(\mathbb{F}) \to M_{n\times n}(\mathbb{F})$

3. A可对角化 $\varphi: M_{n\times n}(\mathbb{F}) \longrightarrow M_{n\times n}(\mathbb{F})$ 是否可对角化

$X \longmapsto AX - XA$

4. $$\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & & & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & a_2 \\ \vdots & & & \ddots & x & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & x+a_1 \end{vmatrix} = ?$$

5. (1)

$$f(x)=\begin{vmatrix} x+a_1 & x+c & \cdots & x+c \\ x+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x+c \\ x+b & \cdots & x+b & x+a_n \end{vmatrix}$$

是 x 的线性函数.

(2) 求

$$\begin{vmatrix} a_1 & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a_n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a_n \end{vmatrix}.$$

6. $x-1 \mid f(x^n) \Rightarrow x^n-1 \mid f(x^n)$

7. 若 $(x^2+x+1) \mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$

则 $(x-1) \mid f_1(x)$, $x-1 \mid f_2(x)$.

8. $f(x)=x^4+3x^2+ax+b$ $\quad g(x)=x^2-ax+2$

若 $g \mid f$ 求 a,b. (隔壁班小测)

Chapter 6. Eb

6.1, 6.2, 6.4 定义. (线性映射, 基变换, 在基下的矩阵, 相似)

6.3. $\ker A$, $\operatorname{Im} A$ 定义. $\operatorname{Im} A$, $\ker A$ 为子空间.

$\dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A = \dim V$ (并不意味 $V = \ker A \oplus \operatorname{Im} A$)

A 单 $\Leftrightarrow$ $\ker A = \{0\}$. 可逆 $\Leftrightarrow$ 双射. (有限维).

商空间 (主要是研究一~~些~~种等价类).

e.g. $A: U \to V$. 不一定是单射

但 A: ~~值~~ $U/\ker A \longrightarrow V$ 为单射

$A: U/\ker A \longrightarrow \operatorname{Im} A$ 为同构. (泛函, 逆算子定理).

6.5, 6.6 特征值, 特征向量, 特征子空间 定义.

不同特征值的特征向量线性无关. (即子空间是直和)

可对角化 $\Leftrightarrow$ ① n个线性无关特征向量 $\Leftarrow$ ② n个不同特征值 $\Leftrightarrow$ ③ 几何重数 = 代数重数

④ $\Leftrightarrow$ 最小多项式没有重根 (没什么用)

或者 直接验证（如 P339 e.g 3）.

6.7 d_A 最小多项式 若 ~~$d_A | f$~~ $f(A)=0 \Rightarrow d_A | f$.

（带余除法，思想很重要！）.

Cayley-Hamilton Thm $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$，A有n次零化多项式.

2.6&2.7 同构（双射+同态（线性））.

子空间. 和与交（并不一定是子空间）.

维数公式，直和（2个，$W_1 \oplus W_2$，$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 即可！

多个需 $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_n) = \{0\}$ 才可以！）.

或者定理 2.7.4：$w_1 + \cdots + w_n = 0 \Leftrightarrow w_1 = \cdots = w_n = 0$.

$w_i \in W_i$.

$V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$ $V_1 + V_2 = V$.

（较容易） （取决于对 V, V_1, V_2 的理解）.

Exe 提示.

1. 幂零 $\Leftrightarrow$ 特征值全为0 (书上).

特征值全为0 $\Leftrightarrow$ $tr(A^k)=0,\ \forall k\geq 1$

"$\Rightarrow$" $\exists P$, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ (上三角).

$tr(A^k)=a_1^k+\cdots+a_n^k=0.$ $\cancel{a_1,\cdots,a_n}$

"$\Leftarrow$" 只要证: $f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_0$

中 b_i 皆为0. $b_i=(-1)^{n-i}\sigma_i$. Newton 公式 (5.7节例8).

$S_k=a_1^k+\cdots+a_n^k$ 与 σ_k 可相互表出, 故 $S_k=0 \Rightarrow \sigma_k=0$, $k=0,1,\cdots,$

$\Rightarrow f(\lambda)=\lambda^n$, 即特征值全为0

2. 3. 书6.6习题.

4. 将下一行 x 倍加到上一行, 得 $\begin{vmatrix} 0 & & & x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & -1 & x+a_1 \end{vmatrix}$

展开即可 (或归纳)

5. (1). ~~将第一行依次加~~

将2,…,n行依次减第一行

得 $\begin{vmatrix} a+x & b+x & \cdots & b+x \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 展开即可

(2). $f(-b)$, $f(-c)$ 易求, $f(x)=f(-b)+\dfrac{f(-b)-f(-c)}{c-b}(x+b)$.

$f(0)=\left|\quad\right|$. $b=c$, $b\to c$ 求极限即可(或用书上做法, 不习惯这种求极限的话).

6. ζ_n 为n次单位根, $f(\zeta_n^{kn})=f(1)$ $\quad x-1\mid f(x^n)\Rightarrow f(1)=0$

$\Rightarrow f(\zeta_n^n)=0 \Rightarrow x-\zeta_n^k \mid f(x^n)$ 即 $x^n-1\mid f(x^n)$.

$\left(x^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(x-\zeta_n^k)\right)$.

7. 考虑 α_1,α_2 是 x^3-1 不为1的两根.

$\Rightarrow 1+\alpha_i+\alpha_i^2=0 \quad i=1,2. \Rightarrow \begin{cases} f_1(1)+\alpha_1 f_2(1)=0 \\ f_1(1)+\alpha_2 f_2(1)=0 \end{cases}$

$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow f_1(1)=f_2(1)=0 \Rightarrow (x-1)\mid f_1(x), (x-1)\mid f_2(x)$.

8. 待定系数或直接带余除法均可.

扫描全能王 创建