每日一练(II) 答案

I 判断题　1, 2 见期中的判断题复习

3. X. 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 收敛半径为 1. 任取 $z_0 = e^{i\theta} \in \partial B(0,1)$

① $\theta = 0$, 则 $z_0 = 1$. 此处级数显然发散.

② $\theta \neq 0$, 则有

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+p} z_0^n\right| = \left|\frac{e^{i(N+1)\theta}(1-e^{ip\theta})}{1-e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{\sin\frac{p\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|$$

由 Cauchy 收敛准则, 级数在 $\partial B(0,1)$ 上处处发散.

4. X. 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, 收敛半径 $R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}\right)^{-1} = 1$.

$\forall z_0 \in \partial B(0,1)$, 有

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+p} z_0^n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{N} - \frac{1}{N+p} < \frac{1}{N} \to 0 \quad \text{as } N \to \infty$$

Cauchy $\Rightarrow$ 级数在 $\partial B(0,1)$ 上处处收敛.

证明与计算

1. 由 sin 的 Taylor 展开可得:

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}} \quad \forall z \neq 0$$

由于 Taylor 展式在收敛圆上内闭一致收敛, 故

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-a}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^{2n+1}(z-a)}. \quad (*)$$

记 $I_n = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^{2n+1}(z-a)}$.

① $a = 0$, 则 $I_n = i\int_0^{2\pi} e^{-i(2n+1)\theta}\,d\theta = 0$, $n = 0, 1, \cdots$ 此时 $(*) = 0$

② $a \neq 0$, 则有

$$I_n = \int_{|z|=\varepsilon} \frac{dz}{z^{2n+1}(z-a)} + \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{dz}{z^{2n+1}(z-a)}$$

$$= \cancel{2\pi i}\ \frac{2\pi i}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\Big|_{z=0} \frac{1}{z-a} + \frac{2\pi i}{a^{2n+1}}$$

$$= \frac{2\pi i}{(2n)!} \cdot -\frac{(2n)!}{a^{2n+1}} + \frac{2\pi i}{a^{2n+1}} = 0.$$ 此时 $(*)=0$.

2. 任取包含于D的紧集K. 记 $\rho = \mathrm{dist}(K, \partial D) > 0$.

则有 $\forall z \in K$,

$$\sum_{n=N+1}^{N+p} |f_n'(z)| = \sum_{n=N+1}^{N+p} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = \rho} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi\rho^2} \cancel{\sum} \int_{|\zeta - z|=\rho} \sum_{n=N+1}^{N+p} |f_n(\zeta)|\, d\zeta. \quad (*)$$

由于 $\sum |f_n|$ 在D内一致收敛. 故 $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N = N(\varepsilon) > 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$. $\zeta \in D$. 有 $\sum_{n=N+1}^{N+p} |f_n(\zeta)| < \varepsilon$. 此时

$$(*) \le \frac{1}{2\pi\rho^2} \cdot \varepsilon \cdot 2\pi\rho = \frac{\varepsilon}{\rho}.$$

3. ~~首先. 不妨设 $a_1, \cdots, a_m$ 互不相同.~~

由于 $\forall k = 1, \cdots, m$. $f(z)$ 在 $\frac{1}{a_k}$ 处发散至无穷. 故首先有

收敛半径 $R \le \min\limits_k \frac{1}{|a_k|} = \frac{1}{\max\limits_k |a_k|}$

另一方面, $\frac{1}{1-a_k z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_k^n z^n$ 的收敛半径为 $R_k = \frac{1}{|a_k|}$.

所以 $\forall z$. with $|z| < \min\limits_k \frac{1}{|a_k|}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_k^n z^n$ 收敛. 从而

$\sum_{k=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} a_k^n z^n$ 收敛. 故 $R \ge \min\limits_k \frac{1}{|a_k|}$. 即 $R = \frac{1}{\max\limits_k |a_k|}$ $(*)$.

由 Hadamard 公式. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^n \right) z^n$ 的收敛半径为

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \left| \sum^{m} a_k^n \right|^{\frac{1}{n}} \right)^{-1} \quad (**)$$

(*) & (**) $\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{m} a_k^n\right|^{\frac{1}{n}} = \max_k |a_k|$. ※

4. (1). 由于 $\sum_{n\geq 0} f^{(n)}(a)$ 收敛. 故 n 充分大时, $|f^{(n)}(a)|<1$.

所以 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ 的收敛半径为

$$R=\left(\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}}\right)^{-1}=+\infty \quad (\text{用 Stirling 公式})$$

因此 f 可延拓为整函数.

(2). 只需证明 $\forall R>0$, 级数在 $B(a,R)$ 上一致收敛. 首先

$$\sum_{n=N+1}^{N+p} f^{(n)}(z)=\sum_{n=N+1}^{N+p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(n+m)}(a)}{m!}(z-a)^m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z-a)^m}{m!}\sum_{n=N+1}^{N+p}f^{(n+m)}(a). \quad (*)$$

其中最后一步由绝对收敛得到. 而 $\sum f^{(n)}(a)$ 收敛. 故 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N_0=N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, $\forall N\geq N_0$, $p\in\mathbb{N}$, 有 $\left|\sum_{n=N+1}^{N+p}f^{(n)}(a)\right|<\varepsilon$.

此时

$$|(*)|\leq \varepsilon\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z-a)^m}{m!}=e^{|z-z_0|}\varepsilon<e^R\varepsilon. \quad ※$$

5. (1). 徐神笔记 Lec 13 末尾.

(2). 考虑 $g(z)=A(r)-f(z)$. 则 $|z|=r$ 时, $\mathrm{Re}\, g(z)\geq 0$. 且

$$g(z)=A(r)-a_0-a_1z-\cdots$$

由(1)可得

$$|a_n|r^n\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\, g(re^{i\theta})\,d\theta=2A(r)-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\, f(re^{i\theta})\,d\theta$$

$$=2A(r)-\mathrm{Re}\, f(0). \quad ※$$