微分方程

二阶偏微分方程的
分类与标准型

一、一般理论

考虑n个自变量的二阶偏微分方程

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + f(x,u,Du) = 0} \qquad \text{(I)}$$

其中$x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n}$: 实对称阵

- (I)的**线性主部** $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j}$ 是方程分类的判别关键

- $f(x,u,Du) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j} + c(x) + d(x)$ 时(I)为线性PDE

(I)在x^0点的分类方法：

1. 若$A(x^0)$的所有特征值非零且仅有一个异号，则方程(I)为**双曲型**；

若$A(x^0)$的所有特征值非零且正负特征值个数均大于1，则方程(I)为**超双曲型**；

2. 若$A(x^0)$有一个特征值为零，则方程(I)为**抛物型**；

3. 若$A(x^0)$的所有特征值非零且同号，则方程(I)为**椭圆型**。

- 双曲型代表：波动方程
- 抛物型代表：热方程
- 椭圆型代表：场位方程

(I)在x^0点的标准型:

若经过自变量的某种线性变换$\xi = Bx$后由(I)得到的方程

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} A_{ii}(x^0) u_{\xi_i \xi_i} + F(\xi, u, Du) = 0,\ m \le n}$$

其中$A_{ii}(x^0)=\pm 1$,
称为方程(I)在x^0点的**标准型**。

- 此类线性变换是可逆的但非唯一
- 标准型是相对简单的形式，有些方程化简后能很快求出通解，再求定解问题的特解，此所谓“通解法”

二、两个自变量的情形

考虑两个自变量的二阶偏微分方程

$$\boxed{a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+f(x,y,u,u_x,u_y)=0} \qquad \text{(II)}$$

- 假定所有已知函数在给定区域内连续可微
- 主部系数满足 $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\neq 0$

令 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$： 实对称阵

则 $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$

$$=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$

分类的判别依据：

确定特征值 λ_1, λ_2 符号

⟺ 判别式$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} (= -\lambda_1\lambda_2)$

- 两特征值均为实数

$$\Delta \equiv a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \begin{cases} > 0, & \text{双曲型} \\ = 0, & \text{抛物型} \\ < 0, & \text{椭圆型} \end{cases}$$

- 双曲型：两特征值异号
- 抛物型：有特征值为零
- 椭圆型：两特征值同号

1.两个自变量方程的化简

目的：通过自变量的可逆变换来简化方程的线性主部，从而可据此分类。

作变量变换：$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$

满足$Jacobi$行列式 $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0$

则在可逆变换下方程(II)的线性主部变为

$$\boxed{a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}=A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}} \qquad \text{(III)}$$

具体的变换过程①:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

$$u(x,y) \longleftrightarrow u(\xi,\eta)$$

复合求导

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

具体的变换过程②：

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}$$

$$\updownarrow$$

$$A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta}$$

系数之间的关系

$$\begin{cases} A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\ A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \end{cases}$$

对系数关系式的考察:

$$\boxed{\begin{aligned} A_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\ A_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\ A_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \end{aligned}}$$

由上面第一和第三式知，若如下一阶偏微分方程

$$\boxed{a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0} \qquad \text{(IV)}$$

有两特解 ξ,η，则 $A_{11}=A_{22}=0$ ⇒ (III)仅余一项，**最简单！**

故亦称方程(IV)是(II)的**特征方程**。

特征方程的求解:

$$\boxed{a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0} \qquad \text{(IV)}$$

定理: 设$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$, 则$z = \varphi(x, y)$为(IV)的解

$\Longleftrightarrow$ $\varphi(x, y) = h$(常数)为常微分方程

$$\boxed{a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0} \qquad \text{(V)}$$

的通积分。

证：若$\varphi(x, y(x)) = h$为(V)的通积分，设$\varphi_y \neq 0$, 对x微分有

$$\varphi_x + \varphi_y\frac{dy}{dx} = 0, \text{即}\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$

代入(V)即得(IV)。反之，若$z = \varphi(x, y)$为(IV)的解，

则对$\varphi(x, y(x)) = h$微分得$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 代入(IV)得(V)。

特征方向的求解:

$$\boxed{a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0} \qquad \text{(V)}$$

- 由定理，常微分方程(V)亦称偏微分方程 (II)的**特征方程**。
- 称 $\varphi(x, y(x)) = h$ 为(V)的**特征(曲)线**。
- 称由得到(V)的$\dfrac{dy}{dx}$为(II)的**特征方向**。

利用二次方程得:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}} \qquad \text{(VI)}$$

特征线与判别式:

分类关键

特征线

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \Rightarrow \boxed{\varphi_1(x,y)=h_1,\ \ \varphi_2(x,y)=h_2}$$

特征方向

令 $$\boxed{\Delta=\Delta(x,y)=a_{12}^2-a_{11}a_{22}}$$

- $\Delta>0$: (II)为双曲型方程
- $\Delta=0$：(II)为抛物型方程
- $\Delta<0$：(II)为椭圆型方程

双曲型：

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}}\qquad \text{(VI)}$$

右端为两相异的实函数

当 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$ 时(VI)有两相异特征方向，积分得两族实特征线 $\varphi_1(x,y)=h_1$，$\varphi_2(x,y)=h_2$，满足 $\dfrac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}\neq 0$。

令 $\boxed{\xi=\varphi_1(x,y),\ \ \eta=\varphi_2(x,y),}$ 由定理知 $A_{11}=A_{22}=0, A_{12}\neq 0$

方程(II)化为

$$\boxed{u_{\xi\eta}+\frac{f}{2A_{12}}:=u_{\xi\eta}+F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0}$$

第二标准型

再令 $\boxed{s=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta), t=\dfrac{1}{2}(\xi-\eta),}$ 则上述方程化为

$$\boxed{u_{tt}-u_{ss}+F(t,s,u,u_t,u_s)=0}$$

第一标准型

抛物型：$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$，

1. 若$a_{11}=0$，则$a_{12}=0$， 此时方程(II)是标准型。

2. 若$a_{11} \neq 0$，不妨设$a_{11}, a_{12}, a_{22} > 0$， 则$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_{12}}{a_{11}} > 0$，

积分后得一族实特征线 $\varphi(x, y) = h$。令 $\boxed{\xi = \varphi(x, y)}$，

另取$\boxed{\eta = \eta(x, y)}$满足$\dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$。例如可取$\boxed{\eta = x\text{或}y}$。

$$\Rightarrow A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{12}}\xi_y)^2 = 0$$

$$\Rightarrow A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y$$

$$= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{12}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{12}}\eta_y) = 0$$

另外，$A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \neq 0$，从而方程(II)化为

$$\boxed{u_{\eta\eta} + \frac{f}{A_{22}} := u_{\eta\eta} + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0}$$

标准型

椭圆型:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}} \qquad \text{(VI)}$$

右端为两共轭的复函数

当 $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$ 时由(VI)得两族共轭复特征线

$$\varphi_1(x,y)+i\varphi_2(x,y)=h_1,\ \ \varphi_1(x,y)-i\varphi_2(x,y)=h_2,$$

满足 $\dfrac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}\neq 0$ (其证明可参考陈祖墀老师的PDE)

令 $\boxed{\xi=\varphi_1(x,y),\ \ \eta=\varphi_2(x,y),}$ 则将 $\xi+i\eta$ 代入(IV)易得

$$A_{11}=A_{22}\neq 0, A_{12}=0$$

⇨ 方程(II)化为

$$\boxed{u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{f}{A_{11}}:=u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+F(\xi,\eta,u,u_{\xi},u_{\eta})=0}$$

标准型

三类典型二阶偏微分方程的主要特性：

以两个自变量为例：

$$u_{tt}-u_{xx}=0(\text{波}),\ u_t-u_{xx}=0(\text{热}),\ u_{xx}+u_{yy}=0(\text{场})$$

- 弦振动方程（双曲型）描述波的传播现象，特性：对时间可逆，不衰减，最大值原理不成立；

- 一维热传导方程（抛物型）反映热的传导、物质的扩散等不可逆现象，特性： 随时间衰减，瞬间光滑化，最大值原理成立；

- 调和方程（椭圆型）描述平衡或定常状态，特性：最大值原理成立，不会剧变。

非线性方程更复杂，知之甚少！

2.各种例子

例1 设区域$D \subset \mathbb{R}^2$, 讨论空气动力学Tricomi方程$yu_{xx}+u_{yy}=0$的类型及上半平面的标准型

解 判别式 $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0^2 - y \cdot 1 = -y$

由此可得：在上半平面Tricomi方程为椭圆型，
下半平面Tricomi方程为双曲型, 而在x轴上
Tricomi方程为抛物型。

在上半平面的特征方程:

$$y(dy)^2+(dx)^2=0=(dx+i\sqrt{y}dy)(dx-i\sqrt{y}dy).$$

取 $dx+i\sqrt{y}dy=0$ 的复解 $x+i\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}=0$

令 $\xi = x,\ \eta=\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}},$

则标准型为 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\dfrac{1}{3\eta}u_{\eta}=0$

例2 判断下面常系数偏微分方程的类型并化简

$$u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$$

解：$a_{11}=1, a_{12}=-1, a_{22}=-3 \Rightarrow \Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=4>0$

故该方程为双曲型偏微分方程，其特征方程

$$(dy)^2+2dxdy-3(dx)^2=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-3\text{和}\frac{dy}{dx}=1$$

故有 $y+3x=h_1$和$y-x=h_2$。

令 $\xi=3x+y$，$\eta=-x+y$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=9\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

代入原方程得 $-16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+12\frac{\partial u}{\partial \xi}+4\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$

即 $u_{\xi\eta}=\frac{3}{4}u_{\xi}+\frac{1}{4}u_{\eta}$

可进一步化简，消去一阶偏导数项

$$u_{\xi\eta} = \frac{3}{4}u_{\xi} + \frac{1}{4}u_{\eta}$$

令 $u = V(\xi,\eta)e^{\lambda\xi+\mu\eta}$

$$\begin{cases} u_{\xi} = (V_{\xi} + \lambda V)e^{\lambda\xi+\mu\eta} \\ u_{\eta} = (V_{\eta} + \mu V)e^{\lambda\xi+\mu\eta} \\ u_{\xi\eta} = (V_{\xi\eta} + \lambda V_{\eta} + \mu V_{\xi} + \lambda\mu V)e^{\lambda\xi+\mu\eta} \end{cases}$$

代入上述方程得

$$V_{\xi\eta} + (\lambda - \frac{1}{4})V_{\eta} + (\mu - \frac{3}{4})V_{\xi} + (\lambda\mu - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4}\mu)V = 0$$

取 $\lambda = \frac{1}{4}, \mu = \frac{3}{4} \Rightarrow V_{\xi\eta} = \frac{3}{16}V$

例3 把方程 $x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}=0$ 分类并化为标准型求通解

解：该方程的 $\Delta=(xy)^2-x^2y^2=0,$ 故该方程是抛物型的。

特征方程： $x^2(\frac{dy}{dx})^2-2xy(\frac{dy}{dx})+y^2=0$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln y=\ln hx$$

从而得到方程的一族特征线为： $\frac{y}{x}=h$

作自变量变换 $\xi=\frac{y}{x},\eta=y$ (可取最简单的函数形式, 即 $\eta=x$ 或 $\eta=y$)

原方程化简后的标准型为 $u_{\eta\eta}=0.$

积分两次得通解 $u=\eta F(\xi)+G(\xi)=yF(\frac{y}{x})+G(\frac{y}{x})$

例4 判断下面偏微分方程的类型并化简

$$u_{xx} - 2\cos x u_{xy} - (3+\sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$$

解：$a_{11} = 1,\quad a_{12} = -\cos x,\quad a_{22} = -(3+\sin^2 x)$

$$\Delta = \cos^2 x + 3 + \sin^2 x = 4 > 0$$ 双曲型方程

特征方程 $(\frac{dy}{dx})^2 + 2\cos x \frac{dy}{dx} - (3+\sin^2 x) = 0$

特征方向：$\frac{dy}{dx} = -\cos x - 2,\ \frac{dy}{dx} = -\cos x + 2$

特征线：$y + \sin x + 2x = h_1,\quad y + \sin x - 2x = h_2$

令 $\xi = y + \sin x + 2x,\ \eta = y + \sin x - 2x$ ⟹ $u_{\xi\eta} + \frac{\xi+\eta}{32}(u_\xi + u_\eta) = 0$

令 $s = \frac{1}{2}(\xi+\eta),\ t = \frac{1}{2}(\xi-\eta)$ ⟹ $u_{tt} - u_{ss} - \frac{s}{4}u_s = 0$

例5 **求解** $\begin{cases} 4y^2u_{xx}+2(1-y^2)u_{xy}-u_{yy}-\dfrac{2y}{1+y^2}(2u_x-u_y)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x), u_y(x,0)=\psi(x) \end{cases}$

解： $a_{11}=4y^2$， $a_{12}=(1-y^2)$， $a_{22}=-1.$

$$\Delta=(1+y^2)^2>0$$ **双曲型方程**

特征方程 $4y^2(dy)^2-2(1-y^2)dxdy-(dx)^2=0$

特征方向： $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}, \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2y^2}$

特征线： $x+2y=h_1, x-\dfrac{2y^3}{3}=h_2$

令 $\xi=x+2y,\quad \eta=x-\dfrac{2y^3}{3}.$

方程化为 $u_{\xi\eta}=0.$ **两次积分，通解为**

$$u=F(\xi)+G(\eta)=F(x+2y)+G(x-\frac{2y^3}{3})$$

由条件得

$$\varphi(x)=u(x,0)=F(x)+G(y),\psi(x)=u_y(x,0)=2F'(x).$$

求出

$$F(x)=F(0)+\frac{1}{2}\int_0^x\psi(t)dt,G(x)=\varphi(x)-F(0)-\frac{1}{2}\int_0^x\psi(t)dt.$$

原方程的解为

$$u(x,y)=\varphi(x-\frac{2y^3}{3})+\frac{1}{2}\int_{x-\frac{2y^3}{3}}^{x+2y}\psi(t)dt.$$

三、多个自变量的情形

n个自变量的二阶线性偏微分方程的一般形式

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x)} \qquad \text{(I)}$$

通过合同变换，有

$$A=(a_{ij}(x))_{n\times n} \to BAB^T = \begin{pmatrix} i_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

- 其中 B:可逆, $i_k \in \{1,0,-1\}$
- 正惯性指标$p:\{i_1,\cdots,i_k\}$含1的个数
- 负惯性指标$q:\{i_1,\cdots,i_k\}$含-1的个数

$$p \ge 0, q \ge 0, n - p - q \ge 0.$$

1) $p > 0, q > 0, p + q = n.$ (I)超双曲型

$p = n-1, q = 1$ or $p=1, q = n-1.$ (I)双曲型

2) $p > 0, q > 0, p + q < n.$ (I)超抛物型

$p = n-1, q = 0$ or $p=0, q = n-1.$ (I)抛物型

3) $p = n, q = 0$ or $p=0, q = n.$ (I)椭圆型

作可逆线性变换 $\begin{cases} \xi_1 = b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n \\ \cdots\cdots \\ \xi_n = b_{n1}x_1 + \cdots + b_{nn}x_n \end{cases}$.

(I)化为标准型

$$\sum_{j=1}^{p} u_{\xi_j\xi_j} - \sum_{j=p+1}^{p+q} u_{\xi_j\xi_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{\xi_i} + Cu = F$$

$p=1, q=n-1$. 双曲型标准型 $u_{\xi_1\xi_1} - \sum_{j=2}^{n} u_{\xi_j\xi_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{\xi_i} + Cu = F$

$p=n-1, q=0$. 抛物型标准型 $\sum_{j=1}^{n-1} u_{\xi_j\xi_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{\xi_i} + Cu = F$

$p=n, q=0$. 椭圆型标准型 $\sum_{j=1}^{n} u_{\xi_j\xi_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i u_{\xi_i} + Cu = F$

例 判断下面偏微分方程的类型并化简

$$u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yy}+6u_{zz}=0$$

解：$a_{11}=1, a_{12}=a_{21}=1,\ a_{22}=2,\ a_{13}=a_{31}=-1,\ a_{33}=6.$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 6\end{pmatrix}\to BAB^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

故该方程为椭圆型偏微分方程。

作可逆线性变换 $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y-x\\ x-\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{2}\end{pmatrix}$

椭圆型标准型为 $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}=0.$