第四次习题课

伍文超 MJTDX USTC

1: (1) 证明 $GL_2(2)$ 同构于 S_3.
(2) 证明 $PGL_2(3) \cong S_4$. 从而也有 $PSL_2(3) \cong A_4$ 因为其是 $PGL_2(3)$ 的指数为而的子群.
$GL_n(\mathbb{F}_q)$ 简记为 $GL_n(q)$,q 是素数的幂.
证明: (1): 考虑:

$$\begin{tikzcd} GL_2(2) \arrow[r, bend left] & (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)\backslash\{(0,0)^T\} \arrow[r] & (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)\backslash\{(0,0)^T\} \end{tikzcd}$$

上述作用是合理的, 因为 $GL_2(2)$ 中任意一个元素给出 $S = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)\backslash\{(0,0)^T\}$ 的一个置换 (元素是可逆矩阵). 通过计算可知 $A \in GL_2(2)$ 在 S 上作用平凡当且仅当 $A = I_2$. 因此有单射 $GL_2(2) \hookrightarrow S_3$. 最后由 $|GL_2(2)| = 2 \cdot 3 = 6 = |S_3|$ 可知二者同构.

(2) 类似于 (1), 考虑 $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$ 中的四个子集 $V_i = \{a(i,1) \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 | a = 0,1,2\}, i = 0,1,2, V_\infty = \{a(1,0) \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 | a = 0,1,2\}$. 记 $S = \{V_0, V_1, V_2, V_\infty\}$. 同样的 $GL_2(3)$ 中任意一个元素给出 S 的一个置换 (合理的), 而且通过计算可知 $A \in GL_2(3)$ 在 S 上作用平凡当且仅当 A 是标量矩阵 (scalar matrices). 因此有单射 $GL_2(3)/Z(GL_2(3)) = PGL_2(3) \hookrightarrow S_4$. 最后由 $|GL_2(3)| = 24 = |S_4|$ 可知二者同构. □

Remark:(1) 类似的，我们可以取 $\mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q$ 中的 $q+1$ 个子集 (一维子空间)$V_i = \{a(i,1) \in \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q | a = 0,1,\cdots,q-1\}, i = 0,2,\cdots,q-1, V_\infty = \{a(1,0) \in \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q | a = 0,1,\cdots,p-1\}$, 记 $S = \{V_0, V_1, V_2, \cdots,$
$V_{q-1}, V_\infty\}$. 同样的 $GL_2(q)$ 中任意一个元素给出 S 的一个置换 (合理的), 且只有标量矩阵给出平凡作用，因此我们得到单射 $PGL_2(q) \hookrightarrow S_{q+1}$
(2) 在线性代数中，我们定义射影空间为 $\mathbb{R}^n$ 的所有一维子空间 (直线) 构成的集合.$n=2$ 时就是射影直线，$n=3$ 时就是射影平面. 在此处我们可以类似的命名 (1) 中的集合为 $\mathbb{F}_q$ 上的射影直线，不妨记为 $PL(q)$. 根据我们的定义，$PL(q) = \{V_0, V_1, V_2, \cdots, V_{q-1}, V_\infty\} \leftrightsquigarrow \mathbb{F}_q \bigcup \{\infty\}$(将每一个直线视作一个点)，我们将二者视为恒等的. 如果取 $\mathbb{F}_q^3$ 的二维子空间构成的集合则是射影平面 (有限射影平面, 有 q^2+q+1 个点和线，每条线上 $q+1$ 个点，每个点关联 $q+1$ 条线.)
(3) 任意 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} \in GL_2(q)$, 我们有 $A(k(i,1)^T) = k(ai+b, ci+d)$,$A(k(1,0)^T) = k(a,0)$. 等价的:

$$\begin{tikzcd} GL_2(q) \arrow[r, bend left] & PL(q) \arrow[r] & PL(q) \end{tikzcd}$$

$$z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a+b/z}{c+d/z}$$

2: 旋转群 SO(3) 是单群 (SO(n)?).
证明: 第一次习题课我们证明了 $SU(2)/\{\pm I_2\} \cong SO(3)$, 第四次作业说明了 $SU(2)$ 的包含 $\{\pm I_2\}$ 的正规子群和 $SO(3)$ 的正规子群是一一对应的，因此我们只需要说明 $SU(2)$ 的真包含 $\{\pm I_2\}$ 的正规子群 G 等于 $SU(2)$. 回顾:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \middle| |x|^2 + |y|^2 = 1, x, y \in \mathbb{C} \right\}$$

从线性代数我们知道任意 $A\in SU(2)$ 酉相似于对角矩阵, 特征多项式有共轭复根或都为 ± 1, 记为 $B_\varphi=\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \varphi\in[0,2\pi)$. 因此 $SU(2)$ 的每个共轭类都含有对角矩阵，而由于正规子群是共轭类的无交并，因此 G 包含一个对角矩阵 ($\neq \pm I_2$)，记为 $B_{\alpha_0}, \alpha_0\neq 0,\pi$. 自然的 $B_{\alpha_0}^{-1}=B_{2\pi-\alpha_0}\in G$, 故设 $0<\alpha_0<\pi$. 考虑 B_{α_0} 和 $\forall A\in G$ 的换位子:

$$
\begin{aligned}
[B_{\alpha_0},A] &= B_{\alpha_0}AB_{\alpha_0}^{-1}A^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\alpha_0} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-i\alpha_0} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} & -y \\ \bar{y} & x \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |x|^2+|y|^2e^{i2\alpha_0} & (e^{i2\alpha_0}-1)xy \\ (1-e^{-i2\alpha_0})\bar{x}\bar{y} & |x|^2+|y|^2e^{-i2\alpha_0} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$tr([B_{\alpha_0},A])=2|x|^2+|y|^2(e^{i2\alpha_0}+e^{-i2\alpha_0}=2(1-|y|^2)+2|y|^2(-2sin^2\alpha_0+1)=2(1-2|y|^2sin^2\alpha_0)$. 设 $[B_{\alpha_0},A]$ 和 B_{α_1} 共轭，故 $e^{i\alpha_1}+e^{-i\alpha_1}=2cos\alpha_1=2-4|y|^2sin^2\alpha_0\Rightarrow cos\alpha_1=1-2|y|^2sin^2\alpha_0\in[1-2sin^2\alpha_0,1]=[cos2\alpha_0,1]$，因为 $0\leq|y|^2\leq 1$.

不妨设 $2\alpha_0\leq 2\pi-2\alpha_0$(另一边类似)，则有 α_1 可以取遍 $[0,2\alpha_0],[2\pi-2\alpha_0,2\pi]$. 也就是说 $B_{\alpha_1}\in G,\forall\alpha_1\in[0,2\alpha_0]$. 因为对于任意的 $\alpha>0$, 存在 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得 $0<\alpha/n\leq 2\alpha_0$, 因此 $B_\alpha\in G,\forall\alpha$, 即 $G=SU(2)$. $\square$

Remark: 一般的,SO(2n+1) 是单群,SO(2n)/$\{\pm I_{2n}\}$ 是单群.

3: 如果域 F 有至少四个元素, 则 $SL_2(F)/\{\pm I_2\}$ 是单群 (一般的，$PSL_n(F_p)$ 呢?).

证明: 我们先给出一些需要用到的子群:

$$U=\left\{u(x)=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\middle| x\in F\right\}$$

$$V=\left\{v(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\middle| x\in F\right\}$$

$$D=\left\{d(x)=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}\middle| x\in F^*\right\}$$

$$B=DU=UD=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}\middle| x\in F^*, y\in F\right\}$$

.

取 $w=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 断言 $G=SL_2(F)$ 有双陪集分解 $G=B\bigcup BwB$. 实际上:

(a)$\forall A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G$, 若 $c=0$, 则 $A\in B$; 若 $c\neq 0$, 则 $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f & g \\ 0 & f^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -yf & -yg+xf^{-1} \\ -x^{-1}f & -x^{-1}g \end{pmatrix}$, 总是可以取到 x,y,f,g 使得其乘积为 A.

(b)$A\in B\bigcap BwB\Rightarrow -x^{-1}f=0$, 矛盾.

再考虑 $[G,G]=\{ABA^{-1}B^{-1}\in G|A,B\in G\}$, 容易证明 $[G,G]$ 是 G 的正规子群. $d(a)u(b)d(a)^{-1}u(b)^{-1}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & b(a^2-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 因此只需要 $a^2\neq 1$, 则可以得到 $U\subset[B,B]\subset U$, 故 $U=[B,B]\leq[G,G]$. 进而 $wUw^{-1}=V\leq[G,G]\Rightarrow w=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\in[G,G]\Rightarrow[G,G]=G$.

设 K 是 G 的正规子群, 则 $B\leq KB$. 若 $B=KB\Rightarrow K\in B\Rightarrow K=CKC^{-1}\subset\bigcap_{A\in G}ABA^{-1}=\{\pm I_2\}$.

若 $B\neq KB$, 则存在 $h\in KB\backslash B$ 且 $h=b_1wb_2\Rightarrow w\in KB\Rightarrow KB=G$. 从而 $w=kb, k\in K, b\in B\Rightarrow V=wUw^{-1}=kbUb^{-1}k^{-1}=kUk^{-1}=kk_1U\subset KU\Rightarrow KU=G$, 故 $G/K=KU/K\cong U/U\bigcap K$ 是交换群, 因此 $G=[G,G]\leq K\Rightarrow K=G$.

$\square$

Remark: 一般的, 若 $n\geq 3$, 则 $PSL_n(q)$ 是单群 (利用 Iwasawa 定理).