MATH 3011 运筹学 **秋季 2023**

Lecture 5: 运输问题概述

Lecturer: 陈士祥 *Scribes:* 陈士祥、*ChatGPT*

1 运输问题简介

网络中的运输问题是运筹学和优化理论中的一个基本问题，它涉及在一个网络上高效地分配和运输资源。在这个问题中，资源（如货物、信息或能源）需要从一个或多个供应地（源点）传输到一个或多个需求地（汇点），目标是最小化运输成本或最大化效率。

就数学模型而言，它们是线性规划的几个重要特例。针对线性规划模型已有多项式时间算法，因为网络模型的特殊数学结构，利用其结构特性还可以设计出效率更高的求解算法。

网络中的运输问题是运筹学和优化理论中的一个基本问题，它涉及在一个网络上高效地分配和运输资源。在这个问题中，资源（如货物、信息或能源）需要从一个或多个供应地（源点）传输到一个或多个需求地（汇点），目标是最小化运输成本或最大化效率。

运输问题的关键要素：

- 网络结构：通常表示为一个有向图，其中节点代表供应地、需求地或中转点，边代表运输路线，每条边可能有不同的运输成本和容量限制。
- 供应和需求：每个供应地都有一定量的可用资源，而每个需求地都有一定量的资源需求。
- 成本最小化：目标是找到一种运输计划，使得满足所有需求地的需求同时使得总运输成本最小。
- 容量限制：运输路线可能有容量限制，即每条路线上可以运输的最大资源量。

运输问题可以通过多种优化算法解决，其中包括：

- 线性规划：运输问题可以被公式化为线性规划问题，通过单纯形法或其他优化算法求解。
- 运输问题算法：特定的运输问题可以使用如西北角法、最小成本法或沃格尔近似法等专门算法进行初步解决，然后通过调整法优化。
- 网络流算法：一些运输问题可以转化为网络流问题，如最小费用流问题，并可以使用专门的网络流算法求解。

运输模型可扩展应用于其他领域，包括投资控制，工作调度，人员指派等。

2 一般运输模型

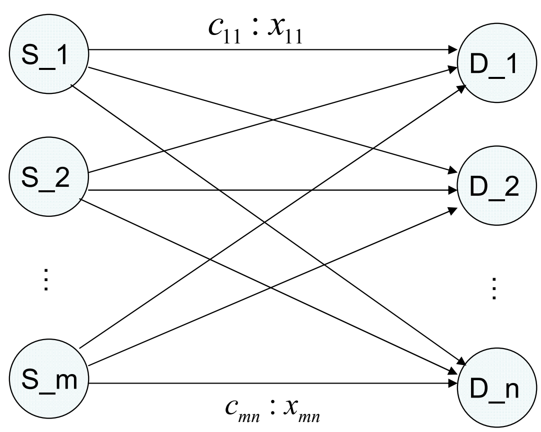
经典的运输问题：

工厂 i 生产的货物量 $s_i, i=1,2,\cdots,m$.

需求点 j 的需求量 $d_j, j=1,2,\cdots,n$.

从工厂 i 到需求点 j 的单位货运费用 c_{ij} 及其发货量 x_{ij}.

问题要求：选取一个能使运输总费用达到最小的路径规划。



如上图中的网络模型所示，每条边上，用 x_{ij} 表示从 i 到 j 的货物运输量, c_{ij} 表示单位货物运输成本。若要寻找满足要求的最低成本运输方式，有如下线性规划模型：

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i, i=1,\cdots,m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j, j=1,\cdots,n \\
& x_{ij} \ge 0, \quad i=1,\cdots,m \quad j=1,\cdots,n.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

上式中，约束 $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i$ 表示任意供货点 i 供货量不超过生产的总量 s_i; 约束 $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j$ 表示需求点 j 接受到的总量不少于 d_j. 由于供货量实际物理意义上是非负的，故有非负约束 $x_{ij} \ge 0, \forall i,j$.

Example 5.1 假设有如下供货地:*Los Angeles*、*Detroit*、*New Orleans* 和需求地 *Denver* 和 *Miami*。

下表是城市之间的运输单价，并且用 $i=1,2,3$ 分别表示 *Los Angeles*、*Detroit*、*New Orleans*; 用 $j=1,2$ 表示 *Denver* 和 *Miami*。

表 5.1: Transportation Cost per Car

	Denver($j=1$)	Miami($j=2$)
Los Angeles($i=1$)	\$80	\$215
Detroit($i=2$)	\$100	\$108
New Orleans($i=3$)	\$102	\$68

下表中，我们用在最右列和最下面一行，列出供货量和需求量，并用 x_{ij} 表示 i 到 j 的供应量。该表格的构成形式，将用来设计特殊的单纯形方法。

表 5.2: MG Auto Transportation Model

	Denver	Miami	**Supply**
Los Angeles	80 x_{11}	215 x_{12}	**1000**
Detroit	100 x_{21}	108 x_{22}	**1500**
New Orleans	102 x_{31}	68 x_{32}	**1200**
Demand	**2300**	**1400**	

所以，我们列出如下线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32} \\
\text{s.t.} \quad & x_{11} + x_{12} \le 1000 \quad \text{(LosAngeles)} \\
& x_{21} + x_{22} \le 1500 \quad \text{(Detroit)} \\
& x_{31} + x_{32} \le 1200 \quad \text{(NewOreleans)} \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 2300 \quad \text{(Denver)} \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 1400 \quad \text{(Miami)} \\
& x_{ij} \ge 0,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

我们下面将讨论如何改进单纯形法求解运输模型的线性规划问题。

2.1 运输模型产销平衡情形

考虑产销平衡的情形, 即 $\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j$. 进一步，我们只考虑恰好满足供需条件的情况，即约束均为等式的情况：

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i, i = 1, \cdots, m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, j = 1, \cdots, n \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m \quad j = 1, \cdots, n.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

对于供大于求(或供低于求),我们可以通过添加冗余变量,变换为供需平衡。例如,若 $\sum_{i=1}^m s_i > \sum_{j=1}^n d_j$, 可以假设存在额外的需求方 $n+1$, 令 $c_{i,n+1} = 0, i = 1, 2, \ldots, m$, 以及 $d_{n+1} = \sum_{i=1}^m s_i - \sum_{j=1}^n d_j$，从而可以构造供需平衡运输模型。

对于运输问题，若将其改写成标准形式的线性规划问题，其矩阵 A 形如：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & \dots & x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn}
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & \dots & 1 & & & & & & & & & \\
& & & & 1 & 1 & \dots & 1 & & & & & \\
& & & & & & & & \vdots & & & & \\
& & & & & & & & & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
& 1 & & & & 1 & & & \dots & & 1 & & \\
& & \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots & \\
& & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{bmatrix}$$

注意，这个矩阵并非行满秩，秩为 $n+m-1$, 故可行基解最多有 $n+m-1$ 的大于 0 的分量。

Theorem 5.1 运输问题有可行解的充分必要条件是供需平衡，即 $\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j$。

Proof: 必要性显然。充分性：令 $x_{ij} = \frac{s_i d_j}{T}, T = \sum_{i=1}^m s_i$, 可以验证此为可行解。 ∎

直接应用第二章的单纯形法，当然可以求解运输规划问题。然而，变量维度是 mn，单纯性表太大，不易操作。我们这里针对运输模型的特点，保留运输模型的表格形式，设计新的单纯形法。

2.2 表格作业法

首先，我们有如下运输问题的对偶形式

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j \\
\text{s.t.} \quad & u_i + v_j \le c_{ij}, \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n \\
& u_i, v_j \quad \text{无限制}
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

假设有一可行基解 (x_B, x_N) 以及对应的矩阵 A 的划分 (B, N).

根据对偶理论，若 x 为最优解，那么 $(u^T, v^T) = c_B^T B^{-1}$ 为对偶问题最优解。在非最优点处，我们仍记 $(u^T, v^T) = c_B^T B^{-1}$,

那么由 $(u^T, v^T) = c_B^T B^{-1}$：我们有减少量 $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - c_B^\top B^{-1} A_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

对基变量 x_{ij} 而言，减少量 $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - c_B^\top B^{-1} A_{ij} = 0$，故 $u_i + v_j = c_{ij}$, 即 $\sigma_{ij} := u_i + v_j - c_{ij} = 0$.

对非基变量 x_{ij} 而言，若 $\sigma_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$, 已对偶可行（因此说明原问题最优）；若 $\sigma_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0$, 非对偶可行（因此原问题非最优），则引进基。

运输模型的单纯形法求解步骤： 由于上面说到的，运输模型的矩阵 A 非行满秩，初始化可行基解一般采用下述的西北角算法（Northwest-Corner Starting Solution）。

1. 选取一组 $m + n - 1$ 个路径，用西北角算法选取初始可行基解，见表 5.4。

2. 检验当前解是否可改进 (表 5.5)，如果可改进，则找回路 (表 5.6) 引进一个非基变量进行步 3，否则停止。

3. 当把步 2 中挑选的变量引进时，确定哪个路径应当由基解中退出

4. 调整其他基本路径的流量（满足可行性），返回到步 2.

我们将以例子来说明运输模型的单纯形算法。

表 5.3: 某公司的运输表

	D(1)	D(2)	D(3)	D(4)	**Supply**
S(1)	10 x_{11}	2 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	**15**
S(2)	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	**25**
S(3)	4 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	**10**
Demand	**5**	**15**	**15**	**15**	

表 5.4: 算法迭代 1: （步骤 1: ）初始可行基解 (Northwest-Corner Starting Solution) 从左上角出发，令 $x_{11} = \min\{d_1, s_1\}$, 然后向下或者右，使得原问题达到所有等式成立。这样便得到一个初始可行基解 (蓝色值为可行变量)。

	D(1)	D(2)	D(3)	D(4)	**Supply**
S(1)	$c_{11}=10$ $x_{11} = 5$	2 **10**	20	11	**15**
S(2)	12	7 **5**	9 **15**	20 **5**	**25**
S(3)	4	14	16	18 **10**	**10**
Demand	**5**	**15**	**15**	**15**	

表 5.5: 算法迭代 1: (步骤 2:) . 令 $u_1 = 0$. 然后根据可行基解的对偶关系，解出所有 $n+m-1$ 组等式 $u_i+v_j = c_{ij}$, 这里 ij 属于可行基解下标。这样得到所有的对偶变量值。对非基变量，计算 $(u_i+v_j)-c_{ij}$ (红色方框中的值)，大于 0 的变量可以作为转轴，最大值作为入基变量。本例子中选取 x_{31} 作为入基变量。

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	**Supply**
$u_1 \equiv 0$	$c_{11} = 10$ $x_{11} = 5$	2 10	20 [-16]	11 [4]	**15**
$u_2 = 5$	12 $u_2 + v_1 - c_{21} =$ [3]	7 5	9 15	20 5	**25**
$u_3 = 3$	4 [9]	14 [-9]	16 [-9]	18 10	**10**
Demand	**5**	**15**	**15**	**15**	

Definition 5.1 (回路) *我们将表中* $x_{i_1j_1}, x_{i_1j_2}, x_{i_2j_2}, x_{i_2,j_3}, \ldots, x_{i_s,j_s}, x_{i_s,j_1}, x_{i_1j_1}$, $(i_1, i_2, \ldots, i_s$ *互不相同，且* $1 \le i_k \le m$, $j_1, j_2, \ldots, j_s$ *互不相同，且* $1 \le j_k \le m$, $1 \le k \le s)$ *形成的集合成为一个回路。*

表 5.6: 算法迭代 1：（步骤 2：）（找回路）从入基变量出发，寻找包含可行基解的回路。本例中，回路为：$x_{31}, x_{34}, x_{24}, x_{22}, x_{12}, x_{11}, x_{31}$. 在该回路中，令入基变量由 0 增加到值 θ, 并相应的更改回路中的其他值，使得原问题等式成立。

	$v_1 = 10$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	**Supply**
$u_1 \equiv 0$	(10) $5-\theta$	(2) $10+\theta$	(20) [-16]	(11) [4]	**15**
$u_2 = 5$	(12) [3]	(7) $5-\theta$	(9) 15	(20) $5+\theta$	**25**
$u_3 = 3$	(4) θ [9]	(14) [-9]	(16) [-9]	(18) $10-\theta$	**10**
Demand	**5**	**15**	**15**	**15**	

表 5.7: 算法迭代 1：（步骤 3：）确定出基变量，令 θ 为使得不等式 $x_{ij} \geq 0$ 的最大值。本例中，$x_1 1$ 和 x_{22} 处，$\theta = 5$ 相等，对应退化解。我们任选其中一个，让 x_{11} 出基。接着，更新对偶变量。

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	**Supply**
$u_1 \equiv 0$	(10) [-9]	(2) 15	(20) [-16]	(11) [4]	**15**
$u_2 = 5$	(12) [-6]	(7) 0	(9) 15	(20) 10	**25**
$u_3 = 3$	(4) 5	(14) [-9]	(16) [-9]	(18) 5	**10**
Demand	**5**	**15**	**15**	**15**	

表 5.8: 算法迭代 2:(步骤 2-3:)重复单纯形法第 2，3 步（确定入基变量，以及找回路）

	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 15$	**Supply**
$u_1 \equiv 0$	10 [-9]	2 $15-\theta$	20 [-16]	11 θ [4]	**15**
$u_2 = 5$	12 [-6]	7 $0+\theta$	9 15	20 $10-\theta$	**25**
$u_3 = 3$	4 5	14 [-9]	16 [-9]	18 5	**10**
Demand	**5**	**15**	**15**	**15**	

表 5.9: 算法迭代 3:（步骤 2-3）所有 $u_i + v_j - c_{ij}$ 为负数，得到最优解

	$v_1 = -3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 4$	$v_4 = 11$	**Supply**
$u_1 \equiv 0$	10 [-13]	2 5	20 [-16]	11 10	**15**
$u_2 = 5$	12 [-10]	7 10	9 15	20 [-4]	**25**
$u_3 = 7$	4 5	14 [-5]	16 [-5]	18 5	**10**
Demand	**5**	**15**	**15**	**15**	