难度大、
另也多

2019–2020 学年第一学期期终考试试题

考试科目: 线性代数 B1　　考试时间: 2020.01.14

学生所在系:________________　　姓名:________________

学号:________________　　得分:________________

一. 填空题 (每题 4 分, 共 24 分)

1. 设三维向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=2$. 则 $\beta\alpha^T$ 的特征值为 0, 0, 2

2. 设 4 阶矩阵 A 与 B 相似, I 为单位矩阵. 若矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3, 4, 则行列式 $|B^{-1}-I|=$ 0.

3. 已知矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

相似. 则 $a+b=$ −2.

4. 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

则 $A^{-1}=$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

且 A 的秩为 2. 则 $a=$ 6.

6. 设三阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足 $A^*=A^T$, 且 $a_{11}=a_{12}=a_{13}$. 则 $a_{11}=$ $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. 或 $a_{11}=0$

二. 判断题 (每题 5 分, 共 20 分)

1. 下列两矩阵是否相似? 是否相合? 说明理由.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

不相似. $\because P_A(\lambda)=\lambda(\lambda-3)^2$, 0,3,3 特征值.

A与B相合. 而B的特征值为 0,1,1.

$\therefore$ A与B不相似.

但 A与B 相合 $\because r=2$ (正) $s=0$ (负)

2. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times m$ 的矩阵, $AB=I$, 其中 I 为 m 阶单位矩阵. 则秩 (A) 是否一定等于秩 (B)? 说明理由.

是 $r(A)=r(B)$ $\because r(AB)\le \min(r(A),r(B))\le \min(m,n)$

又 $AB=I_m$ $\therefore r(AB)=m \Rightarrow r(A)=m$. $r(B)=m$.

3. 设 $a_{ij}=\frac{i}{j}$, $i,j=1,...,n$. 二次型 $f(x_1,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n)^2$ 的符号差是否为 n? 说明理由.

不是n. 是1. $\because f=X^TA^TAX\geq 0$ 而$r(A)=1$.

$A\neq 0$ $\therefore$ A^TA

$r(A^TA)=1$ $\therefore r-s=1$

4. 设方阵 A 的每行元素之和都为 1. 那么 A^5 的每行元素之和是否为 1? 说明理由.

是：令 $X=\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}$ 则 $AX=X$ $A^5X=A^4X=\cdots=X$

$\therefore$ A^5的每行元素之和为1

或：$\because \sum_{k=1}^{n} a_{ik}=1$ $i=1,\cdots n$

A^2的每行元素之和也为1. $(A^2)_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$ $i=1\cdots n$

$$\sum_{j=1}^{n}(A^2)_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{ik}}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\right)}_{1}$$

$=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}=1$ 由此，A^3, A^4, A^5的每行元素之和也为1.

三. 计算及证明题 (共 56 分)

1.(8 分) 设 3 阶实对称正交矩阵 A 非负定, $|A|=-1$, 且 $(1,1,1)^T$ 为对应于特征值 -1 的特征向量. 求 A.

解. 由题设. A正交. 又非负定, 又$|A|=-1$. $\therefore$ 特征值$1,1,-1$.

又 $x=(1\ 1\ 1)^T$为 的 V_1 的特征向量.

$\because A$对称. $V_{\lambda=-1}$ 与 $V_{\lambda=1}$ $\underline{正交}$, 求 $V_{\lambda=1}$的基: 设为 (x_1,x_2,x_3)

$x_1+x_2+x_3=0$ 可取解. $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ 取 $T=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

则. $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$ $\therefore A=T\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}$

$(\quad)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

2.(8 分) 令

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

$\alpha=(3,-1,2)^T$. 求 $\lim_{n\to+\infty}|A^n\alpha|$. 这里 $|\cdot|$ 表示向量的长度.

解. $\because$ $P_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \lambda-1 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2}\end{vmatrix} \xlongequal[-r_3\to r_1]{r_2\to r_1} (\lambda-1)^2(\lambda-\frac{1}{2})$

$\lambda_1=1$ $(\lambda I-A)X=0$ 解得 $X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=\frac{1}{2}$ $(\lambda I-A)X=0$,, ,, $X_2=(-1,1,0)^T$

$\alpha=(3,-1,2)=2X_1-X_2$

$\therefore A^n\alpha=2X_1-(\frac{1}{2})^nX_2 \xrightarrow{n\to\infty} 2X_1=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

$\therefore |A^n\alpha| \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

3.(8 分) 设 T 是 n 维线性空间 V 的线性变换, $n>1$, $\alpha\in V$. 设 $T^n\alpha=0$, 但是 $T^{n-1}\alpha\neq 0$.

(1) 求证: 向量组 $\alpha, T\alpha, ..., T^{n-1}\alpha$ 线性无关.

(2) 求证: T 不能对角化.

证: (1) 设 $\lambda_1\alpha+\lambda_2T\alpha+\cdots+\lambda_nT^{n-1}\alpha=0$.

用 T^i 作用于两端. 得到. $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

$i=(n-1,n-2,\ldots 1)$

$\therefore \alpha, T\alpha, \cdots T^{n-1}\alpha$ 线性无关.

(2) T在基 $\alpha, T\alpha, \cdots T^{n-1}\alpha$ 下的矩阵为: $\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}$

若T可对角化、即A可相似于对角阵(0阵).

则 $A=0$. 矛盾. $\therefore$ T不能对角化.

4.(6 分) 设 K 为集合$\{c_1+c_2x+c_3\cos x: c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}\}$ 在通常的函数加法和数乘下构成的线性空间. 定义内积 $\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,g(x)\,dx$. 从 $1,x,\cos x$ 出发, 构造 K 的一个标准正交基.

解: 令 $\alpha_1=1$ $\alpha_2=x$, $\alpha_3=\cos x$.

设 $e_1=\alpha_1/|\alpha_1|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $\left(\because (\alpha_1,\alpha_1)=\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot dx=2\pi\right)$

$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)\alpha_1}{(\alpha_1,\alpha_1)}=x-\frac{(x,1)}{(1,1)}\cdot 1=x-0=x$.

又 $(\beta_2,\beta_2)=\int_{-\pi}^{\pi}x\cdot x\,dx=\frac{2}{3}\pi^3$ $\therefore e_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}\pi^3}}$

$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\alpha_1)\alpha_1}{(\alpha_1,\alpha_1)}-\frac{(\alpha_3,\beta_2)\beta_2}{(\beta_2,\beta_2)}=\cos x-\frac{(\cos x,1)}{(1,1)}-\frac{(\cos x,x)}{(x,x)}x$

$=\cos x$. $e_3=\frac{\cos x}{\sqrt{(\cos x,\cos x)}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x$.

5.(8 分) 设

$$A=\begin{pmatrix}10&1&2&3&3\\1&10&2&1&0\\2&2&10&3&x\\3&1&3&10&x\\3&0&x&x&10\end{pmatrix}.$$

证明: 当 $|x|<3$ 时, $|A|<10^5$.

$|x|<3$ 时. A的各阶顺序主子式全>0.

A 对称正定 $|A|<a_{nn}\cdot|A_{n-1}|<\cdots<a_{11}\cdots a_{nn}$

6.(8 分) 设 t 为参数. 讨论以下二次曲面的类型: $x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+x_3-10=0$.

解: $f=(x_1+2x_2+x_3)^2-4x_2x_3-3x_2^2-(t-1)x_3^2+x_3-10$

$=(x_1+2x_2+x_3)^2-3(x_2+\frac{2}{3}x_3)^2+(t+\frac{1}{3})x_3^2+x_3-10$

$t\neq-\frac{1}{3}$ 时. 为双曲面型

$t=-\frac{1}{3}$ 时 为 双曲抛物面 (马鞍面).

7.(10 分) 设 K 是次数小于 3 的实系数多项式在通常的数乘及加法运算下构成的线性空间.

(1) 证明 $1, x+2, x^2+x+3$ 是 K 的一个基;

(2) 求线性变换

$$Tf := f'' - f$$

在这个基底下的矩阵;

(3) 求 T 的特征向量.

证: (1) 设 $\lambda_1+\lambda_2(x+2)+\lambda_3(x^2+x+3)=0$

$\Rightarrow (\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)+(\lambda_2+\lambda_3)x+\lambda_3x^2=0$

$\Rightarrow \lambda_3=\lambda_2=\lambda_1=0$ $\dim P^2=3$. $\therefore$ $1, x+2, x^2+x+3$ 是基.

(2) $\because$ $T(1)=-1$ $T(x+2)=-(x+2)$ $T(x^2+x+3)=2-(x^2+x+3)$

$\therefore$ $T(1\ \ x+2\ \ x^2+x+3)=(1\ \ x+2\ \ x^2+x+3)\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

设 $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 即为所求矩阵.

(3) A 的特征向量为: $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\therefore$ T 的特征向量为 $c_1+c_2(x+2)$ c_1, c_2 不同时为0.