微分方程

带年龄结构的人口发展模型

带年龄结构的人口发展模型

- 线性模型的建立

考虑一个稳定社会的人口发展过程。设人口数量不仅和时间 t 有关，还和年龄 a 有关。若人口数量很大，假设按年龄连续分布。以函数 $p(a, t)$ 表示人口在任意时刻 t 按年龄 a 的分布密度，则在时刻 t，年龄在区间 $[a, a+\mathrm{d}a]$ 中的人口数量为 $p(a, t)\mathrm{d}a$，因此在时刻 t 的人口总数为

$$N(t)=\int_0^{\infty} p(a,t)\,\mathrm{d}a$$

若不考虑死亡，则在时刻 $t+\Delta t$，年龄在$[a, a+\Delta a]$中的人口数量 $p(a, t+\Delta t)\Delta a$，应等于在时刻 t，年龄在区间$[a-\Delta t, a+\Delta a-\Delta t]$中的人口数量$p(a-\Delta t, t)\Delta a$，即

$$p(a,t+\Delta t)=p(a-\Delta t,t)$$

因此 $p(a, t)$应满足

$$\frac{p(a,t+\Delta t)-p(a,t)}{\Delta t}=\frac{p(a-\Delta t,t)-p(a,t)}{\Delta t}$$

令$\Delta t\to 0$，有

$$\frac{\partial p(a,t)}{\partial t}+\frac{\partial p(a,t)}{\partial a}=0$$

　　但实际上必须考虑死亡的影响。设$\mu(a)$是单位时间内年龄在$[a, a+\mathrm{d}a]$中的人口死亡概率，则在时间段$[t, t+\mathrm{d}t]$内，从年龄在区间$[a-\mathrm{d}t, a]$中的人口成长为年龄在区间$[a, a+\mathrm{d}t]$中的人口的过程中死亡人数为

$$p(a-\mathrm{d}t,t)\mathrm{d}a\cdot\mu(a)\mathrm{d}t$$

于是

$$p(a-\mathrm{d}t,t)\mathrm{d}a-p(a,t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}a=p(a-\mathrm{d}t,t)\mu(a)\mathrm{d}a\cdot\mathrm{d}t$$

或

$$p(a-\mathrm{d}t,t)-p(a,t+\mathrm{d}t)=\mu(a)p(a-\mathrm{d}t,t)\mathrm{d}t$$

将两端同时Taylor展开，并舍去高阶项，有

$$\frac{\partial p(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial p(a,t)}{\partial t}=-\mu(a)p(a,t) \qquad \textbf{(1)}$$

这就是描述人口发展的一阶双曲型偏微分方程。

方程 **(1)** 对应的初始条件为 $p(a,0)=p_0(a)$，这里 $\boldsymbol{p_0(a)}$ 表示初始人口分布密度。

要给出方程 **(1)** 所对应的边界条件 $\boldsymbol{p(0,\ t)}$，就需要考虑人口的出生情况了。假设男女比例基本平衡，生育率为$\boldsymbol{\beta(a)}$，则在时间段$\mathbf{[}\boldsymbol{t},\ \boldsymbol{t}\mathbf{+d}\boldsymbol{t}\mathbf{]}$内出生的婴儿总数为

$$\left(\int_0^{\infty}\beta(a)p(a,t)\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t$$

另一方面，在时间段[t, t+dt]内出生的婴儿总数应等于时刻 t+dt 在年龄区间[0,dt]中的人数p(0, t+dt)dt，即

$$p(0,t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}t=\left(\int_0^{\infty}\beta(a)p(a,t)\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}t$$

或

$$p(0,t+\mathrm{d}t)=\int_0^{\infty}\beta(a)p(a,t)\mathrm{d}a$$

令dt→0，则得到边界条件

$$p(0,t)=\int_0^{\infty}\beta(a)p(a,t)\mathrm{d}a$$

方程 (1) 与初始条件、边界条件一起便构成了人口发展的偏微分方程模型：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial p(a,t)}{\partial a}+\dfrac{\partial p(a,t)}{\partial t}=-\mu(a)p(a,t), \quad a>0,\ t>0 \\
p(a,0)=p_0(a), \quad a\ge 0 \\
p(0,t)=\int_0^{\infty}\beta(a)p(a,t)da, \quad t\ge 0
\end{cases}
\tag{2}
$$

同样，可建立带迁移的人口模型：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial p(a,t)}{\partial a}+\dfrac{\partial p(a,t)}{\partial t}=-\mu(a)p(a,t)+f(a,t), \quad a>0,\ t>0 \\
p(a,0)=p_0(a), \quad a\ge 0 \\
p(0,t)=\int_0^{\infty}\beta(a)p(a,t)da, \quad t\ge 0
\end{cases}
\tag{3}
$$

其中 $f(a,t)$ 为迁移率。

利用特征线法结合积分变换法，可以得出模型(2)及模型(3)的解。

- 非线性模型的建立

我们再考虑环境对人口的影响。设

$$N(t)=\int_0^{+\infty} p(a,t)\mathrm{d}a$$

表示 t 时刻的社会总人口数。考虑到人口的生存与其总容量有关，一般可用 $\mu(a, t, N(t))$ 表示死亡率，用 $\beta(a, t, N(t))$ 表示年龄为 a 的社会人口在 t 时刻平均单位时间内的平均生育率，即生育率。我们再考虑人口迁移因素，设 $f\,(a, t)$ 表示 t 时刻年龄为 a 的社会人口在单位时间、单位年龄内的迁移人数，则有更一般的非线性人口发展系统：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial p(a,t)}{\partial a}+\dfrac{\partial p(a,t)}{\partial t}=-\mu(a,t,N(t))\,p(a,t)+f(a,t), \\
\hfill a>0,\ t>0 \\
p(a,0)=p_0(a),\quad a\geq 0 \\
p(0,t)=\int_0^{\infty}\beta(a,t,N(t))\,p(a,t)da,\quad t\geq 0 \\
N(t)=\int_0^{\infty}p(a,t)\mathrm{d}a,\quad t\geq 0
\end{cases}
\tag{4}
$$

模型**(4)**是非线性偏微分方程定解问题，很难求解！目前常用数值计算方法寻找近似解。