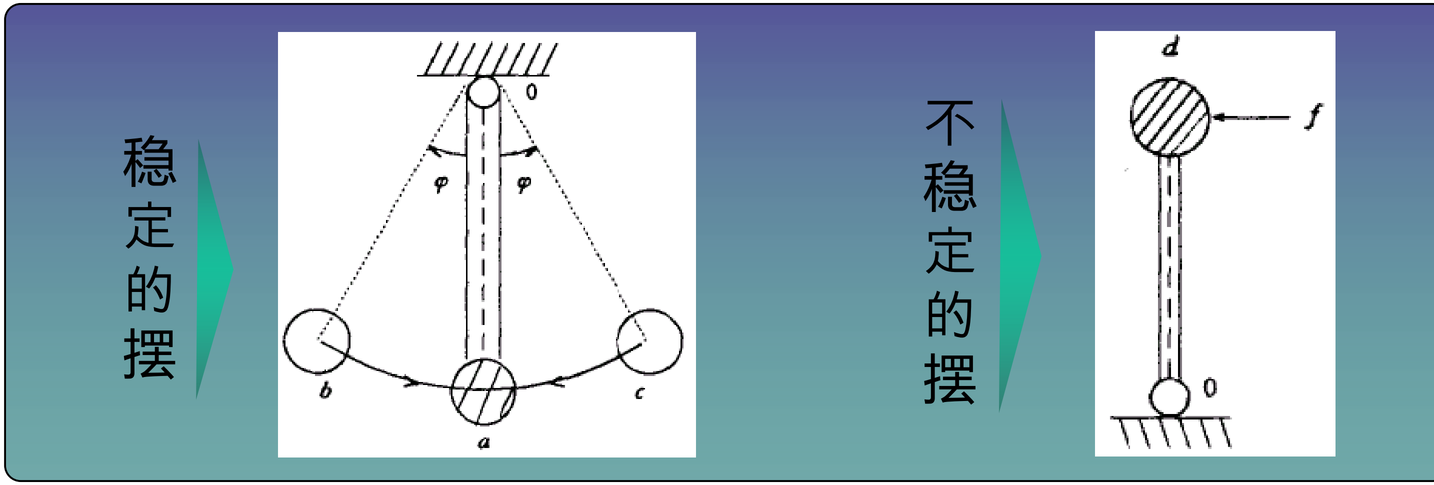
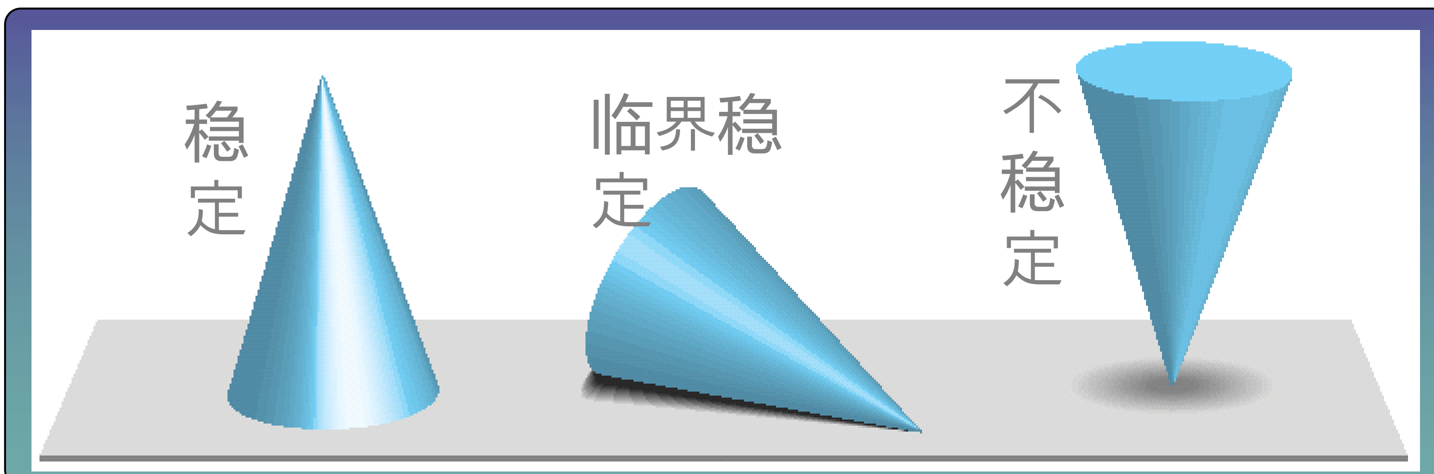
微分方程

系统稳定性的
物理说明与注记

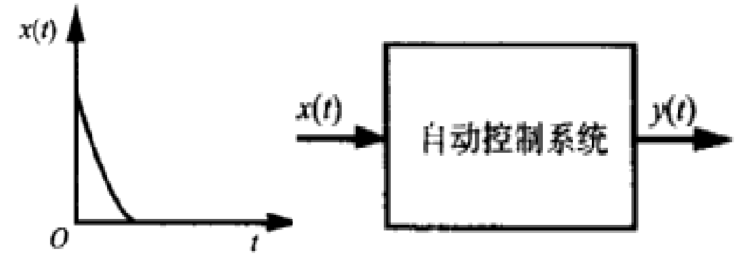
系统稳定性的物理定义

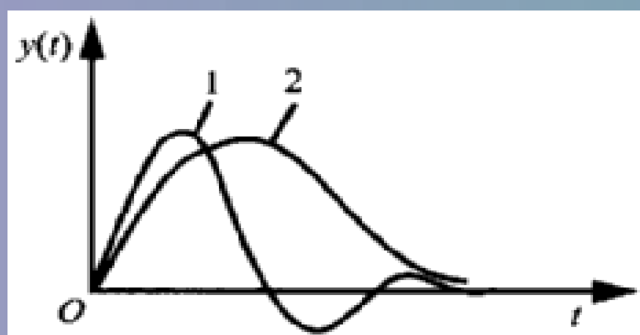
- 稳定与不稳定的现象



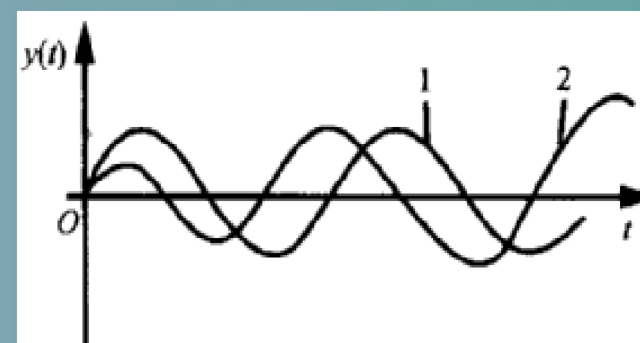


- **稳定性：** 一个系统称之为稳定的，是指系统在外部扰动作用下偏离其原来的平衡状态，当扰动作用消失后，系统仍能自动恢复到原来的平衡状态。





稳定

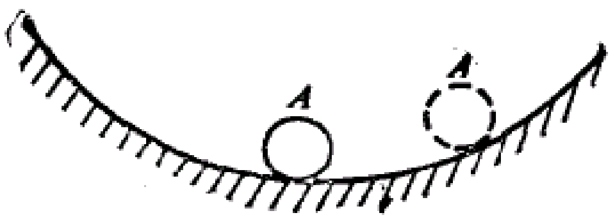


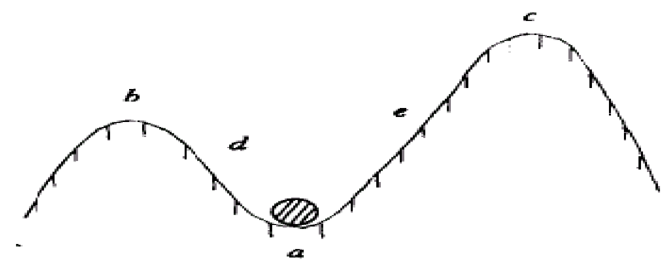
不稳定

- 线性系统的稳定性是系统自身的固有特性，取决于系统本身的结构和参数，与输入无关。
- 以上定义只适用于线性定常系统。

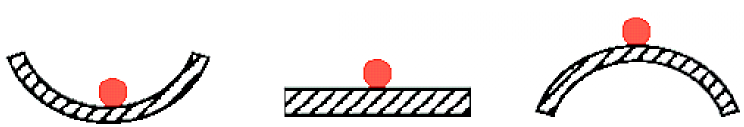
稳定性的其他说法

- 大范围渐近稳定：不论扰动引起的初始偏差有多大， 当扰动取消后，系统都能够恢复到原有的平衡状态，否则就称为小范围(小偏差)稳定。注意：对于线性系统，小范围稳定➔大范围稳定。





- 临界稳定：若系统在扰动消失后，输出与原始的平衡状态间存在恒定的偏差或输出维持等幅振荡，则系统处于临界稳定状态。



- 说明：经典控制论中，临界稳定也视为不稳定。因为
  ① 分析时依赖的模型通常是简化或线性化的；
  ② 实际系统参数的时变特性；
  ③ 系统必须具备一定的稳定裕量。

Routh-Hurwitz稳定判据

- **Routh-Hurwitz判据：多项式稳定当且仅当Routh-Hurwitz矩阵的主要子矩阵其行列式形成的数列均为正值(现在都是直接用计算机求解多项式)。**列写Routh-Hurwitz行列式，是利用Routh-Hurwitz判据进行系统稳定性分析的主要工作，其步骤如下:

① 列写系统特征方程

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

② 由系统特征方程的各项系数排成Routh-Hurwitz行列表的前两行

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\ s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \end{array}$$

其中，第一行为s^n、s^{n-2}、s^{n-4}... 的各项系数依次排成；第二行为s^{n-1}、s^{n-3}、s^{n-5}...的各项系数依次排成。

③ 计算行列式的其余各行

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & \\
s^1 & f_1 & & & \\
s^0 & g_1 & & &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccc}
b_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_1} & b_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_5 & a_1 \end{vmatrix}}{a_1} & \cdots \\
c_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}}{b_1} & c_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_5 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}}{b_1} & \cdots \\
d_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_2 & b_1 \\ c_2 & c_1 \end{vmatrix}}{c_1} & d_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}}{c_1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

□ 计算Routh-Hurwitz行列式的每一行都要用到该行前面两行的数据。

■ 例如6阶特征方程 $a_0 s^6 + a_1 s^5 + a_2 s^4 + a_3 s^3 + a_4 s^2 + a_5 s + a_6 = 0$

其R—H行列式为

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^6 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\
s^5 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\
s^4 & \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} = b_1 & \dfrac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} = b_2 & \dfrac{a_1 a_6 - a_0 \cdot 0}{a_1} = b_3 & 0 \\
s^3 & \dfrac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} = c_1 & \dfrac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} = c_2 & \dfrac{b_1 \cdot 0 - a_1 \cdot 0}{b_1} = 0 & \\
s^2 & \dfrac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} = d_1 & \dfrac{c_1 b_3 - b_1 \cdot 0}{c_1} = d_2 & 0 & \\
s^1 & \dfrac{d_1 c_2 - c_1 d_2}{d_1} = e_1 & 0 & & \\
s^0 & \dfrac{e_1 d_2 - d_1 \cdot 0}{d_1} = f_1 & 0 & &
\end{array}
$$

- **Routh-Hurwitz判据** ——实质是对Routh-Hurwitz行列表中的“**第一列**”各数的符号进行判断：

  1） 如果符号相同，说明系统具有正实部的特征根的个数等于零，系统稳定；
  2） 如果符号不同，则符号改变的次数等于系统具有正实部的特征根的个数，系统不稳定。

- 系统稳定的充分必要条件 —— **Routh-Hurwitz行列式的第一列元素不改变符号！**

- 注：通常a_0>0，因此， Routh-Hurwitz稳定判据可以简述为——Routh-Hurwitz阵列表中第一列的各数均大于零。

李雅普诺夫第二方法

- **李雅普诺夫第二法又称为直接法**
  - 它是在用能量观点分析稳定性的基础上建立起来的。
    - ✓ 若系统平衡态渐近稳定，则系统经激励后，其储存的能量将随着时间推移而衰减。当趋于平衡态时，其能量达到最小值。
    - ✓ 反之，若平衡态不稳定，则系统将不断地从外界吸收能量，其储存的能量将越来越大。
  - 基于这样的观点，只要能找出一个能合理描述动态系统的n维状态的某种形式的能量正性函数，通过考察该函数随时间推移是否衰减，就可判断系统平衡态的稳定性。

- **李雅普诺夫稳定性定理的直观意义**

从平衡态的定义可知，平衡态是使得系统静止不动（导数为零）的状态。

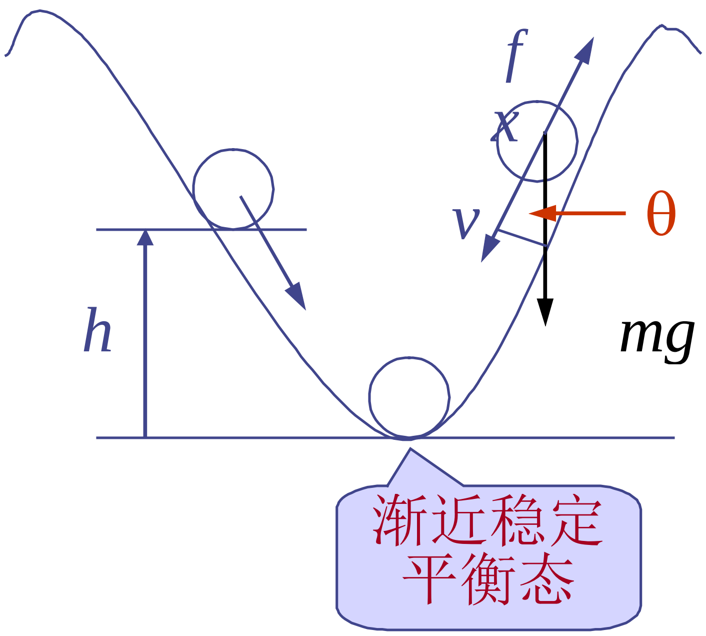
- 从能量的观点来说，静止不动即不存在运动变化所需要的能量，即变化所需的能量为零。
- 通过分析状态变化所反映的能量变化关系可以分析出状态的变迁或演变，可以分析出平衡态是否稳定或不稳定。

李雅普诺夫稳定性定理的直观意义

右图所示动力学系统的平衡态在一定范围内为渐近稳定的平衡态。

- 对该平衡态的邻域，可定义其能量(动能+势能)函数如下：

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}mv^2 + mgh \\
&= \frac{1}{2}mx'^2 + mg(x\cos\theta) > 0
\end{aligned}
$$



其中x为位移，x'为速度，两者且选为状态变量。

- 在图中所示状态，$v=-x'$，由牛顿第二定律可知，其运动满足如下方程：

$$m(-x'')=mg\cos\theta-fmg\sin\theta$$

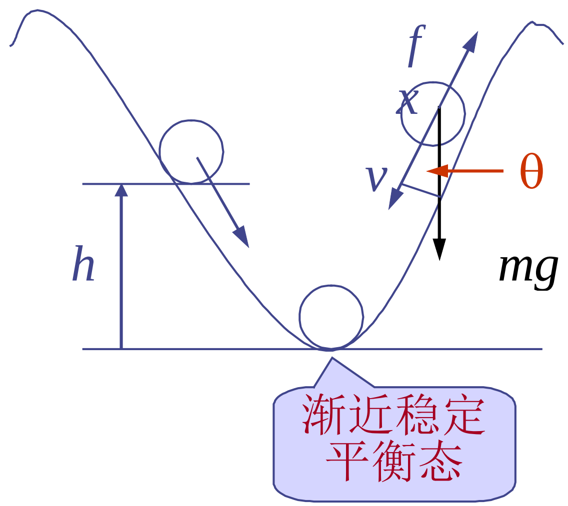
其中f为摩擦阻尼系数。

因此, 有

$$Mx''=-mg(\cos\theta-f\sin\theta)$$

能量的变化趋势(导数)为

$$V'=mx'x''+mgx'\cos\theta$$
$$=-mgx'(\cos\theta-f\sin\theta)+mgx'\cos\theta$$
$$=mgx'f\sin\theta$$



x'

当θ取值为[0, 90°], 由于v的方向与x相反，x'为负, 因此上式恒小于零, 即渐近稳定的平衡态, 其正定的能量函数的导数(变化趋势)为负

- 对小球向上运动时亦可作同样分析

- 从直观物理意义的角度, 也非常易于理解。
  - 由于物体运动所受到的摩擦力作负功, 由能量守恒定律可知, 物体的能量将随物体运动减少, 即其导数(变化趋势)为负。

李雅普诺夫定理的几点注记

- 李雅普诺夫定理是判别系统稳定性的一个重要方法。
  - 它不仅适用于线性系统,也适用于非线性系统;既适用于定常系统,也适用于时变系统。因此，李雅普诺夫第二方法是判别系统稳定性的具有普遍性的方法。
  - 李雅普诺夫稳定性理论是进行现代系统分析和设计的基础工具。

- 对李雅普诺夫稳定性定理有如下说明:

1） 此定理只为判别系统一致渐近稳定的充分条件,而非必要条件。

2） 对于渐近稳定的平衡态,满足条件的李雅普诺夫函数总是存在的,但并不唯一。

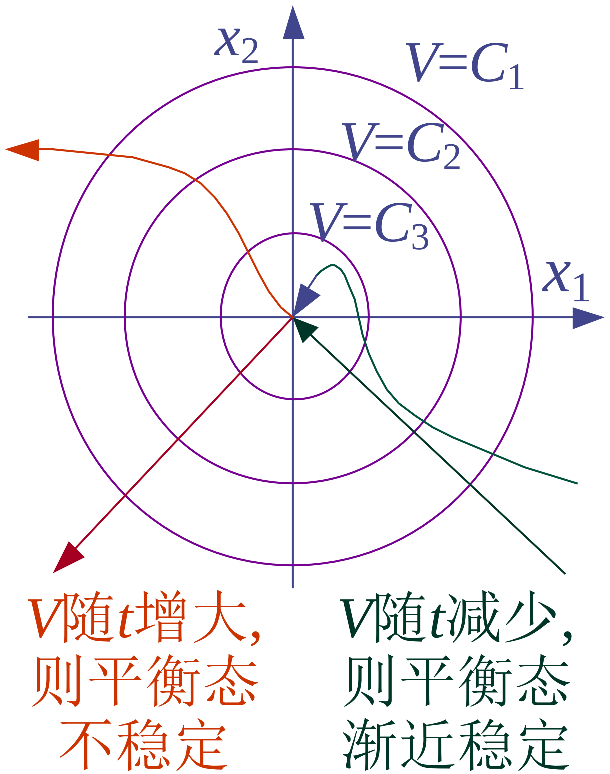
3） 对于非线性系统,虽然具体的李雅普诺夫函数可证明所讨论的系统在平衡态的邻域内是渐近稳定的,但并不意味着在其他的区域系统是或不是渐近稳定的;

4） 此定理不仅适用于线性系统,同样适用于非线性系统;既适用于定常系统,同样也适用于时变系统。

5） 李雅普诺夫第二方法的结论没有指明寻找李雅普诺夫函数的方法。

李雅普诺夫函数的直观几何解释

对于二阶系统, 容易给出上述定理的直观几何解释(右图为李雅普诺夫函数$V(\mathbf{x},t)$为欧氏距离的一个二维系统的x_1-x_2相平面图)。



- 李雅普诺夫函数$V(\mathbf{x},t)$相当于定义为表征系统的某种广义能量的一种正定函数。
- 令$V(\mathbf{x},t)$为不同的常数, 则相当于在n维状态空间上定义了一簇以原点为中心, 形状相似的同心超球面。
- 导函数$V'(\mathbf{x},t)$表征系统的广义能量函数的变化速率。
  - ✓ $V'(\mathbf{x},t)$为负定同时也表示系统状态将从现在所处于的在该封闭超球面簇中超球面向原点方向(向内)运动, 最后逐渐趋向原点。