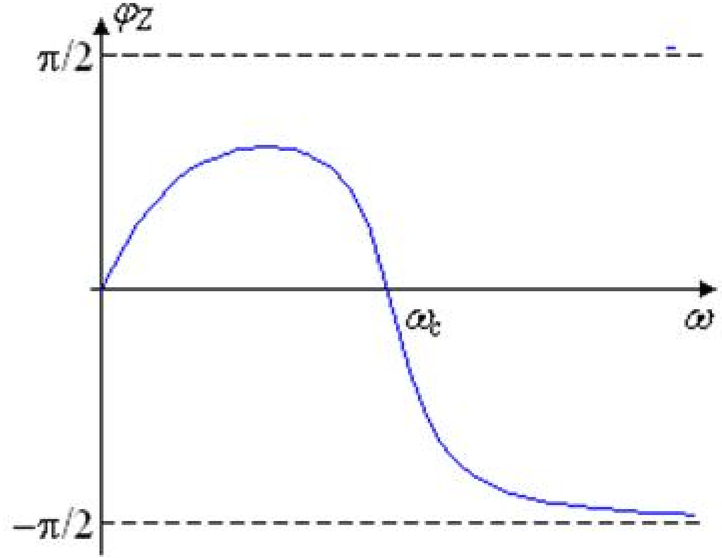
思考题讨论

- 思考题9.2 图9.13b中为何

  1) ω=0和ω_c时φ_Z=0？

  2) $\omega\rightarrow\infty$时φ_Z=−π/2？

  3) Q>>1时$\varphi_{Z\max}$=π/2？



特别思考题

- **思考题7.7** 对7.6的再思考：已知L_2=0.99L_1，k=0.99，求同名端并接时两线圈的总自感L。

- **思考题7.8** 两线圈并接的总自感公式可简化为 $g(x,y)=\dfrac{x(1-y^2)}{1+x-2y\sqrt{x}}$，仿照此式构造函数$f(x, y)$，要求：

  1) 当$x\neq1$, y=1时，f=0；当x=1, y=1时，f=1。

  2) 当x和y均略小于1时，f也略小于1。

- 思考题9.2 解答

1) ω=0，电感无感，电容失容，纯电阻电路，所以φ_Z=0。随着ω增大，电感支路阻抗增加，电容支路阻抗下降，当$\omega=\omega_c$时，两条支路阻抗近似相等，但相位相反，总复阻抗为实数，所以φ_Z=0。

2) $\omega\to\infty$时电感支路阻抗$\to\infty$，电容支路阻抗$\to 0$，电容支路电流贡献总电流主要成分，容性电路，$\varphi_Z=-\pi/2$。

3) 当ω在0和ω_c之间时，电感支路阻抗小于电容支路阻抗，总电路是感性电路，$\varphi_Z>0$，必然存在峰值，在$Q>>1$时，$\varphi_{Z\max}\to\pi/2$。

- 思考题7.7 解答

$$L=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}=\frac{L_1L_2(1-k^2)}{L_1+L_2-2k\sqrt{L_1L_2}}$$

$$=\frac{0.99(1-0.99^2)}{1.99-1.98\sqrt{0.99}}L_1=0.988764$$

- 思考题7.8 解答 f_1和f_2，是否正确？

$$f_1(x,y)=\frac{x(1-y)}{1-xy},\quad f_2(x,y)=\frac{2x(1-y)}{1+x^2-2xy}$$

第二十九讲 2022-06-14

第10章 麦克斯韦电磁理论

§10.1 麦克斯韦方程组

§10.2 平面电磁波

§10.3 电磁场的能量、动量和角动量

- 电磁普遍规律的缺失

  静电场、静磁场、稳恒电流、电流磁效应、电磁感应以及似稳交变电流的规律，都是大量实验事实的总结，具有正确性；但又只在一定条件下成立，具有局限性。⇒ 它们不是电磁现象的普遍规律。

- 两个假设、两个推广

  麦克斯韦以这些实验规律为基础，大胆提出“涡旋电场”和“位移电流”假设，把静电场、静磁场和电磁感应规律中的核心部分推广到时变电磁场情形，概括为具有优美数学形式的麦克斯韦方程组。

- 两个预言

➢ 预言电磁波的存在：麦氏方程组不仅能解释当时已知的一切电磁现象，还能导出电磁场波动方程。

➢ 预言光波是电磁波：从真空波动方程得到的电磁波速度恰好为真空中的光速。

- 麦克斯韦电磁理论的意义

物理学史上的一个伟大创举，开辟了无线电时代的新纪元，大大促进了科学技术和人类文明的发展。

爱因斯坦：“自牛顿以来，物理学经历最深刻、最富有成果的、真正的、概念上的变革。”

10.1 麦克斯韦方程组

- 静电场的基本定理 (蓝-积分，红-微分，以下同)

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \rho_0 \mathrm{d}V, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_0,$$

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{E} = 0.$$

- 静磁场的基本定理

$$\oiint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0,$$

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \boldsymbol{j}_0\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \quad \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_0.$$

- 电荷守恒 $\oiint_S \boldsymbol{j}_0\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iiint_V \frac{\partial\rho_0}{\partial t}\mathrm{d}V, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial\rho_0}{\partial t} = 0.$
- 稳恒条件 $\oiint_S \boldsymbol{j}_0\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{j}_0 = 0.$
- 电磁力 $\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B}), \quad \boldsymbol{f}=\rho(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B}).$

- 以上基本规律是否适于随时间变化的电磁场？如果不适，是推倒重来还是合理变革？(革命与改良)
- 麦克斯韦采用了后一策略，在作了两个大胆推广和两个重要假设后，建立了反映电磁现象普遍规律的麦克斯韦方程组。

1. 两个推广

- 麦克斯韦认为静电场和静磁场的通量定理对随时间变化的电、磁场同样适用，即

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_V \rho_0\mathrm{d}V,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_0.$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0,\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

- 这两个推广的基础是:

➢ 电荷是电场的“源”，对随时间变化的电场也正确。

➢ 为使电磁感应定律成立，磁感应线应是闭合的，对随时间变化的磁场也正确。

2. 两个假设

- 涡旋电场假设

随时间变化的磁场会激发涡旋电场，这种非静电力产生感生电动势。于是，结合法拉第电磁感应定律与涡旋电场假说，得到一般电场的环路定理:

$$\mathcal{E} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

- 位移电流假设

➢ 与电流 (传导、极化、磁化电流) 一样，随时间变化的电场也能激发磁场。

➢ 引入位移电流密度 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{d}} \equiv \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$,

其中右边第一项表达电场随时间的变化率，第二项表示束缚电荷的微观运动产生的极化电流。

➢ 于是，一般磁场的环路定理为

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S (\boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{j}_{\mathrm{d}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S (\boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

那么这个假设是如何想到的呢？

- 位移电流假设的合理性

➢ 静磁场由稳恒电流产生，稳恒电流满足的稳恒条件

$$\oiint_S \boldsymbol{j}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

保证了 $\iint_{S_C} \boldsymbol{j}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 对任意以C为边界的曲面S_C不变。

于是安培环路定理 $\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_{S_C} \boldsymbol{j}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 才有意义。

➢ 含时磁场由非稳恒电流产生，满足电荷守恒定律

$$\oiint_S \boldsymbol{j}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}q_0}{\mathrm{d}t}. \Leftarrow \oiint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q_0$$

$$\iint_S \boldsymbol{j}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

即

$$\oiint_S (\boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

➢ 若定义位移电流密度$\boldsymbol{j}_\mathrm{d} \equiv \partial \boldsymbol{D}/\partial t$，便得

$$\oiint_S (\boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{j}_\mathrm{d}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

此式能保证

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_{S_C} (\boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{j}_\mathrm{d}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

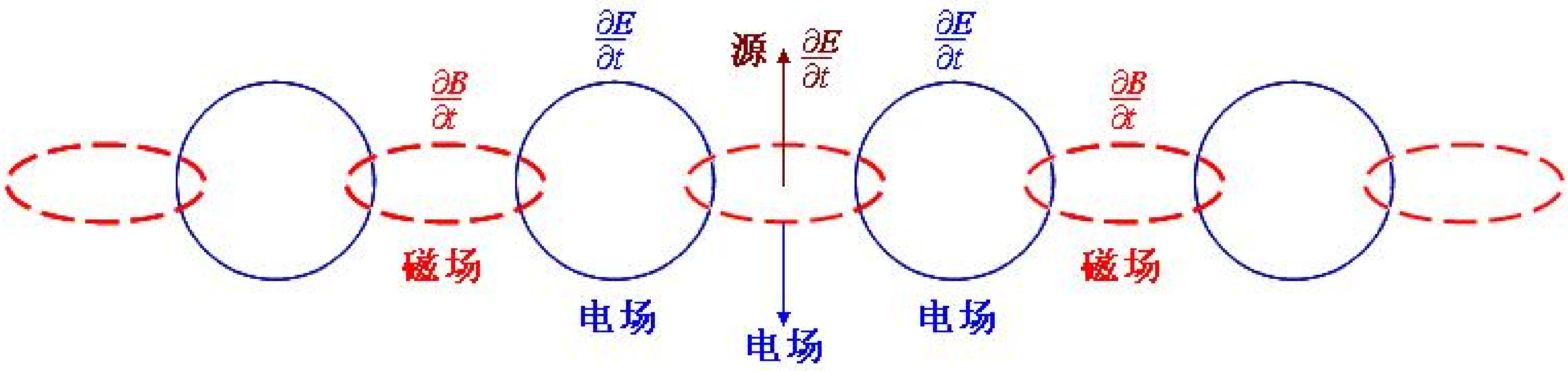
的右边对任意以C为边界的曲面S_C不变。此即新环路定理，是电荷守恒定律和位移电流假说的合理产物。

- 位移电流的本质

$$\boldsymbol{j}_\mathrm{d} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t},$$

其中$\partial \boldsymbol{P}/\partial t$表示极化电流，不包含新物理。但$\partial \boldsymbol{E}/\partial t$项表明，时变电场与极化、传导电流一样能产生磁场。

- 由此得到电磁波传播的物理图像



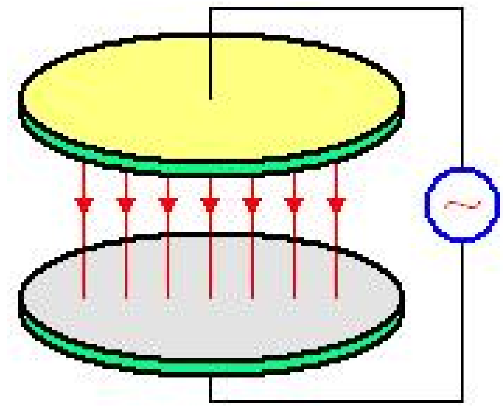
- 位移电流与传导电流的区别

➢ 位移电流并非自由电荷的定向运动所产生，在真空和电介质中也存在；

➢ 它不伴随焦耳热效应；

➢ 它不受外磁场作用。

[例10.1] 两块半径为R的圆形极板组成的一个平板电容器，接到一交流电源上，使得两极板之间的电场按照$E=E_0\sin\omega t$振荡。假定电容器里面的电场均匀，并忽略电容器的边缘效应。



1) 电容器内外的感应磁场是多少？

2) 电容器上的位移电流是多少？

3) 设$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t=10^{12}\mathrm{Vm^{-1}s^{-1}}$，$R$=5.0cm，求 $r=R$处的磁感应强度和电容器的位移电流。

[解]1) 由含时环路定理 $\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_{S_C}\partial \boldsymbol{D}/\partial t\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 得

内部：$2\pi rB/\mu_0=\pi r^2\varepsilon_0\partial E/\partial t$, $\rightarrow B=(r/2)\mu_0\varepsilon_0\omega E_0\cos\omega t$,

外部：$2\pi rB/\mu_0=\pi R^2\varepsilon_0\partial E/\partial t$, $\rightarrow B=(R^2/2r)\mu_0\varepsilon_0\omega E_0\cos\omega t$.

2) $I_d=\pi R^2\partial D/\partial t=\varepsilon_0\omega\pi R^2E_0\cos\omega t$.　　**3)** 2.8×10^{-7}T, 0.07A.

3. 麦克斯韦方程组

积分形式　　　　　　　　微分形式

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \rho_0 \mathrm{d}V, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_0,$$

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\iint_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t},$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0,$$

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \left(\boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \qquad \nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}.$$

- 边值关系：从积分形式出发，作柱形曲面或矩形回路横跨并无限接近两介质界面，可以求得

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\sigma_0, \quad (1) \qquad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0, \quad (3) \qquad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{i}_0. \quad (4)$$

其中σ_0和i_0分别是界面的面电荷密度和面电流密度。

第二个和第四个边值关系与稳恒情况相同！

关键原因：对狭长回路，积(2)式和(4)式中$\partial \boldsymbol{B}/\partial t$或$\partial \boldsymbol{E}/\partial t$的面积分可以忽略。

- 电荷守恒定律不独立，隐含于麦氏方程组中

证明 (以微分形式为例)

将微(4)式求散度得

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla\cdot\boldsymbol{j}_0+\nabla\cdot(\partial\boldsymbol{D}/\partial t)=\nabla\cdot\boldsymbol{j}_0+\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{D})/\partial t.$$

上式左≡0，右边第二项利用高斯定理$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_0$简化，

$$\rightarrow 0=\nabla\cdot\boldsymbol{j}_0+\partial\rho_0/\partial t.$$

回顾：我们在引入位移电流建立一般磁场环路定理的过程中用到了电荷守恒定律，所以该定律不再独立。

10.2 平面电磁波

1. 波动方程

- 自由空间中ρ_0=0，j_0=0，对于均匀各向同性线性介质，麦氏方程可简化为

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0, & (1) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{H}=0, & (2) \\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu\partial\boldsymbol{H}/\partial t, & (3) \\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\partial\boldsymbol{E}/\partial t. & (4) \end{cases}$$

- 理论推导：对(3)式作旋度操作得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})=-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2},$$

由$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，上式左$=\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}$，

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ \nabla^2\boldsymbol{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0,\\ \text{类似有}\nabla^2\boldsymbol{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}=0.\end{aligned}\right\}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\dfrac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\boldsymbol{E}=0,\\ \dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}-\dfrac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\boldsymbol{H}=0.\end{cases}$$

这是典型的波动方程，可见脱离了场源的电磁场以波的形式在无界的、自由的线性均匀各向同性介质中传播，这就是电磁波，其传播速度为

$$\upsilon=\sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}}=c\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{\mu\varepsilon}},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}.$$

c是真空光速，由此可以预言光即是电磁波。

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu\varepsilon}\nabla^2\boldsymbol{E}=0$$ 的解为什么是波动解？

上述方程的简化版 $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\upsilon^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$

由于 $\frac{\partial f(x\pm\upsilon t)}{\partial t}=\pm\upsilon\frac{\partial f(x\pm\upsilon t)}{\partial x}$，

$\Rightarrow$ $f_1(x-\upsilon t)$和$f_2(x+\upsilon t)$均为方程的解，

$\Rightarrow$ 方程通解为$f=c_1 f_1(x-\upsilon t)+c_2 f_2(x+\upsilon t)$，

其中c_1和c_2为任意常数。

$f_1(x-\upsilon t)$表示沿x轴正向传播的波动，

$f_2(x+\upsilon t)$表示沿x轴负向传播的波动。

2. 定态电磁波的解

- 进一步设电磁波的激发源以频率ω作简谐振动，因而辐射的电磁波也以ω作同频简谐振动。这种波称为定态电磁波或单色波。
- 非单色电磁波，可以用傅里叶分析方法分解为不同频率的单色波叠加。
- 设存在平面电磁波解 (不妨沿正z轴传播)，即场强只是z的函数，在与z轴正交的平面上各点取值相同：

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(z)e^{-\mathrm{j}\omega t}, \\ \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(z)e^{-\mathrm{j}\omega t}. \end{cases} \qquad (*)$$

- 将这一形式解分别代入两个波动方程中，立即得到

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{E}(z)}{\mathrm{d}z^2} + \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{E}(z) = 0, \\
\dfrac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{H}(z)}{\mathrm{d}z^2} + \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{H}(z) = 0.
\end{cases}
$$

其解为

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}(z) = \boldsymbol{E}_0 e^{\mathrm{j}kz}, \\
\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{H}_0 e^{\mathrm{j}kz}.
\end{cases}
$$

其中$\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{H}_0$是常数矢量，由已知的激发源确定，代表电场和磁场的振幅；$k \equiv \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. 于是有

$$
\omega / k = c\sqrt{\mu_0\varepsilon_0 / \mu\varepsilon} = \upsilon \quad \text{(电磁波速度)}
$$

- 波数$k=\omega/\upsilon=2\pi f/\upsilon=2\pi/\lambda$，表示在空间中$2\pi$(米)长度上有多少个空间周期的电磁波。
- 将$\boldsymbol{E}(z)$和$\boldsymbol{H}(z)$的解代入形式解(*)中得

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_0 e^{\mathrm{j}(kz-\omega t)}, \\ \boldsymbol{H}(z,t) = \boldsymbol{H}_0 e^{\mathrm{j}(kz-\omega t)}. \end{cases}$$

更一般的写法为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}, \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}_0 e^{-\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}. \end{cases}$$

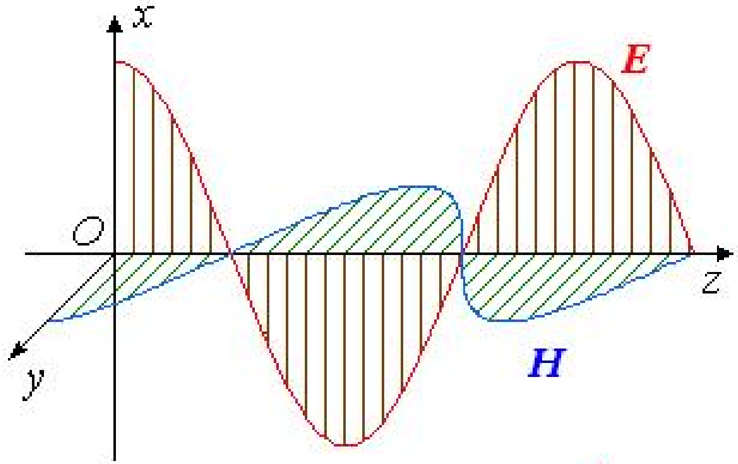
其中$\boldsymbol{k}$又称波矢，其方向定义为电磁波传播方向，大小为$2\pi/\lambda$，$\boldsymbol{r}$是空间任意点相对于波源的位矢。这就是平面电磁波的解。

3. 平面电磁波的性质 (对解的讨论)

将无限均匀线性各向同性介质中平面电磁波解代入麦氏方程组中，考虑到$\nabla\to\mathrm{j}\boldsymbol{k}$，$\partial/\partial t\to-\mathrm{j}\omega$，有

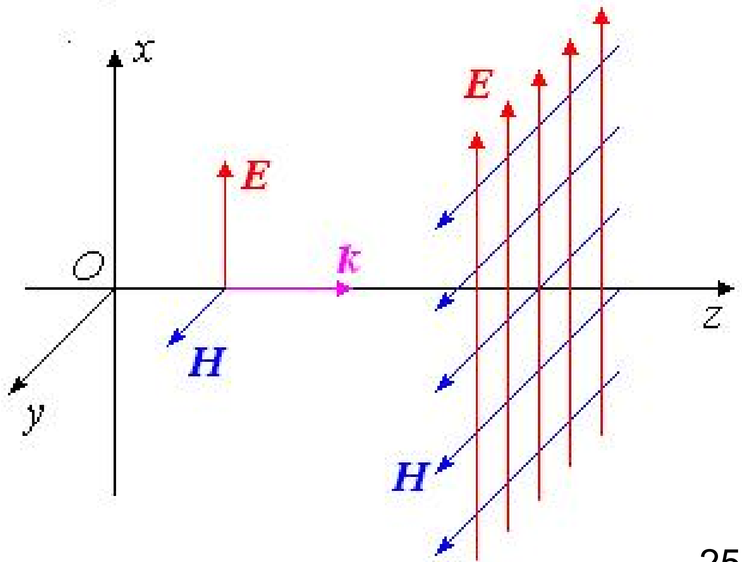
$$\begin{cases} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0, & (1) \\ \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{H} = 0, & (2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \mu\omega \boldsymbol{H}, & (3) \\ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\varepsilon\omega \boldsymbol{E}. & (4) \end{cases}$$

由此可得平面电磁波的性质如下：



1) 式(1)和(2)→$\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{H}$，即电、磁场强度与波的传播方向垂直→横波。

2) 式(3)和(4)→$\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H}$，即电场强度和磁场强度垂直，且$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{k}$三个矢量构成右旋直角坐标系。



3) 将 $\upsilon = \omega / k = c\sqrt{\mu_0\varepsilon_0 / \mu\varepsilon}$ 代入式(4)得

$$E_0\sqrt{\varepsilon} = H_0\sqrt{\mu}, \quad \varepsilon E^2 = \mu H^2 .$$

所以***E***和***H***的幅值成比例；任一点任一时刻，平面电磁波的电场能量密度=磁场能量密度。

4)由电磁波速度 $\upsilon = c\sqrt{\mu_0\varepsilon_0 / \mu\varepsilon}$ 可预言光即是电磁波。

与光学公式$\upsilon=c/n$比较，得介质的折射率

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon / \mu_0\varepsilon_0} \approx \sqrt{\varepsilon / \varepsilon_0} .$$

一般情况下，介质的μ和ε是ω的函数，所以υ也是ω的函数，称色散关系。

弱磁材料

ω对介电常数的影响？

4. 电磁波的产生 (本知识点仅供浏览)

- 标势和矢势

由 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$，可令 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，于是(本知识点是)

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\nabla \times \boldsymbol{A})}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\therefore \ \nabla \times (\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}) = 0$$

可令 $\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$ ，即

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

φ和$\boldsymbol{A}$分别称为电磁场的标势和矢势。

- 达朗贝尔方程

φ和$\boldsymbol{A}$存在规范不变性，假设其满足洛伦兹规范

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

则麦氏方程组的另两个式子可用φ和$\boldsymbol{A}$表示为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{j},\quad \nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

此即达朗贝尔方程，可由此导出

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t-r/c))}{r}\mathrm{d}V'$$

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t-r/c))}{r}\mathrm{d}V'$$

在单一频率下，可推得最低阶近似下的电偶极辐射场 (**p**的方向固定在z轴，大小呈简谐振荡)

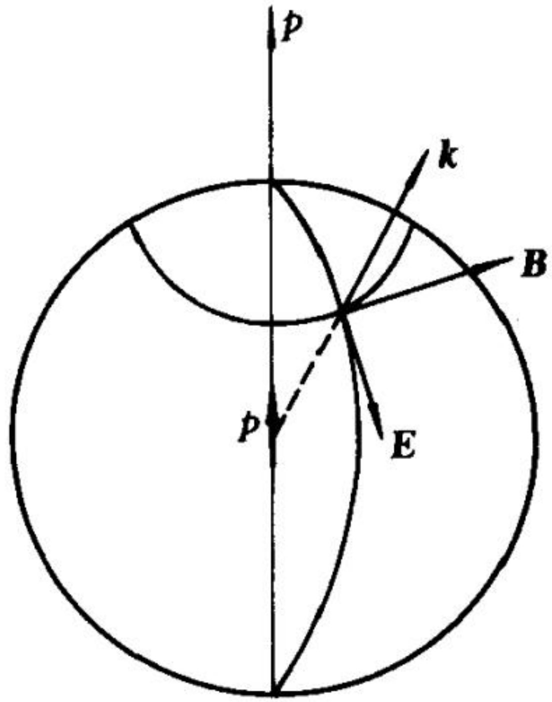
$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R}\ddot{p}e^{ikR}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R}\ddot{p}e^{ikR}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$$

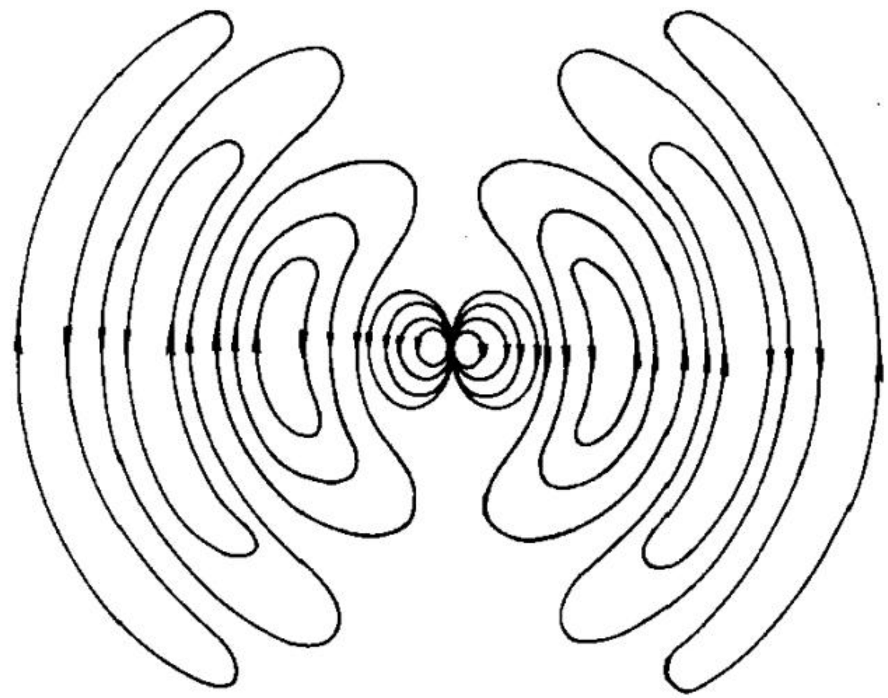
平均能流密度和总辐射功率分别为

$$\bar{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H}) = \frac{|\ddot{p}|^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2}\sin^2\theta\boldsymbol{e}_R,$$

$$P = \iint_{\text{球面}} |\bar{\boldsymbol{S}}| R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{p}|^2}{3c^2}$$

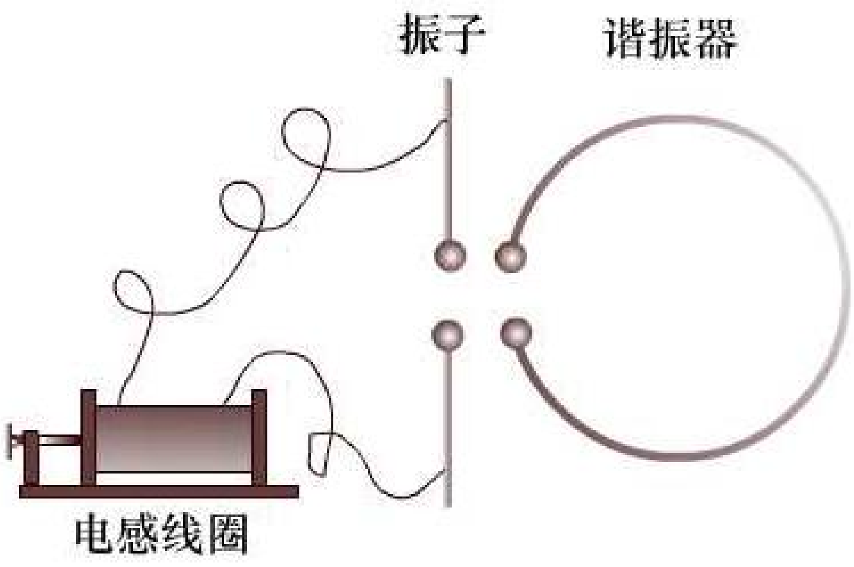


电偶极辐射的电磁场

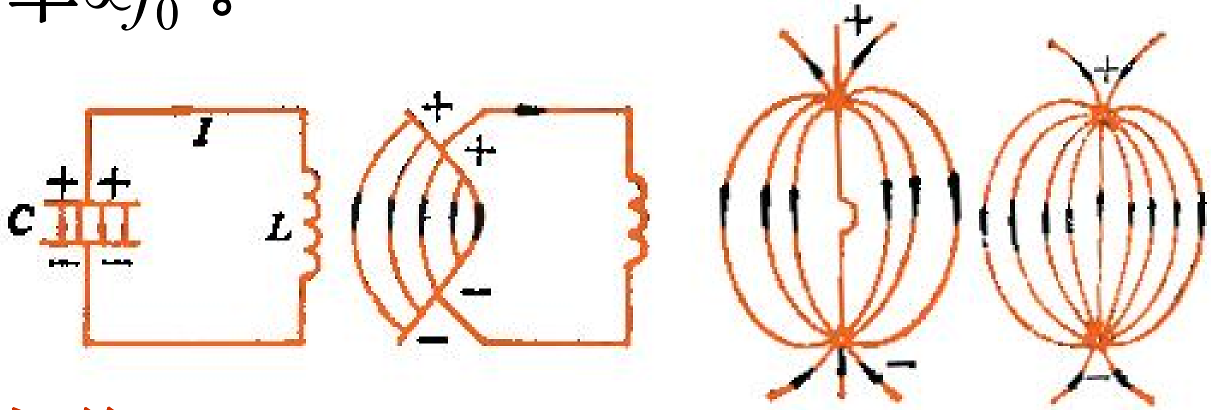


实际的电场分布

5. 赫兹实验及发射天线



- 天线原理：由LC振荡电路变为偶极振子。电场和磁场向空间散开，L、C很小，振荡频率很高。辐射功率$\propto f_0^4$。



6. 电磁波谱

射电、红外、可见、紫外、X射线、γ射线。

作业、预习及思考题

- 作业：**10.1~10.5**
- 预习：**10.3** 电磁场的能量、动量和角动量

下次课讨论

思考题**10.1** 定性分析ε随电场频率ω的变化。