章节 7.3 次梯度和次梯度算法

致谢：感谢北京大学文再文老师提供的《最优化方法》参考讲义

许多优化问题，目标函数都是不可微的，例如前面我们见到的基追踪问题和矩阵补全问题，目标函数分别是最小化 ℓ_1 范数和矩阵变量的核范数。为了研究不可微时问题的最优条件，我们可以定义一般非光滑凸函数的次梯度。

次梯度

回顾可微凸函数 f 的一阶等价条件:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^{\mathrm{T}}(y - x).$$

这表明，f 在点 x 处的一阶近似是 f 的一个全局下界。我们这里的想法是，将上述不等式拓展到一般不可微的情形。我们先考虑简单的函数 $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导，因为其左右导数分别为

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{|t|}{t} = -1, \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{|t|}{t} = 1.$$

可以验证, 对于任意 $g \in [-1, 1]$, 下面的不等式成立

$$|y| \geq 0 + g \cdot y,$$

此即

$$f(y) \geq f(0) + g \cdot (y - 0).$$

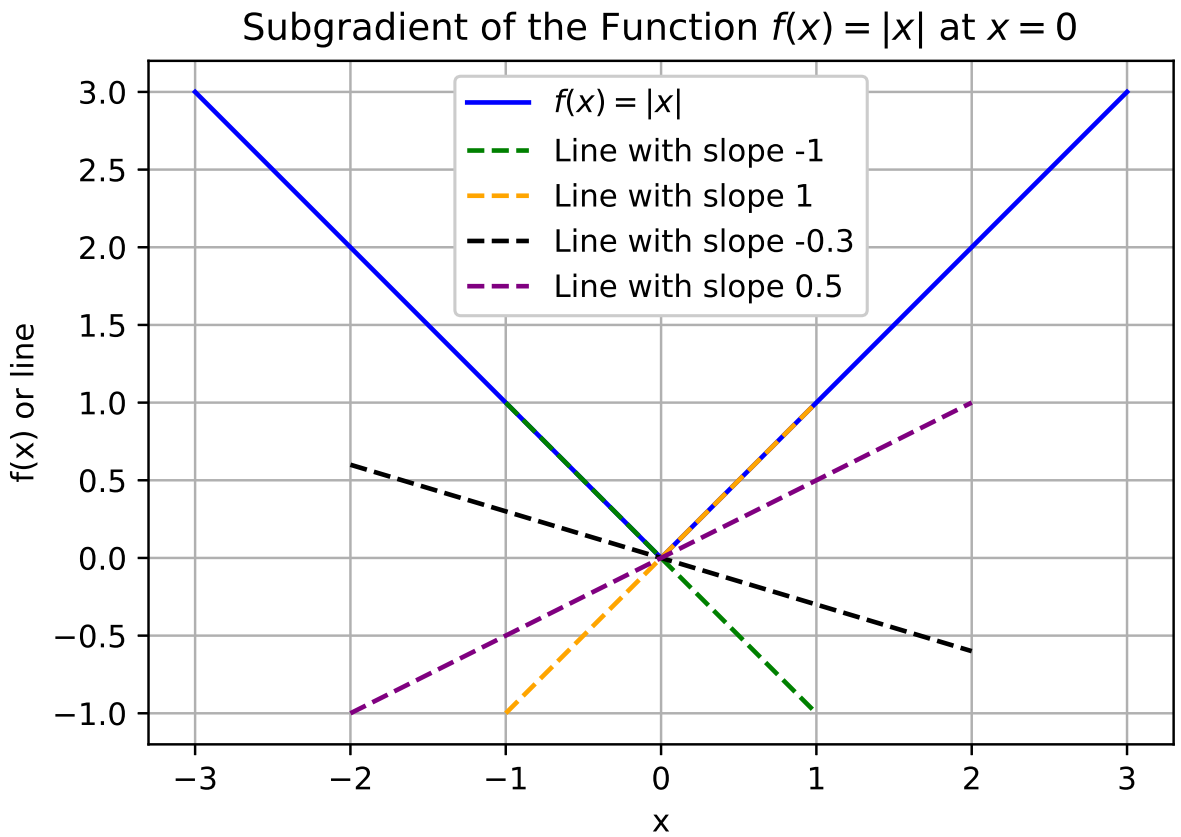


Figure: 函数 $f(x) = |x|$ 次梯度示意图。任意斜率为 $g \in [-1, 1]$ 过原点的直线，均为函数 f 的一个下界。

次梯度定义

定义 2.8 (次梯度和次微分)

设 f 为适当凸函数，x 为定义域 $\mathbf{dom}\ f$ 中的一点．若向量 $g \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$f(y) \geq f(x) + g^{\mathrm{T}}(y - x), \quad \forall y \in \mathbf{dom}\ f,$$

则称 g 为函数 f 在点 x 处的一个**次梯度** (subgradient)．进一步地，称集合

$$\partial f(x) = \{g \,|\, g \in \mathbb{R}^n, f(y) \geq f(x) + g^{\mathrm{T}}(y - x), \forall y \in \mathbf{dom}\ f\}$$

为 f 在点 x 处的**次微分** (subdifferential).

Remark 2.1

- 定义中的凸函数，值域可以为广义实数 $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 空间。适当函数是指，存在 x 使得 $f(x) < +\infty$.
- 由定义可知，次微分是一个集合，次梯度是某个次微分的元素。

例 2.9

$f(x) = \|x\|_2$ 为凸函数。若 $x \neq 0$, $f(x)$ 可微，故

$$\partial f(x) = \frac{1}{\|x\|_2} x.$$

若 $x = 0$, 我们下面证明 $\partial f(x) = \{g | \|g\|_2 \leq 1\}$. 由定义可知，

$$\|y\|_2 \geq g^T y, \quad \forall y.$$

首先，若 $\|g\|_2 \leq 1$, 由 Cauchy 不等式得 $g^T y \leq \|g\|_2 \|y\|_2 \leq \|y\|_2$, 故

$$\{g | \|g\|_2 \leq 1\} \subset \partial f(0).$$

反之，若 $g \in \partial f(0)$, 故

$$\max_{\|y\|_2 = 1} g^T y = \|g\|_2 \leq \|y\|_2 = 1.$$

故

$$\partial f(0) \subset \{g | \|g\|_2 \leq 1\}.$$

次梯度存在性

为了说明定义2.8中的次梯度存在，我们引入如下定义。

定义 2.10

设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数，函数的上方图 $\mathbf{epi}\ f$ 定义为

$$\mathbf{epi}\ f := \{\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z \geq f(x)\}.$$

引理 2.11

函数 $f(x)$ 是凸函数，当且仅当其上方图是凸集。

次梯度存在性

当 f 可微时，我们有

$$f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) \leq f(y) \leq z.$$

即

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x) \\ -1 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \right) \leq 0 \quad \forall\ (y, z) \in \mathbf{epi}\ f$$

这表明，$\nabla f(x)$ 可以诱导出上方图 $\mathbf{epi}\ f$ 在点 $(x, f(x))$ 处的支撑超平面，如下图所示。

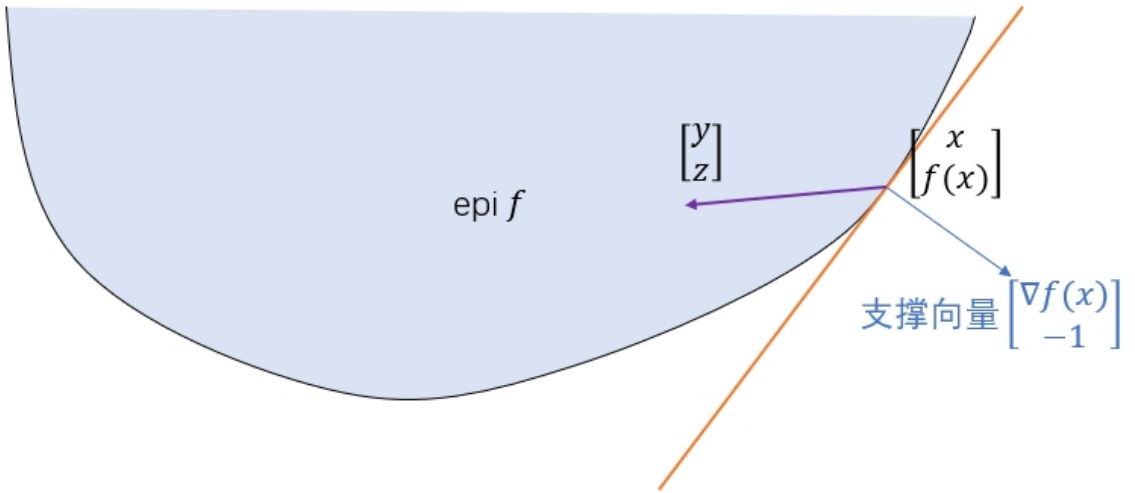


Figure: 对于凸函数 $f(x)$，其上方图 $\mathbf{epi}\ f$ 是一个凸集。$\begin{bmatrix} \nabla f(x) \\ -1 \end{bmatrix}$ 是 $\mathbf{epi}\ f$ 的支撑向量。

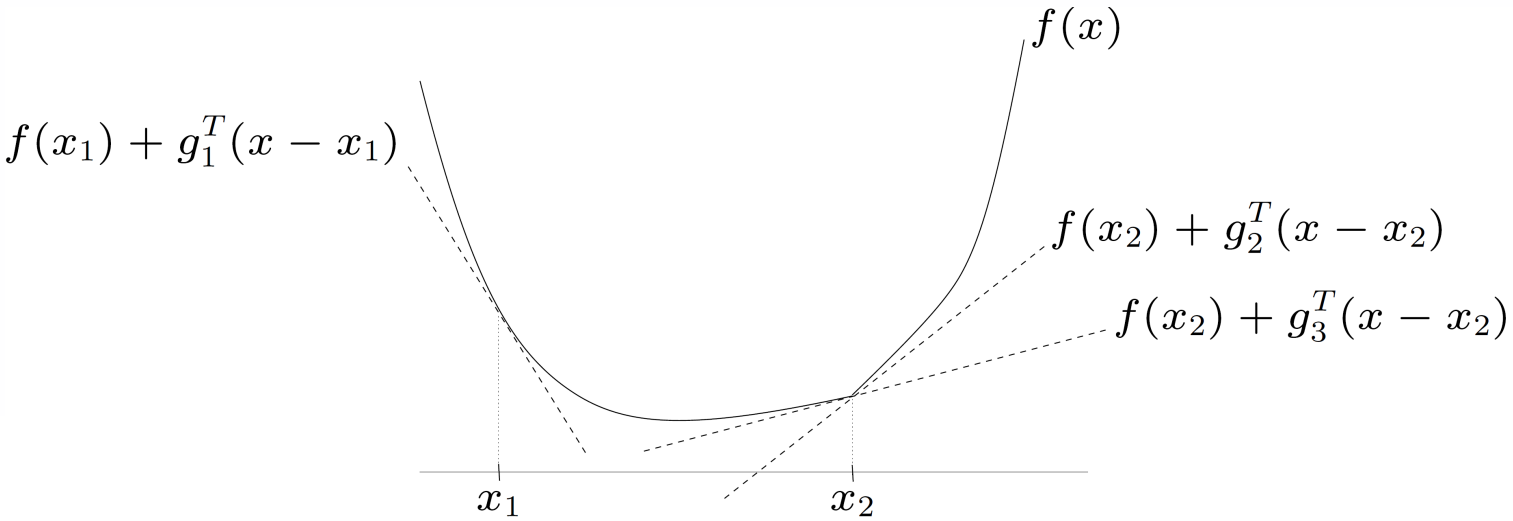
次梯度的存在性

由次梯度的定义2.8可知，

- $f(x) + g^{\mathrm{T}}(y - x)$ 是 $f(y)$ 的一个全局下界
- g 可以诱导出上方图 **epi** f 在点 $(x, f(x))$ 处的一个支撑超平面

$$\begin{bmatrix} g \\ -1 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \right) \leq 0 \quad \forall\ (y, z) \in \mathbf{epi}\ f$$

- 如果 f 是可微凸函数，那么 $\nabla f(x)$ 是 f 在点 x 处的一个次梯度
- 例：g_2, g_3 是点 x_2 处的次梯度；g_1 是点 x_1 处的次梯度



图片来源：《最优化计算方法》文再文等讲义。

次梯度的存在性主要依赖于凸集的下述性质：

引理 2.12

任意凸集的边界点处都存在支撑超平面。

定理 2.13

设 f 为凸函数，$\mathbf{dom}\ f = \{x : f(x) < \infty\}$ 为其定义域．如果 $x \in \mathbf{int}\ \mathbf{dom}\ f$，则 $\partial f(x)$ 是非空的，其中 $\mathbf{int}\ \mathbf{dom}\ f$ 的含义是集合 $\mathbf{dom}\ f$ 的所有内点.

Proof.

$(x, f(x))$ 是 $\mathbf{epi}\ f$ 边界上的点．因此凸集 $\mathbf{epi}\ f$ 在点 $(x, f(x))$ 处存在支撑超平面:

$$\exists\ (a, b) \neq 0, \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} \right) \leq 0 \quad \forall\ (y, z) \in \mathbf{epi}\ f$$

令 $z \to +\infty$, 可知 $b \leq 0$. 由于 $x \in \mathbf{int}\ \mathbf{dom}\ f$, 取 $y = x + \epsilon a \in \mathbf{dom}\ f$, $\epsilon > 0$, 可知 $b \neq 0$. 因此 $b < 0$ 并且 $g = a/|b|$ 是 f 在点 x 处的次梯度。

□

例：非次可微函数

如下函数在点 $x = 0$ 处不是次可微的:

- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \mathbf{dom}\ f = \mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$

$$x = 0 \text{ 时, } f(x) = 1, x > 0 \text{ 时, } f(x) = 0$$

- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \mathbf{dom}\ f = \mathbf{R}_+$

$$f(x) = -\sqrt{x}$$

$\mathbf{epi}\ f$ 在点 $(0, f(0))$ 处的唯一支撑超平面是垂直的

次梯度的计算规则

弱次梯度计算: 得到一个次梯度

- 足以满足大多数不可微凸函数优化算法
- 如果可以获得任意一点处 $f(x)$ 的值，那么总可以计算一个次梯度

强次梯度计算: 得到 $\partial f(x)$，即所有次梯度

- 一些算法、最优性条件等，需要完整的次微分
- 计算可能相当复杂

下面我们假设 $x \in \mathbf{int}\ \mathbf{dom}\ f$

基本规则

- **可微凸函数：**若凸函数 f 在点 x 处可微，则 $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.
- **凸函数的非负线性组合：**设凸函数 f_1, f_2 满足 $\mathbf{int\ dom}\ f_1 \cap \mathbf{dom}\ f_2 \neq \emptyset$，而 $x \in \mathbf{dom}\ f_1 \cap \mathbf{dom}\ f_2$. 若

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x), \quad \alpha_1, \alpha_2 \geq 0,$$

则 $f(x)$ 的次微分

$$\partial f(x) = \alpha_1 \partial f_1(x) + \alpha_2 \partial f_2(x).$$

- **线性变量替换：**设 h 为适当凸函数，f 满足 $f(x) = h(Ax + b)$. 若存在 $x^\sharp \in \mathbb{R}^m$，使得 $Ax^\sharp + b \in \mathbf{int\ dom}\ h$，则

$$\partial f(x) = A^{\mathrm{T}} \partial h(Ax + b), \quad \forall\ x \in \mathbf{int\ dom}\ f.$$

函数族的上确界

设 $f_1, f_2, \cdots, f_m : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ 均为凸函数，令

$$f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

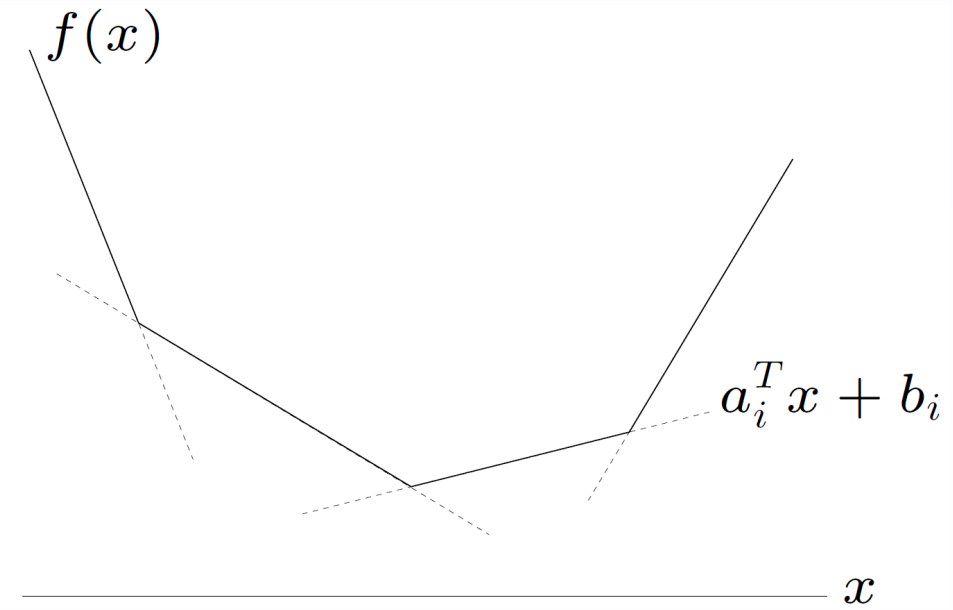
对 $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{int\ dom}\ f_i$，定义 $I(x_0) = \{i \mid f_i(x_0) = f(x_0)\}$，则

$$\partial f(x_0) = \mathbf{conv} \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial f_i(x_0).$$

- $I(x_0)$ 表示点 x_0 处“有效”函数的指标
- $\partial f(x_0)$ 是点 x_0 处“有效”函数的次微分并集的凸包
- 如果 f_i 可微，$\partial f(x_0) = \mathbf{conv}\{\nabla f_i(x_0) \mid i \in I(x_0)\}$

例：分段线性函数

$$f(x) = \max_{i=1,2,\cdots,m} \{a_i^{\mathrm{T}} x + b_i\}$$



- 点 x 处的次微分是一个多面体

$$\partial f(x) = \mathbf{conv}\{a_i \mid i \in I(x)\}$$

其中 $I(x) = \{i \mid a_i^{\mathrm{T}} x + b_i = f(x)\}$

例: ℓ_1-范数

$$f(x) = \|x\|_1 = \max_{s\in\{-1,1\}^n} s^{\mathrm{T}} x$$

- 次微分是区间的乘积

$$\partial f(x) = J_1 \times \cdots \times J_n, \quad J_k = \begin{cases} [-1,1], & x_k = 0 \\ \{1\}, & x_k > 0 \\ \{-1\}, & x_k < 0 \end{cases}$$

例 2.14

鲁棒线性回归：求函数 $f(x) = \|Ax - b\|_1$ 的次微分，这里 $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。
解： 首先考虑函数 $h(y) = \|y\|_1 = \max_{s\in\{-1,1\}^m} s^T y, y \in \mathbb{R}^m$. 故，

$$\partial h(y) = J_1 \times \cdots \times J_m, \quad J_k = \begin{cases} [-1,1], & y_k = 0 \\ \{1\}, & y_k > 0 \\ \{-1\}, & y_k < 0 \end{cases}$$

对于 $f(x)$,

$$\partial f(x) = A^T \left(\partial h(y)|_{y=Ax-b}\right).$$

固定分量的函数极小值

$$f(x) = \inf_y h(x, y), \quad h \text{ 关于 } (x, y) \text{ 联合凸}$$

计算点 $\hat{x}$ 处的一个次梯度：

- 设 $\hat{y} \in \mathbb{R}^m$ 满足 $h(\hat{x}, \hat{y}) = f(\hat{x})$
- 存在 $g \in \mathbb{R}^n$ 使得 $(g, 0) \in \partial h(\hat{x}, \hat{y})$，则 $g \in \partial f(\hat{x})$

证明：对任意 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} h(x, y) &\geq h(\hat{x}, \hat{y}) + g^{\mathrm{T}}(x - \hat{x}) + 0^{\mathrm{T}}(y - \hat{y}) \\ &= f(\hat{x}) + g^{\mathrm{T}}(x - \hat{x}) \end{aligned}$$

于是

$$f(x) = \inf_y h(x, y) \geq f(\hat{x}) + g^{\mathrm{T}}(x - \hat{x})$$

例: 距离函数

设 C 是 $\mathbb{R}^n$ 中一闭凸集，令

$$f(x) = \inf_{y \in C} \|x - y\|_2$$

计算点 $\hat{x}$ 处的一个次梯度:

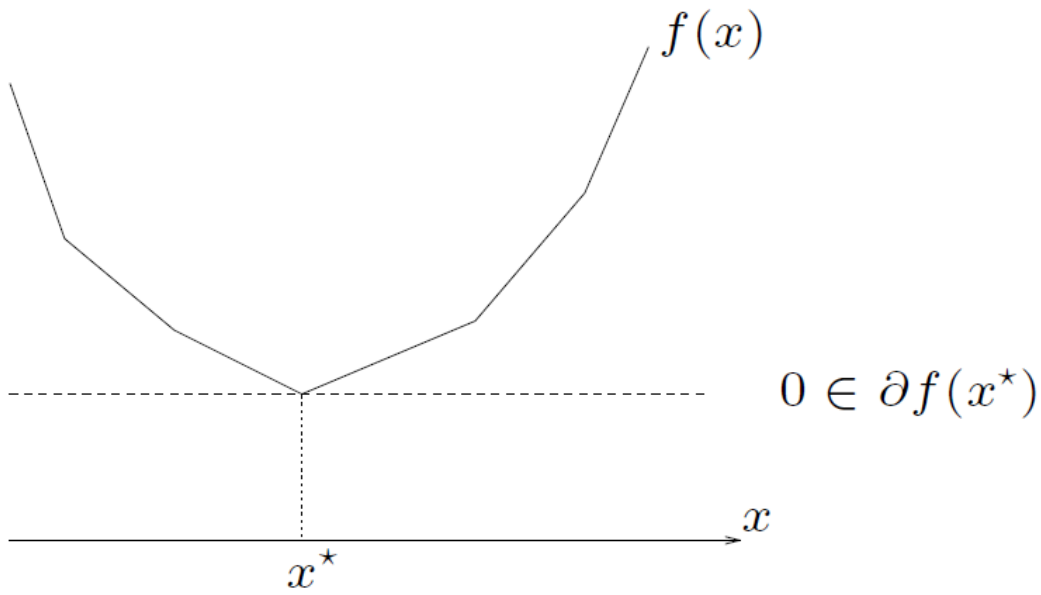
- 若 $f(\hat{x}) = 0$，则容易验证 $g = 0 \in \partial f(\hat{x})$;
- 若 $f(\hat{x}) > 0$，取 $\hat{y}$ 为 $\hat{x}$ 在 C 上的投影，即 $\hat{y} = \mathcal{P}_c(\hat{x})$，计算

$$g = \frac{1}{\|\hat{x} - \hat{y}\|_2}(\hat{x} - \hat{y}) = \frac{1}{\|\hat{x} - \mathcal{P}_c(\hat{x})\|_2}(\hat{x} - \mathcal{P}_c(\hat{x}))$$

最优性条件：无约束问题

x^* 是 $f(x)$ 的极小点当且仅当

$$0 \in \partial f(x^*)$$



证明：根据次梯度的定义以及最优性，我们有

$$f(y) \geq f(x^*),\ \forall y \quad \Longleftrightarrow f(y) \geq f(x^*) + 0^{\mathrm{T}}(y - x^*),\ \forall y \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in \partial f(x^*).$$

例: 分片线性极小

$$f(x) = \max_{i=1,\cdots,m} (a_i^{\mathrm{T}} x + b_i)$$

- **最优性条件**

$$0 \in \mathbf{conv}\{a_i \mid i \in I(x^*)\}, \quad \text{其中 } I(x) = \{i \mid a_i^{\mathrm{T}} x + b_i = f(x)\}$$

- 也就是说, x^* 是最优解当且仅当存在 λ 使得

$$\lambda \geq 0, \quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \lambda = 1, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0, \quad \lambda_i = 0 \text{ for } i \notin I(x^*)$$

- 这是等价线性规划问题的最优性条件: $A = [a_1^{\top}; \ldots; a_m^{\top}]$

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ \text{s.t.} & Ax + b \leq t\mathbf{1} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^{\mathrm{T}} \lambda \\ \text{s.t.} & A^{\mathrm{T}} \lambda = 0 \\ & \lambda \geq 0, \quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}} \lambda = 1 \end{array}$$

最优性条件：约束问题

给定约束 C 为 $\mathbb{R}^n$ 中的闭凸集，考虑问题

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t.} \quad x \in C. \end{aligned} \tag{166}$$

可定义指示函数

$$\mathcal{I}_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in C, \\ \infty & \text{if } x \notin C. \end{cases}$$

则问题(166)等价于

$$\min h(x) := f(x) + \mathcal{I}_C(x). \tag{167}$$

对于问题(167)，最优条件为

$$0 \in \partial f(x) + \partial \mathcal{I}_C(x), x \in C.$$

这里，若 $g \in \partial \mathcal{I}_C(x)$，则 $\mathcal{I}_C(y) \geq \mathcal{I}_C(x) + g^T(y-x), \forall y \in C$，即

$$0 \geq g^T(y-x), \quad \forall y \in C.$$

这里说明次梯度在 x 处的法锥中，法锥的定义为 $N_C(x) = \{g \mid 0 \geq g^T(y-x), \forall y \in C\}$.
事实上，法锥与切锥不相交，故这表明次梯度不在切锥中，与前面的课程一致。

一般来说，非光滑约束问题也有 KKT 条件。由于课程的设置，我们不再学习它们。

次梯度算法结构

为了极小化一个不可微的凸函数 f，可类似梯度法构造如下次梯度算法的迭代格式：

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k g^k, \quad g^k \in \partial f(x^k),$$

其中 g^k 为 x_k 处函数 f 任意的一个次梯度，$\alpha_k > 0$ 为步长．它通常有如下四种选择：

1. 固定步长 $\alpha_k = \alpha$；
2. 消失步长 $\alpha_k \to 0$ 且 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = +\infty$；

下面我们讨论在不同步长取法下次梯度算法的收敛性质.

假设条件

(1) f 为凸函数;

(2) f 至少存在一个有限的极小值点 x^*，且 $f(x^*) > -\infty$;

(3) f 为利普希茨连续的，即

$$|f(x) - f(y)| \leq G\|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $G > 0$ 为利普希茨常数.

这等价于 $f(x)$ 的次梯度是有界的，即

$$\|g\| \leq G, \quad \forall\, g \in \partial f(x), x \in \mathbb{R}^n.$$

收敛性分析

- 次梯度方法不是一个下降方法，即无法保证 $f(x^{k+1}) < f(x^k)$；
- 收敛性分析的关键是分析 $f(x)$ 历史迭代的最优点所满足的性质.
- 设 x^* 是 $f(x)$ 的一个全局极小值点，$f^* = f(x^*)$，根据迭代格式，

$$\begin{aligned}\left\|x^{i+1} - x^*\right\|^2 &= \left\|x^i - \alpha_i g^i - x^*\right\|^2 \\ &= \left\|x^i - x^*\right\|^2 - 2\alpha_i \left\langle g^i, x^i - x^*\right\rangle + \alpha_i^2 \left\|g^i\right\|^2 \\ &\leqslant \left\|x^i - x^*\right\|^2 - 2\alpha_i \left(f\left(x^i\right) - f^*\right) + \alpha_i^2 G^2\end{aligned}$$

- 结合 $i = 0, \cdots, k$ 时相应的不等式，并定义 $\hat{f}^k = \min_{0 \leqslant i \leqslant k} f\left(x^i\right)$：

$$\begin{aligned}2\left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i\right)\left(\hat{f}^k - f^*\right) &\leqslant \left\|x^0 - x^*\right\|^2 - \left\|x^{k+1} - x^*\right\|^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^2 \\ &\leqslant \left\|x^0 - x^*\right\|^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^2\end{aligned}$$

不同步长下的收敛性

(1) 取 $\alpha_i = t$ 为固定步长，则

$$\hat{f}^k - f^* \leq \frac{\|x^0 - x^*\|^2}{2kt} + \frac{G^2 t}{2};$$

- $\hat{f}^k$ 无法保证收敛性
- 当 k 足够大时，$\hat{f}^k$ 近似为 $G^2 t/2$-次优的

(2) 取 α_i 为消失步长，即 $\alpha_i \to 0$ 且 $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i = +\infty$，则

$$\hat{f}^k - f^* \leq \frac{\|x^0 - x^*\|^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k} \alpha_i};$$

进一步可得 $\hat{f}^k$ 收敛到 f^*.

- 和梯度法不同，只有当 α_k 取消失步长时 $\hat{f}^k$ 才具有收敛性.
- 一个常用的步长取法是 $\alpha_k = \frac{1}{k}$.

固定迭代步数下的最优步长

- 假设 $\left\|x^0 - x^*\right\| \leqslant R$，并且总迭代步数 k 是给定的，在固定步长下，

$$\hat{f}^k - f^* \leq \frac{\|x^0 - x^*\|^2}{2kt} + \frac{G^2 t}{2} \leq \frac{R^2}{2kt} + \frac{G^2 t}{2}.$$

- 由平均值不等式知当 t 满足 $\frac{R^2}{2kt} = \frac{G^2 t}{2}$, 即 $t = \frac{R}{G\sqrt{k}}$ 时，右端达到最小.
- k 步后得到的上界是

$$\hat{f}^k - f^* \leqslant \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- 这表明在 $k = O(1/\epsilon^2)$ 步迭代后可以得到 $\hat{f}^k - f^* \leq \epsilon$ 的精度
- 类似地可证明第二类步长选取策略下，取 $s = \frac{R}{\sqrt{k}}$，可得到估计

$$\hat{f}^k - f^* \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}.$$

例：LASSO 问题求解

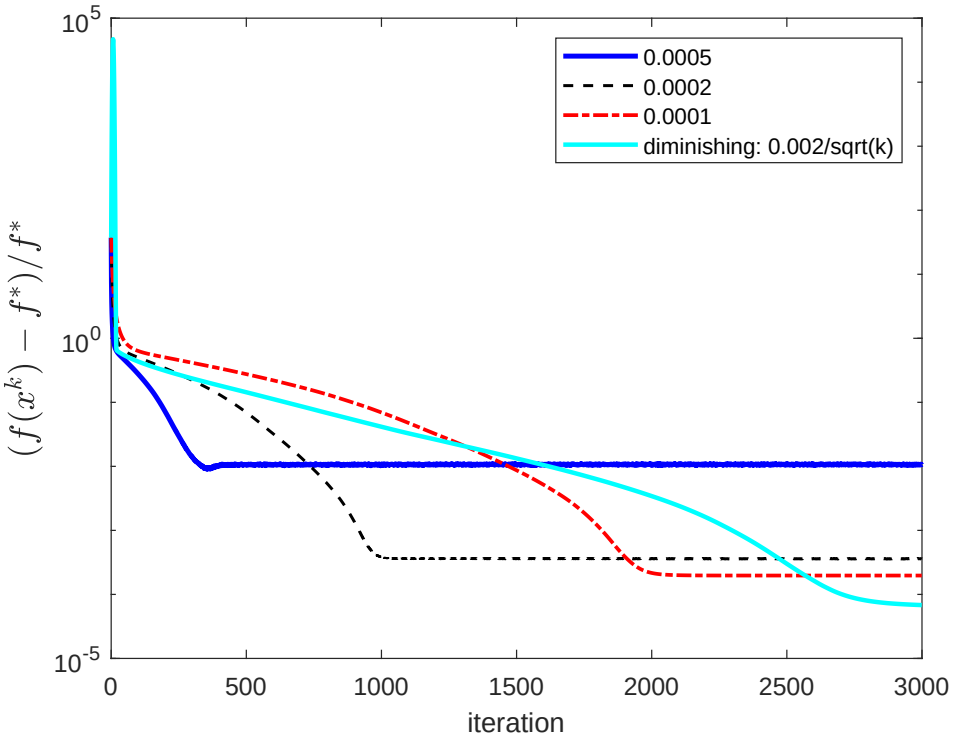
考虑 LASSO 问题

$$\min \quad f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 + \mu\|x\|_1,$$

$f(x)$ 的一个次梯度为 $g = A^{\mathrm{T}}(Ax - b) + \mu \mathrm{sign}(x)$, 其中 $\mathrm{sign}(x)$ 是关于 x 逐分量的符号函数. 因此的次梯度算法为

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k(A^{\mathrm{T}}(Ax^k - b) + \mu \mathrm{sign}(x^k)),$$

步长 α_k 可选为固定步长或消失步长.



作业 4 提交截至：2023 年 12 月 10 日 23：59

1. 证明线性共轭梯度法的性质：设线性共轭梯度法的第 k 步迭代的结果 x_k 不是问题(119)的解，那么有以下结论成立

1. $\text{span}\left(r_0, r_1, \cdots, r_k\right) = \text{span}\left(r_0, Ar_0, \cdots, A^k r_0\right)$
2. $\text{span}\left(p_0, p_1, \cdots, p_k\right) = \text{span}\left(r_0, Ar_0, \cdots, A^k r_0\right)$
3. $r_k^T p_i = 0, \forall i < k$
4. $p_k^T A p_i = 0, \forall i < k$
5. $r_k^T r_i = 0, \forall i < k$

2. 求解信赖域子问题迭代法中，当 $q_1^T g \neq 0$ 时，写出求解 $\phi(\lambda) = 1/\Delta - 1/\|d(\lambda)\| = 0$ 且 $B + \lambda I \succeq 0$. 的牛顿迭法代公式。

3. 证明如下 3 个结论：

记 x_k 是二次罚函数 $P_E(x^k, \sigma^k)$ 最小值点。

结论 1： 设 $\sigma_{k+1} > \sigma_k > 0$, 则有 $P_E(x^k, \sigma^k) \leq P_E(x^{k+1}, \sigma^{k+1})$,

$$\sum_{i\in\mathcal{E}} \|c_i(x^k)\|^2 \geq \sum_{i\in\mathcal{E}} \|c_i(x^{k+1})\|^2, \quad f(x^k) \leq f(x^{k+1}).$$

结论 2： 设令 $\bar{\mathbf{x}}$ 是原问题(141)的最优解，则对任意的 $\sigma^k > 0$ 成立

$$f(\bar{\mathbf{x}}) \geq P_E(x^k, \sigma^k) \geq f(x^k).$$

结论 3： 令 $\delta = \sum_{i\in\mathcal{E}} \|c_i(x^k)\|^2$, 则 x^k 也是约束问题

$$\begin{array}{ll} \min & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} & \sum_{i\in\mathcal{E}} \|c_i(x)\|^2 \leq \delta \end{array}$$

的最优解。

4. 参考基追踪问题，使用增广拉格朗日法求解标准线性规划的对偶问题。写出从 x_k 到 x_{k+1} 需要求解的子问题，以及对偶变量 λ_k 的迭代公式。

5. 计算下面两个问题的一个次梯度

- $f(x) = \|Ax - b\|_2$.
- $f(x) = \min_y \|Ay - x\|_\infty$, 这里 $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ 表示无穷范数。假设存在 $\hat{y}$ 使得 $f(\hat{x}) = \min_y \|Ay - x\|_\infty$. 计算一个 $f(\hat{x})$ 的次梯度。

Projection 3

针对 logistic regression 问题，

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\ln(1+\exp(-b_i a_i^{\mathrm{T}} x)) + \lambda\|x\|_2^2, \tag{168}$$

这里选取 $\lambda = \frac{1}{100m}$.

编写 BFGS 或者 newton 算法求解。需要使用 backtracking-linesearch 或者 Wolfe-Powell 线搜索确定步长。在 LIBSVM 的 a9a 训练数据集完成算法测试，数据集提供了数据 $\{a_i, b_i\}_{i=1,\ldots,m}$，其中 $b_i \in \{-1, 1\}$，$m = 32,561, n = 123$。数据集见 https://www.csie.ntu.edu.tw/ cjlin/libsvmtools/datasets/

需要报告函数损失和迭代点的关系图像。

程序规范在后面的课程会细讲。