2023 春复分析每日一练 (III)

黄天一

2023 年 6 月 17 日

1 核心内容回顾

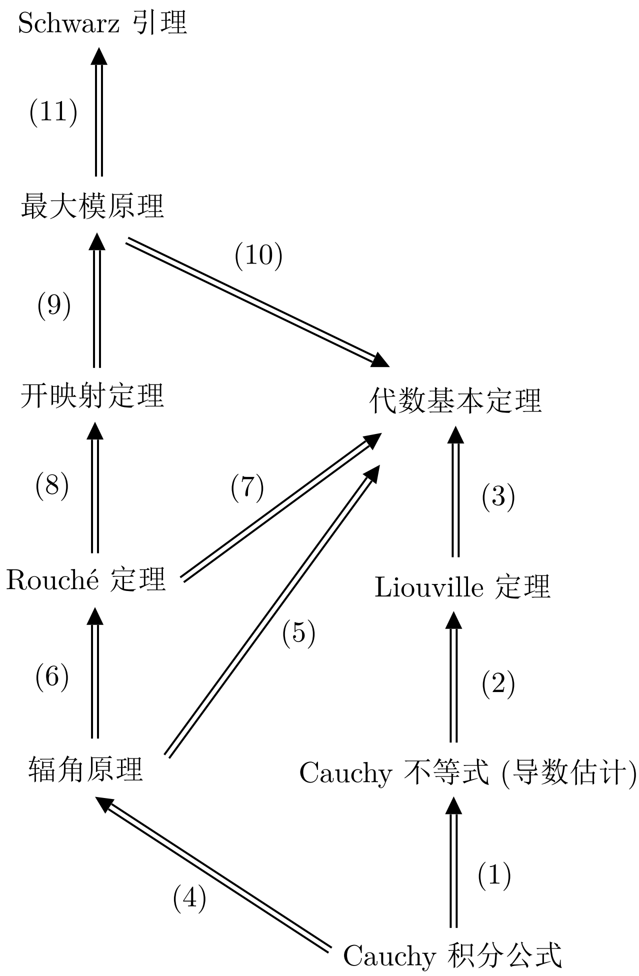
1. 全纯函数的零点计数: 辐角原理, Rouché 原理.

2. 一些推论: 开映射定理, 单叶性, Hurwitz 定理.

3. 最大模原理 (一般域和有界域下的叙述不同), “最小模原理”.

4. Schwarz 引理及其取等条件, 单位圆盘的全纯自同构群.

下图列举了三四章最核心定理的推导关系. 建议同学们按照如下的脉络, 自行写出这十一个证明.



2 判断题

1. 方程 $2z^4 = \sin z$ 在 $|z| < 1$ 内只有一个根.

2. 方程 $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ 在圆环 $1 < |z| < 2$ 内的零点个数为 3.

3. 设 f 在区域 D 上全纯, 并且在 D 上恒成立 $f'(z) \neq 0$, 则 f 在 D 内单叶.

4. 设 $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 则 f 在 ∂D 上取得最大模.

5. 存在 $B(0,1)$ 上的全纯函数 f, 使得在 $B(0,1)$ 上恒成立 $|f(z)| = |z|^2 + 1$.

6. 设 $f : B(0,1) \to B(0,1)$ 全纯, 且 $f(0) = 0$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(z^n)$ 在 $B(0,1)$ 中内闭一致收敛.

3 证明与计算题

1. (16H 期中) 设 f, g 为单位闭圆盘上的全纯函数, 并且在 $\partial B(0,1)$ 上满足 $|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$.

(1) 证明: 对任意非负实数 λ, $f - \lambda g$ 和 f 在单位圆周内的零点个数相同.

(2) 证明: f, g 在单位圆周内的零点个数相同.

2. (22 期末) 设多项式 $p(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ 在单位圆盘内单叶, 证明: $|a_n| \leqslant \frac{1}{n}$.

3. 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内全纯, 在 $|z| \leqslant 1$ 上连续. 如果在单位上半圆周上, $|f(z)| \leqslant M_1$; 在单位下半圆周上, $|f(z)| \leqslant M_2$. 证明: $|f(0)| \leqslant \sqrt{M_1 M_2}$.

4. 设 $f \in H(B(0,1))$, $f(B(0,1)) \subset B(0,1)$. 证明:

$$|f(z) - f(0)| \leqslant |z| \frac{1 - |f(0)|^2}{1 - |f(0)||z|}.$$

5 (21 期末) 设 D 为上半平面, $\mathcal{F} = \{f : D \to \mathbb{C} : f\text{全纯}, |f(z)| < 2021, f(\mathrm{i}) = 0\}$, 求 $\sup\{|f(2\mathrm{i})| : f \in \mathcal{F}\}$.