

# 2023 春复分析每日一练 (V)

黄天一

2023 年 6 月 22 日

## 1 核心内容回顾

1. 留数的定义,  $m$  阶极点处留数的计算公式.
2. 留数定理, 在复积分计算上的应用.
3. 应用留数定理计算定积分: Jordan 引理、一些重要的围道选取.  
(Jordan 引理一定要能独立叙述和证明, 往年考试曾要求过在计算时证明你所使用的引理)

## 2 留数计算

1. 计算下列留数.

$$(1) \operatorname{Res}\left(\frac{\sin z}{z^{2022}}, 0\right). \quad (2) \operatorname{Res}\left(e^{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{1-z}, 0\right). \quad (3) \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}, -i\right).$$

2. 求下列函数在孤立奇点处的留数.

$$1. \frac{1}{z^2 - z^4}. \quad 2. \frac{z^{n-1}}{z^n + a^n} (a \neq 0, n \in \mathbb{N}). \quad 3. z^3 \cos \frac{1}{z-2}.$$

## 3 用留数定理计算积分

1. (21 期末)  $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{\sin(\pi z)}.$
2. (18 期末)  $\int_0^\infty \frac{x \sin 2x}{4+x^2} dx.$
3. (19 期末)  $\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta},$  其中  $a > 1.$
4. (20H 期末)  $\int_0^\infty \frac{x - \sin x}{x^3} dx.$
5.  $\int_0^\infty \frac{\log^2 x}{x^2 + a^2} dx,$  其中  $a > 0.$
6. (22 期末)  $\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^2} dx,$  其中  $-1 < p < 1.$
7.  $\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2} dx,$  其中  $-1 < p < 2.$