微分方程

常系数线性
微分方程组

常系数线性微分方程组

- 1 常系数方程组
- 2 矩阵指数函数型基解矩阵
- 3 用若当标准型求基解矩阵
- 4 待定指数函数法求基解矩阵

1 一阶常系数线性微分方程组

一阶线性微分方程组

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases}$$

可写为：$\dfrac{d\vec{x}}{dt} = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t),\ A(t) = (a_{ij}(t))_{1\le i,j\le n}.$

当$a_{ij}(t)\equiv a_{ij}\in\mathbb{R}$为常数,得到常系数微分方程组

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}+\vec{f}(t),\ A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}.$$

若$\vec{f}(t)=0$,则对应齐次常系数线性微分方程组为

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}\quad(1)$$

分析对比：一阶方程$\dfrac{dx}{dt}=ax$有通解为$x=e^{at}C$,

一阶方程组$\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$有通解 为$\vec{x}=e^{At}\vec{C}$?

2　矩阵指数函数型基解矩阵

矩阵指数函数定义

定义：设A为$n\times n$常数矩阵,则定义矩阵A 的指数函数e^A为下列矩阵值无穷级数的和

$$e^A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=E+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^k}{k!}+\cdots\quad(\Delta)$$

其中E为单位矩阵,A^k为A的k次幂,$A^0=E,0!=1.$

令$\mathbb{M}_n=\{A \mid A$为n阶阵$\}$, $\forall A\in\mathbb{M}_n$,定义A 的

模(范数)$\|A\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|$ (或$\max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|$,或$\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$).

容易证明这三种定义等价:

$\|\cdot\|_1\sim\|\cdot\|_2\Leftrightarrow\exists M>0$ s.t. $M\|\cdot\|_1\le\|\cdot\|_2\le M^{-1}\|\cdot\|_1$.

模的性质:

1°非负性: $\|A\|\ge 0, \|A\|=0\Leftrightarrow A=0$;

2°三角不等式: $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$;

3°*Cauchy*不等式: $\|AB\|\le\|A\|\cdot\|B\|\Rightarrow\|A^k\|\le\|A\|^k$.

(对最大值模$\|AB\|\le n\|A\|\cdot\|B\|$)

注1: 矩阵级数(Δ)是收敛的.

这是由于 $\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \le \frac{\|A\|^k}{k!}$, 而数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{k!}$ 收敛.

注2: 级数

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^k=E+At+\frac{A^2}{2!}t^2+\cdots+\frac{A^k}{k!}t^k+\cdots$$

在t的任何有限区间上是一致收敛的.

这是由于 $\left\|\frac{A^k t^k}{k!}\right\| \le \frac{\|A\|^k c^k}{k!}$, $|t|\le c$,

而数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|A\|^k c^k}{k!}$ 收敛.

关于矩阵指数性质的命题：

(1) 若$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{M}_n, \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$,则$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}}$.

(2) 对任何$\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_n, \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}}$可逆, 且

$$(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}})^{-1} = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{A}}.$$

(3) 若$\boldsymbol{P} \in \mathbb{M}_n$是非奇异的,即$\det \boldsymbol{P} \neq 0$,则

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{PAP}^{-1}} = \boldsymbol{Pe}^{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

附加作业：证明上面的命题.

定义 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$ (1)的基解矩阵$\Phi(t)$为由n个线性无关列向量解构成的矩阵函数，标准基解矩阵是指满足$\Phi(0)=E$的基解矩阵.

Liouville公式（证明见“变系数线性微分方程组”）

设 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A(t)\vec{x}$的解矩阵为$\Phi(t)$，令$W(t)=\det\Phi(t)$

(Wronsky行列式),则成立

$$W(t)=W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}A(s)ds}$$

其中$\mathrm{tr}A(s)$为矩阵$A(s)$的迹.

常系数齐线性微分方程组的基解矩阵

定理1 $\Phi(t)=e^{At}$是(1)的一个标准基解矩阵.

证明: 因$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!}$在$t$轴任意闭区间上一致收敛,

则$\Phi(t)$在t轴处处可微且其导数可由逐项微分得到

$$\Phi'(t)=A+\frac{A^2}{1!}t+\frac{A^3}{2!}t^2+\cdots+\frac{A^k}{(k-1)!}t^{k-1}+\cdots$$

$$=A(E+At+\frac{A^2}{2!}t^2+\cdots+\frac{A^k}{k!}t^k+\cdots)$$

$$=Ae^{At}=A\Phi(t)\Rightarrow\Phi(t)\text{是(1)解矩阵.}$$

而$\Phi(0)=E$,由liouville公式知$\det\Phi(t)=\det\Phi(0)e^{\mathrm{tr}At}>0.$

故结论得证.

推论: $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}+\vec{f}(t)$ (2)的通解为

$$\vec{x}=e^{At}\vec{C}+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}\vec{f}(s)ds.$$

证明: 由线性微分方程组解的结构(后证)知(2)的通解为

$$\vec{x}=e^{At}\vec{C}+\vec{x}^*,\ \vec{x}^*:(2)\text{特解}.$$

用常数变易法找(2)特解$\vec{x}^*=e^{At}\vec{C}^*(t),\vec{C}^*(t)$:待定函数.

代入(2)有$e^{At}\dfrac{d\vec{C}^*}{dt}=\vec{f}(t)\Rightarrow\dfrac{d\vec{C}^*}{dt}=e^{-At}\vec{f}(t)$,

积分即得结论.

例1

如果A是一个对角矩阵$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$

试求出$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$的基解矩阵.

解 $e^{At}=E+$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}\frac{t}{1!}+\begin{pmatrix} a_1^2 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^2 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2!}+\cdots+\begin{pmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{pmatrix}\frac{x^k}{k!}+\cdots$$

$$=\begin{pmatrix} 1+a_1t+a_1^2\frac{t^2}{2!}+\cdots+a_1^k\frac{t^k}{k!}+\cdots & & & \\ & 1+a_2t+a_2^2\frac{t^2}{2!}+\cdots+a_2^k\frac{x^k}{k!}+\cdots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1+a_nt+a_n^2\frac{t^2}{2!}+\cdots+a_n^k\frac{t^k}{k!}+\cdots \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} e^{a_1t} & & & \\ & e^{a_2t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_nt} \end{pmatrix}$$ (化为有限和形式)

例2 试求出 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\vec{x}$ 的基解矩阵.

解:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

而后面两个矩阵是可交换的, 且

$$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

(幂零阵 $Z:\exists m\in\mathbb{N}, Z^m=0$)

$$\therefore e^{At} = e^{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} t} \; e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \left[E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots \right]$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ (化为有限和形式)

问题：对一般的矩阵A，如何找到标准基解矩阵e^{At}的有限和形式？

3 利用若当标准型求基解矩阵

对n阶矩阵A，总存在非奇异矩阵P，使得

$$A = PJP^{-1}$$

其中J为$Jordan$矩阵, 即

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

J_i为n_i阶矩阵, $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, λ_i为A的n_i重特征值.

$A = PJP^{-1}$，P非奇异矩阵，由命题(3°)有

$$e^{At} = e^{PJP^{-1}t} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_m t} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$$而 J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$:= \lambda_i E_{n_i} + Z_{n_i},\ Z_{n_i}^{n_i} = 0,$$

$$\therefore e^{J_i t} = e^{\left(\lambda_i E_{n_i} + Z_{n_i}\right)t} = e^{\lambda_i E_{n_i} t} e^{Z_{n_i} t}$$

$$= e^{\lambda_i t} E_{n_i} \left[E_{n_i} + Z_{n_i} t + \cdots + \frac{Z_{n_i}^{n_i - 1} t^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} \right]$$

$$
即\ e^{J_i t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \text{(有限和形式)}
$$

由 $e^{At}P = Pe^{Jt}$ 知, $\Phi(t) = Pe^{Jt}$ 也是基解矩阵.

4　待定指数函数法求基解矩阵

$\Phi(t) = Pe^{Jt}$是(1)的基解矩阵.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix}, \quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_m t} \end{pmatrix},$$

A的若当标准型依赖于它的特征根的重数.

(1) 矩阵A具有n个单根

设n阶矩阵A的n个特征根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$均为单根,

那么J就是一个对角矩阵$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$,

故$\Phi(t)=e^{tA}P=Pe^{tJ}=P\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t}\end{pmatrix}$.

设矩阵P的列向量为$\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n,$

$$\text{则}\Phi(x)=Pe^{tJ}=\left(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n\right)\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

$$=\left(e^{\lambda_1 t}\vec{r}_1,e^{\lambda_2 t}\vec{r}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\vec{r}_n\right)--\text{基解矩阵}$$

即$e^{\lambda_i t}\vec{r}_i$是(1)的解, $\vec{r}_i$是待定列向量.

将$e^{\lambda_i t}\vec{r}_i$代入(1), 有$\lambda_i e^{\lambda_i t}\vec{r}_i = Ae^{\lambda_i t}\vec{r}_i$, 即$\lambda_i\vec{r}_i = A\vec{r}_i$,

$\vec{r}_i$是A对应特征值λ_i的特征向量.

定理2. 若n阶矩阵A具有n个互不相同特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；$\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n$是相应的特征向量, 则矩阵函数

$$\Phi(t)=(e^{\lambda_1 t}\vec{r}_1,e^{\lambda_2 t}\vec{r}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\vec{r}_n),\quad -\infty<t<+\infty$$

是常系数线性微分方程组

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}\quad (1)$$

的一个基解矩阵.

证明: 由(1)和$\lambda_i\vec{r}_i = A\vec{r}_i$知$\dfrac{d(e^{\lambda_i t}\vec{r}_i)}{dt} = \lambda_i e^{\lambda_i t}\vec{r}_i = Ae^{\lambda_i t}\vec{r}_i$,

即$e^{\lambda_i t}\vec{r}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$

都是(1)的解,因此矩阵函数

$$\Phi(t) = (e^{\lambda_1 t}\vec{r}_1, e^{\lambda_2 t}\vec{r}_2, \cdots, e^{\lambda_n t}\vec{r}_n), \quad -\infty < t < +\infty$$

是(1)的解矩阵,

由$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n$线性无关知$\det\Phi(0) = \det(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n) \neq 0$,

再由Liouville公式知$\det\Phi(t) = \det\Phi(0)e^{\mathrm{tr}At} \neq 0$,

所以$\Phi(t)$是(1)的基解矩阵. 证毕.

附注1

定理2*. 若n阶矩阵A具有n个线性无关的特征向量$\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n$;它们相应的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(可能相同),则矩阵函数

$$\Phi(t)=(e^{\lambda_1 t}\vec{r}_1,e^{\lambda_2 t}\vec{r}_2,\cdots,e^{\lambda_n t}\vec{r}_n),\quad -\infty<t<+\infty$$

是常系数线性微分方程组

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}\qquad(1)$$

的一个基解矩阵.

例3 求解方程组 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\vec{x}.$

解 先求矩阵A的特征根

$$\begin{vmatrix}\lambda-6 & 3\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-7\lambda+12=0.$$

因此，矩阵A的特征根为 $\lambda_1=3,\lambda_2=4$

对λ_1可求得其特征向量 $\vec{r}_1=(1,1)^T$.

对λ_2也可求得其相应的特征向量为$\vec{r}_2=(3,2)^T$.

因此，方程组的通解为$\vec{x}=C_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{3t}+C_2\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}e^{4t}$.

例4 试求微分方程组 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -5 & 3\end{pmatrix}\vec{x}$ 的基解矩阵.

解 易知 $\lambda_1=3+5i,\lambda_2=3-5i$是$A$的特征值,

$\vec{r}_1=\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix},\vec{r}_2=\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}$,是对应于$\lambda_1,\lambda_2$的特征向量;

故

$$\Phi(t)=(e^{\lambda_1 t}\vec{r}_1,e^{\lambda_2 t}\vec{r}_2)=\begin{pmatrix}e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t}\\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t}\end{pmatrix}$$

就是一个基解矩阵.

附注2　从复矩阵$\Phi(t)$求实基解矩阵

$$\Phi(t)=e^{tA}P=Pe^{tJ}=P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

$$\Phi(0)=P$$

$e^{tA}=\Phi(t)P^{-1}=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)$是一个实矩阵.

（实际上，n较大时求$\Phi(0)$的逆阵并不容易！）

在例4中，由$\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{pmatrix}$求实基解矩阵.

$$\Phi(0)=\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi^{-1}(0)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{tA}=\Phi(t)\Phi^{-1}(0)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$=e^{3t}\begin{pmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{pmatrix}.$$

❖ 欧拉公式:

$$e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}\left(\cos\beta t+i\sin\beta t\right)$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}=2e^{\alpha t}\cos\beta t$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}=2ie^{\alpha t}\sin\beta t$$

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix} e^{(3+5i)t} & ie^{(3-5i)t} \\ ie^{(3+5i)t} & e^{(3-5i)t} \end{pmatrix}=(\vec{x}_1,\vec{x}_2),$$

$$\vec{x}_1=e^{3t}\begin{pmatrix} \cos 5t+i\sin 5t \\ -\sin 5t+i\cos 5t \end{pmatrix}=e^{3t}\begin{pmatrix} \cos 5t \\ -\sin 5t \end{pmatrix}+ie^{3t}\begin{pmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix}$$

$$=\vec{u}(t)+i\vec{v}(t),$$

$$\Phi^*(t)=(\vec{u},\vec{v})=e^{3t}\begin{pmatrix} \cos 5t & \sin 5t \\ -\sin 5t & \cos 5t \end{pmatrix}$$是实基解矩阵.

附注3 若实系数线性齐次方程组(1)有

复值解$\vec{x}(t)=\vec{u}(t)+i\vec{v}(t)$, 则其实部$\vec{u}(t)$和虚部

$\vec{v}(t)$都是(1)的解.

因为 $\vec{x}(t)=\vec{u}(t)+i\vec{v}(t)$是方程组(1) 的解,

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt}=A(t)\vec{x}(t)$$

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt}+i\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=A(t)\left[\vec{u}(t)+i\vec{v}(t)\right]$$

$$=A(t)\vec{u}(t)+iA(t)\vec{v}(t)$$

由于两个复数表达式相等等价于实部和虚部相等,

所以有

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = A(t)\vec{u}(t), \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = A(t)\vec{v}(t)$$

即 $\vec{u}(t)$ 和 $\vec{v}(t)$ 是方程组(1)的解.

实矩阵A有复特征根必定共轭成对出现，即如果 $\lambda = a + ib$是特征根，则共轭复数 $\overline{\lambda} = a - ib$ 也是特征根，$\overline{\lambda}$ 对应的特征向量也与 λ 对应的特征向量共轭，因此方程组(1)出现一对共轭的复值解.

例5 求解方程组 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}7 & -1 & 6\\ -10 & 4 & -12\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}\vec{x}.$

解 该方程对应的矩阵A的特征根满足

$$\begin{vmatrix}7-\lambda & -1 & 6\\ -10 & 4-\lambda & -12\\ -2 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-5)=0.$$

因此，A的特征根为 $\lambda_1=2,\lambda_2=3,\lambda_2=5.$

对特征根$\lambda_1 = 2$, 其相对应的特征向量 $\vec{r}_1$ 满足

$$\left(\lambda_1 E - A\right)\vec{r}_1 = 0$$

由此可求得特征向量 $\vec{r}_1 = (1,-1,-1)^T$.

同理，可求得特征根λ_2, λ_3对应的特征向量分别为

$$\vec{r}_2 = (1,-2,-1)^T,\quad \vec{r}_3 = (3,-6,-2)^T.$$

齐次方程组的通解为

$$\vec{x} = C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}e^{2t} + C_2\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}e^{3t} + C_3\begin{pmatrix}3\\-6\\-2\end{pmatrix}e^{5t}.$$

对一般的n阶矩阵A,有

定理3. 若n阶矩阵A有m个互不相同的特征根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,其相应的重数为 $n_1,n_2,\cdots,n_m,n_1+n_2+\cdots+n_m=n$,

则$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$ (1)有基解矩阵

$$\Phi(t)=\left(\cdots;e^{\lambda_i t}\vec{R}_1^{(i)}(t),e^{\lambda_i t}\vec{R}_2^{(i)}(t),\cdots,e^{\lambda_i t}\vec{R}_{n_i}^{(i)}(t);\cdots\right)$$

其中

$$\vec{R}_j^{(i)}(t)=\vec{r}_{j,0}^{(i)}+\frac{t}{1!}\vec{r}_{j,1}^{(i)}+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\vec{r}_{j,n_i-1}^{(i)},$$

$\vec{r}_{j,0}^{(i)}(1\le j\le n_i)$为$(A-\lambda_i E)^{n_i}\vec{r}=0$的$n_i$个线性无关解,

$\vec{r}_{j,l}^{(i)}(1\le j\le n_i,1\le l\le n_i-1,1\le i\le m)$满足$\vec{r}_{j,l}^{(i)}=(A-\lambda_i E)^l\vec{r}_{j,0}^{(i)}$ (*).

证明: 先证明$\Phi(t)$满足(1),再证明它是基解矩阵.

对$\Phi(t)$任一列$\vec{\varphi}_j^{(i)}(t)=e^{\lambda_i t}\vec{R}_j^{(i)}(t)\ (1\le j\le n_i, 1\le i\le m)$,

$$\frac{d\vec{\varphi}_j^{(i)}(t)}{dt}=\lambda_i\vec{\varphi}_j^{(i)}(t)+e^{\lambda_i t}[\vec{r}_{j,1}^{(i)}+t\vec{r}_{j,2}^{(i)}+\cdots+\frac{t^{n_i-2}}{(n_i-2)!}\vec{r}_{j,n_i-1}^{(i)}].$$

由$(A-\lambda_i E)\vec{r}_{j,n_i-1}^{(i)}=(A-\lambda_i E)^{n_i}\vec{r}_{j,0}^{(i)}=0$和$\vec{r}_{j,l}^{(i)}=(A-\lambda_i E)^l\vec{r}_{j,0}^{(i)}$有

$$\frac{d\vec{\varphi}_j^{(i)}(t)}{dt}=\lambda_i\vec{\varphi}_j^{(i)}(t)+e^{\lambda_i t}(A-\lambda_i E)[\vec{r}_{j,0}^{(i)}+t\vec{r}_{j,1}^{(i)}+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\vec{r}_{j,n_i-1}^{(i)}]$$

$$=\lambda_i\vec{\varphi}_j^{(i)}(t)+e^{\lambda_i t}(A-\lambda_i E)\vec{R}_j^{(i)}(t)$$

$$=Ae^{\lambda_i t}\vec{R}_j^{(i)}(t)=A\vec{\varphi}_j^{(i)}(t).$$

$\therefore\Phi(t)$为(1)的解矩阵.

由Liouville公式，只须证明$\det\Phi(0)\neq 0$.

由线性代数知：

对于n维常数列向量所组成的线性空V，

(a) 其子集$V_i=\left\{\vec{r}\in V \mid (A-\lambda_i E)^{n_i}\vec{r}=0\right\}$是矩阵$A$的

n_i维不变子空间（$AV_i=V_i$）.

(b) $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$（直和分解）.

由(a)在V_i中选取线性无关$\{\vec{r}_{j,0}^{(i)}\}_{1\leq j\leq n_i}$，从而由$(b)$知

$\Phi(0)=(\cdots;\vec{r}_{1,0}^{(i)},\vec{r}_{2,0}^{(i)},\cdots,\vec{r}_{n_i,0}^{(i)};\cdots)$构成$V$的一组基，

故$\det\Phi(0)\neq 0$. 证毕.

求(1)通解的步骤:

(1°) 计算A的特征值;

(2°) 设特征值λ_i的重数为n_i,

求解$(A-\lambda_i E)^{n_i}\vec{r}=0$的基础解系$\vec{r}_{1,0}^{(i)},\cdots\vec{r}_{n_i,0}^{(i)}$;

(3°) 利用公式(*)(单根跳过)计算出

$$\vec{r}_{j,1}^{(i)},\cdots,\vec{r}_{j,n_i-1}^{(i)}(j=1,2,\cdots,n_i);$$

(4°) 取解$\vec{\varphi}_j^{(i)}(t)=e^{\lambda_i t}\left(\vec{r}_{j,0}^{(i)}+\frac{t}{1!}\vec{r}_{j,1}^{(i)}+\cdots+\frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\vec{r}_{j,n_i-1}^{(i)}\right)$;

(5°) 通解$\vec{x}=\Phi(t)\vec{C}$,其中$\Phi(t)=\left(\cdots,\vec{\varphi}_j^{(i)}(t),\cdots\right)$.

例6 求解方程组 $\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{pmatrix}\vec{x}.$

解 $$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 0\\ -4 & -1-\lambda & 0\\ 4 & -8 & -2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$$

特征根为: 单根$\lambda_1=-2$,二重根$\lambda_2=1.$

对于单根$\lambda_1 = -2$, 可以计算

$$A-\lambda_1 E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-\lambda_1 E)\vec{r} = 0$的基础解系为$\vec{r}_{1,0}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对$\vec{r}_{1,0}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 对应取解$\vec{\varphi}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{r}_{1,0}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$.

对于二重根$\lambda_2 = 1$, 计算$\left(A - \lambda_i E\right)^{n_i} \vec{r} = 0$的基础解系，这里$n_i = 2$.

$$\left(A - \lambda_2 E\right)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 28 & 44 & 9 \end{pmatrix},$$

$\left(A - \lambda_1 E\right)^2 r = 0$的基础解系为$\begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}$.

取$\vec{r}_{1,0}^{(2)}=\begin{pmatrix}11\\-7\\0\end{pmatrix}$, 利用公式(*)得

可知$\vec{r}_{1,1}^{(2)}=\left(A-\lambda_2 E\right)\vec{r}_{1,0}^{(2)}=\begin{pmatrix}15\\-30\\100\end{pmatrix}$,

对应取解$\vec{\varphi}_2(t)=e^{\lambda_2 t}\vec{r}_{1,0}^{(2)}+te^{\lambda_2 t}\vec{r}_{1,1}^{(2)}$

$$=e^t\begin{pmatrix}7+15t\\-7-30t\\100t\end{pmatrix}.$$

取$\vec{r}_{2,0}^{(2)}=\begin{pmatrix}3\\-6\\20\end{pmatrix}$，同理有

$$\vec{r}_{2,1}^{(2)}=\left(A-\lambda_2 E\right)\vec{r}_{2,0}^{(2)}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-4&-2&0\\4&-8&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-6\\20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

对应取解$\vec{\varphi}_3(t)=e^{\lambda_2 t}\vec{r}_{2,0}^{(2)}+te^{\lambda_2 t}\vec{r}_{2,1}^{(2)}=e^{t}\begin{pmatrix}3\\-6\\20\end{pmatrix}.$

方程通解为$\vec{x}=\Phi(t)\vec{C}=\left(\vec{\varphi}_1(t),\vec{\varphi}_2(t),\vec{\varphi}_3(t)\right)\vec{C}$

$$=\begin{pmatrix}0&(11+15t)e^{t}&3e^{t}\\0&-(7+30t)e^{t}&-6e^{t}\\e^{-2t}&100te^{t}&20e^{t}\end{pmatrix}\vec{C}.$$

推论. $\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x}$ (1)任一解$\vec{x}(t)$满足$\lim\limits_{t\to\infty}\vec{x}(t)=0$

$\Leftrightarrow$ Re$\lambda<0,\forall A$的特征值λ均成立.

证明. 充分性. $\forall\lambda$, Re$\lambda<0,\exists\alpha>0$, Re$\lambda\le-2\alpha$.由定理3知

$\Phi(t)$的任一列$e^{\lambda t}\vec{P}(t),\vec{P}(t)$:多项式，故$\exists M>0,|\vec{P}(t)|\le Me^{\alpha t}$,

$$|e^{\lambda t}\vec{P}(t)|\le e^{\mathrm{Re}\lambda t}|\vec{P}(t)|\le Me^{(\mathrm{Re}\lambda+\alpha)t}\le Me^{-\alpha t}\to 0\ (t\to\infty)$$

$$\Rightarrow|\Phi(t)|\to 0,|\vec{x}(t)|=|\Phi(t)\vec{C}|\to 0\ (t\to\infty).$$

必要性.若任一解$\vec{x}(t)$满足$\lim\limits_{t\to\infty}\vec{x}(t)=0,\vec{x}(t)=\Phi(t)\vec{C}$,

故$\lim\limits_{t\to\infty}|\Phi(t)|=0\Rightarrow$ 对$\Phi(t)$的任一列$e^{\lambda t}\vec{P}(t),\vec{P}(t)$:多项式，有

$$\lim_{t\to\infty}|e^{\lambda t}\vec{P}(t)|=0\Rightarrow|e^{\lambda t}|=e^{\mathrm{Re}\lambda t}\to 0\ (t\to\infty),$$

$\therefore$ Re$\lambda<0$. 证毕.