§7.5 用多项式一致逼近连续函数

设 $\mathcal{F}$ 是定义在区间 I 上的一个函数空间. 对于定义在 I 上的一个函数 f, 如果对任意正数 ε 都存在 $g \in \mathcal{F}$ 使得

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad (\forall\, x \in I)$$

则称可以用 $\mathcal{F}$ 中的函数一致逼近 f. 此时, 存在 $\mathcal{F}$ 中的函数列 $\{g_n\}$ 在 I 上一致收敛于 f.

由于多项式具有良好的性质, 我们希望可以用多项式来一致逼近函数. 注意到多项式是连续的, 可以用多项式来一致逼近的函数一定也是连续的. 我们要讨论下面的问题:

问题 对于有限闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$, 是否存在多项式函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$?

设 $B_i^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 称为 Bernstein **基函数**.

定义 1 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 称

$$B_n(f;x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x), \tag{1}$$

为 f 的 n 阶 Bernstein 多项式 (1912 年提出).

显然, $B_n(f,x)$ 是次数 $\leqslant n$ 的多项式, 且

$$B_n(1;x) = 1. \tag{2}$$

还可以证明

$$B_n(x;x) = x. \tag{3}$$

$$
\begin{aligned}
B_n(x;x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n}\binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} x^{i+1} (1-x)^{n-1-i} \\
&= x \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i (1-x)^{n-1-i} = x.
\end{aligned}
$$

用类似的方法可以证明

$$
B_n(x^2;x) = (1-\frac{1}{n})x^2 + \frac{1}{n}x. \tag{4}
$$

一般可以验证, 当 f 是 m 次多项式时, $B_n(f;x)$ 是次数为 $\min(n,m)$ 的多项式.

由 (2), (3), (4) 可以得到

$$
\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 B_k^n(x) = nx(1-x). \tag{5}
$$

||◀　▶||　◀　▶　返回　全屏　关闭　退出

定理 1 (Bernstein) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 则 $B_n(f;x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明 对于正数 δ, 设 $\omega(\delta)$ 为 f 的连续模, 即,

$$\omega(\delta)=\max_{\substack{|x-y|\leqslant\delta\\ x,y\in[0,1]}}|f(x)-f(y)|.$$

定义非负整数: $\lambda(x,y;\delta)=\left[\frac{|x-y|}{\delta}\right]$ (整数部分). 则有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant\big(1+\lambda(x,y;\delta)\big)\omega(\delta).$$

因为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}f(x)B_i^n(x),$$

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})B_i^n(x),$$

所以

$$
\begin{aligned}
|B_n(f;x)-f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(\frac{k}{n})-f(x)\right)B_i^n(x)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f(\frac{k}{n})-f(x)\right|B_i^n(x) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left(1+\lambda(\frac{k}{n},x;\delta)\right)\omega(\delta)B_i^n(x) \\
&\leqslant \omega(\delta)\left(1+\sum_{k=0}^{n}\lambda^2\cdot B_i^n(x)\right) \\
&\leqslant \omega(\delta)\left(1+\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-\frac{k}{n})^2}{\delta^2}B_i^n(x)\right) \\
&= \omega(\delta)\left(1+\frac{x(1-x)}{n\delta^2}\right) \\
&\leqslant \omega(\delta)\left(1+\frac{1}{4n\delta^2}\right).
\end{aligned}
$$

取 $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$, 即得,

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leqslant \frac{5}{4}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{6}$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x)$$

在 $[0,1]$ 上一致成立, 即, 这就说明 $B_n(f;x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 证毕.

注 (6) 式不仅证明连续函数的 Bernstein 多项式一致收敛到这个连续函数, 也给出了收敛的速度. 它表明这个速度一般不超过 $\omega(n^{-1/2})$. 这个速度是很慢的.

设 $f(x)$ 是有限闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 令

$$g(x) = f(a + x(b - a)), \; x \in [0, 1].$$

则 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 因此 $B_n(g; x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 $g(x)$, 从而可证明 $B_n(g; \frac{x-a}{b-a})$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 即, 有

定理 2 (**Weierestrass**) 有限闭区间上的连续函数可用多项式一致逼近.

Bernstein 定理是 Weierestrass 定理的一个构造性证明, 但 Bernstein 多项式收敛于连续函数的速度一般比较慢, 用来作为连续函数的近似值不合适. 这也是为什么在很长一段时间内, Bernstein 多项式没有什么应用的原因.

不过 Bernstein 多项式有很好的保形性质.

定理 3 (**Bernstein 多项式的保形性质**) 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数. 则有

1° $B_n(f;0) = f(0)$, $B_n(f;1) = f(1)$; (端点插值)

2° 若 f 在 $[0,1]$ 上非负, 则 $B_n(f;x)$ 也在 $[0,1]$ 上非负; (保号)

3° 若 f 在 $[0,1]$ 上单调递增, 则 $B_n(f;x)$ 也在 $[0,1]$ 上单调递增; (保单调)

4° 若 f 是 $[0,1]$ 上凸函数, 则 $B_n(f;x)$ 也是 $[0,1]$ 上凸函数. (保凸)

区间 $[0,1]$ 的等分点: $\frac{i}{n}$, $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 称为 Bernstein 多项式的节点. 节点上的值 $f_i = f(\frac{i}{n})$ 称为节点值. 并记

$$\Delta f\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right), \ (0 \leqslant i \leqslant n-1)$$

$$\Delta^2 f\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{i+1}{n}\right) + f\left(\frac{i}{n}\right), \ (0 \leqslant i \leqslant n-2).$$

分别称为节点值的一阶差分和二阶差分.

我们有

$$(B_n(f;x))' = n\sum_{i=0}^{n-1} \Delta f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^{n-1}(x),$$

$$(B_n(f;x))'' = n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2} \Delta^2 f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^{n-2}(x)$$

由此可以证明如下定理:

定理 4 若 $f \in C^1[0,1]$, 则 $(B_n(f;x))'$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f'(x)$. 若 $f \in C^2[0,1]$, 则 $(B_n(f;x))''$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f''(x)$.

设 f 是 $[0,1]$ 上的函数. 记

$$f_i^* = \frac{i}{n+1} f_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) f_i, \ (i = 0, 1, \cdots, n+1),$$

这里 $f_{-1} = f_{n+1} = 0$. 则有

定理 5 (**升阶公式**) $\qquad B_n(f;x) = B_{n+1}(f^*;x).$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

定理 6 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的凸函数, 那么有

$$B_n(f;x) \geqslant B_{n+1}(f;,x),\ x \in [0,1],\ (n=1,2,\cdots).$$

定理 7 (Ziegler, 1968) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数. 若

$$B_n(f;x) \geqslant B_{n+1}(f;,x),\ x \in [0,1],\ (n=1,2,\cdots),$$

则 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的凸函数.

定理 8 (Kelisky-Rivlin 定理) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数. 对于算子迭代 $(B_n)^{(m)} := B_n(B_n^{(m-1)})$, 有

$$\lim_{m\to+\infty}(B_n)^{(m)}(f;x) = f(0) + (f(1)-f(0))x.$$

此定理称为 Bernstein 算子的磨光性质.

正是由于 Bernstein 多项式有很好的保形性质, 使得它在近几十年在工业设计中有很好的应用.

设 $\vec{a}_0, \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n$ 是空间中 $n+1$ 个向量, 也可以说是 $n+1$ 个点. 令

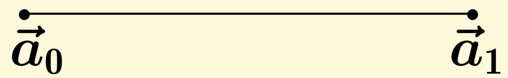
$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\vec{a}_i, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{7}$$

此参数方程表示的空间曲线称为由 $\{\vec{a}_0, \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n\}$ 控制的 n 次 Bézier 曲线. 把 $\vec{a}_{i-1}$ 与 $\vec{a}_i$ 两点用直线连接, $i = 1, 2, \cdots, n$, 就得到一个“多边形”. 一般来说, 这个多边形不是封闭的, 称这个多边形为曲线 (7) 的Bézier 控制多边形 (Bézier 于 1968 年提出). 一条控制多边形唯一地对应着一条 Bézier 曲线.

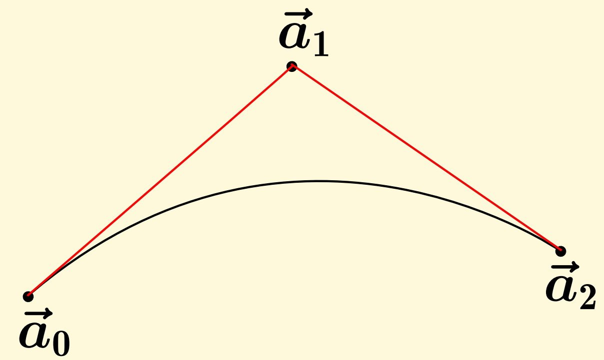
1° 若控制多边形是凸的, 则 Bézier 曲线也是凸的;

2° Bézier 多边形的首尾两点插值于 Bézier 曲线;

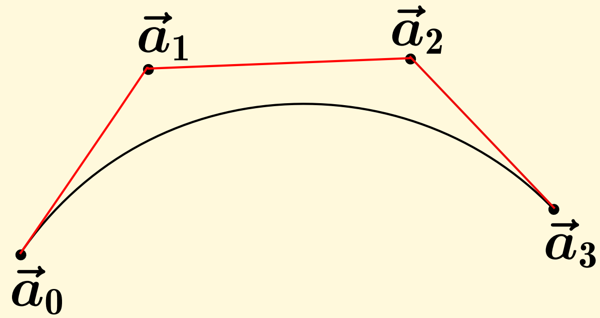
3° Bézier 多边形的首尾两条边都与 Bézier 曲线相切.



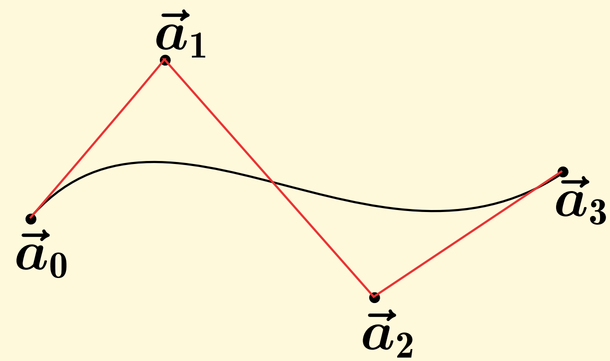
1 次 Bézier 曲线



2 次 Bézier 曲线



3 次 Bézier 曲线



3 次 Bézier 曲线