§0.1 曲线论基本定理

给定正则空间曲线

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

它的具体表达式依赖于参数t，以及(右手系直角)坐标系的选取。但弧长参数s是内蕴不变量，即任意选取的弧长参数s_1, s_2 之间必有$s_2 = \pm(s_1 + c)$(不同参数下求弧长对应积分换元)。特别同定向的两个弧长参数至多相差一个平移。空间曲线的曲率、挠率通过弧长参数来定义，与容许参数选取无关。

另一方面，接下来验证曲线的弧长、曲率和挠率都是刚体运动的不变量，即$\mathbb{R}^3$的刚体运动不改变曲线的弧长、曲率和挠率。挠率在反射下改变符号。

Proposition 0.1. *曲线的弧长、曲率和挠率在刚体运动下不变。*

证明：设$r(s)$为弧长参数曲线，刚体运动

$$T(x) = xA + x_0, \quad A \in SO(3), x_0 \in \mathbb{R}^3.$$

比较曲线$r(s)$与$\widetilde{r}(s) := T \circ r(s) = r(s)A + x_0$：

$$|\widetilde{r}'(s)| = |r'(s)A| = |r'(s)| = 1,$$

因此s为$\widetilde{r}$的弧长参数。从而

$$\widetilde{T}(s) = \frac{d}{ds}\widetilde{r}(s) = \dot{r}(s)A = T(s)A,$$

$$\frac{d\widetilde{T}}{ds} = \dot{T}A = (\kappa N)A = \kappa NA,$$

因此

$$\widetilde{\kappa} = \kappa, \quad \widetilde{N} = NA.$$

由$A \in SO(3)$，

$$\widetilde{B} = \widetilde{T} \wedge \widetilde{N} = (TA) \wedge (NA) = (T \wedge N)A = BA.$$

因此

$$\widetilde{\tau} = \langle \frac{d\widetilde{N}}{ds}, \widetilde{B} \rangle = \langle \frac{dN}{ds}A, BA \rangle = \langle \frac{dN}{ds}, B \rangle = \tau.$$

□

由证明过程，刚体运动$T(x) = xA + x_0$使得

$$\widetilde{T} = TA, \quad \widetilde{N} = NA, \quad \widetilde{B} = BA.$$

定义：刚体运动$T(x)=xA+x_0$把一个右手系正交标架$(r_1;a,b,c)$变为右手系正交标架$(r_2;\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c})$ 是指

$$T(r_1)=r_1A+x_0=r_2;\quad aA=\widetilde{a},\quad bA=\widetilde{b},\quad cA=\widetilde{c}.$$

曲线基本定理：给定曲率函数$\kappa(s)$和挠率函数$\tau(s)$，存在"唯一"（模掉参数化和刚体运动意义下）一条曲线。

定理0.2. *(唯一性)* 设$r_1(s),r_2(s):(a,b)\to\mathbb{R}^3$为两条弧长参数曲线。设

$$\kappa_1(s)=\kappa_2(s)>0,\quad \tau_1(s)=\tau_2(s),\quad \forall s\in(a,b).$$

则存在$\mathbb{R}^3$的一个刚体运动T使得

$$r_1(s)=Tr_2(s).$$

证明：设$0\in(a,b)$，$r_1(s),r_2(s)$在$s=0$处的Frenet标架分别为

$$F_1:=\{r_1(0);T_1(0),N_1(0),B_1(0)\},\quad F_2:=\{r_2(0);T_2(0),N_2(0),B_2(0)\}.$$

则存在$\mathbb{R}^3$的一个刚体运动T使得

$$F_1=TF_2,\quad T(x)=xA+x_0,A\in SO(3),x_0\in\mathbb{R}^3.$$

记$\widetilde{r}(s)=Tr_2(s)$，则由$F_1=TF_2$的定义

$$\widetilde{r}(0)=Tr_2(0)=r_1(0),\quad T_2(0)A=T_1(0),\quad N_2(0)A=N_1(0),\quad B_2(0)A=B_1(0).$$

由之前命题，s为$\widetilde{r}=Tr_2$的弧长参数，对于$\widetilde{r}(s)$

$$\widetilde{T}(s)=T_2(s)A,\quad \widetilde{N}(s)=N_2(s)A,\quad \widetilde{B}(s)=B_2(s)A,$$

$$\widetilde{\kappa}(s)=\kappa_2(s)=\kappa_1(s),\quad \widetilde{\tau}(s)=\tau_2(s)=\tau_1(s).$$

因此$\widetilde{r}(s),r_1(s)$的Frenet标架在$s=0$处相同

$$\widetilde{r}(0)=r_1(0),\quad \widetilde{T}(0)=T_1(0),\quad \widetilde{N}(0)=N_1(0),\quad \widetilde{B}(0)=B_1(0),$$

并且

$$\widetilde{\kappa}(s)=\kappa_1(s),\quad \widetilde{\tau}(s)=\tau_1(s).$$

另一方面，弧长参数曲线$r_1(s), \widetilde{r}(s)$满足Frenet标架运动方程，即$\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$为未知函数的一阶（线性）常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dr}{ds} = T(s), \\ \frac{dT}{ds} = \kappa(s)N(s), \\ \frac{dN}{ds} = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\ \frac{dB}{ds} = -\tau(s)N(s). \end{cases}$$

因此由一阶常微分方程组初值问题解的唯一性(Picard定理)，$r_1(s), \widetilde{r}(s)$的Frenet标架对于任意$s \in (a,b)$相同，特别$r_1(s) = \widetilde{r}(s) = Tr_2(s)$。 □

证明二[do Carmo，不用一阶常微分方程组初值问题解的唯一性]：

同上，$\widetilde{r}(s), r_1(s)$的Frenet标架在$s=0$处相同

$$\widetilde{r}(0) = r_1(0), \quad \widetilde{T}(0) = T_1(0), \quad \widetilde{N}(0) = N_1(0), \quad \widetilde{B}(0) = B_1(0).$$

并且

$$\widetilde{\kappa}(s) = \kappa_1(s) := \kappa(s), \quad \widetilde{\tau}(s) = \tau_1(s) := \tau(s).$$

由Serret-Frenet公式，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{ds}[|\widetilde{T}(s) - T_1(s)|^2 + |\widetilde{N}(s) - N_1(s)|^2 + |\widetilde{B}(s) - B_1(s)|^2] \\ = \ & \langle \widetilde{T} - T_1, \kappa(\widetilde{N} - N_1)\rangle + \langle \widetilde{N} - N_1, -\kappa(\widetilde{T} - T_1) + \tau(\widetilde{B} - B_1)\rangle + \langle \widetilde{B} - B_1, -\tau(\widetilde{N} - N_1)\rangle \\ = \ & 0. \end{aligned}$$

因此对任意s，

$$\widetilde{T}(s) = T_1(s),$$

从而由$\widetilde{r}(0) = r_1(0)$，积分$\frac{dr}{ds} = T(s)$可得$\widetilde{r}(s) = r_1(s)$。 □

定理0.3. *(存在性)* 设$\kappa(s), \tau(s), s \in (a,b)$连续可微，且$\kappa(s) > 0$。则存在$\mathbb{R}^3$中弧长参数曲线$r(s), s \in (a,b)$，其曲率$\kappa = \kappa(s)$和挠率$\tau = \tau(s)$。

证明：考虑$\{r(s); e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$的一阶线性常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dr}{ds} = e_1(s), \\ \frac{de_1}{ds} = \kappa(s)e_2(s), \\ \frac{de_2}{ds} = -\kappa(s)e_1(s) + \tau(s)e_3(s), \\ \frac{de_3}{ds} = -\tau(s)e_2(s). \end{cases}$$

由常微分方程理论，给定初值(右手系正交标架)

$$\{r(s); e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}|_{s=s_0} = \{r^0; e_1^0, e_2^0, e_3^0\},$$

存在唯一解。接下来验证此解$\{r(s); e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$即所求曲线的Frenet标架，特别$r(s)$为所求的弧长参数曲线，并且$e_1(s) = T(s), e_2(s) = N(s), e_3(s) = B(s)$。

首先验证$\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}, s \in (a, b)$为右手系正交标架：记

$$g_{ij}(s) = \langle e_i(s), e_j(s)\rangle;$$

方程组的后三个等式表示成

$$\frac{de_i}{ds} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}(s) e_k(s), \quad i, j = 1, 2, 3$$

其中

$$a_{ij}(s) + a_{ji}(s) = 0.$$

则

$$\begin{aligned} \frac{dg_{ij}}{ds} &= \frac{d}{ds}\langle e_i(s), e_j(s)\rangle = \langle \frac{de_i}{ds}, e_j\rangle + \langle e_i, \frac{de_j}{ds}\rangle \\ &= \langle \sum_{k=1}^{3} a_{ik} e_k, e_j\rangle + \langle e_i, \sum_{k=1}^{3} a_{jk} e_k\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{3} (a_{ik} g_{kj} + a_{jk} g_{ki}), \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

因此(g_{ij})满足一阶线性常微分方程组，初值问题存在唯一解。由初值$g_{ij}(0) = \delta_{ij}$以及$a_{ij}(s) + a_{ji}(s) = 0$，唯一解为

$$g_{ij}(s) = \delta_{ij}, \quad s \in (a, b),$$

即$\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}, s \in (a, b)$为正交标架。由连续性，混合积

$$(e_1(s), e_2(s), e_3(s)) = (e_1(s_0), e_2(s_0), e_3(s_0)) = 1,$$

因此$\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}, s \in (a, b)$为右手系正交标架。

接下来可以验证曲线$r(s)$的几何：由方程组第一式，

$$|\frac{dr}{ds}| = |e_1(s)| = 1,$$

因此$r(s)$为弧长参数曲线，$T(s)=\frac{dr}{ds}=e_1(s)$。由方程组第二式，曲率

$$\kappa=|\dot{T}(s)|=|\dot{e}_1(s)|=|\kappa(s)e_2(s)|=\kappa(s),$$

主法向

$$N(s)=\frac{1}{\kappa}\dot{T}(s)=\frac{1}{\kappa}\dot{e}_1(s)=e_2(s).$$

从而

$$B(s)=T(s)\wedge N(s)=e_1(s)\wedge e_2(s)=e_3(s).$$

由方程组第三式，挠率

$$\tau=\langle\dot{N},B\rangle=\langle\dot{e}_2,e_3\rangle=\tau(s).$$

$\square$

作业：17, 20, 21