

原子物理 B 第一次作业答案

助教-何卓尧

2023.9.12

作业内容：《原子物理》陈宏芳 第一章 2, 3, 4, 5

一、作业答案

1.2 动能 $T=0.87\text{MeV}$ 的质子轰击静止的汞核，当散射角 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，求它们之间的最小距离和瞄准距离.

解答：

$$D = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{zZ}{E}\right) = (1.44\text{eV} \cdot \text{nm}) \cdot \left(\frac{80}{0.87 \times 10^6\text{eV}}\right) = 1.32 \times 10^{-4}\text{nm}$$

$$r_m = \frac{D}{2}\left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}\right) = \frac{1.32 \times 10^{-4}\text{nm}}{2} \times (1 + \sqrt{2}) = 1.59 \times 10^{-4}\text{nm}$$

$$b = \frac{D}{2} \cot \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \times 1.32 \times 10^{-4}\text{nm} \times \left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\tan \theta}\right) = 6.6 \times 10^{-5}\text{nm}$$

注：

$$\cot \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

1.3 一窄束动能为 100keV 的质子垂直地入射在厚度为 $1.0\text{mg}/\text{cm}^2$ 的金箔上，计数器记录以 60° 角散射的质子. 计数器圆形输入孔的面积为 1.0cm^2 ，它到金箔散射区的距离保持 10cm ，输入孔垂直对着射到它上面的质子. 试求射进计数器的质子的百分数.

$$(Au : A = 197, Z = 79, \rho = 1.93 \times 10^4 \text{kg/m}^3)$$

解答:

$$D = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)\left(\frac{zZ}{E}\right) = (1.44\text{eV} \cdot \text{nm}) \cdot \left(\frac{79}{10^5\text{eV}}\right) = 1.14 \times 10^{-3}\text{nm}$$

$$\Delta\Omega = \frac{S}{L^2} = \frac{1.0\text{cm}^2}{100\text{cm}^2} = 0.01 \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{dn}{n} = Nt \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega = \frac{10\text{g/m}^2}{197\text{g/mol}} \times 6.02 \times 10^{23}\text{mol}^{-1} \times \frac{(1.14 \times 10^{-3}\text{nm})^2}{16} \times \frac{1}{(\sin 30^\circ)^4} \times 0.01$$

$$= 0.0397\%$$

1.4 动能 $T=1.20\text{MeV}$ 的质子和金原子核散射，散射在从 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 到 π 的角间隔内，试计算与此相应的散射截面。

解答:

方法一:

$$d\sigma = \frac{D^2}{16} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZ}{4E}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = A \cdot \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$A = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \left(\frac{zZ}{4E}\right)^2 \cdot 4\pi = (1.44\text{eV} \cdot \text{nm})^2 \cdot \left(\frac{79}{4.8 \times 10^6\text{eV}}\right)^2 \times 4\pi = 7.06 \times 10^{-27}\text{m}^2$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} d\sigma = A \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2A \cdot \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\frac{\theta}{2} = 2A \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = 2A \cdot \int_{\frac{1}{2}}^1 y^{-3} dy$$

$$= 2.12 \times 10^{-26}\text{m}^2$$

方法二:

散射角在 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 到 π 之间的粒子，入射时 b 小于 $b(60^\circ)$ ，所以只用计算 $b(60^\circ)$ ， $\sigma = \pi b^2(60^\circ)$

$$D = (1.44 \text{ eV} \cdot \text{nm}) \cdot \left(\frac{79}{1.2 \times 10^6 \text{ eV}} \right) = 9.48 \times 10^{-14} \text{ m}$$

$$b = \frac{D}{2} \cot \frac{\theta}{2} = 0.866 D = 9.21 \times 10^{-14} \text{ m}$$

$$\sigma = \pi b^2 = 2.12 \times 10^{-26} \text{ m}^2$$

1.5 一束动能为 1.0 MeV 的强度为 3.6×10^4 个/秒的 α 粒子，垂直地射在厚度为 $1.0 \mu\text{m}$ 的金箔上，试求 10 min 内被金原子散射到以下角间隔里的 α 粒子数目.

(1) $59^\circ \sim 61^\circ$;

(2) $\theta > \theta_0 = 60^\circ$;

(3) $\theta < \theta_0 = 10^\circ$;

解题思路与 1.4 相似，对公式 $dn = Nntd\sigma$ 求积分，对 $d\sigma$ 的积分过程参考 1.4；也可以采用 1.4 的方法 2 计算；其中第一问有同学采用 60° 近似计算，也算正确

解答：

方法一：

总粒子数： $n = 10 \times 60 \times 3.6 \times 10^4 = 2.16 \times 10^7$

单位面积内靶原子数：(计算过程中的 B 与 1.4 的 A 计算方法相同)

$$Nt = \frac{\rho N_A}{A} t = \frac{1.93 \times 10^4 \text{ kg/m}^3 \times 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}}{197 \text{ g/mol}} \times 1 \mu\text{m} = 5.9 \times 10^{22} \text{ m}^{-2}$$

$$\int dn = Nnt \int d\sigma$$

$$B = 4.066 \times 10^{-26} \text{ m}^2$$

$$\int dn = Nnt \int d\sigma = Nnt \times 2B \int_{\sin 29.5^\circ}^{\sin 30.5^\circ} y^{-3} dy = 1.27 \times 10^{30} \times 9.8 \times 10^{-27} = 1.24 \times 10^4$$

$$(2) \int dn = Nnt \int d\sigma = Nnt \times 2B \int_{\sin 30^\circ}^{\sin 90^\circ} y^{-3} dy = 1.27 \times 10^{30} \times 1.22 \times 10^{-25} = 1.55 \times 10^5$$

(3) 由于直接计算 0-10 度区间粒子数的话计算过程中会有分母为 0 的情况，所以此问可计算用总粒子数 n 减去 10-180 度区间内的粒子数

计算结果为 $2.16 \times 10^7 - 6.743 \times 10^6 \approx 1.49 \times 10^7$

方法二：

$$\int dn = Nnt \int d\sigma$$

$$(1) \int d\sigma = \pi(b_1^2 - b_2^2) = \frac{\pi D^2}{4} (\cot^2 \frac{59^\circ}{2} - \cot^2 \frac{61^\circ}{2})$$

$$(2) \int d\sigma = \pi b^2 = \frac{\pi D^2}{4} (\cot^2 \frac{60^\circ}{2})$$

$$(3) n = N(1 - nt \int d\sigma)$$

$$\int d\sigma = \pi b^2 = \frac{\pi D^2}{4} (\cot^2 \frac{10^\circ}{2})$$

二、补充说明

1. 质量厚度定义为 $\rho_m = \rho t$ ，其中 ρ 为密度， t 为靶厚。（注：计算时不知道物理量怎么用的话可以看单位判断（量纲分析），比如需要的是 Nt ， $[Nt]=L^{-2}$ ，而 $[\rho_m]=ML^{-2}$ ，所以应该用 ρ_m 除以一个与质量有关的物理量，即一个金原子的质量。）
2. 计算结果一般保留两位小数，计算过程中可以使用三或四位小数，和答案偏差不是很大的结果都算正确
3. eV：电子伏特（electron volt），是能量的单位。代表一个电子（所带电量为 $1.6 \times 10^{-19}C$ 的负电荷）经过 1 伏特的电位差加速后所获得的动能。 $1eV \approx 1.6 \times 10^{-19}J$
4. 公式

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44eV \cdot nm$$

可作为整体代入，简化计算过程