Lec1 Note of Real Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 10 日

我们先约定一些记号。

对 $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$，定义 $\mathbb{R}^n$ 上的开球为：

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}.$$

这里 $d(x, y) = |y - x|$ 为欧氏度量。

定义 0.1. 对 $E \in \mathbb{R}^n$, $x \in E$，如果 $\exists\, r > 0\ s.t.\ B_r(x) \subset E$，则称 x 是 E 的**内点**。如果 E 中的点均为内点，则称 E 是**开集**。

定义 0.2. 设 X 是非空集合，记 $2^X := X$ 的子集全体 (称为 X 的**幂集**，也记作 $\mathcal{P}(X)$)。

注意到如果 $n = |X| < \infty$，那么 $|2^X| = 2^n$，所以这个记号是很好的。

定义 0.3. 设 X 是非空集合，$\tau \subset 2^X$。如果 τ 满足

(1) $\varnothing, X \in \tau$;

(2) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$(对有限交封闭);

(3) $A_\alpha \in \tau, \alpha \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$(对任意并封闭);

则称 τ 是 X 上的**拓扑**，τ 中的元素称为 X 中的**开集**。(X, τ) 称为**拓扑空间**。

定义 0.4. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，称 $x \in \mathbb{R}^n$ 是 E 的**极限点 (聚点)** 是指

$$B_r(x) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \varnothing,\ \forall\, r > 0.$$

也可等价地写为

$$\exists\, x_n \in E \setminus \{x\},\ n = 1, 2, \cdots,\ s.t.\ x_n \to x$$

记 E' 为 E 的全体极限点，称为 E 的**导集**。

定义 0.5. 如果 $E' \subset E$，则称 E 为**闭集**，定义 $\overline{E} = E \cup E'$，称为 E 的**闭包**。定义 $\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ$，称为 E 的**边界**，这里 E° 为 E 的全体内点，称为 E 的**内部**。

如果 $\exists\, r > 0\ s.t.\ B_r(x) \cap E = \{x\}$，则称 x 是 E 的**孤立点**。如果 $E' = E$，则称 E 为**完全集**。换言之，完全集是不含孤立点的闭集。

可以验证，若 E_α 对任意 $\alpha \in I$ 为闭集，则 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} E_\alpha$ 也为闭集。

定义 0.6. 称可数个闭集之并为 F_σ **集**，可数个开集之交为 G_δ **集**。

例 0.1. $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ 是 F_σ 集。

E 是 F_σ 集 $\Leftrightarrow E^C$ 是 G_δ 集。

定义 0.7. 设 X 是非空集合，$\mathcal{A}\subset 2^X$，如果 $\mathcal{A}$ 满足:

(i) $\varnothing\in\mathcal{A}$;

(ii) $A\in\mathcal{A}\Rightarrow A^C\in\mathcal{A}$;

(iii) $A_n\in\mathcal{A}, n=1,2,\cdots\Rightarrow\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$;

则称 $\mathcal{A}$ 为 X 上的 **σ-代数**。

评论. (i)+(ii)$\Rightarrow X\in\mathcal{A}$。

(ii)+(iii)$\Rightarrow\mathcal{A}$ 对可数交封闭，i.e. $A_n\in\mathcal{A}, n=1,2,\cdots\Rightarrow\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$。

定义 0.8. 设 $\mathcal{F}\subset 2^X$，包含 $\mathcal{F}$ 的最小的 σ-代数 $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ 称为 $\mathcal{F}$ **生成的 σ-代数**。即

$$\forall\,\sigma\text{-代数}\mathcal{A}\supset\mathcal{F}\Rightarrow\mathcal{A}\supset\mathcal{M}(\mathcal{F}).$$

定义 0.9. 记 $\mathcal{B}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中全体开集生成的 σ-代数，称为 **Borel σ-代数**，$\mathcal{B}$ 中元素称为 **Borel 集**。

例 0.2. 开集，闭集是 Borel 集。

F_σ 集，G_δ 集是 Borel 集。

$F_{\sigma\delta}$ 集 (可数个 F_σ 集之交) 是 Borel 集。$G_{\delta\sigma}$ 集 (可数个 G_δ 集之并) 是 Borel 集。

定理 0.1. *($\mathbb{R}$ 中的开集结构)：$\mathbb{R}$ 中非空开集可唯一地表为至多可数个互不相交的开区间的并集。*

证明. 设 $G\overset{open}{\subset}\mathbb{R}$[1]，则 $\forall\,x\in G,\ \exists\,r>0,\ s.t.\ (x-r,x+r)\subset G$。

令

$$a_x:=\inf\{y\in\mathbb{R}\mid y<x,\ (y,x)\subset G\},$$
$$b_x:=\sup\{z\in\mathbb{R}\mid z>x,\ (x,z)\subset G\}.$$

(注：a_x 可能为 $-\infty$，b_x 可能为 $+\infty$。)

令 $I_x=(a_x,b_x)$，那么

1° $I_x\subset G$.

证明. 不妨设 $\forall\,z\in I_x$，不妨设 $z>x$，由 b_x 定义，$\exists\,w\ s.t.\ z<w<b_x$ 且 $(x,w)\subset G$，从而 $z\in G$，进而 $I_x\in G$。 □

于是 $G=\bigcup\limits_{x\in G}I_x$。

---

[1]用这个记号来表示 G 是 $\mathbb{R}$ 的开子集。

2° $\forall\, I_y, I_z \in \{I_x\}_{x\in G}$，要么 $I_y \cap I_z = \varnothing$，要么 $I_y = I_z$。

证明. 假设 $I_x \cap I_y \neq \varnothing$，则 $y \in I_y \cup I_z \subset \varnothing$，$I_y \cup I_z$ 仍为开区间。于是由 I_y 的最大性，$I_y \cup I_z \subset I_y \Rightarrow I_z \subset I_y$，同理 $I_y \subset I_z \Rightarrow I_y = I_z$。 □

3° $\{I_x\}_{x\in G}$ 至多可数。

证明. 不同的 I_x 互不相交 $\Rightarrow$ 不同的 I_x 包含不同的有理数。
于是考虑对应

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\to \{I_x\}_{x\in G}, \\ q &\mapsto I_x \ni q. \end{aligned}$$

每个 q 至多对应一个 I_x，于是 I_x 的“个数”不多于 $\mathbb{Q}$ 的基数，至多可数。 □

□

评论. *如果 $a_x, b_x \in \mathbb{R}$，则 $a_x, b_x \notin G$。留作习题。*

定义 0.10. 设 $G \overset{open}{\subset} \mathbb{R}$。如果开区间 $(a,b) \subset G$ 且 $a, b \notin G$，则称 (a,b) 是 G 的一个**构成区间**。

推论. *若 $G \overset{open}{\subset} \mathbb{R}$ 可表为互不相交的开区间的并，则这些开区间一定是构成区间。*

定义 0.11. $\mathbb{R}^n$ 中形如

$$R := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1, \cdots, n\}$$

称为 $\mathbb{R}^n$ 中的**矩体 (Rectangle[2])**。

如果矩体 R 的各边长都相等，则称之为**方体 (Cube)**。

定义 0.12. 形如 $\frac{p}{2^k}$，$p, k \in \mathbb{Z}$ 的数称为**二进有理数**，$\mathbb{R}^n$ 中各坐标均为二进有理数的点称为**二进有理点**，以二进有理点为顶点的方体称为**二进方体 (Dyadic cubes)**。

定理 0.2. *($\mathbb{R}^n$ 中的开集结构)：$\mathbb{R}^n$ 中非空开集可表为至多可数个内部不交的方体之并。*

证明. 对每个 $k \in \mathbb{Z}$，令

$$\Gamma_k := \{\text{边长为}2^{-k}\text{的二进方体}\}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &:= \{Q \in \Gamma_0 \mid Q \subset G\} \\ \mathcal{F}_1 &:= \left\{ Q \in \Gamma_1 \,\middle|\, Q \subset G \setminus \left(\bigcup_{R \in \mathcal{F}_0} R \right) \right\} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Claim:$G = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{F}_k} Q$。(至多可数，内部互不相交。)

[2]出于描述的准确性，我建议使用 Rectangular cuboid。

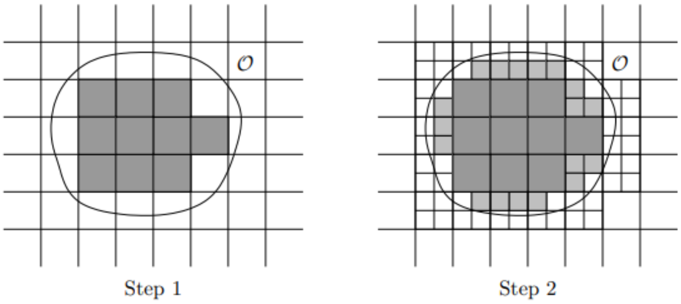

图 1: 细分的过程

证明. 1° $RHS \subset LHS$，平凡。

2° $LHS \subset RHS$。

$\forall\, x \in G, \exists\, r > 0\, s.t.\, B_r(x) \subset G$。另一方面，$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \exists\, Q^{(k)} \in \Gamma_k\, s.t.\, x \in Q^{(k)}$。于是当 k 充分大时，$Q^{(k)} \subset B_r(x) \subset G$。由 $\mathcal{F}_k$ 的定义，$Q^{(k)}$ 一定包含于 $\mathcal{F}_0 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_k$ 中的某个二进方体中。于是 $Q^{(k)} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{F}_i} Q$，从而 $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{Q \in \mathcal{F}_i} Q \Rightarrow LHS \subset RHS$。

□

□

Lec2 Note of Real Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 15 日

接下来介绍 Cantor 三分集。

将 $[0,1]$ 三等分，“挖去”居中的开区间

$$I_1 := \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

令

$$F_{11} := \left[0, \frac{1}{3}\right],\ F_{12} := \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

对 F_{11}, F_{12} 分别三等分，挖去各自居中的开区间

$$I_{21} := \left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right),\ I_{22} := \left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right),$$

令

$$F_{21} := \left[0, \frac{1}{3^2}\right],\ F_{22} := \left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right],\ F_{23} := \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right],\ F_{24} := \left[\frac{8}{3^2}, 1\right].$$

反复进行上述步骤，第 k 步，挖去 2^{k-1} 个开区间

$$I_{k,1} = \left(\frac{1}{3^k}, \frac{2}{3^k}\right), \cdots, I_{k,2^{k-1}} = \left(\frac{3^k-2}{3^k}, \frac{3^k-1}{3^k}\right).$$

令

$$F_{k,1} := \left[0, \frac{1}{3^k}\right], \cdots, F_{k,2^k} := \left[\frac{3^k-1}{3^k}, 1\right].$$

如此进行，然后令

$$\begin{array}{cc}
G_1 = I_1 & C_1 = F_{11} \cup F_{12} \\
G_2 = I_{21} \cup I_{22} & C_2 = F_{21} \cup \cdots \cup F_{24} \\
\vdots & \vdots \\
G_k := \displaystyle\bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} I_{k,i}(\text{开}) & C_k := \displaystyle\bigcup_{i=1}^{2^k} F_{k,i}(\text{闭}) \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

令

$$G := \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k,\ \text{称为 Cantor 开集},$$

$$C := \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k,\ \text{称为 Cantor 三分集。}$$

图 1: Cantor 三分集的构造

则有

1° $C=[0,1]\setminus G$；

2° $C\neq\varnothing$(由闭集套定理)，C 是闭集；

3° C 是完全集；

4° C 不含内点 ($\Leftrightarrow C$ 不含区间)；

5° C 有连续统基数，即存在从 $[0,1]$ 到 C 的一一映射；

6° Cantor 集是零测集；

因为 Cantor 开集 G 中开区间“总长度” $=1$。

$$G:=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} I_{k,i}$$
$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{k-1}}|I_{k,i}|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{3^k}=1.$$

1 外测度

我们熟知，对矩体 $R=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$，定义
$$|R|:=(b_1-a_1)\times\cdots\times(b_n-a_n).$$
作为其体积。

引理 1.1. *如果* $R=\biguplus_{k=1}^{N}R_k$*(表示内部不交并)*，R,R_k *均为矩体，则* $|R|=\sum_{k=1}^{N}|R_k|$。

引理 1.2. *如果* $R\subset\bigcup_{k=1}^{N}R_k$，*则* $|R|\leq\sum_{k=1}^{N}|R_k|$。

定义 1.1. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，定义
$$m_*(E):=\inf\{\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k|\mid Q_k,\ k=1,2,\cdots\ s.t. E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k\}$$
称为 E 的**外测度**。

m_* 可以视作 $m_*\colon 2^{\mathbb{R}^n}\to[0,+\infty]$，作为广义实值函数 (可以取值到无穷)。

例 1.1. $m_*(\varnothing)=0,\ m_*(\{a\})=0,\ m_*(C)=0$，这里 C 为 Cantor 三分集。

因为 $C=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}C_k,\ C_k=\bigcup\limits_{i=1}^{2^k}F_{k,i}$，则

$$m_*(C)\leq\sum_{i=1}^{2^k}|F_{k,i}=\frac{2^k}{3^k}\to 0,\ as\ k\to\infty.$$

例 1.2. $m_*(Q)=|Q|$。

证明. $m_*(Q)\leq|Q|$，平凡。

下证 $|Q|\leq m_*(Q)$。

$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,Q_k,\ k=1,2,\cdots\ s.t.$

$$Q\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k \text{ 且 } \sum_{k=1}^{\infty}|Q_k|\leq m_*(Q)+\varepsilon.$$

对每个 Q_k，存在 P_k 为开方体使得 $Q_k\subset P_k$ 且

$$|P_k|<(1+\varepsilon)|Q_k|.$$

由 Q 紧，存在有限子覆盖 $P_1,\cdots,P_N$ 使得

$$Q\subset\bigcup_{k=1}^{N}P_k \text{ 且 } \sum_{k=1}^{N}|P_k|<(1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{N}|Q_k|<(1+\varepsilon)(m_*(Q)+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon\to0^+$，记得 $|Q|\leq m_*(Q)$。 □

例 1.3. R 为矩体，则 $m_*(R)=|R|$。

证明. $|R|\leq m_*(R)$，同上例。

下证 $m_*(R)\leq|R|$。

令

$$\begin{aligned}
&\Gamma_k:=\{2^{-k}([0,1]^n+m)\mid m\in\mathbb{Z}^n\}.\\
&\mathcal{F}_k:=\{Q\in\Gamma_k\mid Q\cap R\neq\varnothing\}\\
&\Rightarrow R\subset\bigcup_{Q\in\mathcal{F}_k}Q.\\
&\mathcal{F}_k':=\{Q\in\mathcal{F}_k\mid Q\cap\partial R=\varnothing\}.\\
&\mathcal{F}_k'':=\{Q\in\mathcal{F}_k\mid Q\cap\partial R\neq\varnothing\}\\
&\Rightarrow\mathcal{F}_k'\cup\mathcal{F}_k''=\mathcal{F}_k.
\end{aligned}$$

Claim：$|\mathcal{F}_k''|=O(2^{k(n-1)})$。

$$|\mathcal{F}_k''|\lessapprox\frac{\mathrm{Area}(\partial R)\times2^{-k}\times2}{2^{-kn}}.$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{Q\in\mathcal{F}_k'}|Q|\leq|R|,\ \sum_{Q\in\mathcal{F}_k''}|Q|\leq C\cdot2^{k(n-1)}\cdot2^{-kn}=C\cdot2^{-k}\\
&\Rightarrow m_*(R)\leq\sum_{Q\in\mathcal{F}_k}|Q|\leq|R|+C\cdot2^{-k},\ \text{令}k\to\infty\\
&\Rightarrow m_*(R)\leq|R|.
\end{aligned}$$

□

命题 1.3. 单调性：$E_1 \subset E_2 \Rightarrow m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$。

证明. 平凡。 □

命题 1.4. 次可加性：$m_*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m_*(E_k)$。

Lec3 Note of Real Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 17 日

现在证明次可加性。

证明. 不妨设 $\forall\, n,\ m_*(E_n) < \infty$(任意 RHS 中只要有一项为 $+\infty$，不等式平凡成立)。

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, k,\ \exists\, Q_j^{(k)},\ j = 1, 2, \cdots\ s.t.$

$$E_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^{(k)} \quad \text{且} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j^{(k)}| < m_*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k,j} Q_j^{(k)} \quad \text{且} \quad m_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k,j} |Q_j^{(k)}| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(m_*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m_*(E_k) + \varepsilon.$$

□

命题 1.5. 外正则性：$m_*(E) = \inf\{m_*(G) \mid G\text{开},\ E \subset G\}$。

证明. $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, Q_k, k = 1, 2, \cdots\ s.t.\ E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$ 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < m_*(E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\forall\, k,\ \exists\, \Gamma_k$ 开方体 $s.t.\ Q_k \subset \Gamma_k$ 且

$$|\Gamma_k| < |Q_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

令 $G := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$，为开集，且 $E \subset G$，则

$$m_*(E) \leq m_*(G) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\Gamma_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(|Q_k| + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| + \frac{\varepsilon}{2} < m_*(E) + \varepsilon.$$

□

命题 1.6. 如果 $\operatorname{dist}(E_1, E_2) > 0$，则 $m_*(E_1 \cup E_2) = m_*(E_1) + m_*(E_2)$。这里 $\operatorname{dist}(E_1, E_2) = \inf\{|x - y| \mid x \in E_1, y \in E_2\}$。

证明. 首先，由次可加性，$LHS \leq RHS$。来证明 $LHS \geq RHS$。

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, Q_k,\ k = 1, 2, \cdots\ s.t.\ E_1 \cup E_2 \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$ 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < m_*(E_1 \cup E_2) + \varepsilon.$$

不妨设 $\forall\, k$, $\mathrm{diam}Q_k < \frac{1}{2}\mathrm{dist}(E_1,E_2)$(否则细分 Q_k，得到新的方体覆盖，且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|Q_k|$ 不变)，则每个 Q_k 不可能同时与 E_1 和 E_2 相交。

令 $I_1 := \{k \mid Q_k \cap E_1 \neq \varnothing\}, I_2 := \{k \mid Q_k \cap E_2 \neq \varnothing\}$，则 $E_1 \subset \bigcup\limits_{k\in I_1} Q_k$, $E_2 \subset \bigcup\limits_{k\in I_2} Q_k$。

$$\Rightarrow m_*(E_1) + m_*(E_2) \leq \sum_{k\in I_1}|Q_k| + \sum_{k\in I_2}|Q_k| = \sum_{k=1}^{\infty}|Q_k| \leq m_*(E_1\cup E_2)+\varepsilon,\ \text{令}\varepsilon \to 0$$

$$\Rightarrow m_*(E_1) + m_*(E_2) \leq m_*(E_1\cup E_2).$$

□

命题 1.7. 设 Q_k, $k = 1, 2, \cdots$，内部相互不交，则

$$m_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}|Q_k|.$$

证明. 首先由次可加性 $LHS \leq RHS$。下证 $LHS \geq RHS$。

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, k$, $\exists\, \tilde{Q}_k$(收缩 Q_k 得到)$s.t.$

1° $\tilde{Q}_k \subset Q_k$；

2° $|\tilde{Q}_k| > |Q_k| - \frac{\varepsilon}{2^k}$；

3° $\mathrm{dist}(\tilde{Q}_k, \tilde{Q}_j) > 0$, $\forall\, k, j, k \neq j$。

对 $\forall\, N$,

$$m_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right) \geq m_*\left(\bigcup_{k=1}^{N} \tilde{Q}_k\right) = \sum_{k=1}^{N}|\tilde{Q}_k| \geq \sum_{k=1}^{N}\left(|Q_k| - \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{N}|Q_k| - \varepsilon$$

$$\Rightarrow m_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty}|Q_k| - \varepsilon$$

$$\Rightarrow LHS \geq RHS.$$

□

推论. 设 $G_k, k = 1, 2, \cdots$ 是互不相交的开集，则

$$m_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m_*(G_k).$$

证明.

$$G_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^{(k)}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcup_{k,j} Q_j^{(k)}$$

$$\Rightarrow m_*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) = m_*\left(\bigcup_{k,j} Q_j\right) = \sum_{k,j}|Q_j^{(k)}| = \sum_{k=1}^{\infty} m_*(G_k).$$

□

命题 1.8. 平移不变性：$m_*(E+h)=m_*(E),\ \forall\, h\in\mathbb{R}^n$。

证明.

$$m_*(E+h)\le m_*(E).$$
$$E=(E+h)-h\Rightarrow m_*(E)\le m_*(E+h).$$

□

回到我们一开始的问题，我们想要知道，是否对任意集合都可以定义类似于“长度”的概念？换言之，是否存在 $\mu\colon 2^{\mathbb{R}^n}\to[0,+\infty]\ s.t.$

(i) $\mu(\varnothing)=0$；

(ii) $\mu(R)=|R|,\ \forall\, R$ 为矩体；

(iii) 可数可加；

(iv) 平移不变?

注意 m_* 是不满足有限可加的。因为 $\exists\ E_1,E_2\subset\mathbb{R}^n$，$E_1\cap E_2=\varnothing$，$m_*(E_1\cup E_2)\neq m_*(E_1)+m_*(E_2)$。

而且抛开外测度不谈，仅仅是上面的条件也是互不相容的。于是我们退而求其次，不去追求对所有集合都成立，而是取出部分集合。

定义 1.2. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$。

1° 如果 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, G$ 为开集 $s.t.\ E\subset G$ 且

$$m_*(G\setminus E)<\varepsilon,$$

则称 E 是 **Lebesgue 可测**的，简称**可测**。

2° 如果 $\forall\, A\subset\mathbb{R}^n$(检验集)，

$$m_*(A)=m_*(A\cap E)+m_*(A\cap E^C),$$

则称 E 是 **Caratheodory 可测**的。

评论. 两者其实是等价的。

令 $\mathcal{L}:=\{\mathbb{R}^n\text{中可测集}\}\subset\mathbb{R}^n$。

命题 1.9. 开集可测。

证明. 平凡。 □

命题 1.10. 零测集可测。这里零测集指的是 $m_*(E)=0$。

证明. 由外正则性，$0=m_*(E)=\inf\{m_*(G)\mid G\text{开},\ E\subset G\}$。

$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, G$ 开 $s.t.\ E\subset G$ 且

$$m_*(G)<m_*(E)+\varepsilon=\varepsilon$$
$$\Rightarrow m_*(G\setminus E)<\varepsilon.$$

□

例 1.4. Cantor 三分集是可测的。

命题 1.11. $E_k,\ k=1,2,\cdots$ 可测 $\Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 可测。*($\mathcal{L}$ 对可数并封闭。)*

证明. $\forall\,\varepsilon>0,\ \forall\,k,\ \exists\,G_k$ 开 $s.t.\ E_k\subset G_k$,

$$m_*(G_k\setminus E_k)<\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

令 $G:=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$ 为开集，则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\subset G$。

$$\begin{aligned}
&G\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k\setminus E_k),\ \bigcup_{k=1}^{\infty}G_k\cap\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k^C\right)\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k\cap E_k^C)\\
\Rightarrow &m_*\left(G\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}m_*(G_k\setminus E_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

命题 1.12. 闭集可测。*(进而补集可测。)*

Lec4 Note of Real Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 22 日

现在证明闭集可测。

证明. Step1：紧集可测。

设 $F \subset \mathbb{R}^n$ 紧，则 $m_*(F) < \infty$。由外正则性，$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, G$ 开 $s.t.\ F \subset G$，且

$$m_*(G) < m_*(F) + \varepsilon.$$

由 $G \setminus F$ 开，设 $G \setminus F = \biguplus\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$。令

$$F_N := \bigcup_{k=1}^{N} Q_k,\ N = 1, 2, \cdots$$

则 F_N 紧且 $F_N \cap F = \varnothing$，于是 $\mathrm{dist}(F_N, F) > 0$。所以 $m_*(F_N \cup F) = m_*(F_N) + m_*(F)$，$m_*(F_N) = m_*(F_N \cup F) - m_*(F) \le m_*(G) - m_*(F) < \varepsilon$。于是 $m_*(G \setminus F) < \varepsilon$。

Step2：一般情形。

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} (F \cap \overline{B_k(O)}).$$

于是可测。 □

命题 1.13. $E \in \mathcal{L} \Rightarrow E^C \in \mathcal{L}$。

证明. $\forall\, k,\ \exists\, G_k$ 开，$E \subset G_k\ s.t.$

$$m_*(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}.$$

$\forall\, k,\ G_k^C$ 闭，故可测。从而 $S := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k^C \in \mathcal{L}$。于是 $E \subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k \Rightarrow E^C \supset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k^C = S$，且 $E^C \setminus S \subset G_k \setminus E$，这是因为 $E^C \cap S^C = E^C \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k\right) \subset E^C \cap G_k$。从而

$$\begin{aligned} & m_*(E^C \setminus S) \le m_*(G_k \setminus E) < \frac{1}{k} \\ \Rightarrow & m_*(E^C \setminus S) = 0 \\ \Rightarrow & E^C \setminus S \text{可测} \\ \Rightarrow & E^C = S \cup (E^C \setminus S) \text{可测。} \end{aligned}$$

□

若 $\mathcal{A} \subset 2^X$ 满足

(i) $X, \varnothing \in \mathcal{A}$；

(ii) $\mathcal{A}$ 对可数并封闭；

(iii) $\mathcal{A}$ 对取补封闭。

则称 $\mathcal{A}$ 是 X 上一个 $\sigma-$ **代数**。回忆 $\mathcal{L} = \{\mathbb{R}^n$中可测集$\}$。

定理 1.14. $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上一个 $\sigma-$ 代数。

回忆 Borel$\sigma-$ 代数 $\mathcal{B} := \mathbb{R}^n$ 中开集全体生成的 $\sigma-$ 代数，那么 $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$，但注意 $\mathcal{B} \neq \mathcal{L}$。

定义 1.3. $m := m_*|_{\mathcal{L}}$ 称为 **Lebesgue 测度**。

定理 1.15. 可数可加性：设 $E_k \in \mathcal{L},\ k = 1, 2, \cdots$ 互不相交，则

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

证明. Step1：先假设 $\forall\, k,\ E_k$ 有界。

首先 $LHS \leq RHS$(次可加性)。下证 $LHS \geq RHS$。

$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, k,\ \exists\, F_k$ 紧 $s.t.\ F_k \subset E_k$ 且

$$m(E_k \setminus F_k) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

(由习题 25。) 于是对 $\forall\, N,\ F_1, \cdots, F_N$ 互不相交，有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dist}(F_k, F_j) > 0,\ \forall\, k, j, k \neq j \\
\Rightarrow &m\left(\bigcup_{k=1}^{N} F_k\right) = \sum_{k=1}^{N} m(F_k) \\
\Rightarrow &m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \geq m\left(\bigcup_{k=1}^{N} F_k\right) = \sum_{k=1}^{N} m(F_k) \geq \sum_{k=1}^{N} [m(E_k) - m(E_k \setminus F_k)] \\
&\geq \sum_{k=1}^{N} [m(E_k) - \frac{\varepsilon}{2^k}] = \sum_{k=1}^{N} m(E_k) - \varepsilon \\
\Rightarrow &m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) - \varepsilon \\
\Rightarrow &LHS \geq RHS.
\end{aligned}$$

Step2：一般情形。

令 $Q_k := [-k, k]^n \Rightarrow \mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$。令 $S_1 := Q_1,\ S_k := Q_k \setminus Q_{k-1}, k \geq 2$，则 $R^n = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} S_k$。令 $E_{j,k} := S_j \cap E_k,\ j, k = 1, 2, \cdots \Rightarrow E_k = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} E_{j,k},\ \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \bigsqcup\limits_{j,k} E_{j,k}$，这里 $E_{j,k}$ 有界。

于是由 Step1，

$$
\begin{aligned}
m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= m\left(\bigsqcup_{j,k} E_{j,k}\right) \\
&= \sum_{j,k} m(E_{j,k}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} m(E_{j,k})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).
\end{aligned}
$$

□

定理 1.16. 测度的连续性：设 $E_k \in \mathcal{L}$, $k = 1, 2, \cdots$

(i) 向上的连续性：如果 $E_k \nearrow E$，则 $m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k)$。

(ii) 向下的连续性：如果 $E_k \searrow E$，且 $\exists\, k_0$, $m(E_{k_0}) < \infty$，则

$$m(E) = \lim_{k\to\infty} m(E_k).$$

证明. (i) 令 $\tilde{E}_1 = E_1$, $\tilde{E}_k = E_k \setminus E_{k-1}$, $k \geq 2$，则 $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$。由可数可加性，$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(\tilde{E}_k) = \lim_{N\to\infty} m(\tilde{E}_k) = \lim_{N\to\infty} m(E_N)$。

(ii) 不妨设 $m(E_1) < \infty$。令 $\tilde{E}_k = E_k \setminus E_{k+1}$, $k = 1, 2, \cdots$，则

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E \cup \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k\right) \\
\Rightarrow m(E_1) &= m(E) + \sum_{k=1}^{\infty} m(\tilde{E}_k) \\
&= m(E) + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} [m(E_k) - m(E_{k+1})] \\
&= m(E) + m(E_1) - \lim_{N\to\infty} m(E_N).
\end{aligned}
$$

由 $m(E_1) < \infty$，得 $m(E) = \lim_{N\to\infty} m(E_N)$。

□

定理 1.17. 设 $E \in \mathcal{L}$，则

1° $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, G$ 开，$E \subset G$ 且 $m(G \setminus E) < \varepsilon$。

2° $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, F$ 闭，$F \subset E$ 且 $m(E \setminus F) < \varepsilon$。

3° 如果 $m(E) < \infty$，则 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, F$ 紧，$F \subset E$ $s.t.$ $m(E \setminus F) < \varepsilon$。

4° 如果 $m(E) < \infty$，则 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, Q_1, \cdots, Q_N$ $s.t.$ $\left(E \Delta \left(\bigcup_{k=1}^{N} Q_k\right)\right) < \varepsilon$，其中 $E_1 \Delta E_2 := (E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)$

证明. 1° 平凡。

2° $E \in \mathcal{L} \Rightarrow E^C \in \mathcal{L}$。于是 $\forall \varepsilon > 0, \exists G$ 开，$E^C \subset G\, s.t.\, m(G \setminus E^C) < \varepsilon$。令 $F := G^C$ 为闭集，则 $F \subset E$ 且 $E \setminus F = G \setminus E^C$，从而 $m(E \setminus F) < \varepsilon$。

$\square$

Lec5 Note of Real Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 24 日

接着完成上次的证明。

证明. 3° 令 $Q_k := [-k,k]^n,\ k=1,2,\cdots \Rightarrow E\cap Q_k \nearrow E$。由左连续性，$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,k\ s.t.$

$$m(E\cap Q_k) > m(E) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

由 2°，$\exists\,K$ 闭 (紧)$s.t.\ K\subset E\cap Q_k$，且 $m((E\cap Q_k)\setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$。那么

$$\begin{aligned} m(E\setminus K) &= m(E\setminus (E\cap Q_k)) + m((E\cap Q_k)\setminus K) \\ &= m(E) - m(E\cap Q_k) + m((E\cap Q_k)\setminus K) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

4° 由 m_* 的定义，$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,Q_k, k=1,2,\cdots\ s.t.\ E\subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$ 且

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < m(E) + \frac{\varepsilon}{2} < \infty.$$

令 $F := \bigcup\limits_{k=1}^{N} Q_k$，则

$$E\setminus F \subset \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right)\setminus F \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} Q_k \Rightarrow m(E\setminus F) \le \sum_{k=N+1}^{\infty} |Q_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$m(F\setminus E) \le m\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right)\setminus E\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| - m(E) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

称零测集为**零集 (Null set)**。

定理 1.18. 设 $E\subset \mathbb{R}^n$。

(i) E 可测 $\Leftrightarrow \exists\,G(G_\delta$集$),\ \exists\,N_1($零集$)\ s.t.\ E = G\setminus N_1$；

(ii) E 可测 $\Leftrightarrow \exists\,F(F_\sigma$集$),\ \exists\,N_2($零集$)\ s.t.\ E = F\cup N_2$。

证明. 这里只证明 (i)，(ii) 留作习题。

“$\Leftarrow$” 平凡。

“$\Rightarrow$”

$E\in\mathcal{L} \Rightarrow \forall\,k,\ \exists\,G_k$开, $s.t.\ E\subset G_k$ 且 $m(G_k\setminus E) < \frac{1}{k}$。

令 $G := \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k (G_\delta$ 集)，那么

$$m(G \setminus E) \le m(G_k \setminus E) < \frac{1}{k} \Rightarrow m(G \setminus E) = 0.$$

令 $N_1 := G \setminus E$ 即可。 $\square$

定理 1.19. *1°* 平移不变性：$E \in \mathcal{L},\ h \in \mathbb{R}^n \Rightarrow E + h \in \mathcal{L}$ 且 $m(E+h) = m(E)$。

2° 旋转不变性：$E \in \mathcal{L},\ T \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow T(E)L = \{Tx \mid x \in E\} \in \mathcal{L}$，且 $m(T(E)) = m(E)$。

3° 反射不变性：$E \in \mathcal{L} \Rightarrow -E \in L$，且 $m(-E) = m(E)$。

4° $E \in \mathcal{L}, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda E \in \mathcal{L}$ 且 $m(\lambda E) = \lambda^n m(E)$。

定理 1.20. *(Vitali,1905)*$\mathcal{L} \neq 2^{\mathbb{R}}$*(即一定存在不可测子集)*。

这是个集合论的问题，我们需要先回忆一些集合论的基本事实。

以下命题等价：

- 选择公理 (Axiom of choice, AC)；
- Zorn 引理；
- 良序原理；
- 超限归纳法原理。

定理 1.21. *AC*：设 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族互不相交的非空集合，则 $\exists\, Y \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha\ s.t. \forall\, \alpha \in I,\ Y \cap E_\alpha$ 是一个独点集 $\{x_\alpha\}$。

下面是 Vitali theorem 的证明：

证明. 在 $[0,1]$ 中引入等价关系

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

令 $E_\alpha := [\alpha] = \{x \in [0,1] \mid x \sim \alpha\}$，那么

1° $\forall\, \alpha, \beta \in [0,1]$，要么 $E_\alpha \cap E_\beta = \varnothing$，要么 $E_\alpha = E_\beta$。

2° $\forall\, \alpha,\ E_\alpha$ 是可数集。

3° $[0,1] = \bigsqcup\limits_{\alpha} E_\alpha$。

由 AC，$\exists\, A \subset \bigcup\limits_{\alpha} E_\alpha\ s.t. \forall\, \alpha,\ A \cap E_\alpha = \{x_\alpha\}$。

Claim：A 不可测。

设 $\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}$，令 $A_k := A + r_k,\ k = 1, 2, \cdots$，那么

(i) $A_k, k = 1, 2, \cdots$ 互不相交。

假设 $\exists\, j, k,\ j \neq k\ s.t.\ A_j \cap A_k \neq \varnothing$，则 $\exists\, \alpha \neq \beta,\ A_j \ni x_\alpha + r_j = x_\beta + r_k \in A_k \Rightarrow x_\alpha - x_\beta = r_k - r_j \in \mathbb{Q}$，从而 $x_\alpha \sim x_\beta$，这与 $A \cap E_\alpha$ 是独点集矛盾。

(ii) $[0,1] \subset \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset [-1,2]$。

$\forall\, x \in [0,1],\ \exists\, \alpha\ s.t.\ x \sim x_\alpha \in E_\alpha \cap A \Rightarrow \exists\, r_k \in [-1,1]\ s.t.\ x = x_\alpha + r_k \in A_k$。

来证明 $A \notin \mathcal{L}$。

假设 $A \in \mathcal{L}$，则

$$\begin{aligned}
&\forall\, k,\ A_k \in \mathcal{L}\text{且}m(A_k) = m(A) \\
\Rightarrow & 1 \le m\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \le 3 \\
\Rightarrow & 1 \le \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \le 3 \\
\Rightarrow & 1 \le \sum_{k=1}^{\infty} m(A) \le 3,
\end{aligned}$$

矛盾。 □

评论. 同样的推理可证明不存在 $\mu\colon 2^{\mathbb{R}^n} \to [0, +\infty]$ 同时满足

(i) $\mu([0,1]) = 1$；

(ii) 可数可加性；

(iii) 平移不变性。

2 可测函数

约定记号：设 E 为可测集，则

$$\begin{aligned}
\{f < a\} &:= \{x \in E \mid -\infty \le f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a)), \\
\{f > a\} &:= \{x \in E \mid a < f(x) \le +\infty\}.
\end{aligned}$$

定义 2.1. 设 E 是可测集，函数 $f\colon E \to [-\infty, +\infty]$，如果 $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\{f < a\}$ 可测，则称 f 在 E 上**可测**。

Lec6 Note of Real Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 29 日

命题 2.1. 以下等价：

(i) $\forall\, a\in\mathbb{R}$，$\{f<a\}$ 可测；

(ii) $\forall\, a\in\mathbb{R}$，$\{f\le a\}$ 可测；

(iii) $\forall\, a\in\mathbb{R}$，$\{f>a\}$ 可测；

(iv) $\forall\, a\in\mathbb{R}$，$\{f\ge a\}$ 可测；

证明. (i)⇒(ii)：$\{f\le a\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\{f<a+\dfrac{1}{k}\}$。

(ii)⇒(iii)：$\{f>a\}=E\setminus\{f\le a\}$。 □

命题 2.2. f 可测 $\Leftrightarrow \forall\, a,b\in\mathbb{R},\ a<b,\ \{a\le f<b\}$ 可测。

证明. “⇒”: $\forall\, a,\ \{f\ge a\}$ 可测，$\forall\, b,\ \{f<b\}$ 可测，于是 $\{a\le f<b\}=\{f\ge a\}\cap\{f<b\}$ 可测。

“⇐”：$\forall\, a,\ \{f<a\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{-k\le f<a\}$ 可测 $\Rightarrow f$ 可测。 □

例 2.1. Dirichlet 函数 $D=\chi_{\mathbb{Q}}=\begin{cases}1,\ x\in\mathbb{Q},\\ 0,\ x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ 可测。

$$\{\chi_{\mathbb{Q}}<a\}=\begin{cases}\mathbb{R},\ a>1,\\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ 0<a\le 1,\\ \varnothing,\ a\le 0.\end{cases}$$

命题 2.3. 以下等价：

(i) f 可测；

(ii) $\forall\, G\subset\mathbb{R}$ 开，$f^{-1}(G)$ 可测；

(iii) $\forall\, F\subset\mathbb{R}$ 闭，$f^{-1}(F)$ 可测；

(iv) $\forall\, B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$，$f^{-1}(B)$ 可测。

命题 2.4. 若 $f\colon E\to\mathbb{R}$ 可测，$g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续，则 $g\circ f$ 可测。

证明. $\{g\circ f<a\}=(g\circ f)^{-1}((-\infty,a))=f^{-1}(g^{-1}((-\infty,a)))$，$g^{-1}((-\infty,a))$ 为开集，从而原像可测。 □

评论. 即使 $f\colon E\to\mathbb{R}$ 连续，$g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可测，但 $g\circ f$ 未必可测。

命题 2.5. *1°* f 可测 $\Rightarrow f^k$ 可测，$\forall\, k\in\mathbb{N}$。

2° f,g 可测 $\Rightarrow f\pm g,\ \lambda f,\ fg,\ \frac{f}{g}$ 可测 *(如果有定义)*。

证明. 1° Case 1：k 为奇数。

$\forall\, a,\ \{f^k>a\}=\{f>a^{\frac{1}{k}}\}$ 可测。

Case 2：k 为偶数。

$\{f^k>a\}=\begin{cases}\{f>a^{\frac{1}{k}}\}\cup\{f<-a^{\frac{1}{k}}\}, & a>0,\\ E, & a\le 0\end{cases}$ 可测。

2° Claim：$\{f+g>a\}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}(\{f>a-r\}\cap\{g>r\})$。

$LHS\supset RHS$，平凡。下证明 $LHS\subset RHS$。

$$\begin{aligned}x\in LHS&\Leftrightarrow f(x)+g(x)>a\\&\Rightarrow\exists\, r\in\mathbb{Q}\ s.t.\ g(x)>r>a-f(x)\\&\Rightarrow x\in\{g>r\}\cap\{f>a-r\}\\&\Rightarrow x\in RHS.\end{aligned}$$

于是只要注意到 $fg=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]$ 可知 fg 可测。

□

定义 2.2. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，令

$$\chi_E(x):=\begin{cases}1,\ x\in E,\\0,\ x\notin E.\end{cases}$$

称为 E 的**特征函数 (Characteristic function)**，或**示性函数 (Indicator function)**。

命题 2.6. χ_E 可测 $\Leftrightarrow E$ 可测。

证明.

$$\{\chi_E>a\}=\begin{cases}\varnothing, & a>1,\\E, & 0<a\le 1,\\\mathbb{R}^n,\ a\le 0,\end{cases}$$

□

定义 2.3. 形如

$$\sum_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k},\ E_k\text{可测},\ k=1,2,\cdots,N$$

的函数称为**简单函数 (Simple function)**。

评论. 这与 Stein 意义不同，Stein 要求 $m(E_k)<\infty$。

命题 2.7. 简单函数可测，且有**标准表示**

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}.$$

这里 $a_k \in \mathbb{R},\ a_k \neq a_j, k \neq j$，$E_k$ 可测，$E_k \cap E_j = \varnothing, k \neq j$，$\bigcup_{k=1}^{N} E_k = \mathbb{R}^n$。

证明. 设 $\mathrm{Ran}(\varphi) = \{a_1, \cdots, a_N\}$，令 $E_k := \{\varphi = a_k\} = \varphi^{-1}(\{a_k\}),\ k = 1, 2, \cdots, N$，则

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$$

是标准表示。 □

定义 2.4. 阶梯函数 (Step function) 定义为矩体的示性函数的线性组合,即形如 $\sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{R_k}$ 的函数。

定理 2.8. 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列可测函数，则

$$\sup_k f_k,\ \inf_k f_k,\ \limsup_{k\to\infty} f_k,\ \liminf_{k\to\infty} f_k$$

均可测。特别地，如果 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k$ 存在，则可测。

这意味着可测函数类对点态极限运算封闭。

注意

$$\{sup_k f_k > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f_k > a\},$$

$$\inf_k f_k = -\sup_k (-f_k),$$

$$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_k \sup_{j \geq k} f_j$$

即可。

推论. f, g 可测 $\Rightarrow \max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ 可测。

定义 2.5. 定义

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\},$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

f^+, f^- 分别称为 f 的**正部**和**负部**。

评论. 由于 $f = f^+ - f^-,\ |f| = f^+ + f^-$，所以 f 可测 $\Leftrightarrow f^+, f^-$ 都可测 $\Rightarrow |f|$ 可测。

但 $|f|$ 可测未必有 f 可测。

定义 2.6. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测，$P(x)$ 是一个与 x 有关的性质。如果

$$m(\{x \in E \mid P(x)\text{不成立}\}) = 0,$$

则称 P 在 E 上**几乎处处**成立，又称 **a.e.**[1]成立。

[1]almost everywhere.

例 2.2. $f = g\ a.e. :\Leftrightarrow m(\{f \neq g\}) = 0$。

命题 2.9. 设 f_k 可测，$k = 1, 2, \cdots$，则 $f_k \to f\ a.e. \Rightarrow f$ 可测。

定理 2.10. 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上非负可测，则 $\exists\, \varphi_k \geq 0, \textit{simple},\ k = 1, 2, \cdots\ s.t.\ \varphi_k \nearrow f$。即

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \cdots \leq f(x)$$

且 $\varphi_k(x) \to f(x),\ k \to \infty$。

进而，如果 f 有界，则 $\varphi_k \rightrightarrows f$，即一致收敛到 f。

证明. 对 $k = 1, 2, \cdots$, $j = 0, 1, 2, \cdots, 2^{2k} - 1$，令

$$E_{k,j} := \{\frac{j}{2^k} \leq f < \frac{j+1}{2^k}\},$$

$$F_k = \{f \geq 2^k\}$$

对每个 k，这些集合互不相交。令

$$\varphi_k := \sum_{j=0}^{2^{2k}-1} \frac{j}{2^k} \chi_{E_{k,j}} + 2^k \chi_{F_k}$$

即可。 □

Lec7 Note of Real Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 31 日

我们进一步完善定理 2.10 的证明。

证明. 对 $k=1,2,\cdots,\ j=0,1,2,\cdots,2^{2k}-1$，令

$$E_{k,j}:=\{\frac{j}{2^k}\le f\le\frac{j+1}{2^k}\},\ F_k:=\{f\ge 2^k\}.$$

那么对每个 k 它们互不相交，且 $F_k\setminus F_{k+1}=\{2^k\le f<2^{k+1}\}$。

令

$$\varphi_k:=\sum_{j=0}^{2^{2k}-1}\frac{j}{2^k}\chi_{E_{k,j}}+2^k\chi_{F_k},$$

则

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}\frac{j}{2^k},\ x\in E_{k,j},\\ 2^k,\ x\in F_k.\end{cases}$$

从而 $0\le\varphi_k\le f$。

1° $\varphi_k\le\varphi_{k+1},\ \forall\,k$。

(i) 如果 $x\in F_k$，

Case 1 $x\in F_{k+1}$，则

$$\varphi_{k+1}(x)=2^{k+1}>2^k=\varphi_k(x).$$

Case 2 $x\in F_k\setminus F_{k+1}$，则

$$F_k\setminus F_{k+1}=\{2^k\le f<2^{k+1}\}=\bigcup_{j=2^{2k+1}}^{2^{2k+2}-1}$$

$$\Rightarrow\varphi_{k+1}(x)\ge\frac{2^{2k+1}}{2^{k+1}}=2^k=\varphi_k(x).$$

(ii) 如果 $x\notin F_k$，则 $x\in E_{k,j}$ 对某个 $j\in\{0,1,\cdots,2^{2k}-1\}$ 成立，而 $E_{k,j}=E_{k+1,2j}\cup E_{k+1,2j+1}$，所以

$$\varphi_{k+1}(x)\ge\frac{2j}{2^{k+1}}=\frac{j}{2^k}=\varphi_k(x).$$

2° $\forall\,x\in\mathbb{R}^n,\ \varphi_k(x)\to f(x),\ k\to\infty$。

Case 1 $f(x)=+\infty$。

则 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k\Rightarrow\varphi_k(x)=2^k,\ k=1,2,\cdots\Rightarrow\varphi_k(x)\to+\infty$。

Case 2 $f(x) < +\infty$。

则 $\exists\, k_0\ s.t.\ f(x) < 2^{k_0}$，于是 $\forall\, k > k_0$, $\exists\, j\ s.t.\ x \in E_{k,j}\ (x \notin F_k) \Rightarrow 0 \leq f(x) - \varphi_k(x) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \varphi_k(x) \to f(x),\ k \to \infty$。

□

定理 2.10 称为**逼近定理**。

定义 2.7. $\mathrm{supp} f := \overline{\{f \neq 0\}}$ 称为 f 的**支集 (或支撑，Support)**。

如果 $\mathrm{supp} f$ 是紧集，则称 f 由**紧支集**，或称 f 是**紧支的**。

推论. 设 $f \geq 0$ 可测 $\Rightarrow \varphi_k \geq 0,\ simple$，紧支，$s.t.\ \varphi_k \nearrow f$。

证明. 由定理 2.10，$\exists\, \widetilde{\varphi}_k,\ simple,\ k = 1, 2, \cdots\ s.t.\ \widetilde{\varphi}_k \nearrow f$。

令 $\varphi_k L = \widetilde{\varphi}_k \chi_{\overline{B_k(0)}} \Rightarrow \varphi_k\ simple$ 且 $\mathrm{supp}(\varphi_k) \subset \overline{B_k(0)}$。

对 $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, k_0\ s.t.\ x \in \overline{B_{k_0}(0)}$，于是 $\forall\, k \geq k_0$, $x \in \overline{B_k(0)} \Rightarrow \varphi_k(x) = \widetilde{\varphi_k}(x) \Rightarrow \varphi_k(x) \to f(x),\ k \to \infty$。 □

定理 2.11. 设 f 可测，则 $\exists\, \varphi_k\ simple,\ k = 1, 2, \cdots\ s.t.\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$，

$$0 \leq |\varphi_1(x)| \leq |\varphi_2(x)| \leq \cdots \leq |f(x)|,$$

且 $\varphi_k(x) \to f(x),\ k \to \infty$。

证明. $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$,于是由定理 2.10,$\exists \varphi_k^{(1)}\ simple$, $\varphi_k^{(1)} \nearrow f^+$, $\exists \varphi_k^{(2)}\ simple$, $\varphi_k^{(2)} \nearrow f^-$。令 $\varphi_k := \varphi_k^{(1)} - \varphi_k^{(2)}$，则 $\varphi_k(x) \to f(x),\ k \to \infty,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$，且 $|\varphi_k| = \varphi_k^{(1)} + \varphi_k^{(2)}$。 □

逼近定理可以进一步加强。

定理 2.12. f 可测 $\Rightarrow$ 存在阶梯函数 $\psi_k,\ k = 1, 2, \cdots\ s.t.\ \psi_k \to f\ a.e.$。

我们需要回忆第一次作业的一个习题，作为引理。

引理 2.13.

$$\{f_k \not\to f\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq j}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \frac{1}{l}\}.$$

以及第二个引理。

引理 2.14. 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ 可测。$f_k \to f\ a.e.$, $\sum_{k=1}^{\infty} m(\{f_k \neq g_k\}) < \infty \Rightarrow g_k \to f\ a.e.$。

证明. $\forall\,\varepsilon>0$, $\{|g_k-f|\ge\varepsilon\}\subset\{|g_k-f_k|\ge\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|f_k-f|\ge\frac{\varepsilon}{2}\}\subset\{g_k\neq f_k\}\cup\{|f_k-f|\ge\frac{\varepsilon}{2}\}$。于是

$$\begin{aligned}\{g_k\not\to f\}&=\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k\ge j}^{\infty}\left\{|g_k-f|\ge\frac{1}{l}\right\}\\&\subset\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k\ge j}^{\infty}\left[\{g_k\neq f_k\}\cup\{|f_k-f|\ge\frac{1}{l}\}\right]\\&=\left[\limsup_{k\to\infty}\{g_k\neq f_k\}\right]\cup\{f_k\not\to f\}.\end{aligned}$$

而 $f_k\to f\ a.e.\Rightarrow m(\{f_k\not\to f\})=0$，于是只需证明 $m\left(\limsup\limits_{k\to\infty}\{g_k\neq f_k\}\right)=0$。因为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(\{f_k\neq g_k\})<\infty$，由 Borel-Cantelli 引理即得。 □

于是回到定理的证明。

证明. Step 1 考虑 $f=\chi_E$, $m(E)<\infty$ 的情形。

Claim：$\forall\,\varepsilon>0$, $\exists$ 阶梯函数 ψ $s.t.$

$$m(\{\psi\neq\chi_E\})<\varepsilon.$$

由 $m(E)<\infty$，存在 $Q_1,\cdots,Q_N$ $s.t.$

$$m\left(E\triangle\left(\bigcup_{k=1}^{N}Q_k\right)\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

将 $\bigcup\limits_{k=1}^{N}Q_k$ 划分为有限个内部不交的矩体之并

$$\bigcup_{k=1}^{N}Q_k=\bigsqcup_{j=1}^{M}\widetilde{R}_j.$$

再把每个 $\widetilde{R}_j$ 收缩得到 R_j, $s.t.$

(i) R_j, $j=1,\cdots,M$ 互不相交；

(ii) $m\left(E\triangle\left(\bigsqcup\limits_{j=1}^{M}R_j\right)\right)<\varepsilon$。

于是 $\chi_E(x)=\sum\limits_{j=1}^{M}\chi_{R_j}(x)$, $x\in\left(E\triangle\bigsqcup\limits_{j=1}^{M}R_j\right)^C$。而

$$\left(E\triangle\bigsqcup_{j=1}^{M}R_j\right)^C=\left[E^C\cap\left(\bigsqcup_{j=1}^{M}R_j\right)^C\right]\cup\left[E\cap\left(\bigsqcup_{j=1}^{M}R_j\right)\right].$$

在第一个集合中 $\chi_E=0=\sum\limits_{j=1}^{M}\chi_{R_j}$，在第二个集合中 $\chi_E=1=\sum\limits_{j=1}^{M}\chi_{R_j}$。

令 $\psi=\sum\limits_{j=1}^{M}\chi_{R_j}\Rightarrow m(\{\psi\neq\chi_E\})<\varepsilon$。

Step 2 $\forall\, \varphi\; simple$，紧支，$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \psi$ 阶梯函数 $s.t.$

$$m(\{\psi \neq \varphi\}) < \varepsilon.$$

Step 3 对一般可测函数 f，由前文推论，$\exists\, \varphi_k\; simple$，紧支 $s.t.\; \varphi_k \to f,\; k \to \infty$。

对每个 k，由 Step 2，$\exists\, \psi_k$ 阶梯函数 $s.t.$

$$m(\{\psi_k \neq \varphi_k\}) = \frac{1}{2^k}.$$

于是由引理 2.14 即得 $\psi_k \to f\; a.e.$。

$\square$

Lec8 Note of Real Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 7 日

定义 2.8. $f\ a.e.$ 有限 $:\Leftrightarrow m(\{|f|=+\infty\})=0$。

定理 2.15. *Egorov*：设 $m(E)<\infty$，$f, f_k,\ k=1,2,\cdots$ 为可测函数，且 $a.e.$ 有限。则 $f_k\to f\ a.e.\Rightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,A_\varepsilon\subset E$ 闭 $s.t.\ m(E\setminus A_c)<\varepsilon$，且在 A_ε 中 $f_k\rightrightarrows f$。

证明. 不妨设 $f_k\to f$ 在 E 上点态收敛。如果在 A 上 $f_k\rightrightarrows f$，即

$$\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\ s.t.\ \sup_{x\in A}|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall\,k\geq N\\ \Leftrightarrow&\forall\,l\in\mathbb{N},\ \exists\,k_l\in\mathbb{N}\ s.t.\ \sup_{x\in A}|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{l},\ \forall\,k\geq k_l\\ \Leftrightarrow&\exists\,k_l\nearrow\infty\ s.t.\ A=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcap_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|<\frac{1}{l}\right\}.\end{aligned}$$

于是问题约化为：是否 $\exists\,k_l\nearrow\infty\ s.t.$

$$A_\varepsilon:=\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcap_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|<\frac{1}{l}\right\}\text{ 且 }m(E\setminus A_\varepsilon)<\varepsilon.$$

由于

$$m(E\setminus A_\varepsilon)=m\left(\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geq\frac{1}{l}\right\}\right)\leq\sum_{l=1}^{\infty}m\left(\bigcup_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geq\frac{1}{l}\right\}\right).$$

只需证明逐项小于 $\frac{\varepsilon}{2^k}$。

而 $f_k\to f$ 点态收敛 $\Leftrightarrow\{f_k\not\to f\}=\varnothing\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}&\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geq\frac{1}{l}\right\}=\varnothing\\ \Rightarrow&\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geq\frac{1}{l}\right\}=\varnothing\\ \Rightarrow&\bigcup_{k=j}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geq\frac{1}{l}\right\}\searrow\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=j}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geq\frac{1}{l}\right\}=\varnothing\\ \Rightarrow&\exists\,k_l\ s.t.\ m\left(\bigcup_{k=k_l}^{\infty}\left\{|f_k-f|\geq\frac{1}{l}\right\}\right)<\frac{\varepsilon}{2^l}.\end{aligned}$$

□

评论. 定理中条件“$m(E)<\infty$”是不可去的。

设 $E=(0,+\infty)$, $f_k:=\chi_{(0,k)}\to f=\chi_{(0,+\infty)}$ 点态收敛，但 $\{|f_k-f|>\frac{1}{2}\}=(k,+\infty)$。

定理 2.16. *Lusin*：设 E 可测，f 在 E 上可测且 $a.e.$ 有限，则 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,F_\varepsilon\subset E$ 闭，$m(E\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon\ s.t.\ f|_{F_\varepsilon}$ 连续。

评论. $f|_F$ 连续 $:\Leftrightarrow \forall\,x\in F,\ \forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0\ s.t.\ |f(y)-f(x)|<\varepsilon,\ \forall\,y\in B(x,\delta)\cap F$。

例 2.3. $f=\chi_{\mathbb{Q}}$，$f|_{\mathbb{Q}}$ 连续，$f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ 连续。

证明Step 1. 先假设 f 简单。

令 $f:=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}$ 为标准表示 $\Rightarrow E=\bigsqcup\limits_{k=1}^{N}E_k$。
对每个 E_k, $\exists\,F_k\subset E_k$ 闭 $s.t.\ m(E_k\setminus F_k)<\frac{\varepsilon}{N}$。
令 $F_\varepsilon:=\bigsqcup\limits_{k=1}^{N}F_k$(闭)$\Rightarrow F_\varepsilon\subset E$ 闭，$m(E\setminus F_\varepsilon)<\varepsilon$。
$\forall\,x\in F_\varepsilon$, $\exists!\,k_x\in\{1,\cdots,N\}\ s.t.\ x\in F_{k_x}$。令 $\delta=\frac{1}{2}\mathrm{dist}(x,F_\varepsilon\setminus F_{k_x})>0$，则在 $B(x,\delta)\cap F_\varepsilon$ 上 $f\equiv c_{k_x}$，从而 $f|_{F_\varepsilon}$ 在 x 处连续。

Step 2. 假设 f 可测，$a.e.$ 有限，$m(E)<\infty$。

不妨设 f 是实值函数 (因为 f $a.e.$ 有限)。则存在 $\varphi_k\ simple$, $k=1,2,\cdots$, $\varphi_k\to f$ 点态收敛。于是由 Egorov 定理，$\exists\,A_\varepsilon\subset E$ 闭，$m(E\setminus A_\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{2}\ s.t.\ \varphi_k\rightrightarrows f$ 在 A_ε 上。进而由 Step1，对每个 φ_k, $\exists\,F_k\subset A_\varepsilon$ 闭，$m(A_\varepsilon\setminus F_k)<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\ s.t.\ \varphi_k|_{F_k}$ 连续。
令 $F=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}F_k$(闭)$\Rightarrow F\subset A_\varepsilon$ 闭，$m(A_\varepsilon\setminus F)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}m(A_\varepsilon\setminus F)<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow m(E\setminus F)<\varepsilon$。
且 $\varphi_k|_F$, $k=1,2,\cdots$ 连续，在 F 上 $\varphi_k|F\rightrightarrows f|_F$，从而 $f|_F$ 连续。

Step 3. 一般情形。

令 $E_k:=E\cap(B_k(0)\setminus\overline{B_{k-1}(0)})\Rightarrow m(E_k)<\infty$, $E=\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$。
对每个 k, $\exists\,F_k\subset E_k$ 闭，$m(E_k\setminus F_k)<\frac{\varepsilon}{2^k}\ s.t.\ f|_{F_k}$ 连续。
令 $F:=\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$(闭)$\Rightarrow f|_F$ 连续，且 $m(E\setminus F)<\varepsilon$。

$\square$

定理 2.17. *Tietze* 延拓定理：$E\subset\mathbb{R}^n$ 闭 $\Rightarrow E$ 上任何连续函数可以延拓为 $\mathbb{R}^n$ 上连续函数。

即 $f\colon E\to\mathbb{R}$ 连续 $\Rightarrow\exists\,g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续 $s.t.\ g|_E=f$。

定理 2.18. $f\colon E\to\mathbb{R}$ 可测 $\Rightarrow\varepsilon>0$, $\exists\,g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续 $s.t.$

$$m(\{f\neq g\})<\varepsilon.$$

Lec9 Note of Real Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 12 日

我们首先定义简单函数的积分。

定义 2.9. 设 $\varphi=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}\geq 0,\ \bigsqcup\limits_{k=1}^{N}E_k=\mathbb{R}^n$。令

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\,\mathrm{d}\,m=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,\mathrm{d}\,x:=\sum_{k=1}^{N}a_km(E_k),$$

称为 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 **(Lebesgue) 积分**。

设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测，令

$$\int_E\varphi\,\mathrm{d}\,m:=\int\varphi\cdot\chi_E\,\mathrm{d}\,m=\sum_{k=1}^{N}a_km(E\cap E_k),$$

称为 φ 在 E 上的积分。

评论. 以上定义是良定义的。

如果 φ 还有一种表示 $\sum\limits_{j=1}^{M}b_j\chi_{F_j},\ \bigsqcup\limits_{j=1}^{M}F_j=\mathbb{R}^n$。我们要证明 $\sum\limits_{j=1}^{M}b_jm(F_j)=\sum\limits_{k=1}^{N}a_km(E_k)$。

因为 $E_k=\bigsqcup\limits_{j=1}^{M}(E_k\cap F_j),\ k=1,2,\cdots,N,\ F_j=\bigsqcup\limits_{k=1}^{N}(E_k\cap F_j),\ j=1,2,\cdots,M$。那么 $m(E_k)=\sum\limits_{j=1}^{M}m(E_k\cap F_j),\ m(F_j)=\sum\limits_{k=1}^{N}m(E_k\cap F_j)$，且 $a_k=b_j$，若 $E_k\cap F_j\neq\varnothing$。从而两个和式相等。

例 2.4. Dirichlet 函数 $\chi_{\mathbb{Q}}$：

$$\int_{\mathbb{R}}\chi_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{d}\,m=1\cdot m(\mathbb{Q})+0\cdot m(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=0.$$

例 2.5. 设 $F,E\subset\mathbb{R}^n$ 可测，则

$$\int\chi_E\,\mathrm{d}\,m=m(E),\ \int_E\chi_F\,\mathrm{d}\,m=m(E\cap F).$$

命题 2.19. 正线性：设 $\varphi,\psi\geq 0,\ simple,\ \alpha,\beta\geq 0$，则

$$\int(\alpha\varphi+\beta\psi)\,\mathrm{d}\,m=\alpha\int\varphi\,\mathrm{d}\,m+\beta\int\psi\,\mathrm{d}\,m.$$

证明. 只需证明 $\int\alpha\varphi\,\mathrm{d}\,m=\alpha\int\varphi\,\mathrm{d}\,m$ 与 $\int(\varphi+\psi)\,\mathrm{d}\,m=\int\varphi\,\mathrm{d}\,m+\int\psi\,\mathrm{d}\,m$。前者是平凡的，我们证明后者。

设 $\varphi=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}$，$\psi=\sum\limits_{j=1}^{M}b_j\chi_{F_j}$ 为标准表示。则

$$\begin{cases}E_k=\bigsqcup_{j=1}^{M}(E_k\cap F_j)\\ F_j=\bigsqcup_{k=1}^{N}(E_k\cap F_j)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\chi_{E_k}=\sum_{j=1}^{M}\chi_{E_k\cap F_j},\ k=1,2,\cdots,N\\ \chi_{F_j}=\sum_{k=1}^{N}\chi_{E_k\cap F_j},\ j=1,2,\cdots,M.\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi+\psi&=\sum_{k,j}(a_k+b_j)\chi_{E_k\cap F_j}\\ \Rightarrow\int(\varphi+\psi)&=\sum_{k,j}(a_k+b_j)m(E_k\cap F_j)\\ &=\sum_{k=1}^{N}a_k\sum_{j=1}^{M}m(E_k\cap F_j)+\sum_{j=1}^{M}b_j\sum_{k=1}^{N}m(E_k\cap F_j)\\ &=\int\varphi\,\mathrm{d}\,m+\int\psi\,\mathrm{d}\,m.\end{aligned}$$

□

命题 2.20. 可加性：设 E_1,E_2 可测且 $E_1\cap E_2=\varnothing$，则

$$\int_{E_1\cup E_2}\varphi\,\mathrm{d}\,m=\int_{E_1}\varphi\,\mathrm{d}\,m+\int_{E_2}\varphi\,\mathrm{d}\,m.$$

证明.

$$LHS=\int\varphi\chi_{E_1\cup E_2}\,\mathrm{d}\,m=\int\varphi(\chi_{E_1}+\chi_{E_2})\,\mathrm{d}\,m=\int\varphi\chi_{E_1}\,\mathrm{d}\,m+\int\varphi\chi_{E_2}\,\mathrm{d}\,m.$$

□

命题 2.21. 单调性：$\varphi,\psi\geq 0$, $simple$，则

$$\varphi\leq\psi\Rightarrow\int\varphi\,\mathrm{d}\,m\leq\int\psi\,\mathrm{d}\,m.$$

证明. 设 $\varphi=\sum\limits_{k=1}^{N}a_k\chi_{E_k}$，$\psi=\sum\limits_{j=1}^{M}b_j\chi_{F_j}$ 为标准表示，则

$$\varphi\leq\psi\Rightarrow a_k\leq b_j,\ 若\ E_k\cap F_j\neq\varnothing.$$

于是

$$\int\varphi\,\mathrm{d}\,m=\sum_{k,j}a_km(E_k\cap F_j)\leq\sum_{k,j}b_jm(E_k\cap F_j)=\int\psi\,\mathrm{d}\,m.$$

□

定义 2.10. 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上非负可测，令

$$\int f\,\mathrm{d}\,m=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,\mathrm{d}\,x:=\sup\left\{\int\varphi\,\mathrm{d}\,m\mid\varphi\ simple,\ 0\leq\varphi\leq f\right\},$$

称为 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的 **(Lebesgue) 积分**。

如果 $\int f\,\mathrm{d}\,m<+\infty$，则称 f 是 **Lebesgue 可积**的，记为 $f\in L^1$。

设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测，f 在 E 上非负可测，则

$$\int_E f \,\mathrm{d}\, m := \int f \chi_E \,\mathrm{d}\, m,$$

称为 f 在 E 上的积分。

如果 $\int_E f \,\mathrm{d}\, m < +\infty$，称 f 在 E 上可积，记为 $f \in L^1(E)$。

命题 2.22. 单调性：设 $f, g \geq 0$ 可测，则

$$f \leq g \Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\, m \leq \int g \,\mathrm{d}\, m.$$

证明. $\forall\, \varphi\; simple$ 且 $0 \leq \varphi \leq f$，自然有 $\varphi \leq g$，于是由定义

$$\int \varphi \,\mathrm{d}\, m \leq \int g \,\mathrm{d}\, m \Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\, m \leq \int g \,\mathrm{d}\, m.$$

□

命题 2.23. 设 $f \geq 0$ 在 E 上可测。

$$\int_E f \,\mathrm{d}\, m = 0 \Leftrightarrow f = 0 \; a.e. \; on \; E.$$

证明. "$\Leftarrow$"：平凡。

"$\Rightarrow$"：$\forall\, k$，令 $E_k := \{f > \frac{1}{k}\}$，

$$\begin{aligned}\frac{1}{k} m(E_k) &= \int_{E_k} \frac{1}{k} \,\mathrm{d}\, m \\ &\leq \int_{E_k} f \,\mathrm{d}\, m \\ &\leq \int_E f \,\mathrm{d}\, m = 0 \\ \Rightarrow m(E_k) &= 0, \; \forall\, k.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\{f > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \\ \Rightarrow &m(\{f < 0\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = 0 \\ \Rightarrow &f = 0 \; a.e. \text{ on } E.\end{aligned}$$

□

推论. 修改 f 在一个零集上的取值，则不改变 f 的积分值。

称 f $a.e.$ 有限，指的是 $m(\{|f| = +\infty\}) = 0$。

命题 2.24. 设 $f \geq 0$，f 在 E 上可积 $\Rightarrow$ f 在 E 上 $a.e.$ 有限。

证明. $\forall\, k$，令

$$E_k := \{f > k\} \Rightarrow \{f = +\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k.$$

那么

$$\begin{aligned}
km(E_k) &= \int_{E_k} k \,\mathrm{d}\, m \le \int_{E_k} f \,\mathrm{d}\, m \le \int_E f \,\mathrm{d}\, m < +\infty \\
\Rightarrow & m(E_k) \le \frac{1}{k} \int_E f \,\mathrm{d}\, m \\
\Rightarrow & \lim_{k\to\infty} m(E_k) = 0.
\end{aligned}$$

于是 $E_k \searrow \{f = +\infty\}$, $m(E_k) < +\infty$，由测度的连续性，$m(\{f = +\infty\}) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) = 0$。 □

定理 2.25. *(Levi, 单调收敛定理, MCT)*: 设 $f_k \ge 0$, $k = 1, 2, \cdots$ 在 E 上可测，$f_k \nearrow f$ *a.e.*，即 $f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le f(x)$, *a.e.* $x \in E$，$f_k \to f$ *a.e.*，则

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k \,\mathrm{d}\, m = \int_E f \,\mathrm{d}\, m.$$

证明. 不妨设 $f_k \nearrow f$ 点态收敛，则 $\int_E f_k \,\mathrm{d}\, m \nearrow$(作为广义实数列)，从而 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k \,\mathrm{d}\, m$ 存在 (可能为 $+\infty$)。

Case 1 若 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k \,\mathrm{d}\, m = +\infty$。

$$\begin{aligned}
f_k \le f \Rightarrow & \int_E f \,\mathrm{d}\, m \ge \int_E f_k \,\mathrm{d}\, m \to +\infty \\
\Rightarrow & \int_E f \,\mathrm{d}\, m = +\infty.
\end{aligned}$$

Case 2 若 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k \,\mathrm{d}\, m < +\infty$。

首先 $f_k \le f \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k \,\mathrm{d}\, m \le \int_E f \,\mathrm{d}\, m$。下证明 $LHS \ge RHS$。

$\forall\, \varphi\ simple,\ 0 \le \varphi \le f,\ \forall\, \alpha \in (0, 1),\ \forall\, k$，令 $E_k := \{f_k \ge \alpha\varphi\}$，则 $E_k \nearrow E$。

□

Lec10 Note of Real Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 14 日

重新写一下 MCT 的证明：

证明. 不妨设 $E=\mathbb{R}^n$(用 $f_k\chi_E$ 代替 f_k)。

不妨设 $f_k\nearrow f$ 点态收敛，则 $\int f_k\,\mathrm{d}m\nearrow\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}\int f_k\,\mathrm{d}m$ 存在 (可能为 $+\infty$)。

Case 1 $\lim\limits_{k\to\infty}\int f_k\,\mathrm{d}m=+\infty$，平凡。

Case 2 $\lim\limits_{k\to\infty}\int f_k\,\mathrm{d}m<+\infty$，则

$$f_k\le f\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\int f_k\,\mathrm{d}m\le\int f\,\mathrm{d}m.$$

Claim：$\lim\limits_{k\to\infty}\int f_k\,\mathrm{d}m\ge\int f\,\mathrm{d}m$。

$\forall\,\varphi\ simple,\ 0\le\varphi\le f,\ \forall\,\alpha\in(0,1)$，令

$$E_k:=\{f_k\ge\alpha\varphi\},\ k=1,2,\cdots$$

则 $f_k\nearrow f\Rightarrow E_k\nearrow\mathbb{R}^n$。令 $\varphi:=\sum\limits_{j=1}^{N}a_j\chi_{F_j}$ 为标准表示，则 $E_k\cap F_j\nearrow F_j$。

$$\int\varphi\,\mathrm{d}m=\sum_{j=1}^{N}a_jm(F_j)=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{N}a_jm(E_k\cap F_j)$$
$$\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}\varphi\,\mathrm{d}m=\int\varphi\,\mathrm{d}m.$$

那么

$$\begin{aligned}&\int f_k\,\mathrm{d}m\ge\int_{E_k}f_k\,\mathrm{d}m\ge\int_{E_k}\alpha\varphi\,\mathrm{d}m=\alpha\int_{E_k}\varphi\,\mathrm{d}m\\ \Rightarrow&\lim_{k\to\infty}\int f_k\,\mathrm{d}m\ge\alpha\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}\varphi\,\mathrm{d}m=\alpha\int\varphi\,\mathrm{d}m\\ \Rightarrow&\lim_{k\to\infty}\int f_k\,\mathrm{d}m\ge\int\varphi\,\mathrm{d}m\\ \Rightarrow&\lim_{k\to\infty}\int f_k\,\mathrm{d}m\ge\int f\,\mathrm{d}m.\end{aligned}$$

□

定理 2.26. *Fatou* 引理：设 $f_k\ge0$ 在 E 上可测，$k=1,2,\cdots$，则

$$\int_E\liminf_{k\to\infty}f_k\,\mathrm{d}m\le\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k\,\mathrm{d}m.$$

证明.

$$
\begin{aligned}
&\forall\, k,\ \inf_{j\geq k} f_j \leq f_i,\ \forall\, i\geq k\\
\Rightarrow &\int \inf_{j\geq k} f_j \,\mathrm{d}\, m \leq \int f_i \,\mathrm{d}\, m,\ \forall\, i\geq k\\
\Rightarrow &\int \inf_{j\geq k} f_j \,\mathrm{d}\, m \leq \inf_{i\geq k}\int f_i \,\mathrm{d}\, m.
\end{aligned}
$$

令 $g_k := \inf\limits_{j\geq k} f_i \Rightarrow g_k \nearrow \liminf\limits_{k\to\infty} f_k$。于是

$$
\begin{aligned}
\int \liminf_{k\to\infty} f_k \,\mathrm{d}\, m &= \int \lim_{k\to\infty} g_k \,\mathrm{d}\, m\\
&\overset{MCT}{=} \lim_{k\to\infty}\int g_k \,\mathrm{d}\, m\\
&\leq \lim_{k\to\infty}\inf_{i\geq k}\int f_i \,\mathrm{d}\, m\\
&= \liminf_{k\to\infty}\int f_k \,\mathrm{d}\, m.
\end{aligned}
$$

□

评论. Fatou⇒MCT。

由 $f_k \nearrow f \Rightarrow \int f_k \,\mathrm{d}\, m \leq \int f \,\mathrm{d}\, m \Rightarrow \limsup\limits_{k\to\infty}\int f_k \,\mathrm{d}\, m \leq \int f \,\mathrm{d}\, m$。再由 Fatou 引理，$\int f \,\mathrm{d}\, m \leq \liminf\limits_{k\to\infty}\int f_k \,\mathrm{d}\, m$，于是 $\int f \,\mathrm{d}\, m = \lim\limits_{k\to\infty}\int f_k \,\mathrm{d}\, m$。

命题 2.27. 正线性：设 $f, g \geq 0$ 可测，$\alpha, \beta \geq 0$，则

$$
\int (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}\, m = \alpha \int f \,\mathrm{d}\, m + \beta \int g \,\mathrm{d}\, m.
$$

证明. 首先 $\int \alpha f \,\mathrm{d}\, m = \alpha \int f \,\mathrm{d}\, m$。下证 $\int (f+g) \,\mathrm{d}\, m = \int f \,\mathrm{d}\, m + \int g \,\mathrm{d}\, m$。

$$
\begin{aligned}
&\exists\, \varphi_k \geq 0\ simple\ s.t.\ \varphi_k \nearrow f,\\
&\exists\, \psi_k \geq 0\ simple\ s.t.\ \psi_k \nearrow g,\\
\Rightarrow &\varphi_k + \psi_k \nearrow f + g\\
\overset{MCT}{\Rightarrow} &\int (f+g) \,\mathrm{d}\, m = \lim_{k\to\infty}\int (\varphi_k + \psi_k) \,\mathrm{d}\, m = \lim_{k\to\infty}\left[\int \varphi_k \,\mathrm{d}\, m + \int \psi_k \,\mathrm{d}\, m\right]\\
\overset{MCT}{=} &\int f \,\mathrm{d}\, m + \int g \,\mathrm{d}\, m.
\end{aligned}
$$

□

命题 2.28. 逐项积分：设 $f > 0,\ k = 1, 2, \cdots$ 可测，且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\ a.e.$ 有限，则

$$
\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) \mathrm{d}\, m = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\, m
$$

定义 2.11. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测，f 在 E 上可测，如果 $\int_E f^+ \,\mathrm{d}\, m$ 和 $\int_E f^- \,\mathrm{d}\, m$ 中至少一个有限，则定义

$$
\int_E f \,\mathrm{d}\, m := \int_E f^+ \,\mathrm{d}\, m - \int_E f^- \,\mathrm{d}\, m,
$$

称为 f 在 E 上的积分。

如果 $\int_E f^+ \,\mathrm{d}m$ 和 $\int_E f^- \,\mathrm{d}m$ 都有限，则称 f 在 E 上可积。

记 $L^1(E)$ 为 E 上可积函数全体。$L^1 := L^1(\mathbb{R}^n)$。

命题 2.29. 可积函数一定 $a.e.$ 有限。

命题 2.30. f 可积 $\Leftrightarrow |f|$ 可积。

证明. 左推右平凡，若 $|f|$ 可积，则 $\max\{f^+, f^-\} \leq |f|$，那么

$$\int_E f^+ \,\mathrm{d}m \leq \int_E |f| \,\mathrm{d}m < \infty$$
$$\int_E f^- \,\mathrm{d}m \leq \int_E |f| \,\mathrm{d}m < \infty.$$

从而 f 可积。 □

命题 2.31. $L^1(E)$ 是向量空间，$i.e.\ \forall f, g \in L^1(E),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L^1(E)$。这里 $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$。

证明. 首先只考虑 $E = \mathbb{R}^n$ 的情形。

$$\begin{aligned} f, g \in L^1 &\Rightarrow |\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g| \ a.e. \\ &\Rightarrow \int |\alpha f + \beta g| \,\mathrm{d}m \leq |\alpha| \int |f| \,\mathrm{d}m + |\beta| \int |g| \,\mathrm{d}m < \infty. \end{aligned}$$

于是一般情况下有

$$\begin{aligned} \int_E |\alpha f + \beta g| \,\mathrm{d}m &= \int |\alpha f + \beta g| \chi_E \,\mathrm{d}m \leq |\alpha| \int |f| \chi_E \,\mathrm{d}m + |\beta| \int |g| \chi_E \,\mathrm{d}m \\ &= |\alpha| \int_E |f| \,\mathrm{d}m + |\beta| \int_E |g| \,\mathrm{d}m < \infty. \end{aligned}$$

□

命题 2.32. 线性：$\forall f, g \in L^1(E),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，

$$\int_E (\alpha f + \beta g) \,\mathrm{d}m = \alpha \int_E f \,\mathrm{d}m + \beta \int_E g \,\mathrm{d}m.$$

证明. $\int \alpha f \,\mathrm{d}m = \alpha \int f \,\mathrm{d}m$ 平凡。

要证 $\int (f+g) \,\mathrm{d}m = \int f \,\mathrm{d}m + \int g \,\mathrm{d}m$，令 $h := f + g \Rightarrow h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$，由 $f, g\ a.e.$ 有限，

$$\begin{aligned} &h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+ \ a.e. \\ \Rightarrow &\int h^+ \,\mathrm{d}m + \int f^- \,\mathrm{d}m + \int g^- \,\mathrm{d}m = \int h^- \,\mathrm{d}m + \int f^+ \,\mathrm{d}m + \int g^+ \,\mathrm{d}m \\ \Rightarrow &\int h^+ \,\mathrm{d}m - \int h^- \,\mathrm{d}m = \int f^+ \,\mathrm{d}m - \int f^- \,\mathrm{d}m + \int g^+ \,\mathrm{d}m - \int g^- \,\mathrm{d}m. \end{aligned}$$

□

命题 2.33. 可数可加性：设 $f \in L^1$，E_k, $k = 1, 2, \cdots$ 可测且互相不交，则

$$\int_{\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k} f \,\mathrm{d}\, m = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f \,\mathrm{d}\, m.$$

证明. 令 $E := \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$，$\forall\, N$, $\chi_{\bigsqcup_{k=1}^{N} E_k} = \sum\limits_{k=1}^{N} \chi_{E_k}$，则

$$\int_{\bigsqcup_{k=1}^{N} E_k} f^+ \,\mathrm{d}\, m = \int f^+ \chi_{\bigsqcup_{k=1}^{N} E_k} \,\mathrm{d}\, m = \sum_{k=1}^{N} \int f^+ \chi_{E_k} \,\mathrm{d}\, m.$$

而 $f^+ \cdot \chi_{\bigsqcup_{k=1}^{N} E_k} \nearrow f^+ \chi_E$，由 MCT，

$$\int f^+ \chi_E \,\mathrm{d}\, m = \lim_{N\to\infty} \int f^+ \chi_{\bigsqcup_{k=1}^{N} E_k} \,\mathrm{d}\, m = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \int_{E_k} f^+ \,\mathrm{d}\, m = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^+ \,\mathrm{d}\, m.$$

同理 $\int_E f^- \,\mathrm{d}\, m = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f^- \,\mathrm{d}\, m \Rightarrow \int_E f \,\mathrm{d}\, m = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f \,\mathrm{d}\, m$。 □

命题 2.34. 单调性：$f, g \in L^1$，则

$$f \le g \Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\, m \le \int g \,\mathrm{d}\, m.$$

命题 2.35. 三角不等式：设 $f \in L^1$，则

$$\left| \int f \,\mathrm{d}\, m \right| \le \int |f| \,\mathrm{d}\, m.$$

证明.

$$\begin{cases} f \le |f| \Rightarrow \int f \,\mathrm{d}\, m \le \int |f| \,\mathrm{d}\, m \\ -f \le |f| \Rightarrow -\int f \,\mathrm{d}\, m \le \int |f| \,\mathrm{d}\, m \end{cases} \Rightarrow \left| \int f \,\mathrm{d}\, m \right| \le \int |f| \,\mathrm{d}\, m.$$

□

定理 2.36. 设 $f \in L^1$，则 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, B \subset \mathbb{R}^n$, $m(B) < +\infty$ $s.t.$

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} |f| < \varepsilon.$$

证明. 令 $f_k := |f| \chi_{B_k(0)}$，则 $f_k \nearrow |f|$，$\int |f| \,\mathrm{d}\, m = \lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\, m$，从而 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N$ $s.t.$ 当 $k > N$ 时，$0 \le \int |f| \,\mathrm{d}\, m - \int f_k \,\mathrm{d}\, m < \varepsilon$，即 $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_k(0)} |f| \,\mathrm{d}\, m < \varepsilon$。 □

Lec11 Note of Real Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 19 日

定理 2.37. 积分的绝对连续性：$f \in L^1 \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0\ s.t.$

$$\int_E |f| \,\mathrm{d}\, m < \varepsilon,\ \forall\, m(E) < \delta.$$

证明. 令 $E_k := \{|f| \le k\},\ f_k := |f|\chi_{E_k} \Rightarrow |f_k| \le k,\ k = 1, 2, \cdots$。则

$$\begin{aligned}
& f_k \nearrow |f| \\
\stackrel{MCT}{\Rightarrow} & \int |f| \,\mathrm{d}\, m = \lim_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\, m \\
\Rightarrow & \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N\ s.t.\ 0 < \int |f| \,\mathrm{d}\, m - \int f_N \,\mathrm{d}\, m < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2N},\ \forall\, E,\ m(E) < \delta$，则

$$\int_E |f| \,\mathrm{d}\, m = \int_E (|f| - f_N) \,\mathrm{d}\, m + \int_E f_N \,\mathrm{d}\, m < \frac{\varepsilon}{2} + N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} < \varepsilon.$$

□

定理 2.38. *Lebesgue* 控制收敛定理，*DCT*：设在 E 上 $f_k \to f\ a.e.$，且在 E 上 $\exists\, g \in L^1\ s.t.\ |f_k| \le g\ a.e.$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k \,\mathrm{d}\, m = \int_E f \,\mathrm{d}\, m$。

证明. 由 $f_k \to f\ a.e.,\ |f_k| \le g\ a.e. \Rightarrow |f| \le g\ a.e. \Rightarrow\ f \in L^1(E)$

令 $g_k := |f_k - f|,\ k = 1, 2, \cdots$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & 0 \le g_k \le 2g\ a.e. \\
\Rightarrow & \int_E \liminf_{k\to\infty} (2g - g_k) \,\mathrm{d}\, m \le \liminf_{k\to\infty} \int_E (2g - g_k) \,\mathrm{d}\, m \\
\Rightarrow & 2\int_E g \,\mathrm{d}\, m - \int_E \lim_{k\to\infty} g_k \,\mathrm{d}\, m \le 2\int_E g \,\mathrm{d}\, m - \limsup_{k\to\infty} \int_E g_k \,\mathrm{d}\, m \\
\Rightarrow & \limsup_{k\to\infty} \int_E g_k \,\mathrm{d}\, m \le \int_E \lim_{k\to\infty} g_k \,\mathrm{d}\, m = 0 \\
\Rightarrow & \lim_{k\to\infty} \int_E |f_k - f| \,\mathrm{d}\, m = 0 \\
\Rightarrow & \lim_{k\to\infty} \int_E f_k \,\mathrm{d}\, m = \int_E f \,\mathrm{d}\, m.
\end{aligned}$$

□

定理 2.39. 有界收敛定理：设 $f_k,\ k = 1, 2, \cdots$ 可测 $s.t.$

(i) $\exists\, M$ 为常数 $s.t.\ |f_k| \le M\ a.e.$；

(ii) $\exists\, E,\ m(E) < \infty\ s.t.\ \operatorname{supp}(f_k) \subset E$；

(iii) $f_k \to f\ a.e.$。

则 $\lim\limits_{k\to\infty} \int f_k \,\mathrm{d}\, m = \int f \,\mathrm{d}\, m$。

证明. 令 $g := M \cdot \chi_E$ 即可。 □

例 2.6. 我们知道 $\frac{1}{(1+\frac{t}{k})^k t^{\frac{1}{k}}} \to e^{-t},\ k \to \infty$，那么是否有

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\, t}{(1+\frac{t}{k})^k t^{\frac{1}{k}}} = \int_0^\infty e^{-t} \,\mathrm{d}\, t = 1?$$

于是我们企图找到可积的控制函数。

1° 当 $t \in (0, 1],\ k \ge 2$ 时，有

$$\frac{1}{(1+\frac{t}{k})^k t^{\frac{1}{k}}} \le \frac{1}{\sqrt{t}} \in L^1((0,1]).$$

2° 当 $t \in [1, \infty),\ k \ge 2$ 时，有

$$(1+\frac{t}{k})^k \ge \binom{k}{2}\left(\frac{t}{k}\right)^2 \ge \frac{t^2}{4} \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{t}{k})^k t^{\frac{1}{k}}} \le \frac{4}{t^2}.$$

于是令 $g(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}},\ t \in (0,1], \\ \frac{4}{t^2},\ t \in (1,\infty). \end{cases}$ 即可。

定理 2.40. 积分号下求导：设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测，函数 $f\colon E \times (a,b) \to \mathbb{R}\ s.t.$

(i) $\forall\, y \in (a,b),\ x \mapsto f(x,y)$ 在 E 上可积；

(ii) $\forall\, x \in E,\ y \mapsto f(x,y)$ 在 (a,b) 上可微；

(iii) $\exists\, g \in L^1(E)\ s.t.\ |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| \le g(x),\ \forall\,(x,y) \in E \times (a,b)$。

则

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\, x = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}\, x.$$

证明. 对 $(x,y) \in E \times (a,b)$，对 $\forall\, t_k \to 0$，令

$$\begin{aligned} f_k(x) &:= \frac{f(x,y+t_k) - f(x,y)}{t_k},\ k = 1, 2, \cdots \\ \Rightarrow & f_k(x) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \end{aligned}$$

而由微分中值定理与 (iii)，得

$$|f_k(x)| \le \sup_{z\in(a,b)} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,z)\right| \le g(x)$$

$$\begin{aligned} \stackrel{DCT}{\Rightarrow} \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}\, x &= \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,\mathrm{d}\, x \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{\int_E f(x,y+t_k)\,\mathrm{d}\, x - \int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\, x}{t_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\, x. \end{aligned}$$

□

复值函数的积分

定义 2.12. 对函数 $f\colon E\to\mathbb{C}$，如果 $\mathrm{Re}f,\mathrm{Im}f$ 都可测，则称 f 可测。

如果 $\int_E|f|\,\mathrm{d}\,m<\infty$，则称 f 可积，并令

$$\int_E f\,\mathrm{d}\,m:=\int_E \mathrm{Re}f\,\mathrm{d}\,m+i\int_E \mathrm{Im}f\,\mathrm{d}\,m.$$

与 Riemann 积分的关系

定理 2.41. 对 $[a,b]$ 上实值函数 f，有

$$\textit{Riemann}\text{ 可积}\Rightarrow \textit{Lebesgue}\text{ 可积}.$$

且

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\,m=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

证明. 对 $[a,b]$ 的划分 $P:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，令

$$S(f,P):=\sum_{i=1}^n M_i(x_i-x_{i-1})\ (\text{Darboux 上和})$$

$$s(f,P):=\sum_{i=1}^n m_i(x_i-x_{i-1})\ (\text{Darboux 下和})$$

$$M_i:=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\ m_i:=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

$$\overline{\int_a^b} f:=\inf_P S(f,P)\ (\text{上积分})$$

$$\underline{\int_a^b} f:=\sup_P s(f,P)\ (\text{下积分})$$

则 fRiemann 可积 $\Leftrightarrow \overline{\int_a^b}f=\underline{\int_a^b}f$。

存在单调划分序列 $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ $s.t.$

$$S(f,P_k)\searrow\overline{\int_a^b}f,\ s(f,P_k)\nearrow\underline{\int_a^b}f.$$

设 $P_k:a=x_0^{(k)}<x_1^{(k)}<\cdots<x_{n_k}^{(k)}=b$，令

$$\varphi_k:=\sum_{i=1}^{n_k} M_i\chi_{(x_{i-1},x_i]}$$

$$\psi_k:=\sum_{i=1}^{n_k} m_i\chi_{(x_{i-1},x_i]}$$

$$\Rightarrow\varphi_k\searrow,\ \psi_k\nearrow.$$

且 $\psi_k \le f \le \varphi_k$。令

$$
\begin{aligned}
g &:= \lim_{k\to\infty} \psi_k \\
h &:= \lim_{k\to\infty} \varphi_k \\
\Rightarrow g &\le f \le h.
\end{aligned}
$$

设 $|f| \le M$(因为 Riemann 可积必然有界)，则

$$
\begin{aligned}
&|\varphi_k| \le M,\ |\psi_k| \le M \\
&\overset{DCT}{\Rightarrow} \int_{[a,b]} |g| \,\mathrm{d}\, m = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} |\psi_k| \,\mathrm{d}\, m \le M(b-a) \\
&\Rightarrow g \in L^1([a,b]).
\end{aligned}
$$

且

$$
\int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\, m \overset{DCT}{=} \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]} \psi_k \,\mathrm{d}\, m = \lim_{k\to\infty} s(f, P_k) = \underline{\int_a^b} f.
$$

同理 $\int_{[a,b]} h \,\mathrm{d}\, m = \overline{\int_a^b} f$。于是

$$
\begin{aligned}
f \text{ Riemann 可积} &\Leftrightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \\
&\Leftrightarrow \int_{[a,b]} h \,\mathrm{d}\, m = \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\, m \\
&\Rightarrow \int_{[a,b]} (h-g) \,\mathrm{d}\, m = 0 \\
&\Rightarrow g = h \ a.e. \\
&\Rightarrow f = g \ a.e. \\
&\overset{g\in L^1([a,b])}{\Rightarrow} f \in L^1([a,b]).
\end{aligned}
$$

且

$$
\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\, m = \int_{[a,b]} g \,\mathrm{d}\, m = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x.
$$

$\square$

评论. Lebesgue 积分没有覆盖条件收敛的广义积分。例如 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$，$f \notin L^1(\mathbb{R})$，但作为广义积分，$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}\, x = \pi$。