§0.1 曲面的一些例子

§0.1.1 旋转曲面

通过旋转对称性，把偏微分方程化为常微分方程求解是寻找特殊解的常用方法。为简单起见，求解过程中常取代表性的特解。

考虑旋转曲面

$$r(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),\quad f>0$$

由xz平面上曲线$(f(u),g(u))$(称为旋转曲面的母线)绕z轴旋转得到。取u为该曲线的弧长参数，即$f'(u)^2+g'(u)^2=1$。计算

$$r_u=(f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u)),$$

$$r_v=(-f(u)\sin v, f(u)\cos v, 0),$$

$$N=\frac{1}{f}(-fg'\cos v,-fg'\sin v, ff')=(-g'\cos v,-g'\sin v,f'),$$

$$r_{uu}=(f''\cos v, f''\sin v, g''),\quad r_{uv}=(-f'\sin v, f'\cos v,0),\quad r_{vv}=(-f\cos v,-f\sin v,0),$$

从而

$$E=1,\quad F=0,\quad G=f^2,$$

$$L=f'g''-f''g',\quad M=0,\quad N=fg'.$$

并且由

$$(f')^2+(g')^2=1$$

微分得

$$f'f''+g'g''=0,$$

因此

$$L=f'g''-f''g'=\frac{(f'g''-f''g')g'}{g'}=\frac{-(f')^2f''-(g')^2f''}{g'}=-\frac{f''}{g'}.$$

从而

$$E=1,\quad F=0,\quad G=f^2,$$

$$L=-\frac{f''}{g'},\quad M=0,\quad N=fg'.$$

所以

$$K=\frac{LN}{EG}=\frac{L}{E}\frac{N}{G}=(-\frac{f''}{g'})\frac{g'}{f}=-\frac{f''}{f},$$

$$H=\frac{1}{2}\frac{1}{EG}[LG+NE]=\frac{1}{2}(\frac{L}{E}+\frac{N}{G})=\frac{1}{2}(-\frac{f''}{g'}+\frac{g'}{f}).$$

两个主曲率分别为

$$k_1=\frac{L}{E}=-\frac{f''}{g'},\quad k_2=\frac{N}{G}=\frac{g'}{f}.$$

特别r_u,r_v都是主方向，u,v-曲线都是曲率线。

(1)常Gauss曲率旋转曲面

$$K=-\frac{f''}{f}=\text{constant}.$$

(1a) $K=c^2>0$：找出一个特解。即

$$f''(u)+c^2f(u)=0.$$

有解

$$f(u)=\frac{1}{c}\sin(cu),\quad u\in(0,\frac{\pi}{c}).$$

由

$$(f')^2+(g')^2=1$$

得到特解

$$g(u)=\frac{1}{c}\cos(cu).$$

令$\widetilde{u}=cu$($\widetilde{u}\in(0,\pi)$一般不是母线的弧长参数)，代入得半径为$\frac{1}{c}$的球面

$$r(u,v)=\frac{1}{c}(\sin\widetilde{u}\cos v,\sin\widetilde{u}\sin v,\cos\widetilde{u}),\quad u\in(0,\frac{\pi}{c}),v\in[0,2\pi),$$

其中$(\widetilde{u},v)$为球坐标。

(1b) $K=0$。因此$f''(u)=0$，有特解

$$f(u)=Au+b,\quad g(u)=\sqrt{1-A^2}u,\quad A\in[0,1],b>0.$$

(i) $A=0$时，

$$f(u)=b,\quad g(u)=u,$$

即半径为b的圆柱面。

(ii) $A=1$时，

$$f(u)=u+b\geq 0,\quad g=0,$$

即平面$\{z=0\}$。

(iii) $A \in (0,1)$，母线为xz平面上斜率为$\frac{\sqrt{1-A^2}}{A}$的射线，曲面为圆锥面。

(1c) $K = -c^2 < 0, c > 0$。因此$f''(u) - c^2 f = 0$，有特解

$$f(u) = \frac{1}{c}e^{-cu}, \quad f'(u) = -e^{-cu}, \quad u \geq 0$$

$$g(u) = \pm \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2c\xi}} d\xi.$$

称为伪球面(pseudosphere)。伪球面关于$z = 0$平面对称，考察$z > 0$部分的母线：

$$\begin{cases} x(u) = \frac{1}{c}e^{-cu}, \\ z(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2c\xi}} d\xi, \quad u > 0. \end{cases}$$

则有

$$\frac{dx}{du} = -e^{-cu}, \quad \frac{dz}{du} = \sqrt{1 - e^{-2cu}},$$

因此

$$\frac{dx}{dz} = \frac{-e^{-cu}}{\sqrt{1 - e^{-2cu}}} = \frac{-cx}{\sqrt{1 - (cx)^2}} = \frac{-x}{\sqrt{\frac{1}{c^2} - x^2}}.$$

这是一个经典的一阶常微分方程，称为跟踪方程(被跟踪者从原点出发沿z轴正向移动，$(x(t), z(t))$为跟踪者的轨线)，有参数形式的解

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{c}\frac{1}{\cos ht}, \\ z(t) = \frac{1}{c}(t - \frac{\sinh t}{\cosh t}), \quad t > 0. \end{cases}$$

因此伪球面也称为旋转跟踪曲面(tractricoid)。双曲空间的更常见的另一种嵌入方式是以双叶双曲面$x^2 + y^2 - t^2 = -1$嵌入到三维Minkowski空间$dxdx + dydy - dtdt$。

(2) 常平均曲率旋转曲面

$$H = \frac{1}{2}(-\frac{f''}{g'} + \frac{g'}{f}) = \text{constant}.$$

(2a) $H = 0$，即极小曲面。因此

$$ff'' = (g')^2 = 1 - (f')^2,$$

即

$$(ff')' = 1,$$

从而积分得

$$ff' = \frac{1}{2}(f^2)' = u + A,$$

因此有特解

$$f^2 = u^2 + a^2, \quad a > 0,$$

$$x = f(u) = \sqrt{u^2 + a^2}.$$

从而有

$$f'(u) = \frac{u}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

$$g'(u) = \pm\sqrt{1 - (f')^2} = \pm\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$

以及特解

$$z = g(u) = \int_0^u \frac{a}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt = a\mathrm{arcsinh}\frac{u}{a}.$$

消去u得

$$x = a\cosh\frac{z}{a}, \quad z \in (-\infty, +\infty).$$

这是xz平面上的一条悬链线(catenary)，它绕z轴旋转生成的曲面称为悬链面(catenoid)。悬链面是平面之外被发现的第一个极小曲面(Euler, 1744年)。Meusnier证明了非平凡的旋转极小曲面只有悬链面(1776)。

(2b) H为非零常数。

$$-\frac{f''}{g'} + \frac{g'}{f} = 2H.$$

有特解称为Delaunay曲面：其母线为

$$\begin{cases} f(u) = \frac{1}{2|H|}\sqrt{1 + B^2 + 2B\sin(2|H|u)}, \quad B \in \mathbb{R} \\ g(u) = \int_0^u \frac{1 + B\sin(2|H|t)}{\sqrt{1 + B^2 + 2B\sin(2|H|t)}} dt. \end{cases}$$

取$B = 1$，可得半径为$\frac{1}{|H|}$的球面。极小曲面为曲面面积泛函的临界点。固定所围体积约束之下，曲面面积泛函的临界点为常平均曲率曲面。

§0.1.2 直纹面与可展曲面

定义0.1. 直纹面*(ruled surface)*是指由单参数直线构成的曲面。其参数表达式为

$$r(u,v)=a(u)+vb(u),\quad u\in I, v\in\mathbb{R},$$

其中$a(u)$为一条空间曲线*(*称为直纹面的导线*)*，$b(u)\in T_{a(u)}\mathbb{R}^3$为$a(u)$处的一个非零向量。因此当$u=u_0$固定时，$a(u_0)+vb(u_0)$为过$a(u_0)$、沿$b(u_0)$方向的一条直线，称为直纹面的直母线。

直纹面可作参数变换使得$|b|=1$：由

$$r(u,v)=a(u)+vb(u)=a(u)+v|b(u)|\frac{b(u)}{|b(u)|},$$

令

$$\bar{u}=u,\quad \bar{v}=v|b(u)|,\quad \bar{b}(\bar{u})=\frac{b(u)}{|b(u)|},$$

则

$$r(\bar{u},\bar{v})=r(u(\bar{u},\bar{v}),v(\bar{u},\bar{v}))=a(u)+v|b(u)|\frac{b(u)}{|b(u)|}=a(\bar{u})+\bar{v}\bar{b}(\bar{u}).$$

例(saddle roof)：双曲抛物面(hyperbolic paraboloid)

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

是一个直纹面。它有参数表示

$$\begin{aligned} r(u,v) &= (a(u+v),b(u-v),4uv)\\ &= (au,bu,0)+v(a,-b,4u). \end{aligned}$$

例(广州塔，cooling tower)：单页双曲面(hyperboloid)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

是一个直纹面。它有参数表示

$$\begin{aligned} r(u,v) &= (a(\cos u-v\sin u),b(\sin u+v\cos u),cv)\\ &= (a\cos u,b\sin u,0)+v(-a\sin u,b\cos u,c). \end{aligned}$$

例(螺旋面(helicoid), Euler (1774), Meusnier (1776))

$$r(u,v)=(v\cos u,v\sin u,bu)=(0,0,bu)+v(\cos u,\sin u,0),\quad b\neq 0$$

是继平面、悬链面之后被发现的第三个极小曲面。可直接计算得

$$L = N = 0, \quad F = 0; \quad M \neq 0.$$

Catalan证明了直纹面中的极小曲面仅有平面和螺旋面(1842)。

Proposition 0.2. *直纹面Gauss曲率$K \leq 0$。*

证明：由

$$r(u,v) = a(u) + vb(u)$$

可计算

$$r_v = b(u), \quad r_{vv} = 0,$$

因此

$$N = \langle r_{vv}, N \rangle = 0.$$

从而

$$K = \frac{-M^2}{EG - F^2} \leq 0.$$

□

定义0.3. *Gauss曲率恒为零的直纹面称为可展曲面(developable surface)。*

Proposition 0.4. *直纹面$r(u,v) = a(u) + vb(u)$为可展曲面*

$\Leftrightarrow (i) \quad (a', b, b') = 0;$

$\Leftrightarrow (ii) \quad N(u, v_1) = N(u, v_2), \quad v_1 \neq v_2$; *即沿直母线法向量不变，从而可展曲面沿直母线具有平行的切平面。*

证明：(i)直纹面$r(u,v) = a(u) + vb(u)$的Gauss曲率

$$K = \frac{-M^2}{EG - F^2}.$$

因此它是可展曲面当且仅当$M \equiv 0$，即

$$\langle r_{uv}, r_u \wedge r_v \rangle = \langle b', (a' + vb') \wedge b \rangle = \langle b', a' \wedge b \rangle = (a', b, b') \equiv 0.$$

(ii) 习题33 □

利用(i)，可展曲面的例子：

(a) $r(u,v) = a(u) + vb_0$，柱面:$b' = 0$

(b) $r(u,v) = a_0 + vb(u)$为以a_0为顶点的锥面：$a' = 0$

(c) $r(t,v) = r(t) + vr'(t)$，即空间正则曲线$r(t)$的切线全体构成的曲面，称为切线面：$b = r'(t) = a'(t)$

可展曲面的分类：

Proposition 0.5. *可展曲面(局部上)为柱面、锥面或切线面。*

证明：设$r(u,v) = a(u) + vb(u)$为可展曲面，则

$$(a', b, b') = 0.$$

(a1) 若$b \wedge b' \equiv 0$，则单位向量$\frac{b}{|b|}$满足

$$(\frac{b}{|b|}) \wedge (\frac{b}{|b|})' = 0,$$

由于$(\frac{b}{|b|})'$与$\frac{b}{|b|}$正交，因此$(\frac{b}{|b|})' = 0$。即$b(u)$方向不变，曲面为柱面。

(a2) 若$b \wedge b' \neq 0$，即b, b'线性独立。因此存在唯一$\lambda(u), \mu(u)$使得

$$a' = \lambda(u)b + \mu(u)b',$$

即

$$(a - \mu b)' := \widetilde{a}' = (\lambda - \mu')b.$$

(i) 若$\widetilde{a}' \equiv 0$，则$a - \mu b \equiv a_0$，从而

$$r(u,v) = a_0 + (\mu(u) + v)b(u),$$

为锥面。

(ii) 若$\widetilde{a}' \neq 0$，则$\widetilde{a}(u)$为正则曲线，

$$r(u,v) = \widetilde{a}(u) + (\mu + v)b = \widetilde{a}(u) + \frac{\mu + v}{\lambda - \mu'}\widetilde{a}',$$

即切线面。 □

作业：32, 33