§3.6 Taylor 公式

3.6.1 Taylor 公式

设函数 $f(x)$ 在 x_0 可微, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x_0; x),$$

其中

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x_0; x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

因此, 在 x_0 的附近, 可以用一个关于 $x - x_0$ 的一次多项式

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

代替 $f(x)$, 由此产生的误差（或称为余项）$R_1(x_0; x)$ 当 $x \to x_0$ 时, 是比 $x - x_0$ 更高阶的无穷小量.

在 x_0 附近用一次多项式 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 来替代 $f(x)$ 所产生的误差达不到要求时, 自然地可以考虑用二次多项式来替代 $f(x)$.

假设在 x_0 附近 $f(x)$ 有二阶导函数, 且存在常数 a_0, a_1, a_2 使得

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2), \quad (x\to x_0),$$

则令 $x\to x_0$ 得 $a_0=f(x_0)$, 两边减去 $f(x_0)$ 后除以 $x-x_0$, 再令 $x\to x_0$ 得 $a_1=f'(x_0)$. 然后有

$$a_2=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}=\frac{f''(x_0)}{2}.$$

也就是说在 x_0 附近用二次多项式来替代 $f(x)$, 使其误差要达到 $o((x-x_0)^2)$ 时, 此二次多项式只能是

$$f(x_0)++f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2.$$

定理 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有直至 n 阶的导数. 如果 $P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n$ 为一个关于 $x-x_0$ 的 n 次多项式, 而且

$$f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n),\quad (x\to x_0), \tag{3.1}$$

则 $P_n(x)$ 的系数必须是

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad k=0,1,\cdots,n,$$

从而 $P_n(x)=T_n(x_0;x)$, 这里

$$T_n(x_0;x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称之为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 次 Taylor **多项式**.

证明 在 (3.1) 中令 $x \to x_0$, 即得 $a_0 = f(x_0)$.

假设已证得

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \; k = 0, 1, \cdots, m, \; m < n,$$

根据 (3.1) 有,

$$\frac{f(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}{(x - x_0)^{m+1}} = a_{m+1} + o(1), \; (x \to x_0).$$

因而,

$$a_{m+1} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}{(x - x_0)^{m+1}}.$$

对上面的极限用 m 次 L'Hospital 法则, 得到

$$a_{m+1} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x_0)}{(m+1)!(x - x_0)} = \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}.$$

于是根据归纳原理, 结论得证.

定理 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有直至 n 阶的导数, $T_n(x_0;x)$ 是函数 f 在 x_0 处的 n 次 Taylor 多项式, 则当 $x \to x_0$ 时, 余项

$$R_n(x_0;x) = f(x) - T_n(x_0;x)$$

是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小量, 即

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x_0;x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x_0;x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

换句话说, 当 $x \to x_0$ 时, 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

称之为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的带 Peano **余项**的 Taylor 公式.

证明 只要注意到 $f(x)-T_n(x_0;x)$ 及其直至 n 阶的导数当 $x\to x_0$ 时，都是无穷小量这个事实，然后在计算极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x_0;x)}{(x-x_0)^n}$$

的过程中连续使用 L'Hospital 法则，即可完成证明.

特别，如果函数 f 在 $x=0$ 附近 n 阶导数，定理 2 中取 $x_0=0$，则 Taylor 公式为

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),\quad x\to 0$$

并称之为函数 $f(x)$ 的 n 阶具有 Peano 余项的 Maclaurin 公式（或展开式）.

定理 3 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有 $n+1$ 阶导数, 且 n 阶导数在 I 上连续. 设 x 和 x_0 是 I 中任意两个不同的数, $T_n(x_0;x)$ 是 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式. 则在 x 和 x_0 之间存在一个数 ξ, 使得

$$f(x) = T_n(x_0;x) + R_n$$

公式中的余项 R_n 具有下列形式

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 R_n 称为 Lagrange 余项, 而上面这个公式称为带 Lagrange 余项的 Taylor 公式. 或者说 $f(x)$ 在 x 点处可以表示成

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

证明 考虑函数 $G(x)=\frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 和

$$R(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

显然有

$$G(x_0)=G'(x_0)=\cdots=G^{(n)}(x_0)=0,$$

$$R(x_0)=R'(x_0)=\cdots=R^{(n)}(x_0)=0,$$

反复应用 Cauchy 中值定理, 知在 x_0 与 x 之间存在 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\xi$ 使得

$$\frac{R(x)}{G(x)}=\frac{R(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{R'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\cdots=\frac{R^{(n+1)}(\xi)}{G^{(n+1)}(\xi)}.$$

于是

$$\frac{R(x)}{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{1},$$

即,

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

定理 4 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有 $n+1$ 阶导数, 且 n 阶导数在 I 上连续. 设 x 和 x_0 是 I 中任意两个不同的数, $T_n(x_0;x)$ 是 f 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 多项式. 则对于任意一个在以 x_0 和 x 为端点的闭区间的上连续, 在其内部可导且导数不等于零的函数 $\varphi(x)$, 都存在 x 和 x_0 之间的一个数 ξ, 使得

$$f(x)=T_n(x_0;x)+\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n. \tag{3.2}$$

证明 在以 x_0 和 x 为端点的闭区间 J 上考虑辅助函数

$$F(t)=f(x)-\left(f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right).$$

显然 $F(t)$ 在 J 上连续, 在 J 内部可导, 且

$$F'(t) = -\left(f'(t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}\cdot 2(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \cdots + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right)$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

对于 J 上的函数 $F(t)$ 和 $\varphi(t)$ 用 Cauchy 中值定理, 存在 x 和 x_0 之间存在一个数 ξ, 使得

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

将 $F'(t)$ 的表达式代入, 并注意到

$$F(x)-F(x_0) = 0 - F(x_0) = -\left(f(x) - T_n(x_0;x)\right)$$

就得到 (3.2). 证毕.

注 1: 在 (3.2) 中取 $\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$ 就得到 Lagrange 余项公式

$$R_n(x_0,x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

注 2: 在 (3.2) 中取 $\varphi(t)=(x-t)$ 可得到 Cauchy 余项公式

$$R_n(x_0,x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0).$$

因为 ξ 是介于 x 和 x_0 的一个数, 所以可表示成为

$$\xi=x_0+\theta(x-x_0),\quad 0<\theta<1$$

因此 Lagrange 余项也表示成

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

推论 1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有有界的 $n+1$ 阶导函数, 即

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M,$$

则在区间 I 上, $f(x)$ 与它的 Taylor 多项式之间的误差（也就是余项）是

$$|f(x) - T_n(x_0; x)| = |R_n| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

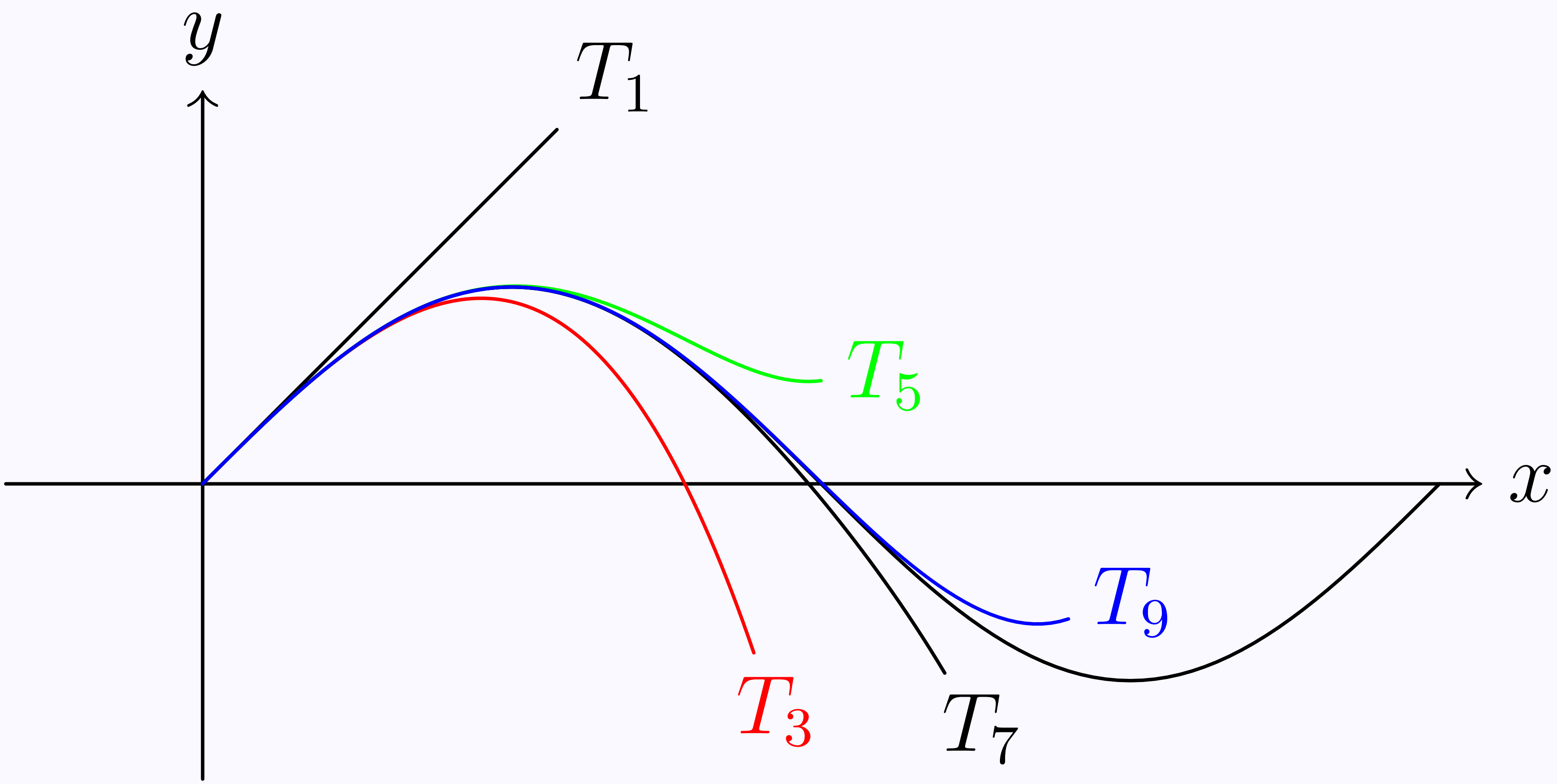
由此推论可知, 当函数 $f(x)$ 在区间 I 内有任意阶导数, 且各阶导函数构成的函数列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 在 I 上一致有界, 则有

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x_0, x) = f(x),$$

即, $f(x)$ 的 Taylor 多项式在 I 中每点 x 都收敛于 $f(x)$.

注意, 在一般条件下上面的收敛公式并不成立.

下图展示了正弦函数 $y = \sin x$ 的泰勒展开式的前几项在 $(0, \pi)$ 对 $\sin x$ 的逼近情况:



3.6.2 初等函数的 Maclanrin 公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \ (x \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \ (x > -1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos\theta x, \ (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}\cos\theta x, \ (x \in \mathbb{R})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}, \ (x > -1).$$

为了求出函数 $f(x)$ 的 Maclaurin 公式, 原则上应先求出函数在 0 点的导数值 $f^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, 2, \cdots n$. 但有时候函数的高阶导数值并不容易计算. 因此, 我们更多地是采取间接方式. 这是基于对 Maclaurin 公式基本含义的下述理解:

定理 1 的基本含义是, 如果函数 $f^{(n)}(0)$ 存在, 则无论用什么方法, 只要得到具体形式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n), \quad x \to 0$$

的展开式, 则他一定就是函数 f 的 Maclaurin 公式. 作为副产品, 我们也顺便计算出了 $f^{(n)}(0) = k! a_k$, 这样, 我们就能求出更多函数的 Maclaurin 公式.

例 1 求函数 e^{-x^4} 的 $4n$ 阶 Maclaurin 公式.

解 因为当 $x \to 0$ 时, $-x^4 \to 0$, 利用 e^x 展开的结果:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

直接将 $-x^4$ 替代 e^x 展开式中的 x, 有

$$\begin{aligned} e^{-x^4} &= 1 + (-x^4) + \frac{(-x^4)^2}{2!} + \frac{(-x^4)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x^4)^n}{n!} + o((-x^4)^n),\ x \to 0 \\ &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{2!} - \frac{x^{12}}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{4n}}{n!} + o(x^{4n}),\ x \to 0 \end{aligned}$$

由此我们也得到了

$$(e^{-x^4})^{(4k)}\Big|_{x=0} = \frac{(-1)^k (4k)!}{k!}, \quad \text{在 } x = 0 \text{ 的其他导数为零.}$$

这比直接计算函数 e^{-x^4} 要容易的多.

例 2 求 $\cos^2 x$ 的 $2n$ 阶的 Maclaurin 公式.

解 利用

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

以及 $\cos x$ 的 Maclaurin 公式:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + o(x^{2n-1})$$

注意到当 $x \to 0$ 时, $2x \to 0$, 所以

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-2}}{(2n-2)!} + o((2x)^{2n-1})\right)$$

$$= 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}2^{2n-3}x^{2n-2} + o(x^{2n-1}), \quad x \to 0$$

例 3 设 $f(x)=\frac{1}{x}$, 求 $f(x)$ 在 $x=2$ 的 Taylor 公式.

解 由 $\frac{1}{x}=\frac{1}{x-2+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}+1\right)^{-1}$. 根据 $(1+x)^{-1}$ 的 Maclaurin 公式:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\frac{(-1)^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}x^{n+1},$$

用 $\frac{x-2}{2}$ 代替其中的 x, 就得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x-2}{2}+\cdots+(-1)^n\left(\frac{x-2}{2}\right)^n+2R\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+R,\end{aligned}$$

这里

$$R=\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n+1}}{2^{n+2}}\left[1+\frac{\theta(x-2)}{2}\right]^{-n-2},\qquad(0<\theta<1).$$

3.6.3 Taylor 公式的应用

例 4 计算 e 的值, 使误差不超过 10^{-5}.

解 在 e^x 的展开式中, 取 $x=1$, 得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad 0 < \theta < 1.$$

由于

$$0 < \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

所以, 只要确定 n, 使得

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$$

即可, 易知, 要达到这样的精度, 只需取 $n=9$, 这时

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} = 2.718282$$

例 5 证明 e 是无理数.

证明 （反证法）如果 e 是有理数, 设 $e=\frac{q}{p}$, 其中 $p,\ q$ 是正整数. 取 $n>p$ 且 $n>3$, 则

$$e=\frac{q}{p}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\quad 0<\theta<1.$$

于是有

$$\frac{n!q}{p}=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{n!e^{\theta}}{(n+1)!}$$

由 n 的选取可知, 上式除右边最后一项外, 其余各项都是整数. 因此 $\frac{n!e^{\theta}}{(n+1)!}$ 也必是整数. 但实际上

$$0<\frac{n!e^{\theta}}{(n+1)!}=\frac{e^{\theta}}{n+1}<\frac{3}{n+1}<\frac{3}{4}<1$$

这是矛盾. 矛盾说明 e 不是有理数.

例 6 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^4}-\cos^2 x-x^2}{\sin^4 x}.$$

解 因为

$$e^{-x^4}=1-x^4+o(x^4)$$

$$\cos^2 x=1-x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^4),$$

所以

$$e^{-x^4}-\cos^2 x-x^2=1-x^4-(1-x^2+\frac{1}{3}+o(x^4))-x^2$$

$$=-\frac{4}{3}x^4+o(x^4).$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^4}-\cos^2 x-x^2}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{4}{3}.$$

例 7 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上二阶可导, $f(0)=f(1)=0$, 且存在常数 M 使得对任意的 x, 有 $|f''(x)|\leqslant M$. 求证: 在 $[0,1]$ 区间上有 $|f(x)|\leqslant \frac{M}{8}$.

证明 对任意的 $x\in(0,1)$, 由 Taylor 公式, 得

$$f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2,\quad \xi_1\in(0,x)$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2,\quad \xi_2\in(x,1)$$

将第一式乘以 $(1-x)$, 第二式乘以 x, 然后相加得

$$|f(x)|=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}x(1-x)^2\right|\leqslant\frac{M}{2}x(1-x)\leqslant\frac{M}{8}.$$

例 8 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上无穷可微, 且

$$|f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)| \leqslant n!|x|,\ x\in(-1,1),\ n=0,1,2,\cdots$$

求证: $f(x)\equiv g(x)$.

证明 令 $h(x)=f(x)-g(x)$, 则

$$h^{(n)}(0)=0,\ n=0,1,2,\cdots$$

根据带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 有

$$h(x)=\frac{h^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},\ x\in(-1,1)$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间. 因此

$$|h(x)|\leqslant|\xi x^{n+1}|\leqslant|x|^{n+2}.$$

令 $n\to\infty$, 得 $h(x)=0$. 所以 $f(x)=g(x)$.

例 9 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶导数, 且 $f'(a)=f'(b)=0$. 求证: 存在 $c\in(a,b)$ 使得

$$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证明 将 $f(x)$ 分别在 a,b 展开, 有

$$f(x)=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-a)^2,\ \xi_1\in(a,x),$$
$$f(x)=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-b)^2,\ \xi_2\in(x,b).$$

将此二式相减并取 $x=\frac{a+b}{2}$, 得到

$$f(b)-f(a)=\frac{f''(\xi_1)-f''(\xi_2)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}.$$

取 c 是 ξ_1 与 ξ_2 之一, 使得 $|f''(c)|\geqslant|f''(\xi_i)|,\ i=1,2$. 于是结论得证.

例 10 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上二次可导, 并且 $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)| < +\infty$, $k = 0, 1, 2$. 求证: $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

证明 对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 及 $h > 0$, 存在 $\xi \in (x, x+h)$ 和 $\eta \in (x-h, x)$ 使得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2,$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\eta)h^2.$$

两式相减得到

$$2f'(x)h = f(x+h) - f(x-h) + \frac{1}{2}f''(\eta)h^2 - \frac{1}{2}f''(\xi)h^2.$$

因而 $2|f'(x)|h \leqslant 2M_0 + M_2h^2$, $h \in \mathbb{R}$. 此式蕴含

$$2M_1h \leqslant 2M_0 + M_2h^2, \ h \in \mathbb{R}.$$

于是有 $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

例 11 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有 $n+1$ 阶连续导函数, 且 $f(0)\geqslant 0$, $f'(0)\geqslant 0$, $\cdots f^{(n)}(0)\geqslant 0$. 又对任意 $x>0$, 有 $f(x)\leqslant f^{(n+1)}(x)$. 求证: $f(x)\geqslant 0$.

证明 对于 $x\in(0,1]$, 由 Taylor 公式存在 $x_1\in(0,1)$ 使

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

根据条件得

$$f(x)\geqslant f(x_1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

同样将 $f(x_1)$ 展开, 可得 $x_2\in(0,x_1)$ 使得

$$f(x_1)\geqslant f(x_2)\frac{x_1^{n+1}}{(n+1)!}.$$

继续这个过程, 可得 $(0,x)$ 中严格递减序列 $\{x_k\}$ 使得

$$f(x_k)\geqslant f(x_{k+1})\frac{x_k^{n+1}}{(n+1)!}.$$

于是

$$f(x) \geqslant f(x_k)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{x_1^{n+1}}{(n+1)!}\cdots\frac{x_{k+1}^{n+1}}{(n+1)!}$$

因为 x 及 x_k 都在 $[0,1]$ 中，上式右端当 $k\to+\infty$ 时趋于 0，于是对于 $x\in[0,1]$ 有 $f(x)\geqslant 0$. 由此

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(0)+f''(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}x^n \\ &\geqslant \frac{f(\xi)}{n!}x^n \geqslant 0, \end{aligned}$$

其中 $\xi\in(0,x)$. 归纳可证 $f^{(k)}(x)\geqslant 0$, $x\in[0,1]$, $k=1,2,\cdots,n+1$. 对函数 $g(x)=f(x+1)$ 重复以上过程可知 $f(x)\geqslant 0$, $x\in[1,2]$. 用归纳法可证对任意自然数 m, $f(x)$ 在 $[m,m+1]$ 上非负. 于是结论得证.

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出