§0.1 法曲率

第二基本形式

$$\mathrm{II}(X,Y)=\mathrm{II}(Y,X)=-\langle dr(X),dN(Y)\rangle=\langle X(Y(r)),N\rangle,\quad X,Y\in\mathbb{R}^2.$$

将继续讨论与它密切相关的其他基本概念：法曲率、Weingarten变换、主曲率等。

记号：设曲面S的参数表示为$r(u,v)$，

$$p=(a,b)\in D,\quad P=P(a,b),$$

$$\gamma(t)=(u(t),v(t)),\quad \gamma(0)=p,\quad \gamma'(0)=X\in T_pD,$$

$$\mathrm{I}_p(X,Y)=\langle dr_p(X),dr_p(Y)\rangle,$$

$$\mathrm{II}_p(X,Y)=-\langle dr_p(X),dN_p(Y)\rangle.$$

$dr_p:T_pD\to T_PS$为线性同构，其一一对应为

$$w=\xi r_u+\eta r_v\in T_PS\leftrightarrow (dr_p)^{-1}(w)=\xi\frac{\partial}{\partial u}+\eta\frac{\partial}{\partial v}:=X_w\in T_pD.$$

由第一、第二基本形式的表达式，

$$\mathrm{I}(X_w,X_w)=(Edudu+2Fdu\cdot dv+Gdvdv)(X_w,X_w)=E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2,$$

$$\mathrm{II}(X_w,X_w)=(Ldudu+2Mdu\cdot dv+Ndvdv)(X_w,X_w)=L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2.$$

定义0.1. *曲面S沿非零切向量$w=\xi r_u+\eta r_v\in T_PS$的法曲率*

$$k_n(w):=\frac{II(X_w,X_w)}{I(X_w,X_w)}=\frac{L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2}{E\xi^2+2F\xi\eta+G\eta^2}.$$

$k_n(w)$仅与w所确定的直线方向有关。特别如果v是与w同直线的单位向量，则

$$k_n(v)=k_n(w)=\mathrm{II}(X_v,X_v).$$

即法曲率$k_n(v)$为$\mathrm{II}\circ[(dr)^{-1}\otimes(dr)^{-1}]$在$T_PS\otimes T_PS$的对角元$(v,v)$上的取值。

由于曲面第一基本形式不依赖于曲面参数选取和$\mathbb{R}^3$的合同变换，曲面第二基本形式在同向参数变换和$\mathbb{R}^3$的刚体运动下不变，所以法曲率在同向参数变换和$\mathbb{R}^3$的刚体运动下也保持不变。

(i)几何意义：设v为与w同直线的单位向量，$r(s)=r(u(s),v(s))$为任一弧长参数曲线使得

$$r(0)=P,\quad \dot r(0)=v=\lambda r_u+\mu r_v.$$

对空间曲线$r(s)$，记$\ddot r(0)=\kappa n$，则有

定理0.2. *1776年Meusnier发现：对于曲面上任意弧长参数曲线及*$v = \dot{r}(0) \in T_P S$

$$\langle \kappa n, N\rangle = \langle \ddot{r}(0), N\rangle = k_n(v) = II(X_v, X_v) = L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2.$$

特别$\langle \kappa n, N\rangle = \langle \ddot{r}(0), N\rangle$只与曲面在$P$点的第二基本形式以及弧长参数曲线的速度方向$v$有关，而与弧长参数曲线的具体取法无关。另外，空间曲线$r(s)$的曲率$\kappa = |\ddot{r}(0)| \geq |k_n(v)|$。也有法曲率的等价定义：$k_n(v) := \langle \kappa n, N\rangle$。

证明：

$$\dot{r}(s) = \dot{u}(s) r_u + \dot{v}(s) r_v,$$

$$\ddot{r}(0) = (\ddot{u} r_u + \ddot{v} r_v) + \lambda^2 r_{uu} + 2\lambda\mu r_{uv} + \mu^2 r_{vv},$$

$$\langle \ddot{r}(0), N\rangle = L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2 = \mathrm{II}(X_v, X_v) = k_n(v)|v|^2 = k_n(v).$$

□

考虑例子：曲面S为半径等于R的球面，P为北极点，N为单位内法向。弧长参数曲线取为球面与包含v方向直线的平面相交所得的圆周，设圆周在P点的法向n与N的夹角为$\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$，则圆周半径为$R\cos\theta$，从而

$$\kappa = |\ddot{r}(0)| = \frac{1}{R\cos\theta},$$

$$\langle \ddot{r}(0), N\rangle = \kappa\cos\theta \equiv \frac{1}{R} = k_n(v).$$

(ii)力学意义：考虑曲面S上曲线$r(t) = r(\gamma(t))$使得

$$r'(0) = w = dr_p(X_w) = \xi r_u + \eta r_v.$$

计算其速度向量、加速度向量

$$r'(t) = u'(t) r_u(u(t), v(t)) + v'(t) r_v(u(t), v(t)),$$

$$r''(t) = (u'' r_u + v'' r_v) + [(u')^2 r_{uu} + 2u'v' r_{uv} + (v')^2 r_{vv}].$$

加速度$r''(t)$在N方向的投影为

$$\langle r''(0), N\rangle = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2 = II(X_w, X_w) = k_n(w) I(X_w, X_w) = k_n(w)|w|^2.$$

由此可见给定质量的质点在曲面上运动时，N方向的离心力由法曲率$k_n(w)$以及质点运动速度$|w|$决定。这事实上也是Meusnier定理对于一般参数曲线的表述。

例：平面$\mathrm{II} \equiv 0$，因此$k_n(w) \equiv 0$。

例：半径为R的球面$II=\pm\frac{1}{R}I$，因此

$$k_n(w)=\pm\frac{1}{R},\quad \forall 0\neq w\in T_PS.$$

例：圆柱面

$$r(u,v)=(a\cos\frac{u}{a},a\sin\frac{u}{a},v)$$

有

$$I=dudu+dvdv,\quad II=-\frac{1}{a}dudu,$$

从而对任意单位切向量$v=\cos\theta r_u+\sin\theta r_v$，法曲率

$$k_n(v)=k_n(\theta)=-\frac{1}{a}\cos^2\theta.$$

例：求二次曲面$z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$的法曲率。

解：曲面有参数化

$$r(x,y)=(x,y,\frac{1}{2}(ax^2+by^2)),$$

从而

$$r_x=(1,0,ax),\quad r_y=(0,1,by),$$

$$\mathrm{I}=(1+a^2x^2)dxdx+2abxydx\cdot dy+(1+b^2y^2)dydy,$$

$$N=\frac{r_x\wedge r_y}{|r_x\wedge r_y|}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2x^2+b^2y^2}}(-ax,-by,1),$$

$$r_{xx}=(0,0,a),\quad r_{xy}=(0,0,0),\quad r_{yy}=(0,0,b),$$

$$\mathrm{II}=\frac{1}{\sqrt{1+a^2x^2+b^2y^2}}(adxdx+bdydy).$$

因此对曲面任一点的单位切向量$v=\xi r_x+\eta r_y$，

$$k_n(v)=\frac{\mathrm{II}(X_v,X_v)}{|v|^2}=\mathrm{II}(X_v,X_v)=\frac{a\xi^2+b\eta^2}{\sqrt{1+a^2x^2+b^2y^2}}.$$

(i)当$ab>0$时曲面为椭圆抛物面，k_n同时为正或为负；

(ii)当$ab<0$时曲面为双曲抛物面，$k_n(v)=0$有两个线性无关的解；

(iii)当$ab=0$且a,b不全为零时曲面为抛物柱面，$k_n(v)=0$恰有一个独立解；

(iv)当a,b同时为零时曲面为平面，$k_n\equiv 0$。

事实上在一点$P(a,b)$附近，可将曲面表示为T_PS上的图，P为原点，直角坐标系x,y轴取在T_PS平面上，z轴正向为N_P。图的高度函数为

$$z=f(x,y):=\langle r(x,y)-P,N(a,b)\rangle.$$

适当选取T_PS上的x,y轴，对应第二基本形式矩阵表示的相合变换，可使得

$$Hess(f)=(D^2f)=(\mathrm{II})=diag(a,b),$$

因此曲面在P点的二阶近似为

$$z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2).$$

即曲面在P点的二阶近似为上述二次曲面中的一种。

设$P\in S=\{r(u,v)\}$，$v\in T_PS$为单位向量。vN平面与曲面S相交所得的弧长参数曲线称为曲面经过P点的、沿v方向的法截线。曲面在一点附近的弯曲直观地表现为各法截线的弯曲，法截线$r(s)$的弯曲与该曲线的曲率密切相关。另一方面，$r(s)$的法向$n=\pm N$，从而

$$\kappa=\langle\ddot{r}(0),n\rangle=\langle\ddot{r}(0),\pm N\rangle=\pm k_n(v),$$

所以曲面的弯曲直观地表现为各个法曲率。事实上，vN平面上的法截线

$$r(s)=P+sv+\frac{s^2}{2}\ddot{r}(0)+O(s^3),$$

其中

$$\ddot{r}(0)=\langle\ddot{r}(0),N\rangle N=k_n(v)N.$$

因此

$$r(s)=P+sv+\frac{s^2}{2}k_n(v)N+O(s^3),$$

特别的，$k_n(v)$反映了曲面沿v方向上的弯曲。由于

$$k_n(v)=\mathrm{II}(X_v,X_v)=L\lambda^2+2M\lambda\mu+N\mu^2.$$

$k_n(v)$的符号状况由第二基本形式作为二次型的类型决定，因此有如下分类：

(i)如果$LN-M^2>0$，则沿P点任何切向量的法曲率同时为正或为负，曲面在该点沿任意方向的弯曲是同向的。这样的点称为曲面的椭圆点。曲面在该点的二阶近似为椭圆抛物面。

(ii)如果$LN-M^2<0$，则$k_n(v)=0$恰好有两个线性无关的解(称为曲面在该点的渐近方向)。这样的点P称为曲面的双曲点。曲面在该点的二阶近似为双曲抛物

面。渐近方向的相应直线将切平面分割为四个区域，相邻的区域上法曲率符号相反，相对的区域上符号相同。

(iii) 如果$LN - M^2 = 0$，并且当L, M, N不全为零时，仅有一个切线方向使得法曲率k_n为零，称为渐近方向。这个渐近方向把切平面分割为两个区域，这两个区域内法曲率符号相同。这样的点称为曲面的抛物点。

(iv) 当$L = M = N = 0$时，法曲率沿任何方向均为零，这样的点又称作平点。曲面在该点的二阶近似为平面。

作业：18, 20, 24, 31