第二十六讲 (2023.6.7)

Thm 设 μ 是 $(X, \mathcal{M})$ 上一个测度

(i) (单调性) 设 $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$

$$E_1 \subset E_2 \Longrightarrow \mu(E_1) \leq \mu(E_2)$$

(ii) (次可加性)

$$E_k \in \mathcal{M}, \quad k=1,2\cdots \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

(iii) (连续性)

(向上) $\mathcal{M} \ni E_k \nearrow E \Longrightarrow \mu(E) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(E_k)$

(向下) $\left.\begin{array}{l} \mathcal{M} \ni E_k \searrow E \\ \mu(E_1) < \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow$ - - - - - - -

Pf (ii) ~~(i)~~

$$\tilde{E}_1 \overset{\text{def}}{=} E_1$$

$$\tilde{E}_k \overset{\text{def}}{=} E_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right), \quad k=2,3\cdots$$

$$\Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \biguplus_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k$$

$$\Longrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mu\left(\biguplus_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

(iii) 只证明向上连续性

令 $\quad \tilde{E}_1 \stackrel{\text{def}}{=} E_1$

$$\tilde{E}_k \stackrel{\text{def}}{=} E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j = E_k \setminus E_{k-1}$$

$(k \geqslant 2)$

$$\Longrightarrow \quad E = \biguplus_{k=1}^{\infty} \tilde{E}_k$$

$$\Longrightarrow \quad \mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{E}_k)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(\tilde{E}_k)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \mu(E_N).$$

Def $(X, \mathfrak{M}, \mu)$

如果 $E \in \mathfrak{M}$ s.t. $\mu(E) = 0$，则称 E 为一个 μ-零集.

例：$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ 是 δ_0-零集

Def 如果一个性质对除一个 μ-零集外的所有 $x\in X$ 都成立，则称它几乎处处成立，记为 μ-a.e.

Def 称 $(X,\mathcal{M},\mu)$ 完备是指：μ-零集的任何子集都可测.

例：$\mathbb{R}^n$ 上 Lebesgue 测度 m 完备

$m|_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}}$ 不完备（如果完备，由 Lebesgue 可测集的构造，$\mathcal{L}=\mathcal{B}$ 矛盾

Def $(X,\mathcal{M})$

如果 $f: X\to[-\infty,+\infty]$ 满足：

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad \{f>a\}\in\mathcal{M}$$

则称 f 可测. 对复值函数 $f: X\to\mathbb{C}$，如果 $\mathrm{Re}f$，$\mathrm{Im}f$ 均可测，则称 f 可测.

Prop

f_n 可测, $n=1,2\cdots \Longrightarrow \sup\limits_n f_n,\ \inf\limits_n f_n,\ \limsup\limits_{n\to\infty} f_n,\ \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 可测

Cor 可测函数全体对极限运算封闭

Def.

$$L^+(X) \overset{def}{=} \{ X \text{ 上非负可测函数} \}$$

Def 简单函数 $\overset{def}{=}$ 可测集示性函数之线性组合.

Thm $\forall f \in L^+(X)$, $\exists\ \varphi_k \geq 0$ simple, s.t.

$\varphi_k \nearrow f$

Pf: 对 $k=0,1,2,\cdots$

$j = 0,1,2,\cdots,2^{2k}-1$

$$E_{k,j} \overset{def}{=} \left\{ \frac{j}{2^k} < f \leqslant \frac{j+1}{2^k} \right\}$$

$$F_k \overset{def}{=} \{ f > 2^k \}$$

$$\varphi_k \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{2^{2k}-1} \frac{j}{2^k} \chi_{E_{k,j}} + 2^k \chi_{F_k}$$

Def $(X, \mathcal{M}, \mu)$

(i) 对非负简单函数 $\varphi = \sum_{j=1}^{N} c_k \chi_{E_k}$（标准表示）

$$\int_X \varphi \, d\mu \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(E_k)$$

(ii) 对 $f \in L^+(X)$

$$\int_X f \, d\mu \overset{\text{def}}{=} \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu : \varphi \text{ simple}, 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

称为 f 在 X 上关于 μ 的积分。

(iii) 对 $f : X \to [-\infty, +\infty]$ 可测，如果 $\int_X f^+ d\mu$

和 $\int_X f^- d\mu$ 中至少有一个有限，则

$$\int_X f \, d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

如果 $\int_X f^+ d\mu$，$\int_X f^- d\mu$ 均有限，则称 f

在 X 上可积。

$$L^1(X, \mu) \overset{\text{def}}{=} \{ X \text{ 上可积函数} \}$$

(iv) 設 $E \in \mathcal{M}$, f 在 E 上可測, 令

$$\int_E f \, d\mu \overset{\text{def}}{=} \int_X f \cdot \chi_E \, d\mu$$

prop (線性)

$\forall f, g \in L^1(X, \mu)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu + \beta \int_X g \, d\mu.$$

<u>Thm</u> (MCT)

設 $L^+(X) \ni f_k \nearrow f$, 則

$$\lim_{k \to \infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

<u>Thm</u> (Fatou)

對 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^+(X)$

$$\int_X \liminf_{k \to \infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k \to \infty} \int_X f_k \, d\mu$$

Thm (DCT)

设 f_k, $k=1,2,\cdots$ 可测, $f_k \to f$ a.e.

如果 $\exists\, g \in L^1(X,\mu)$, s.t.

$$|f_k| \le g \quad \text{a.e.} \quad \forall k,$$

则

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

例: $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$

其中 μ 是计数测度, i.e.

$$\mu(E) = \begin{cases} \# E & \text{if } \# E < \infty \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

对函数 $f: \mathbb{N} \to [0,+\infty)$

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

注意 $f \chi_{\{k\}} = f(k) \chi_{\{k\}}$ simple

$$\int_{\mathbb{N}} f \chi_{\{k\}} \, d\mu = f(k)\, \mu(\{k\}) = f(k)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{k\}} f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

$$\left(f \in L^1(\mathbb{N}, \mu) \iff \sum_{k=1}^{\infty} |f(k)| < \infty \right)$$

例. $(X, 2^X, \delta_a)$

$\uparrow$

Dirac 测度

$\forall f : X \to \mathbb{R},$

$$\int_X f \, d\mu = f(a)$$

$$\int_X f \, d\mu = \int_{\{a\}} f \, d\mu + \int_{\underbrace{X \setminus \{a\}}_{\delta_a\text{-零测}}} f \, d\mu$$

$$= f(a)\, \mu(\{a\})$$

$$= f(a)$$