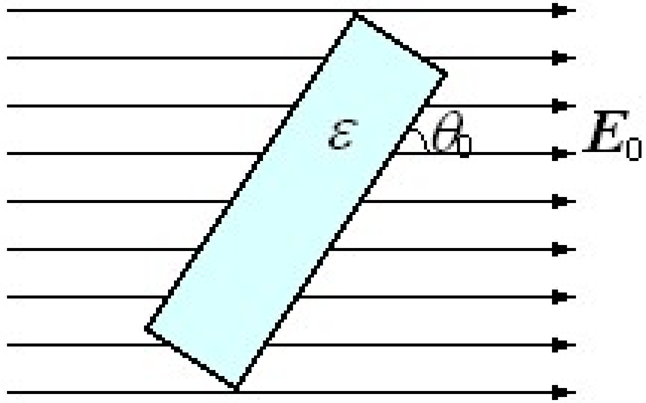
思考题讨论

- 思考题2.5 举例说明一般情形下$\boldsymbol{E}'$与$\boldsymbol{E}_0$大致相反，而非严格反平行。

- 思考题2.6 找一个类于“电滞回线”的例子。

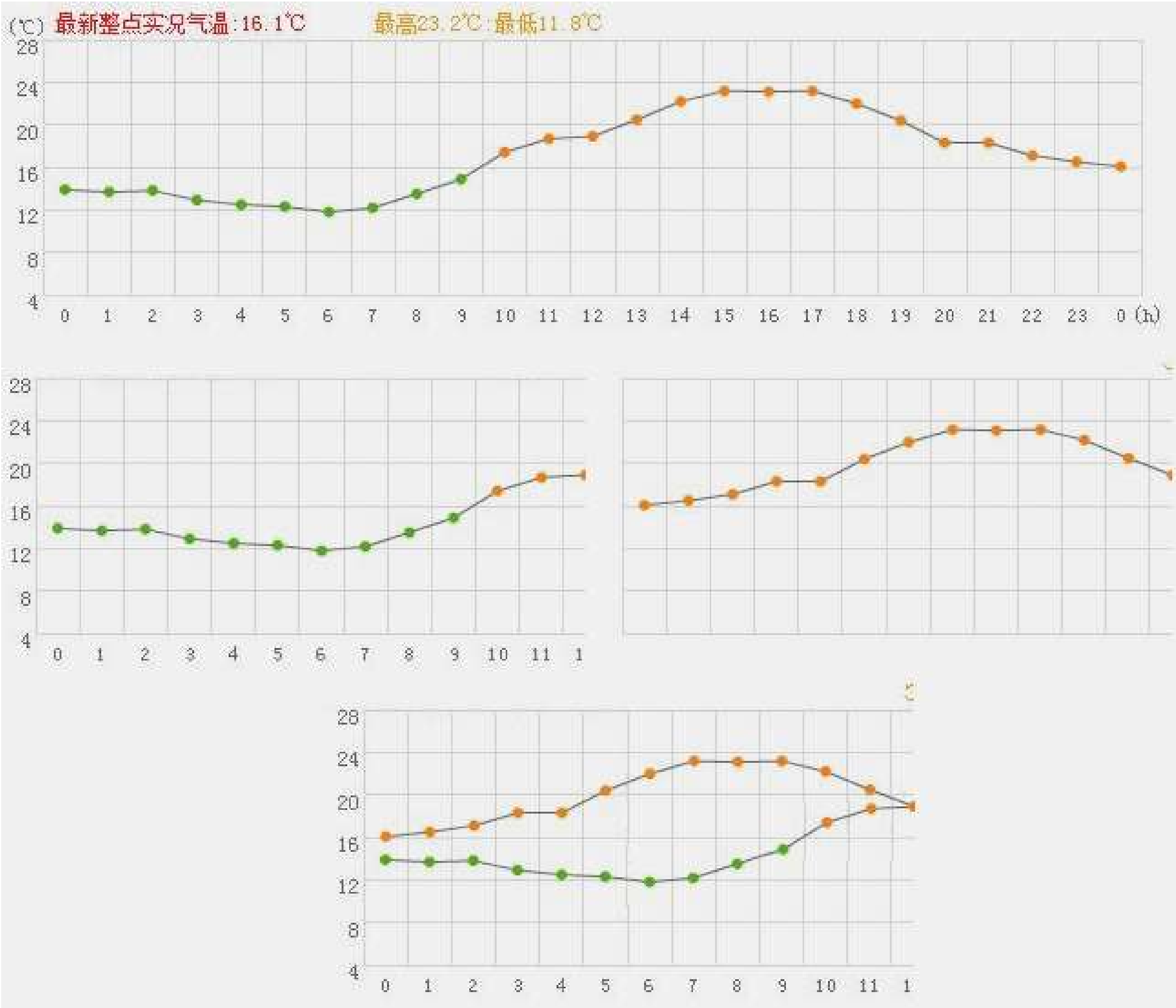
- 思考题2.5

例：无限大均匀介质平板斜置于均匀电场中



- 思考题2.6

例：一天中气温与太阳角度的关系。


(℃) 最新整点实况气温:16.1℃
最高23.2℃;最低11.8℃
28 24 20 16 12 8 4
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 0 (h)

第九讲 2022-03-22

第2章 静电场中的导体和电介质

§ 2.1 物质的电性质

§ 2.2 静电场中的导体

§ 2.3 电容与电容器

§ 2.4 电介质

§ 2.5 极化强度矢量***P***

§ 2.6 电介质中静电场的基本定理

§ 2.7 边值关系和唯一性定理

§ 2.8 电像法

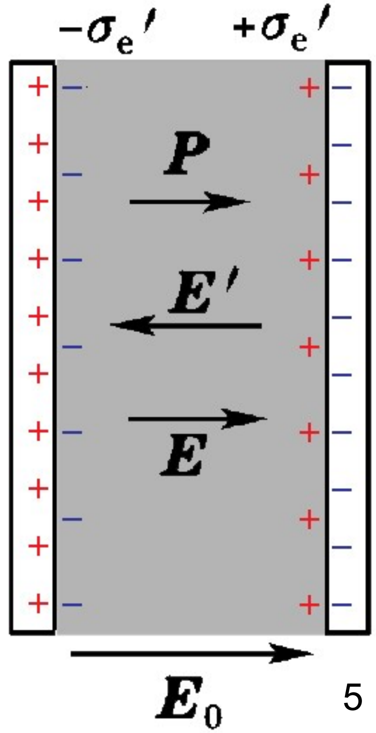
[例2.5] 平行板电容器间充满极化率为χ_e的各向同性均匀介质，极板自由电荷面密度为$\pm\sigma_{e0}$，求介质的σ'_e、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{E}$和电容C。

[解] $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{E}_0$和$\boldsymbol{E}$均与极板垂直，

$$E=E_0+E',\quad E_0=\sigma_{e0}/\varepsilon_0,\quad E'=-\sigma'_e/\varepsilon_0=-P/\varepsilon_0=-\chi_e E$$

解得 $E=E_0/(1+\chi_e)=\sigma_{e0}/[(1+\chi_e)\varepsilon_0]$

$$\sigma'_e=P=\chi_e\varepsilon_0 E=\frac{\chi_e\sigma_{e0}}{1+\chi_e}$$



$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\sigma_{e0}S}{Ed}=\frac{(1+\chi_e)\varepsilon_0 S}{d}=(1+\chi_e)C_0=\varepsilon_r C_0$$

其中相对介电常数$\varepsilon_r=1+\chi_e$。

§ 2.6 电介质中静电场的基本定理

1. 高斯定理

电介质的存在只是增加了新的场源 (极化电荷)，并未改变电场的基本特性。如：自由电荷与极化电荷均按库仑定律激发电场，因而都满足高斯定理

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{0内}, \quad \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q'_{内}.$$

由叠加原理，有电介质时的总电场强度$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'$

$$\therefore \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\sum q_{0内} + \sum q'_{内}\right),$$

又 $\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\sum q'_{内} \rightarrow \oint\!\!\!\oint_S (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q_{0内}$

定义电位移矢量

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P},$$

于是

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum q_{0内}$$

这就是电介质中的高斯定理。

对各向同性介质，

$$\boldsymbol{P}=\chi_\mathrm{e}\varepsilon_0\boldsymbol{E}\rightarrow$$

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\chi_\mathrm{e}\varepsilon_0\boldsymbol{E}=(1+\chi_\mathrm{e})\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0\boldsymbol{E}=\varepsilon\boldsymbol{E}$$

其中ε_r和$\varepsilon=\varepsilon_\mathrm{r}\varepsilon_0$分别为电介质的相对和绝对介电常数。

如果令ρ_{e0}为自由电荷密度， ρ_e'为极化电荷密度，ρ_e为总电荷密度，则

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho_e \,\mathrm{d}V = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V (\rho_{e0}+\rho_e')\,\mathrm{d}V.$$

由前面结果，

$$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \rho_{e0}\,\mathrm{d}V = Q_0$$

上述两式的微分表达式分别是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_{e0}+\rho_e'),\quad \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \rho_{e0}$$

2. 环路定理

- 静电平衡时，自由电荷和极化电荷产生的电场都是静电场，均满足静电场环路定理

$$\oint_L \boldsymbol{E}_0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0, \qquad \oint_L \boldsymbol{E}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

- 所以总电场仍满足环路定理，是保守场

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

利用斯托克斯定理

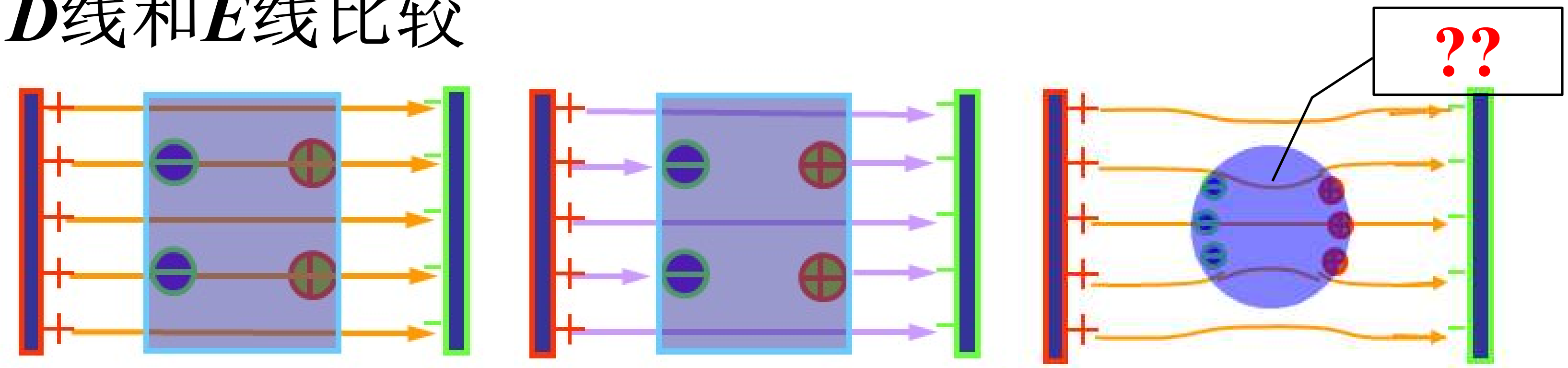
$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\rightarrow \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = 0.$$

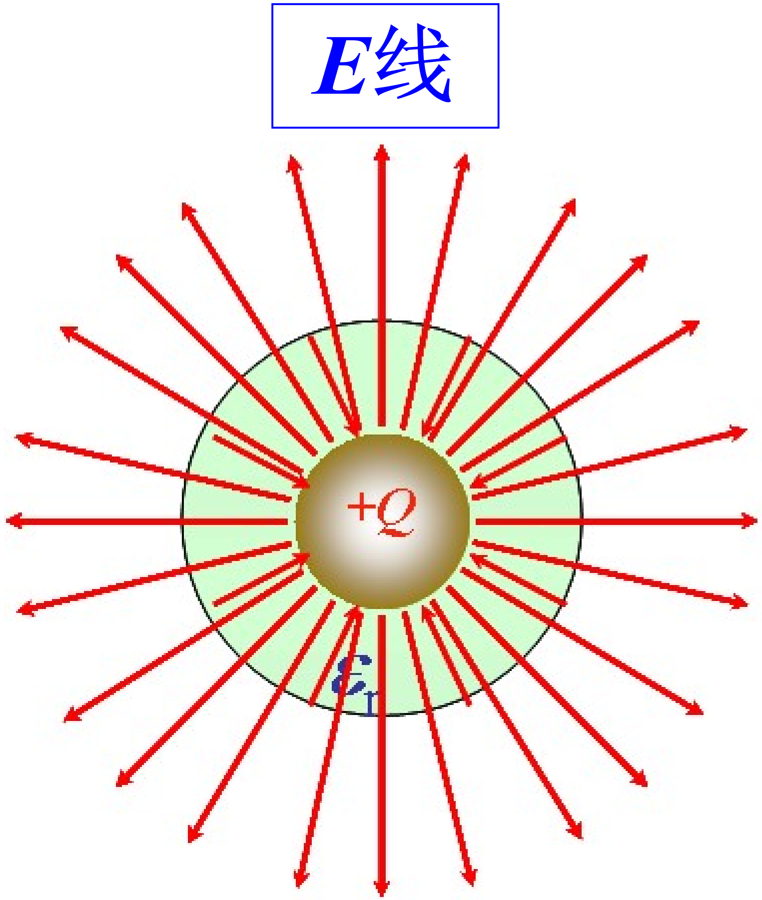
3. 电位移线

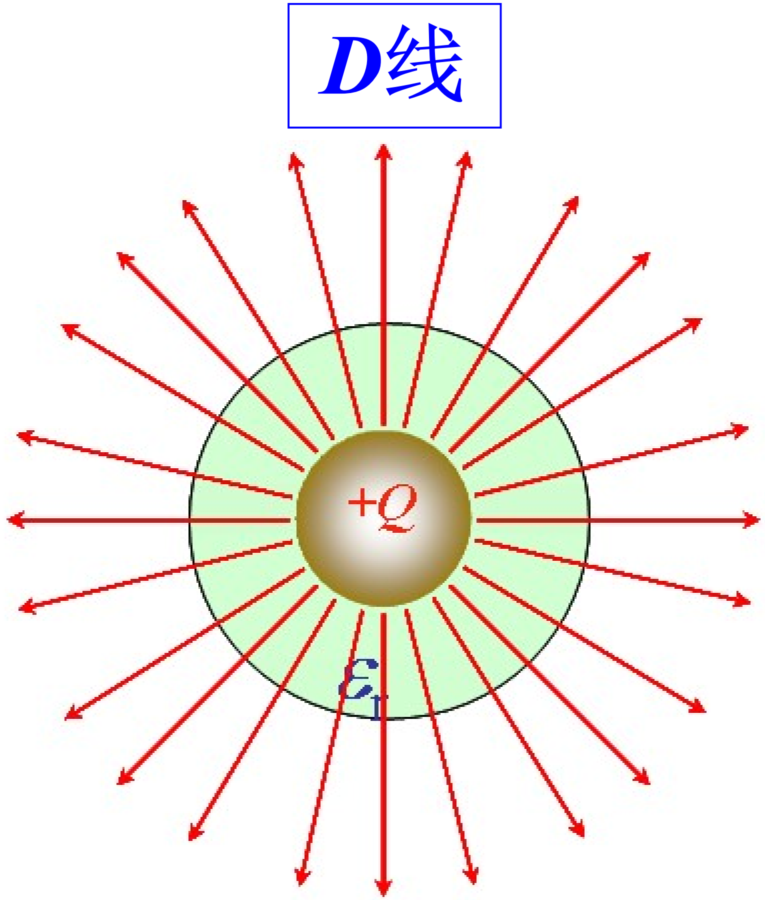
仿照电场线的画法，作电位移线。

- 线上每点的切线方向就是该点*D*的方向
- 单位截面内的*D*线根数表示该点*D*的大小
- *D*线起、止于正负自由电荷
- 各向同性介质：*D*//*E*→*D*线由高电势指向低电势，*D*线不闭合
- *D*线和*E*线比较



介质板内外*D*线　　介质板内外*E*线　　介质球内外*D*线





E线根数与自由、束缚电荷均有关

D线根数只与自由电荷有关

D是否仅与自由电荷有关，与极化电荷无关？

4. 举例应用

证明各向同性均匀介质内ρ_{e0}=0处必有ρ_e'=0。

[证] $\Delta q'_{内} = -\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$,

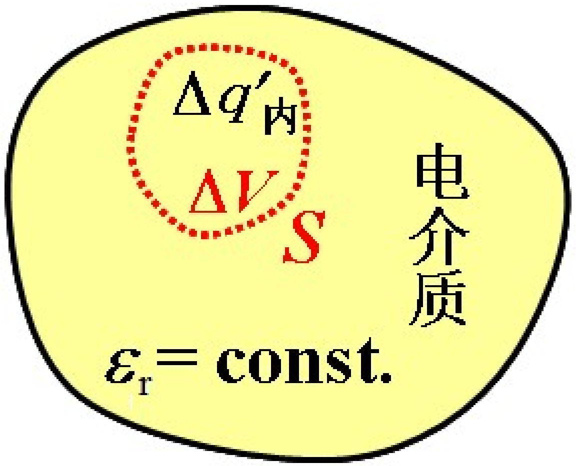
$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon} = (1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\boldsymbol{D},$$

$$\Delta q'_{内} = -\oint\!\!\!\oint_S (1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1)\cdot \Delta q_{0内},$$

$$\rho'_e = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q'_{内}}{\Delta V} = (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1)\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q_{0内}}{\Delta V}$$

$$= (\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}-1)\rho_{e0},$$

$$\therefore\ \ \rho_{e0} = 0 \to \rho'_e = 0.$$



[例2.6] 导体球半径R_1，荷电Q_0，被半径为R_2的均匀介质球壳ε包围。求电场、极化电荷分布和导体球电势。

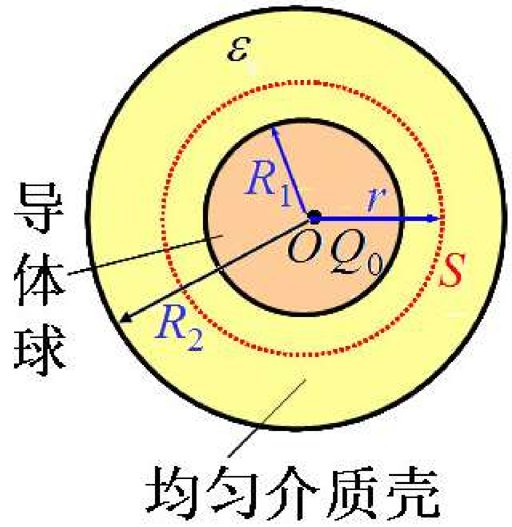
[解] 一维对称问题，自球心向外，分三个区讨论。

1) 利用高斯定理 $\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = D4\pi r^2 = Q_0$ 可得，

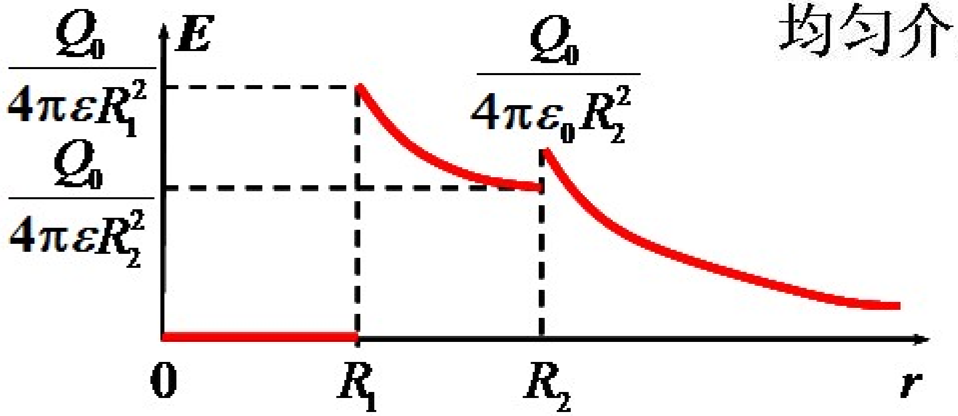
$$\boldsymbol{D}=0,\qquad \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}=0\qquad (r<R_1)$$

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q_0\boldsymbol{r}}{4\pi r^3},\qquad \boldsymbol{E}_{\mathrm{II}}=\frac{Q_0\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon r^3}\qquad (R_1\le r\le R_2)$$

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q_0\boldsymbol{r}}{4\pi r^3},\qquad \boldsymbol{E}_{\mathrm{III}}=\frac{Q_0\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\qquad (r>R_2)$$



为什么曲线在R_2处不连续？



2) 极化电荷的分布

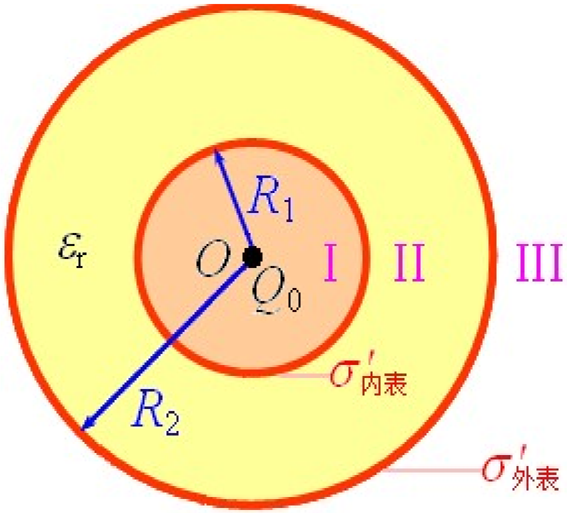
在介质内部，ε_r=常数，$\rho_{e0}=0 \rightarrow \rho_e'=0$

$$\boldsymbol{P}=\chi_e\varepsilon_0\boldsymbol{E}=(\varepsilon-\varepsilon_0)Q_0\boldsymbol{r}/4\pi\varepsilon r^3,$$

$$\sigma'_{内表}=P_n\Big|_{r=R_1}=-(\varepsilon-\varepsilon_0)Q_0/4\pi\varepsilon R_1^2$$

$$=-(\varepsilon-\varepsilon_0)\sigma_{e0}/\varepsilon,$$

$$\sigma'_{外表}=P_n\Big|_{r=R_2}=(\varepsilon-\varepsilon_0)Q_0/4\pi\varepsilon R_2^2.$$



3) 导体球的电势

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}_{\mathrm{II}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\int_{R_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_{\mathrm{III}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

§2.7 边值关系和唯一性定理

1. 边值关系

- 介质-介质界面处、介质-导体界面处的介电性质有突变，导致界面存在极化电荷，由此引起界面处电场的突变 (见例2.6) 。
- 利用静电场基本方程（高斯、环路）可以得到界面两边电场改变的一般规律，即边值关系。
- 边值关系对求解全空间的静电场十分重要，因为：虽然求解静电场的基本方程是微分方程，但在界面处该方程失效。

可忽略短边对环量的贡献

1) 电场强度

在介质交界面取一狭长的小矩形环路 ($\Delta h\to 0$):

$$\int_{矩形}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{E}_1\cdot(-\Delta l\boldsymbol{e}_t)+\boldsymbol{E}_2\cdot(\Delta l\boldsymbol{e}_t)=(E_{2t}-E_{1t})\Delta l\equiv 0,$$

$$\therefore\ E_{2t}=E_{1t}$$

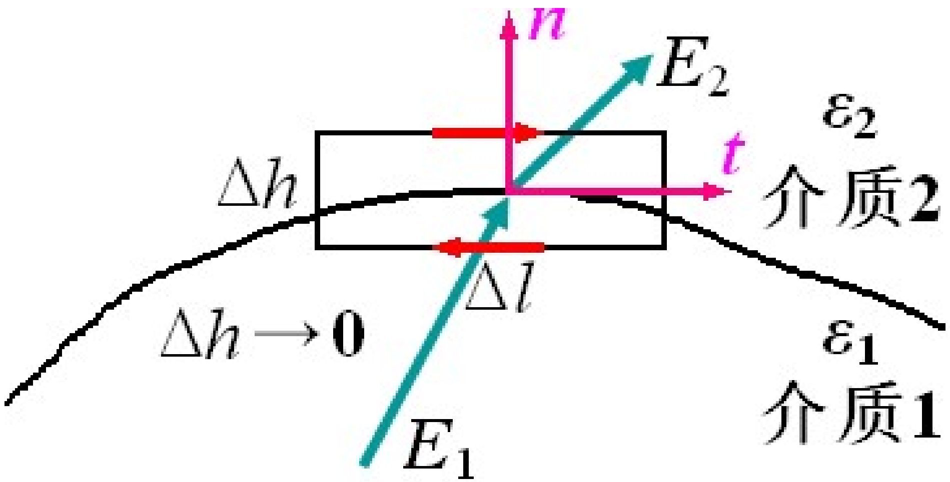
即界面两边电场强度的切向分量总相等。矢量式为

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0.$$

推论

$$\because\quad D_{1t}=\varepsilon_1E_{1t}，\ D_{2t}=\varepsilon_2E_{2t}$$

$$\therefore\ D_{1t}/D_{2t}=\varepsilon_1/\varepsilon_2$$



2) 电位移矢量

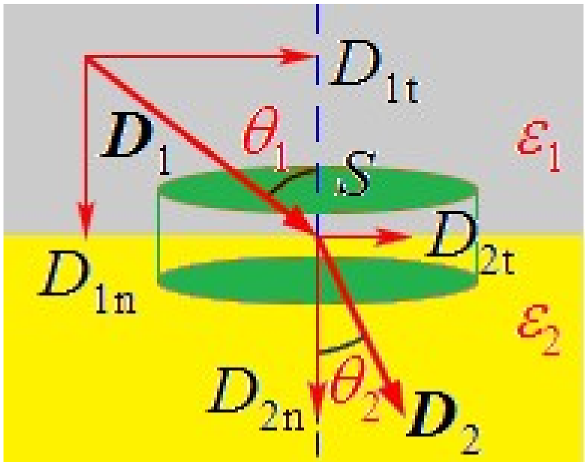
跨界面作扁柱形 (忽略侧面通量) 高斯面，由高斯定理

$$\oiint_{\text{柱面}} \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}_2\cdot(\Delta S\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{D}_1\cdot(-\Delta S\boldsymbol{n})$$

$$= (D_{2n} - D_{1n})\Delta S = \sigma_{e0}\Delta S,$$

$$\therefore\ D_{2n}-D_{1n}=\sigma_{e0},\ \text{or}\ (\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)\cdot\boldsymbol{n}=\sigma_{e0}$$

这里$\boldsymbol{n}$方向是$\mathbf{1\rightarrow 2}$。



$$\because\quad (\boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{P}_2)\cdot\boldsymbol{n} = \sigma'_e$$

$$\therefore (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{n} = \sigma_e/\varepsilon_0$$

σ_e为总面电荷密度

通常介质-介质界面上$\sigma_{e0}=0\rightarrow D_{2n}=D_{1n}$ or $(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)\cdot\boldsymbol{n}=0.$

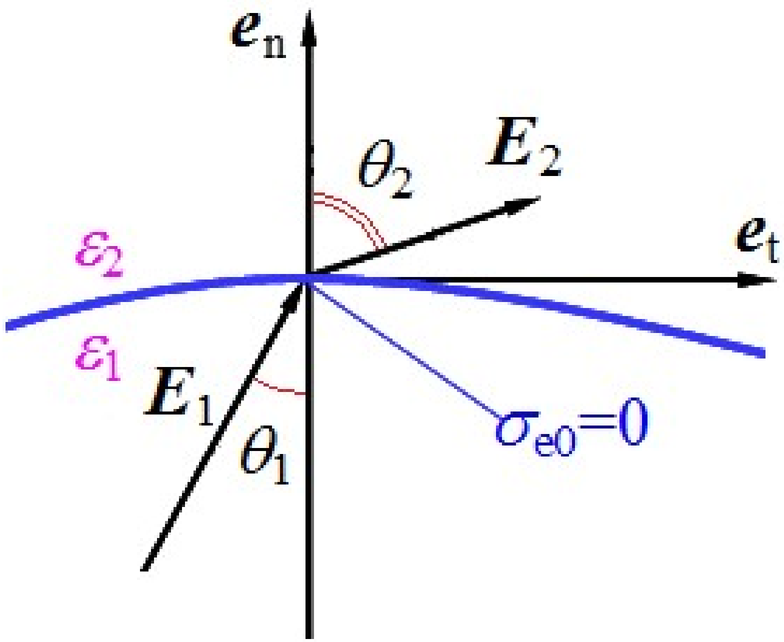
推论 电场线在界面上的折射

若 $\sigma_{e0}=0$， $D_{1n}=D_{2n}$，

即 $\varepsilon_1 E_{1n}=\varepsilon_2 E_{2n}$， 又 $E_{1t}=E_{2t}$，

$$\rightarrow \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2},$$

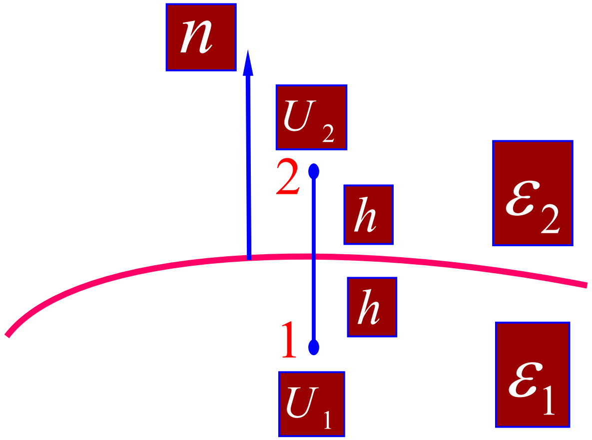
$$\rightarrow \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$



E 线“折射”：电场线在穿过介质界面时会产生类似光线折射的现象。

若 $\varepsilon_1<\varepsilon_2$，则 $\theta_1<\theta_2$

3) 电势



- 在分界面两侧取距界面为h的1, 2 两点
- 其连线//法线，两点电势分别为U_1和U_2
- $h\to 0$时，两点电势差为0，即

$$U_1 - U_2 = \int_1^2 \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = E_{1n}h + E_{2n}h \xrightarrow{h\to 0} 0$$

$$\therefore\ U_1 = U_2$$

介质界面两侧电势总是连续的。

介质界面边值关系小结

- ***E***的切向分量连续

$$E_{1t}=E_{2t}$$

- ***D***的法向分量跃变 $D_{2n}-D_{1n}=\sigma_{e0}$

  若界面无自由荷，则法向分量连续

$$D_{1n}=D_{2n}$$

- 电势连续

$$U_1=U_2$$

- 极化强度矢量和极化面电荷

$$\sigma'_{\mathrm{e}}=P_{1n}-P_{2n}$$

问题：U连续与E_t连续之等价性？

2. 唯一性定理

- 典型静电场问题：给定一组电荷的空间分布，在满足一定边界条件下求解空间电场分布
- 常规思路：库仑定律+叠加原理→各点电场强度***E***
- 问题：导体和介质上的电荷分布与空间电场相互影响，如何同时求解？
- 对策："不择手段"（褒义词：不拘一格），得到一组解，再由某种正统理论保证其唯一性，则大功告成。这就是实用主义者眼中的唯一性定理。
- 理论价值：边界决定内在，反映电磁学的质朴性。

唯一性定理表述

- 给定电场空间边界面S上的电势U_S、S内的导体和介质分布 (介电常数确知)，并给定下列两条件之一：

➢ 每个导体的电势U_i (i=1,2, …为导体编号)

➢ 每个导体上的总电量q_i

则S内满足高斯、环路定理的静电场解是唯一的。

- S可以是有限闭合曲面，也可以趋向无穷远。
- 该定理表明：边界条件确定，则静电场唯一确定。
- 附加条件 (仅对本证法必需，一般性证明见下册)：

~~S是零等势面~~/介质各向同性/仅导体有自由电荷

唯一性定理证明

- 设存在两组解$\{U_1, \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{D}_1\}$和$\{U_2, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{D}_2\}$满足边界条件和附加条件。
- 由于静电场基本方程为线性方程，所以$\{-U_2, -\boldsymbol{E}_2, -\boldsymbol{D}_2\}$必然满足负的边界条件，即原边界条件中所有量变号而得到的边界条件。
- 由叠加原理，$\{U_1-U_2, \boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2\}$满足两种边界条件叠加后的零边界条件，例如$U_S= U_{S1}-U_{S2} =0$。
- 只要能证明零边界条件下只存在零解，即$U=0$, $\boldsymbol{E}=0$, $\boldsymbol{D}=0$, 则$U_1=U_2$, $\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{D}_2$，两组解相同，唯一性定理成立。

1) 给定每个导体电势U_i的情形

- 新边界条件是U_S=0，且每个导体的电势为零。
- 由于附加条件要求导体之外的区域无自由电荷，所以***D***线只可能起、止于导体和*S*边界。
- 但由于真空和各向同性介质中***D***线//***E***线，电势沿***D***线必然下降，所以***D***线不可能起止于电势同为零的导体和*S*边界。
- 唯一结局：*S*内无***D***线，***D***=0，进而***E***=0，*U*=0。

作业、预习及思考题

- 作业：**2.12~2.18**
- 预习：**2.7** 余下部分，**2.8** 电像法

下次课讨论

- 思考题2.7 如何理解边界上U连续与$\boldsymbol{E}$的切向分量连续的等价性？