1. 求证：在 $C[a.b]$ 中不可能引进一种内积 $(\cdot.\cdot)$ 使其满足 $(f.f)^{\frac{1}{2}}=\max\limits_{x\in[a.b]}|f(x)|$ $(\forall f\in C[a.b])$

证：取 $f(x)=1$．$g(x)=\frac{x-a}{b-a}$．则 $\|f\|=\|g\|=1$

$f(x)+g(x)=1+\frac{x-a}{b-a}$，$f(x)-g(x)=1-\frac{x-a}{b-a}$

$\|f(x)+g(x)\|=2$ $\|f(x)-g(x)\|=1$

$\|f(x)+g(x)\|^2+\|f(x)-g(x)\|^2=5$

$2(\|f\|^2+\|g\|^2)=4$

故 $\|f(x)+g(x)\|^2+\|f(x)-g(x)\|^2\neq 2(\|f\|^2+\|g\|^2)$ → 平行四边形等式不成立

2. 设 M 是 $C[a.b]$ 中的有界集．求证集合 $\tilde{M}=\{F(x)=\int_a^x f(t)dt \mid f\in M\}$ 是列紧集

设 $E=\{F(x)=\int_a^x f(t)dt \mid f\in M\}$ $\forall f\in M$ $|f(t)|\leq M_0$ $(\forall t\in[a.b])$

$|F(x)|=|\int_a^x f(t)dt|\leq \int_a^b |f(t)|dt\leq M_0(b-a)$ $(\forall F\subset E)$ ⇒ E 一致有界

$|F(x_2)-F(x_1)|=|\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt|\leq |\int_{x_1}^{x_2}|f(t)|dt|\leq M_0|x_2-x_1|$

$\forall\varepsilon>0$ 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M_0}$ 当 $|x_2-x_1|<\delta$ 时 ⇒ $|F(x_2)-F(x_1)|\leq\varepsilon$ $(\forall F\subset E)$ ⇒ E 等度连续

由A-A定理可得（上次习题课）

3. 设 $(X.\rho)$ 为距离空间．M 是 X 中的列紧集．若映射 $f: X\to M$ 满足 $\rho(f(x).f(y))<\rho(x.y)$ $(\forall x.y\in X.x\neq y)$

求证 f 在 X 上存在唯一的不动点．

证：记 $d=\inf\{\rho(x.f(x))\mid x\in\bar{M}\}$．先证存在 $x_0\in\bar{M}$．使得 $\rho(x_0.f(x_0))=d$ (1)

从下确界的定义出发 $\forall n\in N$ $\exists x_n\in M$ s.t.

$d\leq\rho(x_n.f(x_n))<d+\frac{1}{n}$

又因为 M 列紧．故 $\exists x_{n_k}\to x_0$ 将上面不等式中的 n 改为 n_k 即 $d\leq\rho(x_{n_k}.f(x_{n_k}))<d+\frac{1}{n_k}$ 令 $k\to\infty$

(1) 得证

再证 $d=0$ 反证：若 $d>0$．则有 $d\leq\rho(f(x_0).f(f(x_0)))<\rho(x_0.f(x_0))=d$ 矛盾

4. (14.1.7) $\mathbb{N}$ 的有限子集构成的集合是可数集合还是不可数集合？

证：$X=\{M: M\in N\ M有限\}$ $g: X\to N$ $\{a_1\cdots a_n\}\to(p_1)^{a_1}\cdots(p_n)^{a_n}$ $p_1<\cdots<p_n$ 为素数

由算术基本定理 g 为单射 ⇒ X 可数

5. 有限个可数集合直积为可数集（14.1.4性质）

可数个可数集合直积是不可数集：（$2^A:=\{X\mid X\subset A\}$ 2^N 是不可数集合（定理14.1.6））

（直积定义：$\prod\limits_{n=1}^{\infty}A_n=A_1\times A_2\times\cdots=\{(x_1\ x_2\cdots): x_n\in A_n. n\in N\}$）

A_k 可数集 则 $X=\prod\limits_{k=1}^{\infty}\{a_k^1\ a_k^2\cdots a_k^n\}\subseteq\prod\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ $\{a_k^1\cdots a_k^n\}\in A_k$

$g: X\to 2^N$ $(x_1\cdots x_n)\to\{k\in N\mid x_k=a_k\}$

g 一一映射 ⇒ X 不可数

6.(14.2.17) Hardy-Landau 不等式: $p>1$ $a_j>0$ $j=1,2\cdots$ 证明 $\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{m} a_n^p$

记 $A_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$

$\delta_n = \frac{A_n}{n} = \frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$

(Young 不等式: a,b 非负实数, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$)

等号成立 $\Leftrightarrow a^p = b^q$

$a_n = A_n - A_{n-1} = n\delta_n - (n-1)\delta_{n-1}$

$\Rightarrow \delta_n^p - \frac{p}{p-1}\delta_n^{p-1}a_n = \delta_n^p - \frac{p}{p-1}\delta_n^{p-1}\{n\delta_n-(n-1)\delta_{n-1}\}$

$= \delta_n^p\left(1-\frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)p}{p-1}\delta_n^{p-1}\delta_{n-1}$

$= \delta_n^p\left(1-\frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)p}{p-1}(\delta_n^p)^{\frac{1}{q}}(\delta_{n-1}^p)^{\frac{1}{p}}$ (1)

由Young不等式 $\Rightarrow (\delta_n^p)^{1/q}(\delta_{n-1}^p)^{1/p} \le \frac{1}{q}\delta_n^p + \frac{1}{p}\delta_{n-1}^p$

$(1) \le \delta_n^p\left(1-\frac{np}{p-1}\right) + \frac{n-1}{p-1}\{(p-1)\delta_n^p + \delta_{n-1}^p\}$

$= \frac{1}{p-1}\{(n-1)\delta_{n-1}^p - n\delta_n^p\}$

(Hölder不等式: $a_i>0$ $b_i>0$ $(i=1,2\cdots n)$ $p,q>$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则 $\sum_{i=1}^n a_ib_i \le (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

求和: $\sum_{n=1}^N \delta_n^p - \left(\frac{p}{p-1}\right)\sum_{n=1}^N \delta_n^{p-1}a_n \le -\frac{N\delta_N^p}{p-1} \le 0$

(积分形式: $\int_0^a \left(\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^a f(x)^p dx$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^N \delta_n^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)\sum_{n=1}^N \delta_n^{p-1}a_n$ (2)

由 Hölder 不等式:

$\sum_{n=1}^N \delta_n^{p-1}a_n \le (\sum_{n=1}^N \delta_n^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}}(\sum_{n=1}^N a_n^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{n=1}^N \delta_n^p)^{\frac{1}{q}}(\sum_{n=1}^N a_n^p)^{\frac{1}{p}}$

$\overset{+(2)}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^N \delta_n^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)(\sum_{n=1}^N \delta_n^p)^{1/q}(\sum_{n=1}^N a_n^p)^{1/p}$

化简 $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ $\sum_{n=1}^N \delta_n^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^N a_n^p$ $N\to\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \delta_n^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^\infty a_n^p$

7. $[0,1]$ 上的多项式全体按距离 $\rho(p,q)=\int_0^1 |p(x)-q(x)|dx$ 是否完备? (16.2.3)

不完备:

证: 取 $P_m(x)=\sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}$

$P_m(x)=\sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}$ $P_{m+p}(x)=\sum_{k=0}^{m+p}\frac{x^k}{k!}$ $\rho(P_m(x),P_{m+p}(x)) = \int_0^1 \sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{x^k}{k!}dx = \sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{1}{(k+1)!} \le \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ (1)

$(1) \le \sum_{k=m+1}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{m+1} \to 0$ $(m\to\infty, \forall p\in N)$

又 $\rho(P_m(x),e^x) = \int_0^1 \sum_{k=m+1}^\infty \frac{x^k}{k!}dx = \sum_{k=m+1}^\infty \frac{1}{(k+1)!} \le \sum_{k=m+1}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{m+1} \to 0$ $(n\to\infty)$

即 $P_m(x)\to e^x$ e^x 不为多项式

(完备化空间为 $(C[0,1])$

8. (X,ρ) (Y,r) 是距离空间. $T: X\to Y$ 称为开映射: T 映开集为开集

开映射定理: 设 X Y 为 Banach 空间. 若 $T\in \mathcal{L}(X,Y)$ 为一个满射, 则 T 为开映射

$\mathcal{L}(X,Y)$ 表示一切由 X 到 Y 的有界线性算子全体 $\Leftrightarrow$ 连续 (赋范空间) (证略)

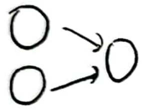
书定理 P34 $(1°)\Leftrightarrow(2°)\Leftrightarrow(3°)\Leftrightarrow(4°)$

f 连续映射 $\Leftrightarrow$ 开集原像为开集　　　连续映射不一定把开集 $\to$ 开集

9. (15.1.8) f 在 $\mathbb{R}$ 上连续　$f(\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} x_n)=\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x_n)$?

不一定　反例: $x_n=\begin{cases}0 & n\text{为奇}\\ 1 & n\text{为偶}\end{cases}$　$f(x)=-x$　则 $f(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n)=-1 \neq 0=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f(x_n)$

10. (16.3.11) $\exists$ 连续满射 $f: M\to N$　N 连通　M 不连通

f:


11. (16.3.17) $\exists$ 连续函数 $f: M\to N$ 不把 Cauchy 列 $\to$ Cauchy 列

$f=\frac{1}{x}$　$\{\frac{1}{n}\}$ $n\to\infty$ 极限 0　$\{n\}$ 无极限

12. (17.1.2)

给定 $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 定义 A 的范数 $\|A\|$ 为 $\|A\|=\sup\{\frac{|Ax|}{|x|} \mid x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0\}$ ($\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ Euclid 空间线性映

由定义有 $|Ax|\leq\|A\|\cdot|x|$　$\forall x\in\mathbb{R}^n$ 且 $\|A\|=\sup\limits_{x\neq 0}|A(\frac{x}{|x|})|=\sup\limits_{|x|=1}|Ax|$

题目: 设 X 为 Banach 空间 $f\in\mathcal{L}(X,\mathbb{R}^1)$ 证明 $\sup\limits_{\|x\|<\delta} f(x)=\delta\|f\|$ $(\forall\delta>0)$

证: 先证 $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|<1} f(x)$

一方面 对 $\forall\|x\|<1$ $x\neq 0$ 由 $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1} f(x)$ (易验证)

$f(x)=\|x\|f(\frac{x}{\|x\|})\leq\|x\|\sup\limits_{\|y\|=1} f(y)=\|x\|\|f\|<\|f\|$　当 $x=0$ 时 $f(\theta)=0<\|f\|\Rightarrow\sup\limits_{\|x\|<1} f(x)\leq\|f\|$

另一方面 对 $\forall\|x\|=1$ $\forall\varepsilon>0$ 注意到 $\|\frac{x}{1+\varepsilon}\|<1$ 有 $f(x)=(1+\varepsilon)f(\frac{x}{1+\varepsilon})\leq(1+\varepsilon)\sup\limits_{\|x\|<1} f(x)$

$\therefore\|f\|=\sup\limits_{\|x\|=1} f(x)\leq(1+\varepsilon)\sup\limits_{\|x\|<1} f(x)$　两边令 $\varepsilon\to 0$ 取极限 $\Rightarrow\|f\|\leq\sup\limits_{\|x\|<1} f(x)$

$\Rightarrow\|f\|=\sup\limits_{\|x\|<1} f(x)$

对 $\forall\delta>0$ 有　$\delta\|f\|=\delta\sup\limits_{\|x\|<1} f(x)=\sup\limits_{\|x\|<1}\delta f(x)=\sup\limits_{\|x\|<1} f(\delta x)\xlongequal{y=\delta x}\sup\limits_{\|y\|<\delta} f(y)$