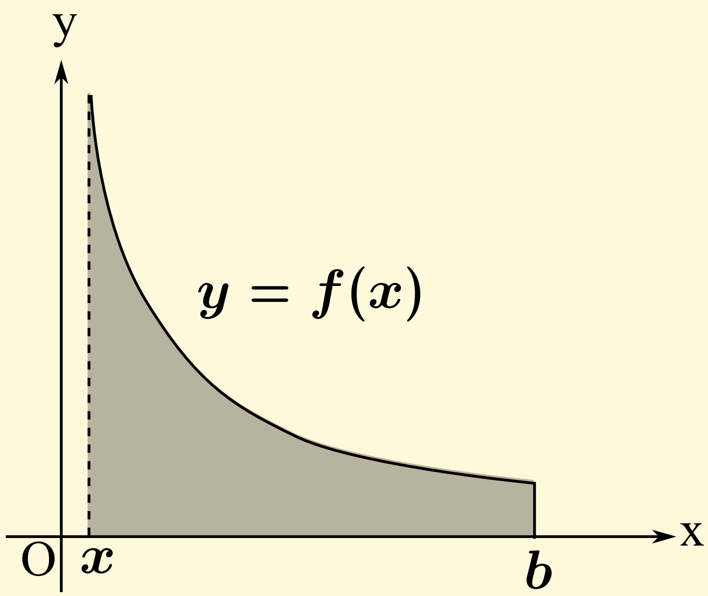
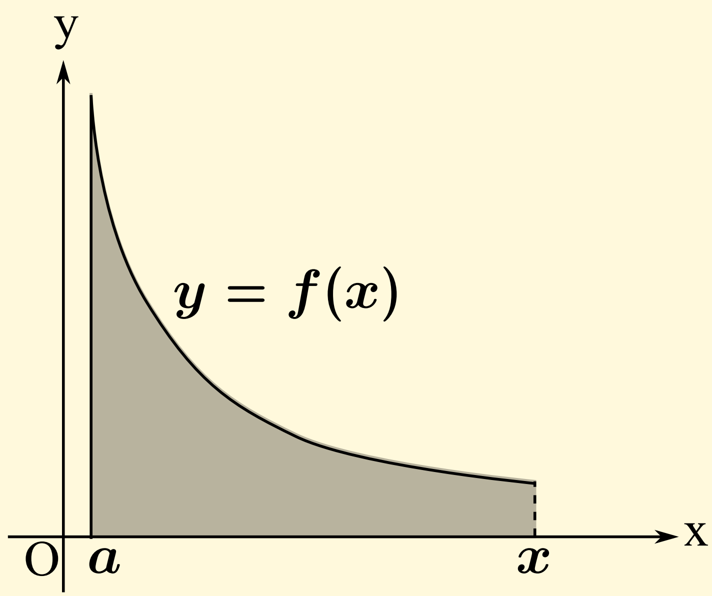
§5.4 广义积分

Riemann 意义下的积分有两个限制, 其一是积分区间有限 (否则就不能保证当分割点越来越多时, 分割的宽度趋于零), 其二是被积函数有界. 但积分的几何意义是面积, 有时不满足这两个限制也可以考虑面积. 如果要突破这两个限制, 必须借助最基本的极限方法, 考虑 Riemann 积分的两类极限. 由此引出两类所谓的“广义积分”, 而 Riemann 积分有时则相应地称为常义积分.





5.4.1 无穷区间上的积分

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义, 如果 $f(x)$ 在任何一个有限区间 $[a,A]$ 上可积, 而且当 $A\to\infty$ 时, 积分 $\int_a^A f(x)dx=\varphi(A)$ 作为 A 的函数有极限, 则我们将这极限值定义为函数 $f(x)$ 在 (无穷) 区间 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分, 记作 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 即定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx=\lim_{A\to\infty}\varphi(A).$$

这时也称无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 存在 (或收敛). 若上述的极限不存在, 则称此无穷积分不存在 (或发散).

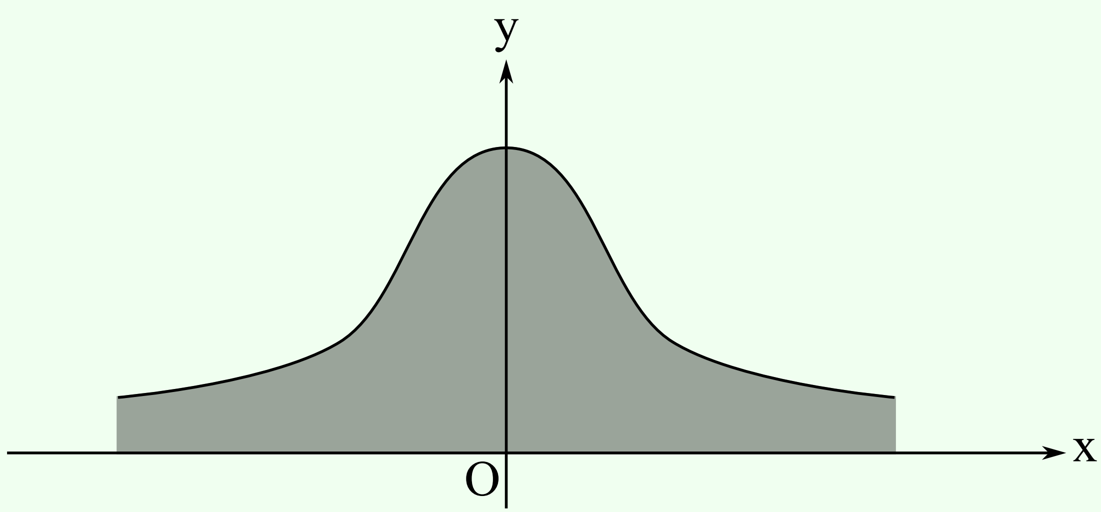
类似地, 我们定义函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,a]$ 上的无穷积分为

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx.$$

而函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的无穷积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$
$$= \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{a} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

其中 a 为任一实数 (通常取 $a = 0$). 换句话说, 当上面等式右边两个无穷积分都收敛时, 我们才称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 (其值就定义为两者的和).



例 1 判别无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 的敛散性, 其中 p 为常数.

解 当 $p\neq 1$ 时, 对任意 $b>1$ 有

$$\int_1^b \frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}\left(b^{1-p}-1\right).$$

因此 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 当 $p>1$ 时, 收敛到 $\frac{1}{p-1}$, 而当 $p<1$ 时发散到 $+\infty$.

当 $p=1$ 时, 有

$$\int_1^b \frac{1}{x^p}dx=\ln b.$$

此时 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 也发散到 $+\infty$.

例 2 判别无穷积分 $\int_a^{+\infty} e^{-x}\,dx$ 的敛散性.

解 对任意 $b > a$ 有

$$\int_a^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_a^b = e^{-a} - e^{-b} \to e^{-a}\ (b \to +\infty).$$

因此这个无穷积分收敛到 e^{-a}.

问题 无穷积分 $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ 是否收敛?

解 利用 $\int_1^A e^{-x^2}\,dx < \int_1^A e^{-x}\,dx < e^{-1}$, 可知该积分收敛.

在现阶段, 判别无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是否收敛, 一般我们首先需对求出积分 $\int_a^A f(x)dx$; 再研究所得结果在 $A \to +\infty$ 时是否有极限 (按这一原则, 若判别了积分收敛, 通常也同时求出了无穷积分的值.) 为了做到这一点, 我们当然应用 Newton–Leibniz 公式: 若求得了 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的一个原函

数 $F(x)$, 则问题就化为了求 $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$; 当这极限存在时, 其值就用 $F(+\infty)$ 表示, 我们的结果可以表述为

定理 1 若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上无穷积分收敛, 且有原函数 $F(x)$, 则有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a).$$

若函数 $f(x)$ 在 $[-\infty, a]$ 上无穷积分收敛, 且有原函数 $F(x)$, 则有

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a) - F(-\infty).$$

若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷积分收敛, 且有原函数 $F(x)$, 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty).$$

例 3 计算无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

解 函数 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数是 $\arctan x$, 因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(+\infty) - \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

例 4 计算无穷积分 $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

解 函数 $\frac{\ln x}{x^2}$ 的一个原函数是 $F(x) = -\frac{\ln x+1}{x}$, 因此

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = F(+\infty) - F(1) = 1.$$

定义 2 (Cauchy **主值**) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 在任意有限区间上可积. 若极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\,dx$$

收敛, 则称无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 在 Cauchy 主值意义下收敛, 简称 Cauchy 主值积分收敛, 上面的极限就是该无穷积分的 Cauchy 主值, 记为

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

若上面的极限不存在, 则称 Cauchy 主值积分发散.

例 5 考虑概率论中的两个无穷积分的敛散性:

$$(1)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx; \qquad (2)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx.$$

解 函数 $\frac{x}{1+x^2}$ 的一个原函数是 $F(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$, 因此这两个无穷积分都是发散的. 但是因为

$$\int_{-A}^{A} \frac{x}{1+x^2}\,dx = F(A) - F(-A) = 0,$$

$$\int_{-A}^{A} \frac{|x|}{1+x^2}\,dx = 2\int_{0}^{A} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 2(F(A) - F(0) = \ln(1+A^2)$$

所以第一个无穷积分的 Cauchy 主值积分收敛到 0, 第二个无穷积分的 Cauchy 主值积分发散到 $+\infty$.

5.4.2 暇积分

对于在有限区间上无界的函数, 我们的做法是将导致函数无界的点 (称为瑕点) 的近旁挖去, 使得函数在剩余的区间上有界. 积分后, 再让挖去的部分的长度趋于零, 如果极限存在, 就定义该极限为无界函数的广义积分, 或称为瑕积分.

定义 3 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有定义, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$. 设对任意 $\varepsilon \in (0, b-a)$, $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon, b]$ 上可积. 若极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

收敛, 则称无界函数的积分或称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛, 上面的极限就是暇积分的值. 若上面的极限不存在, 则称这个暇积分发散.

当 b 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一暇点时, 若对任意 $\varepsilon\in(0,b-a)$, $f(x)$ 在 $[a,b-\varepsilon]$ 上可积, 且极限

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

收敛, 称瑕积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛, 上面的极限就是暇积分的值. 若上面的极限不存在, 则称这个暇积分发散.

若 a,b 都是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的暇点, 但 (a,b) 无暇点, 并且存在 $c\in(a,b)$ 使得两个暇积分

$$\int_a^c f(x)\,dx,\qquad \int_c^b f(x)\,dx$$

都收敛, 则称 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛, 并且

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

定理 2 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上有原函数 $F(x)$, 且在 (a,b) 上可积 (Riemann 可积或广义可积), 则有

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

当 b 为瑕点时, $F(b)$ 应换为 $F(b-)$, 当 a 为瑕点时 $F(a)$ 应换为 $F(a+)$.

例 6 设 $a>0$, 则瑕积分 $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ 当 $p<1$ 时收敛, 当 $p \geqslant 1$ 时发散.

证明

$$\int_\varepsilon^a \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(a^{1-p} - \varepsilon^{1-p}), & p \neq 1; \\ \ln a - \ln \varepsilon, & p = 1 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} +\infty, & p \geqslant 1; \\ \frac{1}{1-p} a^{1-p}, & p < 1 \end{cases} \quad (\varepsilon \to 0^+)$$

例 7 计算积分 $\int_0^1 \ln x\, dx$.

解 函数 $\ln x$ 在区间 $[0,1]$ 上有唯一的暇点 0, 且在 $(0,1]$ 上有原函数 $F(x) = x\ln x - x$, 因此, $\int_0^1 \ln x\, dx = F(1) - F(0+) = -1$.

例 8 讨论积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ 的敛散性.

解 函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $[-1,1]$ 上有暇点 1 和 -1, 且在 $(-1,1)$ 上有原函数 $F(x) = \arcsin x$, 因为,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = F(1) - F(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = F(0) - F(-1) = 0 - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2},$$

所以暇积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ 收敛, 且其值为 π.

5.4.3 广义积分的换元和分部积分

定理 3 (换元) 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续 (b 可以是 $+\infty$), $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta)$ (β 可以是 $+\infty$) 上严格递增连续可导, 且 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. 则积分

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{与} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

有相同的敛散性, 当它们收敛时, 值也相等.

注 要求 $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta)$ 上严格递增是要保证 $t\to\beta$ 等价于 $x\to b$.

换元法可以将广义积分转化为常义积分 (在此情况下, 广义积分的收敛性便一目了然), 也可以将一种形式的广义积分转化为另一种形式的广义积分.

定理 4 (**分部积分**) 设 $u = u(x)$ 和 $v = v(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续可微 (b 可以是 $+\infty$). 若

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx, \quad u(x)v(x)\Big|_a^b \quad 及 \quad \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

这三个中有两个存在有限, 则另一个也存在有限, 且

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

广义积分的分部积分公式形式上与常义积分的分部积分公式一样, 既可用来计算 (已知收敛的) 广义积分, 也能用来证明广义积分收敛.

例 9 设 α 是任一正实数, 求证

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} dx$$

收敛, 并求其值.

解 令 $x = \tan y$, 这里 $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则由换元法则得

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^\alpha y} dy,$$

这是一个常义积分 (被积函数在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上连续, 且在 $y \to \frac{\pi}{2} - 0$ 时有极限), 从而问题中的广义积分收敛. 前面的例子已经计算该积分的值为 $\frac{\pi}{4}$.

例 10 计算无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}\ (a \neq 0)$.

解 不妨设 $a>0$. 作换元 $x = a\tan t,\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. 则 $dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}\,dt$.
所以有

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} &= \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^{3/2}} \cdot \frac{a}{\cos^2 t}\,dt \\
&= \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \\
&= \frac{1}{a^2}.
\end{aligned}$$

例 11 设 $(a > 0)$. 计算无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx$.

解 此积分的收敛性以后再讨论. 现求其值. 设 $b \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx &= \frac{\sin bx}{b} e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} + a \int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{b} e^{-ax} \, dx \\
&= \frac{a}{b} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx \\
&= \frac{a}{b} \left(-\frac{\cos bx}{b} e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} - \frac{a}{b} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \right) \\
&= \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx.
\end{aligned}
$$

由此即得

$$
\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}.
$$

例 12 证明: 瑕积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$ 收敛, 并求其值.

证明 分部积分, 我们得出

$$I=x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx.$$

右边的积分是一个常义积分, 因而瑕积分 I 收敛.

为了计算 I, 令 $x=2t$, 则

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t\,dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt.$$

在上式最后一个 (常义) 积分中作代换 $t=\frac{\pi}{2}-y$, 则得

$$\begin{aligned}I&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin y\,dy\\&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I,\end{aligned}$$

故 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

返回　全屏　关闭　退出