习题课计划

6.3.1　6.4.2.　6.6.3　6.7.1.　7.2.4.　7.3.3.

① 覆盖数 $LC(V) := \min\{\mathrm{card}(I) \mid \bigcup_{i\in I} V_i = V,\ V_i$是$V$的真子空间$\}$

V是域$\mathbb{F}$上有限维空间, $\dim(V)\geq 2$, 则 $LC(V) = \mathrm{card}(\mathbb{F})+1$.

特别地, 当$\mathbb{F}=\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{C}$时 $LC(V)\geq \mathrm{card}(\mathbb{Q}) = \aleph_0$, 即$V$不存在有限覆盖.

pf: step I ($\dim V = 2$), $V = \langle \alpha, \beta\rangle$. 对于 $v\in V$, 若 $v\notin \langle\beta\rangle$, 则 $\exists!\lambda\in K$, s.t. $v\in\langle\alpha+\lambda\beta\rangle$, 即证.

step II (V中超平面的数量 $\geq \mathrm{card}(\mathbb{F})+1$)

因为 $\dim V\geq 2$, 故存在满射 $V \twoheadrightarrow \mathbb{F}^2$, 由 step I, 把$\mathbb{F}^2$中直线拉回$V$中即得.

step III ($LC(V)\geq \mathrm{card}(\mathbb{F})+1$) 假设 $V=\bigcup_{i\in I} V_i$, $\mathrm{card}(I) < \mathrm{card}(\mathbb{F})+1$. 不妨设$V_i$都是超平面.

由 step II 知 $\exists$超平面W, $W\neq V_i$, $i\in I$. 则 $W\cap V_i$ 是 W 的真子空间, 且 $W = \bigcup_{i\in I}(W\cap V_i)$

由归纳法和 step I 得矛盾.

step IV (quotient principle, $LC(V)\leq LC(\mathbb{F}^2)$)

由 step2 的方法很容易看到, 若 $\dim W\leq \dim V$, 则存在满射 $V \xrightarrow{\varphi} W$.

若 $W=\bigcup_{i\in I} W_i$, 则 $V = \bigcup_{i\in I}\varphi^{-1}(W_i)$, 即 $LC(V)\leq LC(W)$ $\square$

Rmk: 当$\mathbb{F}$=无限域时, 用Vandermonde行列式足以说明 $LC(V)$ 不是有限的.

当 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$时, 是否有简单办法说明 $LC(V)$ 不是可数势.

② 试着用①说明, 若$\mathbb{F}$=无限域, 则 $d_A=\varphi_A \Rightarrow A$是$d_A$的友阵.

(当$\mathbb{F}$有限时, 利用 λ-矩阵理论依然可以说明上述结果).

pf: A是友阵 $\Leftrightarrow$ $\exists$循环向量ξ, $\langle\xi, A\xi, \cdots, A^{n-1}\xi\rangle = V$. (即知 $d_{A,\xi}=d_A=\varphi_A$)

现在知道 $d_A=\varphi_A$, 我们要找一个循环向量就等价于找 $\xi\in V$, s.t. $d_{A,\xi}=d_A$.

$\forall v\in V$, 定义 $Z_v = \{y\in V \mid d_{A,v}(A)y = 0\}$. 显然 $v\in Z_v$, 故 $V=\bigcup_{v\in V} Z_v$.

知 $d_{A,v}\mid d_A$. d_A的因子只有限多个, 故 $\bigcup_{v\in V} Z_v$ 是有限并. 但 $\mathrm{card}(\mathbb{F})$ 无限, 故 $\exists v\in V$. $Z_v = V$, 故 $d_{A,v}=d_A$ $\square$

Rmk: $\mathbb{F}\subseteq L$ 是两个域, A、B是$\mathbb{F}$上矩阵, 在L上相似. 若$\mathbb{F}$无限, 利用多项式根的理论易知 A和B在$\mathbb{F}$上相似.

若利用 λ-矩阵理论, 则知A,B在$\mathbb{F}$上相似 (不需要$\mathbb{F}$无限).

现在再来看②, $\mathbb{F}$总可以包含在一个无限域L里. 由上面的讨论, A在L相似于d_A的友阵, 因此在$\mathbb{F}$上亦如是.

③ $A_1, \cdots, A_m$ 是 n 阶方阵. $A_1+\cdots+A_m = I_n$, 则下列命题等价:

a). $A_i^2 = A_i$

b). $\mathrm{rank}(A_1)+\cdots+\mathrm{rank}(A_m) = n$

c). $\forall i\neq j$, $A_iA_j = 0$

pf: $a\Rightarrow b$, $\sum \mathrm{rank}(A_i) = \sum \mathrm{tr}(A_i) = \mathrm{tr}(\sum A_i) = n$.

$b\Rightarrow c$. $n = \dim \mathrm{Im}(I_n) = \dim \mathrm{Im}(\sum A_i) \leq \dim(\sum \mathrm{Im} A_i) \leq \sum \dim \mathrm{Im} A_i = \sum \mathrm{rank} A_i = n$

即 $\sum \dim \mathrm{Im} A_i = \dim \sum \mathrm{Im} A_i = n \Rightarrow \sum \mathrm{Im} A_i = V$ (全空间) 是直和

$\mathrm{Im}(A_1A_k + A_2A_k + \cdots + A_mA_k) = \mathrm{Im}(A_k) \Rightarrow A_iA_k = 0, \forall i \neq k.$

$c \Rightarrow a$，平凡.

④ 若 $r(A) = r(A^2)$，$AB = BA$，则 $r(A+B) = r(A) + r(B) \Leftrightarrow AB = 0$

pf: $r(A) = r(A^2) \Leftrightarrow \mathrm{Ker} A + \mathrm{Im} A = V$ 是直和。

1. $r(A+B) = r(A) + r(B) \Rightarrow \mathrm{Im} A + \mathrm{Im} B$ 是直和。$\dim((A+B)(\mathrm{Im} A)) \leq \dim \mathrm{Im} A = r(A)$，$\dim((A+B)(\mathrm{Ker} A)) \leq r(B)$

$r(A+B) = \dim(\mathrm{Im}(A+B)) \leq \dim((A+B)(\mathrm{Im} A)) + \dim((A+B)(\mathrm{Ker} A)) \leq r(A) + r(B) \Rightarrow B(\mathrm{Ker} A) = \mathrm{Im} B.$

$AB = 0 \Leftrightarrow A(\mathrm{Im} B) = 0 \Leftrightarrow AB(\mathrm{Ker} A) = 0 \Leftrightarrow BA(\mathrm{Ker} A) = 0.$

2. $BA = 0 \Rightarrow \mathrm{Im} A \subseteq \mathrm{Ker} B$，$(A+B)(\mathrm{Im} A) = \mathrm{Im} A$。$AB = 0 \Rightarrow \mathrm{Im} B \subseteq \mathrm{Ker} A \Rightarrow \mathrm{Im} A + \mathrm{Im} B$ 是直和.

⑤ A, B 是两个 n 阶方阵满足 $AB = BA$，求证：$r(A) + r(B) \geq r(A+B) + r(AB)$

pf: 易知 $\mathrm{Im}(AB)$ 是 $A, B, A+B$ 的不变子空间 故考察 $\bar{A} = A|_{V/\mathrm{Im}(AB)}$，$\bar{B} = B|_{V/\mathrm{Im}(AB)}$

容易看到 $r(A) = r(\bar{A}) + r(AB)$，$r(B) = r(\bar{B}) + r(AB)$，$r(\bar{A}+\bar{B}) \geq r(A+B) - r(AB)$

$r(\bar{A}) + r(\bar{B}) \geq r(\bar{A}+\bar{B})$ 也是显见的，故证.

⑥ 设 A 和 B 是两个 n 阶复矩阵，且 $AB - BA \in \langle A, B \rangle_{\mathbb{C}}$，求证：$A, B$ 可同时上三角化.

pf: 不妨设 $C := AB - BA = A + bB$，只需证 C, B 可同时上三角化. 若 x 是 B 的 λ 特征向量.

$CB - BC = AB + bB^2 - BA - bB^2 = C$，故 $BCx = CBx - Cx = (\lambda - 1)Cx$，若 $Cx \neq 0$，则 $\lambda - 1 \in \mathrm{spec}\, B$

同理 $\lambda - 2 \in \mathrm{spec} B \cdots$，$B$ 将有无穷多特征值，故 $Cx = 0$. x 也是 C 的特征向量.

⑦ $r(AB - BA) < 1$ 时，A, B 可以同时上三角化.

pf: 不妨设 A 不可逆。$C := AB - BA$.

Case I ($\mathrm{Ker} A \subseteq \mathrm{Ker} C$)，$AB(\mathrm{Ker} A) = BA(\mathrm{Ker} A) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker} A$ 是 B 的不变子空间，由维数归纳即得.

Case II ($\mathrm{Ker} A \nsubseteq \mathrm{Ker} C$)，$B(\mathrm{Im} A) = \mathrm{Im}(AB - C) \subseteq \mathrm{Im} A + \mathrm{Im} C$，因 $\mathrm{Ker} A \nsubseteq \mathrm{Ker} C$. 故 $\mathrm{Im} C = C(\mathrm{Ker} A) \subseteq \mathrm{Im} A$.

故 $\mathrm{Im} A$ 是 A, B 的不变子空间，再用维数归纳

Q: $C := AB - BA$，若 $AC = BC = 0$. A 和 B 是否可以同时上三角化 (用⑦的方法).

[若 $AC = CB = 0$，$\cdots$ (答案是可以，但我还没想清楚怎么做)]