§0.1 平面曲线

§0.1.1 平面曲线的弯曲

考虑平面上的沿圆周的匀速运动：

$$r(t) = Re^{iat} + r_0, \quad R, a > 0, \quad r_0 \in \mathbb{R}^2.$$

则有

$$r'(t) = iaRe^{iat} = ia[r(t) - r_0], \quad r''(t) = -a^2Re^{iat} = -a^2[r(t) - r_0],$$

$$|r'(t)| = aR, \quad |r''(t)| = a^2R = \frac{1}{R}|r'(t)|^2.$$

特别的，最后一式与a无关。加速度$r''(t)$指向圆心，大小是速度大小的平方乘以圆周半径的倒数（即$\frac{1}{R}$）。这里$\frac{1}{R}$与曲线参数化无关，它反映了圆周的弯曲程度。对于弧长参数曲线（$a = \frac{1}{R}$），

$$\frac{1}{R} = |r''(s)|.$$

一般正则曲线在$t = t_0$处的弯曲程度可通过曲线在$t = t_0$处密切圆半径的倒数来量化。有两种常用方式构造$t = t_0$处密切圆：

(i) Huygens, Leibniz, Newton定义密切圆周（osculating circle）的方式：先确定在$t = t_0$处与曲线相切、并且经过$r(t_1), t_1 \neq t_0$的圆周，再取$t_1 \to t_0$时的极限。

(ii) 先确定经过不共线三点$r(t_i), i = 1, 2, 3$的圆周，再取$t_i \to t_0$时的极限(称为$t = t_0$处的密切圆)。

定理0.1. 设$r : (a, b) \to \mathbb{R}^2$为$C^2$弧长参数曲线，$r''(s_0) \neq 0$。则

(i) 当$s_1 < s_2 < s_3$充分靠近s_0时，$r(s_1), r(s_2), r(s_3)$不共线。

(ii) 当$s_1, s_2, s_3 \to s_0$时，经过$r(s_1), r(s_2), r(s_3)$的（唯一）圆周收敛。极限圆周经过$r(s_0)$、中心在$r(s_0)$处的法线上*(*$r''(s_0)$方向*)*、半径为$1/|r''(s_0)|$。

设$r''(s_0) \neq 0$。曲线在$s = s_0$展开到二阶

$$r(s) = r(s_0) + r'(s_0)(s - s_0) + \frac{1}{2}r''(s_0)(s - s_0)^2 + \cdots$$

找曲线$r(s)$在$s = s_0$处的最佳逼近圆周：考虑圆周$c(s)$，它经过$r(s_0)$，不妨令

$$c(s_0) = r(s_0).$$

设圆周$c(s)$中心为C，半径为R，则

$$|c(s)-C|^2=R^2.$$

$c(s)$在$s=s_0$有展开式

$$c(s)=r(s_0)+c'(s_0)(s-s_0)+\frac{1}{2}c''(s_0)(s-s_0)^2+\cdots$$

对圆周方程微分得

$$\langle c'(s),c(s)-C\rangle=0,\quad (1)$$

$$\langle c''(s),c(s)-C\rangle=-|c'(s)|^2=-1.\quad (2)$$

(1)中令$s=s_0$，则有

$$\langle c'(s_0),r(s_0)-C\rangle=0$$

因此可使得$c'(s_0)=r'(s_0)$成立(逼近到1阶)当且仅当

$$\langle r'(s_0),r(s_0)-C\rangle=0.\quad (*1)$$

这等价于C在曲线$r(s)$过$r(s_0)$的法线上(确定了$c(s)$圆心C所在的直线)。(2)中令$s=s_0$，则有

$$\langle c''(s_0),r(s_0)-C\rangle=-1.$$

由于$c''(s_0),r''(s_0),r(s_0)-C$都与$r'(s_0)=c'(s_0)$正交，$c''(s_0)=r''(s_0)$当且仅当$C$使得

$$\langle r''(s_0),r(s_0)-C\rangle=-1.\quad (*2)$$

即$C-r(s_0)$与$r''(s_0)$同方向并且圆周半径

$$R=|C-r(s_0)|=\frac{1}{|r''(s_0)|}.$$

因此$r''(s_0)\neq 0$时2阶逼近$r(s)$的圆周存在唯一，由$(*1),(*2)$确定圆心C。$r''(s_0)=0$时$r(s)$在$s=s_0$处的切线2阶逼近$r(s)$，直线可看作半径为无穷的圆周。因此$r(s)$在$s=s_0$处弯曲程度都由如下数值量化

$$\frac{1}{R}=|r''(s_0)|.$$

$r''(s_0)$反映了$r(s)$在$s=s_0$处弯曲，弯曲程度为$|r''(s_0)|$，弯曲方向为$r''(s_0)$的方向。

§0.1.2 Frenet标架的运动方程

$r''(s)$反映了曲线的弯曲，注意到$r''(s)=\frac{d}{ds}r'(s)$，即切向量场沿曲线的微分反映了弯曲。合适选取沿曲线的正交标架，正交标架对弧长参数s求导即正交标架的运动方程。

对正则曲线$r(s)$，$r'(s)$是单位切向量，$r''(s)$也确定并且光滑。当$r''(s)\neq 0$，$\frac{r''(s)}{|r''(s)|}$确定了一个单位法向。对于高维($n\geq 3$)空间中的曲线，在$r''(s_0)\neq 0$附近可以将$\frac{r''(s)}{|r''(s)|}$固定为正交标架中的一个向量。但注意到$r''(s_0)=0$的点附近，$\frac{r''(s)}{|r''(s)|}$可以不是连续的。

沿曲线$r(s)$的Frenet标架：(向量值)函数$a(s)$对弧长参数s的导数通常记作$\dot{a}(s)$。令

$$T(s)=\dot{r}(s)$$

这里单位向量$T(s)$以$r(s)$为起点。选取$r(s)$在$s=s_0$处的法向$N(s)$(同样以$r(s)$为起点)，使得$\{T(s),N(s)\}$构成右手系，$N(s)$称为单位正法向量。$\{r(s);T(s),N(s)\}$称为沿曲线$r(s)$的Frenet标架。

$T(s),N(s)$作为向量值函数。对$\langle T(s),T(s)\rangle=1$求导得

$$\langle\dot{T}(s),T(s)\rangle=0,$$

因此$\dot{T}(s)=\ddot{r}(s)$与$N(s)$共线，存在$\kappa(s)$使得

$$\dot{T}(s)=\ddot{r}(s)=\kappa(s)N(s),$$

$\kappa(s)$称为曲线$r(s)$的曲率。显然

$$|\kappa(s)|=|\ddot{r}(s)|.$$

但它的符号随曲线定向的改变而改变。

$\ddot{r}(s)$与曲线的定向无关。当曲线$r(s)$改变定向时，$T(s)$反向，$N(s)$反向。对于平面上简单闭曲线，通常选取逆时针定向，从而$N(s)$指向曲线内部。

Frenet标架的运动方程与曲率：已知有

$$\frac{dT(s)}{ds}=\kappa(s)N(s).$$

由$|N(s)|^2=1$，求导就有$\langle\dot{N}(s),N(s)\rangle=0$。另一方面由内积的Leibniz求导法则

$$\langle\dot{N},T\rangle=\frac{d}{ds}\langle N,T\rangle-\langle N,\dot{T}\rangle=-\langle N,\kappa N\rangle=-\kappa,$$

因此

$$\dot{N} = -\kappa T.$$

于是有Frenet标架的运动方程

$$\begin{cases} \dot{T}(s) = \kappa(s)N(s) \\ \dot{N}(s) = -\kappa(s)T(s) \end{cases}$$

或者记作

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) \\ -\kappa(s) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \end{bmatrix}.$$

注意到Frenet标架的导数的变换矩阵反对称。事实上对于沿$r(t)$的任意C^1正交标架$\{r(t); e_1(t), e_2(t)\}$都有

$$\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} = A(t)\begin{bmatrix} e_1(t_0) \\ e_2(t_0) \end{bmatrix}, \quad A(t) \in O(2), \quad A(t_0) = I.$$

求导得

$$\begin{bmatrix} e_1'(t_0) \\ e_2'(t_0) \end{bmatrix} = A'(t_0)\begin{bmatrix} e_1(t_0) \\ e_2(t_0) \end{bmatrix}.$$

另一方面，对

$$A(t)^T A(t) = I$$

求导，并利用$A(t_0) = I$可得

$$(A')^T(t_0) + A'(t_0) = 0.$$

对于弧长参数曲线的Frenet标架，反对称阵$\dot{A}(s)$的非零元由曲线的曲率决定。

曲率的计算：求弧长参数$s = s(t)$需要求积分，相对复杂。给定正规曲线$r(t)$有公式直接计算其曲率：

$$\dot{r}(s) = \frac{dt}{ds}r'(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|},$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}(s) &= \frac{dt}{ds}\left[\frac{r''(t)}{|r'(t)|} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|r'(t)|}\right)r'(t)\right] \\ &= \frac{r''(t)}{|r'(t)|^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{|r'(t)|}\right)\frac{r'(t)}{|r'(t)|} \end{aligned}$$

$$N(s) = \frac{(-y'(t), x'(t))}{|r'(t)|},$$

因此

$$\kappa(t)=\langle\ddot{r}(s),N(s)\rangle=\frac{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2+(y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

从上面计算可得加速度

$$\begin{aligned}r''(t) &= |r'(t)|^2[\ddot{r}(s)-\frac{d}{dt}(\frac{1}{|r'(t)|})\frac{r'(t)}{|r'(t)|}]\\ &= |r'(t)|^2\kappa N+\frac{d^2s}{dt^2}\dot{r}(s).\end{aligned}$$

即加速度的法向部分为$\kappa|r'(t)|^2N$，切向部分为$\frac{d^2s}{dt^2}T$。

对于由$F(x,y)=0$定义的平面曲线可以对曲线参数化之后利用上式求曲率。

例：求$y=x^n,n\geq 2$的曲率。

解：选取参数t

$$r(t)=(x(t),y(t))=(t,t^n),\quad t\in\mathbb{R}.$$

计算

$$r'(t)=(1,nt^{n-1}),$$

$$r''(t)=(0,n(n-1)t^{n-2}).$$

因此

$$\kappa(t)=\frac{n(n-1)t^{n-2}}{[1+n^2t^{2(n-1)}]^{\frac{3}{2}}}.$$

$n\geq 3$为奇数时，$\kappa(t)$在$t=0$附近变号。特别$\frac{r''(s)}{|r''(s)|}$在$t=0$处不连续。

高斯映射与曲率：Frenet标架运动方程中第二式

$$\dot{N}(s)=-\kappa(s)T(s)$$

中$N(s)$是向量值函数，特别的，它是轨迹包含在以原点为中心的单位圆周上的参数曲线(s一般不再是$N(s)$的弧长参数)，称为高斯映射

$$s\mapsto N(s)\in S^1\subset\mathbb{R}^2.$$

设$\theta(s)$为$N(s)$与x轴正向的夹角（关于s连续），则

$$N(s)=(\cos\theta(s),\sin\theta(s)),\quad T(s)=(\sin\theta(s),-\cos\theta(s))$$

因此

$$\dot{N}(s)=\frac{d\theta}{ds}(-\sin\theta(s),\cos\theta(s))=-\kappa(s)T(s),$$

从而

$$\frac{d\theta}{ds} = \lim_{\triangle s \to 0} \frac{\theta(s+\triangle s) - \theta(s)}{\triangle s} = \kappa(s).$$

即$\kappa(s)$等于法向$N(s)$关于弧长s的转动速度。特别的，当$\kappa > 0$时法向$N(s)$逆时针转动，$\kappa < 0$时法向$N(s)$顺时针转动。注意到$\theta(s+\triangle s)-\theta(s)$也是单位圆周上$N(s)$到$N(s+\triangle s)$之间的带符号弧长（逆时针为正），因此曲率$\kappa$是两种弧长微元比值的极限。

例：常曲率平面曲线。

(i) $\kappa(s) \equiv 0 \Leftrightarrow r(s)$是直线；

(ii) $\kappa(s) = a \neq 0 \Leftrightarrow r(s)$是半径为$\frac{1}{|a|}$的圆。

证明：只需假设$\kappa(s)$为常数证明结论。

(i) 设$\kappa(s) \equiv 0$。则$T(s)$为常向量，即$T(s) \equiv T(s_0)$。对$\dot{r}(s) = T(s_0)$积分得

$$r(s) = r(s_0) + (s - s_0)T(s_0).$$

(ii) 设$\kappa(s) = a \neq 0$。注意到对于半径为$\frac{1}{|a|}$的圆周，

$$p(s) := r(s) + \frac{1}{a}N(s)$$

为圆周中心。在假设条件下对$p(s)$求导

$$\frac{dp(s)}{ds} = \dot{r}(s) + \frac{1}{a}(-\kappa(s)T(s)) = 0,$$

因此$p(s) \equiv p_0$，从而

$$|r(s) - p_0|^2 = \frac{1}{a^2},$$

即$r(s)$在以p_0为圆心、半径为$\frac{1}{|a|}$的圆周上。 □

例：设$r(0) = (0,0), \dot{r}(0) = (1,0)$。求解弧长参数曲线使得

$$\kappa(s) = \lambda s, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

解：设$T(s)$与x轴正向的夹角为$\alpha(s)$，则

$$T(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s)), \quad \alpha(0) = 0,$$

$$N(s) = (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s)),$$

$$\dot{T}(s) = \frac{d\alpha(s)}{ds}(-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s)) = \kappa(s)N(s) = \lambda s N(s),$$

从而

$$\frac{d\alpha(s)}{ds} = \lambda s,$$

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \int_0^s \frac{d\alpha(s)}{ds} ds = \frac{1}{2}\lambda s^2.$$

再由

$$\dot{r}(s) = T(s) = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s)) = (\cos\frac{1}{2}\lambda s^2, \sin\frac{1}{2}\lambda s^2),$$

积分得曲线的弧长参数形式

$$r(s) = (x(s), y(s)) = (\int_0^s \cos\frac{1}{2}\lambda u^2 du, \int_0^s \sin\frac{1}{2}\lambda u^2 du).$$

称为欧拉螺线，或羊角螺线。当要从直道构建轨道切入圆弧弯道时，可利用欧拉螺线作为轨道。 $\square$

注：对于平面曲线，曲率是最基本的外蕴几何量。由一阶常微分方程组存在性唯一性定理可得平面曲线基本定理：预定平面曲线曲率$\kappa(s)$，曲线存在唯一（模掉刚体运动的意义下）。将在空间曲线情形专门讨论曲线基本定理，两个证明类似。

定理0.2. *设$\kappa : [a, b] \to \mathbb{R}$为连续函数。则*

(i)存在弧长参数平面曲线$r(s), s \in [a, b]$使得它的曲率为$\kappa(s)$。

(ii) 若r_1, r_2是两条这样的弧长参数曲线，则存在一个刚体运动A使得$r_2 = Ar_1$。

作业：1(2,4), 2, 3, 8, 13(2) 18(1)