作业 2023.3.8

①

HW 1. 对任给 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq k\} = \mathbb{R}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq \frac{1}{k}\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$$

HW 2 (De Morgan 律)

设 $A_\alpha \subset X$, $\alpha \in I$,

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

Def 设 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列集合.

1° 如果 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$，则称之为递减集合列，记为 $A_k \searrow$，且定义极限集

$$\lim_{k\to\infty} A_k \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

2° 如果 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，则称之为递增集合列，记为 $A_k \nearrow$，且

$$\lim_{k\to\infty} A_k \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

3° 上限集 $\displaystyle \limsup_{k\to\infty} A_k \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k$

下限集 $\displaystyle \liminf_{k\to\infty} A_k \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} A_k$

HW 3. $\displaystyle \limsup_{k\to\infty} A_k = \{x : \exists$ 无穷多个 k_j s.t. $x \in A_{k_j}\}$

$$\liminf_{k\to\infty} A_k = \{x : \exists N \text{ s.t. } x \in A_k,\ \forall k > N\}$$

HW 4. 设 $f, f_1, f_2, \cdots$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 上函数. 证明

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\}$$

$$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{k=j}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R}^n : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}\right\}$$