微分方程

偏微分方程总复习

目录：1.基本概念与基本原理

- 偏微分方程的定义与推导
- 定解问题与适定性
- 二阶偏微分方程的分类与标准型
- 叠加原理与齐次化原理

2.主要求解方法

- 算子分解法与行波法
- 分离变量法(Fourier展开法)
- 基本解法与Green函数法
- 球面平均法与Fourier变换法

3.各类偏微分方程

- 波动方程：解公式，能量法，唯一性
- 热方程：解公式，最大值原理，唯一性
- 位势方程：最大值原理，唯一性，Green函数
- 非线性方程:变分法与求解方法

4.自由讨论

一、基本概念与基本原理

偏微分方程的定义与推导

定义：含有多元未知函数的偏导数的关系式称为偏微分方程(PDE)

$$F(x,u,Du,\cdots,D^k u)=0, x\in\mathbb{R}^n, n\geq 2$$

线性PDE：$\sum_{|\alpha|=k} P_\alpha(x)D^\alpha u = f(x), \alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n), D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$

半线性PDE：$\sum_{|\alpha|=k} P_\alpha(x)D^\alpha u + G(x,u,Du,\cdots,D^{k-1}u)=0$

拟线性PDE：$\sum_{|\alpha|=k} P_\alpha(x,u,Du,\cdots,D^{k-1}u)D^\alpha u + G(x,u,Du,\cdots,D^{k-1}u)=0$

三类典型偏微分方程的推导：利用物理定律和数学方法推导方程

学习目的：通过本课程的学习获得有关偏微分方程的基本概念、基本方法和基本理论，掌握三个典型二阶方程定解问题的解法和性质，为后继课程进一步扩大数学知识面提供必要的数学基础。

定解问题与适定性

定解条件：

- **初始条件：** $u|_{t=0}=\varphi(x), u_t|_{t=0}=\psi(x)$
- **边界条件：**

第一类(Dirichlet)边界 $u|_{\partial D}=\varphi$

第二类(Neumann)边界 $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D}=\varphi$ $(\frac{\partial u}{\partial \nu}=\nabla u\cdot\nu, \nu:$单位外法向$)$

第三类(Robin)边界 $(au+b\frac{\partial u}{\partial \nu})|_{\partial D}=\varphi$

定解问题： 给定方程和定解条件的问题

(Hadamard)适定性： 解存在，唯一和稳定

二阶偏微分方程的分类与标准型

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + f(x,u,Du) = 0$$

其中$x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n}$:实对称阵

在x^0点的分类方法:

1.若$A(x^0)$的所有特征值非零且仅有一个异号，则方程为**双曲型**(若正负特征值个数均大于1则方程为**超双曲型**)。代表：波动方程

2.若$A(x^0)$有一特征值为零，则方程为**抛物型**。代表：热方程

3.若$A(x^0)$的所有特征值非零且同号，则方程为**椭圆型**。代表：位势方程

两个自变量： $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + f(x,y,u,u_x,u_y) = 0$

$$判别式 = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \begin{cases} > 0, & 双曲型 \\ = 0, & 抛物型 \\ < 0, & 椭圆型 \end{cases}$$

在x^0点的**标准型**：

若经过自变量的某种线性变换$\xi = Bx$后得到的方程

$$\sum_{i=1}^{m} A_{ii}(x^0)u_{\xi_i\xi_i} + F(\xi, u, Du) = 0,\ m \le n$$

其中$A_{ii}(x^0)=\pm 1$，
称为在x^0点的**标准型**。

- 求标准型的一般步骤：
  1.找出特征方程的特征方向
  2.找到特征线
  3.利用特征线得到所需变换

叠加原理与齐次化原理

叠加原理:

设L为线性微分算子，B为线性算子，则

$$\begin{cases} Lu = f \ \text{ in } D \\ Bu|_{\partial D} = \varphi \end{cases} \text{的解} u = v + w, \text{其中} \begin{cases} Lv = 0 \ \text{in } D \\ Bv|_{\partial D} = \varphi \end{cases} \text{和} \begin{cases} Lw = f \ \text{ in } D \\ Bw|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

齐次化(Duhamel,冲量)原理:

设L为t与x的线性微分算子且关于t 最高阶导数次数$\leq m-1$，则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^m w}{\partial t^m} = Lw + f(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ w|_{t=0} = \cdots = \dfrac{\partial^{m-1} w}{\partial t^{m-1}}|_{t=0} = 0 \end{cases} \text{的解} w(x,t) = \int_0^t z(x,t;\tau) d\tau,$$

$$\text{其中} \begin{cases} \dfrac{\partial^m z}{\partial t^m} = Lz, x \in \mathbb{R}^n, t > \tau > 0 \\ z|_{t=\tau} = \cdots = \dfrac{\partial^{m-2} z}{\partial t^{m-2}}|_{t=\tau} = 0, \dfrac{\partial^{m-1} z}{\partial t^{m-1}}|_{t=\tau} = f(x,\tau) \end{cases}$$

二、主要求解方法

算子分解法与行波法

求解一维波动方程初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx},\ x\in\mathbb{R},t>0\ (c>0) \\ u|_{t=0}=\varphi(x),u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases}$$

算子分解法: 利用波算子$\square=\partial_t^2-c^2\partial_x^2=(\partial_t+c\partial_x)(\partial_t-c\partial_x)$,

将原问题转为两个一阶方程的Cauchy问题

行波法: 首先通过自变量的可逆变换化方程为可积形式，再积分得通解，最后由初始条件确定未知函数

注:可以直接利用Fourier变换求解

分离变量法(Fourier展开法)

求解特殊区域内三类典型二阶方程的初边值(混合)问题和边值问题

分离变量法(Fourier展开法):

利用分离解将偏微问题化为常微问题，一般求解步骤是
1.边界齐次化
2.对齐次方程和齐次边界分离变量后求解特征值问题和其它常微分方程
3. 形式解代入初始条件或非齐次边界后利用广义Fourier展开确定系数

例.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0<x<l, t>0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

解.

边界是齐次的，将分离解$X(x)T(t)$代入齐次方程和齐次边界有

$$\frac{T''(t)}{c^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}:=-\lambda,\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0<x<l\\ X(0)=X(l)=0\end{cases}$$

求解特征值问题得到特征值和特征函数: $\lambda_n=(\frac{n\pi}{l})^2, X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}\ (n\geq 1)$

将$u(x,t), f(x,t), \varphi(x), \psi(x)$ 按完备正交特征函数系$\{X_n(x)\}_{n\geq 1}$作广义Fourier展开

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\ f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l},\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

此时代入初始条件有 $\begin{cases}T_n''(t)+(\frac{cn\pi}{l})^2T_n(t)=f_n(t)\\ T_n(0)=\varphi_n, T_n'(0)=\psi_n\end{cases}$

$$\Rightarrow T_n(t)=\varphi_n\cos\frac{cn\pi t}{l}+\frac{l}{cn\pi}\psi_n\sin\frac{cn\pi t}{l}+\frac{l}{cn\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{cn\pi(t-\tau)}{l}d\tau$$

$$\Rightarrow u(x,t)$$

基本解法与Green函数法

求解三类典型二阶方程的初值问题，边值问题和混合问题

基本解法与Green函数法:

利用对应的基本解或Green函数得到问题解的积分表示。

一般求解步骤:

1.找到点源问题对应的基本解或Green函数满足的方程

2.用Fourier变换，相似法或镜像法等求出基本解或Green函数

3.代入基本积分公式得解

注1:基本解法针对全空间上的定解问题，而Green函数法针对有界区域上的定解问题

注2:此两法均涉及δ函数，故须掌握δ函数的数学和物理定义及相关性质

球面平均法与Fourier变换法

求解三类典型二阶偏微分方程全空间上的初值问题或基本解

球面平均法：利用球面平均将高维初值问题化为一维初值问题

Fourier变换法:

对$\forall f(\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^n)$,定义

$$F[f(x)](\xi)=\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx,\ \xi\in\mathbb{R}^n$$ “Fourier变换”

$$F^{-1}[f(\xi)](x)=\check{f}(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,\ x\in\mathbb{R}^n$$ “Fourier逆变换”

利用Fourier变换化偏微为常微(甚至代数方程)。一般求解步骤：

1.对空间变量作积分变换化偏微为常微
2.求解常微初值问题
3.作逆变换得原问题解(这步最难!)

例. 求解非齐次三维波动方程初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u + f(x,t),\ x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解. 定义波动方程的基本解 $U(x,t)$： $\begin{cases} U_{tt} = c^2 \Delta U,\ x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ U\big|_{t=0} = 0, U_t\big|_{t=0} = \delta(x) \end{cases}$

（注：热方程对应的基本解满足：$S_t = k \triangle S, S|_{t=0} = \delta(x)$）

则可以直接验证

$$u(x,t) = U(x,t) * \psi(x) + \partial_t [U(x,t) * \varphi(x)] + \int_0^t U(x,t-\tau) * f(x,\tau) d\tau$$

对 $\begin{cases} U_{tt} = c^2 \Delta U \\ U\big|_{t=0} = 0, U_t\big|_{t=0} = \delta(x) \end{cases}$ 作关于空间变量的Fourier变换，有

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \hat{U}}{dt^2} = -c^2 \rho^2 \hat{U}, \rho = |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \\ \hat{U}\big|_{t=0} = 0, \hat{U}_t\big|_{t=0} = \hat{\delta} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{U}(\xi,t)=\frac{\sin(c\rho t)}{c\rho},$$

$$\therefore\ U(x,t)$$

$$=F^{-1}[\hat{U}]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\sin(c\rho t)}{c\rho}e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty}d\rho\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}\frac{\sin(c\rho t)}{c\rho}e^{ir\rho\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\varphi \quad \text{(球坐标变换, } r=|x|\text{)}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2c}\int_0^{+\infty}\sin(c\rho t)\frac{-e^{ir\rho\cos\theta}}{ir}\Bigg|_0^{\pi}d\rho=\frac{1}{2\pi^2cr}\int_0^{+\infty}\sin(c\rho t)\sin(r\rho)d\rho \quad \text{(欧拉公式)}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2cr}\int_0^{+\infty}[\cos\rho(r-ct)-\cos\rho(r+ct)]d\rho=\frac{1}{8\pi^2cr}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{i\rho(r-ct)}-e^{i\rho(r+ct)}]d\rho$$

$$=\frac{1}{4\pi cr}[\delta(r-ct)-\delta(r+ct)]=\frac{\delta(r-ct)}{4\pi cr} \quad (\because F^{-1}[1]=\delta, r\geq 0, c>0, t>0)$$

令 $S_r(x)$ **为半径** r **球心在** x **的球面，现取** $r=|x-y|$, **则对** $\forall g(x)$,

利用卷积和δ函数的定义，有

$$U(x,t)*g(x)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\delta(|x-y|-ct)}{4\pi c|x-y|}g(y)dy=\frac{1}{4\pi c}\int_0^{+\infty}\frac{\delta(r-ct)}{r}[\int_{S_r(x)}g(y)dS(y)]dr$$

$$=\frac{1}{4\pi c}\frac{1}{ct}\int_{S_{ct}(x)}g(y)dS(y)=\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(x)}g(y)dS(y)$$

非齐次三维波动方程初值问题的解为

$$u(x,t)=U(x,t)*\psi(x)+\partial_t[U(x,t)*\varphi(x)]+\int_0^t U(x,t-\tau)*f(x,\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(x)}\psi(y)dS(y)+\partial_t[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(x)}\varphi(y)dS(y)]$$

$$+\int_0^t\frac{1}{4\pi c^2(t-\tau)}\int_{S_{c(t-\tau)}(x)}f(y,\tau)dS(y)d\tau$$

(Kirchhoff公式)

三、各类偏微分方程

1.波动方程

波动方程初值问题的解：

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, n = 1,2,3 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$$n = 1: u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(s,\tau) ds d\tau$$

$$n = 2: u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi c}[\iint_{\Sigma_{ct}(x_1,x_2)} \frac{\psi(\xi,\eta)}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} d\xi d\eta + \partial_t \iint_{\Sigma_{ct}(x_1,x_2)} \frac{\phi(\xi,\eta)}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} d\xi d\eta]$$

$$+ \frac{1}{2\pi c}\int_0^t \iint_{\Sigma_{c(t-\tau)}(x_1,x_2)} \frac{f(\xi,\eta,\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - r^2}} d\xi d\eta d\tau, \ r = \sqrt{(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2}$$

$$n = 3: u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(x)} \psi(y) dS(y) + \partial_t[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(x)} \varphi(y) dS(y)]$$

$$+ \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2 (t-\tau)} \int_{S_{c(t-\tau)}(x)} f(y,\tau) dS(y) d\tau$$

从一维波动方程初值问题解的D'Alembert公式知

点$(x_0,\ t_0)$的依赖区间为$I_0=[x_0-ct_0\ ,x_0+ct_0]$;

I_0的决定区域为$\{(x,t)\mid x_0-c(t_0-t)\le x\le x_0+c(t_0-t)\}$;

I_0的影响区域为$\{(x,t)\mid x_0-c(t_0+t)\le x\le x_0+c(t_0+t)\}$.

一维波动方程初边值问题的解:

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<l,t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0 \end{cases}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n\cos\frac{n\pi ct}{l}+\psi_n\frac{l}{cn\pi}\sin\frac{n\pi ct}{l}+\frac{l}{cn\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi c(t-\tau)}{l}d\tau]\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds,\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds,\ f_n(\tau)=\frac{2}{l}\int_0^l f(s,\tau)\sin\frac{n\pi s}{l}ds$$

注:边界为第二、三类边界时要讨论Neumann 、Robin特征值问题

能量法与唯一性

唯一性定理：波动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = f(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0, n = 1,2,3 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

的解是唯一的。

略证. 仅须证 $f = \varphi = \psi \equiv 0$ **时只有零解。** $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 > 0,$

定义有界特征锥内的能量

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{B_{c(t_0 - t)}(x_0)} (u_t^2 + c^2 |\nabla u|^2) dx \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE(t)}{dt} \leq 0 \Rightarrow 0 \leq E(t) \leq E(0) = 0, \forall 0 \leq t \leq t_0$$

$$\Rightarrow u \equiv \text{常数} = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

注：能量$E(t)$的微分可以在方程两边乘u_t后在相应区域上积分得到。

2.热方程

热方程初值问题的解：
$$\begin{cases} u_t = k\Delta u + f(x,t), x\in\mathbb{R}^n, t>0, n\geq 1 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{(4k\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4kt}}\varphi(y)dy + \frac{1}{(4k\pi)^{n/2}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4k(t-\tau)}}\frac{f(y,\tau)}{(t-\tau)^{n/2}}dyd\tau$$

注1：光滑性定理成立：$f\equiv 0, \varphi\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$时$u(x,t)\in C^\infty(\mathbb{R}^n\times(0,+\infty))$.

注2:对*Schrödinger*方程初值问题可由热方程的结果得解或用Fourier变换求解

一维热方程初边值问题的解：
$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + f(x,t),\ 0<x<l, t>0 \\ u\,|_{t=0} = \varphi(x) \\ u\,|_{x=0} = 0,\ u\,|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}[\int_0^l \varphi(s)\sin\frac{n\pi s}{l}ds\, e^{-(\frac{n\pi}{l})^2 kt} + \int_0^t\int_0^l f(s,\tau)\sin\frac{n\pi s}{l}dse^{-(\frac{n\pi}{l})^2 k(t-\tau)}d\tau]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

最大值原理：

令$Q_T=(0,l)\times(0,T],\Gamma_T=\overline{Q_T}\setminus Q_T=$底线+侧线（抛物边界），则

$u_t=ku_{xx}$的解$u(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q_T})$满足$\max\limits_{\overline{Q_T}}|u|=\max\limits_{\Gamma_T}|u|$.

唯一性定理：热方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t=ku_{xx}+f(x,t),\ 0<x<l,t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x) \\ u|_{x=0}=g_1(t),\ u|_{x=l}=g_2(t) \end{cases}$$

的解是唯一的。

略证. 仅须证 $f=\varphi=g_1=g_2\equiv 0$ **时只有零解。**

方法1：最大值原理 $\Rightarrow \max\limits_{\overline{Q_T}}|u|=\max\limits_{\Gamma_T}|u|=0\Rightarrow u\equiv 0.$

方法2：能量法

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)dx\Rightarrow\frac{dE(t)}{dt}\le 0,$$

$$\Rightarrow 0\le E(t)\le E(0)=0,u\equiv\text{常数}=0.$$

注:稳定性可以由**最大值原理**和**能量法**得到。

3.位势方程

Laplace算子：

直角坐标：$\Delta = div(\nabla) = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2$

极坐标：$\Delta_2 = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2,$

$$\Delta_3 = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\ \partial_\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2$$

旋转不变性：$\Delta u(x) = 0, x' = Bx, B: n$ 阶正交阵

$$\Rightarrow \Delta u(x') = \Delta u(Bx) = 0$$

Green第一公式： $\int_D v\Delta u dx = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS - \int_D \nabla v \cdot \nabla u dx \ (u, v \in C^2(\bar{D}))$

Green第二公式： $\int_D (v\Delta u - u\Delta v)dx = \int_{\partial D} (v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu})dS \ (u, v \in C^2(\bar{D}))$

最大值原理：(务必掌握，包括证明!)

设$D\subset\mathbb{R}^n(n\geq 2)$有界,$u(x)\in C^2(D)\cap C(\bar{D})$调和$(\Delta u=0\text{ in }D)$,

则$\max\limits_{\bar{D}} u=\max\limits_{\partial D} u,\ \min\limits_{\bar{D}} u=\min\limits_{\partial D} u.$

唯一性定理：Poisson方程边值问题

$$\begin{cases}\Delta u=f(x)\text{ in }D\\ u\big|_{\partial D}=g(x)\end{cases}$$ **的解是唯一的。**

略证. 仅须证 $f\equiv g\equiv 0$ **时只有零解。**

方法1：最大值原理 $\Rightarrow 0=\min\limits_{\partial D} u\leq u(x)\leq\max\limits_{\partial D} u=0\Rightarrow u\equiv 0.$

方法2：能量法 $E:=\int_D|\nabla u(x)|^2\,dx\Rightarrow u\equiv\text{常数}=0.$

Laplace方程边值问题的解： $\begin{cases}\Delta_2 u=0,r<a,\theta\in\mathbb{R}\\ u\big|_{r=a}=f(\theta)\end{cases}$

$$u(r,\theta)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\theta)}d\varphi$$

二维Poisson方程的边值问题

对某些特殊区域如矩形，圆盘，扇形等可用分离变量法求解。

例.

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=F(x,y),\ 0<x<a,\ 0<y<b \\ u\big|_{x=0}=f_1(y), u\big|_{x=a}=f_2(y) \\ u\big|_{y=0}=g_1(x), u\big|_{y=b}=g_2(x) \end{cases}$$

思路： 在两种边界上分别取线性拟合函数

$$h_1(x,y)=\frac{f_2(y)-f_1(y)}{a}x+f_1(y),$$

$$h_2(x,y)=\frac{g_2(x)-g_1(x)}{b}y+g_1(x)$$

$\Rightarrow$ $v(x,y)=u(x,y)-h_1(x,y), w(x,y)=u(x,y)-h_2(x,y)$

必定满足某边界齐次条件，用Fourier展开法求解即可

平均值公式：

设$D\subset\mathbb{R}^n(n\geq 2)$开区域，$u(x)\in C^2(D)$,

$$\text{则}u(x)\text{调和}\Leftrightarrow u(x)=\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{S_r(x)}u(y)dS(y)\ \text{"球面平均"}$$

$$=\frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x)}u(y)dy\qquad\text{"球体平均"}$$

$\forall B_r(x)\subset D$, ω_n为n维单位球的体积

强最大值原理：

设$D\subset\mathbb{R}^n(n\geq 2)$有界连通，$u(x)\in C^2(D)\bigcap C(\bar{D})$调和，

且$\exists x_0\in D$使$u(x_0)=\max\limits_{\bar{D}}u$(或$\min\limits_{\bar{D}}u$)，则$u\equiv$常数 in D

Dirichlet原理：

令$E[w]=\frac{1}{2}\int_D|\nabla w|^2dx$, $w\in\mathcal{A}=\{w\in C^2(D)\,|\,w|_{\partial D}=h(x)\}$,

$$\text{则}u\in C^2(D)\text{满足}\begin{cases}\Delta u=0\text{ in }D\\ u|_{\partial D}=h(x)\end{cases}\Leftrightarrow E[u]=\min_{w\in\mathcal{A}}E[w]$$

基本积分公式：对$\forall u(x)\in C^2(D)$成立

$$u(x)=\int_D V(y-x)\Delta u(y)dy+\int_{\partial D}[u(y)\frac{\partial V(y-x)}{\partial\nu}-V(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}]dS(y),$$

其中$V(x-y)=V(y-x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln|x-y|,\ n=2\\ -\dfrac{|x-y|^{2-n}}{n(n-2)\omega_n},\ n\geq 3\end{cases}$ "全空间Δ的基本解"

Poisson方程第一边值问题的Green函数(有界区域的基本解)：

$$\begin{cases}\Delta_y G(x,y)=\delta(x-y),\ x,y\in D\\ G|_{\partial D}=0\end{cases}$$

Poisson方程第一边值问题的解： $\begin{cases}\Delta u=f(x),\ x\in D\subset\mathbb{R}^n,n\geq 2\\ u|_{\partial D}=\varphi(x)\end{cases}$

$$u(x)=\int_D G(x,y)f(y)dy+\int_{\partial D}\varphi(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial\nu}dS(y)$$ “Poisson公式”

Green函数的性质:

1. $G(x,y)=V(y-x)+H(y,x)$,

修正函数H满足$\begin{cases}\Delta_y H(y,x)=0,\ x,y\in D\\ H\big|_{\partial D}=-V(y-x)\end{cases}$

物理原理：$Green$函数$=$自由点电荷产生的电场$+$边界感应电荷产生的电场

而边界感应电荷产生的电场$=$虚设电荷产生的电场，虚设电荷满足：

(1)在域外 (2)在边界上与自由点电荷产生的电场相同

2. $\int_{\partial D}\frac{\partial G}{\partial \nu}dS=1$

3. $V(y-x)<G(x,y)<0, x\neq y\ (n\geq 3)$

4. 对称性(倒易性)：$G(x,y)$=$G(y,x)$

注:性质3的第一个不等式在n=2时不成立，因为修正函数在边界上可能取负值

镜像法(特殊区域的Green函数求法):

一般求解步骤:

1.利用边界计算所有虚设电荷的电量和位置(一般是某种对称点)

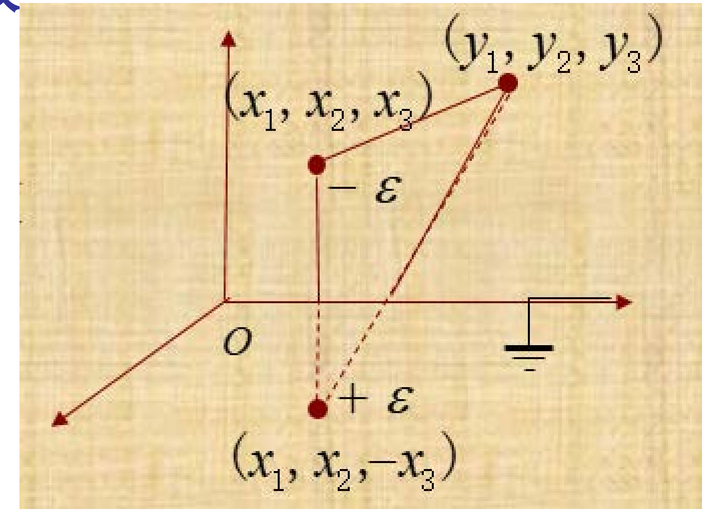
2.找出等效电场的解析表示

3.写出Green函数的简约表示式

注:求Green函数时物理方法比数学方法更加直观，计算更简便

例1. 上半空间第I边值问题的Green函数

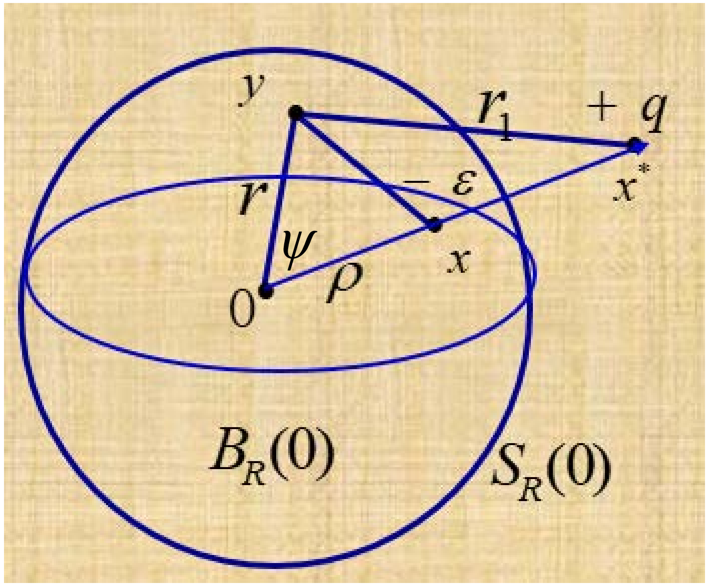
$$\begin{cases} \Delta_3 G = \delta(x-y),\ x_3, y_3 > 0 \\ G\big|_{y_3=0} = 0 \end{cases}$$



$$G(x,y) = -\frac{1}{4\pi|y-x|} + \frac{1}{4\pi|y-x^*|}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ x_3 > 0 \\ u\big|_{x_3=0} = \varphi(x_1, x_2) \end{cases} \text{的解} u = \frac{x_3}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\varphi(y_1, y_2)}{[(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + x_3^2]^{3/2}} dy_1 dy_2$$

例2. 球内第I边值问题的Green函数

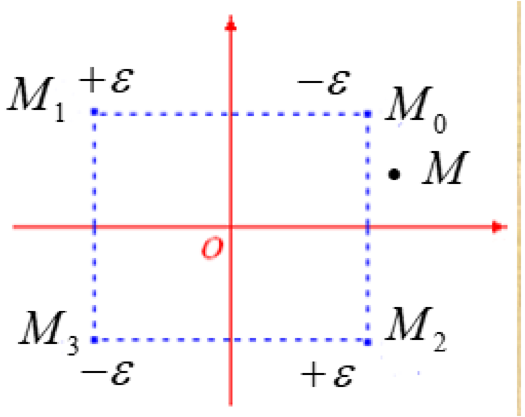


$$\begin{cases} \Delta_3 G = \delta(x-y),\ x, y \in B_R(0) \\ G\big|_{r=R} = 0\ (r := |y|) \end{cases}$$

$$G(x,y) = -\frac{1}{4\pi|y-x|} + \frac{R}{4\pi|x||y-x^*|}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_3 u = 0,\ x \in B_R(0) \\ u\big|_{r=R} = \Phi(x) \end{cases} \text{的解} u(x) = \frac{R^2-\rho^2}{4\pi R}\iint_{S_R(0)} \frac{\Phi(y)}{\left(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\psi\right)^{3/2}} dS(y)$$

例3. 第一象限第I边值问题的Green函数



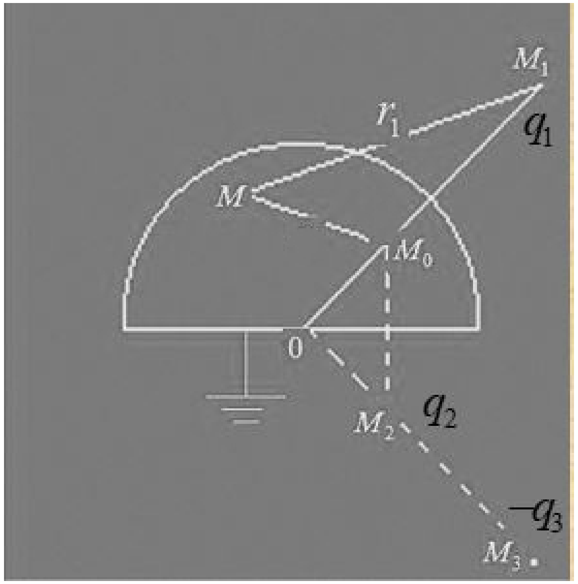
$$\begin{cases} \Delta_y G = \delta(x-y),\ y_1 > 0, y_2 > 0 \\ G\big|_{y_1=0} = G\big|_{y_2=0} = 0 \end{cases}$$

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r_0 r_3}{r_1 r_2} \quad (r_k = |M - M_k|, 0 \le k \le 3)$$

例4. 上半圆盘第I边值问题的Green函数

$$\begin{cases} \Delta_y G = \delta(x-y), x, y \in B_R^+(0) \subset \mathbb{R}^2 \\ G\big|_{S_R^+} = 0 \end{cases}$$

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0 r_3}{r_1 r_2}$$



保形变换法:仅适用二维区域

Fourier展开法:将Green函数按某正交基(保持同样的齐次边界)作广义Fourier展开，再利用方程和边界条件确定相关系数

一般有界区域上的定解问题

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u, \ x \in D \subset R^N, t > 0, N \geq 2 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$ **或** $$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, \ x \in D \subset R^N, t > 0, N \geq 2 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{\partial D} = 0 \end{cases}$$

$$v(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(x)}{kT(t)} = \frac{\Delta v(x)}{v(x)} = -\lambda$$ **或** $$\frac{T''(x)}{c^2 T(t)} = \frac{\Delta v(x)}{v(x)} = -\lambda$$

代入边界条件有

$$\begin{cases} \Delta v(x) + \lambda v(x) = 0 \quad in \quad D \\ v|_{\partial D} = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < \lambda_n \uparrow +\infty, \{v_n(x)\}_{n \geq 1} \text{为} L^2(D) \text{的正交基}$$

令形式解为 $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\lambda_n kt} v_n(x)$$

或 $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos c\sqrt{\lambda_n} t + D_n \sin c\sqrt{\lambda_n} t) v_n(x)$$

代入初始条件确定待定系数即可。

4.非线性偏微分方程

函数空间 $\mathbb{M}$上的**泛函**：$J:\mathbb{M}\to\mathbb{R}\ (u(x)\in\mathbb{M}\mapsto J[u(x)]\in\mathbb{R})$.

求泛函的极值问题称为**变分问题**，其相应的方法称为**变分法**

Euler-Lagrange方程：

泛函$J[u(x)]=\int_\Omega L(\nabla u(x),u(x),x)dx$的极值元$u$ 满足

$$-\sum_{i=1}^{N}(L_{p_i}(\nabla u(x),u(x),x))_{x_i}+L_z(\nabla u(x),u(x),x)=0$$ “Euler-Lagrange方程”

山路定理：设E为实Banach空间，泛函$J\in C^1(E,\mathbb{R})$满足Palais-Smale条件(即任何满足$J[u_k]$有界及$J'[u_k]\to 0$的序列$\{u_k\}_{k\ge1}\subset E$ 均有收敛子列)以及$(a)J[0]=0,\exists r,\alpha>0$满足$J[u]\ge\alpha\quad(\forall u,\|u\|=r);(b)\exists e\in E,\|e\|>r$满足$J[e]\le 0$.令$\Gamma=\{g\in C([0,1],E)\mid g(0)=0,g(1)=e\}$,则$c=\inf\limits_{g\in\Gamma}\max\limits_{t\in[0,1]}J[g(t)]$是$J$的临界值(鞍点)。

非线性偏微分方程的求解方法：初等解法和复杂解法

初等解法的例子.

1. $\nabla\cdot[\sigma(u)\nabla u]=0, w=\int_{u_0}^{u}\sigma(\xi)d\xi$(Kirchhoff变换) $\to \Delta w=0$

2. $u_t+uu_x=\beta u_{xx}, u=-2\beta\dfrac{\partial \ln v}{\partial x}$(Cole-Hopf变换) $\to v_t=\lambda v_{xx}$

3. $u_t=(\sigma(u)u_x)_x, u=u(\xi), \xi=\dfrac{x}{\sqrt{t}}$(相似变换) $\to (\sigma(u)u')'+\dfrac{\xi}{2}u'=0$

4. $u_t=(u^n u_x)_x, u=f(\xi), \xi=x+at$(行波变换) $\to af'=(f^n f')'$

5. $iu_t+u_{xx}+\beta|u|^2u=0, u=e^{i(kx-\mu t)}v(\xi), \xi=x-bt, k=b/2, \mu=k^2-a^2$(平面波变换)

$\to v_{\xi\xi}-a^2v+\beta v^3=0$

目前发展比较成熟的复杂解法：

反散射法，Backlund变换法，Darboux变换法，齐次平衡法，Hirota双线法, Tanh函数展开法……

四、自由讨论

1. 设$u(x,t)$是如下三维波动方程初值问题的光滑解，

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, \ x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \ (c > 0) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), u_t|_{t=0} = \psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

证明：能量均分原理$\lim\limits_{t\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} u_t^2 dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} c^2 |\nabla u|^2 dx$成立。

2. 求解$\begin{cases} u_t = u_{xx} - x u_x, \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \end{cases}$

3. 证明椭圆型方程的边值问题

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + c(x) u = f(x), \ x \in D \subset \mathbb{R}^n, n \ge 2 \\ u|_{\partial D} = \varphi(x) \end{cases}$$

的解u唯一，其中函数$a_{ij}(x), c(x), f(x), \varphi(x)$光滑，且$(a_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$对称正定,$c(x) \le 0$.