线性代数 (B1)

童伟华 管理科研楼 1205 室 [1]
E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

[1] 数学科学学院 中国科学技术大学

2021-2022 学年第二学期 MATH1009.08

§7 实二次型

在科学与工程应用中，经常会遇到多元二次多项式，譬如最小二乘法、二次曲线/曲面的分类、多元函数的极值问题等。

多元二次多项式：二次项的全体组成一个二次齐次多项式，称之为**二次型**。

目标：利用线性代数的理论，研究二次型的基本理论、性质及其应用等。

§7.1 二次型的矩阵表示

定义 7.1

在实数域 $\mathbb{R}$ 上，一个含 n 个变元 $x_1,\dots,x_n$ 的**二次型**$Q(x_1,\dots,x_n)$ 是一个齐次的二次多项式

$$Q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,$$

其中 $a_{ji}=a_{ij}\ (i,j=1,2,\dots,n)$ 为实系数。

（若 $a_{ij}\neq a_{ji}$，$\Rightarrow a_{ij}^{'}=a_{ji}^{'}=\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$）

利用矩阵的语言，记 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$Q(x_1,\dots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x},$$

称实对称矩阵 A 为二次型 $Q(x_1,\dots,x_n)$ 的**矩阵**，A 的秩称为**二次型的秩**。

§7.1 二次型的矩阵表示

二次型 $\overset{1-1}{\Longleftrightarrow}$ n 阶实对称矩阵

例如:

$$Q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

§7.1 二次型的矩阵表示

同一二次型在不同基下的矩阵之间有什么关系?

设线性空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$，$V$ 上的二次型 $Q(x_1, \ldots, x_n)$ 在这组基下的表示为:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}.$$

V 有另一组基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n$ 且有

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)P,$$

则

$$Q(y_1, \ldots, y_n) = (P\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}} A (P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} A P \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} B \boldsymbol{y},$$

其中对称矩阵 $B = P^{\mathrm{T}} A P$。

定义 7.2

对于实数域 $\mathbb{R}$ 上两个 n 阶矩阵 A, B，如果存在一个可逆的实矩阵 P 使得

$B = P^{\mathrm{T}}AP$, 则称 A 和 B 是**相合的**，或者说 B **相合于**A，矩阵 P 称为**相合变换矩阵**。

容易验证：相合关系是等价关系!

n 阶实对称矩阵在相合等价关系下的分类问题：

(1) 不变量；
(2) 全系不变量；
(3) 代表元。

§7.2 二次型的标准形

定义 7.3

如果二次型 $Q(x_1,\ldots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ 经过可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 化为下列平方和的简单形式:

$$Q(x_1,\ldots,x_n)\Big|_{\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}}=\mu_1y_1^2+\cdots+\mu_ny_n^2=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{y},$$

其中 $B=\mathrm{diag}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ 是实对角阵，称这种平方和形式为二次型的**标准形**。

二次型 $Q(x_1,\ldots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$，其中 A 为实对称矩阵

$\Rightarrow$ 存在正交矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow Q(x_1,\ldots,x_n)\Big|_{\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}}=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$

定理 7.1

实数域 $\mathbb{R}$ 上的任何一个二次型 $Q(x_, \ldots, x_n)$ 都可以经过正交变换 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ 化为标准形

$$Q(x_1, \ldots, x_n)\Big|_{\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

例 7.1

用正交变换将二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 化为标准形。

优点：保持度量，形式优美。

缺点：计算繁琐。

如果不用正交变换，是否有更简单的方法？（答案是肯定的，配平方法）

定理 7.2

对于任何一个实二次型

$$Q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,$$

均可通过配平方法找到可逆变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$，将二次型化为标准形

$$Q(x_1,\dots,x_n)\Big|_{\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}}=\mu_1y_1^2+\cdots+\mu_ny_n^2.$$

注意：$\mu_1,\dots,\mu_n$ 不要求是矩阵 A 的特征值。

用矩阵乘法的语言描述

定理 7.3

对每一个实二次型都可以通过初等变换使之化为标准形 $\Leftrightarrow$ 对每一个实对称矩阵 A，存在一系列初等矩阵 $P_1, \ldots, P_r$，使得 A 相合于实对角矩阵

$$P_r^{\mathrm{T}} P_{r-1}^{\mathrm{T}} \cdots P_1^{\mathrm{T}} A P_1 P_2 \cdots P_r = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} A \vdots I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对 } I \text{ 只作初等行变换}]{\text{对 } A \text{ 作成对的初等行列变换}} \begin{pmatrix} P^TAP \vdots P^T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{对 } I \text{ 只作初等列变换}]{\text{对 } A \text{ 作成对的初等行列变换}} \begin{pmatrix} P^TAP \\ P \end{pmatrix}$$

例 7.2

化三元的二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_3^2$ 为标准形。

例 7.3

化三元的二次型 $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ 为标准形。

§7.3 相合不变量与分类

二次型的标准形是不唯一的！ $\Rightarrow$ 不是相合等价类的代表元！

定理 7.4

设 A 是一个 n 阶实对称矩阵，则存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank}(A) = r + s \leq n$$

其中 r 是标准形中正项的项数，s 是负项的项数。上式右边的对角矩阵称为矩阵 A 的规范形。

$\Longleftrightarrow$ 给定实二次型 $Q(x_1, \ldots, x_n)$，存在可逆方阵 P 使得

$$Q(x_1, \ldots, x_n)\Big|_{x=Py} = y_1^2 + \cdots + y_r^2 - y_{r+1}^2 - \cdots - y_{r+s}^2,$$ 上式称为二次型 $Q(x_1, \ldots, x_n)$ 的规范形。

定理 7.5

惯性定理 实二次型 $Q(x_1,\ldots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ 的规范形中正项数 r 和负项数 s 是由二次型 $Q(x_1,\ldots,x_n)$ 唯一确定的，或者说是由实对称矩阵 A 唯一确定的。

r 为正惯性指数，s 为负惯性指数 $\Rightarrow$ 相合等价类的全系不变量!

$r+s$ 就是二次型的秩，即 $\mathrm{rank}(A)=r+s$

$r-s=2r-\mathrm{rank}(A)$ 称为二次型 (或矩阵 A) 的符号差

设欧氏空间 $\mathbb{R}^2$ 取定一个直角坐标系：$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2]$，平面二次曲线的一般方程为

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0,$$

其中 a_{11},a_{12},a_{22} 不全为 0。

分类目标：

1）确定 $F(x,y)$ 所对应的曲线属于那一类曲线?

（不求标准方程而只利用系数来判断）

2）确定其标准方程?

若采用齐次坐标，则

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} X^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

其中 $a_{21} = a_{12}$，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 是 2 阶实对称方阵，$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$。

如果取一个新的直角坐标系：$[\widetilde{O};\widetilde{\boldsymbol{e}}_1,\widetilde{\boldsymbol{e}}_2]$，则

$$X = T\widetilde{X} + X_0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & X_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{X}' \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 T 为正交矩阵（若保持定向，要求 $\det(T) = 1$）。

$$\Rightarrow \widetilde{F}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \begin{pmatrix} \widetilde{X} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ X_0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & X_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \widetilde{X} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\mathrm{T}}AT & T^{\mathrm{T}}AX_0 + T^{\mathrm{T}}B \\ X_0^{T}AT + B^{\mathrm{T}}T & X_0^{\mathrm{T}}AX_0 + 2B^{\mathrm{T}}X_0 + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ 1 \end{pmatrix}$$

（式中利用 $X_0^{\mathrm{T}}B = B^{\mathrm{T}}X_0$）

§7.4 二次曲线与曲面的分类

命题 7.6

对于 $F(x,y)$ 以下三个数：

$$I_1 = \mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22},\ I_2 = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\ I_3 = \begin{vmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & c \end{vmatrix}$$

在直角坐标变换下保持不变，称为二次多项式 $F(x,y)$ 的正交不变量，简称不变量。

利用 I_1, I_2, I_3 可对二次曲线 $F(x,y)$ 进行分类

情形 (I) 当 $I_2 = |A| = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$ 时 $\Rightarrow A$ 可逆

依据 I_1, I_2, I_3 不同取值，二次曲线 C 可分为 5 类：

(1) $I_2 > 0$，I_3 与 I_1 异号 $\Rightarrow C$ 是椭圆，$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$;
(2) $I_2 > 0$，I_3 与 I_1 同号 $\Rightarrow C$ 是虚椭圆，$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$;
(3) $I_2 > 0$，$I_3 = 0 \Rightarrow C$ 退化成点，$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$;
(4) $I_2 < 0$，$I_3 \neq 0 \Rightarrow C$ 是双曲线，$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$;
(5) $I_2 < 0$，$I_3 = 0 \Rightarrow C$ 是一对相交直线，$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$。

几何量：二次曲线的中心、对称轴、渐近线等

情形 (II) 当 $I_2 = |A| = \lambda_1\lambda_2 = 0$ 时 $\Rightarrow \lambda_2 = I_1$(设 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$)

依据 I_1, I_2, I_3 不同取值，二次曲线 C 可分为 4 类：

(1) $I_2 = 0$，$I_3 \neq 0 \Rightarrow C$ 是抛物线，$y^2 - 2px = 0$;

(2) $I_2 = I_3 = 0$，$K_1 < 0 \Rightarrow C$ 是一对平行直线，$y^2 - a^2 = 0$;

(3) $I_2 = I_3 = 0$，$K_1 > 0 \Rightarrow C$ 是一对虚平行直线，$y^2 + a^2 = 0$;

(4) $I_2 = I_3 = 0$，$K_1 = 0 \Rightarrow C$ 是一对重合直线，$y^2 = 0$,

其中 $K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix}$。

设 n 维欧氏空间 V 取定一个直角坐标系：$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\dots,\boldsymbol{e}_n]$，二次超曲面的一般方程为

$$F(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c=0,$$

其中 $a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\dots,n)$。

采用齐次坐标，则

$$F(x_1,\dots,x_n)=\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n\\ b_1 & \cdots & b_n & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}X^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ B^{\mathrm{T}} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ 1\end{pmatrix}$$

§7.4 二次曲线与曲面的分类

如果取一个新的直角坐标系：$[\widetilde{O};\widetilde{\boldsymbol{e}}_1,\widetilde{\boldsymbol{e}}_2,\dots,\widetilde{\boldsymbol{e}}_n]$，则

$$X = T\widetilde{X} + X_0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & X_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{X}' \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 T 为正交矩阵（若保持定向，要求 $\det(T) = 1$）。

$$\Rightarrow \widetilde{F}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\dots,\widetilde{x}_n) = \begin{pmatrix} \widetilde{X} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ X_0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & X_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \widetilde{X} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\mathrm{T}}AT & T^{\mathrm{T}}AX_0 + T^{\mathrm{T}}B \\ X_0^{T}AT + B^{\mathrm{T}}T & X_0^{\mathrm{T}}AX_0 + 2B^{\mathrm{T}}X_0 + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{X} \\ 1 \end{pmatrix}$$

（式中利用 $X_0^{\mathrm{T}}B = B^{\mathrm{T}}X_0$）

定理 7.7

对于实对称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，列矩阵 $B \in \mathbb{R}^n$ 以及实数 c，一定存在正交矩阵 T 以及列矩阵 $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得矩阵

$$\begin{pmatrix} T^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ X_0^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & X_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

具有以下简化形式：

(1) 当 $\operatorname{rank}(A \vdots B) = \operatorname{rank}(A)$ 时：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & c' \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的特征值，c' 是一个实数；

定理 7.7

(2) 当 $\operatorname{rank}(A \vdots B) \neq \operatorname{rank}(A)$ 时：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_k & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & c' \\ & & & & & c' & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(k < n)$ 是矩阵 A 的非零特征值，c' 是一个非零实数。

命题 7.8

n 维欧氏空间中的二次超曲面在适当选取直角坐标系后可以简化成以下两种方程之一：

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = c,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n, c \in \mathbb{R},$$

或

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_k x_k^2 = 2c x_n,\ k < n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, c \text{ 均为非零实数。}$$

$\Rightarrow n = 3$ 时，共 17 类标准方程！

§7.5 正定二次型

定义 7.4

n 元实二次型

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}$$

称为**正定二次型**，如果对任意非零向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 均有

$$Q(x_1, \ldots, x_n) > 0.$$

正定的二次型对应的矩阵 A 称为**正定矩阵**，简记为 $A > 0$。

$\Rightarrow$ 内积的度量矩阵是正定矩阵

§7.5 正定二次型

正定矩阵的相合标准形是什么? $Q(x_1,\ldots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$

$\Rightarrow \exists$ 可逆阵 P 使得

$$Q(x_1,\ldots,x_n)\Big|_{\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}}=y_1^2+\cdots+y_r^2-y_{r+1}^2\cdots-y_{r+s}^2,$$

且 $\operatorname{rank}(A)=r+s$, r 为正惯性指数, s 为负惯性指数。

$\Rightarrow$ 矩阵 A 正定 $\Leftrightarrow r=n, s=0$

定理 7.9

n 元实二次型

$$Q(x_1,\ldots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$$

正定的充要条件是 Q 的正惯性指数为 n。

$\Longleftrightarrow$ 实对称方阵 A 正定的充要条件是 A 相合于单位阵。

$\Rightarrow$ 正定二次型, 正定矩阵的等价定义

定理 7.10

设方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是实对称方阵，则下述命题等价：

(1) 方阵 A 是正定的；
(2) 方阵 A 的每个特征值都是正的；
(3) 存在正定对称方阵 A_1，使得 $A=A_1^2$；
(4) 存在可逆方阵 P，使得 $A=P^{\mathrm{T}}P$；
(5) 方阵 A 的每个主子式都是正的；
(6) 方阵 A 的每个顺序主子式都是正的。

$\Rightarrow$ 正定矩阵的等价定义

§7.5 正定二次型

例 7.4

判断二次型

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$$ 是否正定。

定理 7.11

设 A, B 是两个 n 阶实对称矩阵，其中 A 是正定的，则存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 A 和 B 同时相合于对角阵，即

$$P^{\mathrm{T}}AP = I,\ P^{\mathrm{T}}BP = D,$$

其中 D 为对角阵。

§7.5 正定二次型

n 个变元的二次型 $Q(x_1,\ldots,x_n)=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}$ 的分类:

(1) 正定二次型: $r=n,s=0\Leftrightarrow$ 正定矩阵;
(2) 半正定二次型: $r<n,s=0\Leftrightarrow$ 半正定矩阵, 简记为: $A\geqslant 0$;
(3) 负定二次型: $r=0,s=n\Leftrightarrow$ 负定矩阵, 简记为: $A<0$;
(4) 半负定二次型: $r=n,s<n\Leftrightarrow$ 半负定矩阵, 简记为: $A\leqslant 0$;
(5) 不定二次型: 其他情形 $r=n,s=0\Leftrightarrow$ 不定矩阵;

思考: 负定矩阵 A 的顺序主子式满足什么条件?

§7.5 正定二次型

例 7.5

设 A 为 3 阶实对称矩阵，且满足条件：$A^2+2A=\mathbf{0}$。已知 $\mathrm{rank}(A)=2$，求

(1) 矩阵 A 的全部特征值；

(2) 当 k 为何值时，矩阵 $A+kI$ 为正定矩阵。

例 7.6

设二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}A\mathbf{x}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$。已知矩阵 A 的全部特征值之和为 1，全部特征值之积为 -12，

(1) 求 a，b 的值；

(2) 利用正交变换将二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵。

§7.5 正定二次型

线性代数 (B1)

童伟华

例 7.7

已知二次型 $Q(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$ 且 P 的第三列为 $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$，

(1) 求矩阵 A;

(2) 证明 $A+I$ 为正定矩阵。

Thanks for your attention!