§3.2 微分

3.2.1 微分的定义

定义 1 设 $\boldsymbol{y = f(x)}$ 在给定一点 $\boldsymbol{x}$ 的附近有定义. 如果存在数 $\boldsymbol{A = A(x)}$ 使得

$$\boldsymbol{f(x+\Delta x) - f(x) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)}, \quad (\text{当 } \boldsymbol{\Delta x \to 0} \text{ 时})$$

则称 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 可微, 线性部分 $\boldsymbol{A \cdot \Delta x}$ 称为函数 $\boldsymbol{y = f(x)}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处的微分, 记为

$$\boldsymbol{dy = A \cdot \Delta x}, \quad \text{或} \quad \boldsymbol{df(x) = A \cdot \Delta x}.$$

函数 $\boldsymbol{f(x)}$ 在 $\boldsymbol{x}$ 可微, 就是说在 $\boldsymbol{x}$ 处, 函数的增量 $\boldsymbol{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}$ 与微分 $\boldsymbol{A \cdot \Delta x}$ 只差一个关于自变量增量 $\boldsymbol{\Delta x}$ 的高阶无穷小量.

定理 1 函数 $y = f(x)$ 在 x 可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x 可导, 这时 $dy = f'(x)\Delta x$. 因此函数在一点可导有时也称为在一点可微.

证明 如果函数 f 在 x 可微, 即 $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, 则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A$$

也就是, 函数在这一点可导. 反之, 如果 f 在 x 处可导, 则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) - f(x))}{\Delta x} - f'(x) = 0.$$

这说明

$$\varepsilon = \frac{\Delta y - f'(x)\Delta x}{\Delta x}$$

是当 $\Delta x \to 0$ 时的无穷小量: $\varepsilon = o(1)$. 所以 $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, 其中 $A = f'(x)$. 因此函数在 x 处可微.

注意, 函数 $y=f(x)$ 在一点 x 的微分是一个与 x 相关的线性映射, 它将 Δx 映到 $f'(x)\Delta x$, 而不是另一个 x 的函数. 特别, 当我们考察函数 $y=f(x)=x$ 时, 就得到

$$dy = dx = (x)'\Delta x = \Delta x.$$

此时自变量的微分与自变量的改变量相等. 于是函数 $y=f(x)$ 在点 x 的微分又可记成

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

现在, dx 与 dy 都有完全确定的意义, 它们分别是自变量 x 和函数 y 的微分, 并且

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x).$$

即函数在一点的导数是其因变量的微分和自变量的微分的商. 以往我们把 $\frac{dy}{dx}$ 当作一个完整记号来表示微商, 而现在可以将它看成是"两个微分的商". 这也是"微商"这个名词的来由.

几何解释 如图, 过 $y = f(x)$ 的图象上一点 $(x, f(x))$ 作切线 L. 易知, 函数图象纵坐标的改变量（即函数的改变量）是 Δy, 而 L 上点的纵坐标的改变量就是函数 $y = f(x)$ 在点 x 处的微分 $dy = f'(x)\Delta x$.

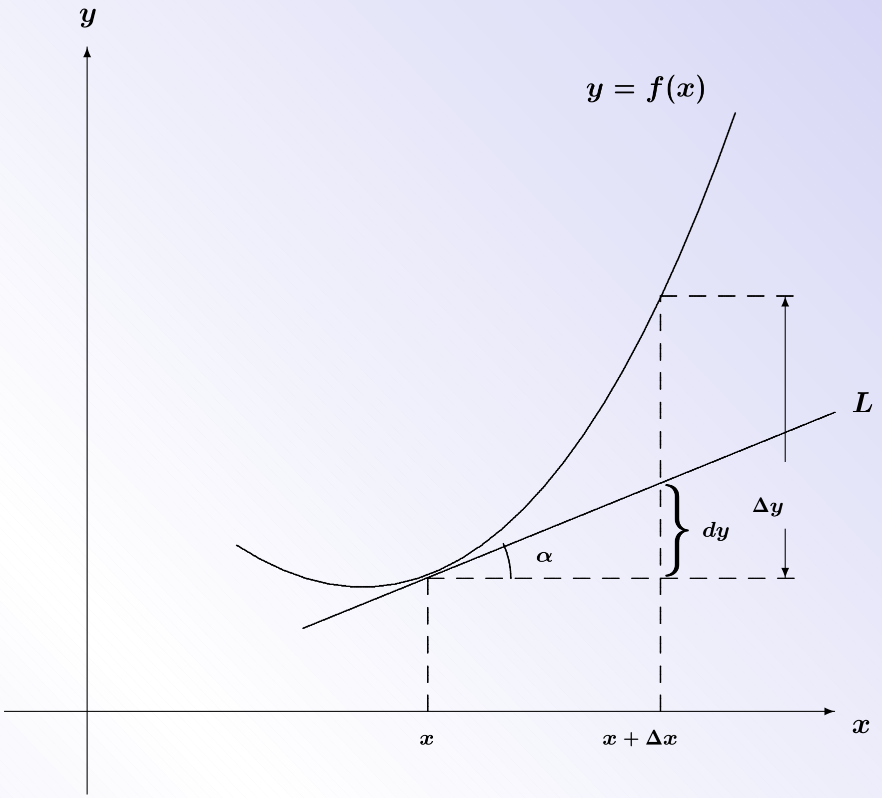

图 3.1

由于 $|\Delta y - dy| = o(\Delta x)$, 故当 $|\Delta x|$ 很小时, 函数在点 x 的改变量与切线的改变量的差, 相比自变量的改变量 Δx 来说, 是高阶无穷小. 因此在点 x 附近, 可以用过 $(x, f(x))$ 的切线代替函数描述的曲线. 这就是微积分中“以直代曲”的基本思路.

近似计算 因为函数 $\sin x$, $\tan x$, e^x, $\ln(1+x)$ 在 0 点的导数是 1 所以在 0 附近有

$$\sin x \approx x, \quad \tan x \approx x, \quad e^x \approx 1+x, \quad \ln(1+x) \approx x.$$

函数 $(1+x)^\alpha$ 在 0 点的导数是 α, 所以在 0 附近有

$$(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x.$$

例 1

$$\sqrt{101} = (100+1)^{1/2} = 10\left(1+\frac{1}{100}\right)^{1/2} \approx 10\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}\right) = 10.05,$$

例 2

$$\sqrt[5]{245} = (243+2)^{1/5} = 3\left(1+\frac{2}{243}\right)^{1/5} \approx 3\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{243}\right),$$

因为 $\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{243} \approx 0.0016$, 所以

$$\sqrt[5]{245} \approx 3.0048.$$

3.2.2 微分运算的基本公式和法则

由微分的表达式 $dy = f'(x)dx$ 以及基本初等函数的求导公式, 可以对应地给出基本初等函数地微分公式:

$d(c) = 0$ (c为常数);

$d\sin x = \cos x\, dx$; $\quad d\cos x = -\sin x\, dx$;

$d\tan x = \sec^2 x\, dx$; $\quad d\cot x = -\csc^2 x\, dx$;

$d\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$; $\quad d\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

$d\arctan x = \frac{1}{1+x^2}\, dx$; $\quad d\mathrm{arccot}\, x = -\frac{1}{1+x^2}\, dx$;

$de^x = e^x\, dx$; $\quad d\ln x = \frac{1}{x}\, dx$;

$da^x = a^x \ln a\, dx$; $\quad d\log_a x = \frac{1}{x\ln a}\, dx$;

$dx^\mu = \mu x^{\mu-1}\, dx$;

此外, 由于微分和导数的对应关系, 我们不难得到下列定理.

定理 2 设函数 u 和 v 在 x 处可微, 则函数 cu, $u \pm v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$ (其中, 对于最后的分式, $v \neq 0$) 在 x 处可微, 且有

$d(cu) = c\,du$, 其中 c 为常数;

$d(u \pm v) = du \pm dv$;

$d(uv) = v\,du + u\,dv$;

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, $v \neq 0$.

返回 全屏 关闭 退出

定理 3 设 $y=\varphi(x)$ 定义在区间 I 上, $z=f(y)$ 定义在一个包含 $\varphi(I)$ 的区间 J 上. 如果 $y=\varphi(x)$ 在 x 上可微, $z=f(y)$ 在 $y=\varphi(x)$ 处可微, 则复合函数 $z=f(\varphi(x))$ 在 x 处也可微, 并有

$$dz=f'(y)dy,$$

其中 $dy=\varphi'(x)dx$ 是函数 $y=\varphi(x)$ 在 x 处的微分.

证明 由微分表达式和复合函数求导的链式法则, 有

$$\begin{aligned} dz &= (f(\varphi(x)))'dx = f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\ &= f'(y)dy. \end{aligned}$$

定理 3 说明, 从形式上看无论 y 是自变量还是中间变量, $z=f(y)$ 的(一阶)微分具有相同的形式 $df(y)=f'(y)dy$. 这种性质称为一阶微分形式不变性.

例 3 求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ 的微分, 其中 a 是常数.

解

$$
\begin{aligned}
d\left(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right) &= \frac{d(x+\sqrt{x^2+a^2})}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(dx+\frac{d(x^2+a^2)}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx.
\end{aligned}
$$

由此还可以得到该函数的导数

$$
\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.
$$

例 4 设 $0 < q < 1$, 函数 $y = y(x)$ 满足下列方程

$$y - x - q \sin y = 0.$$

求函数 $y = y(x)$ 的导数.

解 我们不能从方程中解出 y 的显示表示, 因此为了求 $y'(x)$, 在上列等式的两端对 x 求微分, 并利用一阶微分形式的不变性, 得

$$dy - dx - q \cos y dy = 0.$$

故

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - q \cos y}.$$

1. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$. 求证: 对任意自然数 n, 在区间 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 中存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$.

证明 考察函数 $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$. 此函数是区间 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上的连续函数. 只需证明 $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上有零点.

若 $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上无零点, 则由介值定理知, $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上恒为正, 或者恒为负.

若 $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上恒为正, 则有

$$g(\frac{j}{n})=f(\frac{j}{n})-f(\frac{j}{n}+\frac{1}{n})>0,\quad j=0,1,\cdots,n-1.$$

将上式对 $j=0,1,\cdots,n-1$ 求和, 得到

$$f(0)>f(1).$$

这与条件矛盾!

若 $g(x)$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上恒为负, 则可类似地得到 $f(0)<f(1)$. 也与条件矛盾!

2. 求证对任意自然数 n, 方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 恰有一个正根 x_n; 进一步证明, 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证明 因为函数 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ 在 $[0, +\infty)$ 是严格单调递增的连续函数, 而且 $f(0) = -1 < f(1) = n - 1$, 所以根据介值定理, 有唯一的正数 x_n 使得 $f(x_n) = 0$. 即, x_n 是所给方程的唯一的正根.

根据所设, 有

$$x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1, \tag{1}$$

$$x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1} = 1. \tag{2}$$

若 $x_n \leqslant x_{n+1}$, 则 $x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1} \geqslant x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1$, 这与 (2) 式矛盾. 因此必有 $x_n > x_{n+1}$. 即, 数列 $\{x_n\}$ 是严格单调递减的正数列. 于是它是收敛的. 设 $\lim x_n = d$.

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

在 (1) 的两边乘以 $1 - x_n$ 可得

$$x_n(1 - x_n^n) = 1 - x_n. \tag{3}$$

因为当 $n \geqslant 2$ 时, $x_n \leqslant x_2 < x_1 = 1$, 所以 $x_n^n \to 0$.

在 (3) 中令 $n \to +\infty$ 得

$$d = 1 - d.$$

于是 $d = \frac{1}{2}$.

3. 设 $a<b$. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意 $x\in[a,b)$ 存在 $y\in(x,b)$ 使得 $f(y)>f(x)$. 求证: $f(a)<f(b)$.

证明 对于 a, 根据条件可知, 存在 $y_1\in(a,b)$, 使得 $f(y_1)>f(a)$. 设

$$E=\{x\in(y_1,b)\ :\ f(x)>f(y_1)\}.$$

则根据条件, 集合 E 是非空有界的. 令 $B=\sup E$. 则 $B\in(y_1,b]$, 且从 f 连续性可知 $f(B)\geqslant f(y_1)$. 从而 $f(B)>f(a)$.

假设 $B<b$, 则再根据条件可知, 存在 $y_2\in(B,b)$, 使得 $f(y_2)>f(B)$. 因而 $f(y_2)>f(y_1)$. 这说明 $y_2\in E$, 且 $y_2>B$. 但这与 B 是 E 的上确界矛盾! 于是必有 $B=b$.

这就证明了 $f(b)>f(a)$.

4. (**连续模**) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 对 $\delta > 0$ 定义

$$\omega_f(\delta) = \max_{\substack{x,y\in[a,b] \\ |x-y|\leqslant\delta}} |f(x) - f(y)|$$

称为 $f(x)$ 的连续模, 再定义非负整数

$$\lambda(x,y,\delta) = \left[\frac{|x-y|}{\delta}\right].$$

求证

$$|f(x) - f(y)| \leqslant (1 + \lambda(x,y,\delta))\omega_f(\delta); \tag{1}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0; \tag{2}$$

$$\omega_f(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega_f(\delta_1) + \omega_f(\delta_2). \tag{3}$$

证明 对于 $x, y \in [a, b]$ 不妨设 $x < y$. 若 $y - x \leqslant \delta$, 则有

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \omega_f(\delta) \leqslant (1 + \lambda(x, y, \delta))\omega_f(\delta),$$

此时 (1) 成立.

若 $y - x > \delta$, 则 $\lambda \geqslant 1$. 由定义, 有

$$\frac{y - x}{\delta} - 1 < \lambda \leqslant \frac{y - x}{\delta},$$

即,

$$y - \delta < x + \lambda\delta \leqslant y.$$

记 $x_j = x + j\delta$, $j = 0, 1, \cdots, \lambda$. 则有

$$0 \leqslant y - x_\lambda < \delta, \quad 0 < x_{j+1} - x_j = \delta,\ j = 0, 1, \cdots, \lambda - 1.$$

因而有

$$|f(y) - f(x_\lambda)| \leqslant \omega_f(\delta),$$

$$|f(x_{j+1}) - f(x_j)| \leqslant \omega_f(\delta),\ j = 0, 1, \cdots, \lambda - 1.$$

将这些不等式相加, 可得

$$|f(y)-f(x)| \leqslant (1+\lambda)\omega_f(\delta).$$

此时 (1) 仍成立.

因为 $[a,b]$ 上的连续函数是一致连续的, 所以对任意正数 ε, 存在 $\delta_1>0$, 当 $x,y\in[a,b]$ 且 $|y-x|\leqslant\delta_1$ 时, 有

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon.$$

因而

$$\omega_f(\delta_1)\leqslant\varepsilon.$$

从连续模的定义可知 $\omega_f(\delta)$ 作为 δ 的函数是递增的, 于是当 $0<\delta<\delta_1$ 是都有 $\omega_f(\delta)\leqslant\varepsilon$. 这就证明了

$$\lim_{\delta\to 0}\omega_f(\delta)=0.$$

设 δ_1,δ_2 是正数. 对于任意 $x,y\in[a,b]$ 并且 $|y-x|\leqslant\delta_1+\delta_2$. 可选到 x 与 y 之间的一点 z 使得 $|y-z|\leqslant\delta_1$, $|z-x|\leqslant\delta_2$. 因此, 有

$$|f(y)-f(x)|\leqslant|f(y)-f(z)|+|f(z)-f(x)|\leqslant\omega_f(\delta_1)+\omega_f(\delta_2).$$

由 x,y 的任意性, 可得

$$\omega_f(\delta_1+\delta_2)\leqslant\omega_f(\delta_1)+\omega_f(\delta_2).$$

于是 (iii) 成立.

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

5. (**在区间上的振幅**) 设 $f(x)$ 是区间 I 上的有界函数. 称

$$\omega_f(I) = \sup_{x,y\in I} |f(y) - f(x)| = \sup_{y\in I} f(y) - \inf_{x\in I} f(x)$$

为 $f(x)$ 在区间 I 上的振幅.

显然, 当 $I \subset J$ 时, 有

$$\omega_f(I) \leqslant \omega_f(J).$$

6. (**在一点的振幅**) 设 $f(x)$ 是区间 I 上的有界函数. 对于 $x \in I$, $\delta > 0$, 记 $I_x(\delta) = (x-\delta, x+\delta) \cap I$. 称

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \omega_f(I_x(\delta))$$

为 $f(x)$ 在点 $x \in I$ 的振幅.

容易证明, 有

$$f \text{ 在 } x \text{ 连续} \iff \omega_f(x) = 0.$$

7. 求所有 $[0,+\infty)$ 上的非负连续函数 $f(x)$, 使其满足 $f(0)=0$, 且对任意 $x \geqslant 0$ 有

$$f(f(x))=x. \tag{1}$$

解 显然函数 $f(x)=x$ 满足条件. 现证明这是唯一满足条件的连续函数.

对于 $x, y \in [0,+\infty)$, 若有 $f(x)=f(y)$, 则

$$x=f(f(x))=f(f(y))=y.$$

这说明 $f(x)$ 是单射. 因为连续的单射是严格单调的, 所以 $f(x)$ 严格单调递增, 或者严格单调递减. 由于 $f(0)=0$ 且非负, 因此 $f(x)$ 只能严格单调递增.

对于 $x>0$. 若 $f(x)>x$, 则有 $f(f(x))>f(x)$. 结合 (1), 得到 $x>f(x)$. 矛盾! 若 $f(x)<x$, 则有 $f(f(x))<f(x)$. 结合 (1), 得到 $x<f(x)$. 也矛盾! 于是必有 $f(x)=x$.