实分析期末复习

任宣霏

2023 年 6 月

发扬“实变函数学十遍”的精神，不知道第几遍了。边再学一遍这门课边整理一些我认为比较重要的内容，还有一些碎碎念，供同学们参考。由于个人水平实在有限，不一定写的都是重要的、有用的内容，也难免有遗漏。

作为数学专业的学生，这门课是一定要学好的，这也是到目前为止最能体现数和非数差距的课程之一。当然包括学统计的同学，因为我自己就是概率统计方向的，也深知这门课的意义。你需要的不再是数分、线代里的各种技巧，而是去领会真正的数学思想。比较聪明的同学可能刚接触实分析的时候不会觉得有趣，因为它很难带给你解出数分线代概率论题目时的爽快。但这是真正的“硬”分析课，学好以后带来的是思想和观念上的转变。

1　来自评课社区的学长的一些话

章俊彦学长的这部分评课无论是当时修课还是现在看都蛮有感触的，这是全文链接，下面摘取部分分享。

翻看往年的实分析试卷，我们都能看到有一半以上都是作业原题，加上一两个比较难的题。这是因为实分析这门课的特点决定了考试成绩一定是两极分化——你一旦理解了知识框架，那做实分析题目是一通百通；你如果一直蒙在萝卜干的鼓里，那“记忆作业题”可能都是一件很艰难的事情。这必然导致了大家遇到新题目会出现严重的两极分化——要么满分要么零分。有时候你以为你写了沾边的东西，其实都是没用的废话。

因此，实分析试卷的命制必须用大量作业题或者简单题将大家先送到及格线以上，再让大家在剩下的 40 分或是更少分数里面两极分化。这一点，当过助教的同学就深有体会。

请务必认真自己写作业，考前请务必认真背诵布置过的作业题。

考前复习的时候，请

1. 梳理知识框架（提供一个我去年做的示例链接，请点击这里）
2. 尽可能填补上面提到的知识框架里面的细节，而不是按书上的定理编号一个一个背过去，否则你很难去理解这些定理的动机与证明的关键技巧。
3. 回顾某些作业题，这个作业题告诉了我们什么东西？它在定理证明里面用在哪了？
4. 做往年考题。做题的时候请务必用手拿着笔在纸上写下你的所有过程。很多时候“你觉得能行”的地方往往是这道题最难的地方。

很多同学都觉得自己“差不多对了”，“差不多理解了”，结果就考一点点分。

说这句话之前，请问一下自己，你真的能叙述出这个知识框架吗？

如果能，你真的能填补出这个知识框架吗？

如果能，你真的能用笔写下来你是如何填补的吗？

这就是 70 分以下、84 分、94 分和 100 分以上的区别。

所谓“实变函数学十遍”——“硬分析”不在于你短时间内快速接触了多少新的概念与想法，它所需要的更多是需要长时间的积累，千锤百炼，才能慢慢在你的脑子里形成“条件反射”一般的思维。同学们不要因为题目很难就感到和灰心丧气：几乎所有人在第一遍学时都不可能熟练掌握。如果真的能把这些认真学下来，那么这门课的第一名就是你！

2 测度论、积分论，还是“逼近论”？

2.1 测度论

这部分的核心便是逼近：用“好的”去逼近“坏的”，并让“坏的”继承逼近材料的“好”性质。比如我们定义测度，是从方体测度出发。因为方体是比较容易研究的材料，对它横竖如何切割、拼接，得到的都是容易“测量”的“方体”。然后得到能被方体逼近的“可测集”。研究可测集的各种性质，事实上便是将“方体”的“好”性质尽可能多的迁移到一大类集合当中。这部分最精彩的部分是可数可加性，它描述了不交集合测度的可加性，但由于是“好”性质的迁移，最终也没有做到方体那么好（回忆：方体是可以做

到对于“几乎”不交集合的测度可加性）。至于那些无法被逼近的，便称作“不可测集”，它们难以继承“好”性质，这门课便放弃对它们的研究。

而对于函数，也是由一系列逼近定理，在研究“逼近”的过程。直接对应“方体”的叫“阶梯函数”，“阶梯函数”对于”简单函数”的逼近过程事实上就是“方体”对于“可测集”的逼近过程，我们在上一部分已经解决了这个问题。再后面，我们证明了单调简单函数列能逼近非负函数，简单函数列能逼近可测函数，以及阶梯函数对于可测函数的 $a.e.$ 逼近。到这里，我们便在尝试着将“方体”，也就是“阶梯函数”的“好”性质一步步迁移到一大类函数中，这一类函数叫做“可测函数”。

关于可测函数的性质，有趣的是 Littlewood 三原则中的 $Egorov, Lusin$ 定理，它们描述了从简单函数到可测函数的定义过程中“好”性质的迁移，$Egorov$ 不太明显，而 $Lusin$ 对于阶梯函数是显然的，要做的则是把阶梯函数的性质迁移到一般可测函数。

2.2 积分论

有关“好性质迁移”重头戏是第二章的积分论。

首先是积分的构造。我们可以直接用测度定义阶梯函数，甚至是简单函数的积分。然后对于一般的可测函数的积分，直接定义为它的“逼近材料”简单函数的积分的极限，并且这个定义是良定的。

$$simple\ f_n \to f \Rightarrow \int f_n \to \int f\ (by\ definition)$$

在这个定义下，我们便一步步证明了如此定义的 $Lebesgue$ 积分，也满足相似的逼近性质，这就是积分与极限的换序定理：

$$f_n \to f \Rightarrow \int f_n \to \int f$$

有次，当我们想研究一个“坏”函数 f 时，如果能找到恰当的逼近函数 f_n，问题就迎刃而解了。当然，一般情况下这一步的成立便需要各种条件 ($MCT, DCT \ldots$).

$Lebesgue$ 控制收敛定理是实分析的顶峰。你可能考完试一个月就忘记了可测集和可测函数的定义，但是不能忘记 DCT，以后读到换序时，找控制函数的证明，你要清楚这是为什么可以做到。

2.3 函数空间及其上面的拓扑

下面大部分是抄了田学长的评课。（原文链接）

在分析学的大厦中，我们会遇到各种各样的函数空间，这门课我们主要学习两种最为基础的函数空间（**这门课基本只证明了完备性和一些范数不等式，更多更细的将在《泛函分析》中学习**）：L_p 空间，它是一个 Banach 空间；L_2 空间，它是一个 Hilbert 空间，也就是可以定义内积的完备空间。L_p 空间的对偶，以及各种积分不等式的估计 (Holder,Minkowski...)，是这一部分的学习重点。到了这个阶段，大家必须明白：**“理解定理”比掌握“定理的证明”更重要**。大家必须自己体会为什么这个定理有资格叫作定理，它为什么重要，有哪些应用？“掌握定理本身”比“会做题”更重要，这与我们之前学习的数学分析、线性代数等课，在学习模式上有着本质不同。举个例子 (这个例子我也不懂，别细看)：在积分不等式的学习中，我们会遇到一个重要的定理，Riesz-Thorin 插值不等式。它的证明用到了调和分析的技巧，在这门课中是不做要求的，而且在后续的学习中，也基本没有地方会用到它的证明。大家初学的时候，可以直接跳过证明，但必须要理解它为什么重要（它刻画了当 p 在一个区间上连续变化时，一个线性算子在这一系列不同的 L_p 空间上，有着怎样的联系）以及它有什么应用（在傅立叶变换与广义算子的有界性控制中，起着重要作用）。

研究函数空间的各种拓扑结构之间的关系，事实上就是各种收敛性之间的互推。我们这门课常见的收敛大致有：几乎处处收敛，依测度收敛，依 L_p 范数收敛（近乎一致收敛和一致收敛作为补充）。太重要了，务必会手写每一步互推，然后去记忆无法推出的反例！(**求求了背也要背下来**)

下面列举常见的反例 (据说可以解决 90% 举反例的题目)：

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$$
$$f_n(x) = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$$
$$f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}$$
$$f_n(x) = \chi_{[\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\},\{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\}]}$$

这里 $\{\cdot\}$ 代表“取小数部分”，即把原数映射到 $[0,1)$ 区间上。最后一个例子便是不几乎处处收敛，但是依测度依范数收敛的经典例子。

另外，测度与积分论里还有很重要的一个内容是**一致可积性**。但这部分历年在本科的实分析都讲不到。有兴趣的同学自己去搜索概念了解一下，不做要求。不光是学基础数学重要，概率统计方向学到测度论版本的知识也全是这些东西。

2.4 Fubini 定理

也是实分析的一大定理了。从结果到一系列应用都很重要。这部分从乘积测度开始理解。首先要理解“截面”这个概念, 比如说:

- E 可测，是否有 E_x 可测?
- E 可测，是否有 $a.e.E_x$ 可测?
- 是否存在 $E \subset [0,1]^2, \forall x \in [0,1], E_x$ 可测但 E 不可测?
- 存在 $E \subset [0,1]^2$, 使 $m(E_x) = 0, \forall x, m(E^y) = 1, \forall y$, 此时 $\int_0^1 m(E_x)dx \neq \int_0^1 m(E^y)dy$!（涉及连续统假设的承认，不要求理解掌握，大概知道意思就好）

以上不存在的例子由不可测集构造，肯定的命题由 $Fubini$ 定理保证。会举例子并理解 $Fubini$ 的“三条”结论很重要，因为它不只告诉你积分换序，还告诉你在一定条件下，有关乘积空间里可测的结论。

注意 $Fubini$ 的推论中有一条，$m^*(E_1 \times E_2) \leq, m^*(E_1)m^*(E_2)$. 事实上等号总能取到，可以自己想想，或者上 MSE 论坛搜一下解答。

3 微分

这部分我主要分为覆盖引理、Lebesgue 微分定理、Goodkernel 和逼近恒同、有界变差函数和绝对连续函数来讲。

对同学们的要求是熟悉并尽量熟练推导所有你能见到的结论（课上、作业题、参考书）。但全部题目做出来还是太难了，Stein 上面的题目不给答案我也经常做不出来。所以对大家的要求也只是“熟悉”、“熟练”，基本功还是要扎实。

3.1 覆盖引理

作为推导大定理的工具出现在这里，也不太适合作为考试题目。但还是要把课上的证明都看懂，会推简单的性质。最起码定理能熟练地写出来，并用自己的话解释它做了什么。

3.2 Lebesgue 微分定理

仿照 Riemann 积分的结果，证明了“先积分后微分”的对应结论。注意到这一章我们得到的很多结论都是 $a.e.$ 成立的，比如几乎处处可导，这种条件是无法使用中值定理的。但是对于**处处**连续可微的函数，“微分论”和数学分析中的完全相同，中值定理等都可以迁移过来。要熟悉的概念有：极大函数、密度（density）点、Lebesgue 点（区分其与 Lebesgue 微分定理的关系）。讲义中不长的小证明都要会手推，至少在考试前要学会，短暂记忆也行，对考试有帮助。

3.3 Good kernel 与 A.I.

这一部分老师不要求，主要是一个工具。但是对于后面的数学学习还是蛮重要的，属于是那种“很重要、但不知道适合在哪门课来讲”的知识。说不准以后的某门课老师会默认你之前学过这些。

我能想起的主要应用，一个是磨光逼近 L_1 函数，一个是证明 L_1 函数的 Fourier 的 Cesaro 求和可以几乎处处收敛到 f, 还有一个三角多项式的逼近。当然老师都没有细讲，不会也行，逼近我也忘得差不多了，脑袋空空。

3.4 有界变差函数和绝对连续函数

这部分课程的主线是通过加条件（给函数一步步加有界变差、绝对连续等条件），来得到经典的 $Newton - Leibniz$ 公式。但课时有限，在证明完大定理便匆忙结束了这一章。关于 BV 函数的经典结论有：

- $f(x) - f(a) = P_f(a,x) - N_f(a,x)$；
- 连续 BV 函数 f 的变差函数 $T_f(a,x)$ 连续；
- 半个 N-L 公式，即在 BV 的条件下只能得到一个不等号。

而如果将 BV 函数强化为 AC 函数，便能得到完整的 N-L 公式。反之，由积分的绝对连续性，满足 N-L 公式的函数一定绝对连续。这也是绝对连续函数最好的等价刻画。

其中绝对连续函数的全变差

$$T_f(a,b) = \int_a^b |f'|,$$

这个课上应该提到了，最好会手推。

另外，BV 函数和 AC 函数还有许多好的性质，如果你真的想学透这门课（的第三章），需要了解很多。具体可以参考助教发的第 13 次习题课讲义开头提到的，周民强解题指南的 5.2 和 5.4 节也有不少，有时间最好都看一遍。比较经典的是算全变差（用定义划分为单调区间来算、或者对绝对连续函数用上面的对导数积分的定理），或者证明非有界变差（通常通过定义，取一些特殊点来证明变差可以任意大）。剩下的我也想不起来了。

4 结语

以上提到的一定是我认为最重要的主干部分，但正如本文开头所说，想学好实分析，只会重要的还远远不够，更多的细节需要各位自己去推敲、补充、理解。要多去练习自己写证明，写的严谨、还要漂亮。千万不要想当然，有的时候你觉得很直观的跳过去的一步，认真写才能发现是这个问题里最难的一步，所以“手推”证明是一个很重要的能力。也希望大家不会出现“全做出来了，但全不得分”的结果。最后，现在开始复习完全来得及，但时间越来越少了，祝大家考试顺利！实分析的考试不会像数分线代通篇侧重技巧，而是考察同学们是否有扎实的基本功，认真学习的同学一定会得到满意的成绩。