Lec11 Note of Abstract Algebra

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 19 日

我们回忆 $G \circlearrowleft X$ 指的是存在映射：

$$\begin{aligned} G \times X &\to X, \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

满足

(1) $g(hx) = (gh)x,\ \forall\, g, h \in G$；

(2) $1_G \cdot x = x,\ \forall\, x \in X$。

同时这也等价于存在 G 的表示 $\rho\colon G \to S(X)$。

特别地我们考虑一种特殊的作用。

定义 2.3. 考虑

$$\begin{aligned} G \times G &\to G, \\ g \cdot x &\mapsto {}^g x = gxg^{-1}. \end{aligned}$$

称为 G 在 G 上的**共轭作用**。

与之对应的表示满足 $\rho\colon G \to \mathrm{Inn}G \le \mathrm{Aut}G \le S(G)$。

注意到此时 $|G| = |\mathcal{O}_x||G_x|$，因为 $G/G_x \xleftrightarrow{1-1} \mathcal{O}_x$。以及对 $G \circlearrowleft X,\ \varnothing \neq Y \subset X$，若 $g \cdot Y \subset Y,\ \forall\, g \in G$，则诱导了 G 在子集 Y 上的作用。

对 $x \in G$，

$$c_x = \mathcal{O}_x = \{gxg^{-1} \mid g \in G\},$$

称为 x 所在的**共轭类**。而

$$Z_G(x) = G_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$$

称为 x 的**中心化子**。而对于 $T \subset G$，T 的**中心化子**定义为：

$$\begin{aligned} Z_G(T) &= \bigcap_{t \in T} Z_G(t) \\ &= \{g \in G \mid gt = tg,\ \forall\, t \in T\}. \end{aligned}$$

命题 2.4. 设 $|G| < \infty$，则

(1) $|G| = |c_x| \cdot |Z_G(x)|$；

(2) $|G| = \sum\limits_{x\in I} |c_x| = |Z(G)| + \sum\limits_{x\in I, |c_x|\geq 2} |c_x|$。$I$ 为共轭类的完全代表元系。

命题 2.5. 设 G 为 p 群 (p 素，$|G| = p^r,\ r \geq 1$)，X 为集合，$|X| = n,\ (n,p) = 1,\ G \circlearrowleft X$，则 X 有不动点，即 $\exists\, x \in X$，使得 $g \cdot x = x,\ \forall\, x \in G$。特别地，$G$ 有非平凡中心。

证明. 设 I 为轨道完全代表元系，则

$$|X| = \sum_{x\in I} |\mathcal{O}_x| = \sum_{x\in I} \frac{|G|}{|G_x|}.$$

而 $|\mathcal{O}_x| = p^i,\ 0 \leq i \leq r$，那么 $(|X|, p) = 1 \Rightarrow \exists\, x,\ (|\mathcal{O}_x|, p) = 1 \Rightarrow |\mathcal{O}_x| = 1$。从而 x 为不动点。

现在考虑 $G \circlearrowleft G$ 为共轭作用，则 $G \circlearrowleft G \setminus \{1_G\} =: X$ 为诱导的共轭作用。$|X| = p^r - 1,\ (|X|, p) = 1 \Rightarrow\ \exists\, x \in X$ 为不动点 $\Rightarrow 1_G \neq x \in Z(G)$。 □

评论. 对 $n \geq 3,\ Z(S_n) = \{1_G\}$。

设 $H \leq G$，记 $c_H = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$ 为 H 的共轭子群，这里 $gHg^{-1} \leq G$。则有可迁作用：

$$\begin{aligned} G \times c_H &\to c_H, \\ (g, H_1) &\mapsto g \cdot H_1 := gH_1g^{-1}. \end{aligned}$$

定义 2.4. H 在 G 的共轭作用下的稳定子群

$$N_G(H) = G_H = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

称为 H 在 G 中的**正规化子 (Normalizer)**。

显然 $H \leq N_G(H),\ |c_H| = |G|/|N_G(H)|$。

于是 $G \circlearrowleft c_H$ 诱导了 $\rho\colon G \to S(c_H)$，进而

$$\mathrm{Ker}\rho = \bigcap_{g\in G} N_G(gHg^{-1}) = \bigcap_{g\in G} gN_G(H)g^{-1}$$

称为共轭作用的核。

例 2.7. 设 $|G| = n$，p 为 n 的最小的素因子，那么 $[G:H] = p \Rightarrow H \triangleleft G$。

特别地，若 $[G:H] = 2$，则 $H \triangleleft G$。

值得一提的是 $H \triangleleft N_G(H)$ 是 G 中包含 H，且 H 在其中正规的最大子群。

证明. 我们考虑群作用：

$$\begin{aligned} G \times G/H &\to G/H, \\ (g, xH) &\mapsto gxH. \end{aligned}$$

其对应的表示为 $\rho\colon G \to S(G/H) = S_p$。那么 $\mathrm{Ker}\rho = \bigcap\limits_{g} G_{gH} = \bigcap\limits_{g\in G} gHg^{-1} \leq H$，我们熟知 $\mathrm{Ker}\rho \triangleleft G$，那么我们试图证明 $\mathrm{Ker}\rho = H$。

注意到 $|\mathrm{Im}\rho|=\frac{|G|}{|\mathrm{Ker}\rho|}$，$\frac{|G|}{|\mathrm{Ker}\rho|}=\frac{|G|}{|H|}\frac{|H|}{|\mathrm{Ker}\rho|}=p\frac{|H|}{|\mathrm{Ker}\rho|}\Rightarrow p\mid|\mathrm{Im}\rho|$。而另一方面 $\mathrm{Im}\rho\leq S_p\Rightarrow|\mathrm{Im}\rho|\leq p!$。由于 p 为 n 的最小素因子，故 $|\mathrm{Im}\rho|$ 的最小素因子亦为 p，从而不可能有比 p 小的因子，故 $|\mathrm{Im}\rho|\mid p!\Rightarrow|\mathrm{Im}\rho|=p$。从而 $|\mathrm{Ker}\rho|=|H|\Rightarrow\mathrm{Ker}\rho=H$。 □

3 Sylow 定理

我们熟知 $H\leq G\Rightarrow|H|\mid|G|$，那么我们自然要问，对于 $d\mid|G|$，是否存在子群 H 使得 $|H|=d$?

我们不妨考虑简单一些的情况，例如 p 素，$p\mid|G|$，此时有下面的结果：

定理 3.1. *Cauchy*：*p 为 $|G|$ 素因子，则 G 中存在 p 阶元。*

证明. 我们考虑集合

$$S=\{(x_1,x_2,\cdots,x_p)\mid x_1x_2\cdots x_p=1\}\subset G^p.$$

由于 $|G|=n$，$x_p=x_{p-1}^{-1}\cdots x_1^{-1}$ 完全由前 $p-1$ 个分量决定，故 $|S|=n^{p-1}$。显然 $p\mid|S|=n^{p-1}$。

于是我们考虑 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 在 S 上的作用,这里设 g 是 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 的生成元,令 $g\cdot(x_1,x_2,\cdots,x_p)=(x_2,\cdots,x_p,x_1)$。那么 X 中的轨道的轨道长度为 1 或 p。若轨道长度为 1，则该元素必然为 $(x,x,\cdots,x)$，从而 $x^p=1$。注意到 $x=e$ 为一个不满足要求的解。那么我们将 X 分解为轨道的不交并，由于 $p\mid|X|$，那么 $|X|\equiv 0\mod p$，这其中自动略去轨道长度为 p 的轨道，于是得到若干轨道长度 1 的轨道，而 $x=e$ 为其中一个轨道，故至少有 $p-1$ 个其它非平凡的 x 使得 $x^p=1$。 □

定义 3.1. $n=|G|=p^r\cdot m,\ (p,m)=1,\ H\leq G$，若 $|H|=p^k,\ 1\leq k\leq r$。则称 H 为一个 $p-$ **子群**。

若 $|H|=p^r$，则称 H 为一个 **Sylow** $p-$ **子群**。

我们的目标在于证明 Sylow $p-$ 子群存在，从而任一 p^k 阶子群存在。

定理 3.2. *Sylow 定理：p 素，$|G|=p^rm,\ (p,m)=1$，则*

(1) G 存在 Sylow $p-$ 子群。

(2) 任一 Sylow $p-$ 子群 P，以及任一个子群 Q，则存在 $g\in G$，使得 $Q\leq gPg^{-1}$。

(3) 记 Sylow $p-$ 子群的个数为 $N(p)$，则 $N(p)\equiv 1\mod p,\ N(p)\mid|G|$。

证明. (1) 设对阶 $<n$ 的群，Sylow $p-$ 子群存在。

$$|G|=|Z(G)|+\sum_{i=1}^{\alpha}[G:Z_G(g_i)],$$

其中 $g_1,\cdots,g_\alpha$ 为长度 ≥ 2 的共轭类代表元系。

(a) 若 $p \mid |Z(G)|$，则存在 p 阶元 g，从而 $\langle g\rangle \leq Z(G)$, $|\langle g\rangle| = p$。且 $\langle g\rangle \lhd G \Rightarrow |G/N| = p^{r-1}m$，那么存在其 Sylow $p-$ 子群为 $|H/N| = p^{r-1}$，于是 $|H| = p^r$，H 为 G 的 Sylow $p-$ 子群。

(b) 若 $(p, |Z(G)|) = 1$，则 $\exists\, i$, $([G : Z_G(g_i)], p) = 1 \Rightarrow |Z_G(g_i)| = p^r m'$，那么 $Z_G(g_i)$ 由 Sylow $p-$ 子群 P，进而也为 G 的 Sylow $p-$ 子群。

□