第十八讲 (2023.5.10)

首先回忆

Riemann积分框架下的 FTOC

Part I. 先积分后微分

Thm $f\in C[a,b] \Longrightarrow F(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \int_a^x f(t)\,dt,\ x\in[a,b]$

在 $[a,b]$ 上可微且

$F'(x)=f(x),\ x\in[a,b]$

Q: $f\in C[a,b]$ 换为 $f\in R[a,b]$，是否成立？

Q: - - - - - - - $f\in L^1[a,b]$, - - - -

A: 在 a.e. 意义下，Yes (Lebesgue 微分定理)

Part II 先微分后积分

Thm $\left.\begin{array}{l} F \text{ 可微} \\ F'\in R[a,b] \end{array}\right\} \Longrightarrow \int_a^x F'(t)\,dt = F(x)-F(a)$

(Newton-Leibniz)

Q: 条件改为 $\left\{\begin{array}{l} F \text{ a.e. 可微} \\ F'\in L^1[a,b] \end{array}\right.$，是否成立？

A: No.

反例: $F(x) = \begin{cases} A, & x=a \\ 0, & a<x<b \\ B, & x=b \end{cases}$

Q: $\left.\begin{array}{l} F \text{ 连续, a.e. 可微} \\ F' \in L^1[a,b] \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow}$ N-L. ?

A. No.

反例. Cantor-Lebesgue 函数.

为推广到高维, 注意

$$F' = f \iff \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,dy = f(x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(y)\,dy = f(x)$$

更一般地 $\lim_{\substack{|I|\to 0 \\ I\ni x}} \frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy = f(x)$

Q: $f\in L^1(\mathbb{R}^n) \overset{?}{\Rightarrow} \lim_{\substack{m(B)\to 0 \\ B\ni x}} \frac{1}{m(B)}\int_B f\,dm = f(x)$ for a.e. $x\in\mathbb{R}^n$

Def

$$L^1_{loc} \overset{def}{=} \{ f : f \in L^1(K), \forall K \subset\subset \mathbb{R}^n \}$$

$$= \{ 局部可积函数 \}$$

紧

Thm (LDT)

$$f \in L^1_{loc} \Rightarrow \lim_{\substack{m(B)\to 0 \\ B \ni x}} \frac{1}{m(B)} \int_B f \, dm = f(x)$$

for a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

Def 对 $f \in L^1_{loc}$,

$$f^*(x) \overset{def}{=} \sup_{B \ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f| \, dm \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

称为 f 的(非中心) H-L 极大函数

$$Mf(x) \overset{def}{=} \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f| \, dm$$

称为 f 之中心 H-L 极大函数.

HW: 证明 $Mf(x) \le f^*(x) \le 2^n Mf(x)$

Prop $f \in L^1_{loc} \Rightarrow Mf$ 下半连续, i.e.

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\{ Mf > \alpha \}$ 开.

Pf $x \in \{Mf > \alpha\}$

$$\iff \alpha < Mf(x)$$

$$\implies \exists\, r > 0,\ \text{s.t.}$$

$$\alpha < \frac{1}{m(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f|\, dm$$

$$\implies \exists\, \rho > r \quad \text{s.t.}$$

$$\alpha < \frac{1}{m(B_\rho(x))} \int_{B_r(x)} |f|\, dm$$

$$\forall\, y \in B_{\rho-r}(x),\quad B_r(x) \subset B_\rho(y)$$

$$\left[\begin{array}{l} \forall\, z \in B_r(x) \\ |z-y| \\ \le |z-x| + |x-y| \\ < r + \rho - r \end{array}\right.$$

$$\implies \alpha < \frac{1}{m(B_\rho(y))} \int_{B_r(x)} |f|\, dm$$

$$\le \frac{1}{m(B_\rho(y))} \int_{B_\rho(y)} |f|\, dm$$

$$\le Mf(y)$$

$$\implies B_{\rho-r}(x) \subset \{Mf > \alpha\}$$

Cor $f \in L^1_{loc} \implies Mf$ 可测

HW: $f \in L^1_{loc} \implies f^*$ 可测

Thm (H-L 极大定理)

算子 $M: L^1 \to L^+$ 是弱(1,1)型的. i.e.

$f \mapsto Mf$

$\exists C>0$, s.t.

$$m(\{Mf > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_1, \quad \forall \alpha>0, \ \forall f \in L^1$$

Cor $f \in L^1 \Longrightarrow Mf$ a.e. 有限

Pf $\{Mf = +\infty\} \subset \{Mf > \alpha\}$, $\forall \alpha$

$$\Longrightarrow m(\{Mf = +\infty\}) \leq m(\{Mf > \alpha\}) \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_1 \to 0$$

as $\alpha \to +\infty$

Thm (Vitali 覆盖引理)

$\mathcal{B} \overset{\text{def}}{=} \{B_1, \cdots, B_N\}$ 是有限个开球.

$\Longrightarrow \exists B_{k_1}, \cdots, B_{k_p} \in \mathcal{B}$ s.t.

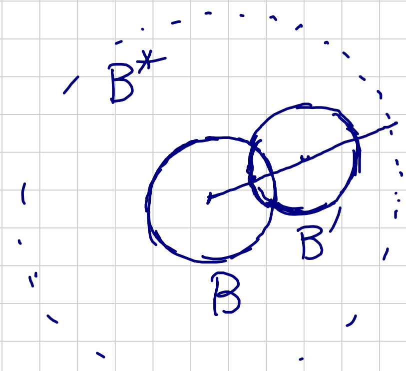
$$\sum_{j=1}^{p} m(B_{k_j}) \geq \frac{1}{3^n} m\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k\right).$$

Pf $\underset{2}{\Leftarrow}$

$B^* \overset{\text{def}}{=} B$ 的同心球 with $\operatorname{diam} B^* = 3 \operatorname{diam} B$

则 $\forall B, B'$, with $B \cap B' \neq \phi$, $\operatorname{diam} B' \leq \operatorname{diam} B$

$\Longrightarrow B' \subset B^*$



现在开始选取.

原则是先挑大的.

从 $\mathcal{B}$ 中选出半径最大者 B_{k_1}

(不唯一时任选其一), 并从 $\mathcal{B}$ 中删除与 B_{k_1}

相交者. (这些球可被 $B_{k_1}^*$ 覆盖)

剩下的球全体记为 $\mathcal{B}_1$

对 $\mathcal{B}_1$ 做同样操作, 选出最大者 B_{k_2}, 并删除与之相交者.

$\vdots$

$\Rightarrow$ 得到 $B_{k_1}, \dots, B_{k_p}$, 互不相交 (与之相交者已被删除)

Claim $\sum_{j=1}^{p} m(B_{k_j}) \geq \frac{1}{3^n} m\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k\right)$

$\forall B \in \mathcal{B}$, $\exists j \in \{1, \dots, p\}$ s.t.

$B \cap B_{k_j} \neq \phi$, 且 $\operatorname{diam} B \leq \operatorname{diam} B_{k_j}$

(∵ B 要么是 $B_{k_1}, \dots, B_{k_{p_1}}$ 之一，要么是某一步被删除者)

$$\Rightarrow B \subset B^*_{k_j}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=1}^{N} B_k \subset \bigcup_{j=1}^{p} B^*_{k_j}$$

$$\Rightarrow m\left(\bigcup_{k=1}^{N} B_k\right) \leq \sum_{j=1}^{p} m(B^*_{k_j}) = 3^n \sum_{j=1}^{p} m(B_{k_j})$$