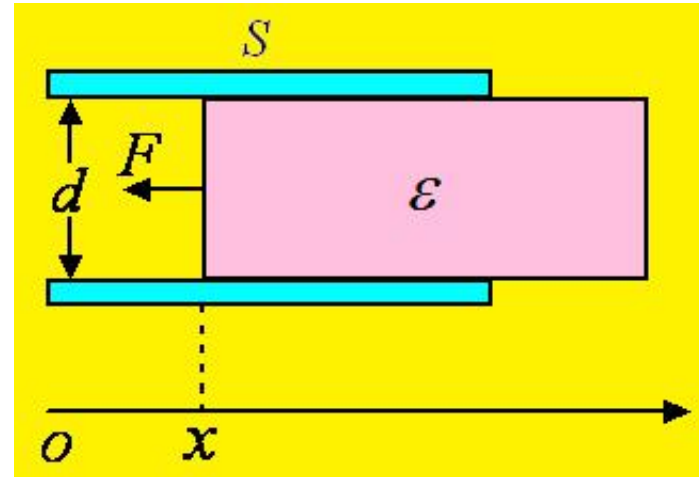
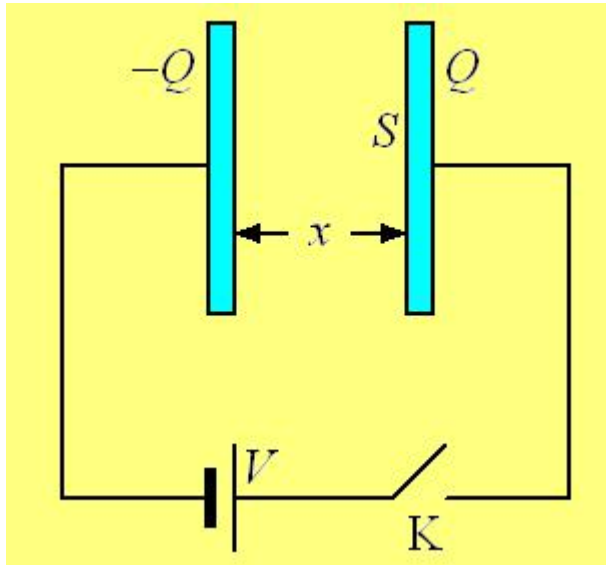


思考题讨论



- **思考题3.2** 用直接法计算例3.6。
- **思考题3.3** 从电荷、电场的角度定性分析例3.7中电介质板所受静电力方向。

思考题3.4 点电荷 q 与接地无穷大导体平板相距 a ，求体系总静电能、感应电荷的自能。

解答： 设感应电荷在 q 处的电势为 U_q ，则总静电能

$$W_e = \frac{1}{2}(qU_q + q'U_{\text{板}}) = \frac{1}{2} \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 2a} + 0 = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a}$$

互能，即 q 在感应电荷电场中的电势能

$$W_{\text{互}} = qU_q = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

感应电荷自能

$$W_{\text{板}} = W_e - W_{\text{互}} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a} + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a}$$

第十五讲 2022-04-14

第4章 稳恒电流

§ 4.1 稳恒条件

§ 4.2 欧姆定律与焦耳定律

§ 4.3 电源与电动势

§ 4.4 基尔霍夫定律

§ 4.5 稳恒电流与静电场的综合求解

欧姆定律微分形式的优点

- 便于说明导电的微观机制；
- 便于用场的观点阐述稳恒电路的基本原理；
- 便于研究大块导体中电流和电场的分布规律；
- 比积分形式适用范围更广：实验表明，欧姆定律的微分形式对于一些非稳恒情况也有效。
- 可导出截面不均匀导线的电阻公式

$$U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int \rho \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} = \int \rho S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} / S = I \int \rho dl / S,$$

$$\Rightarrow R = \int \rho dl / S.$$

2. 焦耳定律

焦耳定律 (积分形式) 为

$$P_e = IU = U^2/R = I^2 R$$

单位体积的热功率称为热功率密度

$$p = P/V = I^2 R/V \quad (*)$$

类似推导欧姆定律微分形式 $j = \sigma E$ 的做法, 考虑一段长 Δl 、截面积 ΔS 的电流管, 则有

$$I = j\Delta S, \quad R = \frac{\Delta l}{\sigma\Delta S}, \quad V = \Delta S\Delta l,$$

将这三个量代入 $(*)$ 式, 得焦耳定律的微分形式

$$p = j^2 / \sigma$$

3. 经典电子论观点解释欧姆定律和焦耳定律

以金属导体为例

- 微观结构：金属中的原子倾向于失去部分电子而成为正离子。全部正离子周期有序排列，形成“晶体点阵”或“晶格”。脱离原子的电子称为自由电子，它们不束缚于某一特定的正离子，而是为全体正离子所共有。
- 无外电场 (且一切理想化，如温度均匀、自由电子数密度均匀) 时，金属中的自由电子好像气体中的分子一样无规热运动，没有特定方向，因而 $j=0$ 。

- 有外电场时，自由电子在电场力驱动下加速，直到与晶格碰撞。在电场力和碰撞力的共同作用下，自由电子沿外电场的反方向漂移，形成沿电场方向的宏观电流。
- 与晶格的碰撞改变电子的运动方向和速率，并将部分能量转移给晶格上的正离子，使其热振动加剧。这就是金属具有电阻和焦耳热的原因。
- 电子漂移速度的定量分析：电子在相邻两次碰撞之间匀加速漂移，而每次碰撞后电子对原来的速度完全丧失记忆，即沿各方向等概率散射，宏观定向速度 $u_0=0$ (见力学与理论力学下册)。

在下次碰撞之前，电子的宏观定向速度

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}\bar{\tau} = -e\bar{\tau} \boldsymbol{E} / m$$

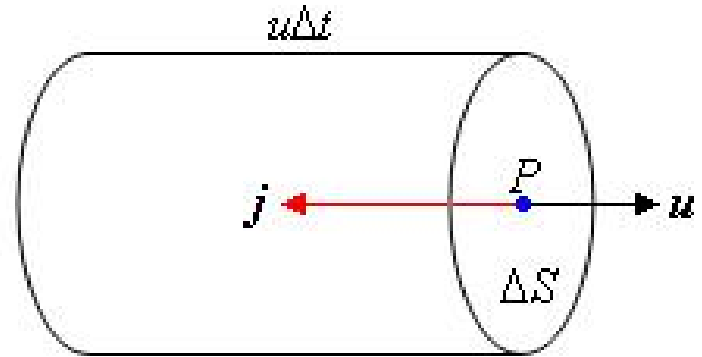
其中 $\bar{\tau}$ 为电子在相邻两次碰撞之间的平均自由飞行时间。设电子的平均自由程为 $\bar{\lambda}$ ，平均热运动速率为 \bar{v} ，一般情况下 $\bar{v} \gg u_1$ ，则近似有

$$\bar{\tau} = \bar{\lambda} / \bar{v}$$

而电子的漂移速度 \boldsymbol{u} 应是碰撞前后宏观定向速度的平均，即

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_1) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_1 = -\frac{e\bar{\lambda}}{2m\bar{v}} \boldsymbol{E}$$

- j 和 u 的定量关系：在导体中过某点 P 作面元 $\Delta S \perp u$ 。经过 Δt 后电子漂移距离为 $u\Delta t$ 。



以 ΔS 为底， $u\Delta t$ 为高，逆 u 方向作一柱体，则在 Δt 时间内，只有柱体中的电子全部通过 ΔS 。设电子的数密度为 n ，这些电子的总数为 $nu\Delta t\Delta S$ ， $\rightarrow \Delta I = \Delta q / \Delta t = neu\Delta S \rightarrow j = \Delta I / \Delta S = neu$ 考虑到方向，则

$$\mathbf{j} = -neu\mathbf{u}.$$

- j 和 E 的定量关系：将 u 的表达式代入上式得

$$\mathbf{j} = \frac{ne^2 \bar{\lambda}}{2m\bar{v}} \mathbf{E}$$

- 电导率

与欧姆定律 $j=\sigma E$ 比较，可求得电导率的表达式为

$$\sigma = \frac{ne^2 \bar{\lambda}}{2m\bar{v}}$$

我们不仅解释了欧姆定律，而且导出了电导率与微观量的关系。该关系定性正确，定量不符：

$$T \uparrow \text{ 则 } \sigma \downarrow (\checkmark), \quad \sigma \propto \frac{1}{\bar{v}} \propto \frac{1}{\sqrt{T}} (\times).$$

严格定量的金属导电机制需要用到量子理论。

- 分析单位时间因碰撞而损失的能量，可以得到焦耳定律的微分形式 $p=j^2/\sigma$ 。

4. 欧姆定律的失效问题—— j 与 E (I 与 U) 线性否?

- 1) 电场很强 (金属中 $E > 10^3 - 10^4 \text{ V/m}$) 时, $u \sim \bar{u}$, 计算 $\bar{\tau}$ 时不可忽略与电场有关的 u , 即 $\bar{\tau} = \bar{\tau}(E)$, $\rightarrow j$ 与 E 的关系非线性。另, 高速运动电子与晶格碰撞可使正离子进一步电离, $n = n(E)$, 加剧 j 和 E 间的非线性。
- 2) 低气压下的电离气体, $\bar{\lambda} \uparrow$, $\bar{\tau} \uparrow$, 则 $u \uparrow$, 从而导致欧姆定律失效, 理由同前。
- 3) 晶体管、电子管, 其导电机制导致 I 与 U 非线性。
- 4) 高频交变电场中的导体内, 稳恒条件不成立。
- 5) 各向异性导体的 σ 是张量, j 与 E 不同向。
- 6) 超导体中。

§ 4.3 电源与电动势

如何产生稳恒电流？

- 矛盾：电流线闭合、电场线不闭合 vs $j \parallel E$ ！
- 破解：非静电力，助正电荷从低电势→高电势。

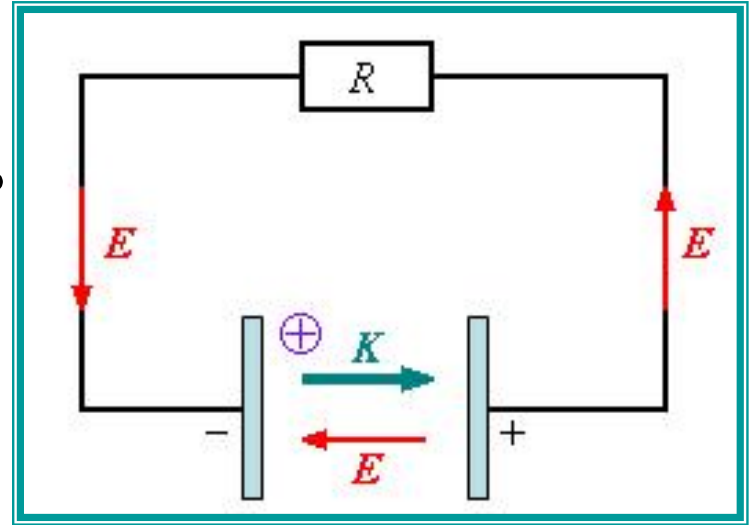
常见的非静电力

- 溶液中离子对极板的化学亲和力；
- 与温度梯度和电子浓度梯度相联系的扩散作用；
- 光伏效应；
- 核力 (α 放射性源)；
- 磁场对运动电荷的洛伦兹力；
- 变化磁场产生的涡旋电场对电荷的作用力。

1. 电源与电动势

提供非静电力的装置称**电源**。

- **作用之一**：在电源内部提供非静电力，将正电荷从负极搬运到正极，如右图所示。



其中 **K** 表示**单位正电荷所受**非静电力，电路断开时 **K** 与 **E** 反向且平衡。

- **作用之二**：当电路接通时，电源会引发**极板及外电路**各处累积**电荷**，这些电荷在电路中产生静电场 **E** ，使电流经外电路由**正极**指向**负极**。

- 由上所述，电荷 q 在电路受力情况是：

外电路 $F=qE$ ，电源内 $F=q(K+E)$

已经由 $F=qE$ 得到了外电路欧姆定律 $j=\sigma E$ ，
类比，可由 $F=q(K+E)$ 得到电源内欧姆定律

$$j=\sigma_{\text{内}}(K+E)$$

- 实际应用中，描述电源的性质，更常用的不是 K ，而是电动势 \mathcal{E} ，它定义为

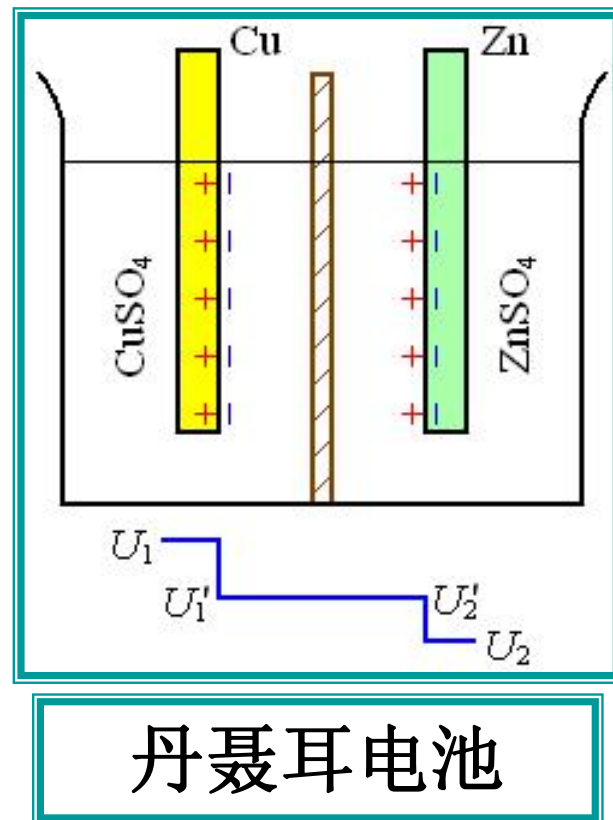
$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} K \cdot dl \text{ (电源内部)}$$

- 可通过与电势比较来理解电动势的物理意义，其单位也是伏特。

2. 常见的几种电源

1) 化学电池

- 通过**化学反应**提供非静电力，将化学能转换为电能，使正、负电荷分离并在两极板上累积，形成两极间的电势差。
- 最先发明的电源之一——**伏打电池**，由浸在稀硫酸溶液中一块铜片和一块锌片组成。化学反应使铜片带正电形成**正极**，锌片带负电形成**负极**。
- 后来改进为**丹聂耳电池**。它是一种蓄电池，可以充放电。



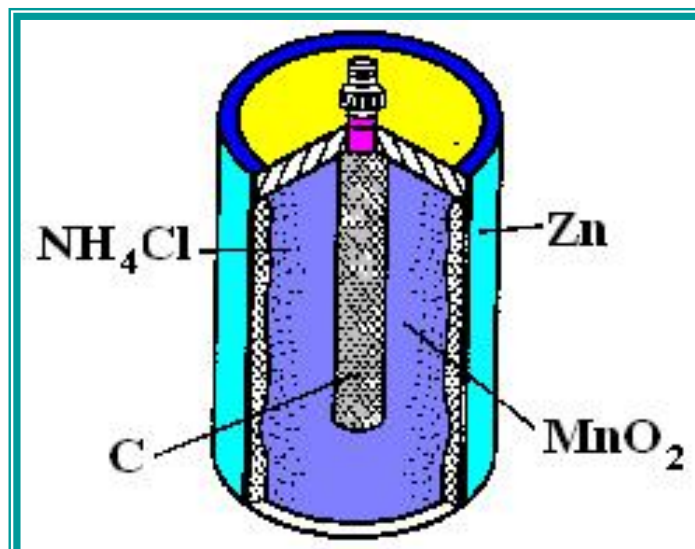
丹聂耳电池

- 各类干电池和蓄电池、银锌纽扣电池、锂电池等都是化学电池。

2) 光电池

- 光能转化为电能的装置，如太阳能电池。电池吸收光能，产生光生电子-空穴对，电池两端积累异号电荷，产生电压→光生伏打效应。

书中101第三行有误



干电池的结构示意

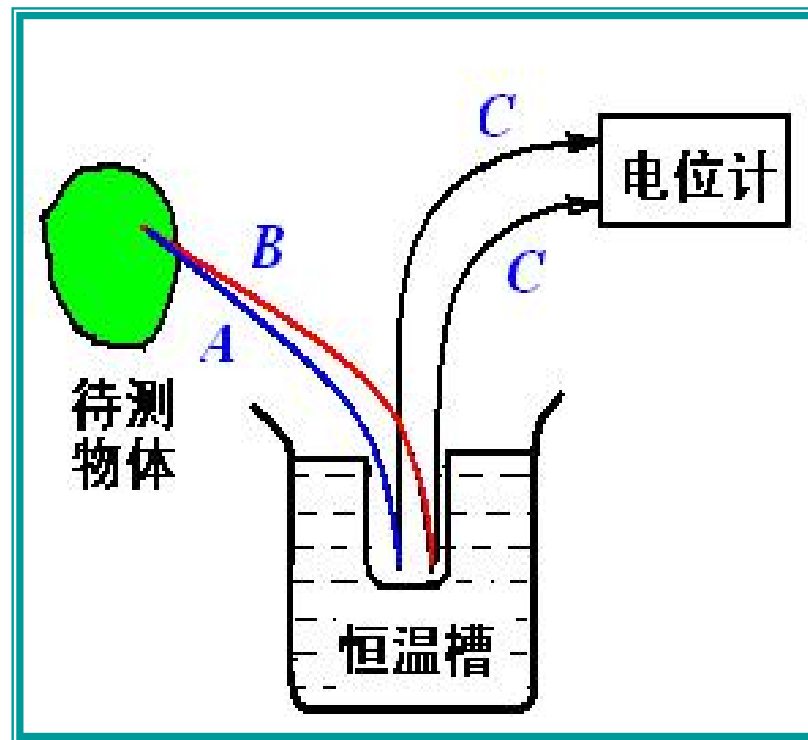
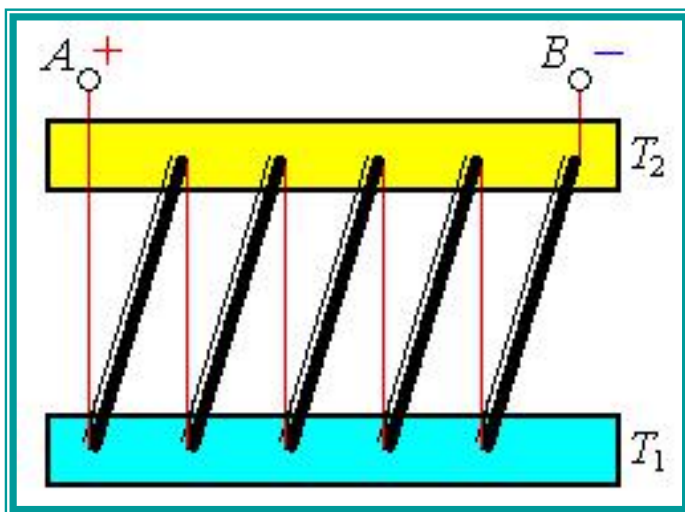
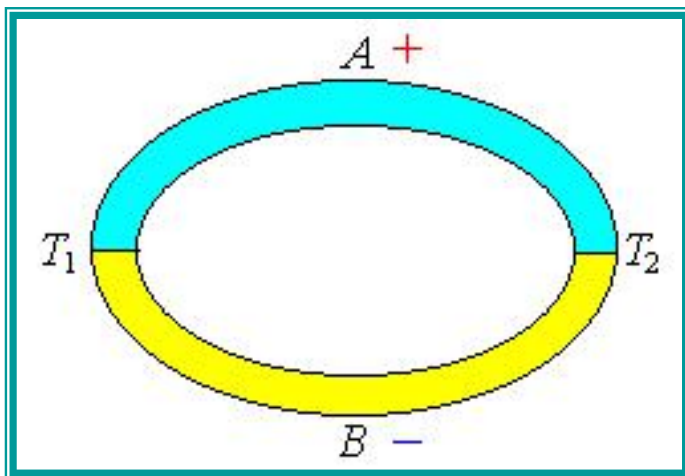


太阳能电池阵列

3) 温差发电器

- 利用温差电效应把热直接转化成电能的装置。

温差电效应和温差电堆示意图



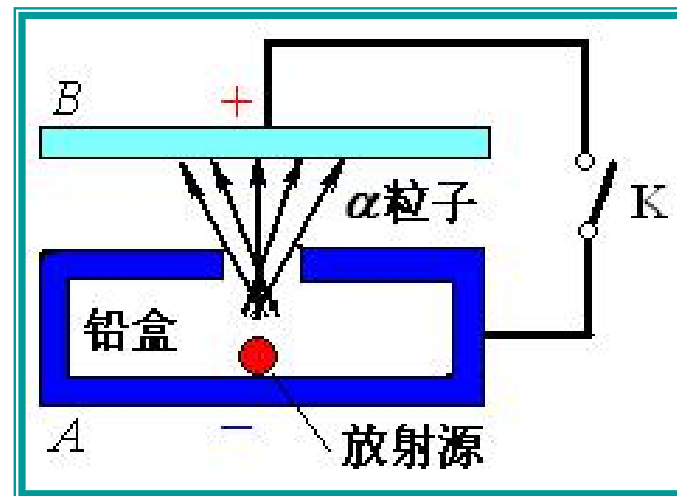
用温差电偶测温度

4) 核能电池

- 这种电池将核能直接转化为电能。

$$2e \int_A^B \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m_{\alpha} v^2 = 5 \times 10^6 \text{ eV}$$

$$\mathcal{E} = \int_A^B \mathbf{K} \cdot d\mathbf{r} = 2.5 \times 10^6 \text{ V}.$$



核能电池示意图

5) 直流发电机

- 通过电磁感应 (见第7章) 将机械能, 如水的重力势能和风的动能转换为电能。

3. 全电路欧姆定律

- 当电源两极断开、电源内部处于平衡状态时，

$$E+K=0.$$

- 当外电路接通时，电路中将出现电流，这时有

$$E+K=j/\sigma.$$

- 电源两端的电压 (路端电压)，等于静电力把单位正电荷从正极移到负极所做的功，即

$$U = U_+ - U_- = \int_+^- E \cdot dl,$$

- 经电源内部积分可得

$$\int_{+(内)}^- E \cdot dl = \int_{+(内)}^- (-K + j/\sigma) \cdot dl = \int_{-(内)}^+ K \cdot dl - \int_{-(内)}^+ j/\sigma \cdot dl.$$

$$\because \int_{+(内)}^{-} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U,$$

$$\int_{-(内)}^{+} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-(内)}^{+} \rho \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{S}}{S} dl = I \int_{-(内)}^{+} \rho \frac{dl}{S} = Ir,$$

- 将上两式以及电动势的定义式代入前页最后式得

$$U = \mathcal{E} - Ir.$$

- 该式就是全电路欧姆定律，式中 r 为电源内阻。
第二项取负号表明电流的正向在电源内部由负极指向正极。

- 外电路： $U = \int_{+(外)}^{-} \frac{\mathbf{j}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = IR$ ， R 是外电路的电阻。

$$\therefore \mathcal{E} = IR + Ir = I(R + r).$$

说明：稳恒电路的特点

- 电动势 \mathcal{E} 和内阻 r 是电源的两个特征量，由电源的性质确定，与外电路无关。
- 路端电压 U 与电路电流 I 有关。开路时 ($I=0$) $U=\mathcal{E}$ ，即路端电压等于电动势。
- 用伏特计测量电源电动势 \mathcal{E} ，伏特计的 R 越大， I 便越小，测得的 U 越接近 \mathcal{E} (r 一般很小)。
- 应避免使电源短路，因电源内阻小，短路造成很大电流，烧坏电源。
- 外电路的均匀导体内无净电荷，电荷只可在表面。

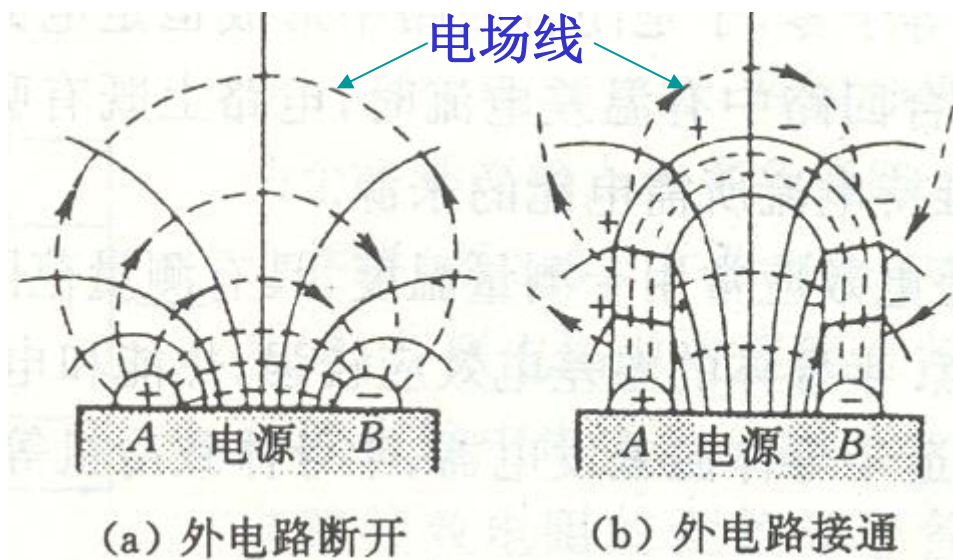
$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \rho_e = 0.$$

4. 稳恒电路中静电场的作用

主要体现在两个方面：

1) 调节电荷分布

为使电流达到稳恒，静电场调节导线表面的电荷分布、不同导体界面上的电荷分布，以及非均匀导体内的体电荷分布。



2) 作为能量的中转

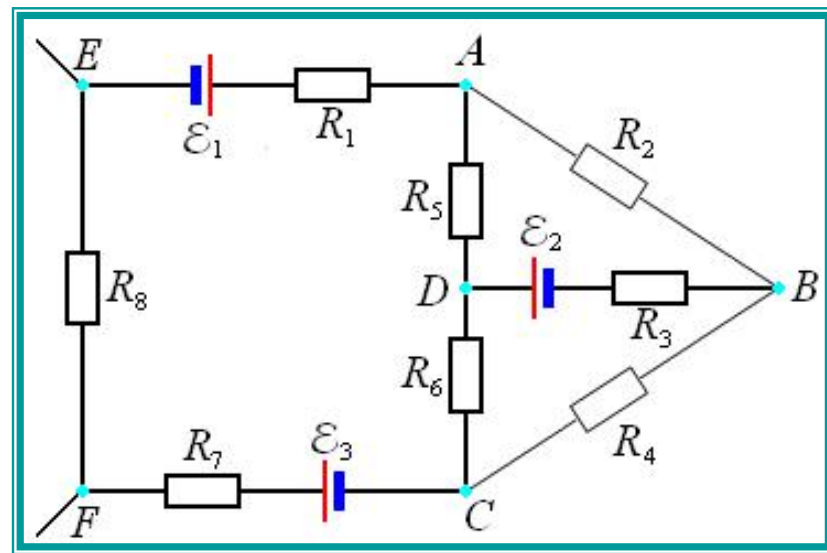
- 在不存在非静电力的地方，静电场将正电荷从高电势处送到低电势处，做正功，使电场能减少。
- 在存在非静电力的地方，非静电力将正电荷从低电势处送到高电势处，反抗静电力做功，消耗非静电能，使电场能增加。
- 在闭合电路中，静电力的总功为零。电路上消耗的能量归根到底是非静电力提供的。

§ 4.4 基尔霍夫定律

- 简单电路：欧姆定律可解 (串/并联)
- 复杂电路：基尔霍夫定律求解

1. 四个基本概念

- 1) **节点**：在电路中，3条或更多导线的汇合点，如点 A 、 B 、 \dots 、 F 。
- 2) **支路**：相邻两节点间由电源和电阻串联而成的通路，如 AB 、 BD 、 DC 等。



多回路直流电路

3) 回路：起点和终点重合在一个节点的环路，如环路 $ABDA$ 、 $ABCA$ 、 $ACFEA$ 等。

4) 独立回路：回路电压方程彼此独立的回路 (旧教材：各回路不相重合，即每个回路至少有一条其它回路没有的支路)。

书中p105第2行漏写

对于平面电路，简单易行的取法是让各回路互不包含。例如回路 $ABDA$ 、 $ACFEA$ 、 $BCDB$ 等互相独立。

- 注意，独立回路的数目 m 减1正好等于支路的数目 ℓ 减去节点的数目 n ，即 $m-1=\ell-n$ (?), 这给独立回路的选择是否正确提供了判据 (参见例4.1)。

作业及思考题

- 作业： 4.6~4.8
- 预习： 4.4 基尔霍夫定律、4.5 稳恒电流与静电场的综合求解

下次课讨论

- 思考题4.1 解释电子与晶格碰撞的“失忆”性。
- 思考题4.2 分析焦耳定律的微观机制。