微分方程

N体问题

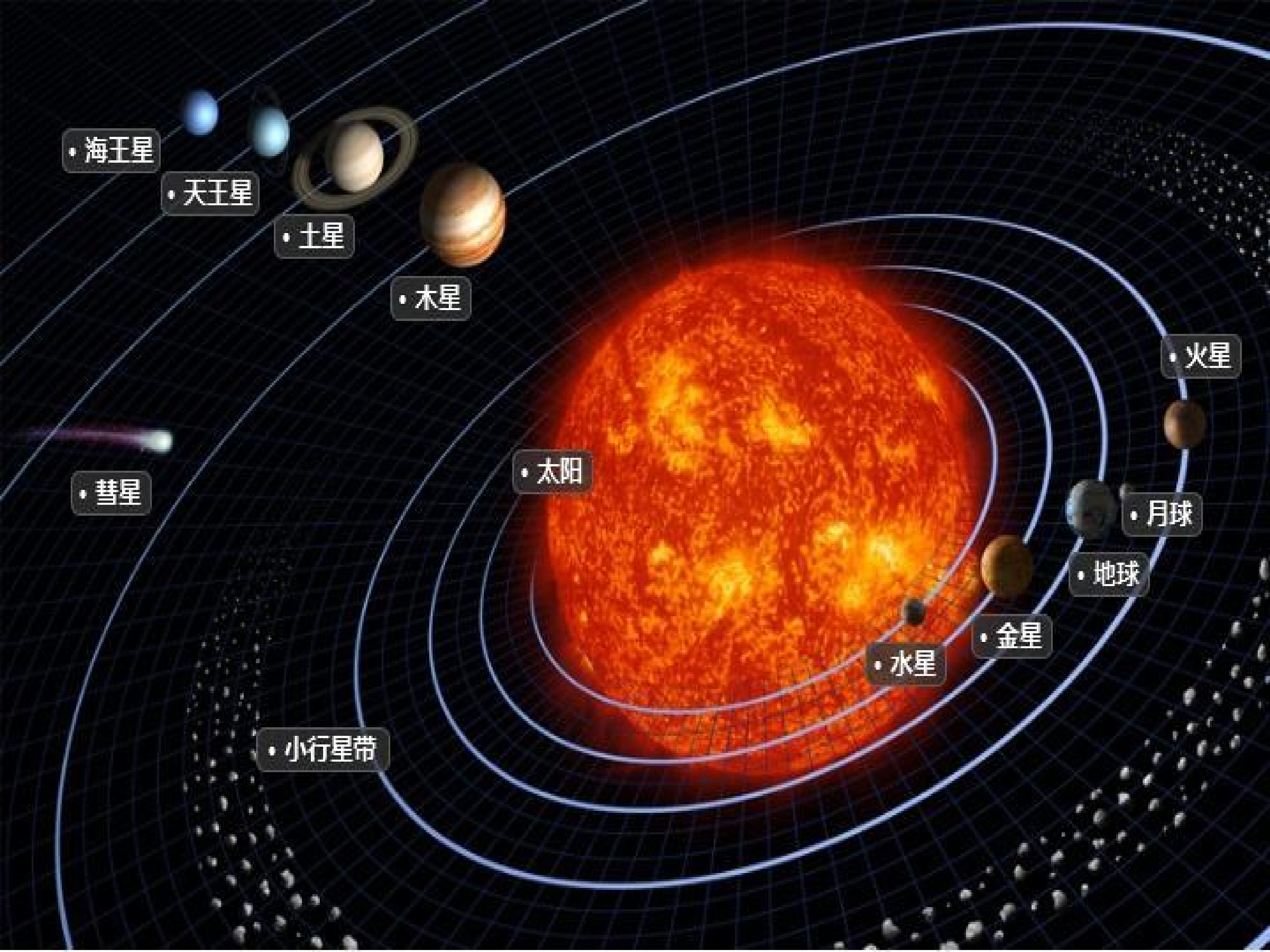
内容：

1. N体问题的微分方程

   - 历史回顾
   - 三维周期解演示
   - 推荐图书

2. 二体问题与开普勒三大定律

3. N体问题的新进展


海王星
天王星
土星
木星
火星
太阳
月球
彗星
地球
金星
水星
小行星带

1. N体问题的微分方程

$$\begin{cases} m_j \dfrac{d^2\vec{x}_j}{dt^2} = G\sum\limits_{k\neq j}^{N} \dfrac{m_j m_k(\vec{x}_k - \vec{x}_j)}{|\vec{x}_k - \vec{x}_j|^3} \\ \vec{x}_j|_{t=0} = \vec{x}_{j,0},\quad \dfrac{d\vec{x}_j}{dt}\Big|_{t=0} = \vec{x}_{j,1} \end{cases} \quad (j = 1, 2, \cdots, N)$$

其中 m_j :第j个质点的质量

$\vec{x}_j$:第j个质点的三维空间位置向量

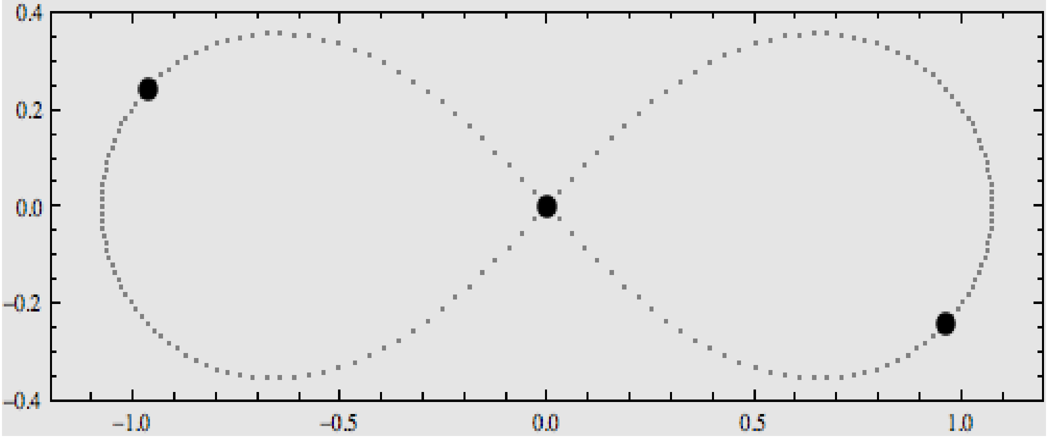
G :万有引力常数

$|\cdot|$:欧氏距离

$\vec{x}_{j,0}, \vec{x}_{j,1}$:给定的初始条件

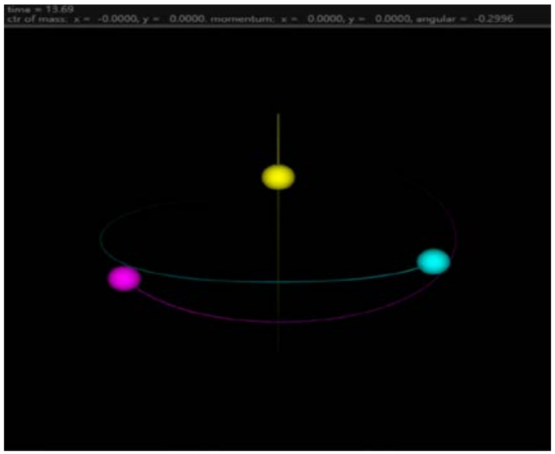
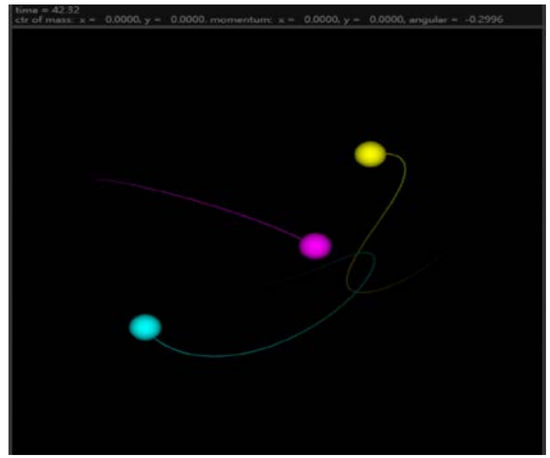
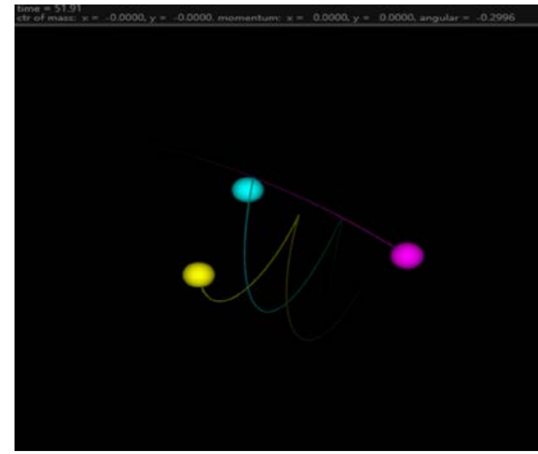
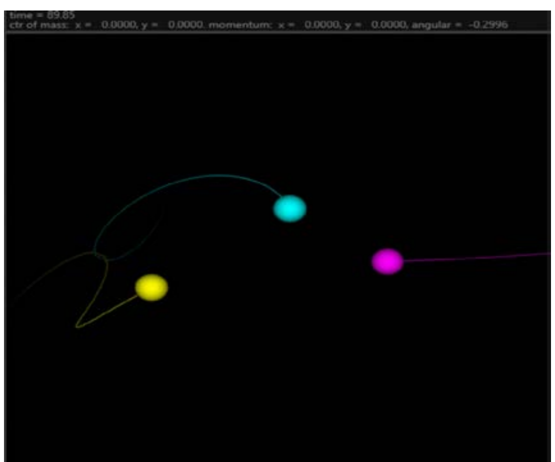
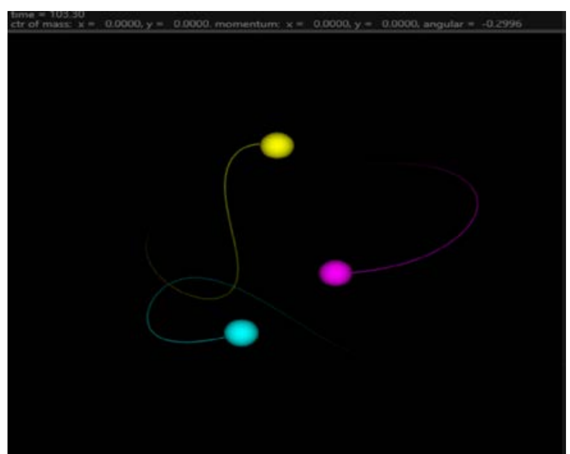
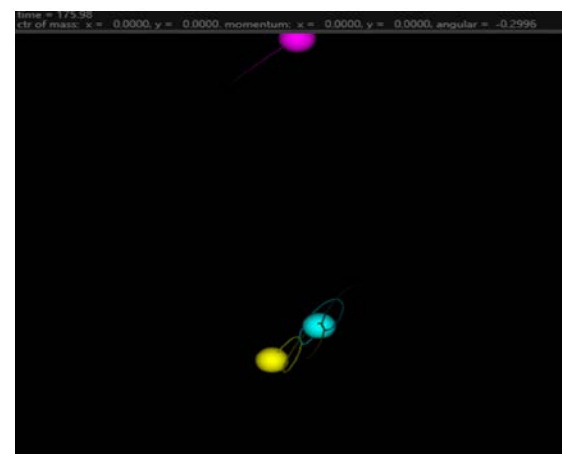
历史回顾

- 牛顿，1687，“自然哲学的数学原理”
- 约翰·伯努利，1710，公开解决二体问题
- 布伦斯，1887，寻找三体问题的通解注定是无用功（刘慈欣，科幻小说“三体”）
- 庞加莱，1890，“关于三体问题的动态方程”，270页，Acta Mathematica（四大顶尖数学期刊之一）
- Chenciner&Montgomery，2000，利用变分法寻找三体平面周期解，Annals of Mathematics，152



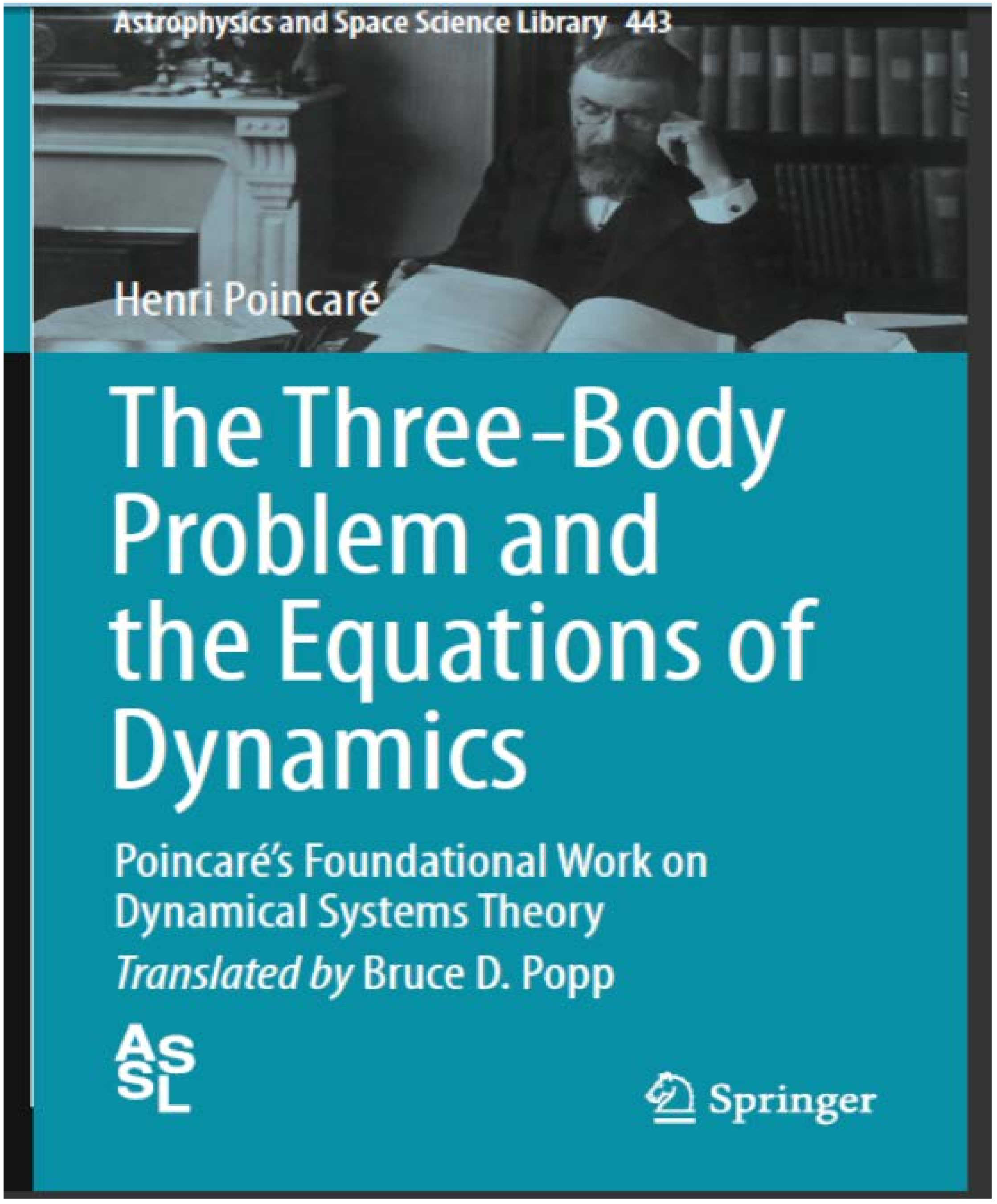
三维周期解演示

https://vanderbei.princeton.edu/WebGL/nBody.html

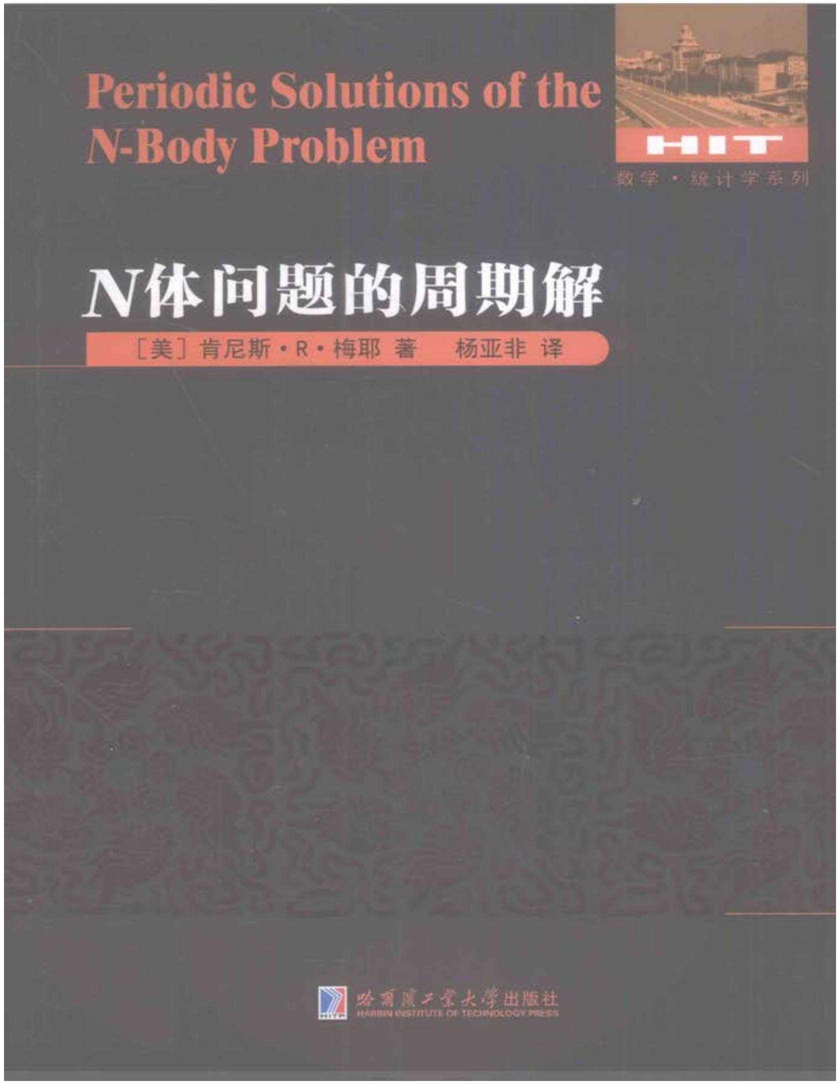
推荐图书：

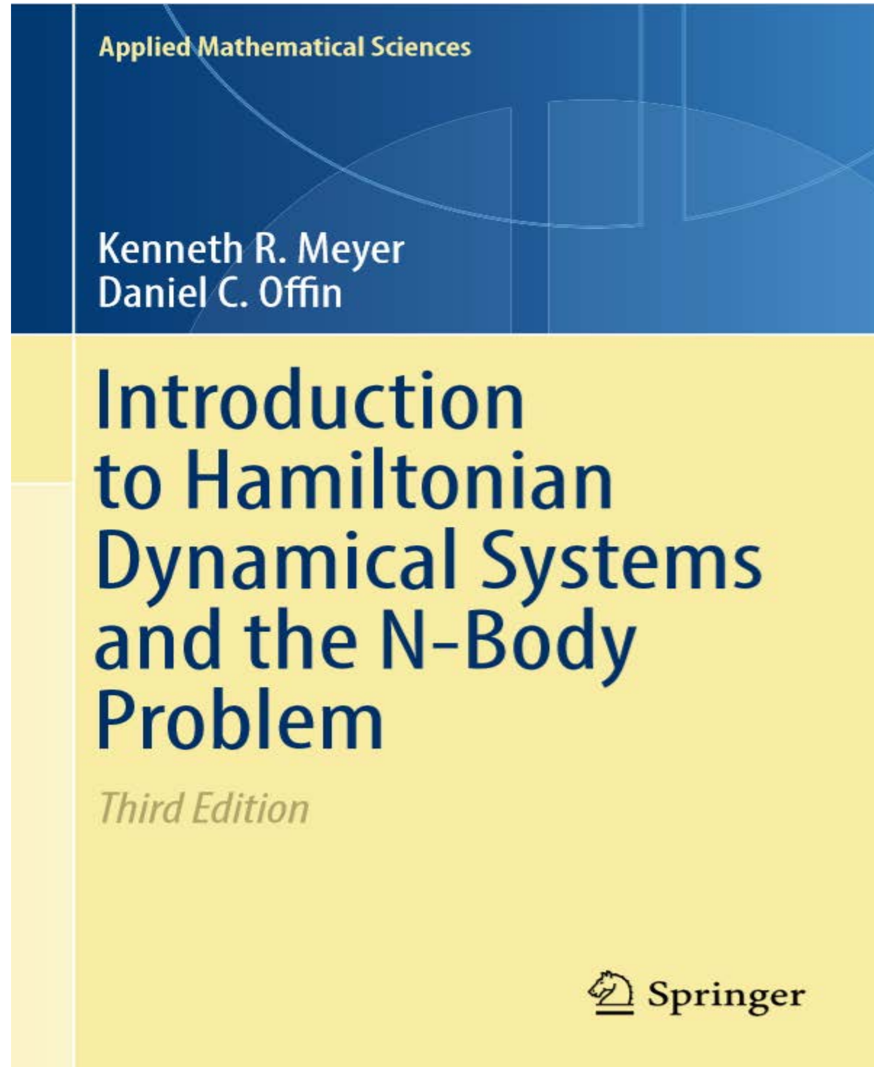
H. Poincaré, 1890,
法语原著的英文版



推荐图书：

K. R. Meyer (辛辛那提大学数学教授) 的两本书





2. 二体问题与开普勒三大定律

开普勒三大定律：

1^{st}.行星绕太阳的轨道为椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点上。用极坐标表示的椭圆轨道为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\left(\theta-\theta_0\right)}$$

2^{nd}.行星向径在相等时间内扫过的面积相等

$$r^2\dot{\theta}=C$$

3^{rd}.行星绕太阳运动的周期平方与轨道椭圆半长径的立方成正比

$$T^2=ka^3$$

k对所有的行星而言是同一常数

二体问题的分析

对二体问题，以地日系统为例，设太阳M静止于原点，地球$\boldsymbol{m}$的坐标向量为 $\vec{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}))$. 由牛顿第二运动定律和万有引力定律，

$$m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = -\frac{GMm\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|^3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{GMx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \ddot{y} = -\dfrac{GMy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \ddot{z} = -\dfrac{GMz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\ddot{x} - x\ddot{y} = \dfrac{d}{dt}(y\dot{x} - x\dot{y}) = 0 \\ z\ddot{y} - y\ddot{z} = \dfrac{d}{dt}(z\dot{y} - y\dot{z}) = 0 \\ x\ddot{z} - z\ddot{x} = \dfrac{d}{dt}(x\dot{z} - z\dot{x}) = 0 \end{cases}$$

得首次积分

$$\begin{cases} y\dot{x} - x\dot{y} = C_1 \quad (*) \\ z\dot{y} - y\dot{z} = A \\ x\dot{z} - z\dot{x} = B \end{cases} \Rightarrow Ax + By + C_1 z = 0, \text{平面方程}$$

不妨设地球轨道在平面$z = 0$上，则微分方程化为

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{\mu x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \ddot{y} = -\dfrac{\mu y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{cases} \quad (\mu = GM)$$

$$\Rightarrow \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = -\frac{\mu(x\dot{x} + y\dot{y})}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{d}{dt}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{2\mu}{(x^2 + y^2)^{1/2}}] = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{2\mu}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = C_2$$

引入极坐标： $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$ 上式化为

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 - \frac{2\mu}{r} = C_2 \quad (**)$$

极坐标代入(*)得开普勒第二定律：

$$-r^2\dot{\theta} = C_1 > 0 \quad (***)$$ (地球绕太阳顺时针转动)

再由(**) (***)得

$$\dot{r} = \pm\sqrt{C_2 + \frac{\mu^2}{C_1^2} - (\frac{C_1}{r} - \frac{\mu}{C_1})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \pm\frac{r^2}{C_1}\sqrt{C_2 + \frac{\mu^2}{C_1^2} - (\frac{C_1}{r} - \frac{\mu}{C_1})^2},$$ 分离型

得通积分
$$\frac{\frac{C_1}{r}-\frac{\mu}{C_1}}{\sqrt{C_2+\frac{\mu^2}{C_1^2}}}=\cos(\theta-C)$$

从而得开普勒第一定律(二次曲线中仅有椭圆不会到达无穷远)：

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)},\ p=\frac{C_1^2}{\mu},\ e=\sqrt{1+\frac{C_2C_1^2}{\mu^2}},\ \theta_0=C$$

另外，由开普勒第二定律知单位时间向径扫过的面积为$C_1/2$及椭圆性质知，

地球运行周期为

$$T=\frac{\pi ab}{C_1/2}=\frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu p}/2}=\frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2}$$

故得开普勒第三定律。

3. N体问题的新进展

- Carleo&Troyer，2017，Science，355,602-606

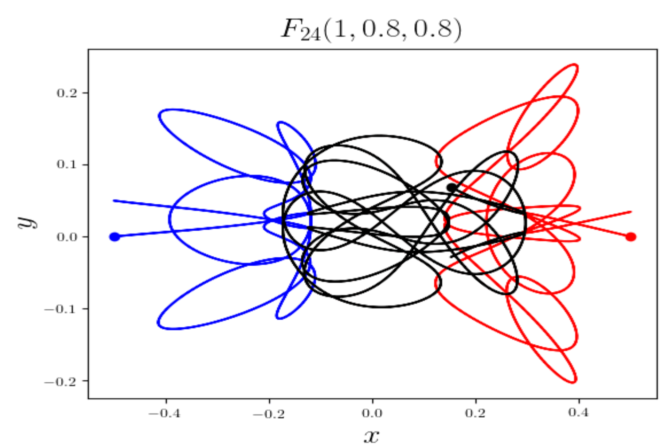
“用人工神经网络解决量子多体问题”

中文翻译：https://www.sohu.com/a/200893897_741733

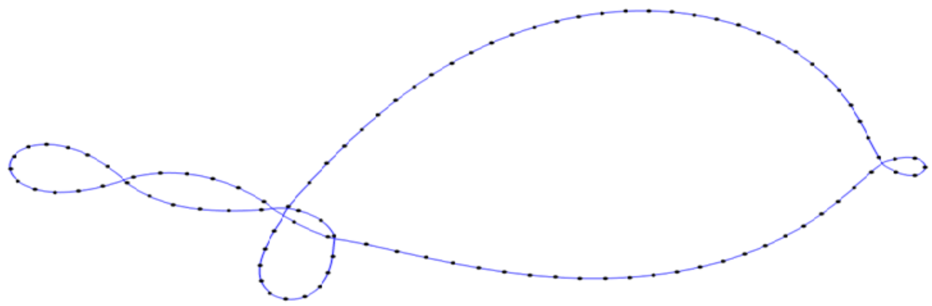
$$\Psi_M(\mathcal{S};\mathcal{W})=\sum_{\{h_i\}} e^{\sum_j a_j\sigma_j^z+\sum_i b_i h_i+\sum_{ij} W_{ij} h_i \sigma_j^z}$$

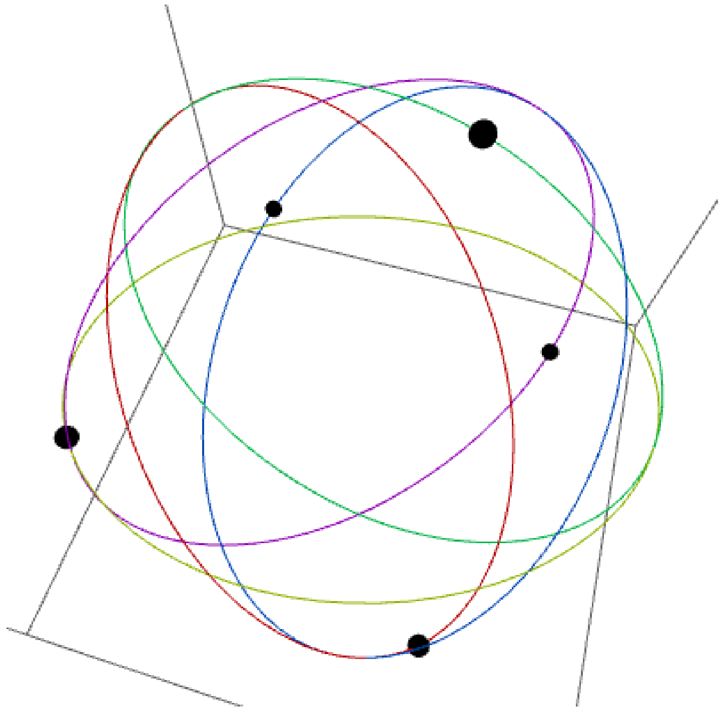
- 廖世俊等，2018，PASJ，70,No.4，用高精度数值计算方法找到三体问题千种以上周期轨道

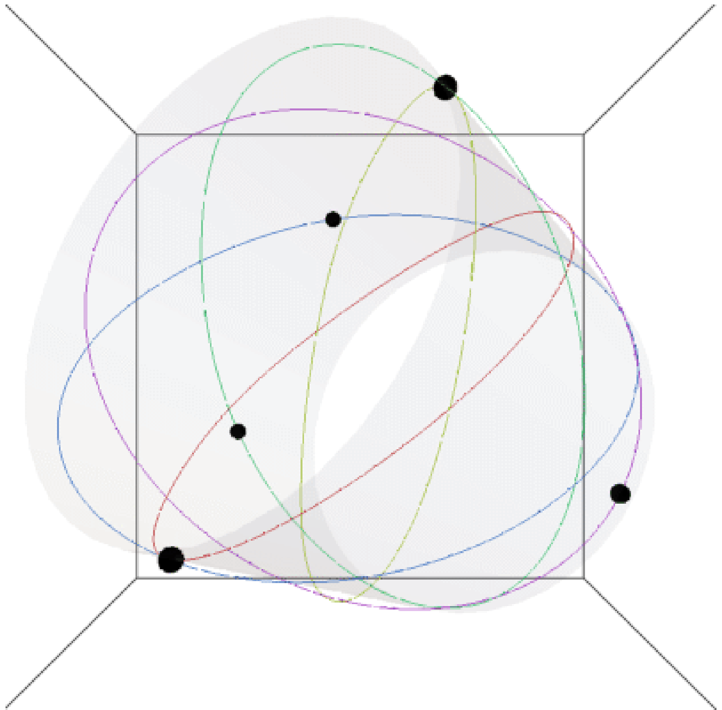
http://numericaltank.sjtu.edu.cn/three-body/three-body.htm

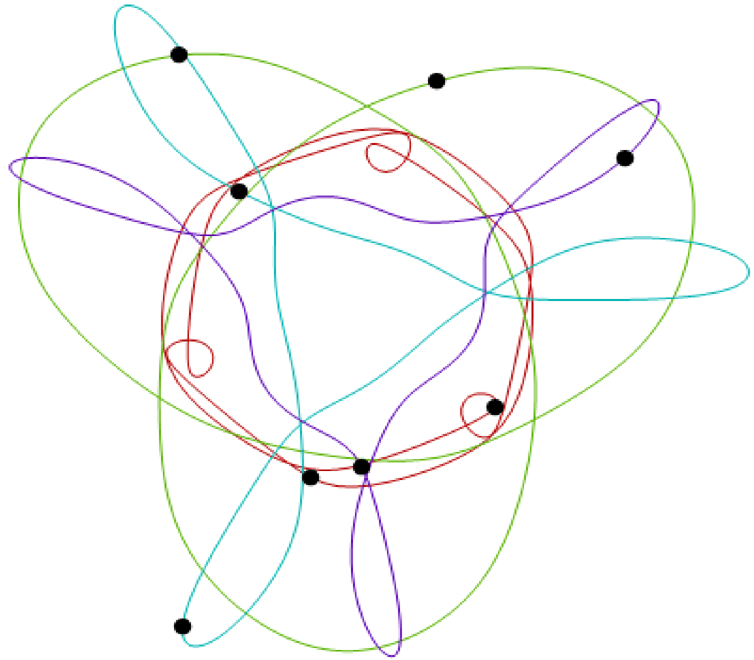


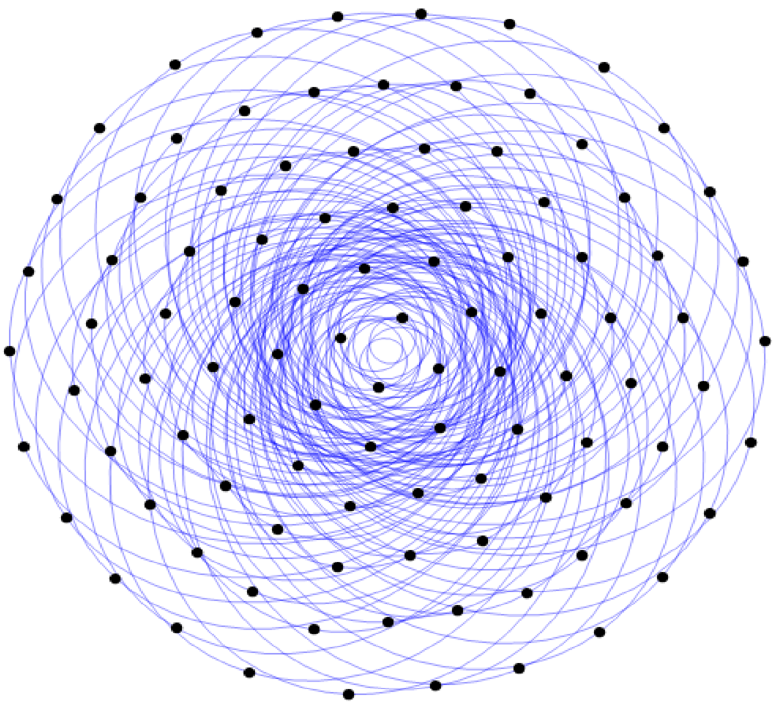
➢数院2017级武圣智同学的多体问题周期解算法示例：

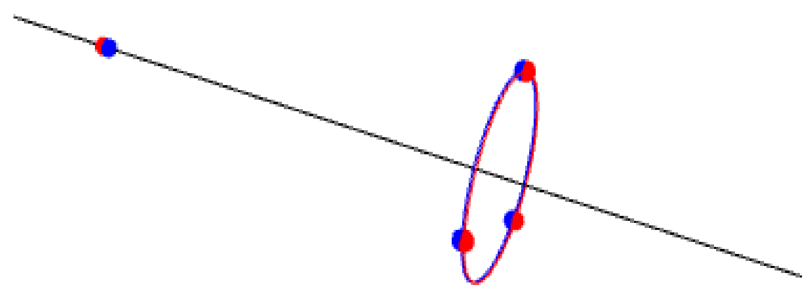












➢最新的具有对称性的多体问题周期解：