12周

1.(a) 否 $f: \mathbb{Z}[x]/(x^2-2) \longrightarrow \mathbb{Z}[x]/(x^2-3)$

记 $f(\bar{x}) = \overline{g(x)}$

则 $f(\overline{x^2-2}) = \overline{g^2(x)-2} = \bar{0}$

$\Rightarrow x^2-3 \mid g^2(x)-2 \Rightarrow g^2(x)-2 = (x^2-3)h(x)$，考虑常数项即可

(b) 考虑 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 中幂等元 $(0,0)$ $(1,0)$ $(0,1)$ $(1,1)$

考虑 $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_2]$ 中幂等元 $(1,0)$ $(0,0)$ $(0,1)$ $(\overset{-1}{\cancel{2}},1)$

由于 $(1,0)+(0,1)=(1,1)$ (~~(-1,0)+(1,0~~ $(-1,1)+(1,0)=(0,1)$)

故 $f(0,0)=(0,0)$ $f(0,1)=(1,1)$ $\Rightarrow \begin{cases} f(1,0)=(1,0) \\ f(\overset{-1}{0},1)=(0,1) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(1,0)=(0,1) \\ f(\overset{-1}{0},1)=(1,0) \end{cases}$

若前则 ~~data~~ $f(m,n)=(m+n,\ m)$

$f(am+an+bm,\ bn) = ((a+b)(m+n),\ \cancel{0}$ $am+an+bm)$

则 $f(m,n)\cdot f(a,b) =$ ~~$f(ma, nb) = (ma+nb, ma)$~~

但 $((m+n,\ m)\times(a+b,\ a) = ((m+n)(a+b),\ ma)$ 矛盾

故 $f(0,0)=(0,0)$ $\quad f(0,1)=(1,1) \Rightarrow \begin{cases} f(1,0)=(1,0) \\ f(0,1)=(0,1) \end{cases}$ ① 或 $\begin{cases} f(1,0)=(0,1) \\ f(0,1)=(1,0) \end{cases}$

若①则 ~~dain~~ $f(m,n)=(m+n,\ m)$

$f(am+an+bm,\ bn)=((a+b)(m+n),\ am+an+bm)$

则 $f(m,n)\cdot f(a,b)=$ ~~$f(ma,nb)=(ma+nb,\ ma)$~~

但 $((m+n,\ m)\times(a+b,\ a)=((m+n)(a+b),\ ma)$ 矛盾

若②则 $f(m,n)=(m,\ m+n)$ 故 $f(m,n)\cdot f(a,b)=(am+an+bm,\ (a+b)(m+n))$

但 $(m,\ m+n)(a,\ a+b)=(am,\ (m+n)(a+b))$ 矛盾

(c) $\mathbb{Z}[x]/(x^2-3,\ 2x+4)\cong\mathbb{Z}[x]/(x^2+2x+1,\ 2x+4)$

$\cong\mathbb{Z}[x-1]/(x^2,\ 2x+2)$

$\cong\mathbb{Z}[x]/(x^2,\ 2x+2)$

但 $2\in\ker\varphi$

但 $2\notin(x^2,\ 2x+2)$

故 $(x^2,\ 2x+2)\subsetneq\ker\varphi$

构造 $\mathbb{Z}[x]\xrightarrow{\varphi}\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$

$a_0+\cdots a_nx^n\longrightarrow\bar{a}_0+\bar{a}_1x$

① 显然 $(x^2,\ 2x+2)\subset\ker\varphi$, ~~若 故 $g(x)\in\ker\varphi$~~

故 $\mathbb{Z}[x]/\ker\varphi\cong\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$

$\mathbb{Z}[x]/(x^2,\ 2x+2)$

扫描全能王 创建

2. $R=\{a_1 \cdots a_n\}$ 记 $Ra_j=\{a_1a_j \cdots a_na_j\}$ 且若 $a_ma_j=a_la_j$

$\Rightarrow (a_m-a_l)a_j=0 \Rightarrow a_m=a_l$ 故 $Ra_j=R$

$\Rightarrow \forall j, \exists i$ s.t. $a_ia_j=1$ 故 R 为除环

b) $I \triangleleft k$ $x\in I$ 且 $x\neq 0$ 则 $x\cdot x^{-1}\in I \Rightarrow 1\in I \Rightarrow k\in I$

$\Rightarrow k=I$

而 $\ker f \triangleleft k$ 故 $\ker f=0$ 或 $\ker f=k \Rightarrow f=0$ 或 f 单

$M_n(k)$ 单 见第11次作业11题

(c) 若 $\exists R \supsetneq J \supsetneq M$, 则 $R/M \supsetneq J/M \supsetneq 0$ 但 R/M 是除环, 矛盾

3. (i) $f: R\to S$ $\forall I \triangleleft f(R) \Rightarrow f^{-1}(I)\triangleleft R \Rightarrow f^{-1}(I)=(a) \Rightarrow I=(f(a))$

(ii) 定义 $f: \mathbb{Z}\to \mathbb{Z}_m$ $a\to \bar{a}$ 即可

(iii) (1) $\bar{f}: R/\ker f \to S$ 是同构

且 $\bar{f}(P/\ker f)=f(P)$, 故用证明 $\bar{f}(P/\ker f)$ 素即可

$\forall xy\in \bar{f}(P/\ker f) \Rightarrow \bar{f}^{-1}(x)\cdot\bar{f}^{-1}(y)\in P/\ker f$ 而 P 素 $\Rightarrow P/\ker f$ 素

故 $\bar{f}^{-1}(x)\in P/\ker f$ 或 $\bar{f}^{-1}(y)\in P/\ker f \Rightarrow x\in \bar{f}(P/\ker f)$ 或 $y\in \bar{f}(P/\ker f)$

(2) $\forall xy\in f^{-1}(Q) \Rightarrow f(x)\cdot f(y)\in Q$ 故 $f(x)\in Q$ 或 $f(y)\in Q \Rightarrow x\in f^{-1}(Q)$ 或 $y\in f^{-1}(Q)$

(3) 由(1)(2)显然

(iv) 由(1)(2)(3), 记 $m=p_1^{a_1}\cdots p_n^{a_n}$, 则 $\mathbb{Z}_m$ 全部素理想为 $f((p_i))$ (f 为(ii)中)

$=(\bar{p_i})$

~~$k\bar{e}p_i$~~

(b) Claim: $C[[x]]$ 是 ~~DDR~~ 离散赋值 环 proof: 记 $f(x)$ 的最低次项为 m 次

定 $v_x(f(x))=m$，则 v_x 给出一个离散赋值，故由 DVR 性质

理想为 (x^s) 与 0 $s\geq 0$

4. 设 I 非素，即 $xy\in I$ $x\notin I$ $y\notin I$，故

$I\cap S=\varnothing \Rightarrow xy\notin S$ 若 $x\in S, y\in S$ 矛盾，设 $x\notin S$

故 $(I+(x))\cap S=\varnothing$，矛盾.

(b) m 极大 $\Leftrightarrow R/m$ 为域 $\Leftrightarrow \forall r\notin m$ 有 $\bar{r}\neq 0$，即 $\exists x\in R$

s.t $\overline{xr}=\bar{1} \Leftrightarrow \overline{xr-1}=\bar{0} \Leftrightarrow xr-1\in m$

(c) (i) $\bar{4}\cdot\overline{8k}=\bar{0}$ $\bar{4}\cdot\overline{8k+4}=\bar{0}$，故 $4Z/(8)$ 无单位元

(ii) $M_n(R)\xrightarrow{f} M_n(R/Z)$ 易证 $\ker f\cong M_n(Z)$

$\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{a_{nn}}\end{bmatrix}$ 故 $M_n(R)/M_n(Z)\cong M_n(R/Z)$

故 $M_2(Z)/M_2(PZ)\cong M_2(Z_p)$ 有 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=0$ 故其理

但若 $M_2(PZ)$ 非极大，$\exists J$ s.t $M_2(PZ)\subsetneq M_2(J)\subsetneq M_2(Z)$

$\Rightarrow PZ\subsetneq J\subsetneq Z$

矛盾!

(i) m 极大 $\Rightarrow R/m$ 域 $\Rightarrow R/m$ 整环 $\Rightarrow R/m$ 素

不成立，如(c)中 $M_2(PZ)$ 取 $x=\begin{bmatrix}1&0\\0&p\end{bmatrix}$ 与 $y=\begin{bmatrix}p&0\\0&1\end{bmatrix}$

(ii) R/m 有限整环 $\Rightarrow R/m$ 域 $\Rightarrow m$ 极大

扫描全能王 创建

5.(a) ~~乘~~法 若 $\frac{t}{s} \sim \frac{t'}{s'}$ 即 $u(st'-s't)=0$

则 $\frac{a}{b}\cdot\frac{t}{s} \sim \frac{a}{b}\cdot\frac{t'}{s'} \Leftarrow \exists v$ s.t $v\cdot ab(ts'-st')=0$

取 $v=u$ 即可

加法，只用证明 $\frac{as+bt}{bs} \sim \frac{as'+bt'}{bs'}$

$\Leftarrow \exists v$ s.t $v(abss'+b^2ts'-abss'-b^2st')=0$

$\Leftarrow vb^2(ts'-t's)=0$

取 $v=u$ 即可

6.(a) (i) $a^m=0$ $b^n=0$ 则 $(a+b)^{m+n}=0$

不成立，取 a 为 $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ b 为 $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ 即可

(ii) $\bar{x} \in R/\mathrm{nil}R$ 幂0 $\Rightarrow \exists m$ s.t $\bar{x}^m=\bar{0} \Rightarrow x^m \in \mathrm{nil}R$

$\Rightarrow (x^m)^n=0 \Rightarrow x^{mn}=0 \Rightarrow x \in \mathrm{nil}(R) \Rightarrow \bar{x}=0$ 矛盾

(i) 且 $\forall x \in \mathrm{nil}(R)$ $y \in R$ $x^m=0$ 则 $(xy)^m=0$

(3) 类似于(2)，$\sqrt{0}=\mathrm{nil}(R)$

(1) $x^m=0$ 则 $(1+x)^{-1}=(1-(-x))^{-1}=1+(-x)+\cdots(-x)^{m-1}$

$\forall u$ 可逆，x 幂0，$u+x=u(1+u^{-1}x)$ 为可逆元乘积，

(b) ~~满射显然~~ (c) 易证 $(e_1\cdots e_n\cdots)$ 是R幺元 $\Leftarrow$ e_i 是 R_i 幺元

(ii) $(a_1\cdots a_n\cdots)(b_1\cdots b_n\cdots)=(b_1\cdots b_n\cdots)(a_1\cdots a_n\cdots)$

$\Leftarrow \forall i$ 有 $a_ib_i=b_ia_i$

扫描全能王 创建

(3) $(x_1 \cdots x_n \cdots)(y_1 \cdots y_n \cdots) = 0 \Leftrightarrow \forall i$ 有 $x_i y_i = e_i$

(4) 只用证明 $|I|=2$ 情况即可

记 I_1 为所有 I 中第一个分量构成的 I_2 …… 第2个分量 ……

则 claim ① I_1，I_2 是理想

$a \in I_1$ $b \in R_1$ 则 $\exists c$ s.t $(a,c) \in I$ $(b,0) \in R$

则 $(ab,0) \in I \Rightarrow ab \in I_1$

claim ② $I \cong I_1 \times I_2$ 显然 $I \subseteq I_1 \times I_2$

因对 $\forall (a,b) \in I_1, I_2$ $\exists c,d$ s.t $(a,c) \in I$ $(d,b) \in I$

故 $(a,c) \cdot (1,0) \in I$ $(d,b)(1,0) \in I$

$\Rightarrow (a,0) + (0,b) \in I \Rightarrow (a,b) \in I$

$\Rightarrow I \supseteq I_1 \times I_2 \Rightarrow I = I_1 \times I_2$

(ii) 定义 $\begin{bmatrix} (a_1,s_1) & (a_2,s_2) \\ (a_3,s_3) & (a_4,s_4) \end{bmatrix} \to \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{bmatrix} \right)$

即可

(a)(i) ~~rad(Zn)~~ $n = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$ 则 $\operatorname{rad}(\mathbb{Z}_n) = (p_1 \cdots p_n)$

$\operatorname{nil}(\mathbb{Z}_n) = (p_1 \cdots p_n)$

$\operatorname{rad} \mathbb{C}[[x]] = (x)$

$\operatorname{nil} \mathbb{C}[[x]] = 0$

扫描全能王 创建

(e) $\forall (m) \subset \mathbb{Z}$，有 $(2m) \subset (m)$

(ii) $n = p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$

则所有极大理想为 $\left(\frac{\overline{n}}{p_i}\right)$，故 $\left(\frac{n}{p_i}\right)\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$

故 $soc(\mathbb{Z}_n) \cong \oplus \mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(p_1 \cdots p_n)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{p_1 \cdots p_n}$

3 (ii) 由(ii) $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}_{p_1 \cdots p_n} = \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow a_1 = \cdots a_n = 1$

$\Leftrightarrow$ n 为不同素数的乘积（素数）此时

$rad(\mathbb{Z}_n) = 0$ 且 $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p_1} \times \cdots \mathbb{Z}_{p_n}$

13次

(1) "$\Rightarrow$" $\forall a \in R$ 有 $a^n = 0$ $\Rightarrow$ 则 $(\overline{a})^n = 0$

"$\Leftarrow$" R/N 诣零，则 $\forall a \in R$ $\exists n$ $(\overline{a})^n \in N$ $\Rightarrow \exists m$

$a^{nm} = 0$ $\Rightarrow R$ 诣零

(2) $a \in I$ $b \in J$ $a^n = 0$ $b^m = 0 \Rightarrow (a+b)^{m+n} = 0$ $\Rightarrow I+J$ 诣0

2. 设 $x \in P$ 且 $x = u p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}$ 则由于 R 互素，一定 $\exists$ 某个 $p_i^{a_i} \in P$

进而存在某个 $p_i \in P$ 此时 $(p_i) \subset P$，而UFD中不可约元即素元

故 (p_i) 是主素理想

扫描全能王 创建

3. $a=\mu p_1^{a_1}\cdots p_n^{a_n}$ $b=v p_1^{\beta_1}\cdots p_n^{\beta_n}$

$ab=\mu v p_1^{a_1+\beta_1}\cdots p_n^{a_n+\beta_n}$

$(a,b)=u' p_1^{\min(a_1,\beta_1)}\cdots p_n^{\min(a_n,\beta_n)}$ $[a,b]=v' p_1^{\max(a_1,\beta_1)}\cdots p_n^{\max(a_n,\beta_n)}$

易见 $ab\sim(a,b)[a,b]$

(2) $b=\mu p_1^{a_1}\cdots p_n^{a_n}$ $c=v p_1^{\beta_1}\cdots p_n^{\beta_n}$

$a=w p_1^{z_1}\cdots p_n^{z_n}$ 其中 $a_i,\beta_i,z_i\geq 0$

由 $a\mid bc\Rightarrow z_i\leq a_i+\beta_i$ 由 $(a,b)=1$ 有 $a_i z_i=0$

$\Rightarrow z_i^2\leq a_i z_i+\beta_i z_i=\beta_i z_i\Rightarrow z_i\leq\beta_i\Rightarrow a\mid c$

(4) $PID\Rightarrow UFD$ 故 $a=\mu p_1^{a_1}\cdots p_n^{a_n}$ $b=v p_1^{\beta_1}\cdots p_n^{\beta_n}$

$(a)\cap(b)=([a,b])=(p_1^{\max(a_1,\beta_1)}\cdots p_n^{\max(a_n,\beta_n)})$

~~$(a)\cap(b)$~~

而 $(a)(b)=(p_1^{a_1+\beta_1}\cdots p_n^{a_n+\beta_n})$ 故 $(a)\cap(b)=(a)(b)$

$\Leftrightarrow a_i+\beta_i=\max(a_i,\beta_i)\Leftrightarrow a_i\beta_i=0\Leftrightarrow(a,b)=1$

(2) "$\Rightarrow$" 设 $(a,b)=e$ 则 $a=em$ $b=en$ 则 $e(mx+ny)=c$

$\Rightarrow e\mid c$

"$\Leftarrow$" $(a,b)=e$ 则 $c=eM$ 且 $a=ex$ $b=ey\Rightarrow(x,y)=1$

$\exists a_0,b_0$ 使 $a_0x+b_0y=1$

故 ~~$a+b$~~

$\Rightarrow a_0ex+b_0ey=e$

$a_0a+b_0b=e\Rightarrow a_0M\cdot a+b_0M\cdot b=c$

扫描全能王 创建

5.(1) $\forall x\in R\setminus P$ $y\in R\setminus P$ 若 $xy\in P$ 有 $x\in P$ 或 $y\in P$ 矛盾

故 $xy\in R\setminus P$

(2) ① ~~$S_p^{-1}P$ 是极大理想~~，由于 R 中 S 饱和的素理想

与 $S^{-1}R$ 中素理想一一对应　即 R 中包含于 P 的素理想与 $S_p^{-1}R$ 中素理想一一对应

一一对应，且 $\forall P_1\subset P$ 有 $S_p^{-1}P_1\subset S_p^{-1}P$，故 $S_p^{-1}P$ 是极大理想

6. (1) "⟹" 定义 $R[x]$ 中 $f(x)=a_0+\cdots a_nx^n$

$\varphi(f(x))=2^n$　易证 $R[x]$ 为 ED

$\varphi(0)=0$

"⟸" 若 R 不是域，则 $\exists\mu$ 不可逆，故 (μ,x) 是 $R[x]$ 中理想

即 $(\mu,x)=(h(x))$　由于 $\mu\in(h(x))\Rightarrow h(x)=c$

故 $(\mu,x)=(c)$　$\Rightarrow(x)\subset(c)$，而 (x) 极大 $\Rightarrow c$ 是单位

而 $c=\mu f(x)+xh(x)$，考虑常数项 $c=\mu f_0$ 与 μ 不可逆矛盾！

7. $a_1\cdots a_n$ coprime $\Leftrightarrow(a_1)+\cdots(a_n)=1\Leftrightarrow\exists b_1\cdots b_n$ 使 $\sum a_ib_i=1$

8. 只用对 $n=2$ 证明即可　$n>2$ 归纳归纳

$n=2$ 即由 $c(a,b)\wedge c(c_0,c_b)$ 立得

$f(x)=a_0+a_1x+\cdots$　$g(x)=b_0+b_1x+\cdots$

9. $p\mid f(x)g(x)\Rightarrow p\mid a_0b_0\Rightarrow$ 不妨设 $p\mid a_0$　$p\nmid b_0$ (若 $p\mid b_0$，~~令~~ 则 $\frac{g(x)-b_0}{x}$ 代 $g(x)$)

则 $p\mid a_0g(x)+x(a_1+a_2x+\cdots)g(x)\Rightarrow p\mid(a_1+a_2x+\cdots)g(x)$

由于 $(p,x)=1$

考虑常数项 $p \mid a_2 b_0 \Rightarrow p \mid a_2 \cdots$ 一直递归往下有 $p \mid a_i \ \forall i$

故 $p \mid f(x)$

10. (1) 记 $Z \triangle R$ $n = \{\min \varphi(x) \mid x \in Z\}$

且 $\varphi(x) = n$

下证 claim $Z = (x)$，显然 $(x) \subset Z$, $\forall y \in Z$ $y = xq + r$

当 $r \neq 0$ 时 $\phi(r) < \phi(x)$，但 $r = y - xq \in Z$ 矛盾 $\Rightarrow r = 0$

$y = xq \Rightarrow y \in (x) \Rightarrow (x) = Z$

(2) 令 $n = \{\min \varphi(x) \mid x \in R\}$

$\varphi(x) = n$

① ~~若 $r \neq 0$ 时~~ $\forall y \in R$, 有 $y = xq + r$ 由 $\phi(r) < \phi(x)$ 矛盾

故 $y = xq \Rightarrow R = (x) \Rightarrow x$ 是单位元

扫描全能王 创建