课堂练习

1. 求下列多项式矩阵的Smith标准型、行列式因子、不变因子及初等因子组。

(1) $$\begin{pmatrix} \lambda^2(\lambda+1)^2 & & \\ & \lambda^3(\lambda-1)^2 & \\ & & (\lambda+1)^3(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ & \lambda & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n\times n}$$

解. (1). $D_1 = \gcd($一阶$) = 1$

$D_2 = \gcd($二阶$) = \gcd(\lambda^5(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2,\ \lambda^3(\lambda-1)^3(\lambda+1)^3,\ \lambda^2(\lambda+1)^5(\lambda-1))$

$= \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

$D_3 = \gcd($三阶$) = \det = \lambda^5(\lambda-1)^3(\lambda+1)^5$

$\Rightarrow d_1 = 1.\quad d_2 = \frac{D_2}{D_1} = D_2,\quad d_3 = \frac{D_3}{D_2}$

Smith 标准型. $$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^2 & \\ & & \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^3 \end{pmatrix}.$$

行列式因子. $D_1 = 1.\quad D_2 = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

$D_3 = \lambda^5(\lambda-1)^3(\lambda+1)^5$

不变因子. $d_1 = 1.\quad d_2 = \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

$d_3 = \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^3$

初等因子. $\lambda^2,\ \lambda-1,\ (\lambda+1)^2,\ \lambda^3,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda+1)^3.$

(2) 记 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

$\det A = \lambda^n. \quad = D_n$

考虑 $\det A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} = \lambda^{n-1}$

$\det A\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 \\ 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & & 1 \\ \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ & \lambda & 1 \cdots & 1 \\ & & \ddots & \lambda \; 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\lambda & & & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & & 0 & \\ & & & & 1-\lambda & 0 \\ & & & & \lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)^{n-2}$

则 $D_{n-1} \mid \gcd(\lambda^{n-1}, (1-\lambda)^{n-2}) = 1$

$\Rightarrow D_{n-1} = 1$

则 Smith 标准型 为 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda^n \end{pmatrix}$

$D_1 = \cdots = D_{n-1} = 1. \quad D_n = \lambda^n$

$d_1 = \cdots = d_{n-1} = 1. \quad d_n = \lambda^n$

初等因子为 λ^n

2, 设 A n阶实对称方阵.

A 的前 $n-1$ 阶顺序主子式均为正

且 $\det A \geq 0$. 求证. A 半正定.

证明 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$. A_1 对称

由题目条件知. A_1 正定

设 $P = \begin{pmatrix} I_{n-1} & -A_1^{-1}\alpha \\ & 1 \end{pmatrix}$

则 $P^T A P = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & b-\alpha^T A_1^{-1}\alpha \end{pmatrix}$

只需证 $b-\alpha^T A_1^{-1}\alpha \geq 0$ 即可

(由此, 即有 $\forall$ 主子式都为非负 $\Rightarrow$ P^TAP 半正定)

$\Rightarrow$ A 半正定

注意到 $\det P^TAP = \det A_1 \cdot (b-\alpha^T A_1^{-1}\alpha)$

$= (\det P)^2 \det A \geq 0$

$\Rightarrow$ $b-\alpha^T A_1^{-1}\alpha \geq 0$. $\square$

3. 若 $A \geqslant B \geqslant 0$ 则 $\sqrt{A} \geqslant \sqrt{B} \geqslant 0$.

方法一： · step 1. 先证 $A \geqslant B > 0$ 情形.

· step 2. 利用 $\lambda I + A$，$\lambda I + B$ $(\lambda > 0)$. 化归到 step 1.

· step 3. 利用 关于 λ 的连续性. 令 $\lambda \to 0^+$.

证明： ① 当 $A \geqslant B > 0$ 时，利用极分解易证 $\sqrt{A}, \sqrt{B} > 0$

设 $\sqrt{A} = P^T P$

则 $\sqrt{A} - \sqrt{B} = P^T \left(I_n - (P^T)^{-1} \sqrt{B} P^{-1} \right) P$

取正交阵 S 使得

$$(P^T)^{-1} \sqrt{B} P^{-1} = S^T \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} S$$

则 $\sqrt{A} - \sqrt{B} = P^T (S^T)^{-1} \left[I_n - \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \right] S^{-1} P$

故 $\sqrt{A} - \sqrt{B}$ 相合于 $\mathrm{diag}(1-\mu_1, \cdots, 1-\mu_n)$ $(*)$

注意到 $A - B = P^T P P^T P - P^T S^T \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} S P P^T S^T \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} S P$

$$= P^T S^T \left[\underbrace{S P P^T S^T}_{=: Q} - \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}}_{=: D} S P P^T S^T \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \right] S P$$

相合于 $Q - DQD \geqslant 0$

$e_i^T (Q - DQD) e_i \geqslant 0$

$\Rightarrow Q_{ii} - \mu_i^2 Q_{ii} \geqslant 0$.

由于 P 可逆. S 正交. $\Rightarrow Q = S P P^T S^T$ 正定

$\Rightarrow Q_{ii} > 0$

结合上不等式 $\Rightarrow \mu_i^2 \leqslant 1 \Rightarrow \mu_i \leqslant 1$

再根据 $(*)$. 即得 step 1.

②.③. $A \geq B \geq 0$

则 对 $\lambda > 0$. $\lambda I + A \geq \lambda I + B > 0$

故 $\sqrt{\lambda I + A} \geq \sqrt{\lambda I + B} > 0$.

即 $\sqrt{\lambda I + A} - \sqrt{\lambda I + B} \geq 0$.

下证 $\sqrt{\lambda I + A} \to \sqrt{A}$ 当 $\lambda \to 0^+$

设 $A = Q^T \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q$ Q 正交

则 $\sqrt{A} = Q^T \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\mu_r} & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q$

则 $\lambda I + A = Q^T \begin{pmatrix} \lambda + \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda + \mu_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q$

$\sqrt{\lambda I + A} = Q^T \begin{pmatrix} \sqrt{\ } & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sqrt{\ } & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q \to \sqrt{A}$ $(\lambda \to 0^+)$

□

王新茂 讲义 7.2 例题.

方法二: 引理. $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 半正定 Hermite 方阵

(或 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 半正定 对称)

则 ∃ 可逆方阵 $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (或 $\mathbb{R}^{n \times n}$).

使得. $P^H A P$, $P^H B P$ 为对角方阵

($P^T A P$, $P^T B P$)

下利用引理 证明 题 3.

证明. 易证 $\sqrt{A}, \sqrt{B} \geq 0$. 由引理, ∃ P 可逆

$P^T \sqrt{A} P = \mathrm{diag} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = D_1$ $\lambda_i > 0$

$P^T \sqrt{B} P = \mathrm{diag} \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_s & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = D_2$ $\mu_j > 0$

则 $\sqrt{A} = (P^T)^{-1} D_1 P^{-1}$

$\sqrt{B} = (P^T)^{-1} D_2 P^{-1}$

则 $A = (P^T)^{-1} D_1 P^{-1} (P^T)^{-1} D_1 P^{-1}$

$B = (P^T)^{-1} D_2 P^{-1} (P^T)^{-1} D_2 P^{-1}$

则 $A - B \geq 0 \Leftrightarrow$

$(P^T)^{-1} \left(D_1 P^{-1} (P^T)^{-1} D_1 - D_2 P^{-1} (P^T)^{-1} D_2 \right) P^{-1} \geq 0$

记 $P^{-1} (P^T)^{-1} = R$ 正定 $(\Rightarrow R_{ii} > 0)$

则 上式 ≥ 0 即 $D_1 R D_1 - D_2 R D_2 \geq 0$

$\Rightarrow (e_i^T) \left(D_1 R D_1 - D_2 R D_2 \right) e_i \geq 0$

$\forall \ 1 \leq i \leq n$

对 $1 \leq i \leq r$ 即 $\lambda_i^2 R_{ii} - \mu_i^2 R_{ii} \geq 0$

$\Rightarrow \lambda_i \geq \mu_i$

对 $i > r$. $\lambda_i = 0 \Rightarrow \mu_i = 0$

$\Rightarrow \sqrt{A} \geq \sqrt{B}$. $\square$