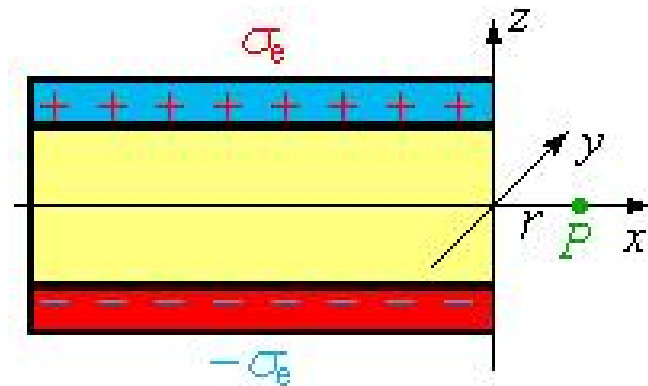


# 思考题讨论

- 思考题6.6 磁荷法可以求电容器内部的 $E$ 吗？  
(可以按例题6.14的方式求电容器内部的 $E$ 吗？)
- 思考题6.7 直接积分计算例6.14的电场。
- 思考题7.1 楞次定律：为何感应电流的效果总是反抗，而不是增强引起感应电流的原因？

6.7[解] 以电容器右端中点为原点，场点 $P$ 在 $x$ 轴上。由对称性，电场只有 $z$ 分量，且正负电荷的贡献相同。



$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\sigma_e}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{2(-d/2)}{[(r-x)^2 + y^2 + (d/2)^2]^{3/2}} \\
 &= -\frac{\sigma_e d}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(r-x)^2 + (d/2)^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \\
 &= -\frac{\sigma_e d}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(r-x)^2 + (d/2)^2} = \frac{\sigma_e}{\pi\epsilon_0} \arctan \frac{r-x}{d/2} \Big|_{-\infty}^0 \\
 &= \frac{\sigma_e}{\pi\epsilon_0} \left( \arctan \frac{2r}{d} - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\sigma_e}{\pi\epsilon_0} \arctan \frac{d}{2r} \stackrel{d \ll r}{=} -\frac{\sigma_e d}{2\pi\epsilon_0 r}.
 \end{aligned}$$

换元  $y = [(r-x)^2 + (d/2)^2]^{1/2} \tan\theta$

## 为什么 $\varepsilon_{\text{感}}$ “方向”必须按楞次定律的规定？

- 以磁铁插入线圈情形为**例**：此时穿过线圈的磁通量增加，按照楞次定律，感应电流激发的磁通量应**减少**原磁通量的**改变**，线圈的感应磁场将排斥磁棒的继续插入。要维持感应电流，需克服此排斥力对磁棒做功。**机械能→电能 (实为磁能)**。
- 若感应电动势**与楞次定律规定的方向相反**，只要磁铁稍有运动，感应电流的磁通量就会**增强**原磁通量的改变，线圈将吸引磁棒继续插入，能量“**无中生有**”，**违背能量守恒定律**。

# 第二十四讲 2022-05-24

## 第7章 电磁感应

§ 7.1 电磁感应定律

§ 7.2 动生电动势与感生电动势

§ 7.3 互感与自感

§ 7.4 暂态过程

➤定量：单位正电荷所受的洛伦兹力

$$\mathbf{K} = -\mathbf{F}/e = -(-e\mathbf{v} \times \mathbf{B})/e = \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

动生电动势是单位正电荷从电源的负极通过内部到达电源正极的过程中，洛伦兹力所作的功，即

$$\mathcal{E} = \int_{-}^{+} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.$$

可见，这个特例中，动生电动势来源于磁场对随导体一道运动载流子产生的洛伦兹力。

一般情形是否仍然有

$$\int_a^b (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B} = -d\Phi / dt \quad ???$$

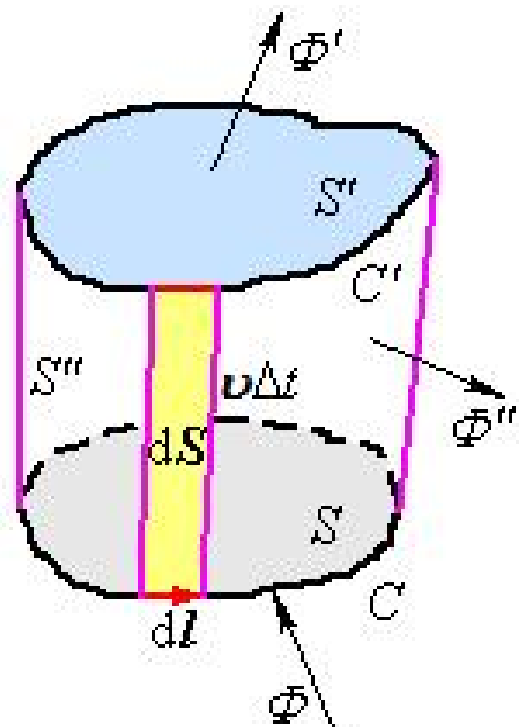
- 一般情形：一个任意形状的导体线圈在任意恒定磁场中运动或形变。

- 设 $t$ 时刻线圈处于 $C$ ，穿过磁通量 $\Phi$ ，在 $t+\Delta t$ 时刻线圈处于 $C'$ ，穿过磁通量 $\Phi'$ ，则动生电动势

$$\mathcal{E} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi' - \Phi}{\Delta t}.$$

- 分别以 $C$ 和 $C'$ 周线作曲面 $S$ 和 $S'$ ，记 $\Delta t$ 时间内线圈扫过的曲面为 $S''$ ， $S''$ 穿过的磁通量为 $\Phi''$ ，由高斯定理， $\Phi - \Phi' + \Phi'' = 0$ ，所以

$$\mathcal{E} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Phi'' / \Delta t. \quad (*)$$



$$\Phi'' = \iint_{S''} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{v} \Delta t) = \Delta t \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.$$

将上式代入上页(\*)式得

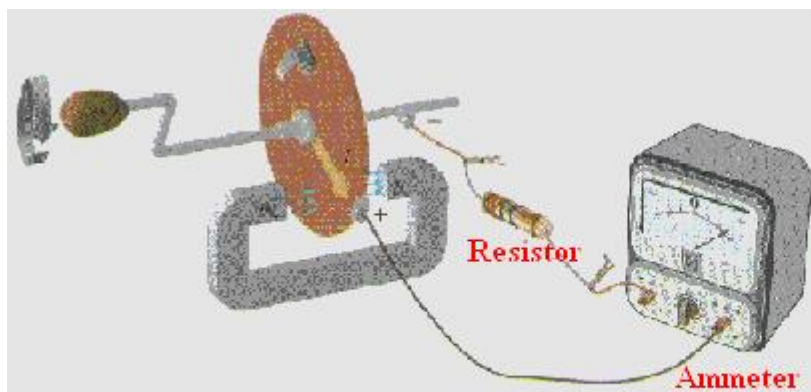
$$\mathcal{E} = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.$$

➤将闭合线圈换成不闭合的一段导线 $ab$ ，动生电动势为

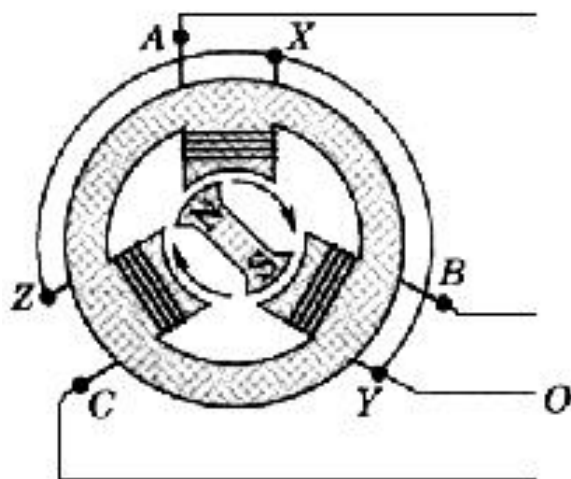
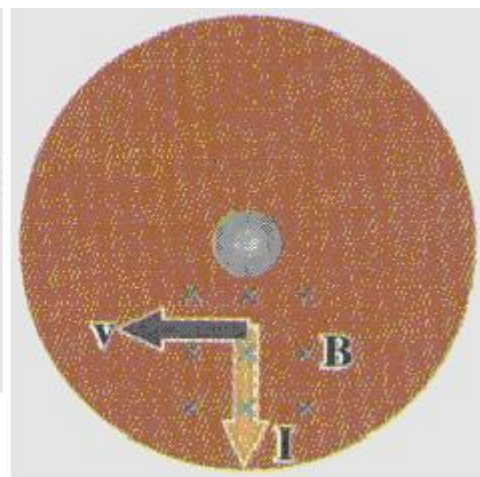
$$\mathcal{E} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.$$

➤**结论**：运动导体在磁场中产生动生电动势，相关的非静电力是洛伦兹力。若运动导体是闭合回路的一部分，则回路产生**感应电流**；若不是，则导体两端有电势差——**开路电源**。

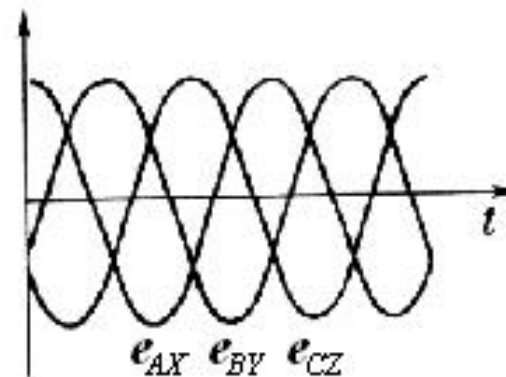
- 应用



法拉第直流发电机



a 三相交流发电机示意图



b 三相交流电波形曲线



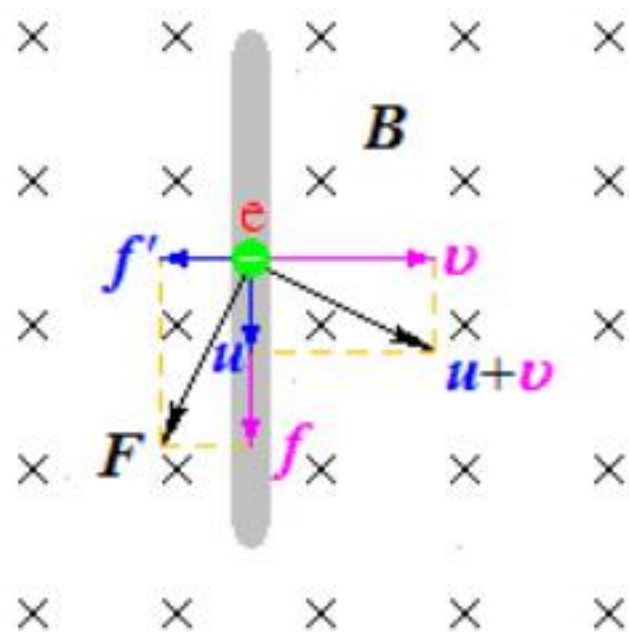
- 再论洛仑兹力不作功

vs 动生电动势是洛仑兹力移动单位电荷所做功！

- 分析：我们只考虑了载流子随导体运动的速度  $\boldsymbol{v}$ ，没有考虑洛仑兹力引起的漂移速度  $\boldsymbol{u}$ 。

电子所受的总洛仑兹力为  $\boldsymbol{F} = -e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) - e(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}'$ 。

- $\boldsymbol{f}$  有正功率  $P_1 = e(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{u}$ ，产生动生电动势； $\boldsymbol{f}'$  有负功率  $P_2 = e(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}$ ，阻碍运动。 $\boldsymbol{F}$  的总功率  $P_1 + P_2 = 0$ 。
- 结论：洛仑兹力的两个分量所做功之和为零。外力所做功通过洛仑兹力传递转化为电能。



## 2. 感生电动势

- 当导体回路不动，而磁场随时间变化时，导体回路中也会产生感应电动势，称为感生电动势。

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}.$$

- 产生感生电动势的非静电力是什么呢？

➤ ~~洛伦兹力~~？ 因为导体不动，载流子无宏观速度。

➤ 涡旋电场假说：变化的磁场激发了一种新的电场，称涡旋电场或感应电场，它驱动载流子在回路中产生感应电流。这一假说揭示了电磁感应定律更深层次的物理本质。

- 涡旋电场和库仑电场的比较

➤共同之处：都是客观存在的物质，能对电荷施力。

➤不同之处：涡旋电场由变化的磁场激发，电场线闭合，环量不为零，因而是有旋场，不是保守场或势场；库仑电场由电荷产生，是保守场或势场。

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad \nabla \times \mathbf{E}_{\text{旋}} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E}_{\text{势}} \cdot d\mathbf{l} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}_{\text{势}} = 0.$$

- 一般情形：总电场  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{势}} + \mathbf{E}_{\text{旋}}$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

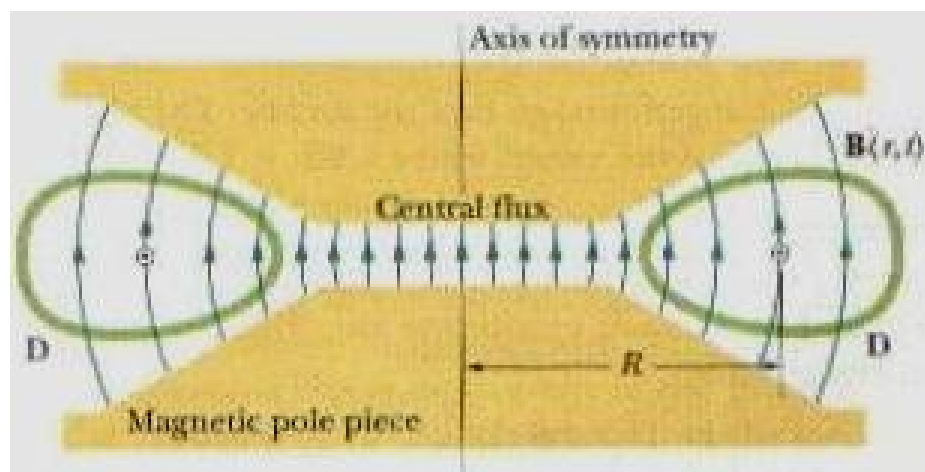
稳恒情况下，上式回到静电场的环路定理。

### 3. 验证与应用：电子感应加速器

涡旋电场假说的直接验证：利用涡旋电场加速电子的电子感应加速器。

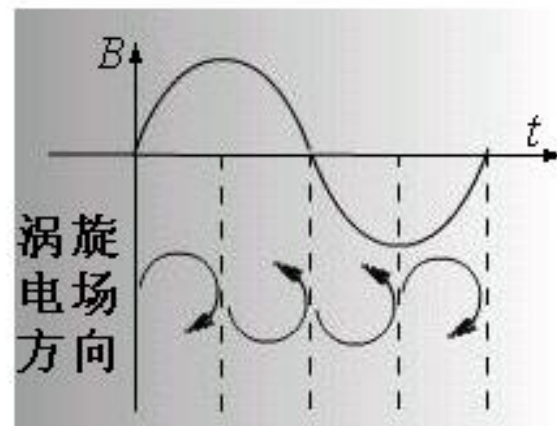
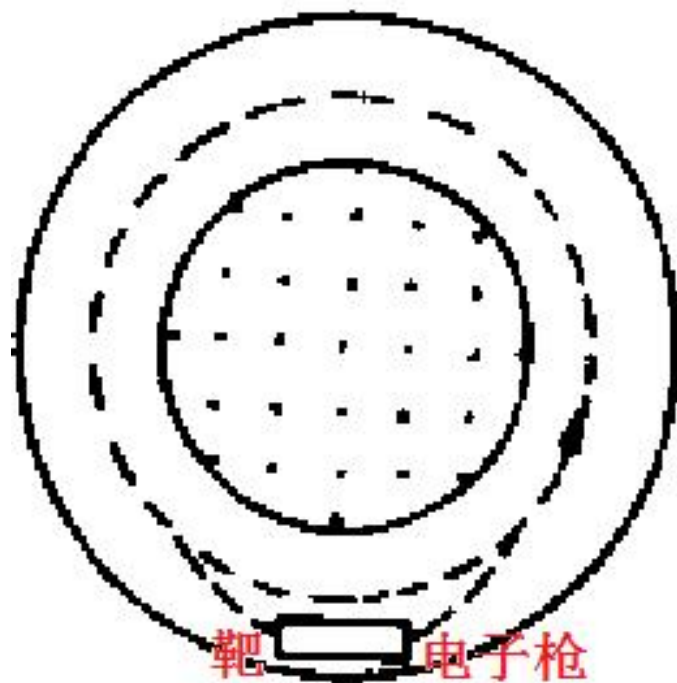
在交变电流的激励下，圆形电磁铁的两极间出现交变磁场，交变磁场再激发涡旋电场。

两极间有一环形真空室，从电子枪射入真空室的电子受到两个力作用：一是涡旋电场力使电子沿切向加速，二是径向洛伦兹力使电子做圆周运动。



交变磁场随时间的正弦变化导致涡旋电场方向顺、逆时针交替。因为电子带负电，只有第一、四两个1/4周期内才能被加速。但第四个1/4周期中洛仑兹力向外，不能充当向心力。因此须在每个周期的前1/4周期之末设法将电子束引出轨道。

电荷做加速运动会辐射电磁波而损失能量，这对电子感应加速器是一个严重限制。



## 1) 洛仑兹力提供向心力

$$m v^2 / R = e v B_R, \quad \therefore m v = e R B_R.$$

可见，只要电子动量与磁感应强度成比例增加，就能保证 $R$ 不变(以满足工程上的需要)。

## 2) 涡旋电场力改变动量大小

$$\oint_L \mathbf{E}_{\text{旋}} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \rightarrow -e \mathbf{E}_{\text{旋}} = \frac{e}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(mv)}{dt},$$

设 $t=0$ 时 $\Phi=v=0$ ，上式积分得  $mv = \frac{e}{2\pi R} \Phi = \frac{eR}{2} \bar{B}$ ,

$\bar{B} \triangleq \frac{1}{\pi R^2} \iint_{r < R} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  为电子圆轨道内的平均磁感应强度。

$$\therefore mv = e R B_R = e R \bar{B} / 2, \quad \rightarrow B_R = \bar{B} / 2.$$

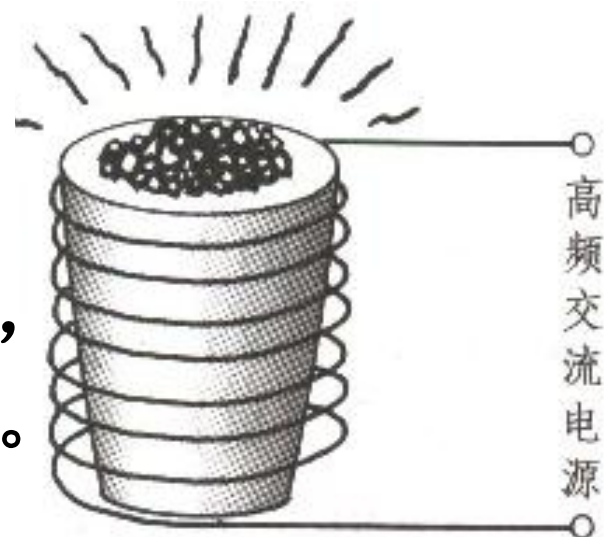
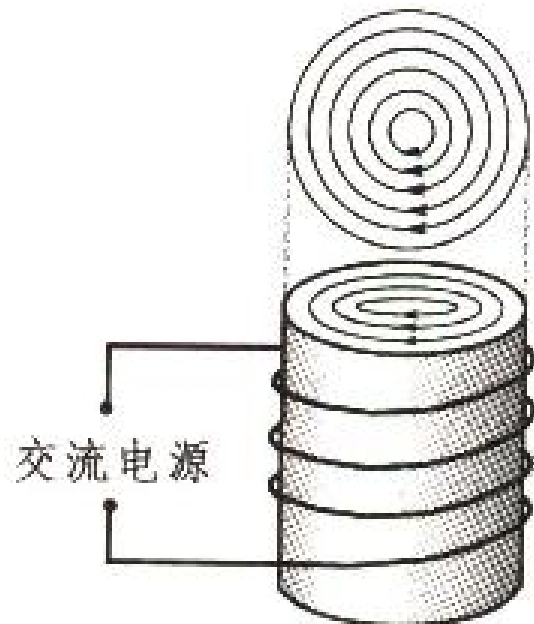
这种磁场分布可通过设计电磁铁的外形实现。

## 4. 涡电流

由于随时间变化的磁场可以在其周围空间激发涡旋电场，所以当把块状金属置于其中时，金属中的载流子将在涡旋电场的驱动下形成涡旋状电流，称为涡电流。

- 感应加热

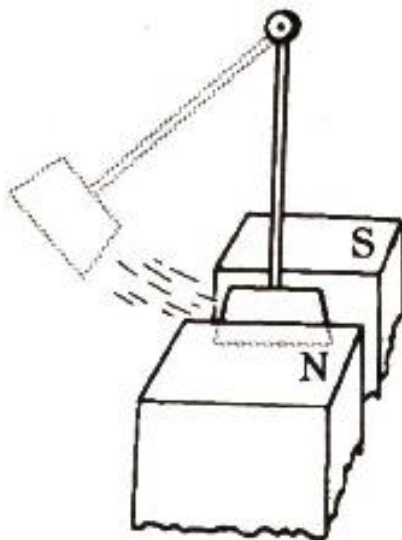
金属电阻率很小，所以不大的感应电动势便可产生较强的涡电流，从而在金属内产生大量的焦耳热。



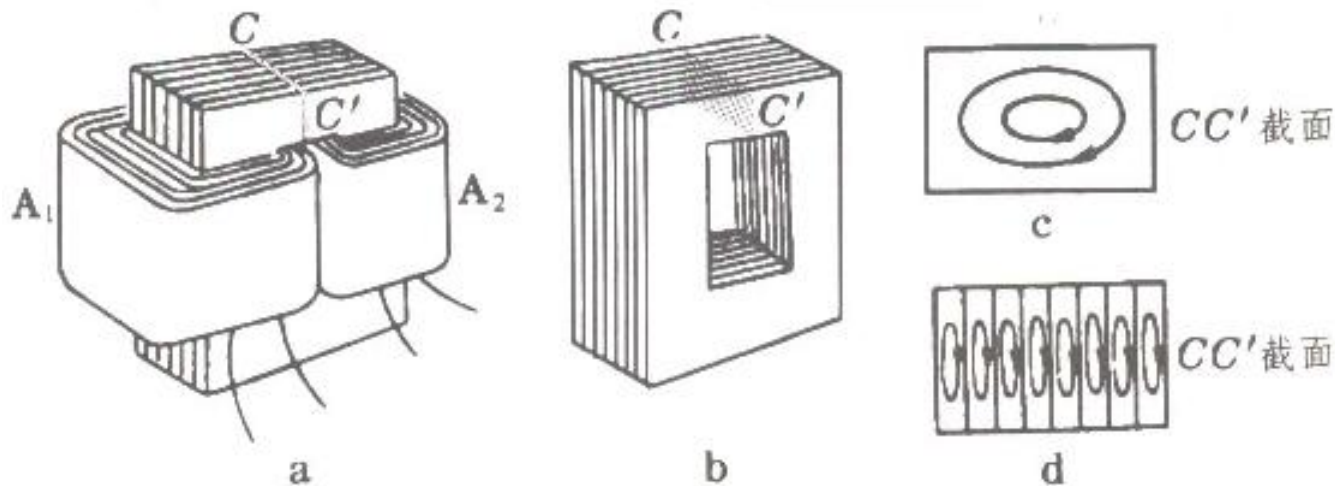
## • 电磁阻尼

## 电磁驱动？

- 现象：当电磁铁未通电时，在电磁铁两极间的金属摆要摆动多次才停下。但电磁铁一旦通电，摆很快停下。
- 原因：用楞次定律分析。
- 应用：常用于电学测量仪表，使指针迅速稳定。

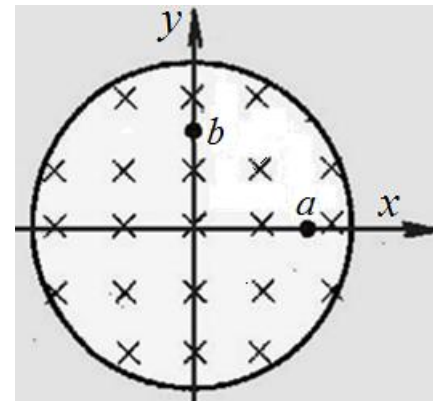


## • 涡电流的危害





[例7.4] 如图所示，磁感应强度 $B$ 在圆内均匀，且以恒定速率随时间变化。若 $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ 已知，求 $a$ 、 $b$ 间的电势差 ( $Oa=Ob=r$ )。



- 1)  $a$ 、 $b$ 间用跨过第2, 3, 4象限的圆弧导线相连接；
- 2)  $a$ 、 $b$ 间用跨过第1象限的圆弧导线相连接；
- 3)  $a$ 、 $b$ 间没有导线连接。

[解] 考查以原点为圆心半径为 $r$ 的逆时针圆形回路，由对称性，

此负号源于 $B$ 与回路方向成左手定则

$$E_{\text{旋}} 2\pi r = -\left(-\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\right) \pi r^2 = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \pi r^2 \Rightarrow E_{\text{旋}} = \frac{r}{2} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

1) 开路电压等于电动势，导线跨2, 3, 4象限时，

$$U_{ab} = \mathcal{E} = \int_b^a \underset{(2 \rightarrow 3 \rightarrow 4)}{E_{\text{旋}}} \cdot d\mathbf{l} = \frac{3\pi r^2}{4} \frac{dB}{dt}$$

2) 导线跨1象限时，

$$U_{ab} = \mathcal{E} = \int_b^a \underset{(1)}{E_{\text{旋}}} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\pi r^2}{4} \frac{dB}{dt}$$

3)  $a$ 、 $b$ 之间无导线连接，则没有电荷积累， $E_{\text{势}}=0$ ，

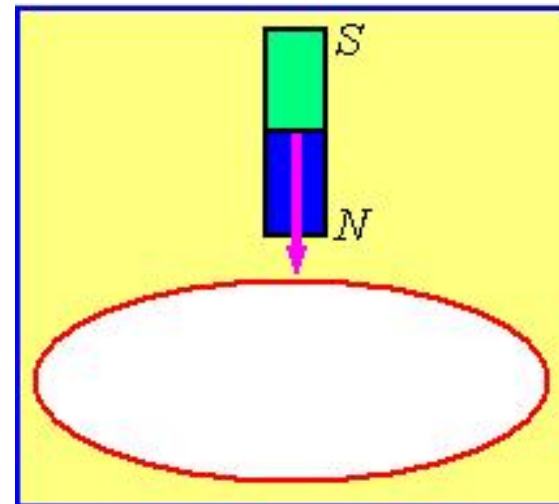
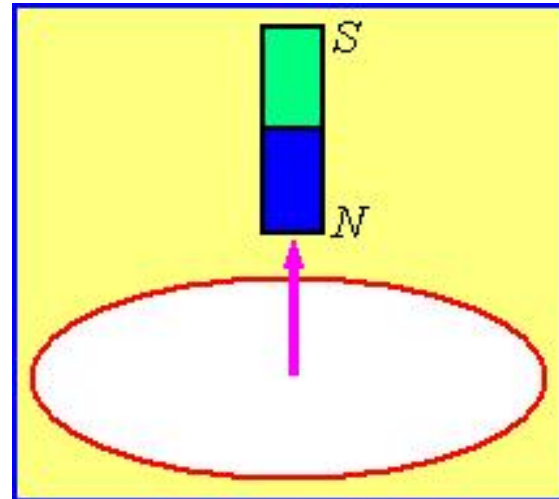
$$\therefore U_{ab}=0$$

**问题1：** 如果 $a$ 、 $b$ 间用直导线连接，求 $U_{ab}$ 。

**问题2：** 不同形状导线连接 $a$ 、 $b$ 导致不同电势差，是否与电势差与路径无关相悖？

## 5. 电磁感应和相对性原理

- 考虑**匀速**相对运动的线圈和磁棒的电磁感应。设 **$S$** 系固定在磁棒上， **$S'$** 系固定在线圈上， **$S''$** 系固定在地面上。这3个惯性系中看到了...？
- $S$ 系观察者**：磁铁静止，线圈向着磁棒运动，产生**动生电动势**。
- $S'$ 系观察者**：线圈静止，磁棒向着线圈运动，线圈中感应涡旋电场，产生**感生电动势**。



- $S''$ 系观察者：磁棒和线圈都在运动，线圈中产生的电动势是动生电动势和感生电动势之和。

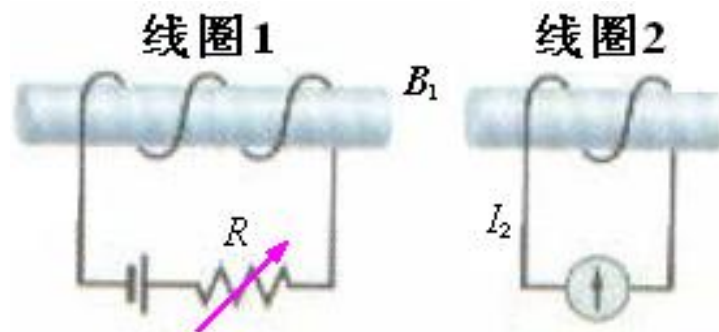
三种参考系产生三种不同的看法，原因何在？

- 狭义相对论认为：电磁场是一个整体，将它划分为电场和磁场只有相对意义，这种划分与观测者所在的参考系有关，所以才产生不同的看法。电磁场作为一个整体，在不同惯性系中满足同样的规律。

## § 7.3 互感与自感

### 1. 互感

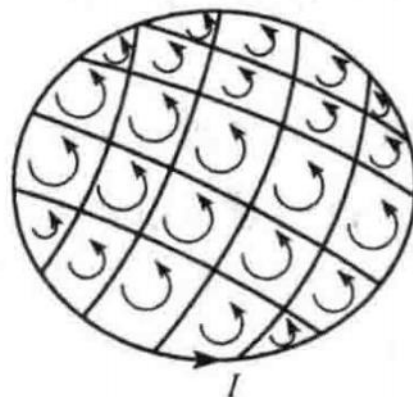
- **定义**：线圈1中变化的电流在周围空间产生变化的磁场，使线圈2产生感生电动势，这就是互感现象。
- 设线圈1的磁场 $B_1$ 穿过线圈2的磁通匝链数为 $\Psi_{12}$ 。若线圈的位形不变， $\Psi_{12} \propto B_1 \propto I_1$ ，记 $\Psi_{12} = M_{12} I_1$ ， $M_{12}$ 为互感系数。同样， $\Psi_{21} = M_{21} I_2$ 。
- 由电磁感应定律，线圈1和2中的感生电动势分别为



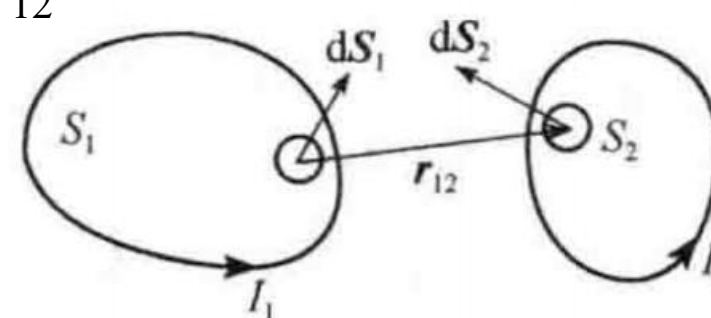
$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_2}{dt}, \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_1}{dt}.$$

- 证明互感系数  $M_{12}=M_{21}=M$ 。

假设两线圈都是单匝，线圈1等效于元电流组，即

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 = \sum \mathbf{B}_{\text{元电流}} &= \sum \left[ -\frac{\mu_0 \mathbf{m}_1}{4\pi r_{12}^3} + \frac{3\mu_0 (\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r}_{12}) \mathbf{r}_{12}}{4\pi r_{12}^5} \right] \\ &= -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{d\mathbf{S}_1}{r_{12}^3} + \frac{3\mu_0 I_1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{\mathbf{r}_{12} \cdot d\mathbf{S}_1}{r_{12}^5} \mathbf{r}_{12} \end{aligned}$$


于是穿过线圈2的磁通量

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 \\ &= -\frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \iint_{S_1} \iint_{S_2} \frac{d\mathbf{S}_1 \cdot d\mathbf{S}_2}{r_{12}^3} + \frac{3\mu_0 I_1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{(\mathbf{r}_{12} \cdot d\mathbf{S}_1)(\mathbf{r}_{12} \cdot d\mathbf{S}_2)}{r_{12}^3} \end{aligned}$$


所以互感系数

$$M_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S_1} \iint_{S_2} \frac{d\mathbf{S}_1 \cdot d\mathbf{S}_2}{r_{12}^3} + \frac{3\mu_0}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{(\mathbf{r}_{12} \cdot d\mathbf{S}_1)(\mathbf{r}_{12} \cdot d\mathbf{S}_2)}{r_{12}^3}$$

上式关于指标1和2对称,  $\rightarrow M_{12} = M_{21}$

对多匝线圈计算总互感系数时, 各匝线圈的磁场线性叠加, 各匝线圈的感生电动势线性叠加,

总互感系数是单匝线圈互感系数  $M_{12}^{ij}$  对这两组线圈匝数的双重求和, 对称性依然保持。

$$M_{12} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} M_{12}^{ij} = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} M_{21}^{ij} = M_{21}$$

- 另一证法 假设两线圈都是单匝，毕-萨定律

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L I_1 d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L I_1 d\mathbf{l}_1 \times \nabla_2 \frac{1}{r_{12}}$$

$$= \nabla_2 \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1}{r_{12}} \right) \triangleq \nabla_2 \times \mathbf{A}_1,$$

$$\therefore \Phi_{12} = \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \iint_{S_2} (\nabla_2 \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{S}_2$$

$$= \oint_{L_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}},$$

矢量势

$$\rightarrow M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r_{12}}.$$



由于上式对下标1和2对称， $M_{21}=M_{12}=M$ 。

推广到多匝线圈情形，由于

$$\Psi_{12} = \sum_{ij} \iint_{S_j} \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{S}_j = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \sum_{ij} \oint_{L_j} \oint_{L_i} \frac{d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_j}{r_{12}} \triangleq M_{12} I_1,$$

$$\rightarrow M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{ij} \oint_{L_j} \oint_{L_i} \frac{d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_j}{r_{12}}.$$

上式对下标*i*和*j*对称，仍然有 $M_{21}=M_{12}=M$ 。

[例7.5] 一长直螺线管长为 $l$ ，截面积为 $S$ ，线圈匝数为 $N_1$ ，另一个 $N_2$ 匝线圈紧绕在螺线管的中部，计算两线圈的互感。

[解] 设长直螺线管电流为 $I_1$ ，则

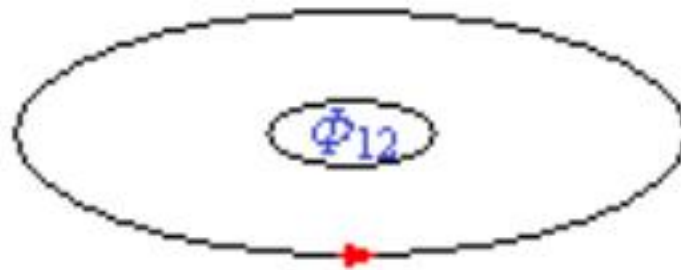
$$B = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$$

通过 $N_2$ 匝线圈的全磁通为

$$\Psi_{12} = N_2 BS = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{l} I_1$$

$$\rightarrow M = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2 S}{l}$$

[例7.6]两同心共面单匝圆线圈，半径分别为 $r$ 和 $R$ ，设 $R \gg r$ ，求两线圈互感。



[解] 设大圆线圈电流为 $I_1$ ，其在圆心处的磁场

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2R}$$

由于 $R \gg r$ ，大圆线圈在小圆线圈内的磁场与圆心处磁场近似相等，所以通过小圆线圈的磁通量

$$\Phi_{12} \approx B \pi r^2 = \frac{\mu_0 \pi r^2}{2R} I_1 \quad \rightarrow \quad M = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0 \pi r^2}{2R}$$

另解：考虑小线圈在大线圈中的磁通，计算互感。

# 作业、预习及思考题

- 作业：7.1~7.7
- 预习：7.3余下内容、7.4 暂态过程

## 下次课讨论

- 思考题7.2 如果例7.4中 $a, b$ 之间以直导线相连，求 $U_{ab}$ 。
- 思考题7.3 例题7.6另解：考虑小线圈在大线圈中的磁通，计算互感。