Lec2 Note of Abstract Algebra

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 15 日

2 群的基本概念，例子

定义 2.1. 集合 M 以及 M 上的一个结合二元运算称为一个**半群 (Semigroup)**，简称 M 为一个半群。

例 2.1. A 为集合，令 $\Sigma(A) = \{f\colon A \to A \mid f\text{为集合映射}\}$，则 $(\Sigma(A), \circ)$ 为半群。

设 M 为半群，若 M 中元素 e 满足

$$e \cdot a = a \cdot e = a.$$

则称 e 为 M 中的 (一个) **幺元 (单位元)**，记作 e 或 1，1_M。

评论. 半群 M 中的幺元若存在则必唯一。设 e_1, e_2 为幺元，则

$$e_2 = e_1 \cdot e_2 = e_1.$$

例 2.2. 例 2.1 中，恒同映射 Id_A 为半群上的幺元。

称有幺元的半群为**含幺半群**。

设 M 为含幺半群，$g \in M$，若存在 $h \in M$，使得

$$gh = hg = 1,$$

则称 h 为 g 的 (一个) **逆元**。

同样的，含幺半群中元素 g 的逆元若存在，则必唯一。设 h_1, h_2 为 g 的逆元，则

$$h_1 = h_1 1 = h_1(gh_2) = (h_1 g)h_2 = 1h_2 = h_2.$$

于是我们可以将 h 记作 g^{-1} 而不引起混淆。

称每个元素均可逆的含幺半群为**群**。

例 2.3. (1) $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ 对加法均构成群，幺元为 0。$(\mathbb{N}, +)$ 为含幺半群。$(\mathbb{C}, \cdot)$ 为含幺半群，1 为幺元。

(2) 对 $n \in \mathbb{Z}^+$，考虑 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，对加法构成群，幺元为 $\overline{0}$，$\overline{a}$ 的逆元为 $\overline{-a}$。乘法可逆元为 $\{\overline{a} \mid (a, n) = 1\}$。

(3) 考虑矩阵 $M_n(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{Q}), M_n(\mathbb{Z})$，对加法构成群，幺元为 0 矩阵，逆元为负矩阵。对乘法构成含幺半群，幺元为 I_n。

(4) 考虑 n 阶可逆方阵 $GL_n(\mathbb{C}), GL_n(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{Q})$，对乘法构成群，称为**一般线性群**。特别当 $n=1$ 时，$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$。

(5) 记 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$，则 $(S^1, \cdot)$ 为群。记 $\mu_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$，则 $(\mu_n, \cdot)$ 为群。

(6) 例 2.1 中的 $(\Sigma(A), \circ)$ 为含幺半群，令 $S(A) = \{f \in \Sigma(A) \mid f\text{可逆}\}$，则 $(S(A), \circ)$ 形成群，称为 A 的**对称群**，$S(A)$ 中的元素称为 A 的置换。

(7) $\mathbb{R}^2$ 上所有保持距离的运动 (这里指到自身的双射) 的全体形成一个群，称为**欧氏运动群**。

命题 2.1. M 为含幺半群，则 $M^\times = \{a \in M \mid a\text{可逆}\}$ 为群。

证明.

- $1_M \in M^\times$：$\forall\, a \in M^\times$, $1_M a = a 1_M = a \Rightarrow 1_M = 1_{M^\times}$。
- $a \in M^\times, b \in M^\times \Rightarrow ab \in M^\times$。
- $a \in M^\times \Rightarrow a^{-1} \in M^\times$。

于是 $M^\times$ 构成群。 □

定义 2.2. 设 G 为群，若 G 中元素个数 $|G|$ 有限，则称 G **有限群 (Finite group)**，$|G|$ 称为 G 的**阶 (Order)**。否则，称为**无限群 (Infinite group)**，$|G| = \infty$，阶为无穷。

定义 2.3. 群 G 中乘法满足**交换律 (Commutative law)**，即 $ab = ba, \forall\, a, b \in G$，则称群 G 为**交换群 (Commutative group)**，或 **Abel 群 (Abelian group)**。

评论. Abel 群中的运算通常写为 $+$，幺元记作 0。

评论. S_n 是 Abel 群 $\Leftrightarrow n = 1, 2$。

$GL_n(M)$, $M = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \cdots$ 是 Abel 群 $\Leftrightarrow n = 1$。