思考题讨论

- 思考题10.1 定性分析ε随电场频率ω的变化。

束缚电子在入射波电场作用下的受迫振动方程

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{eE}{m}=\frac{eE_0}{m}e^{-\mathrm{j}\omega t}$$

将$x=x_0e^{-\mathrm{j}\omega t}$代入上式得稳态解

$$x=\frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{j}\omega\gamma}E$$

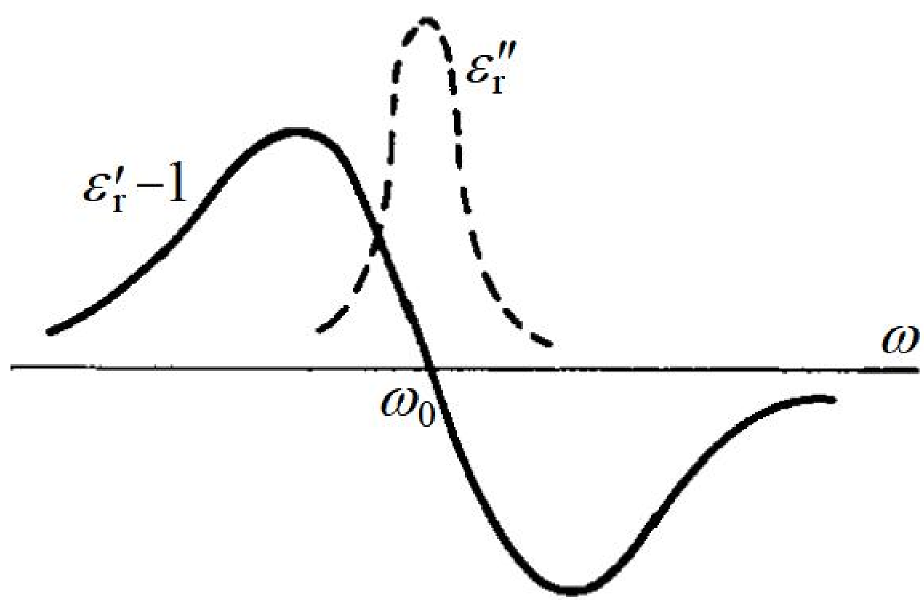
电极化强度

$$P=Nex=\frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-\mathrm{j}\omega\gamma}E$$

相对介电常数实部和虚部分别为

$$\varepsilon_r' = 1 + \mathrm{Re}\left(\frac{P}{\varepsilon_0 E}\right) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

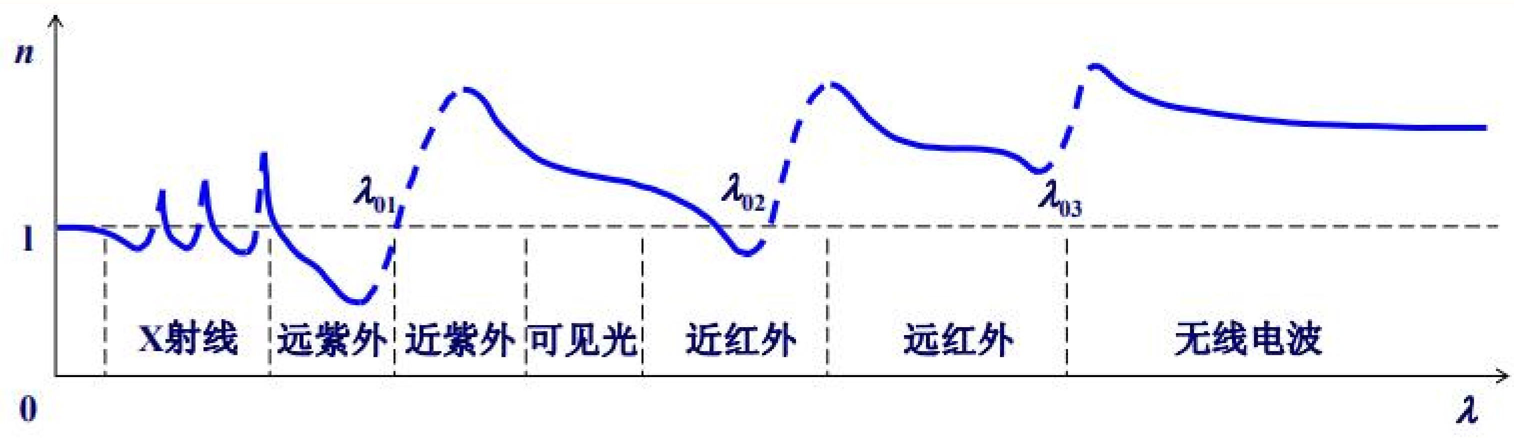
$$\varepsilon_r'' = \mathrm{Im}\left(\frac{P}{\varepsilon_0 E}\right) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$



特别的，当$\omega >> \omega_0$时，束缚电子近似为自由电子，

$$\varepsilon_r' \approx 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\frac{1}{\omega^2+\gamma^2}$$

实际材料有多个固有频率，产生多峰结构。



一种介质的全部色散曲线

第三十讲 2022-06-16
第10章 麦克斯韦电磁理论

§10.1 麦克斯韦方程组

§10.2 平面电磁波

§10.3 电磁场的能量、动量和角动量

10.3 电磁场的能量、动量和角动量

1. 表达式

- 静止线性介质中电磁场的能量密度w、动量密度$\boldsymbol{g}$和角动量密度$\boldsymbol{l}$分别为

$$w=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{g}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g},$$

- 于是体积V中电磁场的能量、动量和角动量分别为

$$W=\iiint_V w\mathrm{d}V,\quad \boldsymbol{G}=\iiint_V \boldsymbol{g}\mathrm{d}V,\quad \boldsymbol{L}=\iiint_V \boldsymbol{l}\mathrm{d}V.$$

- 上述三量的流动分别称为能流密度(坡印亨矢量) $\boldsymbol{S}$、动量流密度T和角动量流密度M

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H},\quad \mathrm{T}=w\mathrm{I}-\boldsymbol{BH}-\boldsymbol{DE},\quad \mathrm{M}=-\mathrm{T}\times\boldsymbol{r}.$$

上述各量的形式如何得来？

构建能量密度和能流密度

- 设空间一区域体积V，表面积A，自由电荷密度ρ_0，电流密度$\boldsymbol{j}_0$。以$\boldsymbol{f}$表示电磁场对电荷的作用力密度，$\boldsymbol{\upsilon}$是电荷速度，则场对电荷系统的功率

$$\iiint_V \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\upsilon}\,\mathrm{d}V.$$

- 根据能量守恒(类于电荷守恒定律)

$$\iiint_V \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\upsilon}\,\mathrm{d}V+\iiint_V \frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}V=-\oiint_A \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}.$$

其中$\partial w/\partial t$是单位体积内电磁能的增长率，$\boldsymbol{S}$是单位时间内单位横截面上通过电磁波形式传播出去的能量。

相应微分形式

$$\nabla\cdot\boldsymbol{S}+\frac{\partial w}{\partial t}=-\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\upsilon}. \qquad \textbf{(\#)}$$

而$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\upsilon}=(\rho_0\boldsymbol{E}+\rho_0\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{\upsilon}=\boldsymbol{E}\cdot(\rho_0\boldsymbol{\upsilon})=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}_0$。

由$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_0+\partial\boldsymbol{D}/\partial t$和$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{\upsilon}&=\boldsymbol{E}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}-\partial\boldsymbol{D}/\partial t)\\&=-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})+\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot\partial\boldsymbol{D}/\partial t\\&=-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{H}\cdot\partial\boldsymbol{B}/\partial t-\boldsymbol{E}\cdot\partial\boldsymbol{D}/\partial t\\&=-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})-\tfrac{1}{2}\partial(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}+\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})/\partial t\end{aligned}$$

线性介质

恒流圆柱导线的能流分布？

- 将上式与(#)比较，“可得”

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H},\quad w=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}.$$

2. 平面电磁波的能量、动量

$$
\text{瞬时值}\begin{cases}
\text{能量密度：}\ w=\varepsilon E^2=\mu H^2, \\
\text{能流密度：}\ \boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\sqrt{\varepsilon/\mu}\,E^2\boldsymbol{\upsilon}/\upsilon=w\boldsymbol{\upsilon}, \\
\text{动量密度：}\ \boldsymbol{g}=\mu\varepsilon\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{S}/\upsilon^2=w\boldsymbol{\upsilon}/\upsilon^2.
\end{cases}
$$

(真空中， $\upsilon=c$, $\therefore S=cw$, $g=w/c=S/c^2$.)

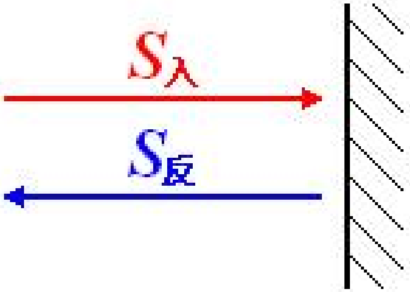
按时间的平均值：

$$\bar{w}=\int_0^T w(t)\mathrm{d}t/T=\tfrac{1}{2}\varepsilon E_0^2,$$

$$\bar{\boldsymbol{S}}=\tfrac{1}{2}\varepsilon E_0^2\boldsymbol{\upsilon}=\bar{w}\boldsymbol{\upsilon},$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}=\tfrac{1}{2}\varepsilon E_0^2\boldsymbol{\upsilon}/\upsilon^2=\bar{\boldsymbol{S}}/\upsilon^2.$$

3. 光压



- 电磁波照射到物体表面后反射，动量改变，产生光压。
- 设电磁波垂直入射，定义反射系数$\gamma=S_反/S_入$，$\gamma=1$时为全反射，$\gamma=0$时为全吸收，一般情形$0\leq\gamma\leq1$。
- 设物体表面一面元ΔA，在Δt内，电磁波动量改变

$$(g_入 - g_反)(c\Delta t)\Delta A = (\Delta A\Delta t / c)(S_入 + S_反)$$

$$= (\Delta A\Delta t / c)S_入(1+\gamma) = \Delta A\Delta t w_入(1+\gamma).$$

上式应等于冲量$\overline{p}\Delta A\Delta t$，$\overline{p}$是压强。

$$\therefore \overline{p} = \overline{w}_入(1+\gamma).$$

[例10.2] 太阳电磁辐射在地球轨道处的平均能流密度 $\bar{S}$=1.94cal·cm^{-2}·min^{-1}=1.36×10^{3}J·m^{-2}·s^{-1}，称太阳常数。求地球轨道处的电场强度振幅及一垂直于光的全吸收面所承受的光压 (强)。

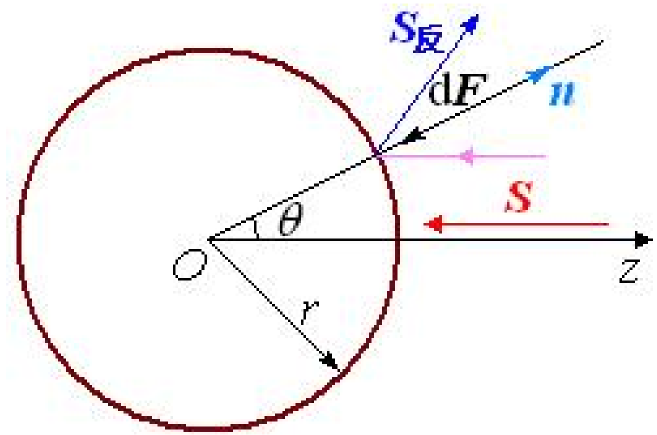
解：由式 $\bar{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\varepsilon E_0^2\boldsymbol{\upsilon}=\bar{w}\boldsymbol{\upsilon}$ 取ε=ε_0, υ=c，则

$$E_0=\sqrt{\frac{2\bar{S}}{\varepsilon_0 c}}=\left(\frac{2\times1.36\times10^3}{8.85\times10^{-12}\times3\times10^8}\right)^{1/2}=1.01\times10^3(\mathrm{V/m}).$$

$$\therefore\ \bar{p}=(1+R)\bar{w}=\bar{w}=\frac{\bar{S}}{c}=\frac{1.36\times10^3}{3\times10^8}=4.53\times10^{-6}(\mathrm{N/m^2})$$

很小，需灵敏仪器测量。思考：太阳对地球的总光压？

[例10.3] 平均能流密度为S的一束平行光作用到半径为r的球面上。分别求全反射和全吸收时光束对球面的总压力。



[解] 表面元ΔA上入射光的有效截面是$\Delta A\cos\theta$，且沿径向$\boldsymbol{n}$的入射能流和出射能流分量均为$S\cos\theta$，

全反射时ΔA的正压力$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=-2(S/c)\cos^2\theta\Delta A\boldsymbol{n}$，由对称性，

$$F=F_z=\iint \mathrm{d}F\cos\theta=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}2(S/c)\cos^3\theta r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=-\pi r^2 S/c.$$

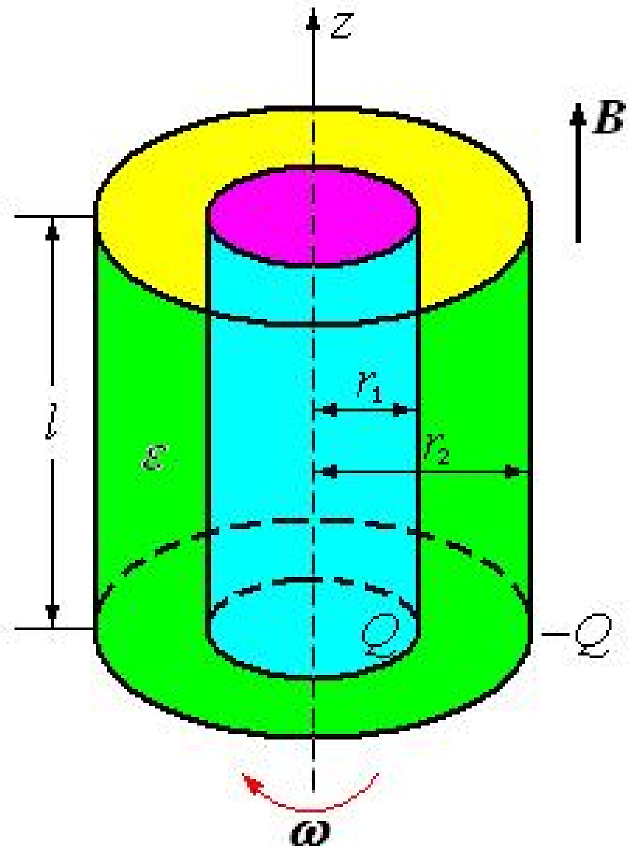
全吸收时ΔA的正压力$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=-(S/c)\Delta A\cos\theta\boldsymbol{e}_z$，

Why the same?

$$F=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}(S/c)\cos\theta r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta=-\pi r^2 S/c.$$

4. 电磁场角动量[例10.4]

- 理解电磁场角动量的实验：一圆柱形电容器长l，内外半径r_1, r_2，充满介电常数为ε的均匀各向同性介质，绕轴转动惯量为I，极板充电$\pm Q$，置于均匀磁场$\boldsymbol{B}$中。
- 放电时的电容器绕轴旋转，角速度ω可借助电磁场的角动量求得。



- 初始充电状态下，略去边缘效应，电容器中

$$\boldsymbol{D}=\frac{Q}{2\pi rl}\hat{r},\ \ \boldsymbol{g}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}=-\frac{QB}{2\pi rl}\hat{\varphi},\ \ \boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}=-\frac{QB}{2\pi l}\hat{z}.$$

于是电容器内电磁场的总角动量为

$$\boldsymbol{L}=\iiint_V \boldsymbol{l}\mathrm{d}V=-\frac{QB}{2\pi l}(\pi r_2^2-\pi r_1^2)l\hat{z}=-\frac{1}{2}QB(r_2^2-r_1^2)\hat{z}.$$

- 放电后，电容器内$\boldsymbol{E}$=0, $\boldsymbol{D}$=0，电磁场角动量为零。由总角动量守恒，则$0+\boldsymbol{L}_\mathrm{n}=\boldsymbol{L}$，即

$$I\omega=-\frac{1}{2}QB(r_2^2-r_1^2).$$

$$\therefore\ \omega=-\frac{1}{2I}QB(r_2^2-r_1^2).$$

上式中负号表示电容器顺时针旋转。

- 另一思路：假想一个放电过程 (如两极间接导线)，磁场对放电电流的洛伦兹力驱动转动。

5. 什么是电磁场?

电磁场和实物都是物质存在的形式，都有能量、动量和角动量。但二者又存在一些明显的差异：

- 电磁场的基本组成是光子，静止质量为零，但构成实物的电子、质子等静止质量不为零。
- 电磁场以波的形式在空间中传播，在真空中的速率永远是c；而原则上实物粒子的速度在小于c的范围内没有其他限制。
- 实物具有不可入性，即一种实物占有的空间不能同时被另一种实物占领；但不同电磁波可以同时占有同一空间。(费米子vs玻色子)

第10章 小结

两个假设
两个推广

麦氏方程组 → 边值关系

电磁性能方程

波动方程

(单频平面) 电磁波 → 赫兹实验检验

横波

$w_e = w_m$

光是电磁波

不同手段激发不同频率 → 电磁波谱

电磁场具有

- 能量 (信息、能源)
- 动量 (光压)
- 角动量 (驱动旋转)

作业、预习及思考题

- 作业：**10.6~10.10**
- 全面复习

- 思考题10.2 一个圆盘形电容器，两极板通以交流电流，画出能流分布图。
- 思考题10.3 例10.3的另一思路——证明反射部分平均动量为零，则光压只由入射部分贡献，与反射率无关。