

《数值分析》之 函数逼近

徐岩

中国科学技术大学数学系

yxu@ustc.edu.cn

<https://faculty.ustc.edu.cn/yxu>

- Lagrange插值的缺点: 无承袭性。增加一个节点, 所有的基函数都要重新计算
- 承袭性: $N_{n+1}(x) = N_n(x) + q_{n+1}(x)$
 - $N_n(x)$ 是利用 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 插值得到的 n 阶多项式
 - $N_{n+1}(x)$ 是利用 $\{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ 插值得到的 $n+1$ 阶多项式
 - 增加一个节点, 仅需在原有 n 个节点的多项式基础上添加多项式 $q_{n+1}(x)$

如何构造

- 由 $N_{n+1}(x_i) = N_n(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n$ 可知, $q_{n+1}(x)$ 有 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 这 $n+1$ 个零点
则有 $q_{n+1}(x) = a_{n+1}(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, 其中 a_{n+1} 为实数
- $N_n(x) = N_{n-1}(x) + q_n(x)$
则有 $q_n(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})$, 其中 a_n 为实数
- $N_1(x) = N_0(x) + q_1(x)$
则有 $q_1(x) = a_1(x - x_0)$, 其中 a_1 为实数

Newton插值多项式

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

确定系数 a_n

$$N_n(x_0) = a_0 = f(x_0),$$

$$N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1),$$

$$N_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2),$$

...

$$N_n(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0) \cdots (x_n - x_{n-1}) = f(x_n)$$

由此可得

$$a_0 = f(x_0),$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = \frac{1}{x_2 - x_1} \left(\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - a_1 \right)$$

$$a_3 = \frac{1}{x_3 - x_2} \left(\frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} - \frac{1}{x_3 - x_1} - a_2 \right)$$

定义

- 一阶差商

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

- k 阶差商

设 $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ 互不相同, $f(x)$ 关于 $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ 的 k 阶插商为

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

差商算法

$$\begin{array}{l|llll} x_0 & f(x_0) & & & \\ x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] & & \\ x_2 & f(x_2) & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & \\ \dots & & & & \\ x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & f[x_0, x_1, \dots, x_n] \end{array}$$

x	5	-7	-6	0
$f(x)$	1	-23	-54	-954

结点为5, -7, -6, 0,

$$\begin{array}{cc|cc}
 5 & 1 & & \\
 -7 & -23 & 2 & \\
 -6 & -54 & -31 & 3 \\
 0 & -954 & -150 & -17 & 4
 \end{array}$$

$c_0 = 1, c_1 = 2, c_2 = 3, c_3 = 4$, 所以插值多项式为

$$p_3(x) = 1 + 2(x - 5) + 3(x - 5)(x + 7) + 4(x - 5)(x + 7)(x + 6)$$

Newton插值多项式的表示

Newton插值多项式表示为

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})$$

$$a_0 = f(x_0),$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{x_2 - x_1} \left(\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - a_1 \right) \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1} (f[x_2, x_0] - f[x_1, x_0]) = f[x_0, x_1, x_2] \end{aligned}$$

...

$$a_n = f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$$

算法

- 计算Newton多项式的值

for(i=1;i<=n;i++) !计算差商表

{

 for(j=n;j>=i;j--)

$y[j] = (y[j] - y[j-1]) / (x[j] - x[j-i]);$

}

fx=y[n]; !求Newton多项式的值

for(i=n;i>=1;i--)

{

$fx = y[i-1] + (x - x[i-1])fx;$

}

- k 阶差商 $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ 可由 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_k)$ 的线性表示
 - 由多项式插值的唯一性, 知 $N_k(x) = L_k(x)$.
 - x^k 的系数相同
 - $$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$
- 对称性: 若 i_0, i_1, \dots, i_k 为 $0, 1, \dots, k$ 的任意排列, 则有

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$$

- 若 $f(x)$ 为 m 次多项式, 则 $f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x]$ 为 $m - k$ 次多项式。
- 函数差商与函数导数的关系

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

Newton插值多项式的误差

多项式插值误差定理对于Newton插值多项式同样成立，故有对 $[a, b]$ 中每个 x ，都有 $\xi_x \in (a, b)$ 使得

$$f(x) - N_n(x) = R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

而

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

故有

$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

上机作业2

对函数

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, x \in [-1, 1]$$

构造牛顿插值多项式 $p_N(x)$ ，插值节点取为：

1. $x_i = 1 - \frac{2}{N}i, i = 0, 1, \dots, N$

2. $x_i = -\cos(\frac{2i+1}{2N+2}\pi), i = 0, 1, \dots, N$ (Chebyshev point)

并计算如下误差

$$\max_i \{|f(y_i) - p(y_i)|, y_i = \frac{i}{50} - 1, i = 0, 1, \dots, 100\}$$

对 $N = 5, 10, 20, 40$ 比较以上两组节点的结果，并在一张图中画出 $N = 20$ 时 $f(x)$ 数值计算结果。

输出形式如下：

N=5

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

N=10

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

N=20

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

N=40

Max Error of grid (1) : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Max Error of grid (2) : XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

例1 给定 f 在 x_0 和 x_1 上的函数值和一阶导数值(共四个条件), 要求一个三次多项式 $p(x)$, 在给定结点上与给定信息吻合。
待定

$$p(x) = a + b(x - x_0) + c(x - x_0)^2 + d(x - x_0)^2(x - x_1)$$

则可知

$$a = f(x_0)$$

$$b = f'(x_0)$$

$$a + b(x_1 - x_0) + c(x_1 - x_0)^2 = f(x_1)$$

$$b + 2c(x_1 - x_0) + d(x_1 - x_0)^2 = f'(x_1)$$

因此插值多项式存在唯一。

例2 求一多项式 p ，使得 $p(0) = 0$, $p(1) = 1$, $p'(1/2) = 2$.

由于给定了三个条件，因此试用二次多项

式： $p(x) = a + bx + cx^2$. 由 $p(0) = 0 \implies a = 0$. 而另外两个条件有

$$1 = p(1) = b + c$$

$$2 = p'(1/2) = b + c$$

因此不存在二次多项式满足插值条件。因此考虑三次多项式， $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. 此时解不唯一： $d = -4$, $b + c = 5$, $a = 0$.

Hermite 插值问题

Hermite插值指的是对一个函数在一组结点上的函数值和导数值进行插值。

给定函数 f 以及结点 x_0, \dots, x_n , 求多项式 p :

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = 0, 1, i = 0, \dots, n$$

- 多项式插值空间的维数,
- 共有 $2(n+1)$ 个条件
- 多项式最高次数为 $2n+1$

Hermite 插值问题 (续)

$$H(x) = \sum_{i=0}^n h_i(x)f(x_i) + \sum_{i=0}^n g_i(x)f'(x_i)$$

问题变为求解插值基函数 $\{h_i(x)\}_i^n, \{g_i(x)\}_i^n \in P^{2n+1}(x)$, 满足

$$\begin{cases} h_i(x_j) = \delta_{ij} \\ h'_i(x_j) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} g_i(x_j) = 0 \\ g'_i(x_j) = \delta_{ij} \end{cases},$$

	h_0	\cdots	h_n	g_0	\cdots	g_n
x_0	1	\cdots	0	0	\cdots	0
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
x_n	0	\cdots	1	0	\cdots	0
x'_0	0	\cdots	0	1	\cdots	0
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
x'_n	0	\cdots	0	0	\cdots	1

Hermite 插值基函数

$$h_i(x) = \left(1 - 2(x - x_i) \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \right) \ell_i^2(x)$$
$$g_i(x) = (x - x_i) \ell_i^2(x)$$

当取2个节点时的Hermite插值多项式基函数为

$$h_0(x) = \left(1 - 2 \frac{x - x_0}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2$$

$$h_1(x) = \left(1 - 2 \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2$$

$$g_0(x) = (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)^2$$

$$g_1(x) = (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^2$$

Hermite插值

例 给定 $f(-1) = 0$, $f(1) = 4$, $f'(-1) = 2$, $f'(1) = 0$,
求Hermite插值多项式, 并计算 $f(0.5)$

解:

$$H_3(x) = h_0(x) \cdot 0 + h_1(x) \cdot 4 + g_0(x) \cdot 2 + g_1(x) \cdot 0$$

只需计算 $h_1(x)$ 和 $g_0(x)$

$$h_1(x) = \left(1 - 2\frac{x-1}{1+1}\right) \left(\frac{x+1}{1+1}\right)^2 = \frac{1}{4}(2-x)(x+1)^2$$

$$g_0(x) = (x+1) \left(\frac{x-1}{-1-1}\right)^2 = \frac{1}{4}(x+1)(x-1)^2$$

$$H_3(x) = (2-x)(x+1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)(x-1)^2$$

$$H_3(0.5) = 3.5625$$

Theorem (Hermite插值误差估计定理)

若 $f \in C^{2n+2}[a, b]$, $[a, b]$ 内的插值结点为 x_0, \dots, x_n , $p(x)$ 为相应的 *Hermite* 插值多项式, $\deg p \leq 2n + 1$, 则对于任意 $x \in [a, b]$, 存在 $\xi_x \in (a, b)$ 使得

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2$$

证明方法与无重结点的多项式插值误差估计定理完全类似。

Hermite 插值问题推广

给定函数 f 以及结点 x_0, \dots, x_n , 求多项式 p :

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad j = 0, \dots, k_i - 1, i = 0, \dots, n$$

Theorem (Hermite插值定理)

存在唯一的次数不超过 $m = k_0 + \dots + k_n - 1$ 的多项式满足上述插值条件。

证明：通过在幂基 $\{1, x, \dots, x^m\}$ 下待定多项式的系数，得到一个线性方程组 $Au = b$, 其中 A 为 $(m+1) \times (m+1)$ 阶矩阵(称为广义Vandermonde矩阵). 为证其有唯一解，只要证 $Au = 0$ 仅有零解，即满足 $p^{(j)}(x_i) = 0$ 的次数不超过 m 的多项式只能是零多项式。这可以通过统计 p 的零点数得证。 □

Newton形式与差商的推广

- 为了简化记号, 把插值结点重记为 t_0, \dots, t_m , 其中 $t_0 = t_1 = \dots = t_{k_1-1} = x_0, \dots$
- 记 f 在结点 t_0, t_1, \dots, t_m 上次数不超过 m 的插值多项式的 x^m 项系数为 $f[t_0, \dots, t_m]$.

Theorem (Newton插值多项式定理)

满足插值条件的多项式可以写为

$$p(x) = \sum_{j=0}^n f[x_0, \dots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i)$$

证明：归纳法。



高阶差商的性质

- 差商是结点的对称函数
- $f[x_0, \dots, x_0] = f^{(n)}(x_0)/n!$
- 设 $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$,

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \begin{cases} \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} & x_n \neq x_0 \\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} & x_n = x_0 \end{cases}$$

- 消去性质: $f[x_0, \dots, x_n] = \{(x - x_{n+1})f(x)\}[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}]$
- Leibnitz法则:

$$(fg)[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k]g[x_k, \dots, x_n]$$

用Newton方法确定一个多项式，满足

$$p(1) = 2, p'(1) = 3, p(2) = 6, p'(2) = 7, p''(2) = 8$$

解：

已知信息

1	2	3	?	?	?
1	2	?	?	?	
2	6	7	4		
2	6				
2	6				

用Newton方法确定一个多项式，满足

$$p(1) = 2, p'(1) = 3, p(2) = 6, p'(2) = 7, p''(2) = 8$$

解：

新信息的计算

1	2				
1	2	3			
2	6	4	1		
2	6	7	3	2	
2	6	7	4	1	-1

从而所求多项式为

$$p(x) = 2 + 3(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2) - (x-1)^2(x-2)^2$$