§7.3 幂级数与泰勒级数展开

本节我们将讨论一种简单的函数项级数“幂级数”：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

幂级数的形式虽然简单, 但它和后面要讨论的三角级数是应用最广泛也最重要的两类函数项级数.

我们首先要研究清楚它的和函数的性质：定义域、连续性、可微性和可积性.

7.3.1 幂级数的收敛区域

定理 1 如果幂级数在 $x_0\ (\neq 0)$ 处收敛, 则在所有 $|x| < |x_0|$ 的点 x 处绝对收敛. 如果幂级数在 x_0 处发散, 则当 $|x| > |x_0|$ 时发散.

证明 如果幂级数在 $x_0 \neq 0$ 收敛, 则对于任意满足 $|x| < |x_0|$ 的 x, 有

$$a_n x^n = a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$（这是因为幂级数在 x_0 收敛）, 所以 $|a_n x_0^n| < M$（有界）, 即

$$|a_n x^n| \leqslant M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

而 $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛; 因此 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛. 证毕.

分析一下, 幂级数的收敛域 E 有三种可能:

1° 仅在 $x = 0$ 处收敛: $E = \{0\}$;

2° 在 $E = (-\infty, +\infty)$ 上处处收敛;

3° 有不为零的收敛点和发散点, 所以 E 有界.

定理 2 如果幂级数有非零的收敛点和发散点, 则有正数 R, 使的幂级数在 $(-R, R)$ 中绝对收敛, 而当 $|x| > R$ 时, 幂级数发散.

证明 由于有发散点, 所以 E 是非空有界集, 故 E 有上确界, 记为 R. 又由于有非零的收敛点, 所以 $R > 0$, 根据前面的分析就得到本定理的结论.

称上面的 R 为幂级数的收敛半径; $(-R, R)$ 称为级数的收敛区间. 现在基本明白了, 幂级数的收敛区域 E 基本上是一个以原点为中心的区间, 在这个区间内部, 幂级数不但收敛而且绝对收敛. 只是区间的端点尚不确切, 需要具体问题具体对待.

7.3.2 收敛半径的计算

定理 3 如果 $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$; 或 $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = L$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为

$$R = \frac{1}{L} = \begin{cases} 0, & L = +\infty; \\ \frac{1}{L}, & L \text{ 有限}; \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$$

证明 根据 D'Alembert 判别法从

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = L|x|.$$

故可知当 $L|x| < 1$, 即 $|x| < R = \frac{1}{L}$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛; 而当 $|x|L > 1$, 即 $|x| > R$ 时, 幂级数发散. 所以, 级数的收敛半径为 R. 第二个公式可根据 Cauchy 判别法证明.

例 1 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}x^{n}$ 的收敛半径 R.

解 因为 $\lim \frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} = 1$, 故 $R = 1$;

当 $\alpha = 0$: $\sum x^{n}$ 在 $x = \pm 1$ 发散, 所以 $E = (-1, 1)$ (不含端点).

当 $\alpha = -1$: $\sum \frac{1}{n}x^{n}$ 在 $x = 1$ 发散, 在 $x = -1$ 收敛. 所以 $E = [-1, 1)$ (含左端点, 不含右端点).

当 $\alpha = -2$: $\sum \frac{1}{n^{2}}x^{n}$ 在 $x = \pm 1$ 都收敛. 所以 $E = [-1, 1]$ (含左右端点).

上面的例子说明在收敛区间的端点, 各种情况都可能发生.

例 2 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{n}$ 的收敛半径 R.

解 因为 $\lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$, 故 $R = +\infty$.

7.3.3 幂级数的性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $I=(-R,R)$ 中收敛于 $S(x)$.

定理 4 幂级数在 $I=(-R,R)$ 内任何闭子区间上一致收敛, 因而, 和函数 $S(x)$ 在 I 内连续.

证明 任给 $0<r<R$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$收敛, 而当 $|x|\leqslant r$时

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n r^n|,$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r,r]$ 上一致收敛. 对于 I 中任意闭区间 J, 一定存在 r, 使 $J\subset[-r,r]\subset(-R,R)$, 所以在 J 上一致收敛. 而和函数的连续性则是显然的.

定理 5 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $I=(-R,R)$ 中可微, 并有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1},$$

且求导后的幂级数的收敛半径仍为 R.

证明 先求 $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ 的收敛半径. 任取 $x_0\in(-R,R)$, 存在 $r:\ |x_0|<r<R$, $\sum|a_nr^n|<\infty$, 因此 $|a_nr^n|<M$ 有界, 所以

$$|na_nx_0^{n-1}|=|a_nr^n|\frac{n}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}\leqslant M\frac{n}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}.$$

因为 $\sum\frac{n}{r}\left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}$ 当 $|x_0|<r$ 时收敛, 所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ 在 x_0 绝对收敛. 也就是说 $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$ 的收敛半径 $R'\geqslant R$.

如果 $R'>R$, 则存在 x_0: $R'>x_0>R$, $\sum|na_nx_0^{n-1}|<\infty$. 因为

$$|a_nx_0^n|\leqslant|na_nx_0^n|=x_0|na_nx_0^{n-1}|$$

所以 $\sum|a_nx_0^n|$ 收敛, 这是不可能的, 所以 $R'=R$.

定理 6 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $I=(-R,R)$ 内可积, 且对 $x\in(-R,R)$ 有

$$\int_0^x S(t)\,dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^n\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

并且积分后得到的幂级数的收敛半径仍为 R.

例 3 已知幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 在整个数轴上收敛, 则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=S(x)\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

解此微分方程得

$$S(x)=Ae^x.$$

由于 $S(0)=1$, 故 $S(x)=e^x$, 即

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

例 4 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的和.

解 容易知道这个幂级数的收敛半径为 1, 但在 $x=\pm 1$ 都发散, 故收敛区间为 $(-1,1)$. 令 $S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 再令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 在区间 $[0,x]$ 上逐项积分, 得

$$\int_0^x f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x},$$

再将等式两端对 x 求微商就得到 $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$, 所以原级数的和函数是

$$S(x)=\frac{x}{(1-x)^2},\quad |x|<1$$

由此又可求出一些数项级数的和. 例如分别令 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=\frac{1}{3}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}.$$

例 5 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的和函数.

解 因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1+x^2},\ x\in(-1,1),$$

在区间 $[0,x]$ 上逐项积分可得

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in(-1,1).$$

定理 7 (Abel **第二定理**) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R > 0$. 如果在 $x = R$ 处级数收敛, 那么其和函数 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续; 如果级数在 $x = -R$ 处收敛, 那么 $S(x)$ 在 $x = -R$ 处右连续.

证明 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 处收敛, 即, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛. 因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n,$$

$\{(\frac{x}{R})^n\}$ 在 $[0, R]$ 上单调递减且一致有界, 由 Abel 定理知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0, R]$ 上一致收敛, 因而 $S(x)$ 在 $[0, R]$ 上连续. 同理可证级数在 $x = -R$ 处收敛时, $S(x)$ 在 $x = -R$ 处右连续.

例 6 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

7.3.4 幂级数的运算

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2, 记 R 为 R_1 和 R_2 中较小的一个. 两个幂级数在共同的收敛区域, 即, 在 $(-R, R)$ 中可以相加, 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n \pm b_n x^n)$$

两个幂级数还可以相乘, 其结果还是一个幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

在 $(-R, R)$ 中成立, 其中 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

定理 8 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都收敛. 若它们的 Cauchy 乘积 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 也收敛, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

证明 在所给条件下, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 以及 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛半径都 $\geqslant 1$, 且它们都在 $x=1$ 收敛, 因此都在 $x=1$ 连续. 在等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

中令 $x \to 1$ 即得所证.

7.3.5 幂级数的一般形式

幂级数更一般的形式是在 x_0 展开的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

相当于前面讨论的幂级数在所定义的数轴上做了一个平移. 收敛区间也就平移到以 x_0 为中心的一个区间上：(x_0-R, x_0+R) 以及可能的端点 x_0-R (或 x_0+R).

7.3.6 函数的 Taylor 展开式

到此为止, 我们确定了幂级数的收敛区域, 并研究了它的和函数的各种性质. 但在实际应用中, 所遇到的经常是相反的问题, 即函数 $f(x)$ 在给定的区间上是否可以展开成一个幂级数?

由 Taylor 定理知, 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内具有任意阶微商, 则

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \end{aligned}$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

而 ξ 是 x_0 与 x 之间的一点. 由此可得:

定理 9 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上有任意阶微商, 则 $f(x)$ 在 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 上可以展成 Taylor 级数的充分必要条件是对这区间内的任意点 x, 都有

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0,$$

特别, 当 $f(x)$ 的各阶微商在区间 $(x_0 - R, x_0 + R)$ 内任何闭区间上一致有界, 则 $f(x)$ 在这区间上可以展成 Taylor 级数

几个重要函数的幂级数展开: 首先是:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \cdots, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(x+1)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots,$$
$$(-1 < x < 1),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad (-1 < x < 1].$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$