§0.1 Weingarten变换与主曲率

§0.1.1 Weingarten变换

曲面几何还可通过曲面法向量的变化来研究。

定义0.1. 定义曲面的*Gauss*映射

$$g : S \to S^2, \quad r(u,v) \mapsto g(r(u,v)) = N(u,v) = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}.$$

考虑法向N沿曲线的变化：令

$$X = \gamma'(0) = \lambda\frac{\partial}{\partial u} + \mu\frac{\partial}{\partial v} \in T_pD, \quad v = r'(0) = dr(X) = \lambda r_u + \mu r_v \in T_PS,$$

则Gauss映射沿曲线$r(t)$的微分为

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}g(r(t)) = \frac{d}{dt}N(u(t),v(t)) = u'(0)N_u + v'(0)N_v = \lambda N_u + \mu N_v.$$

即

$$dg_P(v) = (\lambda\frac{\partial}{\partial u} + \mu\frac{\partial}{\partial v})N = X_v(N).$$

又有

$$\langle \lambda N_u + \mu N_v, N\rangle = 0,$$

因此

$$dg_P(v) = X_v(N) = dN_p \circ [(dr_p)^{-1}(v)] \in T_PS.$$

事实上$g = N \circ r^{-1}$。dg_P为T_PS到自身的线性变换。

定义0.2. 曲面的*Weingarten*变换

$$W = -dg_P = -dN_p \circ [(dr_p)^{-1}] : T_PS \to T_PS,$$

$$v = \lambda r_u + \mu r_v \mapsto W(v) = -dg_P(v) = -(\lambda\frac{\partial}{\partial u} + \mu\frac{\partial}{\partial v})N = -X_v(N).$$

可直接验证Weingarten变换与曲面的与参数选取无关。或由

$$W_P = -dg_P = -dN_p \circ [(dr_p)^{-1}]$$

以及一阶微分的形式不变性，可知Weingarten变换与曲面的参数选取无关。

Weingarten变换的一个基本特征：它是自共轭线性变换。它与第二基本形式、法曲率以及曲面的其他基本几何量有紧密联系。

Proposition 0.3. *Weingarten*变换是曲面切平面到自身的自共轭变换，即

$$\langle W(v), w\rangle = \langle v, W(w)\rangle, \quad \forall v, w \in T_P S.$$

证明：设

$$v = \lambda r_u + \mu r_v, \quad w = \xi r_u + \eta r_v.$$

则

$$\begin{aligned}
& -\langle W(v), w\rangle + \langle v, W(w)\rangle \\
= \ & \langle \lambda N_u + \mu N_v, \xi r_u + \eta r_v\rangle - \langle \lambda r_u + \mu r_v, \xi N_u + \eta N_v\rangle \\
= \ & \lambda\eta(\langle N_u, r_v\rangle - \langle r_u, N_v\rangle) + \mu\xi(\langle N_v, r_u\rangle - \langle r_v, N_u\rangle) \\
= \ & \lambda\eta(-\langle N, r_{vu}\rangle + \langle r_{uv}, N\rangle) + \mu\xi(-\langle N, r_{uv}\rangle + \langle r_{vu}, N\rangle) \\
= \ & 0.
\end{aligned}$$

□

事实上设$v, w \in T_P S$，记

$$X_v = (dr)^{-1} v, \quad X_w = (dr)^{-1} w.$$

则有Weingarten变换与第二基本形式之间的基本关系式

$$\langle W(v), w\rangle = -\langle X_v(N), w\rangle = -\langle dN(X_v), dr(X_w)\rangle = II(X_v, X_w).$$

其实do Carmo书中通过Weingarten变换来定义第二基本形式。同样有

$$\langle W(w), v\rangle = II(X_w, X_v).$$

由第二基本形式的对称性，可得

$$\langle W(v), w\rangle = \langle W(w), v\rangle.$$

Proposition 0.4. 设v为曲面的任意单位切向量，则曲面沿v方向的法曲率

$$k_n(v) = II(X_v, X_v) = \langle W(v), v\rangle.$$

证明：设$v = \lambda r_u + \mu r_v$，则

$$\begin{aligned}
\langle W(v), v\rangle &= -\langle \lambda N_u + \mu N_v, \lambda r_u + \mu r_v\rangle \\
&= \lambda^2 L + 2\lambda\mu M + \mu^2 N \\
&= II(X_v, X_v) = k_n(v).
\end{aligned}$$

□

§0.2 主曲率

由于Weingarten变换W_P是一个自共轭变换，所以Weingarten变换的两个特征值为实数。设k,v为W_P的一个特征值和对应的单位特征向量，则

$$k_n(v) = \langle W(v), v\rangle = \langle kv, v\rangle = k,$$

即特征值k为曲面沿v方向的法曲率。

定义0.5. *Weingarten变换$W_P : T_PS \to T_PS$的两个特征值称为S在P点的主曲率，特征方向称为主方向。*

当两个主曲率不相等时，相应的两个主方向完全确定且相互正交。当两个主曲率相等时，任一方向都是特征方向即主方向。

为计算曲面的主曲率，首先求Weingarten变换在坐标切向量基下的系数矩阵，记为(W)，即矩阵(W)使得

$$\begin{pmatrix} W_P r_u \\ W_P r_v \end{pmatrix} = (W)\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}.$$

记

$$v = v^1 r_u + v^2 r_v = (v^1, v^2)\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}, \quad X_v = v^1\frac{\partial}{\partial u} + v^2\frac{\partial}{\partial v} = (v^1, v^2)\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix},$$

w的表示类似；令第一基本形式、第二基本形式在坐标向量下的矩阵表示分别为$(I),(II)$，即

$$I(X_v, X_w) = \langle v, w\rangle = (v^1, v^2)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} := v(I)w^T,$$

$$II(X_v, X_w) = (v^1, v^2)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} := v(II)w^T$$

则由

$$\langle W(v), w\rangle = II(X_v, X_w), \quad \forall v, w \in T_PS,$$

可得

$$\langle W(v), w\rangle = v(W)(I)w = II(X_v, X_w) = v(II)w^T, \quad \forall v, w \in T_PS$$

因此

$$(W) = (II)(I)^{-1}$$

(W)一般不是对称方阵，而是$(W)(I)$对称。

$$\begin{aligned}(W) &= (II)(I)^{-1} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} LG-MF & ME-LF \\ MG-NF & NE-MF \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

对于新参数$(\bar{u},\bar{v})$(为简便起见，设与(u,v)同向，N保持不变)，以及其坐标向量场

$$\begin{pmatrix} r_{\bar{u}} \\ r_{\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix},$$

同样有

$$\begin{pmatrix} N_{\bar{u}} \\ N_{\bar{v}} \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} N_u \\ N_v \end{pmatrix},$$

则

$$(\bar{I}) = J(I)J^T,$$

$$(\overline{II}) = J(II)J^T,$$

因此Weingarten变换的矩阵在新参数下的矩阵表示为

$$(\bar{W}) = (\overline{II})(\bar{I})^{-1} = J(II)(I)^{-1}J^{-1} = J(W)J^{-1}.$$

记

$$W = (II)(I)^{-1} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} LG-MF & ME-LF \\ MG-NF & NE-MF \end{pmatrix}$$

的两个特征值(即主曲率)为k_1,k_2，则有相似不变量（事实上不依赖于同定向参数选取及刚体运动）

$$tr(W) = k_1 + k_2,$$

$$\det(W) = k_1k_2.$$

定义0.6. 曲面在一点的平均曲率和$Gauss$曲率分别定义为

$$H = \frac{1}{2}tr(W) = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = \frac{1}{2}\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2},$$

$$K = \det(W) = k_1k_2 = \frac{\det(II)}{\det(I)} = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

主曲率满足的方程为

$$(k-k_1)(k-k_2)=k^2-(k_1+k_2)k+k_1k_2=0.$$

因此k_1,k_2可以通过平均曲率与高斯曲率求出，进一步可求解对应特征方向。

法曲率和主曲率的关系：取$e_1,e_2\in T_PS$为主方向，构成T_PS的单位正交基，

$$We_i=k_ie_i,\quad i=1,2.$$

对任意单位向量

$$v=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2\in T_PS,$$

曲面沿v方向的法曲率

$$\begin{aligned} k_n(v) &= \langle W(v),v\rangle=\langle\cos\theta k_1e_1+\sin\theta k_2e_2,\cos\theta e_1+\sin\theta e_2\rangle \\ &= k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta. \end{aligned}$$

这称为Euler公式。

定理0.7. *(Euler, 1760年) 设曲面在P点的主曲率为k_1,k_2，e_1,e_2为相应的单位正交主方向，v与e_1夹角为θ。则法曲率*

$$k_n(v)=k_1\cos^2\theta+k_2\sin^2\theta.$$

推论：(i)当主曲率$k_1<k_2$，则法曲率在主方向e_1,e_2上分别取到最小值和最大值。$k_1=k_2$时，法曲率与切方向无关。

(ii)曲面在一点的平均曲率为两个互相正交切方向的法曲率的平均。

接下来利用主曲率、主方向分析曲面在一点的二阶近似。

Proposition 0.8. *给定曲面在P处两个单位正交向量e_1,e_2，存在局部坐标$(\bar u,\bar v)$使得在这一点P*

$$r_{\bar u}(P)=e_1,\quad r_{\bar v}(P)=e_2.$$

证明：设

$$\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} r_u\\ r_v\end{pmatrix}.$$

作参数变换$(u,v)=(\bar u,\bar v)A$，即$(\bar u,\bar v)=(u,v)A^{-1}$，则有$J=A$

$$\begin{pmatrix} r_{\bar u}\\ r_{\bar v}\end{pmatrix}(P)=J\begin{pmatrix} r_u\\ r_v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} r_u\\ r_v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\end{pmatrix}.$$

$\square$

设参数(u,v)使得在一点$P\in S$，(r_u,r_v)为单位正交基(e_1,e_2)，则其矩阵表示简化为

$$(W_P)=(II)(I)^{-1}=(II).$$

特别当$(r_u,r_v)(P)=(e_1,e_2)$取为两个单位正交主方向时，则在P点

$$\begin{pmatrix} We_1 \\ We_2 \end{pmatrix}=(W)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}=diag(k_1,k_2)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}=(II)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

即在P点

$$(W_P)=(II_P)=diag(k_1,k_2).$$

事实上可直接验证在P点

$$L=-\langle r_u,N_u\rangle=\langle e_1,We_1)\rangle=k_1,$$

$$N=-\langle r_v,N_v\rangle=\langle e_2,We_2\rangle=k_2,$$

$$M=-\langle r_u,N_v\rangle=\langle e_1,We_2\rangle=0.$$

在之前根据第二基本形式的二次型类型定义曲面上一点的类型时，已经知道通过适当选取切平面T_PS上的直角坐标(x,y)，可使$z=f(x,y):=\langle r(x,y)-P,N(P)\rangle$的Hessian矩阵，即$(II)$，相合到对角矩阵$diag(a,b)$。从而曲面在$P$点的二阶近似为二次曲面$z=\frac{1}{2}(ax^2+by^2)$。这里由主曲率的概念，知道可以更具体取$x,y$轴正向分别为$e_1,e_2$方向，曲面在$P$点的二阶近似为二次曲面

$$z=\frac{1}{2}(k_1x^2+k_2y^2).$$

而且此时，$LN-M^2=k_1k_2=K$，即P点的类型事实上由K基本确定。

作业：17, 19, 22, 25，27