第四次习题课讲义

毛景弘

2023.11.9

第 8、9 周习题解答

1

证明：(1)$g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}=2(2)$ (2)$\frac{\partial ln\sqrt{g}}{\partial u^\alpha}=\Gamma^1_{1\alpha}+\Gamma^2_{2\alpha}$

(1)$g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}=2(2)=tr(I)=2$

(2) $LHS=\frac{g_\alpha}{2g}=\frac{EG_\alpha+E_\alpha G-2FF_\alpha}{2(EG-F^2)}$

$RHS=g^{11}\Gamma_{11\alpha}+g^{12}\Gamma_{21\alpha}+g^{21}\Gamma_{12\alpha}+g^{22}\Gamma_{22\alpha}=\frac{1}{2}g^{11}\partial_\alpha g_{11}+g^{12}\partial_\alpha g_{12}+\frac{1}{2}g^{22}\partial_\alpha g_{22}$(课本 p78)

$g^{11}=\frac{g_{22}}{g},g^{22}=\frac{g_{11}}{g},g^{12}=-\frac{g_{12}}{g}$

代入得 $LHS=RHS$

2

设曲面 $S:r(u^1,u^2)$ 有参数变换 $u=u(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2),\alpha=1,2$

记 $a_i^\alpha=\frac{\partial u^\alpha}{\partial\tilde{u}^i},\tilde{a}_\alpha^i=\frac{\partial\tilde{u}^i}{\partial u^\alpha}$

S 在参数 $(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2)$ 下的第一，第二基本形式为 $\tilde{g}_{ij}$, $\tilde{b}_{ij}$,

证明：(1). $\tilde{g}_{ij}=g_{\alpha\beta}a_i^\alpha a_j^\beta,\tilde{b}_{ij}=b_{\alpha\beta}a_i^\alpha a_j^\beta,g^{\alpha\beta}=\tilde{g}_{ij}a_i^\alpha a_j^\beta$

(2).$\tilde{\Gamma}^k_{ij}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}a_i^\alpha a_j^\beta\tilde{a}^k_\gamma+\frac{\partial a_i^\alpha}{\partial\tilde{u}^j}\tilde{a}^k_\alpha$

(1) 令 $\frac{\partial}{\partial u^\alpha}=\partial_\alpha,\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^\alpha}=\tilde{\partial}_\alpha$，由题意 $\tilde{\partial}_i=a_i^\alpha\partial_\alpha,\partial_i=\tilde{a}_i^\alpha\tilde{\partial}_\alpha$(Einstein 求和)

$\tilde{g}_{ij}=<\tilde{\partial}_i r,\tilde{\partial}_j r>=<=a_i^\alpha\partial_\alpha r,=a_j^\beta\partial_\beta r>=g_{\alpha\beta}a_i^\alpha a_j^\beta$

同理 $\tilde{b}_{ij}=-<\tilde{\partial}_i n,\tilde{\partial}_j r>=b_{\alpha\beta}a_i^\alpha a_j^\beta$

$\tilde{g}^{ij}g_{jk}=\delta^i_k$

$\delta^i_k=\tilde{g}^{ij}g_{\alpha\beta}a_j^\alpha a_k^\beta$ 两边同乘 a_i^m

$a_k^m=a_i^m\delta^i_k=a_i^m\tilde{g}^{ij}g_{\alpha\beta}a_j^\alpha a_k^\beta$ 同乘 $\tilde{a}_l^k$

$\delta_l^m=\tilde{a}_l^k a_k^m=$ …… 最后同乘 $g^{l\gamma}$ 即可

(2) 同乘 $\tilde{g}_{k\delta}$ 换成第二类 christoffel 符号进行计算。

4

已知曲面第一基本形式为 $I=drdr+r^2dsds$, 求他的 Christoffel 符号。

解：已知 $g=EG-F^2=r^2,g^{11}=\frac{g_22}{g},g^{12}=\frac{g_22}{g},g^{22}=\frac{g_22}{g}$

$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=g^{\alpha\delta}\Gamma_{\delta\beta\gamma}$

$\Gamma_{\delta\beta\gamma}=\frac{1}{2}(\partial_\beta g_{\delta\gamma}+\partial_\gamma g_{\beta\delta}=-\partial_\delta g_{\beta\gamma})$ 代入得到

$\Gamma_{111}=\Gamma_{121}=\Gamma_{211}=\Gamma_{112}=\Gamma_{222}=0$
$\Gamma_{221}=r,\Gamma_{122}=-r,\Gamma_{212}=r$
$g^{12}=g^{21}=0,g^{11}=1,g^{22}=\frac{1}{r}^2$
故 $\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{r},\Gamma^1_{22}=-r$，其余皆为 0

5

求 $z=f(x,y)$ 的 Christoffel 符号。

解：同上题，分别求出 g^{ij} 和 $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$，再用
$\Gamma_{\delta\beta\gamma}=\frac{1}{2}(\partial_\beta g_{\delta\gamma}+\partial_\gamma g_{\beta\delta}-\partial_\delta g_{\beta\gamma})$ 求解得
$\Gamma^k_{ij}=\frac{f_k f_{ij}}{1+f_x^2+f_y^2}$

6

证明：当 (u,v) 为曲面的正交曲率线网时，Codazzi 方程可简化为
$L_v=HE_v,N_u=HG_u$

证明：$F=M=0,H=\frac{LG+NE}{2EG}$
codazzi 方程：$(\frac{L}{\sqrt{E}})_v=N\frac{(\sqrt{E})_v}{G}$
$(\frac{N}{\sqrt{G}})_u=L\frac{(\sqrt{G})_u}{E}$
$N=2GH-\frac{LG}{E}$，代入即可。另一个等式同理。
这题用原始形式的 codazzi 方程更快。
$LHS=L_v,RHS=b_{1\psi}\Gamma^{psi}_{12}-b_{2\psi}\Gamma^{\psi}_{11}=HE_v$

8

证明：I、II 的系数均为常数的曲面是平面或圆柱面

证明：weingarten 变换的系数矩阵为常数，得主曲率为常数，由 p101 例 6.4, 为圆柱、球或平面。

此时 $\Gamma_{ijk}=0\Rightarrow R_{1212}=0,K=0$，球面不满足，容易验证圆柱和平面满足。

9

9、是否存在曲面
(1)$I=dudu+dvdv,II=dudu-dvdv$
(2)$I=dudu+cos^2udvdv,II=cos^2ududu+dvdv$

(1) 不满足 gauss 方程
(2) 不满足 codazzi 方程 $(N_u=HG_u)$

12

$\varphi=Edudu+Gdvdv,\psi=\lambda\varphi$
(1)$E\ G\ \lambda$ 满足什么条件时，$\varphi\psi$ 可以作为第一、第二基本型
(2)$E=G$ 时，求解 $E\ G\ \lambda$

(1) 注意到 $F=M=0$，codazzi 方程：$L_v=HE_v,N_u=HG_u,H=\lambda$

得 $\lambda_u = \lambda_v = 0$
gauss 方程中 $\frac{LN-M^2}{EG} = \lambda^2$，代换即可
(2) 直接用 gauss 方程展开得到 $-\lambda^2 E = (\partial_{uu} + \partial_{vv})(ln\sqrt{E})$

考前知识梳理

平面曲线与空间曲线

正则曲线的定义：
$r : (a, b) \to E^2(E^3)$
(1) 每个分量都是 C^∞
(2)$|\frac{dr}{dt}| > 0, \forall t$
弧长参数 $s(t) = \int_c^t |r'(t)|dt$，$\dot{r} = \frac{dr}{ds}$
平面曲线 n t, n 为正交坐标系且与 i, j 同定向
$\kappa =< \dot{t}, n >= \frac{x'y''-y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 可正可负
曲率唯一确定一条平面曲线 (P27, 定理 4.4)
给定曲率求解平面曲线：
$t = (cos\theta, sin\theta)$, $\theta(u) = \int_0^u \kappa(t)dt$
解得曲线 $\mathbf{r}(s) = \int_0^s \mathbf{t}(u)du = (\int_0^s cos(\int_0^u \kappa(t)dt)du, \int_0^s sin(\int_0^u \kappa(t)dt)du)$
空间曲线的曲率 $\kappa = |\dot{t}| \geq 0$
法向量很多，主法向量 $n = \frac{\dot{t}}{\kappa}$，$\kappa = 0$ 时不能唯一确定。
副法向量 $b = t \wedge n$
挠率 $\tau =< \dot{n}, b >$，主曲率离开 (t,n) 平面的速度，如果曲线落在平面上则 $\tau = 0$
记住习题二第 5 题的计算公式
$\kappa(t) = \frac{|r'(t) \wedge r''(t)|}{|r'(t)|^3}$
$\tau(t) = \frac{(r', r'', r''')}{|r' \wedge r''|^2}$
空间曲线的 Frenet 标架：
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = & & \kappa\mathbf{n} & \\ \dot{\mathbf{n}} = & -\kappa\mathbf{t} & & + \quad \tau b \\ \dot{\mathbf{b}} = & & -\tau\mathbf{n} & \end{cases}$$
局部展开 (p23)

曲面的局部理论

正则曲面：$r : (u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$
每个分量都是 C^∞
$r_u \wedge r_v \neq 0$
参数变换:$\tilde{u} = \tilde{u}(u, v), \tilde{v} = \tilde{v}(u, v), \frac{\partial(\tilde{u}, \tilde{v})}{(u,v) \neq 0}$
切平面 $T_P S = span r_u, r_v$，也是过 P 的正则曲线的切线全体
法向量 $n = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}$
E、F、G、L、M、N 的定义
第一基本形式 $I =< dr, dr >= Edudu + 2Fdudv + Gdvdv$

第二基本形式 $I = -< dr, dN >= Edudu + 2Fdudv + Gdvdv$

法曲率 $k_n =< \dot{t}, n >= \frac{II}{I}$ 曲率向量在法向的分量。

Weingarten 变换：$W : T_PS \to T_PS, W(r_u) = -n_u, W(r_v) = -n_v$

曲面沿 v 方向的法曲率：$k_n(v) =< W(v), v >$

主曲率、主方向为 weingarten 变换的特征值特征方向。

平均曲率 $H = \frac{LG-2MF+NE}{2(EG-F^2)} = \frac{k_1+k_2}{2}$，高斯曲率 $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = k_1k_2$

欧拉公式：v 与 e_1 夹角为 θ 则 $k_n(v) = k_1cos^2\theta + k_2sin^2\theta$，主曲率决定法曲率的取值范围。

脐点：$k_1 = k_2 = k_n$

，任何切向都是主方向。

曲率线：曲线的切向为主方向

非脐点领域内，参数曲线是曲率线 $\leftrightarrow F = M = 0$

曲面的例子：旋转曲面，直纹面 $r = a(u) + vb(u)$, 可展曲面:gauss 曲率为 0 的直纹面，两个等价条件 (p65)

可展曲面的分类，全脐曲面