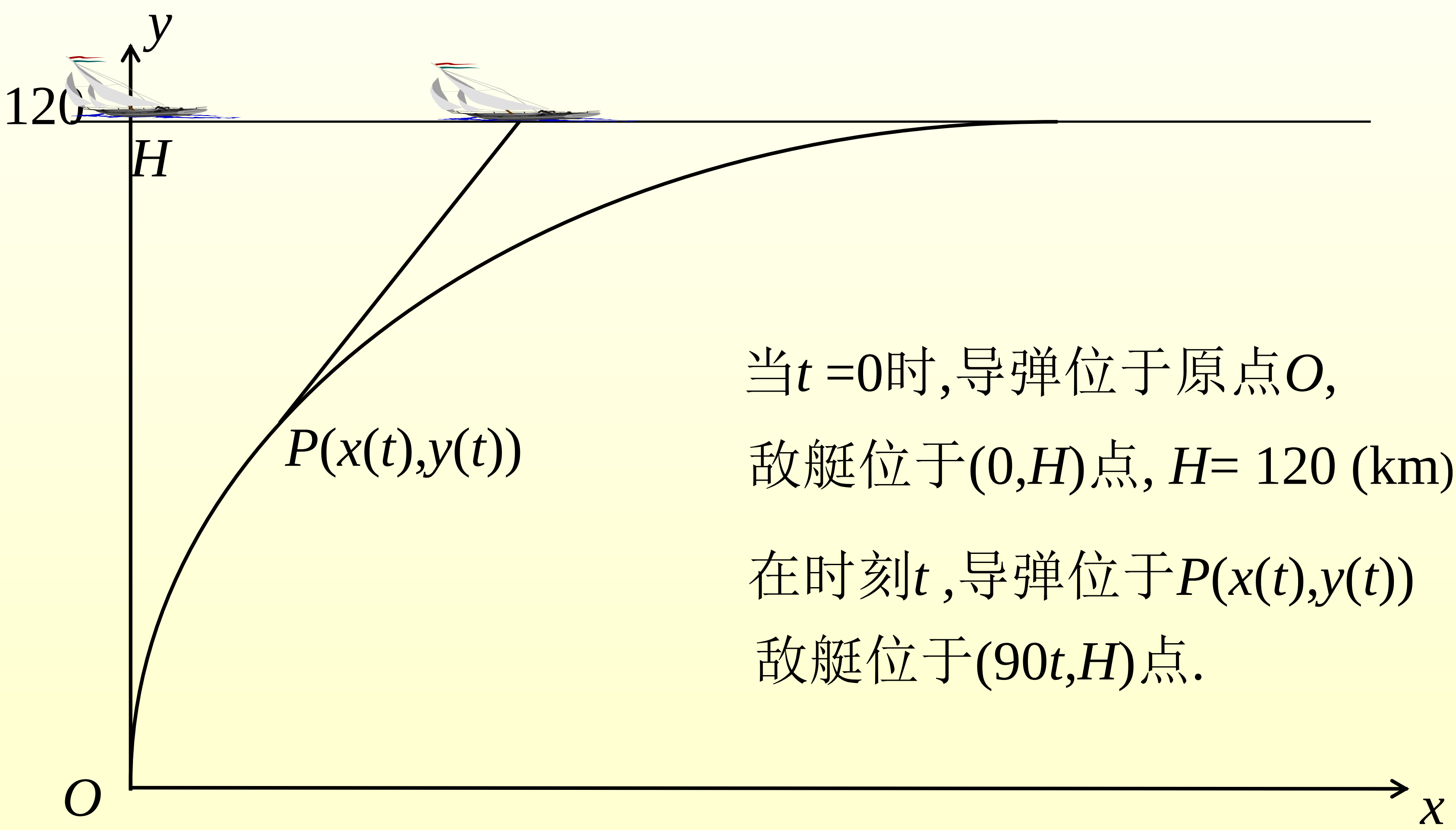
微分方程

导弹追踪问题

导弹追踪问题

我国沿海某军的一导弹基地发现正北方向120 km处海面上有一敌艇以v_e=90km/h的速度向正东方向行驶. 该基地立即发射导弹跟踪追击敌艇, 导弹速度为v_w=450 km/h，自动导航系统使导弹在任一时刻都能对准敌艇. 试问导弹在何时何处击中敌艇?

坐标设定



当$t=0$时,导弹位于原点O,

敌艇位于$(0,H)$点, $H=120$ (km).

在时刻t,导弹位于$P(x(t),y(t))$

敌艇位于$(90t,H)$点.

数学模型

在时刻t,导弹位于为$P(x(t),y(t))$,

其速度可由水平分速度与垂直分速度合成: $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2=v_w^2$.

导弹方向始终指向敌艇, 故有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{H-y}{v_e t-x}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\left(\frac{H-y}{v_e t-x}\right)$.

由上两式有
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{v_w}{\sqrt{1+\left(\dfrac{H-y}{v_e t-x}\right)^2}}\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{v_w}{\sqrt{1+\left(\dfrac{v_e t-x}{H-y}\right)^2}}=\dfrac{v_w}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}} \qquad (*)\\[2ex] x(0)=0,\quad y(0)=0\end{cases}$$

分析求解

为了消去t,对$\dfrac{dx}{dy}(H-y)=v_e t-x$关于$t$ 微分，有

$$\frac{d^2x}{dy^2}\frac{dy}{dt}(H-y)+\frac{dx}{dy}\left(-\frac{dy}{dt}\right)=v_e-\frac{dx}{dt}. \quad (**)$$

由(*),(**)及初始条件得$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dy^2}\dfrac{H-y}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}}=\dfrac{v_e}{v_w}\\ x|_{y=0}=0, \quad \left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}=0\end{cases}$

令$p=\dfrac{dx}{dy}$, $\lambda=\dfrac{v_e}{v_w}$,得到一阶分离型方程$\dfrac{dp}{dy}\dfrac{H-y}{\sqrt{1+p^2}}=\lambda, p|_{y=0}=0.$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = p = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{H}{H-y}\right)^{\lambda} - \left(\frac{H-y}{H}\right)^{\lambda}\right].$$

上述方程仍是一阶分离型方程，在初始条件$x|_{y=0} = 0$ 的解为

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{(H-y)^{1+\lambda}}{H^{\lambda}(1+\lambda)} - \frac{H^{\lambda}(H-y)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right] + \frac{\lambda H}{1-\lambda^2}.$$

故导弹击中艇时$y = H$,得到此时其位置和时刻分别为

$$x = L = \frac{\lambda H}{1-\lambda^2} = 25(\mathrm{km}), \quad t = T = \frac{L}{v_e} \approx 0.2778(h).$$

(其中$H = 120, v_e = 90, v_w = 450, \lambda = v_e / v_w = 1/5$)

补充内容

Euler方法(数值方法)

Euler方法十分简单,就是用差商代替微商,即

$$\frac{dx}{dx} \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{k+1} - x_k}{t_{k+1} - t_k}, \quad \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k}$$

通常取Δt为常数τ,就得到由第k步的值到第k+1步的值之间的关系式

Euler迭代格式

$t = t_{k+1}$时导弹位置为$(x_{k+1}\ ，\ y_{k+1})$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \dfrac{v_w \tau}{\sqrt{1+\left(\dfrac{H-y_k}{v_e t_k - x_k}\right)^2}} \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{v_w \tau}{\sqrt{1+\left(\dfrac{v_e t_k - x_k}{H-y_k}\right)^2}} \\ x_0 = 0, \quad y_0 = 0 \end{cases}$$

计算到$y_k < H$, $y_{k+1} \geq H$ 停止，取$L \approx x_k$

利用Mathematica

```
Clear[a,b,t,x,y,k]
h=0.05
For[x[0]=0;y[0]=0;t[0]=0;k=0,k<=100,k++,
Print[k];
x[k+1]=x[k]+450*h/Sqrt[1+((120-y[k])/(90*t[k]-
        x[k]))^2];Print[x[k]//N];
y[k+1]=y[k]+450*h/Sqrt[1+((90*t[k]-x[k])/(120-
        y[k]))^2];Print[y[k]//N];
t[k]=h*k;
If[y[k-1]<120&&y[k]>=120,Break[]]]
```

$\tau = 0.05$

k	t_k	x_k	y_k
1	0.05	0.000 00	22.500 00
2	0.10	1.037 36	44.976 07
3	0.15	3.412 05	67.350 41
4	0.20	7.646 15	89.448 43
5	0.25	14.867 90	110.757 96
6	0.30	29.194 80	128.107 02

$$L \approx x_6 = 29.195 \quad T \approx 0.3244$$

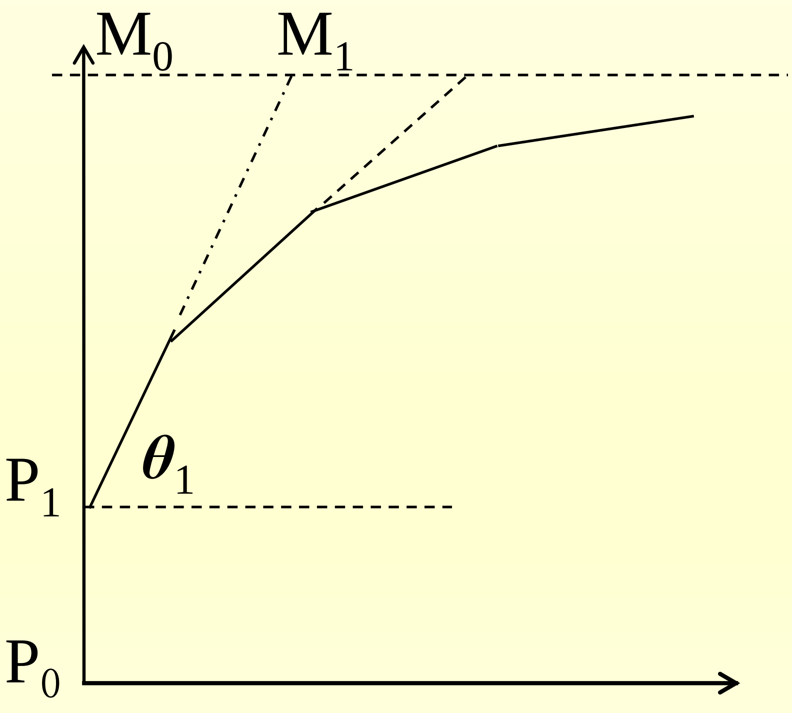
$\tau = 0.005$

$$L \approx x_6 = 25.667 \quad T \approx 0.2852$$

仿真方法

模仿真实事件行为和过程.

在这个问题上，就是一步步地模拟导弹追踪敌舰的实际过程.

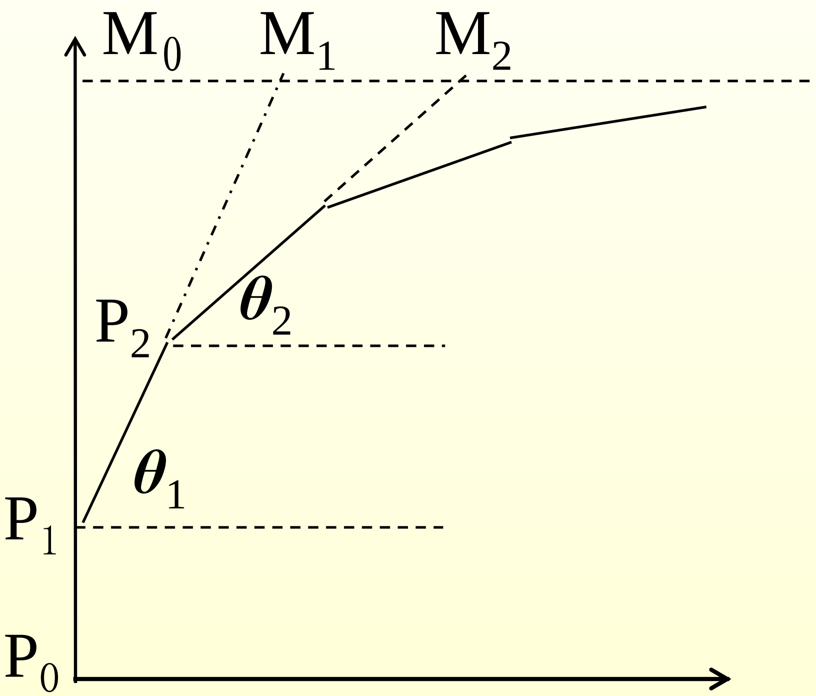


在t= 0 时,敌艇在$M_0(0,H)$,导弹在原点P_0指向M_0.

在$t=\tau$时,敌艇的位置为$M_1(v_e\tau, H)$， 导弹的位置为$P_1(x_1,y_1)$, 而 $x_1=0$, $y_1= v_w\tau$,

导弹飞行方向的倾角为

$$\theta_1=\arctan[(H-v_w\tau)/v_e\tau]$$



在t =2τ时,敌艇的位置为$M_2(2\tau v_e,H)$，导弹的位置为$P_2(x_2, y_2)$,

$$x_2 = x_1 + v_w \tau\cos\theta_1$$
$$y_2 = y_1 + v_w \tau\sin\theta_1$$

由θ_1表达式可写出$\cos\theta_1$和$\sin\theta_1$的表达式.

此时导弹飞行方向的倾角为

$$\theta_2 = \arctan[(H - y_2)/(2v_e\tau - x_2)]$$

仿真迭代格式

在t=(k+1) τ时，导弹位于$P_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1})$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_w \tau \cos\theta_k \\ y_{k+1} = y_k + v_w \tau \sin\theta_k \end{cases}$$

其中

$$\cos\theta_k = \frac{kv_e\tau - x_k}{\sqrt{(kv_e\tau - x_k)^2 + (H - y_k)^2}}$$

$$\sin\theta_k = \frac{H - y_k}{\sqrt{(kv_e\tau - x_k)^2 + (H - y_k)^2}}$$

利用Mathematica

$\tau = 0.05$

k	t_k	x_k	y_k
1	0.05	0.000 00	22.500 00
2	0.10	1.037 36	44.976 07
3	0.15	3.412 05	67.350 41
4	0.20	7.646 15	89.448 43
5	0.25	14.867 90	110.757 96
6	0.30	29.194 80	128.107 02

不用微分方程也能得到同样结果!

问题

1.如果当基地发射导弹的同时,敌艇立即由仪器发觉. 假定敌艇为一高速快艇，它即刻以135 km/h的速度与导弹方向垂直的方向逃逸,问导弹何时何地击中敌舰?

2.如果敌舰以135 km/h的速度与导弹方向成**固定夹角**的方向逃逸, 问导弹何时何地击中敌艇?试建立数学模型.并选择若干特殊角度进行计算.你发现敌艇与导弹方向成何夹角逃逸才好?

3. 若导弹的追踪过程中，飞行角度每秒钟改变$\pi/180$时，其速度衰减2％，试在这种情况下讨论前二题.

4. 试结合实例和已有文献讨论这一问题，建立符合实战的模型并给出快速解决方案.