第 7 章 第七次习题课 (by 黄天一)

7.1 习题讲解

作业 7.1 (289-9)

讨论方程 $\dddot{x}+\ddot{x}-2x=0$ 零解的稳定性.

解 题设方程等价于一阶方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=z\\ \dot{z}=2x-z\end{cases}$$

我们用两种方法来证明零解不稳定:

1. 系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&0&-1\end{pmatrix}$, 计算可得

$$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+2),\quad \lambda=1,-1\pm i.$$

因此 A 存在正特征值, 零解不稳定.

2. 第二种方法需要用到一个判定定理, 我们会在稍后证明. 构造函数 $V(x,y,z)=xy+yz+zx$, 则在 $(0,0,0)$ 的任一邻域内, 取 $x=y=z\neq 0$ 则有 $V(x,y,z)=3x^2>0$. 且全导数

$$\dot{V}(x,y,z)=(y+z)y+(x+z)z+(2x-z)(x+y)=2x^2+y^2+z^2+2xy=(x+y)^2+x^2+z^2$$

正定. 所以零解不稳定.

下面我们介绍两个课上未提及的判定定理, 它们大大减弱了不稳定的判定条件, 在实际应用中相当有用. 下面我们总考虑如下自治系统

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\tag{7.1}$$

一个平衡点为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

定理 7.1

若存在连续可微函数 $V(\boldsymbol{x})$, 使得: (1) V 在相空间坐标原点的任一邻域内能取到正值; (2) V 的全导数 $\dot{V}$ 在原点某邻域 Ω 内正定. 则 (7.1) 的零解不稳定.

笔记 该定理将课上要求的 V 正定这一条件削弱为 V 在任一邻域内能取到正值.

证明 设 V 在闭球 $\overline{B(\boldsymbol{0},r)}$ 内有正定的全导数. 任取 $\delta\in(0,r)$, 由已知可设 $\boldsymbol{a}\in B(\boldsymbol{0},\delta)$ 使得 $V(\boldsymbol{a})>0$. 考虑以 $\boldsymbol{a}$ 为初值的解 $\boldsymbol{\varphi}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t;t_0,\boldsymbol{a})$, 若能证明存在 $T>t_0$, 使得 $|\boldsymbol{\varphi}(T)|\geqslant r$, 则零解不稳定.

反证. 如若不然, 则 $\dot{V}(\boldsymbol{\varphi}(t))\geqslant 0$ 对任意 $t\geqslant t_0$ 都成立, 因此 $V(\boldsymbol{\varphi}(t))\geqslant V(\boldsymbol{\varphi}(t_0))=V(\boldsymbol{a})>0$. 由 $V(\boldsymbol{0})=0$ 以及连续性可得存在 $\sigma>0$ 使得 $V(\boldsymbol{x})<V(\boldsymbol{a}),\forall\boldsymbol{x}\in B(\boldsymbol{0},\sigma)$, 由此可得 $\sigma\leqslant|\boldsymbol{\varphi}(t)|<r,\forall t\geqslant t_0$. 令 $m=\min\limits_{\sigma\leqslant|\boldsymbol{x}|\leqslant r}\dot{V}(\boldsymbol{x})$, 由 $\dot{V}$ 正定可得 $m>0$. 从而有

$$\dot{V}(\boldsymbol{\varphi}(t))\geqslant m\Rightarrow V(\boldsymbol{\varphi}(t))\geqslant m(t-t_0)+V(\boldsymbol{a}),\quad \forall t\geqslant t_0.$$

当 $t\to+\infty$ 时, RHS 趋于正无穷, 矛盾! 所以零解不稳定.

定理 7.2

若存在连续可微函数 V 以及原点的某邻域 Ω, 使得全导数 $\dot{V}=\lambda V+W$, 其中 $\lambda>0$, W 恒为零或恒非正或恒非负, 且在原点的任一邻域内存在一点 $\boldsymbol{a}$ 使得 $V(\boldsymbol{a})W(\boldsymbol{a})>0$, 则零解是不稳定的.

笔记 仿照金福临 P281 定理 4 证明即可.

作业 7.2 (289-10)

试用 Lyapunov 直接方法讨论具有阻尼的单摆运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+b\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$$

零解的稳定性, 这里 l 和 b 是正常数, g 是重力加速度.

解 题设方程等价于一阶方程组

$$\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{dt}=\psi\\ \dfrac{d\psi}{dt}=-\dfrac{g}{l}\sin\varphi-b\psi\end{cases}$$

构造函数 $V(\varphi,\psi)=\frac{4g}{l}\sin^2\frac{\varphi}{2}+\psi^2$, 则 V 在原点附近正定, 且全导数

$$\dot{V}(\varphi,\psi)=\frac{4g}{l}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\psi+2\psi\left(-\frac{g}{l}\sin\varphi-b\psi\right)=-2b\psi^2\leqslant 0.$$

故零解是稳定的.

笔记 利用线性近似可得系统零解是渐近稳定的.

作业 7.3 (289-11)

讨论方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y+z-1+(x-1)[(x-1)^2+y^2+(z-2)^2]\\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y+2z-5+y[(x-1)^2+y^2+(z-2)^2]\\ \dfrac{dz}{dt}=x+2y+z-3+(z-2)[(x-1)^2+y^2+(z-2)^2]\end{cases}$$

的解 $x=1,y=0,z=2$ 的稳定性.

解 作平移 $x\mapsto x-1, y\mapsto y, z\mapsto z-2$, 则系统化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y+z+x(x^2+y^2+z^2)\\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y+2z+y(x^2+y^2+z^2)\\ \dfrac{dz}{dt}=x+2y+z+z(x^2+y^2+z^2)\end{cases}$$

研究其零解的稳定性即可. 我们依然给出两种方法:

1. 线性主部的系数矩阵为 $A=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-2&2\\1&2&1\end{pmatrix}$, 计算可得

$$\det(\lambda I-A)=\lambda^3+2\lambda^2-5\lambda-9\triangleq\varphi(\lambda).$$

   注意到 $\varphi(2)=-3,\varphi(3)=21$, 故 φ 存在正实根 $\lambda\in(2,3)$, 因此零解不稳定.

2. 构造函数 $V(x,y,z)=z^2-x^2-y^2$, 则在原点任一邻域内取 $x=y=0,z\neq 0$, 有 $V(x,y,z)=z^2>0$. 计算可得全导数

$$\dot{V}(x,y,z)=2(x^2+y^2+z^2)(1+z^2-x^2-y^2)$$

在原点附近正定, 因此系统的零解不稳定.

作业 7.4 (附加)

设 a 为实常数, 讨论以下系统零解的稳定性.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+ax^3\\ \dfrac{dy}{dt}=x+ay^3\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=ax-y-x^5\\ \dfrac{dy}{dt}=ay-z-y^5\\ \dfrac{dz}{dt}=az-x-z^5\end{cases}$$

解

1. 构造函数 $V(x,y)=x^2+y^2$, 则 V 正定且全导数为
$$\dot{V}(x,y)=2x(-y+ax^3)+2y(x+ay^3)=2a(x^4+y^4).$$
若 $a>0$, 则 $\dot{V}$ 正定, 零解不稳定; 若 $a<0$, 则 $\dot{V}$ 负定, 零解渐近稳定; 若 $a=0$, 则 $\dot{V}$ 恒为零, 零解稳定且不渐近稳定 (因为此时恒有 $V(x,y)=V(x_0,y_0)\Rightarrow x^2+y^2\equiv x_0^2+y_0^2$).
2. 系统线性主部的系数矩阵为
$$A=\begin{pmatrix}a&-1&0\\0&a&-1\\-1&0&a\end{pmatrix}$$
计算可得 A 的特征值为 $a-1, a+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, a+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 若 $a>-\frac{1}{2}$, 则存在正实部的特征值, 零解不稳定; 若 $a<-\frac{1}{2}$, 则特征值实部均为负数, 零解渐近稳定. 若 $a=-\frac{1}{2}$, 线性近似失效. 构造 $V(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 则 V 正定且全导数
$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y,z)&=2x\left(-\frac{x}{2}-y-x^5\right)+2y\left(-\frac{y}{2}-z-y^5\right)+2z\left(-\frac{z}{2}-x-z^5\right)\\&=-(x+y+z)^2-2(x^6+y^6+z^6)\end{aligned}$$
负定, 此时系统零解渐近稳定.

作业 7.5 (301-4)

求解方程 $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

解 特征方程为 $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{-x}$, 一个首次积分为 $x^2+y^2=C$. 因此原方程通解为 $z=g(x^2+y^2)$, g 为任一可微函数.

作业 7.6 (301-6)

求解方程 $xz\dfrac{\partial u}{\partial x}+yz\dfrac{\partial u}{\partial y}-(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

解 特征方程为
$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=-\frac{dz}{x^2+y^2}.$$
求得两个独立的首次积分为 $\frac{x}{y}=C_1, x^2+y^2+z^2=C_2$. 因此原方程通解为 $u=g(\frac{x}{y},x^2+y^2+z^2)$.

作业 7.7 (302-11)

求解方程 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\left(xz^2-\dfrac{z}{x}\right)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

解 特征方程为

$$dx = zdy = \frac{xdz}{x^2z^2 - z}.$$

求得两个独立的首次积分为 $x + \frac{1}{xz} = C_1, y - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2z} = C_2$. 因此原方程的通解为 $u = g(x + \frac{1}{xz}, y - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{2z})$.

作业 7.8 (302-14)

求解方程 $\frac{x-y}{z-u}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{x-y}{z-u}\frac{\partial v}{\partial y} + (x-y+1)\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial u} = 0.$

解 特征方程为

$$\frac{z-u}{x-y}dx = \frac{z-u}{x-y}dy = \frac{dz}{x-y+1} = du.$$

求得三个独立的首次积分为 $x - y = C_1, (x-y+1)u - z = C_2, (u-z)e^{-y} = C_3$, 因此原方程的通解为

$$v = g(x-y, (x-y+1)u - z, (u-z)e^{-y}).$$

最后我们来证明课上略过的等价性定理. 这里采用陈祖墀书的叙述. 这其实是 ODE 理论的一个简单应用. 下面我们总考虑一阶拟线性 PDE

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} = c(x,u). \tag{7.2}$$

这里 $x \in D$, D 为 $\mathbb{R}^n$ 中一区域. 那么它的特征方程为

$$\frac{dx_i}{dt} = b_i(x(t), z(t))(i = 1, \cdots, n), \quad \frac{dz}{dt} = c(x(t), z(t)).$$

定理 7.3 (等价性定理)

若特征曲线 γ 上某点 (x_0, z_0) 落在积分曲面 $z = u(x)$ 上, 则 γ 必定完全落在积分曲面上.

证明 设特征曲线为 $\gamma : t \mapsto (x(t), z(t))$. 定义 $y(t) = u(x(t)) - z(t)$, 若能证明 $y(t)$ 在 t 的定义区间上恒为零, 则特征曲线 γ 自然完全落在积分曲面上. 注意到

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{du(x(t))}{dt} - z'(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} - z'(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i(x(t), z(t))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x(t)) - c(x(t), z(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i(x(t), u(x(t)) - y(t))\frac{\partial u}{\partial x_i}(x(t)) - c(x(t), u(x(t)) - y(t)).\end{aligned}$$

由原 PDE 可得 $y \equiv 0$ 是上述方程的解, 结合初值 $y(t_0) = u(x_0) - z_0 = 0$ 以及解的唯一性可得 $y \equiv 0$.

问题 7.1(赵班 20mid) 讨论方程组

$$\begin{cases}\dot{x} = (\varepsilon x + 4y)(z+1) \\ \dot{y} = (-x + \varepsilon y)(z+1) \\ \dot{z} = -z^3\end{cases}$$

零解的稳定性, 其中 $\varepsilon \neq 0$.

解 当 $\varepsilon > 0$ 时, 方程线性主部的系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix}\varepsilon & 4 & 0 \\ -1 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 其特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \varepsilon + 2i, \varepsilon - 2i$, 存在正实部的特征值, 故零解不稳定.

当 $\varepsilon < 0$ 时, 考虑函数 $V(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2$, 则 V 正定, 且全导数

$$\dot{V}(x,y,z) = 2x(\varepsilon x + 4y)(z+1) + 8y(-x + \varepsilon y)(z+1) - 2z^4 = 2\varepsilon(x^2 + 4y^2)(z+1) - 2z^4$$

在 $(0,0,0)$ 附近是负定的. 故此时零解渐近稳定.

问题 7.2(课上不讲)

1. 讨论 Lienard 方程 $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$ 零解的稳定性, 其中 $f(x), g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $xf(x)>0, xg(x)>0, \forall x\neq 0$.
2. 讨论方程 $\ddot{x}+p\dot{x}+q(x-x^3)=0$ 零解的稳定性. 其中 $p\in\mathbb{R}, q>0$.

解

1. 在附加作业 2 中, 我们就用过 Lienard 变换来求解 Lienard 方程. 现在我们依然利用此变换讨论其稳定性. 令 $F(x)=\int_0^x f(s)ds$, $y=\dot{x}+F(x)$, 则 $xF(x)>0(x\neq 0)$ 且
$$\dot{x}=y-F(x),\quad \dot{y}=-g(x).$$
构造函数 $V(x,y)=\frac{1}{2}y^2+\int_0^x g(s)ds$, 则 V 正定且
$$\dot{V}(x,y)=g(x)(y-F(x))-yg(x)=-F(x)g(x).$$
由题设可得全导数 $\dot{V}(x,y)$ 常负. 因此 Lienard 系统的零解稳定.
2. 很典型的题目, 考试容易考到. 首先化为一阶方程组
$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-qx-py+qx^3.$$
系统的线性主部为
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\-q&-p\end{pmatrix}.$$
计算可得 $\det(\lambda I-A)=\lambda^2+p\lambda+q$, 特征值为 $\lambda=\frac{-p\pm\sqrt{\Delta}}{2}$, $\Delta=p^2-4q$.
(a) $p^2-4q<0$, 则特征值为共轭虚根, 实部为 $-\frac{p}{2}$. 若 $p<0$, 则零解不稳定; 若 $p>0$, 则零解渐近稳定. 若 $p=0$, 此时原方程化为
$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-qx+qx^3.$$
且有 $q>0$. 构造函数 $V(x,y)=\frac{q}{2}x^2-\frac{q}{4}x^4+\frac{1}{2}y^2$(通过构造首次积分可得), 则 V 在原点附近正定且
$$\dot{V}(x,y)=(qx-qx^3)y+y(-qx+qx^3)=0.$$
因此零解稳定, 且此时 $V(x,y)\equiv V(x_0,y_0)>0$, 故零解非渐近稳定.
(b) $p^2=4q$, 则特征值均为 $\lambda=-\frac{p}{2}$. 若 $p<0$, 则零解不稳定; 若 $p>0$, 则零解渐近稳定. 若 $p=0$, 则 $q=0$, 此时系统以 (x_0,y_0) 为初值的解为 $x(t)=y_0t+x_0, y(t)=y_0$, 故零解不稳定.
(c) $p^2-4q>0$, 则特征值均为实数. 若 $q<0$, 则特征值一正一负, 故零解不稳定. 若 $q>0$, 则特征值同号. 若 $p>0$, 特征值均为负, 零解稳定; 若 $p<0$, 特征值均为正, 零解不稳定. 若 $q=0$, 则系统为
$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-py.$$
以 (x_0,y_0) 为初值的解为
$$x(t)=x_0+\frac{y_0}{p}(1-e^{-pt}),\quad y(t)=y_0e^{-pt}.$$
由此可得 $p<0$ 时零解不稳定, $p>0$ 时稳定而不渐近稳定.

问题 7.3(21 赵班 mid) 设 n 阶常数方阵 A 的所有特征值实部均为负, n 阶矩阵值函数 $B(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 且满足
$$\int_0^\infty\|B(t)-A\|dt<+\infty.$$
证明: 方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}=B(t)\boldsymbol{x}$ 的零解渐近稳定.

证明 将方程改写为 $\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=A\boldsymbol{x}+(B(t)-A)\boldsymbol{x}$, 则在 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ 下初值问题等价于
$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{A(t-s)}(B(s)-A)\boldsymbol{x}(s)ds.$$
由于 A 的特征值实部均负, 故存在 $\alpha>0$ 和 $M>0$ 使得 $\|e^{At}\|\leqslant Me^{-\alpha t}, \forall t\geqslant 0$. 令 $\boldsymbol{y}=e^{-At}\boldsymbol{x}$, 则
$$|\boldsymbol{y}(t)|\leqslant|\boldsymbol{x}_0|+\int_0^t\|B(s)-A\|\cdot|y(s)|ds.$$

由 Gronwall 不等式可得

$$|y(t)| \leqslant |x_0| e^{\int_0^t \|B(s)-A\| ds} \leqslant |x_0| e^{\int_0^\infty \|B(s)-A\| ds} \triangleq N.$$

因此 $|x(t) \leqslant \|e^{At}\| \cdot |y(t)| \leqslant MNe^{-\alpha t} \to 0(t \to +\infty)$, 即系统零解渐近稳定.

问题 7.4 设 u 是方程 $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = -u$ 在 xy 平面的闭单位圆域 Ω 上的 C^1 解. 若在 $\partial\Omega$ 上成立 $a(x,y)x + b(x,y)y > 0$, 试证明 $u \equiv 0$.

证明 考虑特征方程

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x,y), \quad \frac{du}{dt} = -u.$$

在特征曲线上, 我们记 $z(t) = u(x(t), y(t))$. 在闭球 $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 上, 存在 u 的最值点 (x_0, y_0), 它自然也是所在特征曲线 $\gamma \cap \Omega$ 上的最值点. 设 $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$, 分情况讨论即可:

1. $(x_0, y_0) \in \mathring{\Omega}$ 是最大值点, 则 $\frac{d^2z}{dt^2}\big|_{t=t_0} \leqslant 0 \Rightarrow z(t_0) \leqslant 0$. 因此 $\max_\Omega u = z(t_0) \leqslant 0$.
2. $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ 是最大值点. 由题设可得在给定特征曲线上

$$a(x,y)x + b(x,y)y = \dot{x}x + \dot{y}y = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) > 0.$$

这说明在边界附近, 随着 t 的增大, $x^2 + y^2$ 严格递增. 即特征曲线的走向是从 Ω 内穿到 Ω 外. 假设 $\frac{dz}{dt}\big|_{t=t_0} < 0$, 则存在充分靠近 t_0 的 $t_1 < t_0$, 使得 $z(t_1) > z(t_0)$. 由前面的论述可得 $\gamma(t_1) \in \Omega$, 这与 (x_0, y_0) 是最大值点矛盾. 因此 $-z(t_0) = \frac{dz}{dt}\big|_{t=t_0} \geqslant 0 \Rightarrow \max_\Omega u = z(t_0) \leqslant 0$.

综上可得 $\max_\Omega u \leqslant 0$. 可以类似证明 $\min_\Omega u \geqslant 0$, 从而 $u \equiv 0$.

7.2 考前复习

这一部分我们不讲高雅知识, 专心应试. 由于老师给的总评标准十分银杏化 (期中期末取 max), 并且期中题目往往比较常规, 难度不算高, 所以在期中拿到好成绩是很关键的. 下面先介绍一下期中考试大致的题型分布, 然后结合具体题目帮大家回顾一些重点知识和技巧.

题型简介 期中考试满分 120 分, 共八大题. 考试范围包括 ODE 全部以及一阶 PDE 的求解, 计算题量多, 证明题难度高. 下面以去年的试卷为例:

1. 第一大题: 4 个选择题, 20 分 (Median: 15, Mean: 13.94, Max: 20).
2. 第二大题: 6 道解方程, 包括一阶方程和高阶常系数线性方程, 36 分 (Median: 30, Mean: 28.39, Max: 35).
3. 第三大题: 求解三阶非齐次 ODE 方程组初值问题, 12 分 (Median: 6, Mean: 5.94, Max: 12).
4. 第四大题: 三选二, 三小题分别是: (1) S-L 边值问题的计算; (2) 物理应用题, 考察解在无穷远处的性态 (最终速度); (3) 无穷震荡, 考察 Sturm 比较定理. 12 分 (Median: 9, Mean: 8.52, Max: 12).
5. 第五大题: 两问, 分别是求初值问题近似解和分析最大存在区间, 各 5 分 (5(1): Median: 3, Mean: 2.25, Max: 5; 5(2): Median: 3, Mean: 2.35, Max: 5).
6. 第六大题: 两问, 考察解对参数与初值的可微性定理, 各 5 分 (6(1): Median: 1, Mean: 1.01, Max: 5; 6(2): Median: 0, Mean: 0.99, Max: 5)(这题很惨烈).
7. 第七大题: 两问, 考察解的稳定性, 各 5 分 (7(1): Median: 3, Mean: 2.72, Max: 5; 7(2): Median: 4, Mean: 2.82, Max: 5).
8. 第八大题: 一阶拟线性 PDE 求解与相关证明, 两小问, 共 10 分 (Median: 0, Mean: 2, Max: 10)(这题也很惨烈).

这里给大家列出去年的考察内容与分数分布并不是保证今年与去年内容相同, 而是让大家对考试有所了解, 知道重点与难点在哪, 便于大家侧重性复习. 考试难度与具体分布待发卷即见分晓. 从上面列出的内容可以看出, 考试会尽量覆盖大家所学的全部内容, 所以复习时也应该尽量细致, 面面俱到. 下面我们进行具体回顾.

方程分类 涉及到 ODE 的常见分类, 往往出现在某道选择题中. 请大家自己在脑海中回顾下列方程的概念和基本性质: (非) 线性方程、(非) 齐次方程、恰当方程、Bernoulli(伯努利) 方程、Riccati(里卡蒂) 方程、Clairaut(克莱罗) 方程、Bessel(贝塞尔) 方程, $\cdots$ 去年选择题里即考察过 Clairaut 方程的奇解.

解空间的结构 即微分方程 $\mathcal{L}u = f$ 的解构成的空间, 设 $\mathcal{L}$ 是 n 阶线性微分算子. 若 $f \equiv 0$, 则解空间是 n 维线性空间; 若 $f \neq 0$, 则方程通解等于非齐次特解加上齐次通解, 故解空间是 n 维线性流形/仿射空间 (**不是** $n+1$ **维!**). 这条性质容易在选择题里考察.

方程求解 这一部分针对第二题的六个解方程.

1. 齐次方程, 例如 19mid: $(\sqrt{t^2 - x^2} + x)dt - tdx = 0$, 16mid: $(x + \sqrt{t^2 + x^2})dt - tdx = 0$. 带根号的齐次方程经常考, 应该学会借用符号函数 sgn 来简化讨论过程. 另外不要忘了特解!
2. 恰当方程与 (分组) 积分因子法: 需要掌握常见的全微分形式, 遇到形如 $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ 的方程且难以化齐次时都可以想办法往积分因子方向靠一靠. 例如 19mid: $(2t^3 + x)dt + (4t^2x - t)dx = 0$. 难以观察出积分因子时应考虑分组积分因子法.
3. 一阶方程的变换法: 除常见变换外, 线性变换 $y = ax + bt + c$ 也是常用的, 例如求解形如 $x' = f(ax + bt + c)$ 的方程; 此外, 有些一阶方程需要先作变换再用上面提到的方法求解, 例如 16mid: $xdt + (t^2 + t + x^2)dx = 0$. 这类题目难度不小, 需要有敏锐的观察力. 这类题考察概率不高, 但也要做好心理准备, 大致清楚往哪个方向去着手.
4. 一阶隐式方程: 三种情况: $t = F(x,p), x = F(t,p), F(x,p) = 0$, 在群文件笔记中均有讨论, 应掌握每种情况下的求解方案. 一阶方程的通解仅含一个独立参数, 特解不含独立参数, 一定要按此检验自己得到的结果. 如果不符, 应代回方程确定参数之间的关系. 此外, 这时特解容易搞丢, 要细心些.
5. 高阶常系数方程求解: 对于齐次方程牢记利用特征根求线性无关解组的公式即可; 求非齐次方程特解时常用: (1) 待定系数法; (2) 运算子法.
   - 首先借助叠加原理简化原非齐次方程的求解, 分别求出几个方程 $\mathcal{L}u = f_1, \cdots, \mathcal{L}u = f_n$ 的特解, 再相加即可得 $\mathcal{L}u = f_1 + \cdots + f_n = f$ 的特解.
   - 若方程阶数较小 ($n = 2, 3$), 待定系数法、运算子法皆宜. 应用前者时需要注意特征根为重根的特殊情况, 记忆清楚.
   - 若方程阶数更高, 待定系数法则过于繁琐. 此时推荐运算子法. 需要牢记几条性质:

     $$P(\mathcal{D})e^{at} = P(a)e^{at}, \quad P(\mathcal{D})(e^{at}x(t)) = e^{at}P(\mathcal{D} + a)x(t).$$

     $$\mathcal{P}(\mathcal{D}^2)\cos\omega t = P(-\omega^2)\cos\omega t, \quad P(\mathcal{D}^2)\sin\omega t = P(-\omega^2)\sin\omega t.$$

     有一些小技巧需要相关习题巩固, 例如 Taylor 展开、复数化, 等等.
6. 二阶变系数方程: 以齐次情况为例, 可先用幂级数法/广义幂级数法/暴力观察法求出一个特解 (如果利用上述方法能求出通解, 则已大功告成!), 然后借助 Liouville 公式求出另一个线性无关特解. 这里需要牢记何时能用幂级数法 (方程在 t_0 附近可化为首一且系数解析的方程), 何时能用广义幂级数法 (在正则奇点附近). 例如 19mid: $x'' - 2tx' + 4x = 0$, 20mid: $x'' + x\sin t = 0$. 当然还有一些能用特殊变换求解的变系数方程, 例如欧拉方程 $a_2t^2x'' + a_1tx' + a_0x = f(t)$.

常系数 ODE 方程组的求解 没什么好说的, 先按照课件上的算法求解基解方阵 $\Phi(t)$, 然后按照公式

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{x}_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds$$

求解方程组在初值 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 下的解. 判分时我们会关注以下四点 (踩分点):

1. 求系数矩阵 A 的特征值.
2. 计算特征向量与基础解系.
3. 计算基解方阵及它的逆.

4. 按上述公式计算特解.

实际计算时, 基解矩阵计算量中等, 特解计算繁杂, 不好求得. 考试时间较为充裕, 大家好好算就是, 如果特解真的算不出来, 应及时弃掉, 先做其他题 (**但一定要能写到哪是哪!**).

另外, 有些方程组也可以逐项消元求解, 对于特定的方程组可以减少计算量.

Sturm-Liouville 边值问题 如果考试中出现, 大概率作为一小问考察简单 S-L 边值问题的计算与讨论, 难度不高 (甚至很低), 是应该稳稳拿到的分. 按照讨论参数范围、写出方程通解、代入边值条件三步走即可. 此外 Sturm-Liouville 定理 (常点、周期情形) 也值得记忆, 非负性这一结论可以简化我们的讨论过程. 大家可以参考 16mid 第八题.

Picard 定理相关 大致两个考察方向: (1) 具体计算; (2) 利用 Picard 序列/压缩映射证明解的存在唯一性. 考察前者时可能会让同学们写出 Picard 序列的前几项或者计算给定精度的近似解, 耐心算就是. 有两种考察方向:

1. 给定精度 ε, 要求计算存在唯一区间内误差小于 ε 的近似解. 此时要能手推/记住 Picard 序列与真实解的误差估计公式
$$|\varphi_k(t)-\varphi(t)| \leqslant \frac{ML^k}{(k+1)!}|t-t_0|^{k+1}.$$
其中 $M=\sup_R |f|, L$ 为 f 在 R 内的李氏常数 (类似附加作业 4-1).
2. 计算 $o((t-t_0)^n)$ 的近似解: 这句话的意思是让大家求出近似解 $\psi(t)$, 使得 $\psi(t)-\varphi(t)=o((t-t_0)^n)$. 即求出一个多项式近似解 $\psi(t)=a_0+a_1(t-t_0)+\cdots+a_n(t-t_0)^n$. 大致的求解思路是: 利用 Picard 序列反复迭代, 计算每项 $\varphi_k(t)$ 的 $o((t-t_0)^n)$ 近似表示. 若从某项开始这个近似表示不再变化, 则得到了待求的近似解.

后者考察与附加题 4-2 类似, 大家要能独立写出 Picard 定理的两种证法 (Picard 序列逐项逼近、压缩映射原理), 并且能把定理的证明过程依葫芦画瓢地应用在其他题目之中. 此外还有 f 连续可微 $\Rightarrow$ 局部 Lipschitz $\Rightarrow$ 解存在唯一这一机械化的论述过程, 不该不会.

解的延伸 很神秘的部分, 虽说可以很难, 但历次考试中出现的相关题目都中规中矩, 不会超过附加作业 5(除第二题 $t_0>0, x_0>1$ 情况) 的难度. 这是必考的重点, 往往选择题里会出现一个选项, 后面大题里还有一小问来专门考察. 这一部分没有非常固定的求解方案, 但大家可以按下面几步走 (以右行解为例):

- 先看看能不能通过 Gronwall 不等式/找 Nullclines/其他放缩等方式给出解的估计式 $x(t)\leqslant g(t)$. 若能, 则由延伸定理立得 $J^+=[t_0,+\infty)$.
- 如果上述过程遇到困难, 难以找到合适的估计式, 则可以尝试仿照 Riccati 那个例题, 通过反证推导存在区间有限. 此时往往需要进行合适的放缩, 大家要尽量放成容易积分的形式, 过程中不等号的方向要留心, 不要搞错.
- 当然, 上述过程的本质其实就是比较定理, 考试时完全可以应用比较定理来解题 (可以参考第五次习题课讲义).
- 除了上述本手以外, 还存在一些妙手 (例如习题课上讲 20 丘赛那一题时采用的构造闭轨的方法), 这就难以再清楚概括了, 需要各凭本事.

例如 20mid: $x'=(2t-x)(1+x^2), x(0)=0$.

解关于初值的连续依赖性与连续性

1. 利用 Gronwall 不等式证明解对初值的连续性, 这个放缩过程相当经典, 应该掌握. 例如 19mid: 讨论方程 $x'=f(x), x(0)=x_0$ 的解 $\varphi(t;x_0)$ 对 x_0 的连续性, 其中 f 连续可微.
2. 理解解对初值连续依赖性的内涵, 知道什么时候 “该用”(有限闭区间上, 微小扰动). 例如 22 丘赛 (见第五次习题课).

解关于初值的可微性 这一部分的题可以比较难. 但无论花样如何, 往往都是从构造变分方程入手, 所以能构造解关于初值/参数的变分方程, 并求解 $\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t;t_0,x_0), \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}(t;t_0,x_0), \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(t;\lambda)$ 是重中之重 (哪怕后面不会写, 也要把变分方程列出来并求解!). 这里列出变分方程的构造过程: 考虑微分方程的初值问题

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y;\lambda),\quad y(x_0)=y_0,$$

其中 f 关于 x,y,λ 连续可微, 设其解为 $\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)$. 初值问题化为积分方程

$$\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(s,\varphi(s;x_0,y_0,\lambda);\lambda)ds.$$

两边对 x_0,y_0,λ 求偏导可得

$$\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)}{\partial x_0}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi(s;x_0,y_0,\lambda);\lambda)}{\partial y}\frac{\partial\varphi(s;x_0,y_0,\lambda)}{\partial x_0}ds-f(x_0,y_0;\lambda).$$

$$\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)}{\partial y_0}=1+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(s,\varphi(s;x_0,y_0,\lambda);\lambda)}{\partial y}\frac{\partial\varphi(s;x_0,y_0,\lambda)}{\partial y_0}ds.$$

$$\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)}{\partial\lambda}=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial f(s,\varphi(s;x_0,y_0,\lambda);\lambda)}{\partial y}\frac{\partial\varphi(s;x_0,y_0,\lambda)}{\partial\lambda}+\frac{\partial f(s,\varphi(s;x_0,y_0,\lambda);\lambda)}{\partial\lambda}\right)ds.$$

由此可得初值

$$\left.\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)}{\partial x_0}\right|_{x=x_0}=-f(x_0,y_0,\lambda),\quad \left.\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)}{\partial y_0}\right|_{x=x_0}=1,\quad \left.\frac{\partial\varphi(x;x_0,y_0,\lambda)}{\partial\lambda}\right|_{x=x_0}=0.$$

更进一步, 对面三个积分方程两边关于 x 求导, 可得三个一阶线性方程的初值问题, 即得到了关于初值和参数的变分方程.

解的稳定性 期中考试往往会给你一个含参的自治系统, 让你讨论它的零解的稳定性. 这样的题有比较固定的求解思路: (1) 先线性近似, 把能讨论出来的情况讨论出来; (2) 构造 Lyapunov 函数来求解 (1) 中无法求解的情况. 前者牢记线性近似的判定定理即可 (若存在有正实部的特征值, 则零解不稳定; 若特征值实部均为负, 则零解渐近稳定; 若存在零实部而不存在正实部, 则无法判断), 后者需要构造一个在**原点某个小邻域内**正定的函数 V, 它的全导数 $\dot{V}$ 若正定, 则解不稳定; 若恒非正, 则解稳定; 若负定, 则解渐近稳定. 我们在考试中考察的 Lyapunov 函数大都为二次型形式, 大家观察/待定系数凑就是.

一阶 PDE 考试往往考察一阶线性/拟线性 PDE 的求解, 并且可能考察拟线性 PDE 的相关证明 (例如整体解、爆破现象等).

1. 一阶线性 PDE 的求解: 按照特征线法给出的算法求解即可, 不再赘述.
2. 一阶拟线性 PDE 的求解: 考试一般会考察拟线性方程的初值问题, 推荐使用参数曲面法. 按照下述步骤来即可: (1) 写出初始曲面和初值 $\alpha(s),\theta(s)$; (2) 验证解确实局部存在唯一 (行列式非零); (3) 求解特征方程的初值问题得到 $x=x(s,t),u=u(s,t)$; (4) 反解出参数 $s=\varphi(x),t=\psi(x)$; (5) 得出初值问题的解 $u=u(\varphi(x),\psi(x))$. 例如 19mid 考察过 Burgers 方程的初值问题.
3. 一阶 (拟) 线性 PDE 部分的证明题往往难度较大, 在整张卷子上是数一数二的难度. 但如果真的考察这样的题目, 往往都可以从方程的特征线入手 (例如前面给的例题). 还是那句话: **能写到哪是哪! 空着题目是不可能混到分的 (严肃脸)!**