§0.1 协变微分

正交标架运动方程包括

$$de_1 = \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3, \quad de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3$$

即

$$de_\alpha = \omega_\alpha^\beta e_\beta + \omega_\alpha^3 e_3,$$

其中$\omega_\alpha^3 e_3 = h_{\alpha\beta}\omega^\beta e_3$为法向上投影，与第二基本形式有关；$\omega_\alpha^\beta e_\beta$为切平面上投影，称为$e_\alpha$的协变微分，记作

$$De_\alpha = \omega_\alpha^\beta e_\beta.$$

定义0.1. *设w为曲面S上的切向量场，它的协变微分Dw定义为dw在切平面上的投影，即*

$$Dw := \langle dw, e_1\rangle e_1 + \langle dw, e_2\rangle e_2.$$

投影与正交标架$\{e_1, e_2\}$选取无关，定义合理。令$w = f^1 e_1 + f^2 e_2$，这里$f^1, f^2 : D \to \mathbb{R}$。则

$$\begin{aligned} Dw &= \langle d(f^1 e_1 + f^2 e_2), e_1\rangle e_1 + \langle d(f^1 e_1 + f^2 e_2), e_2\rangle e_2 \\ &= (df^1 + f^2\omega_2^1)e_1 + (df^2 + f^1\omega_1^2)e_2 \\ &= (df^\alpha + f^\beta\omega_\beta^\alpha)e_\alpha. \end{aligned}$$

即

$$D(f^\alpha e_\alpha) = (df^\alpha + f^\beta\omega_\beta^\alpha)e_\alpha.$$

切向量场的加法、函数乘积、内积的协变微分满足如下运算法则：

Proposition 0.2. *设$v, w : D \to TS$为曲面切向量场，$f : D \to \mathbb{R}$为曲面函数。则*

(1) $D(v + w) = Dv + Dw$;

(2) $D(fv) = dfv + fDv$;

(3) $d\langle v, w\rangle = \langle Dv, w\rangle + \langle v, Dw\rangle$. (协变微分保内积)

证明：由协变微分定义$Dw = (dw)^T$。例如

$$d\langle v, w\rangle = \langle dv, w\rangle + \langle v, dw\rangle = \langle Dv, w\rangle + \langle v, Dw\rangle.$$

□

类似的，

$$D_{\frac{\partial}{\partial u^\beta}} r_\alpha = (r_{\alpha\beta})^T = \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} r_\gamma,$$

由上述(1,2)

$$D(f^\alpha r_\alpha) = (df^\alpha + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} f^\beta du^\gamma) r_\alpha.$$

这里的定义表达式虽然只讨论曲面的特殊情形，但其实为一般表达式。更重要的是对$\mathbb{R}^3$中曲面这种特殊情形所定义的协变微分在不同参数坐标下结果不变(即与r_α或e_α选取无关，但普通微分$df^\alpha r_\alpha$一般会随参数坐标选取而改变)，向量场协变微分的这一性质和形式在曲面上非常珍贵。有了它才有在一般弯曲空间上求导数的正确方式(不依赖于局部坐标的选取，仅依赖第一基本形式)。

协变微分的一个等价概念为切向量沿曲线的平行移动。

定义0.3. 设$r(t) = r(\gamma(t))$为曲面S上的曲线，其中$\gamma(t) = (u(t), v(t))$。$w(t) \in T_{r(t)}S$为沿曲线$r(t)$的切向量场。称$w(t)$沿曲线$r(t)$平行当且仅当

$$\frac{Dw}{dt} := (\frac{dw}{dt})^T = 0.$$

记

$$w(t) = f_1(t) e_1(\gamma(t)) + f_2(t) e_2(\gamma(t)),$$

则

$$\frac{Dw}{dt} = [f_1'(t) + f_2(t)\omega_2^1(\gamma'(t))] e_1(\gamma(t)) + [f_2'(t) + f_1(t)\omega_1^2(\gamma'(t))] e_2(\gamma(t)).$$

因此$w(t)$沿曲面上曲线$r(t) = r(u(t), v(t))$平行等价于

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dt} + f_2(t)\omega_2^1(\gamma'(t)) = 0, \\ \frac{df_2}{dt} + f_1(t)\omega_1^2(\gamma'(t)) = 0. \end{cases}$$

由一阶常微分方程组初值问题解的存在唯一性定理可得切向量沿曲线平行移动的存在唯一性。

Proposition 0.4. 设$r(t) = r(u(t), v(t))$为曲面S上一条参数曲线，其中$t \in [a, b], r(a) = P, r(b) = Q$。则对任意$v_0 \in T_P S$，存在唯一沿曲线$r(t)$的平行向量场$v(t)$使得$v(a) = v_0$。$v(t)$称为$v_0$沿曲线$r(t)$的平行移动。

平面上平行向量场为常值向量场。因此平面上向量平移保持向量长度不变，两向量夹角不变，而且平移与路径无关。对于曲面上切向量沿曲线的平移，仍保持的是向量长度与两向量夹角。

Proposition 0.5. 设$v(t),w(t)$为曲面S上沿曲线$r(t)=r(\gamma(t))$的平行切向量场，则内积$\langle v(t),w(t)\rangle$ 为常数。特别，平行移动保持平移向量长度、两平移向量的夹角。

证明：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle v(t),w(t)\rangle &= \langle\frac{dv(t)}{dt},w(t)\rangle+\langle v(t),\frac{dw(t)}{dt}\rangle\\ &= \langle\frac{Dv(t)}{dt},w(t)\rangle+\langle v(t),\frac{Dw(t)}{dt}\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

注：曲面上向量平移与路径有关。例如单位球面上同一切向量沿不同经线从北极平移到南极：

$$r(\theta,\varphi)=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta),$$

北极点$(0,0,1)$处的切向量$(1,0,0)$沿着$r(\theta)=(\sin\theta,0,\cos\theta)$，即$\varphi=0$曲线的平移为

$$v(\theta)=r'(\theta)=(\cos\theta,0,-\sin\theta),\quad \text{特别}\quad v(\theta=\pi)=(-1,0,0).$$

而北极点$(0,0,1)$处的切向量$(1,0,0)$沿着$\varphi=-\frac{\pi}{2}$曲线，即$r(\theta)=(0,-\sin\theta,\cos\theta)$的平移为

$$v(\theta)=(1,0,0),\quad \text{特别}\quad v(\theta=\pi)=(1,0,0).$$

又例如沿一个纬线圈平移切向量。

注：正交标架运动方程以及曲面结构方程中的内蕴部分都有其协变微分的对应表述。其中

$$\omega_\alpha^\beta+\omega_\beta^\alpha=0\Leftrightarrow\langle De_\alpha,e_\beta\rangle+\langle e_\alpha,De_\beta\rangle=d\langle e_\alpha,e_\beta\rangle=0;$$

结构方程

$$d\omega^1-\omega^2\wedge\omega_2^1=0,\quad d\omega^2-\omega^1\wedge\omega_1^2=0\quad(1)$$

等价于

$$D_{X_1}e_2-D_{X_2}e_1-dr([X_1,X_2])=0,\quad X_\alpha:=(dr)^{-1}e_\alpha;\quad(4)$$

特别无挠条件(1)或(4)与协变微分保内积条件构成Levi-Civita协变微分的条件。Gauss方程

$$d\omega_1^2+K\omega^1\wedge\omega^2=0\quad(G)$$

等价于

$$R(e_1,e_2,e_2,e_1):=\langle D_{X_1}D_{X_2}e_1-D_{X_2}D_{X_1}e_1-D_{[X_1,X_2]}e_1,e_2\rangle=-K.$$

§0.2　测地曲率与测地线

§0.2.1　测地曲率

设参数曲面$r(u,v)$上一条弧长参数曲线为$r(s)=r(\gamma(s))=r(u^1(s),u^2(s))$。令$e_1=\frac{dr}{ds}$，$e_3=N=\frac{r_u\wedge r_v}{|r_u\wedge r_v|}$，$e_2$为与$e_1$正交的单位切向量使得$\{e_1,e_2,e_3\}$为右手系正交标架，即$e_2=e_3\wedge e_1$。希望定义该曲线在曲面上的内蕴曲率，推广平面曲线的曲率。

平面曲线情形曲率定义为$\langle\frac{de_1}{ds},e_2\rangle$。这一表达式事实上是内蕴的。对于曲面$r(u,v)$上曲线$r(s)$，同样考虑$\frac{de_1}{ds}=\frac{d^2r}{ds^2}$。在讨论法曲率时，仅关注$\frac{d^2r}{ds^2}$在曲面法向上的投影从而得到曲面沿$e_1$方向的法曲率。计算

$$\begin{aligned}\frac{de_1}{ds} &= \langle\frac{de_1}{ds},e_2\rangle e_2+\langle\frac{de_1}{ds},e_3\rangle e_3\\ &= \langle\frac{De_1}{ds},e_2\rangle e_2+\langle\frac{d^2r}{ds^2},N\rangle e_3\\ &= \omega_1^2(\frac{du}{ds}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{dv}{ds}\frac{\partial}{\partial v})e_2+k_n(e_1)e_3.\end{aligned}$$

这里法曲率$k_n:=k_n(e_1)$与第二基本形式有关，而

$$\langle\frac{de_1}{ds},e_2\rangle=\langle\frac{De_1}{ds},e_2\rangle=\omega_1^2(\frac{du}{ds}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{dv}{ds}\frac{\partial}{\partial v})$$

由第一基本形式决定($\gamma(s)$确定了$X_1=\frac{du}{ds}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{dv}{ds}\frac{\partial}{\partial v}$ 从而由第一基本形式决定$X_2,\omega^1,\omega^2,\omega_1^2$)，特别它在等距变换下保持不变。并且对于平面曲线它就是平面曲线的曲率。

定义0.6. 曲面上弧长参数曲线$r(s)$的测地曲率k_g定义为

$$k_g=\langle\frac{De_1}{ds},e_2\rangle.$$

$k_ge_2=\frac{De_1}{ds}$称为曲线的测地曲率向量。

另一方面，$r(s)$作为空间弧长参数曲线，其曲率$\kappa:=|\frac{d^2r}{ds^2}|$，$\frac{d^2r}{ds^2}$称为此空间曲线的曲率向量。此曲率向量有分解

$$\frac{d^2r}{ds^2}=k_ge_2+k_ne_3,$$

从而

$$\kappa^2=k_g^2+k_n^2.$$

法曲率反映曲面沿曲线切方向e_1的弯曲；而测地曲率k_g反映曲线在曲面内的弯曲程度，仅由第一基本形式决定。

作业：5, 6, 8, 9