第二十七讲 (2023.6.9)

Def X —— 非空集合

如果函数 $\mu^*: 2^X \to [0,+\infty]$ 满足

(i) $\mu^*(\phi) = 0$

(ii) 单调性

(iii) 可数次可加性

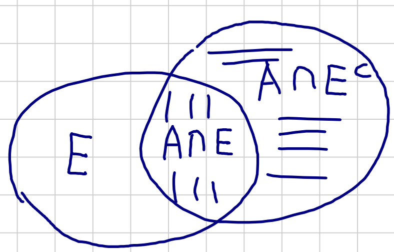
则称 μ^* 是 X 上一个外测度.

Def 设 μ^* 是 X 上一个外测度, 如果 $E \subset X$

满足: $\forall A \subset X$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

则称 E 是 μ^*-可测的



Thm (Caratheodory)

$\mathcal{M} \overset{def}{=} \{\mu^*\text{-可测集}\}$ 是 X 上 σ-代数

$\mu \overset{def}{=} \mu^*|_{\mathcal{M}}$ 是一个完备测度.

Pf **Step 1** $\mathcal{M}$ 是代数

只需证：$\mathcal{M}$ 对有限并封闭

设 $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$，来证明：$E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$

i.e. $\forall A \subset X$,

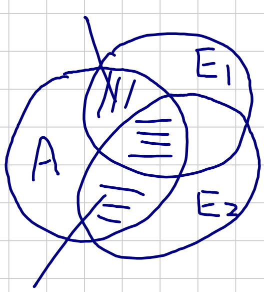
$$\mu^*(A) = \mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)) + \mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)^c)$$

LHS $\leq$ RHS 平凡

$$\mu^*(A) = \mu^*(A\cap E_1) + \mu^*(A\cap E_1^c)$$

$A\cap E_1\cap E_2^c$

$$= \mu^*((A\cap E_1)\cap E_2) + \mu^*((A\cap E_1)\cap E_2^c)$$



$$+ \mu^*(A\cap E_1^c\cap E_2) + \mu^*(\underbrace{A\cap E_1^c\cap E_2^c}_{= A\cap(E_1\cup E_2)^c})$$

$A\cap E_2\cap E_1^c$

$$\underset{\text{次可加性}}{\geq} \mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)) + \mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)^c)$$

Step 2 $\mu^*|_{\mathcal{M}}$ 有限可加

设 $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$，$E_1\cap E_2 = \phi$

$$\mu^*(E_1\cup E_2) = \mu^*(\underbrace{(E_1\cup E_2)\cap E_1}_{E_1}) + \mu^*(\underbrace{(E_1\cup E_2)\cap E_1^c}_{E_2})$$

Step3 $\mathcal{M}$ 是 σ-代数

设 $E_k \in \mathcal{M}$, $k=1,2,\cdots$ 不妨设互不相交.

(否则 $\tilde{E}_1 \overset{def}{=} E_1$, $\tilde{E}_k \overset{def}{=} E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$, $k \geq 2$)

Claim $\mu^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k)$

$\forall A \subset X$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(不能由 Step2 得到, $\because$ $A \cap E_k \notin \mathcal{M}$)

$n=1$ 可平凡

假设对 $n=N$ 成立,

当 $n=N+1$ 时

$$\mu^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{N+1} E_k)) = \mu^*(\overbrace{A \cap (\bigcup_{k=1}^{N+1} E_k) \cap E_{N+1}}^{A \cap E_{N+1}})$$

$$+ \mu^*(\underbrace{A \cap (\bigcup_{k=1}^{N+1} E_k) \cap E_{N+1}^c}_{A \cap (\bigcup_{k=1}^{N} E_k)})$$

$$\overset{\text{by 归纳假设}}{=} \mu^*(A \cap E_{N+1}) + \sum_{k=1}^{N} \mu^*(A \cap E_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N+1} \mu^*(A \cap E_k)$$

令 $E \overset{def}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

$\forall A \subset X, \quad \forall n,$

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)^c\right)$$

$$\overset{\text{claim}}{=} \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)^c\right)$$

$$\overset{\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}\right)}{=} \mu^*(A)$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A) \qquad (1)$$

另一方面

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^c) \qquad (2)$$

$(1)+(2) \Longrightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$

$\Longrightarrow E \in \mathcal{M}$

<u>Step 4</u> $\mu \overset{\text{def}}{=} \mu^*|_{\mathcal{M}}$ 可数可加，从而是测度

设 $E_k \in \mathcal{M}$, $k=1,2\cdots$ 互不相交，令

$$E \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

由 Step 3 中 (1) + (2)

$$\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^c)$$
$$\forall A \subset X.$$

$$\text{取 } A=E \Longrightarrow \quad \mu^*(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

<u>Step 5</u> μ 完备

只需证： $\forall E$ with $\mu^*(E) = 0 \Longrightarrow E \in \mathcal{M}$.

$\forall A \subset X$,

$$\mu^*(A) \leq \underbrace{\mu^*(A \cap E)}_{=0} + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(A)$$

$$\Longrightarrow E \in \mathcal{M}.$$

Def $\mathscr{A}$ —— X 上代数

如果 $\mu_0: \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ 满足

(i) $\mu_0(\phi) = 0$

(ii) 若 $A_k \in \mathscr{A}$, $k = 1, 2, \cdots$ 互不相交, 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$

则
$$\mu_0\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k)$$

则称 μ_0 是 X 上一个预测度 (premeasure)

Rmk: (ii) $\Longrightarrow$ $\begin{cases} \text{单调性} \\ \text{有限可加性} \end{cases}$

Thm $\mathscr{A}$ —— X 上代数

$\mu_0: \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ —— 预测度

对 $E \subset X$, 令

$$\mu^*(E) \overset{\text{def}}{=} \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k) : A_k \in \mathscr{A}, k=1,2\cdots, E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}$$

则

(i) μ^* 是 X 上外测度.

(ii) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0$

(iii) $\mathcal{A} \subset \mathfrak{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu^*\text{-可测集}\}$

(iv) $\mu \stackrel{\text{def}}{=} \mu^*|_{\mathfrak{M}}$ 是一个测度. 若 ν 是 $\mathfrak{M}$ 上

另一测度 s.t. $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$, 则 $\nu \le \mu$.

而且 若 $\mu(E) < \infty$, 则 $\nu(E) = \mu(E)$

Pf (i) 只需验证可数次可加性

设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset 2^X$, 不妨设

$$\mu^*(E) < \infty, \quad \forall k.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 对每个 E_k, $\exists A_j^{(k)} \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \cdots$

s.t. $E_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^{(k)}$ 且

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(A_j^{(k)}) < \mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$\Rightarrow \quad \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \le \sum_{k,j} \mu_0(A_j^{(k)})$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mu_0(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) + \varepsilon$$

$$\xRightarrow{\varepsilon \to 0^+} \quad \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

(ii) 设 $E \in \mathcal{A}$. 则

$$\mu^*(E) \leq \mu_0(E) \quad (\because \{E\} \text{ 是的 } \mathcal{A}\text{-覆盖})$$

另一方面, $\forall A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, \cdots$ with

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

令

$$E_1 \overset{def}{=} E \cap A_1$$

$$E_k \overset{def}{=} E \cap \left(A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right), \quad k \geq 2$$

$\Longrightarrow$ $E_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2 \cdots$ 互不相交.

且 $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E \in \mathcal{A}$

$$\Longrightarrow \mu_0(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0(A_k)$$

$$\Longrightarrow \mu_0(E) \leq \mu^*(E)$$