# 微分方程

## 积分因子法

**定义：** 对于微分方程$M(t,x)\mathrm{d}t+N(t,x)\mathrm{d}x=0$，(1)

如果存在可微二元函数$u(t,x)$，使得$M(t,x)\mathrm{d}t+N(t,x)\mathrm{d}x$是$u(t,x)$的全微分，即 $\mathrm{d}u(t,x)=M(t,x)\mathrm{d}t+N(t,x)\mathrm{d}x$，

则称(1)为**全微分方程**或**恰当方程**。

**常见的全微分公式**

$$t\mathrm{d}t+x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(t^2+x^2),\quad \frac{x\mathrm{d}t+t\mathrm{d}x}{tx}=\mathrm{d}\ln(tx),$$

$$\frac{x\mathrm{d}t-t\mathrm{d}x}{t^2+x^2}=\mathrm{d}\arctan\frac{t}{x},\quad \frac{x\mathrm{d}t-t\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(\frac{t}{x}\right),\quad \frac{x\mathrm{d}t-t\mathrm{d}x}{-t^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$\frac{t\mathrm{d}t+x\mathrm{d}x}{t^2+x^2}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln(t^2+x^2),\quad \frac{x\mathrm{d}t-t\mathrm{d}x}{t^2-x^2}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln\frac{t-x}{t+x}.$$

例1：求方程$(\cos t+\dfrac{1}{x})\mathrm{d}t+(\dfrac{1}{x}-\dfrac{t}{x^2})\mathrm{d}x=0$的通解。

解：记$M(t,x)=\cos t+\dfrac{1}{x}, N(t,x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{t}{x^2}$. 则

$$\frac{\partial M}{\partial x}=-\frac{1}{x^2},\quad \frac{\partial N}{\partial t}=-\frac{1}{x^2}\Rightarrow \text{方程恰当。}$$

方法1. 取$(t_0,x_0)=(0,1)$，利用定理可求得方程的通解。

方法2. 用"分项组合"方法。

原方程化为 $$(\cos t\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\mathrm{d}x)+(\frac{1}{x}\mathrm{d}t-\frac{t}{x^2}\mathrm{d}x)=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\sin t+\mathrm{d}\ln|x|+\frac{x\mathrm{d}t-t\mathrm{d}x}{x^2}=0.$$

$\therefore$ 通解为$\sin t+\ln|x|+\dfrac{t}{x}=C$，其中$C$是常数。

定义：对于微分方程$M(t,x)\mathrm{d}t+N(t,x)\mathrm{d}x=0$, (1)

如果存在连续可微函数$\mu=\mu(t,x)\neq 0$使得

$$\mu(t,x)M(t,x)\mathrm{d}t+\mu(t,x)N(t,x)\mathrm{d}x=0$$

是恰当方程，即存在二元可微连续函数$u(t,x)$，使得

$$\mathrm{d}u(t,x)=\mu(t,x)M(t,x)\mathrm{d}t+\mu(t,x)N(t,x)\mathrm{d}x,$$

则称$\mu(t,x)$为 (1)的一个积分因子。

此时(1)的通解为$u(t,x)=C$。

例2：$x\mathrm{d}t-t\mathrm{d}x=0$，不是恰当方程，而$\dfrac{1}{t^2},\dfrac{1}{x^2},\dfrac{1}{tx},\dfrac{1}{t^2\pm x^2}$都是方程的积分因子。

注. 可以证明:若(1)的解存在，则必有积分因子且不唯一。

对非恰当方程，如何求它的一个积分因子？

例3：求解方程 $x\mathrm{d}t+(t^2+t+x^2)\mathrm{d}x=0.$

解：方程显然非恰当。令$y=t+1$,则$t=y-1$, $\mathrm{d}t=\mathrm{d}y$,
原方程化为$x\mathrm{d}y+(y^2-y+x^2)\mathrm{d}x=0$,即

$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}x=0$，可取积分因子$\mu=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

从而有$\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\mathrm{d}x=0$,积分得此方程的通解为

$\arg\tan\dfrac{y}{x}+x=C\Rightarrow$原方程的通解为$\arg\tan\dfrac{t+1}{x}+x=C$.

注. 本例中运气较好，找到一个简单的变量代换。
对一般方程的积分因子应该找出具有普遍性的方法。

由定义和定理，$\mu(t,x)$为方程(1)的一个积分因子的充要条件是

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial t},\quad \text{即}\quad N\frac{\partial\mu}{\partial t}-M\frac{\partial\mu}{\partial x}=\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)\mu \ (\text{一阶偏微分方程}).$$

注. 一般来说求解偏微分方程更难，但可以考虑特殊情形。

1° 方程(1)存在仅依赖$t$(或$x$)的积分因子$\mu$

$$\Leftrightarrow \mu(t)=e^{\int G(t)\mathrm{d}t},\quad G(t)=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}}{N}$$

$$\left(\text{或}\mu(x)=e^{\int H(x)\mathrm{d}x},\quad H(x)=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}}{-M}\right)$$

略证. $\mu(t)$为积分因子$\Leftrightarrow \dfrac{\partial\mu}{\partial x}=0,\ N\dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}=\left(\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}\right)\mu \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{d}\mu}{\mu\mathrm{d}t}=G(t).$

$2^\circ$ 方程(1)存在形如$\mu=\mu(t^\alpha \pm x^\beta)$ 的积分因子的充要条件是

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)\cdot\left(\alpha t^{\alpha-1}N \mp \beta x^{\beta-1}M\right)^{-1}=\varphi(t^\alpha \pm x^\beta).$$

$3^\circ$ 方程(1)存在形如$\mu=\mu(t^\alpha x^\beta)$的积分因子的充要条件是

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)\cdot\left(\frac{\alpha N}{t}-\frac{\beta M}{x}\right)^{-1}=\varphi(t^\alpha x^\beta).$$

$4^\circ$ 方程(1)存在形如$\mu=\mu(f(t,x))$ 的积分因子的充要条件是

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial N}{\partial t}\right)\cdot\left(N\frac{\partial f}{\partial t}-M\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-1}=\varphi(f(t,x)).$$

例4：试用积分因子法求解一阶线性方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+P(t)x=Q(t)$.

解：把方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+P(t)x=Q(t)$改写成对称形式

$$\left[-P(t)x+Q(t)\right]\mathrm{d}t-\mathrm{d}x=0.$$

此时，$M=-P(t)x+Q(t)$，$N=-1\Rightarrow$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}}{N}=P(t),$$

$\therefore$一阶线性方程$\left[-P(t)x+Q(t)\right]\mathrm{d}t-dx=0$存在仅依赖$t$

的积分因子$\mu(t)=e^{\int P(t)\mathrm{d}t}$。

用$\mu(t)=e^{\int P(t)\mathrm{d}t}$乘$\left[-P(t)x+Q(t)\right]\mathrm{d}t-\mathrm{d}x=0$两边，得

$$e^{\int P(t)\mathrm{d}t}\left[-P(t)x+Q(t)\right]\mathrm{d}t-e^{\int P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}x=0,$$

可写成 $$\mathrm{d}\left[xe^{\int P(t)\mathrm{d}t}\right]-Q(t)e^{\int P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=0.$$

积分得原方程的通解为$xe^{\int P(t)\mathrm{d}t}-\int Q(t)e^{\int P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=C$，即

$$x=e^{-\int P(t)\mathrm{d}t}\left[C+\int Q(t)e^{\int P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\right],$$ 与之前的结果一致。

例5：求方程$x\mathrm{d}t+(x-t)\mathrm{d}x=0$的通解.

解：令$M=x$，$N=x-t$, $\dfrac{\partial M}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial N}{\partial t}=-1$,非恰当.

方法1：因$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial N}{\partial t}}{-M}=-\dfrac{2}{x}$仅依赖$x$，可取积分因子

$\mu(x)=e^{\int(-\frac{2}{x})\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x^2}$并乘方程两边，得

$$\frac{\mathrm{d}t}{x}+\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{t}{x^2}\mathrm{d}x=0,\text{即}\quad \frac{x\mathrm{d}t-t\mathrm{d}x}{x^2}+\frac{\mathrm{d}x}{x}=0.$$

$\therefore$方程的通解为$\dfrac{t}{x}+\ln|x|=C$ ($C$：任意常数)。

方法2：将方程写成 $x\mathrm{d}t - t\mathrm{d}x = -x\mathrm{d}x.$

由例2易知方程的左端有积分因子$\mu = \dfrac{1}{x^2}$并考虑到右端只

与$x$有关，故可取$\mu = \dfrac{1}{x^2}$为方程的积分因子$\Rightarrow$

$$\frac{x\mathrm{d}t - t\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \text{通解为} \frac{t}{x} + \ln|x| = C。$$

方法3：把$t$看作未知函数，$x$看作自变量，则方程化为

一阶线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} - \dfrac{1}{x}t = -1$。同样求得通解为$\dfrac{t}{x} + \ln|x| = C$。

方法4：方程化为齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{x}{t - x}$求解，结果相同。

# 分组积分因子法

对复杂的非恰当方程$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$，若能写成 $n$组$\sum_{i=1}^{n}(M_i\mathrm{d}t+N_i\mathrm{d}x)=0$,其中每组有积分因子$\mu_i$，使得 $\mu_i(M_i\mathrm{d}t+N_i\mathrm{d}x)=\mathrm{d}\Phi_i, i=1,2,\ldots,n$,则对任意可微的$g_i$, $\mu_i g_i(\Phi_i)$也是第$i$组的积分因子，从而选择合适的$g_i$即得原方程的积分因子$\mu=\mu_i g_i(\Phi_i), i=1,2,\ldots,n$。

注：利用分组求积分因子也是困难的，需要有一定的技巧。比如，如何分组以及如何确定$\Phi_i$,需要多做练习，从中体会。

例6：求非恰当方程$\left(\frac{x}{t}+3t^2\right)\mathrm{d}t+\left(1+\frac{t^3}{x}\right)\mathrm{d}x=0$的通解。

解:方程可改写为 $\left(\frac{x}{t}\mathrm{d}t+\mathrm{d}x\right)+\left(3t^2\mathrm{d}t+\frac{t^3}{x}\mathrm{d}x\right)=0.$

对于$\frac{x}{t}\mathrm{d}t+\mathrm{d}x$，有积分因子$\mu_1=t$(或$\frac{1}{x}$)且可求得$\Phi_1=tx$;

对于$3t^2\mathrm{d}t+\frac{t^3}{x}\mathrm{d}x$，有积分因子$\mu_2=x$(或$\frac{1}{t^3}$)且可求得$\Phi_2=t^3x.$

对$\mu=tg_1(tx)=xg_2(t^3x)$，可取$g_1(s)=s^2, g_2(s)=s$, 则原方程的一个积分因子为$\mu=t^3x^2$，从而原方程化为

$$(t^2x^3\mathrm{d}t+t^3x^2\mathrm{d}x)+(3t^5x^2\mathrm{d}t+t^6x\mathrm{d}x)=0$$

$\Rightarrow$ 通解为$\frac{1}{3}t^3x^3+\frac{1}{2}t^6x^2=C.$