近世代数作业题

叶郁班

Contents

第一次作业 **1**

第二次作业 **2**

第 e 次作业 **3**

第三次作业 **5**

第四次作业 **6**

第五次作业 **8**

第六次作业 **9**

第七次作业 **11**

第一次作业

必做题

1: 对于任何集合 X, 我们用 id_X 表示 X 到自身的恒等映射. 设 $f: A \to B$ 是集合间的映射,A 是非空集合. 试证:

(1) f 是单射当且仅当存在 $g: B \to A$, 使得 $g \circ f = id_A$;
(2) f 是满射当且仅当存在 $h: B \to A$, 使得 $f \circ h = id_B$;
(3) f 是双射当且仅当存在唯一的 $g: B \to A$, 使得 $f \circ g = id_B, g \circ f = id_A$;
(4) 分别举例说明 (1)(2) 不唯一.

2: 设 $P(A)$ 是集合 A 的全部子集所构成的集族,$M(A)$ 为所有 A 到集合 $\{0, 1\}$ 的映射构成的集合. 试构造 $P(A)$ 到 $M(A)$ 的双射. 特别的, 如 A 为有限集, 试证 $|P(A)| = 2^{|A|}$, 换言之,n 元集共有 2^n 个子集.

3: 证明等价关系的三个条件是互相独立的, 即: 已知任意两个条件不能推出第三个条件.

4: 设集合 A 中关系满足对称性和传递性, 且 A 中任意元素都和某个元素有关系, 证明此关系为等价关系.

5: 证明容斥原理:

$$|A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\{i_1, \cdots, i_j\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}} |A_{i_1} \bigcap \cdots \bigcap A_{i_j}|$$

其中 $A_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 为某个固定集合 U 的有限子集.

选做题

补充 (粗略, 选做):
下面是集合论中三个等价的著名定理 (在集合论的 ZF 公理系统之下):
(1):Zorn 引理: 令 $(A, \leq)$ 是一个偏序集. 若 A 的每一链 S 在 A 中都有上界，即:

$$\exists a \in A, \forall s \in S, s \leq a,$$

则 A 有极大元.
(2): 选择公理: 令 $T = \{A_i | i \in I\}$ 为一族非空集合. 则存在映射:

$$\phi : T \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$A_i \longrightarrow \phi(A_i) \in A_i.$$

称 ϕ 为一选择函数.
(3): 任何集合上都可以定义起一个良序 (称一偏序集 $(A, \leq)$ 为良序集，或称偏序 $\leq$ 为一个良序，如果 A 的任意非空子集关于 $\leq$ 有最小元).

6: 利用 Zorn 引理或者良序公理证明非空集合 A 上存在极大偏序 (称 A 上的偏序 α 为一极大偏序，如果关于 A 上的任一偏序 β,$\alpha \subset \beta$ 蕴含着 $\alpha = \beta$，即将 A 上的一个二元关系看成是 $A \times A$ 的子集).

7: 尝试寻找实数集 $\mathbb{R}$ 上的一个良序.

8: 令 $T = \{A_i | i \in I\}$ 是一族非空集合，证明 $\prod_{i \in I} A_i$ 非空，其中:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i | \forall i \in I, f(i) \in A_i\}.$$

反之是否成立? 即 $\prod_{i \in I} A_i$ 非空，则 T 有选择函数.

第二次作业

必做题 (周三)

一: 基础 (定义验证)
1: 令 G 是实数对 $(a, b), a \neq 0$ 的集合. 在 G 上定义:$(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$. 试证 G 是群.

2: 令 Ω 是任意一个集合,G 是一个群,Ω^G 是 Ω 到 G 的所有映射的集合. 对任意两个映射 $f, g \in \Omega^G$,定义乘积是如下映射:

$$\forall \alpha \in \Omega, (fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha).$$

试证 Ω^G 是群.

3: 令 G 是所有秩不大于 r 的 n 阶复方阵的集合, 试证在矩阵的乘法下 G 成半群.

4: 设 G 是一个半群, 如果:
(1) G 中含有左幺元 e, 即 $\forall x \in G, ex = x$;
(2) G 的每个元素 x 有左逆元 x^{-1} 使得 $x^{-1}x = e$.
试证 G 是群.

5:b 是含幺半群中元素 a 的逆元素当且仅当成立 $aba = a$ 和 $ab^2a = 1$.

二: 进阶 (思考思考)
6: 设 G 是一个有限半群, 如果在其内满足左右消去律 ($ax = ay$ 或者 $xa = ya$ 意味着 $x = y$) 则 G 是群, 即有限双消半群是群. 并举例说明一个半群如果只满足单边消去律则不一定是一个群.

7: 令 G 是 n 阶有限群,$a_1, a_2 \cdots, a_n$ 是群 G 的任意 n 个元素, 不一定两两不同, 试证: 存在整数 p 和 q,$1 \leq p \leq q \leq n$, 使得 $a_p a_{p+1} \cdots a_q = 1$.

8: 举例:
(1) 举出一个半群的例子, 其中存在元素有左逆元但是没有右逆元;
(2) 举出一个半群的例子, 其中存在元素有两个左逆元;
(3) 举出一个半群的例子, 其中存在元素有无数个左逆元.

选做题

9: 令 S 是一非空集. 定义 S 上的运算:$a \cdot b = a(a \cdot b = b)$. 则 $(S, \cdot)$ 是一个半群, 称其为左 (右) 零半群. 若 S 是一半群, 证明如下三款等价:

(1) S 是一左零半群, 或者 S 是一右零半群;

(2) $ab = cd \Rightarrow a = c$ 或者 $b = d$;

(3) 任意映射 $f : S \to S, f(ab) = f(a)f(b)$.

10: 令 G 是一个半群. 则 G 是一个群当且仅当

$$\forall a \in G, \exists! b \in G, (ab)^2 = ab.$$

必做题（周五）

11：(1) 一个 n 阶矩阵称为一个单项矩阵, 如果该方阵的每一行, 每一列都恰有一个非零元素. 证明所有 n 阶单项矩阵构成的集合对于通常的矩阵乘法构成群.

(2) 所有 n 阶严格对角占优矩阵对于通常的矩阵乘法是否构成群?

(3) 定义 $GL_n(R)$ 上运算 $A \circ B = AB - BA$, 那么 $(GL_n(R), \circ)$ 是否构成一个群?

12: 偶数阶群必定存在 $a(\neq e)$ 满足 $a^2 = e$.

13: 令 G 是 n 阶有限群,S 是 G 的一个子集,$|S| > n/2$. 试证:对任意 $g \in G$, 存在 $a, b \in S$ 使得 $g = ab$.

第 e 次作业
(阅读材料，不用做)

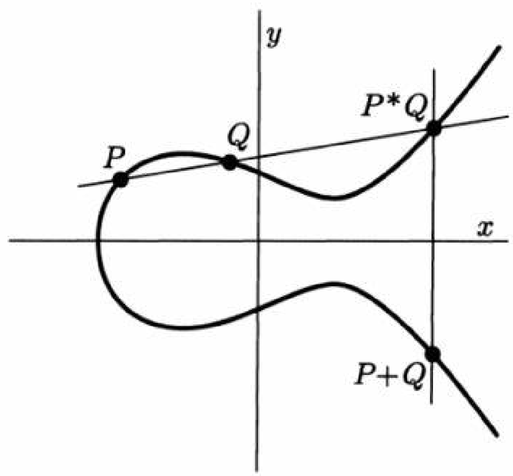
费马于 1630 年左右在 Diophantus 所著《数论》的书页空白处写下“当 $n \geq 3$ 时, 不存在满足 $x^n + y^n = z^n$ 的自然数解”以及“对此我发现了令人惊叹的证明，但这里空白太小写不下了.”由此引出了三百多年的故事. 我们将从椭圆曲线的角度出发浅探其与 FLT 的关系.

$E : y^2 = x^3 + ax + b$ $(a, b \in Q)$，$4a^3 + 27b^2 \neq 0$, 则称 E 为 Q 上的椭圆曲线. 考虑 E 的解集 $E(Q) = \{(x, y) \in Q \times Q | y^2 = x^3 + ax + b\}$. 我们在 $E(Q)$ 中添加一个特殊的元素 O 并定义:

(i)O 为单位元

(ii)$P, Q \in E(Q), P \neq O, Q \neq O$. 连接 P, Q 的直线与 E 交于第三点 $P^*Q = (x, y)$, 则令 $(x, -y) \in E(Q)$ 为 $P + Q$.

(iii)$P \in E(Q), P \neq O$. 设其坐标为 (x, y), 则 P 的逆元为 $(x, -y)$.



试解决以下问题 (* 题目仅供娱乐)

$*$[1] 验证 $E(Q)$ 在上述定义下构成阿贝尔群.

$*$[2] (Siegel's Theorem) 若 $a, b \in Z$, 令 $E(Z) = \{(x, y) \in Z \times Z | (x, y) \in E(Q)\}$, 证明 $E(Z)$ 为有限阿贝尔群.(更一般的，Mordell 证明了 $E(Q)$ 为有限生成阿贝尔群.)

[3] 费马曾写下“除 1 以外的 3 角数均非立方数”且未给出证明, 其中 3 角数为形如 $\frac{n(n+1)}{2}$ 的自然数.

(1) 试说明该论断与 $E: y^2 = x^3 + 1$ 之间的关系.(提示：将 $\frac{n(n+1)}{2} = m^3$ 改写成 $y^2 = x^3 + 1$)

(2) 证明 $\{(0, \pm 1), (-1, 0), (2, \pm 3)\} \in E(Z)$.

(3) 利用 [2] 以及如下定理说明 $E(Z)$ 除 (2) 中解外无其余整数解.

*(Nagell-Lutz Theorem) 对于椭圆曲线 $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in Z)$, 令 $D = -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2$, 若 $P = (x, y) \in E(Q)$ 且作为阿贝尔群中的元素其阶数有限, 则 $P \in E(Z)$ 并且要么 $y = 0$, 要么 $y|D$.

(4) 证明费马的论断.

[4] 有学者认为费马利用“无穷递降法”证明了 $n = 4$ 的情形并认为其余情形类似，因此宣称自己有一个“美妙的证明”. 以下将采用椭圆曲线的知识并利用“无穷递降法”证明费马关于 $n = 4$ 时的论断.

(1) 说明 $x^4 + y^4 = z^4$ 的自然数解与 $E: y^2 = x^3 - x$ 的有理数解之间的关系.(提示: 改写成 $(\frac{x^2 z}{y^3})^2 = (\frac{z^2}{y^2})^3 - \frac{z^2}{y^2})$.

(2) 验证 $\{(0, 0), (\pm 1, 0)\} \in E(Q)$ 并证明 E 除此之外无其余有理数解.

提示：

对于有理数 $a = \frac{m}{n}$ 其中 m, n 互素, 定义其高 (Height) 为 $H(a) = max(|n|, |m|)$. 例如,$H(\frac{-5}{8}) = 8, H(\frac{7}{2}) = 7, H(0) = H(\frac{0}{1}) = 1$. 假设 E 还有其他有理数解，选取其中 x 坐标的高最小者，记为 (x_0, y_0), 则证明此时存在 $(x_1, y_1) \in E(Q)$ 满足 $H(x_1) < H(x_0)$, 因此得到矛盾.

(i) 证明可以取 $x_0 > 1$.

(ii) 于是取 $x_0 > 1$, 证明从 $(x_0 - 1)x_0(x_0 + 1) = x_0^3 - x_0 = y_0^2$ 为有理数的平方推导出 $x_0 - 1, x_0, x_0 + 1$ 都是有理数的平方.

(iii) 此时存在 $(x_1, y_1) \in E(Q)$ 并且 $x_0 = \frac{(x_1^2+1)^2}{4(x_1^3 - x_1)}$, 说明 $H(x_1) < H(x_0)$. (3) 证明费马的论断.

$*$(4) 验证 $E(Q) = Z_2 \oplus Z_2$.(Mazur，1977 给出了 $E(Q)$ 所有可能的群结构)

椭圆曲线在 FLT 的证明过程中发挥了重要作用，对该问题感兴趣的同学可以翻阅加藤和也, 黑川信重以及斋藤毅所著的《数论 1》.
[5] 假定 ABC 猜想成立，证明费马大定理.
$*(ABC\ conjecture)$ 对于任意实数 $\epsilon > 0$, 存在与 ϵ 有关的常数 $C(\epsilon)$ 使得: 若互素的 $a, b, c \in Z - \{0\}$ 满足 $a + b + c = 0$, 则 $max\{|a|, |b|, |c|\} < C(\epsilon)rad(abc)^{1+\epsilon}$, 其中 $rad(N) := \prod p$, p 为满足 $p|N$ 的所有素数.

第三次作业

必做题（周三）

一: 基础 (定义验证)
1: 对于群同态 $f : G \longrightarrow H$, 定义 f 的核为 $Ker(f) = \{a \in G|f(a) = e \in H\}$,$f$ 的像为 $Im(f) = \{b \in H|\exists a \in G, b = f(a)\}$. 证明 $Ker(f)$ 与 $Im(f)$ 分别为 G 与 H 的子群并且 f 为单射当且仅当 $Ker(f) = \{e\}$.

2:a,b,c 为群 G 的元素，证明 $ord(a) = ord(a^{-1}), ord(ab) = ord(ba), ord(a) = ord(cac^{-1})$.

3: 求有理数加法群 $\mathbf{Q}$ 的自同构群 $Aut(\mathbf{Q})$.

二: 进阶 (思考思考)
4: 找出 $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +)$, $(Aut(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}), \cdot\ )$, $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, +)$ 与 $(Aut(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}), \cdot\ )$ 之间的同构关系.

选做题

5: 对任意整数 $m, n, r > 1$, 存在有限群 G 以及其中的元素 a, b 满足 $ord(a) = m, ord(b) = n, ord(ab) = r$.

必做题（周五）

一: 基础 (定义验证)
1: 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

试求 A, B, AB 和 BA 在 $GL_2(\mathbf{R})$ 中的阶

2: 设 a, b 是群 G 的两个元素,a 的阶是 7 且 $a^3b = ba^3$. 证明 $ab = ba$.

3:(1) 设 G 是有限阿贝尔群. 证明:

$$\prod_{g \in G} g = \prod_{a \in G, a^2 = 1} a$$

(2) 证明 $Wilson$ 定理: 如果 p 是素数，则 $(p-1)! \equiv -1\ mod\ p$.

4: 证明 $SL_2(\mathbf{Z})$ 可以由
$$S=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
生成.

二: 进阶 (思考思考)
5: 设 H 和 K 分别是有限群 G 的两个子群,$HgK=\{hgk|h\in H, k\in K\}$. 试证:
$|HgK|=|H|\cdot|K:g^{-1}Hg\cap K|$.

6: 设 A 是群 G 的具有有限指数的子群. 试证: 存在 G 的一组元素 $g_1, g_2, \cdots, g_n$, 它们既可以作为 A 在 G 中的右陪集代表元系，又可以作为 A 在 G 中的左陪集代表元系.

7: 群论在晶体结构的分类中有着重要应用, 例如二维结晶类对应于 $GL_2(\mathbf{Z})$ 的有限子群 (参见沙法列维奇《代数基本概念》). 我们将分以下几步说明只有有限多个二维结晶类.
(1) 求 $|GL_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})|$.
(2) 证明商映射 $\mathbf{Z}\longrightarrow\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ 诱导的映射 $f: GL_2(\mathbf{Z})\longrightarrow GL_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$ 为乘法群同态且 $Ker(f)=\{A\in GL_2(\mathbf{Z})|\exists B\in M_{2\times 2}(\mathbf{Z}), A=I+3\cdot B\}$.
(3) 若 $A\in Ker(f)$ 且 A 的阶有限, 则 $B=0$.(提示: 二项式展开后考虑 3 的指数)
(4)$GL_2(\mathbf{Z})$ 的任意有限子群 G 都同构于 $f(G)$, 从而 $|G|$ 整除 $|GL_2(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})|$(提示: 说明 f 限制在 G 上为单射)
(5) 证明 $GL_2(\mathbf{Z})$ 只有有限多个互不同构的有限子群.

选做题

8:$SO_2(\mathbf{R})$ 的任何有限子群都是循环群.

9:$SL_n(\mathbf{Z})$ 有限生成.

第四次作业

必做题 (周三)

一: 基础 (定义验证)

1: 群 G 的指数为 2 的子群 N 一定是 G 的正规子群.

2: 设 G 为群, 证明以下问题:
(1) 如果 $N\lhd G, N<M, M<G$, 则 $N\lhd M$.
(2) 如果 $N\lhd M$,$M\lhd G$,N 是否一定是 G 的正规子群?
(3) 如果 $K<G, N\lhd G$, 令 $N\vee K$ 表示 G 中包含 N, K 的最小的子群, 证明:
(i)$NK=N\vee K=KN$.(提示:$N\vee K$ 中元素为一些 $n_1k_1\cdots n_rk_r$ 的乘积, 利用 N 的正规性说明可以改写成 nk 的形式)
(ii) 如果 $K\lhd G, N\lhd G$ 且 $K\cap N=\{e\}$, 则对于任意的 $k\in K, n\in N$ 都有 $kn=nk$.
(4) 如果 $K<G, N<G$, 说明 $[N\vee K:N]\geq[K:N\cap K]$.(提示:$[N\vee K:N\cap K]=[N\vee K:K][K:$

$N \cap K])$

二: 进阶 (思考思考)

3: 共轭作用 σ_g 给出了 $\sigma : G \mapsto Aut(G)$ 的群同态, 其像为 $Inn(G)$.
(1) 证明 $Ker(\sigma) = Z(G)$.
(2) 若 G 有一个阶不为 1 或 2 的元素, 说明 $Aut(G) \neq \{e\}$.(提示: 反证, 得到 $Ker(\sigma) = G$, 从而 $g \mapsto g^{-1}$ 是一个非平凡自同构)

4: 以下证明 pq 阶群 G 非单群.($p > q$, 皆为素数)
(1)G 有 p 阶子群 H.(提示: 选做题 5)
(2)G 至多只有一个 p 阶子群.(提示: 假设另一个为 K, 则 $K \cap H = \{e\}$, 应用第 2 题 (4) 得到矛盾)
(3)H 是正规子群.(提示: 对任意 $g \in G, H \cong gHg^{-1}$, 利用 (2))

选做题

5: 令 G 为 $p^r m$ 阶群 (p 为素数且 $(p, m) = 1$), 我们称 p^r 阶子群 P 为 G 的西罗 p 子群. 以下证明 P 存在:
(1) 若 H, K 为 G 的子群, 定义 H, K 的双陪集为 $HaK = \{hak | h \in H, k \in K\}$, 其中 $a \in G$; 说明存在 G 关于 H, K 的双陪集分解即有 $\{g_i\}_{i=1}^s$ 使得 $G = \bigcup_{i=1}^s Hg_iK$ 且若 $g_i \neq g_j$ 则 $Hg_iK \cap Hg_jK = \{\varnothing\}$.
(2) 利用第三次作业 (周五) 第 5 题证明 $|HgK| = \frac{|H||K|}{|H \cap gKg^{-1}|}$.
(3) 若西罗 p 子群 P 存在，则对 G 的任意子群 H 有 $g \in G$ 使得 $H \cap gPg^{-1}$ 为 H 的西罗 p 子群.(提示: 利用 (1),(2) 说明存在某个 $g \in G$ 使得 p 不整除 $[H : H \cap gPg^{-1}]$, 从而 $H \cap gPg^{-1}$ 为 H 的西罗 p 子群)
(4) 任意有限群可作为某个 $GL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ 的子群.(提示: 矩阵表示)
(5) 令 U 为 $GL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ 中主对角线全为 1 的上三角矩阵全体, 说明 U 为西罗 p 子群.(提示: 容易计算 $|U|$, 第二次习题课讲义计算了 $GL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$)
(6) 利用 (3),(4) 以及 (5) 证明任意有限群 G 存在西罗 p 子群.

必做题（周五）

一: 基础 (定义验证)

6: 令 $G = \{(a, b) | a \in \mathbf{R}^\times, b \in \mathbf{R}\}$, 乘法定义为

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$$

试证:$K = \{(1, b) | b \in \mathbf{R}\}$ 是 G 的正规子群且 $G/K \cong \mathbf{R}^\times$.

7: 如果 $f : G \mapsto H$ 是满射群同态, 则 G 中包含 $Ker(f)$ 的正规子群一一对应于 H 的正规子群.

8: 设 $G_i (n \geq i \geq 1)$ 为群, 则:
(1)$Z(G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n) = Z(G_1) \times Z(G_2) \times \cdots \times Z(G_n)$:
(2)$G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 为阿贝尔群当且仅当每个 G_i 为阿贝尔群.

9: 如果 $N_1 \lhd G_1, N_2 \lhd G_2$, 则 $N_1 \times N_2 \lhd G_1 \times G_2$ 且 $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$.

10: 假设已知 $|GL_n(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})|$, 计算 $|SL_n(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})|$.

二: 进阶 (思考思考)

11:(1) 如果 $G/Z(G)$ 是循环群, 则 G 是阿贝尔群.
(2) 试证非阿贝尔群 G 的自同构群 $Aut(G)$ 不是循环群.

12: 求 $GL_n(\mathbf{R})$ 关于 $O_n(\mathbf{R})$ 的右陪集代表元系.(提示: 应用矩阵的 QR 分解)

第五次作业

必做题(周五)

(a) 每周三交作业, 周五可以补交, 都放在教室最后一排. 电子版在一周内任何时间都可提交; (b) 每周答疑习题课时间为周六下午 14:30-16:00, 地点为 5301; (c) 有不会的题目可以在群里讨论或者和助教讨论; (d) 习题可能会给一些提示，但是并非只有提示的做法，能做出来就行，无需拘泥.

一: 基础 (定义验证)

1: 将置换 $f:\mathbb{Z}_{29}\to\mathbb{Z}_{29}, n\mapsto n^3$ 写成 S_{29} 中两两不相交轮换的积.

2: (1) 设 $\sigma=(i_1i_2\cdots i_r)\in S_n, \tau\in S_n$, 证明 $\tau\sigma\tau^{-1}=(\tau(i_1)\tau(i_2)\cdots\tau(i_r))$;
(2) 设 $\sigma=(i_1i_2\cdots i_n)\in S_n$, 证明 $C_{S_n}(\sigma):=\{\tau\in S_n|\sigma\tau=\tau\sigma\}=<\sigma>$;
(3) $C(S_n)=\{1\}(n\geq 3)$.

3: (1) 设 $N\lhd G$,g 是群 G 的任意一个元素. 如果 g 的阶和 $|G/H|$ 互素, 则 $g\in N$;
(2) 如果 N 是 $S_n(n\geq 3)$ 的指数为 2 的正规子群, 证明其包含所有的 3-轮换.
因此 $A_n(n\geq 2)$ 是 S_n 中唯一的指数为 2 的子群.

4: (1) 确定 S_4 中所有置换的型;
(2) 确定 S_4 的全部正规子群(注意到正规子群是共轭类的并, 而两个置换共轭当且仅当其有相同的型).

二: 进阶 (思考思考)

5: 证明 S_n 中型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 的置换共有 $n!/\prod_{i=1}^n\lambda_i!i^{\lambda_i}$ 个, 由此证明:

$$\sum_{\lambda_i\geq 0,\lambda_1+2\lambda_2+\cdots n\lambda_n=n}\frac{1}{\prod_{i=1}^n\lambda_i!i^{\lambda_i}}=1.$$

(注意到型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 的置换是对 $\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}(\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个乱序) 的一个划分, 再除掉重复次数.)

6: (1) 证明 $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ 同构于 S_3(考察 $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ 在 $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2=\{(a,b)|a,b\in\mathbb{Z}_2\}$ 的三个非零元上的作用. 当然，也可以说明 6 阶非交换群只有 S_3, 由 Cauchy 定理知道 6 阶群有 2,3 阶元，然后正常分析即可);
(2)(选做) 证明 $PGL_2(\mathbb{F}_3)\cong S_4$, 此处 $\mathbb{F}_3$ 是三元域, 实际就是大家熟知的 $\mathbb{Z}_3$(自然的加法和乘法运算).(类似于上一题，注意到 $\mathbb{F}_3\oplus\mathbb{F}_3$ 有四个一维 $\mathbb{F}_3$-子空间, 记为 $S=\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$，$GL_2(F_3)$ 中元素自然给出在 S 上置换, 而且标量矩阵作用平凡，只需要证明不同的非标量矩阵作用不同再计

算阶数即可)；

(3) 证明 $SL_2(\mathbb{Z}_3) \ncong S_4$(尝试说明 $SL_2(\mathbb{Z}_3)$ 的中心非平凡, 而我们知道 $PGL_2(\mathbb{Z}_3)$ 的中心是平凡的，和第二题 (3) 吻合).

选做题

定义：称一个群 G 是单群, 如果其没有平凡的正规子群.

8: 旋转群 SO(3) 是单群 (我们在前面的习题证明了 $PSU(2) \cong SO(3)$, 因此利用标准型考虑 $SU(2)$ 或许是一个思路).

7: 如果域 F 有至少四个元素, 则 $SL_2(F)/\{\pm I_2\}$ 是单群 (一般的，$PSL_n(F_p)$ 呢?).

第六次作业

必做题（周三）

一*: 基础 (定义验证)*

1: 试证 A_4 没有 6 阶子群.

2: 对 $f(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}[x_1,x_2,x_3,x_4]$, 令 $G_f = \{\sigma \in S_4 | f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}) = f(x_1,x_2,x_3,x_4)\}$.
(1) 证明 G_f 为 S_4 的一个子群.
(2) 求以下情形的 G_f:
$(i) f = x_1x_2+x_3x_4$, $(ii) f = x_1x_2x_3$, $(iii) f = x_1+x_2$, $(iv) f = x_1x_2x_3x_4$, $(v) f = \prod_{1\le j<i\le 4}(x_i - x_j)$.

3:(1)S_n 可由 $(12),(13),(14),\cdots,(1n)$ 生成.
(2)S_n 可由 $(12),(23),(34),\cdots,(n-1\ n)$ 生成.
(3)S_n 可由 $(12),(123\cdots n)$ 生成.

二*: 进阶 (思考思考)*

4: 试证:
(1) 对称群 S_n 是交错群 A_{2n} 的子群.
(2) 对称群 S_n 是交错群 A_{n+2} 的子群.(remark: 当 $n \ge 2$ 时 S_n 不为 A_{n+1} 的子群)
(3) 每个有限群均是某个交错群的子群.

5:(1)$|Aut(S_3)| \le 6$.(提示: 利用必做题 3 的 (3), 考虑他们在自同构下的像的可能情况)
(2)$Inn(S_3) \cong S_3$.(提示: 利用第五次作业第 2 题 (3))
(3)$Aut(S_3) \cong S_3$.

6: 令 G 为 S_{999} 的阶为 1111 的循环子群, 证明存在 $i \in \{1,\cdots,999\}$ 使得对任意的 $\sigma \in G$ 都有 $\sigma(i) = i$.(提示: 考虑 G 的生成元的型)

选做题

7:(1) 构造 S_6 的一个不属于 $Inn(S_6)$ 的自同构.
(2) 证明 $n \neq 6$ 时有 $Aut(S_n) = Inn(S_n)$.
(3) 当 $n \neq 2, 6$ 时 $Aut(S_n) \cong S_n$.

必做题（周五）

一: 基础 (定义验证)

8: 若群 G 在集合 S 上的作用是可迁的, 则 G 的子群 N 是正规子群当且仅当任意 S 在 N 的作用下的每个轨道有同样多的元素.(提示: 反过来考虑到左陪集的左乘作用)

9: 二面体群 D_n 是由满足 $ord(a) = n, ord(b) = 2, ba = a^{-1}b$ 的元素 a, b 生成的群，证明以下问题:
(1)$D_2 \cong K_4, D_3 \cong S_3$.
(2) $< a > \lhd D_n, D_n / < a > \cong Z_2$.
(3)(选做) 找出 D_n 的共轭类以及正规子群.
(4)(选做) 当 n 为奇数时 $Z(D_n)$ 为 e, 当 n 为偶数时 $Z(D_n) \cong Z_2$.
(5)(选做) 若有限群 G 有两个 2 阶元 a, b, 则存在某个自然数 n 使得 $< a, b > \cong D_n$.
.
10:(*Burnside Lemma*) 设群 G 作用在集合 S 上, 令 t 表示 S 在 G 作用下的轨道条数. 对任意 $g \in G$,$F(g)$ 表示 S 在 g 作用下不动点的个数. 即 $F(g) = |\{x \in S | gx = x\}|$. 试证明:

$$t = \frac{\sum_{g \in G} F(g)}{|G|}$$

这就是说,G 的每个元在 S 上的作用平均使得 t 个文字不动.

11: 集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 的旋转群是将 A 映为自身的所有关于原点的旋转构成的群, 而对称群是将 A 映为自身的所有刚体变换构成的群. 求正四面体, 正六面体，正八面体，正十二面体和正二十面体的旋转群和对称群各有多少个元?

二: 进阶 (思考思考)

12: 用四种颜色对正四面体的每个面进行染色, 保证四种颜色均出现且在旋转下相同的染色方案记为同一种，则有多少种不同的染色方案? (提示: 利用第 10, 11 题)

13：考虑 $SL_2(\mathbb{R})$ 在上半平面 $H = \{z = x + yi | y > 0\}$ 上的作用:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}$$

(1) 验证上述作用为群作用.(需要说明 $gz \in H$)
(2) 证明 $\forall z \in H$, 有 $g \in SL_2(\mathbb{R})$ 使得 $z = gi$ 从而该作用可迁.
(3) 求 i 的稳定子群.
(4) 证明 $SL_2(\mathbb{R})$ 关于 $SO_2(\mathbb{R})$ 的左陪集代表元系与 H 一一对应.(提示:$gSO_2(\mathbb{R}) \mapsto gi, x + yi \mapsto \begin{bmatrix} y^{\frac{1}{2}} & xy^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & y^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} SO_2(\mathbb{R})$)

(5) 证明任意 $g \in SL_2(\mathbb{R})$ 可写成

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

的形式, 其中 $a > 0, b \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi)$.(提示: 利用 (4))

选做题

14: 对于 $\mathbb{R}^2$ 上的任意内积 $< , >_i$, 考虑 $GL_2(\mathbb{R})$ 在其上的作用:$g < w, v >_i = < gw, gv >_i$, 其中 w, v 为任意向量. 若 G 为 $GL_2(\mathbb{R})$ 的有限子群, 定义 $< w, v >_G = \sum_{g \in G} \frac{g < w, v >}{|G|}$, 其中 $< , >$ 为标准内积.
(1) 说明 $< , >_G$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的内积且存在 $h \in GL_2(\mathbb{R})$ 使得 $< w, v >_G = h < w, v >$.(提示: 欧式空间中的任意内积都有到标准内积的保距同构)
(2) 令 S, S_G 分别为 $< , >, < , >_G$ 的稳定子群, 说明存在 $h \in GL_2(\mathbb{R})$ 使得 $S_G = hSh^{-1}$.
(3) 证明 $\forall g \in G$ 都有 $g < w, v >_G = < w, v >_G$, 从而 g 是关于内积 $< , >_G$ 的正交矩阵.
(4) 利用 (2), (3) 说明存在 $h \in GL_2(\mathbb{R})$ 使得 $hGh^{-1} \subseteq O_2(\mathbb{R})$.
(5) 证明 $SL_2(\mathbb{R})$ 的有限子群为循环群.(提示: 利用 (5) 以及第三次作业选做题 8)
(6) 尝试找出哪些 D_n 可作为 $GL_2(\mathbb{R})$ 的子群.(提示: 参考第二次习题课讲义问题 4)

第七次作业

必做题 (周三)

一*: 基础 (定义验证)*

1: 设 p 是一个素数, G 的阶是 p 的方幂。证 G 的非正规子群个数是 p 的倍数。

2: 设 p 是 G 的阶的最小素因子。若有 p 阶子群 $A \lhd G$, 则 $A \leq Z(G)$。

3: 设 N 是有限群 G 的正规子群。若素数 p 与 $|G/N|$ 互素, 则 N 包含 G 的所有 Sylow p-子群。

4: 设 P 是有限群 G 的 Sylow p-子群。若 $N_G(P) \lhd G$, 则 $P \lhd G$。

二*: 进阶 (思考思考)*

5: 设 G 为有限群, 对 $g \in G$, 令 C_g 为 g 所在的共轭类, 若 $C_g = C_{g^{-1}}$, 称 C_g 为一个实共轭类。证 G 只有一个实共轭类当且仅当 G 的阶为奇数。

6: 确定 S_4 的 Sylow 子群。