线性代数B2
第二十三讲

陈发来

2022.11.03

第三章 线性空间

§5 对偶空间

Definition

定义1. 设V是数域F上的线性空间. 称$f: V \to F$是V上的线性函数，如果f满足

$$f(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}), \qquad \lambda, \mu \in F,\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V.$$

V中任意两个线性函数f, g可以定义加法与数乘运算：

$$(f+g)(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}), \quad (\lambda f)(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}).$$

在上述运算下，V上线性函数全体构成一个线性空间，称为V的对偶空间。

Definition

定义2. V上线性函数的全体构成的线性空间称为V的对偶空间，记为V^*.

Theorem

定理1 设V是F上n维线性空间，则V的对偶空间V^*也是n维线性空间. 并且，设$e_1, \ldots, e_n$是V的一组基，$e^1, \ldots, e^n$是V^*中满足$e^i(e_j) = \delta_{ij}$的线性函数。则$e^1, \ldots, e^n$是V^*的一组基，称为$e_1, \ldots, e_n$的对偶基。

证明.

首先证$e^1, \ldots, e^n$线性无关. 实际上, 设

$$\lambda_1 e^1 + \ldots + \lambda_n e^n = 0.$$

上式两边作用到e_i上得

$$\lambda_1 e^1(e_i) + \ldots + \lambda_n e^n(e_i) = \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

即$e^1, \ldots, e^n$线性无关.

$\square$

第三章 线性空间

接下来证明: 对任意$f \in V^*$,

$$f = f(e_1)e^1 + \ldots + f(e_n)e^n := \tilde{f}.$$

实际上, 上式右边作用到e_i有

$$\tilde{f}(e_i) = (f(e_1)e^1 + \ldots + f(e_n)e^n)(e_i) = f(e_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

于是对任意$\mathbf{x} = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$,

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{f}(e_i) = \tilde{f}(\mathbf{x}).$$

即$f \equiv \tilde{f}$. 于是$e^1, \ldots, e^n$为V^*的一组基, $\dim V^* = n$. □

第三章 线性空间

Example

例1 $V = F_n[x]$为次数不超过n的多项式线性空间. 求基函数$e_1 = 1, e_2 = x, \ldots, e_{n+1} = x^n$的对偶基.

解.

由$e^i(x^{j-1}) = \delta_{ij}$, 则对$p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$,

$$e^i(p) = \sum_{j=0}^n a_j e^i(e_{j+1}) = \sum_{j=0}^n a_j \delta_{i,j+1} = a_{i-1} = \frac{p^{(i-1)}(0)}{(i-1)!}.$$

□

第三章 线性空间

Example

例2 设$V=\langle\sin(x),\sin(2x),\ldots,\sin(nx)\rangle$，求$V$的一组基$e_1=\sin(x),e_2=\sin(2x),\ldots,e_n=\sin(nx)$的对偶基.

解.

由$e^i(\sin(jx))=\delta_{ij}$，则对$p(x)=\sum_{j=1}^n a_j\sin(jx)$,

$$e^i(p)=\sum_{j=1}^n a_je^i(e_j)=a_i=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}p(x)\sin(ix)\,dx.$$

□

注：由于$\dim V=\dim V^*=n$，$\sigma:e_i\to e^i$，$i=1,2,\ldots,n$确定了V到V^*的一个同构映射.

考虑$(V^*)^* = V^{**}$，它与V同构，存在自然的同构(不依赖于基函数)．实际上对任意$x \in V$，定义V^*上的线性函数f_x

$$f_x(\alpha) = \alpha(x), \qquad \forall \alpha \in V^*$$

容易验证，f_x是V^*上线性函数，即$f_x \in V^{**}$．

Theorem

定理2 映射$f : x \to f_x$是V到V^{**}的同构映射．

证明.

首先映射f是线性的．实际上，

$$f_{x+y}(\alpha) = \alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y) = f_x(\alpha) + f_y(\alpha) = (f_x + f_y)(\alpha)$$
$$f_{\lambda x}(\alpha) = \alpha(\lambda x) = \lambda\alpha(x) = \lambda f_x(\alpha) = (\lambda f_x)(\alpha)$$

接下来说明f是双射．

$\square$

第三章 线性空间

取V的一组基$e_1,\ldots,e_n$, 它在V^*的对偶基为$e^1,\ldots,e^n$. 则

$$f_{e_i}(e^j)=e^j(e_i)=\delta_{ij}$$

于是$f_{e_1},\ldots,f_{e_n}$是V^{**}的一组基，它是$e^1,\ldots,e^n$的一组对偶基. 也就是f将V的一组基$e_1,\ldots,e_n$映射到V^{**}的一组基$f_{e_1},\ldots,f_{e_n}$. 从而f是双射.

□

注: 映射f是V到V^{**}的自然同构，它与基的选取无关. 因此, 可以将V^{**}与V等同起来，即将V的元素看成V^*上的线性函数.

第三章 线性空间

Corollary

推论1 空间V^*中的任一组基都是V中某组基的对偶基.

证明.

设$e^1,\dots,e^n$是V^*一组基，$f_1,\dots,f_n$是V^{**}中$e^1,\dots,e^n$的对偶基. 将V^{**}与V等同，$f_1,\dots,f_n$在V中对应的基为$e_1,\dots,e_n$，即$f_i=f_{e_i}$，$i=1,2,\dots,n$. 于是$e_1,\dots,e_n$是V中$e^1,\dots,e^n$的对偶基. $\square$

第三章 线性空间

Lemma

引理1 设$\alpha_1,\dots,\alpha_n$是V^*的一组基. 则V中向量$v=0$当且仅当$\alpha_i(v)=0,\ i=1,2,\dots,n.$

证明.

$\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$. 设$\beta_1,\dots,\beta_n$为$\alpha_1,\dots,\alpha_n$的一组对偶基, 即$\alpha_i(\beta_j)=\delta_{ij}$. 则$v$可以表示成$v=x_1\beta_1+\ldots+x_n\beta_n$. 于是由

$$\alpha_i(v)=x_1\alpha_i(\beta_1)+\ldots+x_n\alpha_i(\beta_n)=x_i=0,\quad i=1,2,\dots,n$$

知$v=0$. □

第三章 线性空间

Theorem

定理3 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$是V^*的一组基. 则V中向量组$v_1,\ldots,v_m$线性相关(无关)当且仅当$\tilde{v}_i=(\alpha_1(v_i),\ldots,\alpha_n(v_i))$, $i=1,\ldots,m$在F^n中线性相关(无关).

证明.

$v_1,\ldots,v_m$线性相关$\Leftrightarrow$ 存在不全为零常数$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$使得 $\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_mv_m=0\Leftrightarrow\alpha_i(\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_mv_m)=0$, $i=1,\ldots,n\Leftrightarrow\lambda_1\alpha_i(v_1)+\ldots+\lambda_m\alpha_i(v_m)=0$, $i=1,2,\ldots,n\Leftrightarrow$ 关于$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$的线性方程组 $(\alpha_i(v_j))(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)^T=0$有非零解$\Leftrightarrow\text{rank}(\alpha_i(v_j))<m$ $\Leftrightarrow\tilde{v}_i$, $i=1,\ldots,m$线性相关. $\square$

第三章 线性空间

Theorem

定理4 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$为V^*的基，则V中向量$v_1,\ldots,v_m$的秩等于矩阵$(\alpha_i(v_j))$的秩.

证明.

设$\mathrm{rank}(v_1,\ldots,v_m)=r$，且$v_1,\ldots,v_r$为一组极大无关组.
由定理3，$\tilde{v}_i=(\alpha_1(v_i),\ldots,\alpha_n(v_i))$，$i=1,\ldots,r$为$\tilde{v}_1,\ldots,\tilde{v}_m$的一组极大无关组. 注意到$\tilde{v}_i^T$为矩阵$(\alpha_i(v_j))$的第$i$列，故$\mathrm{rank}(\alpha_i(v_j))=r$. □

Corollary

推论2 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$为V^*的基. 则V中向量组$v_1,\ldots,v_n$线性无关当且仅当$\det(\alpha_i(v_j))\neq 0$.

Definition

定义3 设W是线性空间V的子空间. 定义W的零化子为

$$W^0 = \{\alpha \in V^* \,|\, \alpha(v) = 0, \ \forall v \in W\}$$

Theorem

定理5 W^0是V^*的子空间, 且

$$\dim(W^0) = \dim(V) - \dim(W).$$

证明.

设$\alpha, \beta \in W^0$, 则$\alpha(v) = 0$, $\beta(v) = 0$, $\forall v \in W$. 于是

$$(\alpha + \beta)(v) = 0, \quad (\lambda\alpha)(v) = 0, \quad \forall v \in W$$

即W^0是V^*的子空间. □

第三章 线性空间

取W的一组基$e_1,\dots,e_k$, 将其扩充为V的一组基$e_1,\dots,e_n$. 令$e^1,\dots,e^n$为$e_1,\dots,e_n$的对偶基. 下证

$$W^0=\langle e^{k+1},\dots,e^n\rangle.$$

实际上, 对任意$\alpha\in W^0$, 令$\alpha=\lambda_1e^1+\ldots+\lambda_ne^n$. 由$\alpha(v)=0,\forall v\in W$知, $\alpha(e_i)=0$, $i=1,2,\dots,k$. 从而

$$0=\alpha(e_i)=\lambda_1e^1(e_i)+\ldots+\lambda_ne^n(e_i)=\lambda_i,\quad i=1,\dots,k$$

即$\alpha=\lambda_{k+1}e^{k+1}+\ldots+\lambda_ne^n$. 而显然$e^j\in W^0$, $j=k+1,\dots,n$. 故$W^0=\langle e^{k+1},\dots,e^n\rangle$.

□

对V^*的子空间U, U的零化子U^0是V^{**}的子空间.
将V^{**}与V等同, 则

$$U^0 = \{v \in V \mid \alpha(v) = 0,\ \ \forall \alpha \in U\}$$

Theorem

定理6 对V的任意子空间W, $(W^0)^0 = W$.

证明.

沿用定理5证明的记号, $W^0 = \langle e^{k+1}, \ldots, e^n \rangle$. 对任意$v \in (W^0)^0$, $v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$. 由$e^j(v) = 0$, $j = k+1, \ldots, n$, 得$v = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k$.
故$(W^0)^0 = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle = W$.

Corollary

推论3 V的每个子空间都是V^*的某个子空间的零化子. 反之, V^*的每个子空间都是V的某个子空间的零化子.

Example

例3 设$V=F^{n\times n}$是F上n阶方阵全体构成的线性空间，f是V上的线性函数. 证明：存在唯一的矩阵$A\in V$使得$f(X)=Tr(AX)$, $X\in V$.

证明.

设e_{ij}, $i,j=1,\ldots,n$是n阶基本矩阵，它们构成V的一组基. 设e^{ij}是对应的对偶基,即$e^{ij}(e_{kl})=\delta_{ik}\delta_{jl}$. 由定理1的证明有

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(e_{ij})e^{ij}(X),\quad X\in V.$$

令$X=(x_{ij})_{n\times n}$, 则$e^{ij}(X)=e^{ij}(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}x_{kl}e_{kl})=x_{ij}$.
易验证$x_{ij}=Tr(e_{ji}X)$. 于是

$$f(X)=Tr(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(e_{ij})e_{ji}X)=Tr(AX).$$

这里$A=(f(e_{ji}))$. □

第三章 线性空间

作业

1. 令$V = F_3[x]$, $B_i(x) = t^i(1-t)^{3-i}$, $i = 0, 1, 2, 3.$
    1. 证明:$B_0(x), B_1(x), B_2(x), B_3(x)$构成$V$的一组基.
    2. 求$B_0(x), B_1(x), B_2(x), B_3(x)$的一组对偶基.
2. 设线性空间V中向量$v_1, \ldots, v_m$线性相关, 则对任意$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in V^*$, $\det(\alpha_i(v_j)) = 0$.
3. 证明: 如果一个向量空间上的两个线性函数的化零子相同, 则这两个线性函数只差一个非零常数倍.