§0.1 空间曲线

固定三维欧式空间$\mathbb{R}^3$的单位正交基(右手系)。$\mathbb{R}^3$中正则曲线

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I = (a, b).$$

对应的弧长参数曲线$r(s) = r(t(s))$的单位切向量为$T(s) = \dot{r}(s)$。与$T(s)$垂直的向量称为曲线在该点的法向量。全体法向量构成的平面称为称为r在该点的法平面。曲线的曲率向量为$\ddot{r}(s) = \dot{T}(s)$是一个法向量。当曲率向量非零时，

$$\dot{T}(s) = |\dot{T}(s)| \frac{\dot{T}(s)}{|\dot{T}(s)|}.$$

令

$$\kappa(s) = |\dot{T}(s)| > 0, \quad N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \dot{T}(s).$$

N称为曲线的主法向量。令$B(s) = T(s) \wedge N(s)$，称为曲线的副法向量。因此有沿曲线的正交标架

$$\{r(s); T(s), N(s), B(s)\},$$

称为曲线的Frenet标架，它是右手系正交标架。

对于出现$\dot{T}(s) = 0$情形，通常不再以这种方式确定特殊的$N(s)$，一般会选取沿曲线的可微正交标架。这里主要关注曲线的局部性质，以下总是假设$\kappa(s) > 0$。

经过$r(s)$的沿$T(s), N(s), B(s)$的直线分别称为曲线的切线、主法线和副法线；以它们为法向量的平面分别称为法平面、从切平面和密切平面。

Frenet标架的运动方程：由定义

$$\frac{d}{ds} T(s) = \kappa(s) N(s).$$

对于$\dot{N}$，首先$\langle \dot{N}, N \rangle = 0$。$T$方向投影：

$$\langle \dot{N}, T \rangle = -\langle N, \dot{T} \rangle = -\kappa.$$

定义

$$\tau(s) := \langle \dot{N}(s), B(s) \rangle,$$

称为曲线的挠率。则

$$\frac{d}{ds} N(s) = -\kappa T + \tau B.$$

对于$\dot{B}$，首先$\langle \dot{B}, B\rangle = 0$，而

$$\langle \dot{B}, T\rangle = -\langle B, \dot{T}\rangle = 0,$$

$$\langle \dot{B}, N\rangle = -\langle B, \dot{N}\rangle = -\tau,$$

因此

$$\frac{d}{ds}B(s) = -\tau N.$$

因此有Serret-Frenet公式

$$\begin{cases} \dot{T}(s) = \kappa(s)N(s), \\ \dot{N}(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), \\ \dot{B}(s) = -\tau(s)N(s). \end{cases}$$

或其矩阵形式

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

出现反对称阵的原因与平面曲线Frenet标架运动方程情形相同。当改变曲线的定向时，切向量变号、主法向量不变、副法向量变号，曲率、挠率不变。

平面曲线的曲率反映了曲线的弯曲程度。空间曲线曲率和挠率的几何意义？考虑弧长参数曲线$r(s)$，不妨取$s_0 = 0$，则曲线在$s = 0$处可展开为

$$r(s) = r(0) + s\dot{r}(0) + \frac{s^2}{2}\ddot{r}(0) + \frac{s^3}{6}\dddot{r}(0) + \mathcal{E}(s), \quad \mathcal{E}(s) = o(s^3).$$

由Serret-Frenet公式，

$$\dot{r}(0) = T(0),$$

$$\ddot{r}(0) = \kappa(0)N(0),$$

$$\dddot{r}(0) = \frac{d}{ds}(\kappa N)(0) = (\dot{\kappa}N - \kappa^2 T + \kappa\tau B)(0).$$

因此

$$r(s) = r(0) + (s - \frac{\kappa(0)^2}{6}s^3)T(0) + (\frac{\kappa(0)}{2}s^2 + \frac{\dot{\kappa}(0)}{6}s^3)N(0) + \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3 B(0) + \mathcal{E}(s).$$

以$\{r(0); T(0), N(0), B(0)\}$为坐标系，则

$$\begin{cases} x(s) = s - \frac{\kappa(0)^2}{6}s^3 + \epsilon_x, \\ y(s) = \frac{\kappa(0)}{2}s^2 + \frac{\dot{\kappa}(0)}{6}s^3 + \epsilon_y, \\ z(s) = \frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3 + \epsilon_z. \end{cases}$$

挠率与曲线离开密切平面”速度“有关：

$$z(s)=\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3+o(s^3).$$

曲线投影到密切平面所得平面曲线在$s=0$的曲率为

$$\frac{x'(0)y''(0)-y'(0)x''(0)}{[x'(0)^2+y'(0)^2]^{\frac{3}{2}}}=\kappa(0).$$

这说明空间曲线$r(s)$在$s=s_0$的曲率即其在密切平面上的投影曲线在相应点的曲率。事实上当$\ddot{r}(s_0)\neq 0$时，充分靠近s_0的$s_1<s_2<s_3$对应的三点不共线，并且当$s_i\to s_0$时经过它们的圆周收敛到密切平面上的圆周。

可验证近似曲线$(x,y,z)=(s,\frac{\kappa(0)}{2}s^2,\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}s^3)$ 在$s=0$与$r(s)$具有相等的曲率和挠率。这里近似曲线形式简单具体，是由于坐标系选取得当。

曲线在密切平面投影的二阶近似为

$$y=\frac{\kappa(0)}{2}x^2;$$

在从切平面投影的三阶近似为

$$z=\frac{\kappa(0)\tau(0)}{6}x^3;$$

在法平面投影的最低阶近似为

$$z^2=\frac{2\tau(0)^2}{9\kappa(0)}y^3.$$

Proposition 0.1. 设空间曲线r的曲率$\kappa>0$。则r在某个平面内当且仅当$\tau\equiv 0$。

证明：设$r(s)$属于经过$r(s_0)$并以a为单位法向量的平面内，即

$$\langle r(s)-r(s_0),a\rangle\equiv 0.$$

求导得

$$\langle \dot{r},a\rangle=0,$$

$$\langle \kappa N,a\rangle=0.$$

由假设$\kappa>0$可知$\langle N,a\rangle=0$。由$\langle T,a\rangle=0,\langle N,a\rangle=0$，以及$B$同样与$T,N$垂直可知单位向量$a,B$平行。对$\langle N,a\rangle=0$求导得

$$\langle -\kappa T+\tau B,a\rangle=\langle \tau B,a\rangle=0,$$

因此$\tau=0$。

反之，设$\tau\equiv 0$，则$\dot{B}=-\tau N=0$，即B为常向量。要说明r在与B垂直并经过$r(s_0)$的平面上：

$$\frac{d}{ds}\langle r(s)-r(s_0),B\rangle=\langle T,B\rangle=0,$$

因此$\langle r(s)-r(s_0),B\rangle\equiv 0$。 □

Serret-Frenet公式是联系曲线“几何特征”与“曲率挠率关系式”的基本公式。一般来说对“几何特征”关系式求导容易得到”曲率挠率关系式“（顺方向推导），但反过来利用“曲率挠率关系式”推导几何特征，通常需要从顺方向推导中获取“中间/过渡”几何特征，例如上一例中推测出B为曲线所在平面的法向。习题15也是如此。

例：证明所有主法线经过定点的曲线是圆周。

证明：由假设条件，

$$r(s)+c(s)N(s)=r_0.$$

求导得

$$T+c'(s)N+c(s)(-\kappa T+\tau B)=0,$$

即

$$(1-c\kappa)T+c'N+c\tau B=0.$$

因此$c'=0$，$c(s)$为非零常数，从而

$$\tau\equiv 0,\quad \kappa=\frac{1}{c}\neq 0,$$

由$\tau\equiv 0$，曲线为平面曲线。由κ为常数，曲线为圆周。 □

例：求圆柱螺旋线

$$r(t)=(a\cos t,a\sin t,bt),\quad a>0$$

的曲率和挠率。

解：

$$r'(t)=(-a\sin t,a\cos t,b),$$

$$|r'(t)|=\sqrt{a^2+b^2}:=c,$$

$$s:=\int_0^t|r'(u)|du=ct,$$

$$t = t(s) = \frac{s}{c},$$
$$r(s) = r(t(s)) = (a\cos\frac{s}{c}, a\sin\frac{s}{c}, \frac{b}{c}s).$$

从而

$$T(s) = (-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c}),$$
$$\dot{T}(s) = (-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0),$$
$$\kappa(s) = |\dot{T}(s)| = \frac{a}{c^2},$$
$$N(s) = (-\cos\frac{s}{c}, -\sin\frac{s}{c}, 0),$$
$$\dot{N}(s) = (\frac{1}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{1}{c}\cos\frac{s}{c}, 0),$$
$$B(s) = T(s)\wedge N(s) = (\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}, -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}, \frac{a}{c}),$$
$$\tau(s) = \langle \dot{N}(s), B(s)\rangle = \frac{b}{c^2}.$$

即

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \tau(s) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

反之，给定常数$\kappa > 0, \tau$，令

$$a = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}, \quad b = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}$$

则圆柱螺旋线的曲率和挠率分别为κ, τ。 □

Proposition 0.2. 空间曲线$r(t)$的曲率和挠率分别为

$$\kappa(t) = \frac{|r'(t)\wedge r''(t)|}{|r'(t)|^3}, \quad \tau(t) = \frac{(r', r'', r''')}{|r'(t)\wedge r''(t)|^2}.$$

证明：由复合函数求导、Leibniz求导法则

$$\dot{r}(s) = \frac{dt}{ds}r'(t),$$
$$\ddot{r}(s) = (\frac{dt}{ds})^2 r''(t) + \frac{d^2t}{ds^2}r'(t),$$
$$\dddot{r}(s) = (\frac{dt}{ds})^3 r'''(t) + 3\frac{d^2t}{ds^2}\frac{dt}{ds}r''(t) + \frac{d^3t}{ds^3}r'(t).$$

因此

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\ddot{r}(s),$$

$$B(s)=T(s)\wedge N(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\dot{r}(s)\wedge\ddot{r}(s)=\frac{1}{\kappa(s)}\frac{1}{|r'(t)|^3}r'(t)\wedge r''(t).$$

由$|B(s)|=1$可得

$$\kappa(t)=\frac{|r'(t)\wedge r''(t)|}{|r'(t)|^3}.$$

由

$$\ddot{r}(s)=\dot{T}(s)=\kappa(s)N(s)$$

可得

$$\dddot{r}(s)=\dot{\kappa}(s)N(s)+\kappa(s)(-\kappa(s)T(s)+\tau(s)B(s)),$$

从而

$$\begin{aligned}\kappa(s)\tau(s) &= \langle\dddot{r}(s),B(s)\rangle\\ &= \langle(\frac{dt}{ds})^3r'''(t),\frac{1}{\kappa(s)}\frac{1}{|r'(t)|^3}r'(t)\wedge r''(t)\rangle\\ &= \frac{1}{\kappa(s)}\frac{1}{|r'(t)|^6}(r'(t),r''(t),r'''(t)),\end{aligned}$$

因此

$$\tau(s)=\frac{1}{\kappa^2(s)}\frac{1}{|r'(t)|^6}(r'(t),r''(t),r'''(t))=\frac{(r'(t),r''(t),r'''(t))}{|r'(t)\wedge r''(t)|^2}.$$

□

作业：4(1,3), 5, 9, 12, 15, 16