

思考题讨论

- 思考题6.3 当 $m_0 B \sim kT$ 时，求顺磁质的 χ_m 。
- 思考题6.4 为什么抗磁质微观机制与实际能很好符合，而顺磁质微观机制则不一定？

思考题6.3 求 $m_0 B \ll kT$ 不成立时顺磁质的 χ_m 。 令 $x = \cos \theta$

解：令 $\alpha = m_0 B / kT$ ，则 $dn(\theta) = C e^{\alpha \cos \theta} \sin \theta d\theta$ ，

由 $n_0 = \int_0^\pi dn(\theta) = \int_0^\pi C e^{\alpha \cos \theta} \sin \theta d\theta = C(e^\alpha - e^{-\alpha}) / \alpha$

得归一化系数 $C = n_0 \alpha / (e^\alpha - e^{-\alpha})$ ，

不是常数

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi m_0 \cos \theta dn(\theta) = \frac{n_0 m_0}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \int_0^\pi \cos \theta e^{\alpha \cos \theta} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{n_0 m_0}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \int_{-1}^1 x e^{\alpha x} dx = \frac{n_0 m_0}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \left(e^\alpha + e^{-\alpha} - \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{\alpha} \right) \\ &= n_0 m_0 \left(\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \right) = n_0 m_0 \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) = \chi_m H. \end{aligned}$$

$\alpha \rightarrow 0$, $M = \frac{n_0 m_0}{3} \alpha = \frac{n_0 m_0^2}{3kT} B \approx \frac{\mu_0 n_0 m_0^2}{3kT} H$ (同书上);

$\alpha \rightarrow \infty$, $M = n_0 m_0$ (饱和磁化).

$\alpha \rightarrow 0$ 时的近似计算

$$\begin{aligned}\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} &= \frac{(1 + \alpha + \alpha^2 / 2) + (1 - \alpha + \alpha^2 / 2)}{(1 + \alpha + \alpha^2 / 2) - (1 - \alpha + \alpha^2 / 2)} - \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{1 + \alpha^2 / 2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

对不对？多展开一阶

$$\begin{aligned}&\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{(1 + \alpha + \alpha^2 / 2 + \alpha^3 / 6) + (1 - \alpha + \alpha^2 / 2 - \alpha^3 / 6)}{(1 + \alpha + \alpha^2 / 2 + \alpha^3 / 6) - (1 - \alpha + \alpha^2 / 2 - \alpha^3 / 6)} - \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{1 + \alpha^2 / 2}{\alpha(1 + \alpha^2 / 6)} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1 + \alpha^2 / 3}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{3}\end{aligned}$$

第二十二讲 2022-05-17

第6章 静磁场中的磁介质

§ 6.1 磁场对电流的作用

§ 6.2 磁介质及其磁化强度 M

§ 6.3 磁介质中静磁场的基本定理

§ 6.4 介质的磁化规律

§ 6.5 边值关系和唯一性定理 ~~§ 6.6 磁像法~~

§ 6.7 磁路定理及其应用

§ 6.8 磁荷法

2) 介质界面与磁感应线垂直

与 B 线处处正交的曲面称“等磁势面”，以其为分界，填入若干均匀各向同性线性介质。只要填充前后总电流的分布形式不变，则 $B=\alpha B_0$ ，其中 α 为常数， B_0 是无介质时的磁感应强度。

证明： 设填入介质前后 B 的位形不变，则 $B\perp$ 介质界面， $\therefore M\perp$ 界面， \rightarrow 介质界面无磁化电流。磁化电流只分布于介质-导体界面。如果传导电流只分布在导体表面（超导体或内部磁场恒为零的理想导体），而且能自由改变其分布，就可能保证总电流分布形式不变，即 $I=\alpha I_0$ 。这一结果与所设的 $B=\alpha B_0$ 自恰。

- 求解步骤:

由
$$\alpha \sum_i \int_{L_i} \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_i} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 \quad (*)$$

定出 α ，从而得到 \mathbf{B} 。

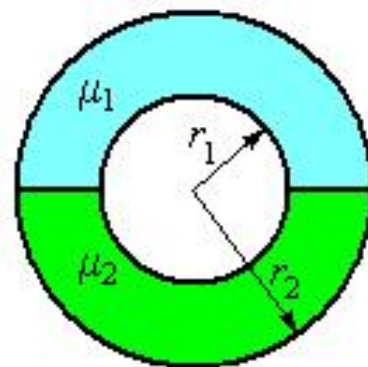
特别地，对一维对称情形，可直接由

$$\oint_L \frac{\mathbf{B}}{\mu_i} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0$$

得到 \mathbf{B} ，而

$$\mathbf{H}_i = \frac{1}{\mu_i} \mathbf{B}.$$

[例6.8] 同轴电缆 (内、外导体壳半径分别为 r_1 、 r_2) 中填满磁导率为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质, 各占一半空间。设通过电缆的电流强度为 I , 求介质中的磁场分布和介质-导体毗连面上的电流分布。



[解] 本题属于介质界面与磁感应线垂直的情况。取半径为 r ($r_1 < r < r_2$) 的圆形回路, 由一维对称性

$$\frac{B}{\mu_1} \pi r + \frac{B}{\mu_2} \pi r = I, \quad \therefore B = \frac{\mu_1 \mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2) r},$$

$$\therefore H_1 = \frac{B}{\mu_1} = \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2) r}, \quad H_2 = \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2) r}.$$

$$M_1 = \frac{B}{\mu_0} - H_1 = \frac{\mu_2(\mu_1 / \mu_0 - 1)I}{\pi(\mu_1 + \mu)r}, \quad M_2 = \frac{\mu_1(\mu_2 / \mu_0 - 1)I}{\pi(\mu_1 + \mu)r}.$$

在 $r < r_1$ 和 $r > r_2$ 区域, $B=H=M=0$ 。

在 $r=r_1$ 处的磁化面电流和传导面电流密度分别为

$$i_1' = \begin{cases} M_1|_{r=r_1} = \frac{\mu_2(\mu_1 / \mu_0 - 1)I}{\pi(\mu_1 + \mu)r_1}, & \text{介质1处,} \\ M_2|_{r=r_1} = \frac{\mu_1(\mu_2 / \mu_0 - 1)I}{\pi(\mu_1 + \mu)r_1}, & \text{介质2处,} \end{cases}$$

$$i_{10} = \begin{cases} H_1|_{r=r_1} = \frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu)r_1}, & \text{介质1处,} \\ H_2|_{r=r_1} = \frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1 + \mu)r_1}, & \text{介质2处.} \end{cases}$$

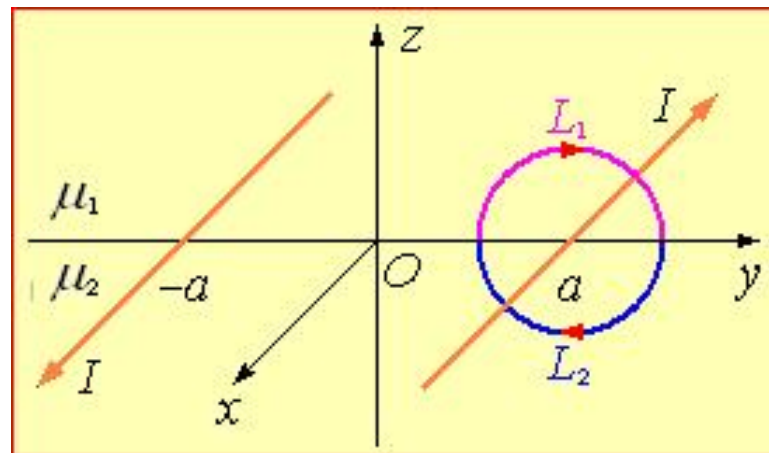
在 $r=r_2$ 处的磁化面电流和传导面电流密度分别为

$$i'_2 = \begin{cases} -M_1|_{r=r_2} = -\frac{\mu_2(\mu_1/\mu_0 - 1)I}{\pi(\mu_1 + \mu)r_2}, & \text{介质1处,} \\ -M_2|_{r=r_2} = -\frac{\mu_1(\mu_2/\mu_0 - 1)I}{\pi(\mu_1 + \mu)r_2}, & \text{介质2处.} \end{cases}$$

$$i_{20} = \begin{cases} -H_1|_{r=r_2} = -\frac{\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu)r_2}, & \text{介质1处,} \\ -H_2|_{r=r_2} = -\frac{\mu_1 I}{\pi(\mu_1 + \mu)r_2}, & \text{介质2处.} \end{cases}$$

尽管传导面电流和磁化面电流分布不均，但总面电流仍各向同性，因而磁感应强度与撤去磁介质时有相同的分布形式。

[例6.9] $z=0$ 平面将磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两介质隔开，在 y 轴上 $y=\pm a$ 的位置分别放置沿 x 负向和正向的无限长直线电流 I ，求空间磁场分布。



[解] $z=0$ 平面恰好是该体系的等磁势面，即介质界面与磁感应线垂直。由例5.1求得，去掉介质时的磁场

$$B_{0y} = \frac{\mu_0 I z}{2\pi} \left\{ \frac{1}{(y-a)^2 + z^2} - \frac{1}{(y+a)^2 + z^2} \right\},$$

$$B_{0z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ -\frac{y-a}{(y-a)^2 + z^2} + \frac{y+a}{(y+a)^2 + z^2} \right\}.$$

设待求磁场 $B = \alpha B_0$ ，求 α ：在 y - z 平面内环绕 $y=a$ 处的
 直线电流取 **闭合圆回路 L** ，由 $\alpha \sum_i \int_{L_i} \mathbf{B}_0 / \mu_i \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0$

$$\alpha = \frac{I}{\mu_1^{-1} \int_{L_1} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} + \mu_2^{-1} \int_{L_2} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l}} = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_0(\mu_1 + \mu_2)},$$

式中 L_1 和 L_2 分别是回路 L 位于介质 1 和 2 中的部分，有

$$\int_{L_1} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_2} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I / 2. \quad \boxed{\text{左电流对环量无贡献}}$$

$$\text{最终有 } B_y = \frac{\mu_1\mu_2 Iz}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \left[\frac{1}{(y-a)^2 + z^2} - \frac{1}{(y+a)^2 + z^2} \right],$$

$$B_z = \frac{\mu_1\mu_2 I}{\pi(\mu_1 + \mu_2)} \left[\frac{y+a}{(y+a)^2 + z^2} - \frac{y-a}{(y-a)^2 + z^2} \right].$$

各介质区的磁场强度用式 $H_i = B/\mu_i$ 计算 (略)。

§ 6.7 磁路定理及其应用

1. 磁路定理的基本方程

- 不同性质的物理现象满足不同的物理规律，**泾渭分明**。但只要这些规律有**相同/相近**的数学表述，就可以采用**同一种数学方法**处理。本节的**磁路和磁路定理**vs第四章的**电路和电路定律**就有这种**对应关系**。
- 回顾：直流电路的基本方程

1) 稳恒条件：
$$\oiint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

2) 欧姆定律：
$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{K}) = \sigma \mathbf{E}',$$

3) 电动势的定义：
$$\int \mathbf{K} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}.$$

- 从上述基本方程出发，对一闭合电流管即闭合电路而言：

1) 沿电流管的电流强度：

$$I=jS=\text{常量}.$$

2) 电路方程：

$$\mathcal{E}=IR,$$

其中 $R = \oint dl / \sigma S$.

若电导率 σ 和截面积 S 沿电流管分段均匀，第 i 段电流管的长度、截面积、电导率和电阻分别为 l_i 、 S_i 、 σ_i 和 R_i ，则 R 可表示为：

$$R=\sum_i R_i, \quad R_i=l_i/\sigma_i S_i.$$

• 静磁场的有关方程

1) 磁场的高斯定理 $\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0,$

2) 磁介质性能方程 $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$

3) 安培环路定理 $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_0 \triangleq \mathcal{E}_m \text{ 磁动势}.$

• 只要 $\mathbf{j} \leftrightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{E}' \leftrightarrow \mathbf{H}$, $\sigma \leftrightarrow \mu$, $\mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{E}_m$, 则上面三式与电路的三式一一对应。进一步有对应:

1) 电导率为 σ 的电流管 \leftrightarrow 磁导率为 μ 的磁场线管;

2) 电流管的 $I = jS \leftrightarrow$ 磁场线管的 $\Phi_B = BS$;

3) 闭合电流管电阻 $R \leftrightarrow$ 闭合磁场线管 $R_m = \oint dl / \mu S$, R_m 称磁阻。 μ 和 S 分段均匀, 则 $R_m = \sum_i R_{mi}$, $R_{mi} = l_i / \mu_i S_i$.

- 类比：电流管称为电路，磁场线管称为磁路。对一闭合磁路而言，有与电路相对应的如下结论：

1) 沿磁场线管的磁通量

$$\Phi_B = BS = \text{常量};$$

2) 磁路定理：

$$\mathcal{E}_m = \Phi_B R_m = \Phi_B \sum_i R_{mi}$$

通常将 $\Phi_B R_{mi}$ 称为第 i 段磁路的磁势降。

- 也可以不经磁路与电路的类比，直接推演得

$$\mathcal{E}_m = \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \frac{\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}{\mu} = \Phi_B \int \frac{dl}{\mu S} = \Phi_B R_m.$$

2. 磁路定理的应用

- **理想电路**：由电源、电阻和其它电路元件通过导线连接而成，电路外部为绝缘介质或真空，电流仅限于电路内部，即**电流线严格与电路平行**。
- **理想磁路**：一般由绕有线圈的**闭合铁芯**实现磁路。通电线圈所产生的磁场 B_0 将使铁芯磁化，产生附加磁场 B' 。我们称 B_0 为外磁场，而称 B_0+B' 为合磁场。根据6.5节，当**铁芯磁导率均匀且填满**合磁场的某个闭合磁场线管时，合磁场的磁场线位形将同 B_0 完全一致，这样的铁芯的确构成一个理想磁路。例子：**密绕螺绕环**。

- 实际磁路：

- 1) 铁芯的几何形状往往不能与磁场线管一致。
- 2) 回路由分段均匀的材料构成。有的铁芯回路，如日光灯镇流器铁芯，还留有气隙。于是实际铁芯回路和磁场线管之间必然出现偏离，不再是理想磁路。
- 3) 不过，如果偏离不大，这些实际磁路还是可以近似视为理想磁路，从而运用磁路定理进行处理。事实上，由于铁芯的 $\mu \gg \mu_0$ ，铁芯回路接近理想磁路。

- 性质3) 的进一步说明

图(a)中磁场线在铁芯-空气界面发生“**折射**”。边值关系:

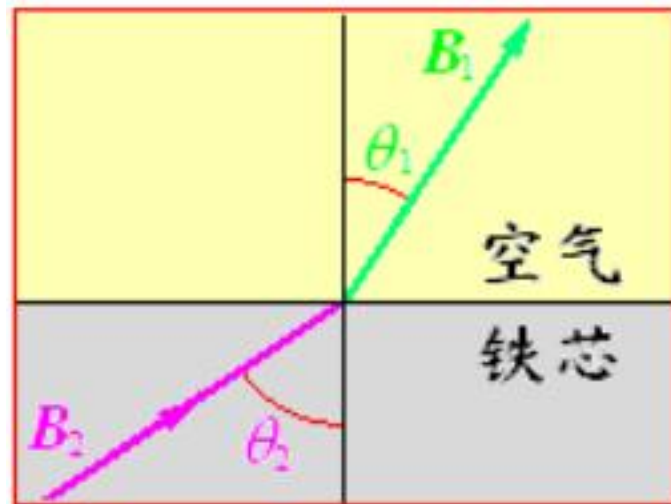
$$B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2,$$

$$H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2。$$

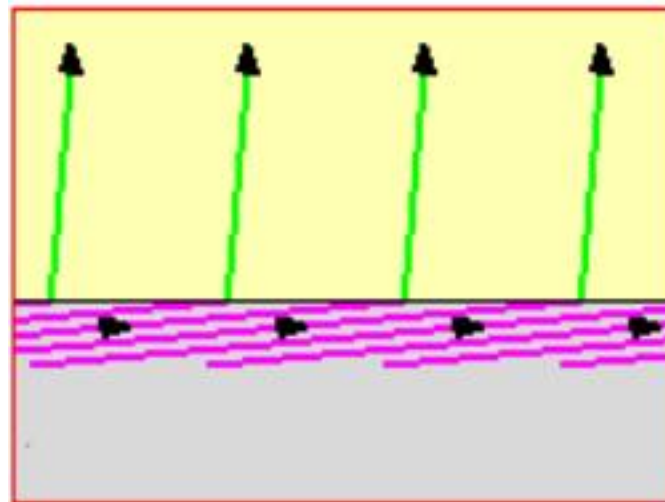
由 $H_1 = B_1 / \mu_0$ 和 $H_2 = B_2 / \mu$, **红式**
 $\rightarrow \mu B_1 \sin \theta_1 = \mu_0 B_2 \sin \theta_2。$

根据两个**蓝式**可得

$$\tan \theta_2 = (\mu / \mu_0) \tan \theta_1, \quad B_2 = \sqrt{\frac{1 + (\mu / \mu_0)^2 \tan^2 \theta_1}{1 + \tan^2 \theta_1}} B_1.$$

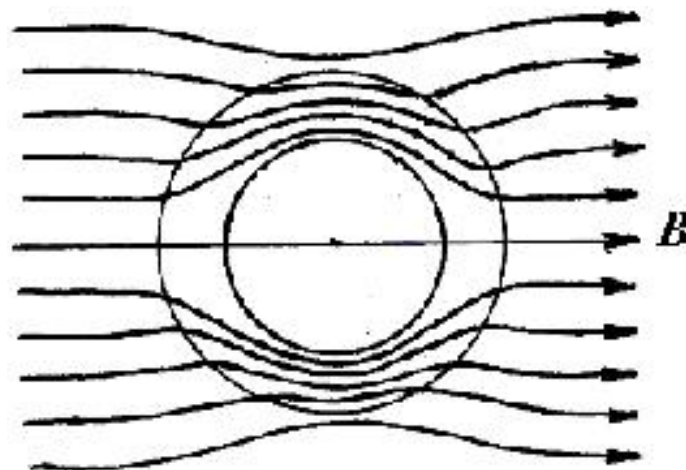


$\mu \gg \mu_0$ ，则 $\theta_1 \neq 0$ 时 $\theta_2 \sim \pi/2$ ，且 $B_2 \gg B_1$ ，因此铁芯内磁场线几乎与界面平行，且密集于铁芯内部。大部分磁通量集中于铁芯内部，仅极小部分从铁芯表面泄漏。

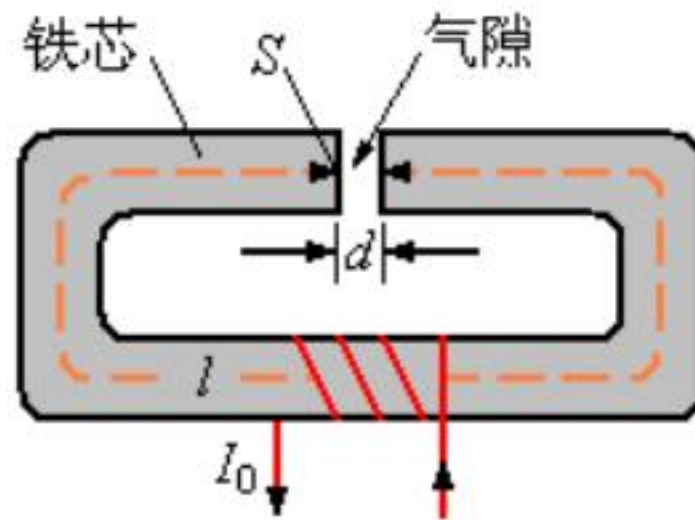


- 应用：磁屏蔽

$\mu_r > 10^3$ 的空腔软铁磁材料置于外磁场，磁感应线密集于外壳，极少漏进腔内，因此腔内物体很少受外磁场影响。



- 考虑一带气隙的铁芯回路，设铁芯上的线圈提供磁动势 $\mathcal{E}_m = NI_0$ ， N 为线圈匝数， I_0 为电流强度。铁芯材料均匀， $\mu \gg \mu_0$ ，气隙很窄，以至可忽略漏磁效应 \rightarrow 理想磁路。由磁路定理，



$$NI_0 = \Phi_B (R_{m1} + R_{m2}),$$

式中 $R_{m1} = l/\mu S$, $R_{m2} = d/\mu_0 S$ 分别为铁芯和气隙的磁阻， l 为铁芯磁路长度， d 为气隙长度， S 为铁芯截面面积 (假定铁芯截面均匀)。

[例6.12]日光灯镇流器可以等效为一带气隙的矩形磁路。设铁芯磁导率为 μ ，截面积为 S ，长度为 l ，线圈匝数为 N ，电流为 I_0 ，求无气隙时铁芯中的磁通量以及该磁通量减至一半时的气隙厚度 d 。

[解] 无气隙时

$$NI_0 = \Phi_B \frac{l}{\mu S}, \quad \therefore \Phi_B = \frac{\mu S N I_0}{l}.$$

存在气隙时，磁通量减半，

$$\therefore NI_0 = \frac{\Phi_B}{2} \left(\frac{l}{\mu S} + \frac{d}{\mu_0 S} \right) \rightarrow d = \frac{\mu_0}{\mu} l.$$

§ 6.8 磁荷法

- 磁荷的概念最早由库仑提出，至今孤立磁荷尚未被实验发现，所以物理上我们仍然坚持电流观点。
- 不过，作为静磁场的一种处理方法，磁荷法还是值得介绍的。
- 本节将指出，对不存在传导电流的空间 (包括真空和磁介质) 的静磁场问题，磁荷法和电流法将给出完全相同的结果；某些情况下，磁荷法更简便。

1. 磁荷观点下的静磁场规律

1) 真空中静磁场的高斯定理和环路定理

从5.1节中介绍的**磁场强度定义**和**点磁荷库仑定律**出发，**仿照静电场的推导方法**，可证明真空中的静磁场满足如下的**高斯定理**和**环路定理**：

$$\oiint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{(S\text{内})} q_m, \quad \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

由于环量为零，可引入“**磁势**” φ_m ，形式上与电势相对应：

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m.$$

2) 磁偶极子

- 定义：距离 l 很小的一对等量异号点磁荷 $\pm q_m$ 。磁偶极矩 $\mathbf{p}_m = q_m \mathbf{l}$ ，方向由负荷指向正荷。
- 类似电偶极子，可得磁偶极子的磁场强度为

$$\mathbf{H} = -\frac{\mathbf{p}_m}{4\pi\mu_0 r^3} + \frac{3\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{r}}{4\pi\mu_0 r^5} \mathbf{r},$$

在外磁场中受的力和力矩分别为

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \mathbf{H} = [\nabla(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{H})]_{\mathbf{p}_m}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{H}.$$

- 对比：磁矩为 \mathbf{m} 的元电流环相关公式

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 \mathbf{m}}{4\pi r^3} + \frac{3\mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^5} \mathbf{r},$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = [\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})]_{\mathbf{m}}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

- 只要将磁荷法与电流法中的量做如下对应:

$$H \leftrightarrow B/\mu_0, \quad p_m \leftrightarrow \mu_0 m$$

则上述两组公式将等效，即所求得的 B, H, F, L 完全一样。

- 于是，磁介质分子既可看成是磁偶极子，也看成是元电流环，这两种观点在描述磁介质和外场的相互作用方面完全等效 (在一定条件下)，进而磁荷法与电流法等效。

3) 磁介质的“磁极化”规律

- 磁介质在外磁场中的“磁极化”和6.2节的磁化是同一物理现象的不同叫法。
- 将磁介质分子视为磁偶极子，描述磁极化状态的量是磁极化强度，定义为单位体积中分子磁偶极矩

$$\mathbf{J} = \sum \mathbf{p}_{\text{m分子}} / \Delta V,$$

- 磁极化强度和极化磁荷存在如下关系：

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \sum_{S\text{内}} q'_m, \quad \sigma'_m = \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}.$$

- 磁极化规律： $\mathbf{J} = \chi_m \mu_0 \mathbf{H},$

式中 χ_m 为磁极化率，它就是以前的磁化率 (见后)。

4) 磁介质中静磁场的高斯定理

- 将 H 的高斯定理乘以 μ_0 后与 J 的高斯定理相加得

$$\oiint_S (\mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{S} = \sum_{S_{\text{内}}} (q_m - q'_m) = \sum_{S_{\text{内}}} q_{m0}. \quad (*)$$

仿照电位移的引入，定义辅助矢量**磁感应强度**

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}, \quad (\#)$$

鉴于自由磁荷 q_{m0} 不存在， $(*)$ 式简化为

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

- 将磁极化规律 $\mathbf{J} = \chi_m \mu_0 \mathbf{H}$ 代入 $(\#)$ 式得：

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

式中 $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ 称为**磁导率**。

2. 磁荷法和电流法的等效性

- 由 $p_m \leftrightarrow \mu_0 m$ 和 $J = \sum p_{m\text{分子}} / \Delta V$ 、 $M = \sum m_{\text{分子}} / \Delta V$ 得

$$J = \mu_0 M,$$

- 将上式代入 $J = \chi_m \mu_0 H$ 得

$$M = \chi_m H,$$

可见此处与电流法中的 χ_m 相同。

- 这里定义的 H 和 B 与电流观点中的 H 和 B 之间的区别仅仅在于 H 满足不同的环路定理。

$$\oint_L H \cdot dl = \begin{cases} 0, & \text{磁荷法} \\ \sum I_0, & \text{电流法} \end{cases}$$

作业、预习及思考题

- 作业： 6.14, 6.17~6.19
- 预习： 6.8 余下部分、 7.1 电磁感应定律、 7.2 动生电动势与感生电动势
- 思考题6.5 闭合铁芯周长 l ，线圈安匝数 NI 。对长边为 a 的狭长矩形环路 应用安培环路定理， $Ha=NI$ ， $H=NI/a$ ；对整个回路应用安培环路定理： $Hl=NI$ ， $H=NI/l$ 。 Which is \checkmark ?

