5.1.6 定积分的计算

1° 定积分的换元法

定理 1 (**定积分的换元法**) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 而函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可导, $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$, 且 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. 则有下面的换元公式

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

证明 由定理中的条件可知, 上式两端的积分都存在, 且函数 $f(x)$ 和 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 分别在区间 $[a,b]$ 及 $[\alpha,\beta]$ 上有原函数. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ (在 $[a,b]$ 上) 的一个原函数, 则根据复合函数的求导法则可知, $F(\varphi(t))$ 可导, 且

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

因此 $F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的一个原函数. 由 Newton–Leibniz 公

式, 我们有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

以及

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

这就证明了所说的等式. 证毕.

注1 从定理的证明来看, 没有必要要求 $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 只要它可积就可以了.

注2 与不定积分的换元法比较, 这里没有要求 $x = \varphi(t)$ 严格单调. 这是因为不需要象不定积分那样最终应将新变量换回原来的积分变量.

例 1 设 $f(x)$ 是闭区间 $[-a,a]$ 上连续的奇函数, 求 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

解

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= \int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

例 2 求 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$.

解 令 $x = a\sin t\,(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$. 则当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=a$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$. 所以 (由定积分的换元法则)

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2 t\,dt \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1+\cos 2t]\,dt \\
&= \frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}a^2.
\end{aligned}$$

注: 这个例子说明半径为 a 的圆面积的四分之一等于 $\frac{\pi}{4}a^2$. 因此圆的面积是 πa^2.

例 3 计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$.

解 作变换 $x=\tan\varphi$, 则 $d\varphi=\frac{1}{1+x^2}dx$, 且当 $x=0$ 时, $\varphi=0$; 当 $x=1$ 时, $\varphi=\frac{\pi}{4}$. 于是

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\,d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\ln\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)\right)-\ln(\cos\varphi)\right\}\,d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{\ln\sqrt{2}+\ln\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)-\ln(\cos\varphi)\right\}\,d\varphi \\
&= \frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)\,d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos\varphi)d\varphi.
\end{aligned}$$

因为

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)\,d\varphi \xlongequal{\varphi=\frac{\pi}{4}-t} -\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln\left(\sin(\frac{\pi}{2}-t)\right)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)dt.$$

所以 $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

例 4 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积的凸函数, 求证

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx.$$

证明 因为 $f(x)$ 是凸函数, 所以对 $x \in [a,b]$ 有

$$f(x) + f(a+b-x) \geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

两边积分可得

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(a+b-x)\,dx \geqslant 2(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

作换元 $t = a+b-x$, 可得

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = -\int_b^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

由此即得所证.

例 5 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义, 在任意有限区间上可积, 且满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

求 $f(x)$.

解 考察函数

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

对任意 x,y 有

$$\begin{aligned}
F(x+y)=\int_0^{x+y} f(t)\,dt &= \int_0^x f(t)\,dt+\int_x^{x+y} f(t)\,dt\\
&= F(x)+\int_0^y f(t+x)\,dt\\
&= F(x)+\int_0^y \big(f(t)+f(x)\big)\,dt\\
&= F(x)+F(y)+yf(x).
\end{aligned}$$

即对任意 x, y 有

$$F(x+y) = F(x) + F(y) + yf(x).$$

交换 x, y 得到

$$F(x+y) = F(x) + F(y) + xf(y).$$

比较上面二式, 得

$$yf(x) = xf(y).$$

取 $y = 1$, 得

$$f(x) = ax,$$

其中 $a = f(1)$ 是任意常数.

2° 定积分的分部积分法

定理 2 (**定积分的分部积分法**) 设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续的导函数 $u'(x)$ 与 $v'(x)$. 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

证明 由微分中的求导法则

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

及已知条件可知, 上式的两边都是连续的, 因此可积. 对上式两边进行积分, 并用 Newton–Leibniz 公式, 得出

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

即得所要证明的等式.

例 6 计算 $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

解 根据分部积分法,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x+1)\,dx &= x\ln(x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \left(1-\frac{1}{x+1}\right)\,dx \\ &= \ln 2 - \left(1-\ln(x+1)\Big|_0^1\right) \\ &= 2\ln 2 - 1 \\ &= \ln\frac{4}{e}.\end{aligned}$$

例 7 计算 $\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx$.

解 根据分部积分法,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} x \arctan x \, dx &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

例 8 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ 及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$.

解 作换元 $x = \frac{\pi}{2} - t$. 可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$$

因此我们只需求 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. 显然 $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. 对 $n \geqslant 2$, 由分部积分得到

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\ &= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x)\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx. \end{aligned}$$

即 $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$, 所以

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geqslant 2).$$

由这递推公式, 我们得出

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-1)}{2n} I_{2n-2} = \cdots = \frac{(2n-1)}{2n} \cdot \frac{(2n-3)}{(2n-2)} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 \\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

类似地得到

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n-2)}{(2n-1)} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

综合起来, 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

例 9 求证 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$ 收敛.

证明 因为 $\ln(1+x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 因而在 $[0,1]$ 可积. 采用等分点

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1$$

将 $[0,1]$ 分为 n 等份, 取 $\xi_k=\frac{k}{n}$, $k=1,2,\cdots,n$. 则 Riemann 和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

当 $n\to\infty$ 时收敛到 $A=\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\ln\frac{4}{e}$. 因为 S_n 可表示为

$$\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n},$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$ 收敛到 $\frac{4}{e}$.

5.1.7 用积分定义函数

连续函数都有原函数. 初等函数在其定义域内是连续函数, 因此, 初等函数都有原函数. 有许多初等函数其原函数仍是初等函数, 但也有一些初等函数, 其原函数不能用初等函数表示, 或者说它不是初等函数. 例如,

$$\int e^{-x^2}\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int \sin x^2\,dx.$$

如果一个初等函数 $f(x)$ 的原函数仍是初等函数 $g(x)$, 那我们可以得到该初等函数 $g(x)$ 的积分表示. 如果一个初等函数 $f(x)$ 的原函数不是初等函数, 那我们可以用变上限积分

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

(x_0 在 f 的定义域中) 来定义一个新的函数.

用积分定义对数函数

现在假设我们事先不知道什么是对数函数, 用积分定义函数

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{u}\,du, \quad (x > 0).$$

它是定义在 $x > 0$ 上一个连续而且可导的函数. 从几何上看, 它是曲线 $y = \frac{1}{u}$ 覆盖下的面积. 因此, 无论是几何直观, 还是根据积分的性质, 我们首先得到上式所定义的函数满足

$$f(1) = 0, \quad f(x)\ \text{严格单调递增}.$$

因此当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$.

对于 $x > 0,\ \ y > 0$, 利用积分的可加性和换元法, 有

$$\begin{aligned} f(xy) &= \int_1^{xy} \frac{1}{u}\,du = \int_1^x \frac{1}{u}\,du + \int_x^{xy} \frac{1}{u}\,du \\ &= \int_1^x \frac{1}{u}\,du + \int_1^y \frac{1}{u}\,du, \end{aligned}$$

因此函数 $f(x)$ 具有下列性质:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

特别, 取 $y = x$, 得

$$f(x^2) = 2f(x)$$

取 $y = x^{-1}$, 则有

$$f(x) + f(x^{-1}) = f(1) = 0, \quad 即 \quad f(x^{-1}) = -f(x)$$

上面结果的自然推广是

$$f(x^n) = nf(x), \quad x > 0, \quad n \text{ 是任何(正或负)的整数}$$

对于任何正的有理数 $\alpha = \frac{m}{n}$, 记 $x^\alpha = y$, 因此 $x^m = y^n$, 则

$$f(x^m) = f(y^n) \quad \Longrightarrow \quad mf(x) = nf(y)$$

所以

$$f(x^\alpha) = \alpha f(x), \quad x > 0$$

下面证明

$$f(e) = 1$$

根据数列的极限, 我们知道

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

注意到函数 $f(x)$ 的连续性, 有

$$f(e) = f\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} nf\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

利用积分中值定理, 可知存在一点 $\xi \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$, 使得

$$f\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{\xi}\frac{1}{n}$$

因此, 当 $n\to\infty$ 时, $\xi\to 1$, 所以得 $f(e)=1$.

我们把上面定义的函数记做 $\log x$ 或 $\ln x$.

5.1.8 Taylor 展开中余项的积分表示

定理 3 (**带积分余项的** Taylor **定理**) 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有直到 $n+1$ 阶的连续导函数. 那么对任意固定的 $x_0 \in (a,b)$ 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x), \tag{5.1}$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt,\ x \in (a,b). \tag{5.2}$$

注意到当 $t \in [x_0, x]$ 时, $(x-t)^n$ 不变号, 且 $f^{(n+1)}(t)$ 连续, 根据推广的积分中值定理, 存在 $\xi \in (x_0, x)$ 使得

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

证明 利用 Newton–Leibniz 公式及分部积分法,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} (t-x)' f'(t)dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \int_{x_0}^{x} (t-x) f''(t)dt \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) - \left(\frac{(t-x)^2}{2} f''(t) \Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)dt \right) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)dt \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x).
\end{aligned}
$$

例 10 设 $f(x) \not\equiv 0$, 在 $[a, b]$ 上可微, $f(a) = f(b) = 0$. 求证至少存在一点 $c \in [a, b]$ 使

$$|f'(c)| > \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{1}$$

证明 记上式右端为 M. 假设对一切 $c \in [a, b]$ 有 $|f'(c)| \leqslant M$, 我们以下推出矛盾. 首先根据微分中值定理, 对于 $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$ 存在 $\xi \in (a, x)$, 使

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a),$$

因此由假设, 有

$$|f(x)| \leqslant M(x-a),\ x \in [a, \frac{a+b}{2}], \tag{2}$$

因而

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M. \tag{3}$$

再根据微分中值定理, 对于 $x \in [\frac{a+b}{2}, b]$ 存在 $\eta \in (x, b)$, 使

$$f(x) = f(x) - f(b) = f'(\eta)(x-b),$$

因此由假设, 有

$$|f(x)| \leqslant M(b-x),\ x \in [\frac{a+b}{2}, b], \tag{4}$$

因而

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} |f(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M. \tag{5}$$

将 (3) 与 (5) 相加可得

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 M = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

这说明 (3) 和 (5) 必须是等式, 因而 (2) 和 (4) 必须成为等式. 于是

$$f^2(x) = \begin{cases} M^2(x-a)^2, & x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ M^2(b-x)^2, & x \in [\frac{a+b}{2}, b], \end{cases}$$

此分段函数在 $x = \frac{a+b}{2}$ 不可导, 这与 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 可导矛盾!

例 11 求证: $\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \leqslant \left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2.$

证明: 用数学归纳法容易证明 $|\sin nt| \leqslant n\sin t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 另外又有

$$|\sin nt| \leqslant 1, \quad \sin t \geqslant \frac{2t}{\pi},\ t\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

取 $a=\frac{\pi}{2n}$. 则有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt &= \int_0^{a} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt\\
&\leqslant \int_0^a tn^4\,dt + \int_a^{\pi/2} t\left(\frac{1}{2t/\pi}\right)^4 dt\\
&= \frac{1}{2}n^4a^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(\pi/2)^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}n^4a^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{a^2}-\frac{\pi^2}{8}\\
&= \left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2.
\end{aligned}$$

例 12 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微, $f(0)=0$, $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且

$$|f'(x)| \leqslant |g(x)f(x)|, \; x \in \mathbb{R}.$$

求证: $f(x) \equiv 0$.

证明: 令 $u(x) = \int_0^x |g(t)|\, dt$, 则 $u'(x) = |g(x)|$. 再令

$$h(x) = f^2(x)e^{-2u(x)}.$$

我们有

$$h'(x) = \big(2f(x)f'(x) - 2f^2(x)|g(x)|\big)e^{-2u(x)} \leqslant 0.$$

这说明 $h(x)$ 单调递减. 由于 $h(0)=0$, 有 $h(x) \leqslant 0$, $x \geqslant 0$. 但从定义知 $h(x) \geqslant 0$. 所以 $h(x)=0$, $x \geqslant 0$. 从而当 $x \geqslant 0$ 时 $f(x)=0$.

考虑函数 $f_1(x) = f(-x)$, 同上可证 $f_1(x)=0$, $x \geqslant 0$. 于是当 $x \leqslant 0$ 时也有 $f(x)=0$.