线性代数B2
第二十一讲

陈发来

2022.10.31

第三章 线性空间

§3 子空间运算

1. 子空间的交

Definition

定义1 设V是数域F上的线性空间. V_ν是V的子空间, $\nu \in I$, I是指标集. 称$\cap_{\nu\in I} V_\nu$为子空间的**交**.

Theorem

定理*1* *一族子空间的交是子空间.*

Proof.

设V_ν是V的子空间, $\nu \in I$. 显然$\theta \in \cap_{\nu\in I} V_\nu$.
对任意$\alpha, \beta \in \cap_{\nu\in I} V_\nu$, $\alpha, \beta \in V_\nu$, $\nu \in I$. 由于V_ν为子空间, 故$\alpha + \beta \in V_\nu$, $\lambda\alpha \in V_\nu$. 从而$\alpha + \beta \in \cap_{\nu\in I} V_\nu$, $\lambda\alpha \in \cap_{\nu\in I} V_\nu$. 因此$\cap_{\nu\in I} V_\nu$为子空间. □

子空间的和

子空间的并不是子空间！

Definition

定义2 设V_1与V_2是线性空间V的子空间. 称向量集合$\{\alpha+\beta\,|\,\alpha\in V_1,\ \beta\in V_2\}$ 为子空间V_1与V_2的**和**. 记为V_1+V_2.

Theorem

定理2 *设V_1, V_2是线性空间V的子空间. 则V_1与V_2的和构成V的子空间, 并且它是包含$V_1\cup V_2$的最小子空间.*

证明.

显然$\theta=\theta+\theta\in V_1+V_2$. 下设$\alpha:=\alpha_1+\alpha_2\in V_1+V_2$, $\beta:=\beta_1+\beta_2\in V_1+V_2$, 这里$\alpha_1,\beta_1\in V_1$, $\alpha_2,\beta_2\in V_2$. 由于$\alpha_1+\beta_1\in V_1$, $\alpha_2+\beta_2\in V_2$, 因此$\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1)$ $+(\alpha_2+\beta_2)\in V_1+V_2$. 另一方面, 对$\lambda\in F$, $\lambda\alpha=\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2\in V_1+V_2$. 因此$V_1+V_2$是子空间.

第三章 线性空间

接下来证明V_1+V_2是包含$V_1\cup V_2$的最小子空间. 对任意$\alpha_1\in V_1$, $\alpha_1=\alpha_1+0\in V_1+V_2$, 因此$V_1\subset V_1+V_2$. 同理$V_2\subset V_1+V_2$. 故$V_1\cup V_2\subset V_1+V_2$. 下设$W$是包含$V_1\cup V_2$ 的任意子空间, 则任意$\alpha_1\in V_1$, $\alpha_2\in V_2$, $\alpha_1,\alpha_2\in W$, 从而$\alpha_1+\alpha_2\in W$. 这说明$V_1+V_2\subset W$, 即V_1+V_2是包含$V_1\cup V_2$的最小子空间. □

子空间的和可以推广到多个子空间. 若$V_1,\ldots,V_m$是V的子空间, 则$V_1,\ldots,V_m$的和为

$$V_1+\ldots+V_m:=\{\alpha_1+\ldots+\alpha_m\,|\,\alpha_i\in V_i, i=1,\ldots,m\}.$$

易知, $V_1+\ldots+V_m$是包含$\cup_{i=1}^m V_i$的最小子空间.

第三章 线性空间

Theorem

定理3 设$V_1=\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_r\rangle$, $V_2=\langle\beta_1,\ldots,\beta_s\rangle$. 则有

$$V_1+V_2=\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s\rangle.$$

证明.

$$\begin{aligned}V_1+V_2&=\{\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\ldots+\mu_s\beta_s\}\\&=\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s\rangle.\end{aligned}$$

□

Theorem

(定理4：维数公式) 设V_1, V_2是线性空间V的子空间，则

$$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2).$$

证明.

设$\dim V_1=r$, $\dim V_2=s$, $\dim(V_1\cap V_2)=t$, $\alpha_1,\dots,\alpha_t$是$V_1\cap V_2$的一组基，则它可以分别扩充为V_1与V_2的一组基

$$\alpha_1,\dots,\alpha_t,\beta_1,\dots,\beta_{r-t},$$
$$\alpha_1,\dots,\alpha_t,\gamma_1,\dots,\gamma_{s-t}$$

于是

$$V_1+V_2=\langle\alpha_1,\dots,\alpha_t,\beta_1,\dots,\beta_{r-t},\gamma_1,\dots,\gamma_{s-t}\rangle.$$

如果$\alpha_1,\dots,\alpha_t,\beta_1,\dots,\beta_{r-t},\gamma_1,\dots,\gamma_{s-t}$线性无关，则它构成$V_1+V_2$的一组基，故$\dim(V_1+V_2)=t+(r-t)$
$+(s-t)=r+s-t$, 从而定理得证. $\square$

第三章 线性空间

下证$\alpha_1,\ldots,\alpha_t,\beta_1,\ldots,\beta_{r-t},\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-t}$线性无关。设

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_t\alpha_t+\mu_1\beta_1+\ldots+\mu_{r-t}\beta_{r-t}$$
$$+\nu_1\gamma_1+\ldots+\nu_{s-t}\gamma_{s-t}=\theta\Rightarrow$$
$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_t\alpha_t+\mu_1\beta_1+\ldots+\mu_{r-t}\beta_{r-t}$$
$$=-\nu_1\gamma_1-\ldots-\nu_{s-t}\gamma_{s-t}\in V_1\cap V_2.$$

故存在常数$\delta_1,\ldots,\delta_t$使得

$$-\nu_1\gamma_1-\ldots-\nu_{s-t}\gamma_{s-t}=\delta_1\alpha_1+\ldots+\delta_t\alpha_t.$$

移项得

$$\nu_1\gamma_1+\ldots+\nu_{s-t}\gamma_{s-t}+\delta_1\alpha_1+\ldots+\delta_t\alpha_t=\theta.$$

由于$\alpha_1,\ldots,\alpha_t,\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-t}$线性无关，必
有$\nu_1=\ldots=\nu_{s-t}=0$，进而有

$$\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_t\alpha_t+\mu_1\beta_1+\ldots+\mu_{r-t}\beta_{r-t}=\theta.$$

再由$\alpha_1,\ldots,\alpha_t,\beta_1,\ldots,\beta_{r-t}$的线性无关性
得$\lambda_1=\ldots=\lambda_t=\mu_1=\ldots=\mu_{r-t}=0$，
即$\alpha_1,\ldots,\alpha_t,\beta_1,\ldots,\beta_{r-t},\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-t}$线性无关， □

第三章 线性空间

Corollary

推论1 设V_1, V_2是线性空间V的子空间，则

$$\dim(V_1 \cap V_2) \geq \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V.$$

Corollary

推论2 设V_1, V_2是线性空间V的子空间，则

$$\dim(V_1 + V_2) \leq \dim V_1 + \dim V_2,$$

且等号成立当且仅当$V_1 \cap V_2 = \theta$.

Corollary

推论3 设$V_1, \ldots, V_k$是线性空间V的子空间，则

$$\dim(V_1 + \ldots + V_k) \leq \dim V_1 + \ldots + \dim V_k,$$

且等号成立当且仅当$(V_1 + \ldots + V_i) \cap V_{i+1} = \theta$,

$i = 1, \ldots, k-1$.

第三章 线性空间

3. 直和

设V是三维几何空间, V_1与V_2分别是过原点的平面与直线, 且直线不位于平面之内. 显然, $V = V_1 + V_2$, 并且任何向量$\alpha \in V$, α可以唯一地分解为$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 这里$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2$. 此时, 称和式$V_1 + V_2$为**直和**.

Definition

定义3 设V_1, V_2是数域F上的线性空间V的子空间. 如果任意$\alpha \in V_1 + V_2$可以唯一地写成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2.$$

称和式$V_1 + V_2$为**直和**, 记为$V_1 \oplus V_2$. 如果$V = V_1 \oplus V_2$, 则称V_1是V_2的**补空间**. 此时, V_2也是V_1的补空间.

注: 这里直和的"直"不是垂直的意思!

Theorem

定理5 设V_1, V_2是线性空间V的子空间. 则下列命题等价

1. $V_1 + V_2$为直和;
2. $\forall \alpha \in V_1 + V_2$，$\alpha$ 可唯一地表示为$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$，其中$\alpha_1 \in V_1$, $\alpha_2 \in V_2$;
3. $\theta \in V_1 + V_2$具有唯一分解$\theta = \theta + \theta$.
4. $V_1 \cap V_2 = \theta$;
5. $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$;
6. 设$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$是$V_1$的一组基, $\beta_1, \ldots, \beta_s$是V_2的一组基, 则$\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s$构成$V_1 + V_2$的一组基.

证明.

$2 \Rightarrow 3$. 显然. $3 \Rightarrow 2$. 设$\alpha \in V_1 + V_2$有两种不同的表示 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$, 则$\theta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2)$. 这与$\theta$的唯一分解矛盾!

第三章 线性空间

$3 \Rightarrow 4$ 若$V_1 \cap V_2 \neq \theta$, 任取非零向量$\beta \in V_1 \cap V_2$, 则$\theta = \beta + (-\beta) = \theta + \theta$. 这与$\theta$的唯一分解矛盾. 因此$V_1 \cap V_2 = \theta$.

$4 \Rightarrow 3$. 设θ的分解不唯一, 则存在$\beta \neq \theta$使得$\theta = \beta + (-\beta)$, $\beta \in V_1 \cap V_2$. 这与$V_1 \cap V_2 = \theta$矛盾.

$4 \Leftrightarrow 5$. 由推论2立即得到.

$5 \Rightarrow 6$. 设$\alpha_1, \dots, \alpha_r$是$V_1$的基, $\beta_1, \dots, \beta_s$是V_2的基. 则有

$$V_1 + V_2 = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \rangle.$$

由$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$知$\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $\beta_1, \dots, \beta_s$构成$V_1 + V_2$的一组基.

$6 \Rightarrow 5$. 结论显然.

$\square$

第三章 线性空间

类似地，可以定义$V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$. 此时称$V_1, \ldots, V_k$ **线性无关**.

Theorem

定理6 设$V_1, \ldots, V_k$是线性空间V的子空间. 则下列命题等价

1. $V_1 + \ldots + V_k$为直和;
2. $\forall \alpha \in V_1 + \ldots + V_k$, α 可唯一地表示为$\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$, 其中$\alpha_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, k$;
3. $\theta \in V_1 + \ldots + V_k$具有唯一分解$\theta = \theta + \ldots + \theta$;
4. $(V_1 + \ldots + V_i) \cap V_{i+1} = \theta$, $i = 2, \ldots, k$;
5. $\dim(V_1 + \ldots + V_k) = \dim V_1 + \ldots + \dim V_k$;
6. 设M_i是V_i的一组基, $i = 1, \ldots, k$, 则$\cup_{i=1}^{k} M_i$构成$V_1 + \ldots + V_k$的一组基.

第三章 线性空间

设$V_1,\dots,V_k$是数域F上的线性空间. 称

$$V_1\times\ldots\times V_k=\{(\alpha_1,...,\alpha_k)\,|\,\alpha_i\in V_i\}$$

为$V_1,\dots,V_k$的**笛卡尔积**. 定义线性运算

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_k)+(\beta_1,\dots,\beta_k)=(\alpha_1+\beta_1,\dots,\alpha_k+\beta_k)$$
$$\lambda(\alpha_1,\dots,\alpha_k)=(\lambda\alpha_1,\dots,\lambda\alpha_k)$$

在上述运算下, $V_1\times\ldots\times V_k$构成一个线性空间.

引入

$$\tilde{V}_i=\{0,\dots,\alpha_i,\dots,0)\,|\,\alpha_i\in V_i\}\subset V_1\times\ldots\times V_k.$$

则

$$V_1\times\ldots\times V_k=\tilde{V}_1\oplus\ldots\oplus\tilde{V}_k,$$

并且$\tilde{V}_i\sim V_i$. 因此(在同构意义下)

$$V_1\times\ldots\times V_k=V_1\oplus\ldots\oplus V_k.$$

称$V_1\times\ldots\times V_k$为**外直和**. 而$V_1\oplus\ldots\oplus V_k$为**内直和**.

第三章　线性空间

Example

例1 设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$V_1$是$A$的行空间，$V_2$是$A$的零空间．证明：$\mathbb{R}^n=V_1\oplus V_2$．

证明.

显然V_1,V_2都是$\mathbb{R}^n$的子空间．下证$V_1\cap V_2=\theta$．
实际上，设$\mathbf{x}\in V_1\cap V_2$．用$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m$表示$A$的$m$行．则

$$\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{a}_1+\ldots+\lambda_m\mathbf{a}_m=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)A$$

$$A\mathbf{x}^T=AA^T(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)^T=0.$$

于是

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^T=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)AA^T(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)^T=0.$$

从而$\mathbf{x}=0$，即$V_1\cap V_2=\theta$．进而
$\dim(V_1+V_2)=\mathsf{rank}(A)+(n-\mathsf{rank}(A))=n$.
故$\mathbb{R}^n=V_1+V_2$．而$V_1\cap V_2=\theta$．因此$\mathbb{R}^n=V_1\oplus V_2$． □

Example (例2)

设V_1, V_2, V_3是有限维线性空间V的子空间. 证明:

$$\dim(V_1+V_2+V_3) \le \dim(V_1)+\dim(V_2)+\dim(V_3)-\dim(V_1\cap V_2)$$
$$-\dim(V_2\cap V_3)-\dim(V_3\cap V_1)+\dim(V_1\cap V_2\cap V_3).$$

证明.

$$\dim(V_1+V_2+V_3)=\dim(V_1)+\dim(V_2+V_3)-\dim(V_1\cap(V_2+V_3))$$
$$=\dim(V_1)+\dim(V_2)+\dim(V_3)-\dim(V_2\cap V_3)-\dim(V_1\cap(V_2+V$$

结合我们的目标, 我们只需证

$$\dim(V_1\cap V_2)+\dim(V_1\cap V_3)-\dim(V_1\cap V_2\cap V_3)$$
$$\le \dim(V_1\cap(V_2+V_3)).$$

第五章 线性空间

上式左边为$\dim(V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3)$, 因此只需证

$$V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3 \subset V_1 \cap (V_2 + V_3).$$

实际上设$\gamma = \alpha + \beta \in V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3$, $\alpha \in V_1 \cap V_2$, $\beta \in V_1 \cap V_3$. 则$\alpha \in V_1, V_2$, $\beta \in V_1, V_3$. 于是

$$\gamma = \alpha + \beta \in V_1, \quad \gamma = \alpha + \beta \in V_2 + V_3.$$

因此, $\gamma \in V_1 \cap (V_2 + V_3)$, 即

$$V_1 \cap V_2 + V_1 \cap V_3 \subset V_1 \cap (V_2 + V_3).$$

□

第五章 线性空间

Example

例3 设V_1, V_2, V_3是V的子空间. 证明:

$$(V_1+V_2)\cap(V_1+V_3)=V_1+(V_1+V_2)\cap V_3.$$

证明.

由$V_1\subset V_1+V_2$, $V_1\subset V_1+V_3$, 故$V_1\subset(V_1+V_2)\cap(V_1+V_3)$.
另一方面, 显然有$(V_1+V_2)\cap V_3\subset(V_1+V_2)\cap(V_1+V_3)$.
故$V_1+(V_1+V_2)\cap V_3\subset(V_1+V_2)\cap(V_1+V_3)$.
反过来, 设$\alpha\in(V_1+V_2)\cap(V_1+V_3)$.
则$\alpha=\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\gamma_2$, $\alpha_1,\alpha_2\in V_1$, $\beta_1\in V_2$, $\gamma_2\in V_3$.
于是$\alpha-\alpha_2=(\alpha_1-\alpha_2)+\beta_1=\gamma_2\in(V_1+V_2)\cap V_3$.
进而$\alpha\in V_1+(V_1+V_2)\cap V_3$.
即$(V_1+V_2)\cap(V_1+V_3)\subset V_1+(V_1+V_2)\cap V_3$.

$\square$

第五章 线性空间

Example

例4 设V是数域F上的n维线性空间, $S_1,\ldots,S_k$是V的m $(m<n)$维子空间. 证明: 存在V的$n-m$维子空间T使得$V=S_i\oplus T$, $i=1,\ldots,k$.

证明.

存在$\alpha_1\notin\cup_{i=1}^k S_i$. 记$S_i^1=\langle S_i,\alpha_1\rangle$, 则$\dim S_i^1=m+1$.
若$m+1=n$, 令$T=\langle\alpha_1\rangle$, 则$V=S_i\oplus T$, $i=1,\ldots,k$.
否则存在$\alpha_2\notin\cup_{i=1}^k S_i^1$, 记$S_i^2=\langle S_i^1,\alpha_2\rangle$, 则$\dim S_i^2=m+2$.
若$m+2=n$, 令$T=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle$, 则$V=S_i\oplus T$. 上述过程不断进行下去, 最终可以找到$T=\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-m}\rangle$使得
$V=S_i\oplus T$, $i=1,\ldots,k$. □

第五章 线性空间

课堂练习

1 设V中的向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关，并且可以被向量组$\beta_1,\cdots,\beta_n$线性表示. 证明:
(1) $m\le n$; (2) 可以用$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$替换$\beta_1,\cdots,\beta_n$中的m个向量，不妨设为$\beta_1,\cdots,\beta_m$，使得
$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_{m+1},\cdots,\beta_n$与$\beta_1,\cdots,\beta_n$等价.

2 设$V=F^{2n}$,
$V_1=\{(a_1,\ldots,a_{2n})\,|\,a_i=a_{i+n},1\le i\le n\}$,
$V_2=\{(a_1,\ldots,a_{2n})\,|\,a_i=-a_{i+n},1\le i\le n\}$.
证明:V_1,V_2是V的子空间，且$V=V_1\oplus V_2$.

3 设V_1,V_2,V_3是线性空间V的子空间. 证明:
$V_1\cap(V_2+V_1\cap V_3)=V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$.
并举例说明等式$V_1\cap(V_2+V_3)=V_1\cap V_2+V_1\cap V_3$不一定成立.

作业：§2.7: 1,3,5.