近世代数作业题

叶郁班

Contents

0.1 第一次作业

1: 对于任何集合 X, 我们用 id_X 表示 X 到自身的恒等映射. 设 $f: A \to B$ 是集合间的映射,A 是非空集合. 试证:

(1) f 是单射当且仅当存在 $g: B \to A$, 使得 $g \circ f = id_A$;
(2) f 是满射当且仅当存在 $h: B \to A$, 使得 $f \circ h = id_B$;
(3) f 是双射当且仅当存在唯一的 $g: B \to A$, 使得 $f \circ g = id_B, g \circ f = id_A$;
(4) 分别举例说明 (1)(2) 不唯一.

2: 设 $P(A)$ 是集合 A 的全部子集所构成的集族,$M(A)$ 为所有 A 到集合 $\{0,1\}$ 的映射构成的集合. 试构造 $P(A)$ 到 $M(A)$ 的双射. 特别的, 如 A 为有限集, 试证 $|P(A)| = 2^{|A|}$, 换言之,n 元集共有 2^n 个子集.

3: 证明等价关系的三个条件是互相独立的, 即: 已知任意两个条件不能推出第三个条件.

4: 设集合 A 中关系满足对称性和传递性, 且 A 中任意元素都和某个元素有关系, 证明此关系为等价关系.

5: 证明容斥原理:

$$|A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{\{i_1, \cdots, i_j\} \subset \{1,2,\cdots,n\}} |A_{i_1} \bigcap \cdots \bigcap A_{i_j}|$$

其中 $A_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 为某个固定集合 U 的有限子集.

补充 (粗略, 选做):
下面是集合论中三个等价的著名定理 (在集合论的 ZF 公理系统之下):
(1):Zorn 引理: 令 $(A, \leq)$ 是一个偏序集. 若 A 的每一链 S 在 A 中都有上界，即:

$$\exists a \in A, \forall s \in S, s \leq a,$$

则 A 有极大元.
(2): 选择公理: 令 $T = \{A_i | i \in I\}$ 为一族非空集合. 则存在映射:

$$\phi : T \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$A_i \longrightarrow \phi(A_i) \in A_i.$$

称 ϕ 为一选择函数.
(3): 任何集合上都可以定义起一个良序 (称一偏序集 $(A, \leq)$ 为良序集，或称偏序 $\leq$ 为一个良序，如果 A 的任意非空子集关于 $\leq$ 有最小元).

6: 利用 Zorn 引理或者良序公理证明非空集合 A 上存在极大偏序 (称 A 上的偏序 α 为一极大偏序，如果关于 A 上的任一偏序 β,$\alpha \subset \beta$ 蕴含着 $\alpha = \beta$，即将 A 上的一个二元关系看成是 $A \times A$ 的子集).

7: 尝试寻找实数集 $\mathbb{R}$ 上的一个良序.

8: 令 $T=\{A_i|i\in I\}$ 是一族非空集合，证明 $\prod_{i\in I}A_i$ 非空，其中:

$$\prod_{i\in I}A_i=\{f:I\to\bigcup_{i\in I}A_i|\forall i\in I,f(i)\in A_i\}$$

. 反之是否成立？即 $\prod_{i\in I}A_i$ 非空，则 T 有选择函数.