微分方程

Fourier变换及应用

内容：

- Fourier变换的定义与起源
- Fourier变换的意义
- Fourier变换到底是啥?
  - 欧拉公式的三维表示
  - 几个三角函数的组合
  - 时域与频域
  - 在信号处理方面的应用
  - 在图像处理方面的应用
- 相似性质
- 卷积性质
- Fourier变换的应用

1.Fourier变换的定义,起源与基本性质:

对$\forall f(\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^n)$,定义

$$F[f(x)](\xi)=\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx,\ \xi\in\mathbb{R}^n\ (n=1\text{时常用}\lambda)$$ "Fourier变换"

$$F^{-1}[f(\xi)](x)=\check{f}(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,\ x\in\mathbb{R}^n$$ "Fourier逆变换"

应用:Fourier变换在图像处理、信号处理、量子力学、声学、光学、结构动力学、数论、概率论、统计学、密码学、海洋学、通讯、金融等领域都有着广泛应用,也是小波变换的基础

Fourier变换的真正目的是简化运算!

起源:1807年Fourier在向法国科学院提交一篇关于热传导问题的论文中声称任一函数都能够展成三角函数的无穷级数。这篇论文经 Lagrange, Laplace, Legendre等著名数学家审查,但由于Lagrange的强烈反对,该论文未被通过,直到1822年才发表在《热的分析理论》一书中。

基本性质：

1°.线性：$\widehat{c_1 f + c_2 g} = c_1 \hat{f} + c_2 \hat{g},\ c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

2°.共轭：$\hat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$

3°.微分：$\widehat{D^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi),\ \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$多重指标

4°.幂乘：$\widehat{x^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$

5°.平移：$\widehat{f(x - x_0)}(\xi) = e^{-ix_0 \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$

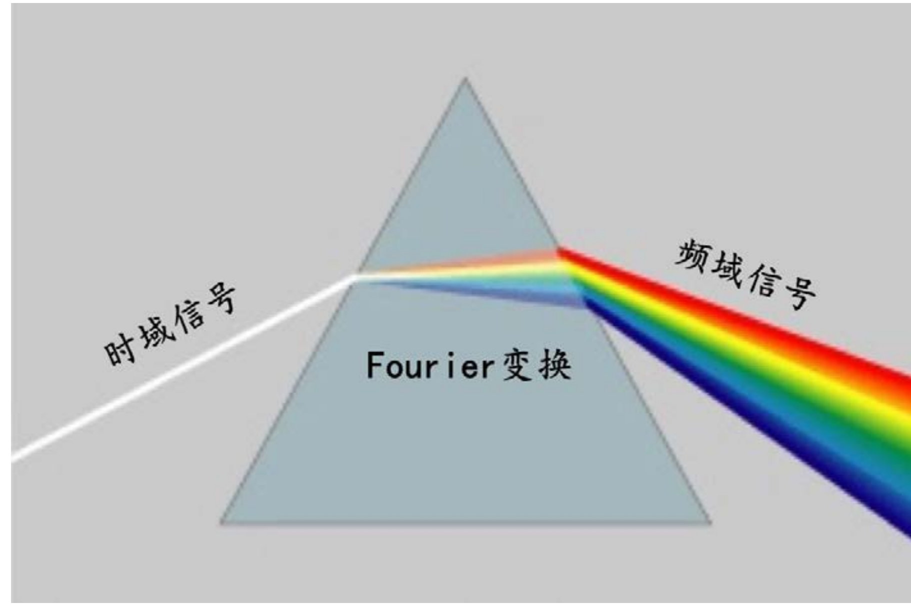
6°.相似：$\widehat{f(ax)}(\xi) = |a|^{-n}\ \hat{f}(a^{-1}\xi)$

7°.卷积：$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$

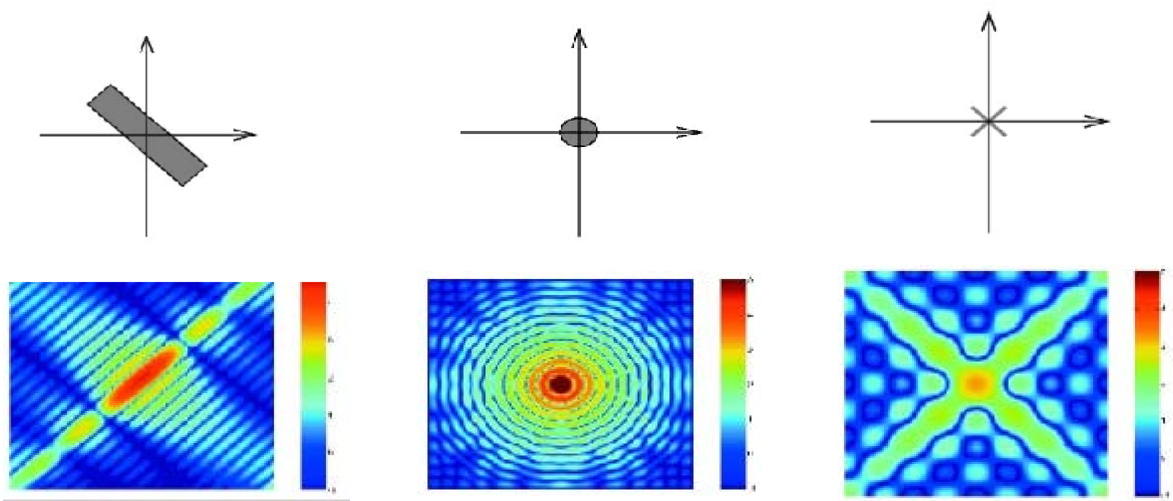
8°.反演：$f = \check{\hat{f}}$ $(L^2(\mathbb{R}^n)$上的线性同构)

2.Fourier变换的意义：

Fourier变换好比一个玻璃棱镜，可以将光分成不同颜色的物理仪器，每个成分的颜色由波长决定。Fourier变换也可看做是“数学中的棱镜”，将函数基于频率分成不同的成分

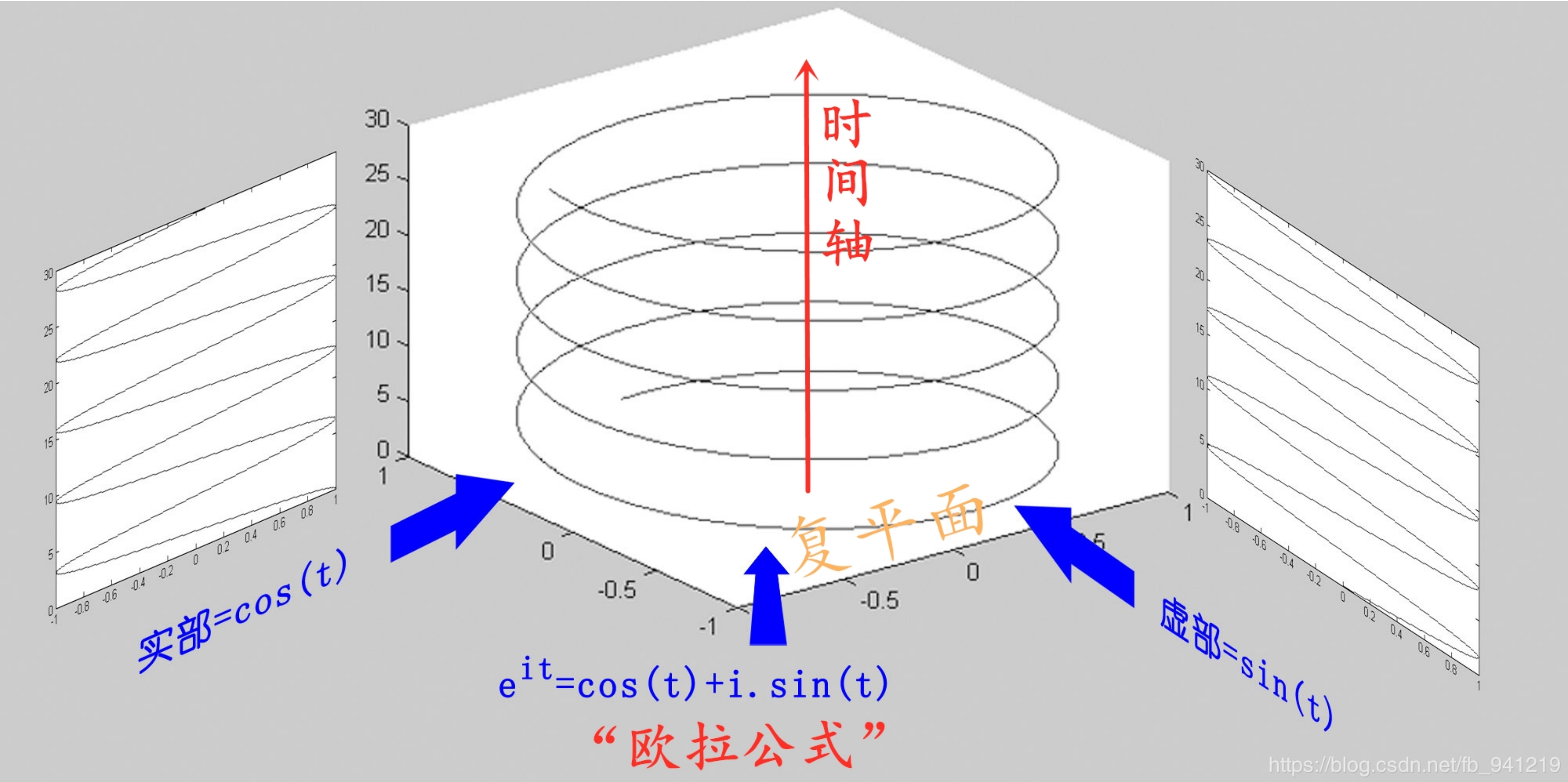


一些图像的二维**Fourier**变换：

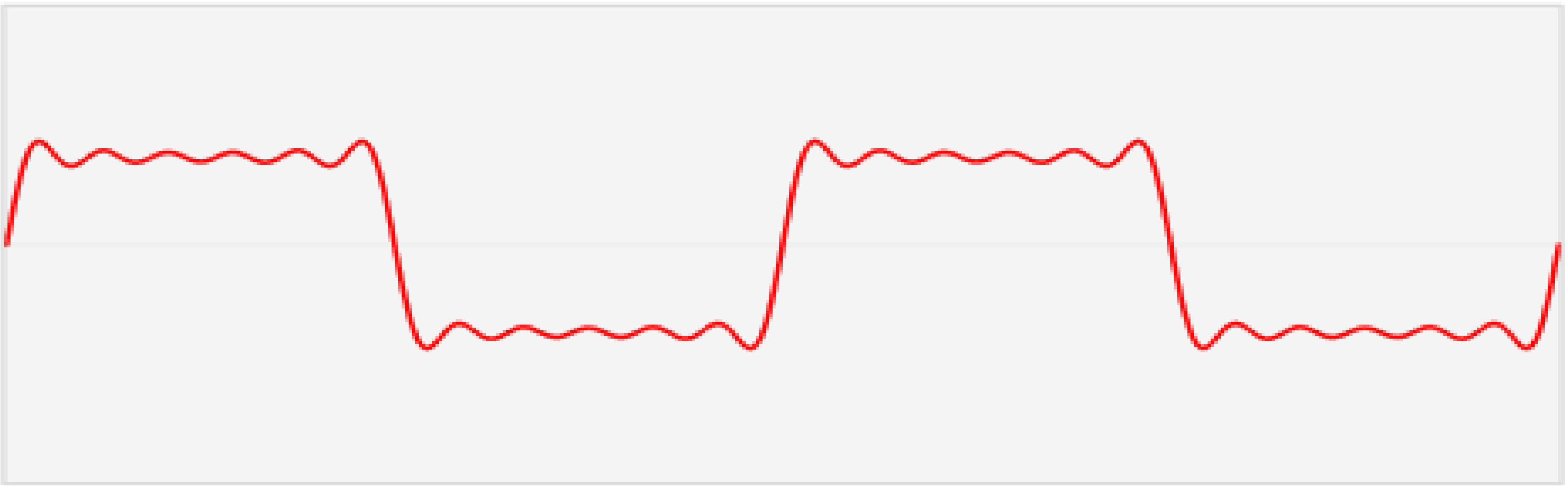


3.Fourier变换到底是啥?

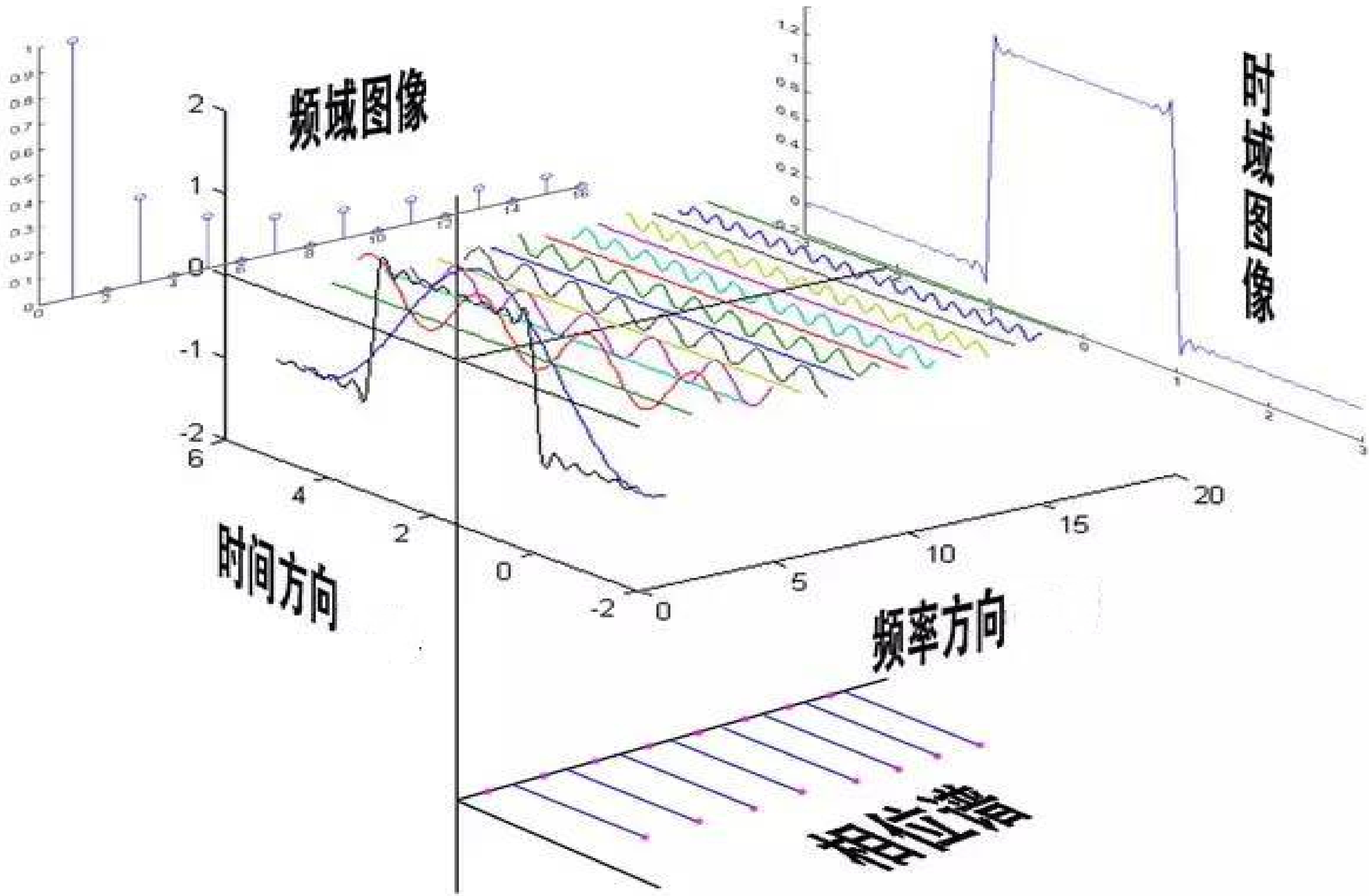
3.1 欧拉公式的三维表示:



3.2 几个三角函数的组合：

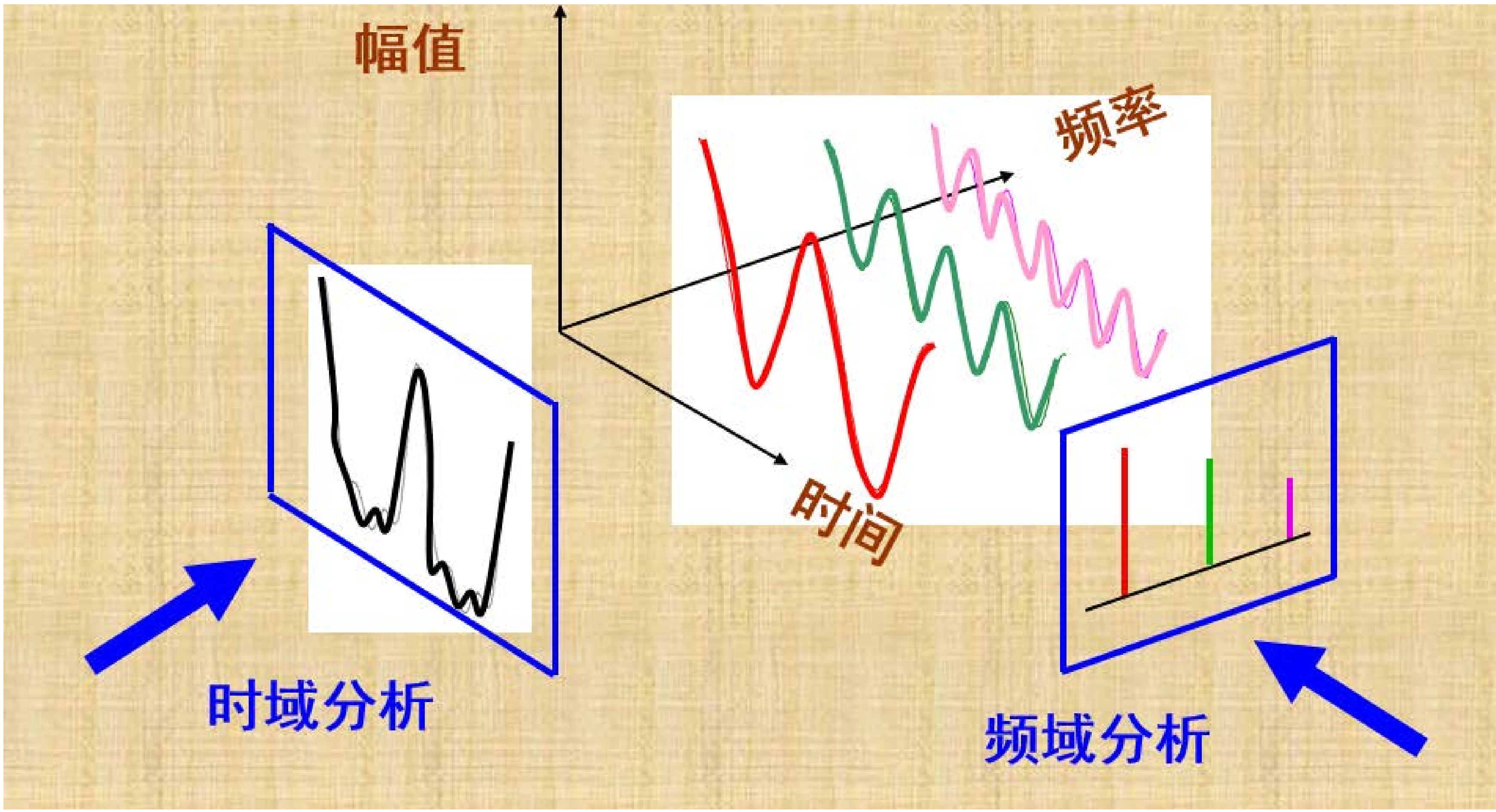


3.3 时域与频域:



3.4 在信号处理方面的应用:

信号频谱$\hat{f}$代表了信号在不同频率分量成分的大小，能够提供比时域信号波形更直观，丰富的信息



例：矩形脉冲信号

$$f(x)=\begin{cases}E, & |x|\le\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & |x|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

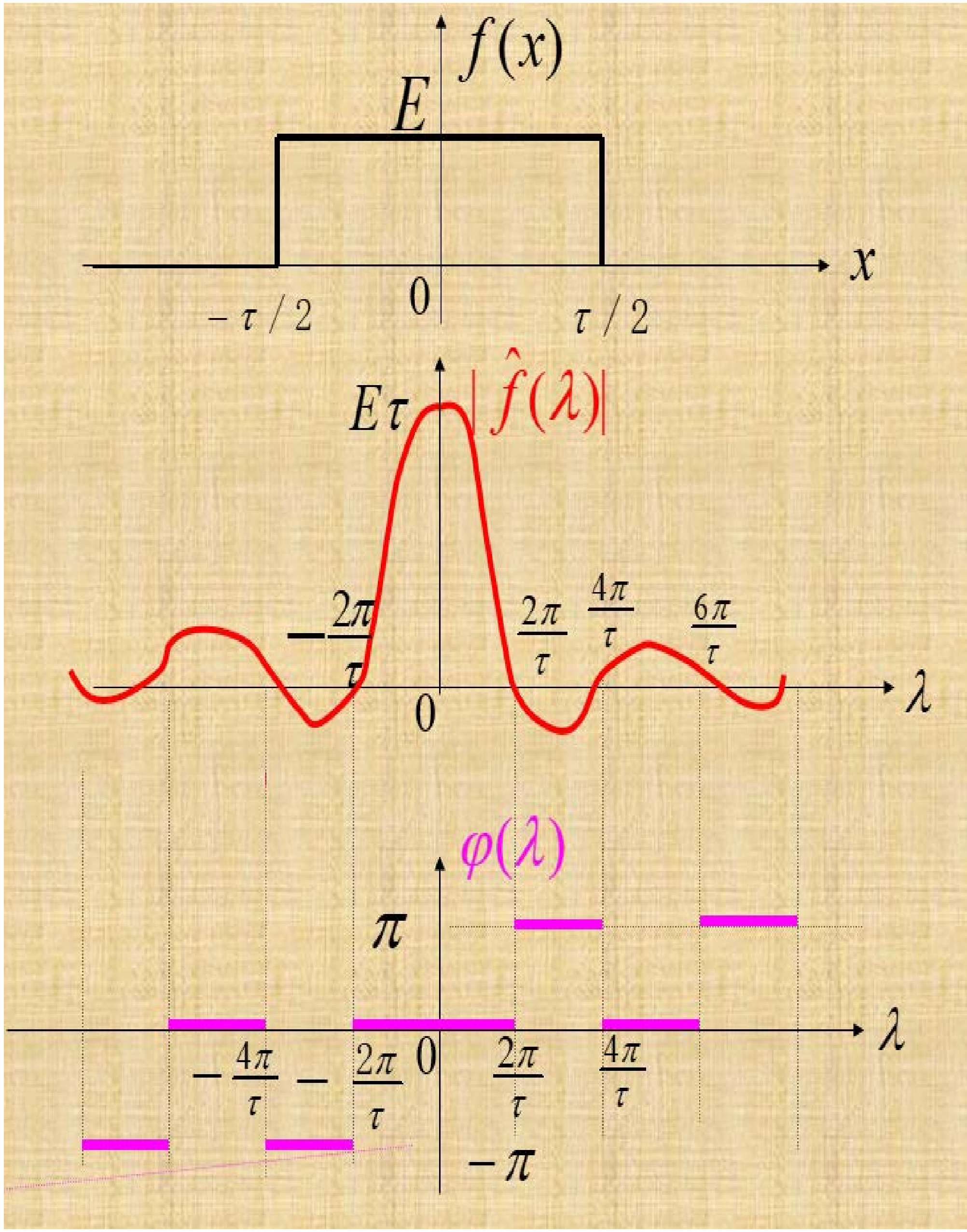
$$\hat{f}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix\lambda}dx=E\tau\,\mathrm{sin}\,c\frac{\lambda\tau}{2}$$

幅度频谱：

$$|\hat{f}(\lambda)|=E\tau\left|\mathrm{sin}\,c\frac{\lambda\tau}{2}\right|$$

相位频谱：

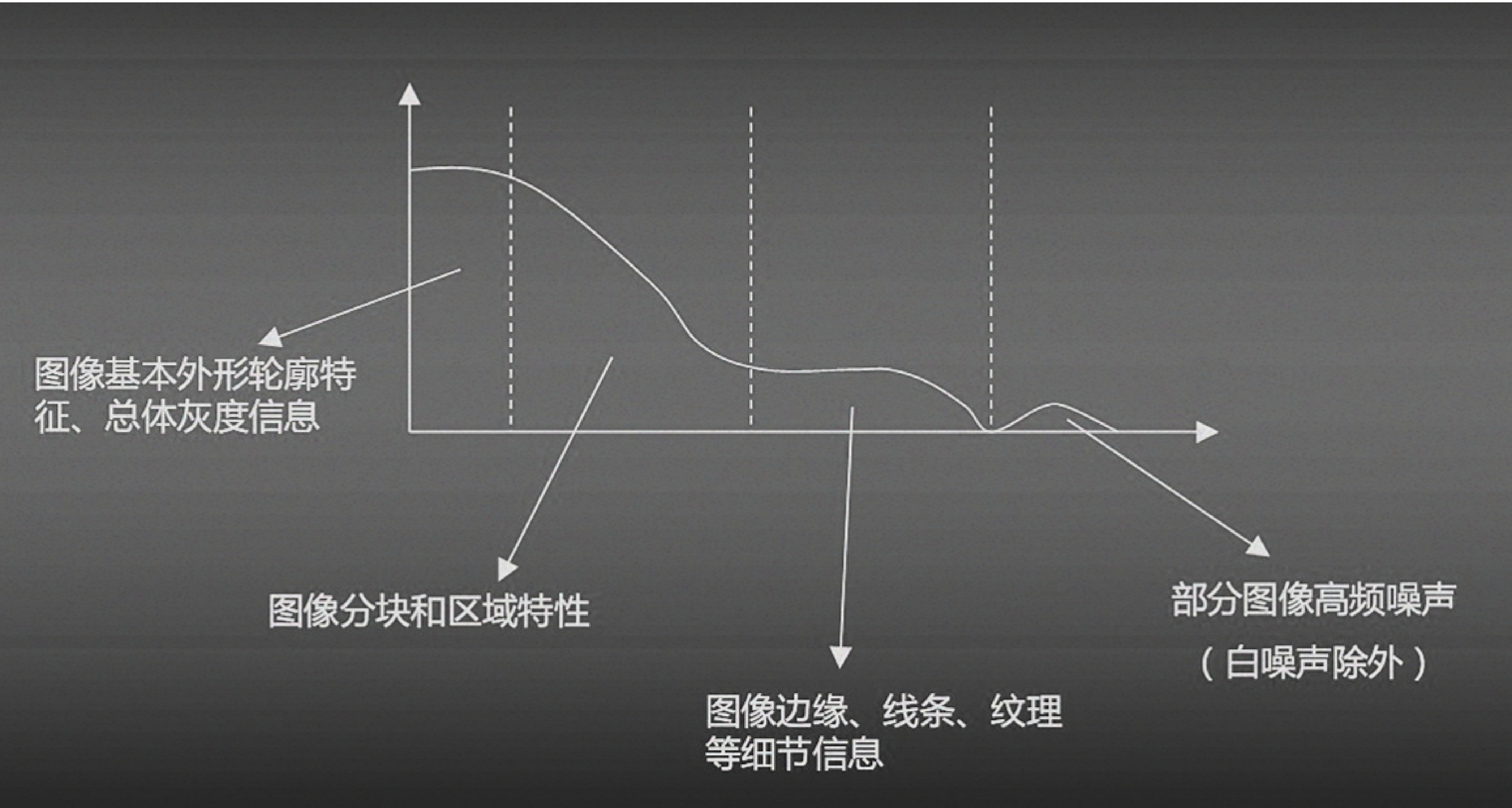
$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}0, & \dfrac{4k\pi}{\tau}<|\lambda|<\dfrac{2(2k+1)\pi}{\tau}\\ \pi, & \dfrac{2(2k+1)\pi}{\tau}<|\lambda|<\dfrac{4(k+1)\pi}{\tau}\end{cases}$$



3.5 在图像处理方面的应用：

为什么要做图像变换？ FT → 大部分能量都分布于低频谱段，这对以后图象的压缩、传输都比较有利，从而使得运算次数减少，节省时间。

图像信号的频域模型：



图像处理技术示意图：

图像空间域 $\xrightarrow{\text{正变换}}$ 图像频域 $\xrightarrow{\text{逆变换}}$ 图像空间域

- 图像的Fourier变换
- 图像的余弦变换
- 图像的Walsh变换
- 图像的K-L变换
- 图像的小波变换

处理起来

- 更有效
- 更方便
- 更快捷

……

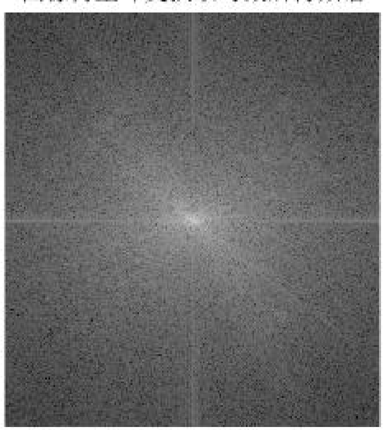
例：不同图像的Fourier变换

原图像

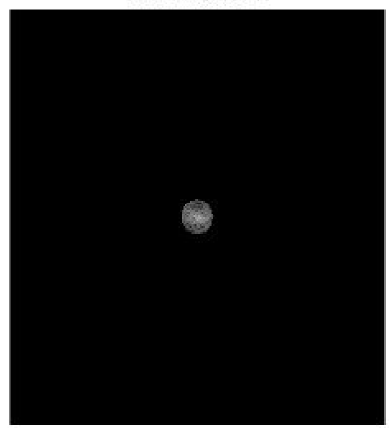
低通滤波所得图像

高通滤波所得图像

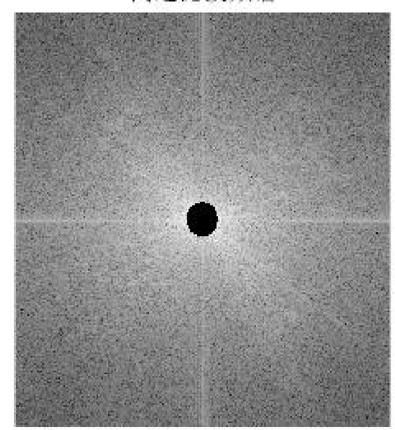
图像傅里叶变换取对数所得频谱



低通滤波频谱



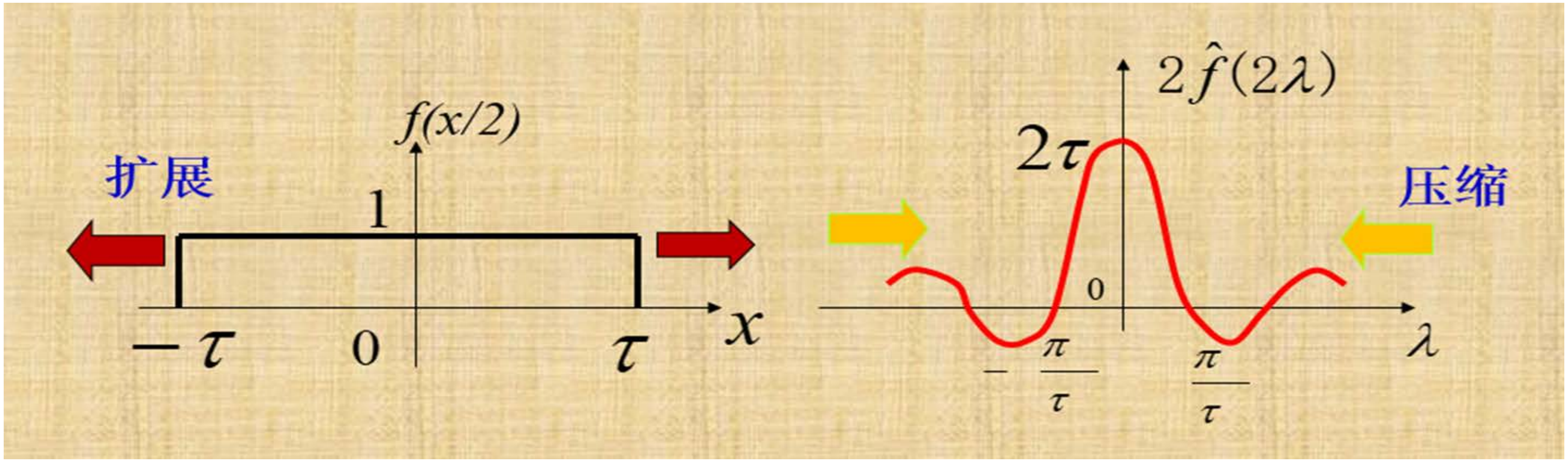
高通滤波频谱

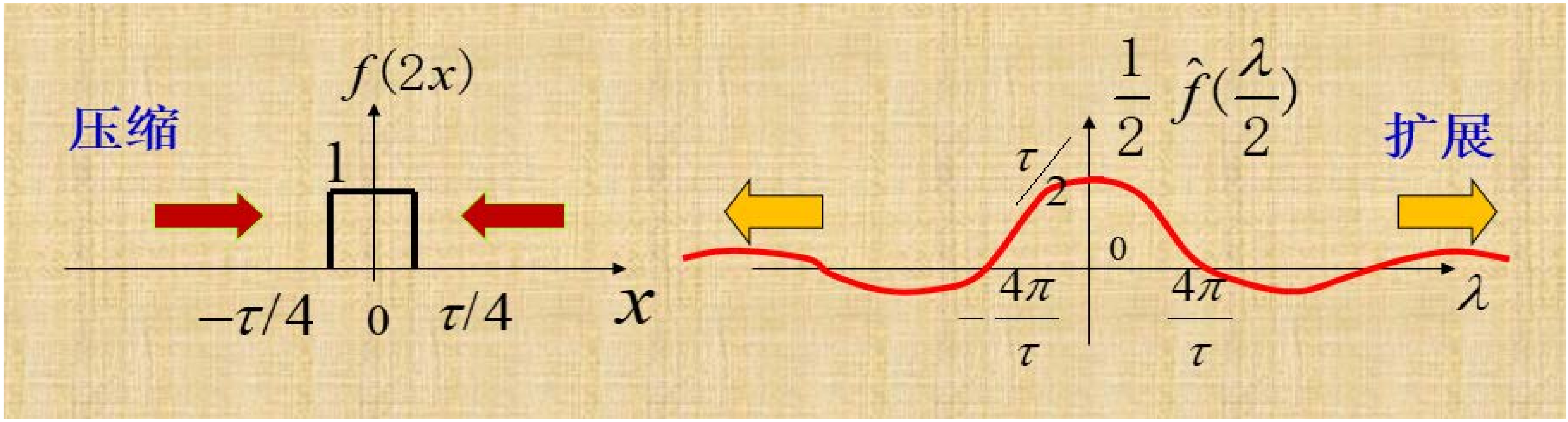


4.Fourier变换的相似性质： $F[f(ax)]=|a|^{-1}\hat{f}(a^{-1}\lambda)$

时域中的扩展(压缩)等于频域中的压缩(扩展)

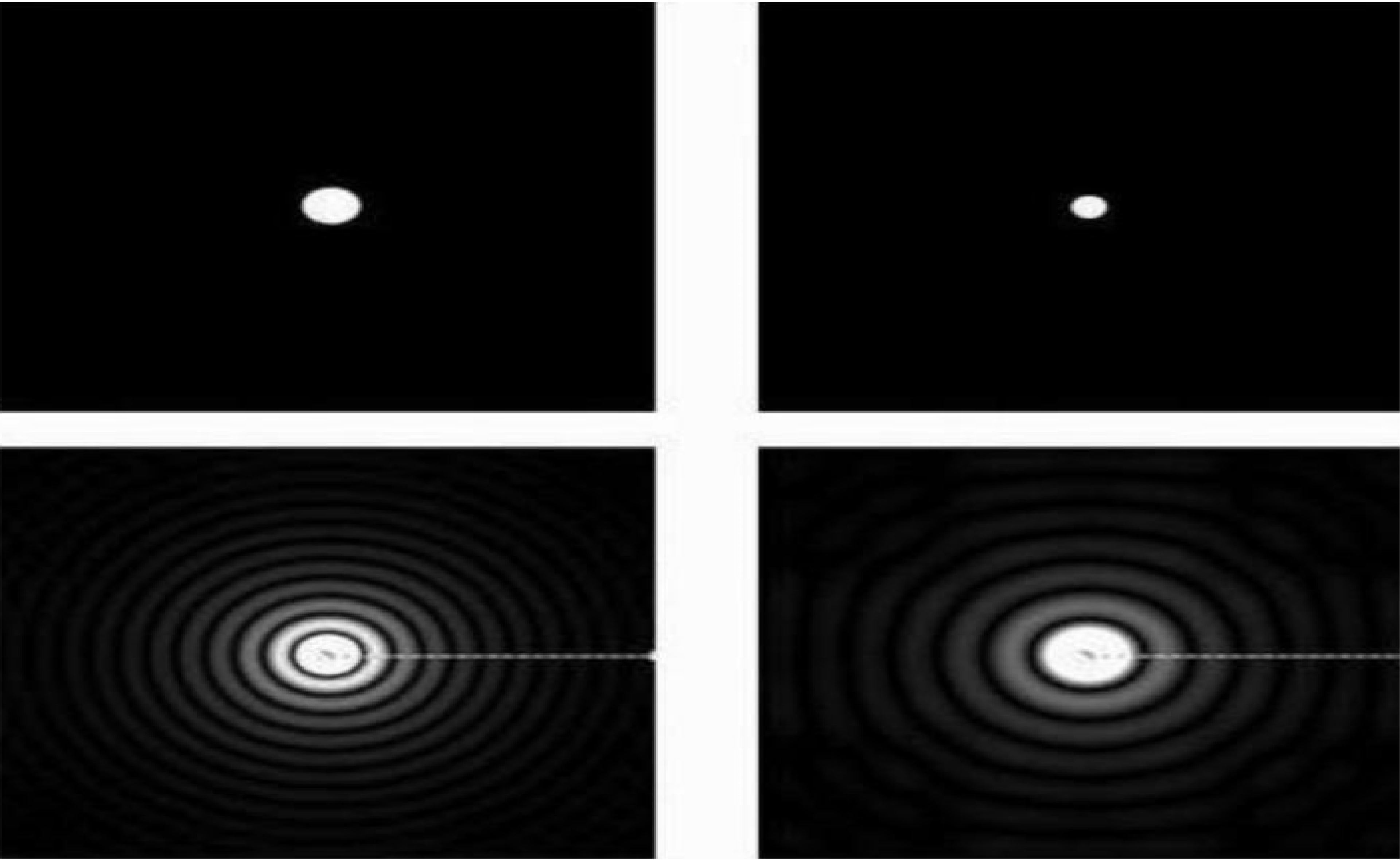
例1：一维Fourier变换





例2：二维Fourier变换

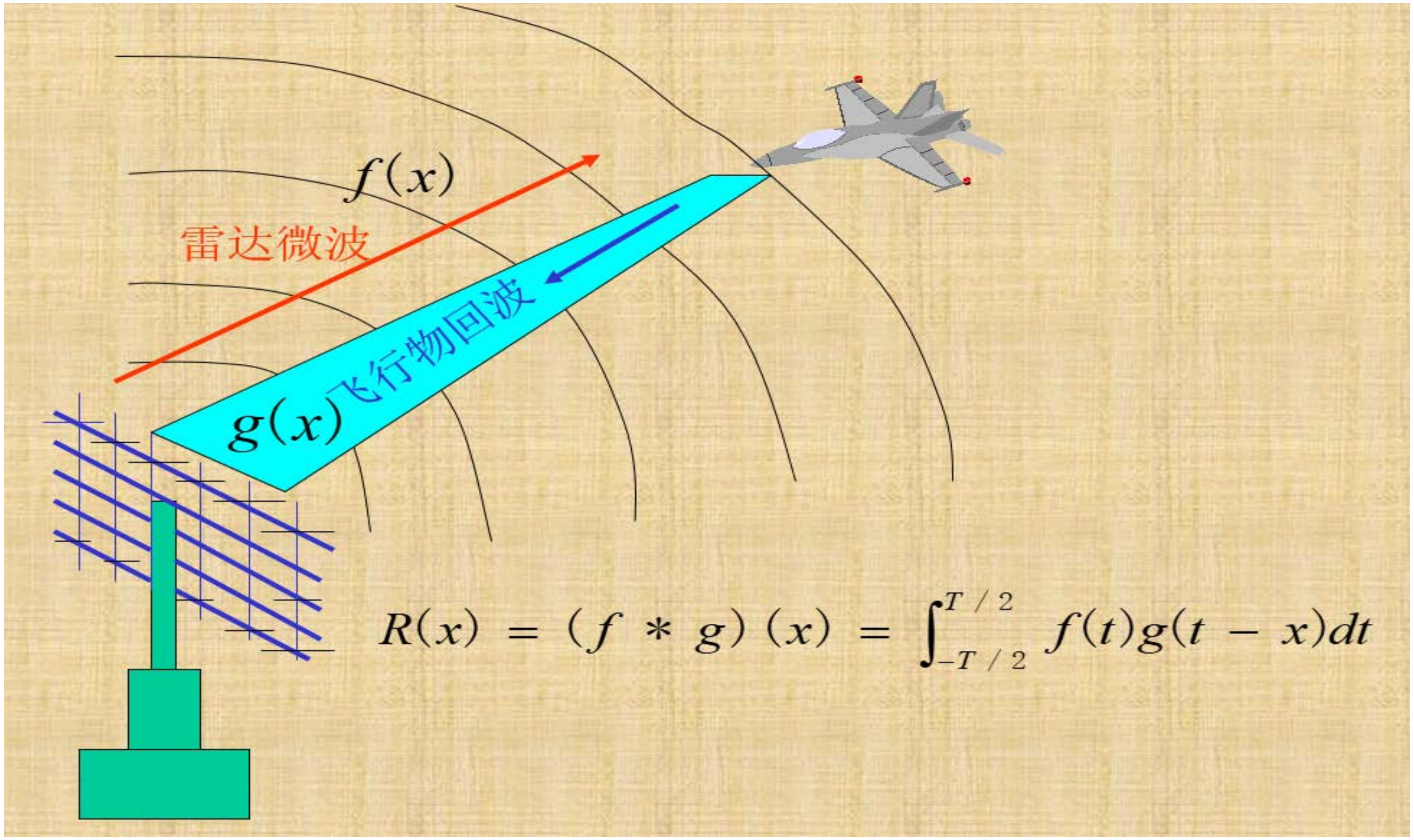
小(大)圆经过Fourier变换后其圆环变大(小)



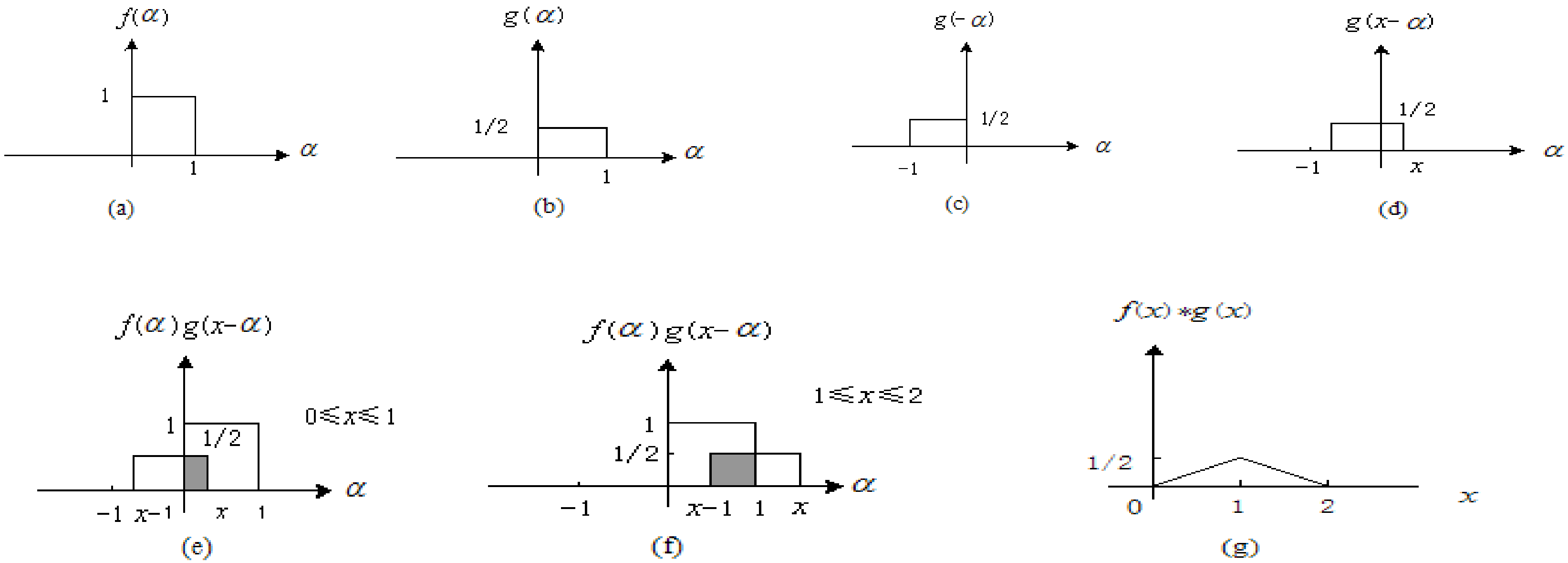
5.Fourier变换的卷积性质：

$$\boxed{F[f*g](\lambda)=\hat{f}(\lambda)\hat{g}(\lambda),\ (f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy}$$

一维卷积示意图：



例： $f(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le 1\\ 0, 其它\end{cases}$， $g(x)=\begin{cases}1/2, 0\le x\le 1\\ 0, 其它\end{cases}$



$$f(x)*g(x)=\begin{cases}x/2 & 0\le x\le 1\\ 1-x/2 & 1\le x\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$$

6.Fourier变换的应用：

例. 求解非齐次三维波动方程初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u + f(x,t),\ x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), u_t\big|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解. 定义波动方程的基本解 $U(x,t)$：
$$\begin{cases} U_{tt} = c^2 \Delta U,\ x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ U\big|_{t=0} = 0, U_t\big|_{t=0} = \delta(x) \end{cases}$$

则可以直接验证 （卷积$f(x) * g(x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(x-y) g(y) dy$）

$$u(x,t) = U(x,t) * \psi(x) + \partial_t [U(x,t) * \varphi(x)] + \int_0^t U(x,t-\tau) * f(x,\tau) d\tau$$

对 $\begin{cases} U_{tt} = c^2 \Delta U \\ U\big|_{t=0} = 0, U_t\big|_{t=0} = \delta(x) \end{cases}$ 作关于空间变量的**Fourier**变换，有

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 \hat{U}}{dt^2} = -c^2 \rho^2 \hat{U}, \rho = |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \\ \hat{U}\big|_{t=0} = 0, \hat{U}_t\big|_{t=0} = \hat{\delta} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{U}(\xi,t)=\frac{\sin(c\rho t)}{c\rho},$$

$$\therefore\ U(x,t)$$

$$=F^{-1}[\hat{U}]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\sin(c\rho t)}{c\rho}e^{ix\cdot\xi}d\xi$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{+\infty}d\rho\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}\frac{\sin(c\rho t)}{c\rho}e^{ir\rho\cos\theta}\rho^2\sin\theta d\varphi \quad (\text{球坐标变换}, r=|x|)$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 c}\int_0^{+\infty}\sin(c\rho t)\frac{-e^{ir\rho\cos\theta}}{ir}\Big|_0^{\pi}d\rho=\frac{1}{2\pi^2 cr}\int_0^{+\infty}\sin(c\rho t)\sin(r\rho)d\rho \quad (\text{欧拉公式})$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 cr}\int_0^{+\infty}[\cos\rho(r-ct)-\cos\rho(r+ct)]d\rho=\frac{1}{8\pi^2 cr}\int_{-\infty}^{+\infty}[e^{i\rho(r-ct)}-e^{i\rho(r+ct)}]d\rho$$

$$=\frac{1}{4\pi cr}[\delta(r-ct)-\delta(r+ct)]=\frac{\delta(r-ct)}{4\pi cr} \quad (\because F^{-1}[1]=\delta, r\geq 0, c>0, t>0)$$

令 $S_r(x)$ **为半径** r **球心在** x **的球面，现取** $r=|x-y|$, **则对** $\forall g(x)$,
利用卷积和$\boldsymbol{\delta}$函数**的定义，有**

$$U(x,t)*g(x)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\delta(|x-y|-ct)}{4\pi c|x-y|}g(y)dy=\frac{1}{4\pi c}\int_0^{+\infty}\frac{\delta(r-ct)}{r}[\int_{S_r(x)}g(y)dS(y)]dr$$

$$=\frac{1}{4\pi c}\frac{1}{ct}\int_{S_{ct}(x)}g(y)dS(y)=\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(x)}g(y)dS(y)$$

$$u(x,t)=U(x,t)*\psi(x)+\partial_t[U(x,t)*\varphi(x)]+\int_0^t U(x,t-\tau)*f(x,\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(x)}\psi(y)dS(y)+\partial_t[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{S_{ct}(x)}\varphi(y)dS(y)]$$

$$+\int_0^t\frac{1}{4\pi c^2(t-\tau)}\int_{S_{c(t-\tau)}(x)}f(y,\tau)dS(y)d\tau$$

(Kirchhoff公式)

推迟势