思考题讨论

- 思考题7.4 用$\mathcal{E}=-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$和$\mathcal{E}=\int(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$计算动生电动势必然一致吗？

思考题7.4讨论

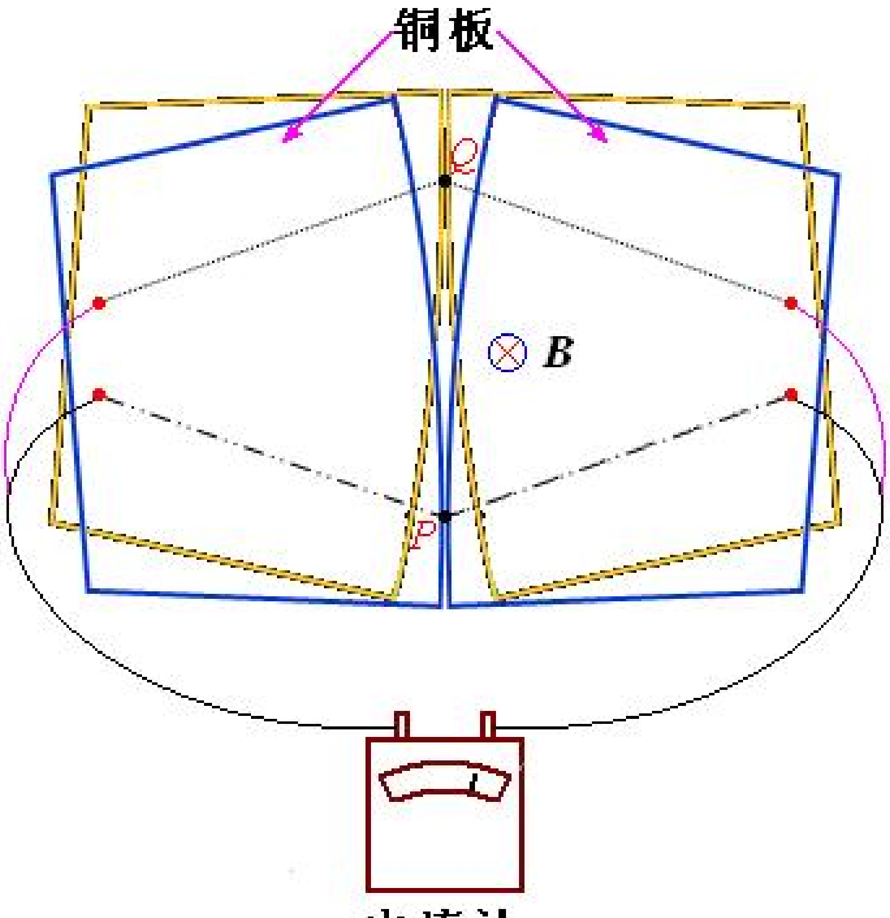
$$\mathcal{E}=-\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$$

vs

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B}),$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$$

谁更基本？



第7章小结

能量守恒→楞次→ 方向

法拉第电磁感应定律

洛仑兹力→动生电动势　感生电动势←涡旋电场

自感与互感

串联　并联

顺接　反接　同名端并接　异名端并接

似稳条件

稳恒电路

似稳电路 →*RC*、*RL*、*RLC*暂态电路

第二十六讲 2022-06-02
第8章 磁能

§8.1 载流线圈系统的磁能

§8.2 载流线圈在外磁场中的磁能

§8.3 磁能的能量和磁能密度

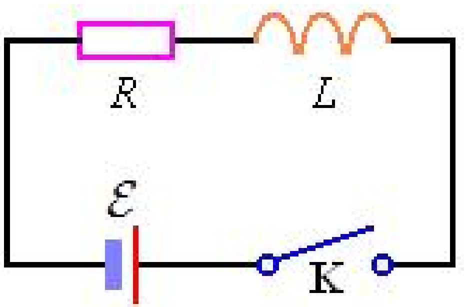
§8.4 非线性介质及磁滞损耗

§8.5 利用磁能求磁力

8.1 载流线圈系统的磁能

1. 单个载流线圈的磁能

1) RL串联电路，K合上充电，暂态过程方程为



$$\mathcal{E}-L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t=IR\ ,$$

上式两端同乘$I\mathrm{d}t$并适当移项得

$$\mathcal{E}I\mathrm{d}t=I^2R\mathrm{d}t+LI\mathrm{d}I.$$

$\mathcal{E}I\mathrm{d}t$为电源在$\mathrm{d}t$内所做总功，其中的$I^2R\mathrm{d}t$转化为电阻焦耳热，$LI\mathrm{d}I$用来反抗线圈感生电动势作功。在整个充电过程中，这部分功

$$A'=\int_0^{I_0}LI\mathrm{d}I=\frac{1}{2}LI_0^2.$$

2) 去掉电源并合上K，该放电暂态过程的方程为

$$-L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t=IR,$$

R产生的焦耳热为

$$\int_0^{\infty} I^2 R\mathrm{d}t=-L\int_{I_0}^{0} I\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=L\int_0^{I_0} I\mathrm{d}I=\frac{1}{2}LI_0^2.$$

可见，原充电过程中的A'，在放电过程中完全转化为电阻的焦耳热，这表明在放电前A'以某种“势能”形式储存在线圈中，定义为线圈的磁能

$$W_\mathrm{m}=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}I\Phi_\mathrm{m}.$$

(其中的I_0已经简记为I，又$L=\Phi_\mathrm{m}/I$)

2. N个载流线圈系统的磁能

1) 元过程

忽略所有线圈的电阻，各线圈I_i=0时记为零能态，各线圈自感和彼此间的互感分别为L_i和M_{ij}。

当第i个线圈的电流由0渐增到I_i时，感生电动势

$$\mathcal{E}_i = -L_i \frac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t} - \sum_{k \neq i}^{N} M_{ik} \frac{\mathrm{d}I_k}{\mathrm{d}t},$$

电源反抗$\mathcal{E}_i$作功

$$\mathrm{d}A_i' = -\mathcal{E}_i I_i \mathrm{d}t = L_i I_i \mathrm{d}I_i + \sum_{k \neq i}^{N} M_{ik} I_i \mathrm{d}I_k .$$

对N个线圈，电源做总元功

$$\mathrm{d}A' = \sum_{i}^{N} L_i I_i \mathrm{d}I_i + \sum_{i,k \neq i}^{N} M_{ik} I_i \mathrm{d}I_k .$$

$$\because M_{ik}=M_{ki},\ \therefore M_{ik}I_i\mathrm{d}I_k+M_{ki}I_k\mathrm{d}I_i=M_{ik}\mathrm{d}(I_iI_k),$$

$$\therefore \mathrm{d}A'=\sum_i^N L_iI_i\mathrm{d}I_i+\frac{1}{2}\sum_{i,k\neq i}^N M_{ik}\mathrm{d}(I_iI_k).$$

2) 系统静磁能

定义电源所做总功为系统的静磁能，则

$$W_{\mathrm{m}}=A'=\frac{1}{2}\sum_i^N L_iI_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i,k\neq i}^N M_{ik}I_iI_k,$$

其中首项是N个线圈的自感磁能，次项是互感磁能。

讨论

- 上式中指标i、k对称，可见W_{m}与各线圈电流的建立过程无关。
- 若令$M_{ii}=L_i$，则形式更简洁：

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sum_{i,k}^{N}M_{ik}I_iI_k.$$

- 设Φ_{ki}表示线圈k的磁场在线圈i中的磁通，再令

$$\Phi_i=\sum_{k}^{N}\Phi_{ki}=\sum_{k}^{N}M_{ik}I_k$$

表示所有线圈的磁场通过第i个线圈的总磁通，则

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sum_{i}^{N}I_i\Phi_i.$$

8.2 载流线圈在外磁场中的磁能

1. 两个载流线圈情形

- 总磁能

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 ,$$

- 互能

$$W_{12} = M_{12} I_1 I_2 = \Phi_{12} I_2 = I_2 \iint_{S_2} \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}_2) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}. \qquad (*)$$

上式中的红色部分，已将线圈1看作外磁场源。

- 定义：载流线圈在外磁场中的磁能，就是该线圈与产生外磁场的 (所有) 线圈之间的互能。

2. 均匀外磁场中载流线圈和非均匀外磁场中的小载流线圈的磁能

$$W_{12}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}I_2=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}.$$

(对比：电偶极子在外电场中的静电能$W_e=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$)

3. N个载流线圈在外磁场中的磁能

由上页(*)式直接推广得

$$W_m=\sum_k^N I_k\iint_{S_k}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}_k)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

当外场均匀时，上式简化为

$$W_m=\boldsymbol{B}\cdot(\sum_k^N I_k\boldsymbol{S})=\boldsymbol{m}_t\cdot\boldsymbol{B},$$

其中$\boldsymbol{m}_t$是N个线圈的总磁矩。

8.3 磁场的能量与磁能密度

1. 螺绕环磁能

设螺绕环的横截面S，体积V，环内介质的磁导率μ，线圈匝数为N，单位长度匝数为n，则

环内$B=\mu nI \rightarrow \Psi=NS\mu nI=\mu n^2 VI \rightarrow L=\mu n^2 V \rightarrow$

螺绕环磁能$W_\mathrm{m}=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\mu n^2 I^2 V=\frac{1}{2}BHV \rightarrow$

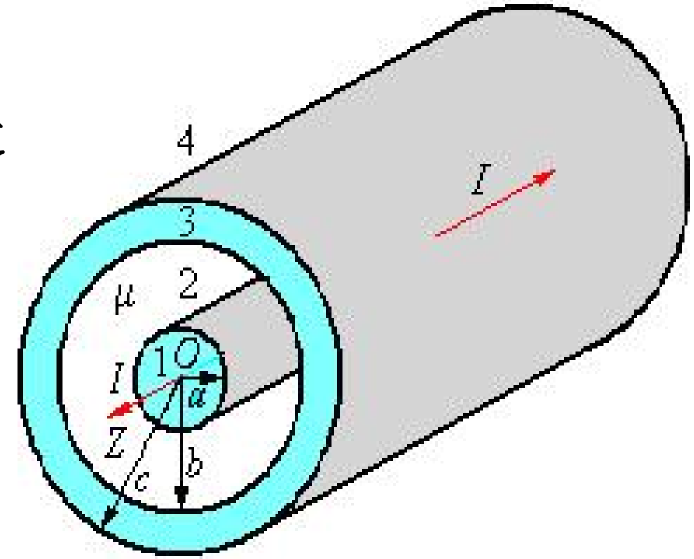
磁能密度$w_\mathrm{m}=\frac{1}{2}BH$.

2. 线性无损耗介质的一般情形

$$W_\mathrm{m}=\iiint_V w_\mathrm{m}\mathrm{d}V,\quad w_\mathrm{m}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\mu_0 H^2+\frac{1}{2}\mu_0\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{M}.$$

其中首项是宏观静磁能密度，次项是磁化能密度。

[例8.1] 一同轴电缆，中心是半径为a的圆柱形的导线，外部是内半径为b、外半径为c的导体圆筒，在内、外导体之间充满磁导率为μ的介质，电流在内、外导体中的方向如图所示。设电流沿截面均匀分布，求电缆单位长度的自感系数。



[解] 原先求自感的步骤是$B \Rightarrow \Phi \Rightarrow L$，此处不同区域的环路穿过的电流不同，不便按此法求解。

能量的观点：由B和$H \Rightarrow w_m \Rightarrow W_m \Rightarrow L$。

考虑长l的一段电缆，将其分为图示的四个区域，则

I区：$0 \le r \le a$，$\mu \approx \mu_0$(一般导体)，

$$H_1 = \frac{Ir}{2\pi a^2}, \quad B_1 = \mu_0 H_1, \quad w_{m1} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4},$$

$$W_{m1} = l \int_0^a \int_0^{2\pi} r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \, w_{m1} = \frac{\mu_0 l I^2}{16\pi};$$

II区：$a \le r \le b$，

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r}, \quad B_2 = \mu H_2, \quad w_{m2} = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2},$$

$$W_{m2} = l \int_a^b \int_0^{2\pi} r \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \, w_{m2} = \frac{\mu l I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a};$$

III区：$b \le r \le c$，　$\sum I = I \dfrac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$，

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r}\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}, \quad B_3 = \mu_0 H_3, \quad w_{m3} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}\left(\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}\right)^2,$$

$$W_{m3} = l\int_b^c \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\, w_{m3}$$

$$= \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi(c^2 - b^2)^2}\left[c^4 \ln\frac{c}{b} - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2)\right];$$

IV区：$r \geq c$，$\sum I = 0,\ H_4 = 0,\ B_4 = 0,\ W_{m4} = 0.$

由$\sum_{i=1}^{4} W_{mi} = \frac{1}{2} L I^2$，**电缆单位长度自感系数**

$$\frac{L}{l} = \frac{1}{2\pi}\left[\mu \ln\frac{b}{a} + \mu_0\left(\frac{c^2}{c^2 - b^2}\right)^2 \ln\frac{c}{b} - \frac{\mu_0 c^2}{2(c^2 - b^2)}\right].$$

8.4 非线性介质的磁滞损耗

1. 螺绕环体系元功分析

设dt内螺绕环内磁场$\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{B}+\mathrm{d}\boldsymbol{B}$，则线圈总磁通变化

d$\Psi = NS\,\mathrm{d}B$, 电源克服电动势所做元功

$$\mathrm{d}A' = -\mathcal{E}I\mathrm{d}t = I\mathrm{d}\Psi = NSI\,\mathrm{d}B = VH\,\mathrm{d}B,$$

$$\text{单位体积元功}\ \mathrm{d}a' = H\mathrm{d}B.$$

2. 一般磁介质的元功

$$\mathrm{d}a' = \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \mathrm{d}(\mu_0 H^2/2) + \mu_0\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{M}.$$

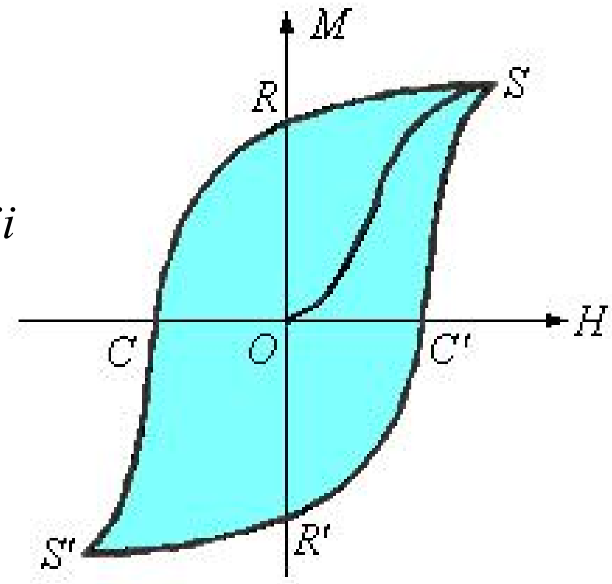
⇒ 类于电介质静电能，磁介质中，电源所做功一部分增加宏观静磁能，一部分对介质做磁化功。

3. 磁化功与磁化能的关系

1) 线性无损耗介质 $M_i=\sum_i \chi_{ij} H_j,\ \chi_{ij}=\chi_{ji}$

$\rightarrow \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{H}=\mathrm{d}(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{M})$，

即磁化功完全转化为磁化能。



2) 非线性磁介质，以铁磁体为例：

磁化状态绕磁滞回线一周，电源对单位体积介质做功

$$a' = \oint \mathrm{d}a' = \oint \mu_0 H \mathrm{d}M$$

恰为磁滞回线的面积。由于绕行一周前后磁化状态未变，磁化功完全转化为热量，称为磁滞损耗。

交流电路中的电感元件铁芯采用软铁磁材料，以减少磁滞损耗，还需考虑散热。

8.5 利用磁能求磁力

- 求磁力方法：直接用安培公式，或间接利用磁能。
- 磁力与功：N个载流线圈系统，仿照由静电能求静电力的方法，假设某线圈有虚位移$\delta\boldsymbol{r}$，则磁力作功

$$\delta A=\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}=F_x\delta x+F_y\delta y+F_z\delta z,$$

$$\therefore\ \boldsymbol{F}=\nabla A.$$

1. 电流不变情形

- 若在虚过程中各线圈电流不变，外部电源需反抗感应电动势做功$\delta A'$。磁力作功使系统磁能减少，电源作功使系统磁能增加，系统净磁能变化为

$$(\delta W_{\mathrm{m}})_I=\delta A'-\delta A.$$

- $\delta A'$与δW_{m}关系：设虚过程使第i个线圈的磁通变化$\delta\Phi_i$，则$\delta A_i'=-\mathcal{E}_i I_i \mathrm{d}t=I_i\delta\Phi_i$，电源所作总功

$$\delta A'=\sum_{i=1}^{N}\delta A_i'=\sum_{i=1}^{N}I_i\delta\Phi_i$$

而由 $W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sum_i^N I_i\Phi_i$ 可得

$$(\delta W_{\mathrm{m}})_I=\frac{1}{2}\sum_i^N I_i\delta\Phi_i=\frac{1}{2}\delta A'=\delta A,$$

即当所有线圈电流不变时，电源所做功恰为系统磁能增加的两倍，磁力所做功等于系统磁能的增加。

- 磁力和磁力矩

$$F=(\nabla W_{\mathrm{m}})_I,\quad F_x=\left(\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial x}\right)_I,\quad L_\theta=\left(\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial\theta}\right)_I.$$

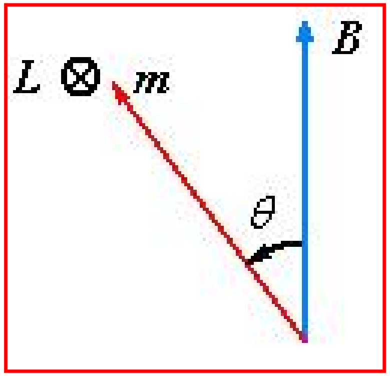
2. 进一步讨论

- 上述诸式可推广至一般的线性无损耗磁介质，只是 W_m 中包括介质磁化能；
- 在研究载流导线在外磁场中所受磁力 (矩) 时，不必计入二者自能，只考虑导线在外磁场中的静磁能；
- 外磁场对载流线圈的磁力和磁力矩 $\boxed{j=0 \Rightarrow \nabla\times\boldsymbol{B}=0}$

线圈的静磁能 $W_\mathrm{m}=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}=mB\cos\theta.$

$$\therefore \boldsymbol{F}=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B})_{\boldsymbol{m}}=(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{m}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}.$$

$$\boldsymbol{L}_\theta=\left(\frac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial\theta}\right)_m \boldsymbol{e}_\theta=-mB\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}.$$



($\boldsymbol{e}_\theta$为由$\boldsymbol{B}$到$\boldsymbol{m}$的右手螺旋方向，恰与$\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$反向)

3. 磁通量不变情形

若产生虚位移时各线圈Φ_i不变，则$\mathcal{E}_i$=0，电源不作功，$(\delta W_{\mathrm{m}})_{\Phi}=-\delta A$，所以磁力和磁力矩分别为

$$\boldsymbol{F}=-(\nabla W_{\mathrm{m}})_{\Phi}，\ \boldsymbol{L}_{\theta}=-(\partial W_{\mathrm{m}}/\partial\theta)_{\Phi}.$$

4. 磁场中的微观粒子

微观粒子的磁矩=常数，不需外电源，$(\delta W_{\mathrm{m}})_{\boldsymbol{m}}=-\delta A,$

在磁场中的势能$W_{\mathrm{m}}'=-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}=-mB\cos\theta.$

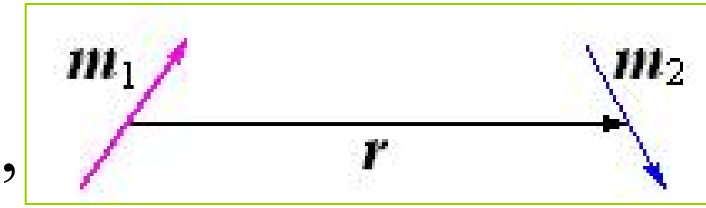
受磁场的力和力矩分别为

$$\boldsymbol{F}=-(\nabla W_{\mathrm{m}}')_{\boldsymbol{m}}=\nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B})_{\boldsymbol{m}}=(\boldsymbol{m}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},$$

$$\boldsymbol{L}_{\theta}=-(\partial W_{\mathrm{m}}'/\partial\theta)_{m}\boldsymbol{e}_{\theta}=-mB\sin\theta\,\boldsymbol{e}_{\theta}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B},$$

与电流不变条件下的结果相同。

[例8.2] 求相距r、磁矩分别为$\boldsymbol{m}_1$和$\boldsymbol{m}_2$的两个磁偶极子的相互作用力。



[解] $\boldsymbol{B}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\boldsymbol{m}_1 + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r,$

$$\therefore W_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{m}_2 \cdot \boldsymbol{B}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}(\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2) + \frac{3\mu_0}{4\pi r^3}(\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{m}_2 \cdot \boldsymbol{e}_r),$$

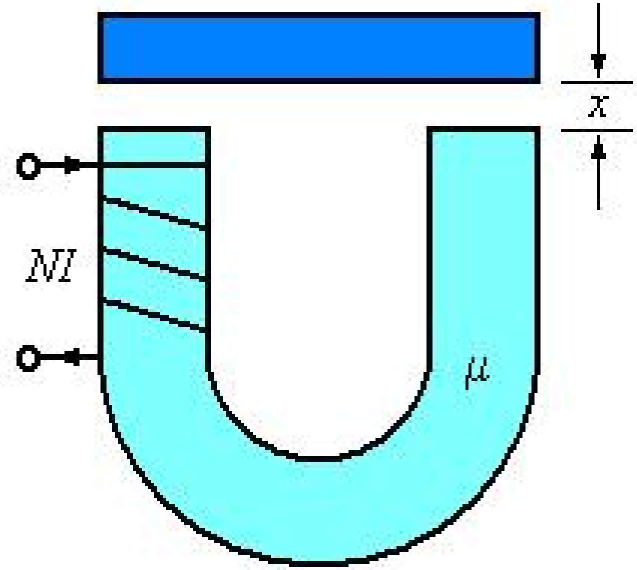
$$\therefore \boldsymbol{F}_{12} = (\nabla W_{\mathrm{m}})_{\boldsymbol{m}} = \frac{3\mu_0}{4\pi r^4}(\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2 - 5m_{1r}m_{2r})\boldsymbol{e}_r$$

$$+ \frac{3\mu_0}{4\pi r^4}(m_{2r}\boldsymbol{m}_1 + m_{1r}\boldsymbol{m}_2).$$

思考题

可证$\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}$，但$\boldsymbol{F}_{12}$的次项一般不沿$\boldsymbol{r}$方向。→不但电流元之间，闭合电流之间的磁力也不满足牛顿第三定律。其物理原因与电偶极子间的静电力情形类似。

[例8.3] 具有恒定的高磁导率μ的马蹄形磁介质，与一磁导率相同的条形磁介质组成一磁路，它们的横截面为矩形，面积为A，长度为l。马蹄形磁介质上绕有N匝导线，通以恒定电流I。求马蹄形与条形磁介质之间的吸力。



[解] 设马蹄形与条形磁介质有小间隙x，间隙和磁介质内的磁场强度分别为$\boldsymbol{H}_g$和$\boldsymbol{H}_m$。

由磁路定理，得$H_m l+2H_g x=NI$，

由$\boldsymbol{B}$连续，得$\mu H_m=\mu_0 H_g$，即$H_g=\mu H_m/\mu_0$.

解得

$$H_m = \frac{\mu_0 NI}{\mu_0 l + 2\mu x}, \quad B_m = \frac{\mu\mu_0 NI}{\mu_0 l + 2\mu x},$$

$$\Psi = N\Phi = NB_m A = \frac{\mu\mu_0 AN^2 I}{\mu_0 l + 2\mu x},$$

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} I\Psi = \frac{\mu\mu_0 AN^2 I^2}{2(\mu_0 l + 2\mu x)},$$

$$\therefore F = \left(\frac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial x}\right)_I \Bigg|_{x=0} = -\frac{\mu^2 AN^2 I^2}{\mu_0 l^2}.$$ (吸引力)

(将本题与“磁荷法”中的例6.13相比较。)

第8章 小结

单个线圈的磁能
*N*个线圈的磁能
线圈在外场磁能

电流观点 ← 磁能

磁场能量和磁能密度
计算体电流电感
磁化功与磁化能

场观点

应用：由总磁能或互磁能求磁力 (矩)

作业、预习及思考题

- 作业：8.1~8.7
- 预习：9.1 基本概念和描述方法、 9.2 交流电路的复数解法、9.3 交流电路的功率

下次课讨论

- 思考题7.5 固定ω_0变化β，证明电容器在临界阻尼情形比过阻尼情形更快地充放电。

  提示：看整体趋势时只需比较主导指数项
- 思考题8.1 例题8.2中由W_m导出F_{12}。