§0.1 曲面的结构方程(外微分法)

正交标架的运动方程相对自然标架的运动方程更简洁、对称。现在利用正交标架表达曲面的结构方程，这需要外微分形式的概念。

§0.1.1 外微分形式(exterior differential forms)

区域$D\subset\mathbb{R}^n$上的一次(外)微分形式是D上的一个向量值函数，它在每一点$p\in D$取值于T_pD的对偶空间T_p^*D。由于T_p^*D有一组自然基$\{du^1,\cdots,du^n\}$，一次(外)微分形式形如

$$\theta(u^1,\cdots,u^n):=f_i(u^1,\cdots,u^n)du^i,\quad f_i\in C^\infty(D).$$

D上(光滑)一次外微分形式的全体记作

$$\Omega^1(D)=\{f_i(u^1,\cdots,u^n)du^i|f_i\in C^\infty(D)\}.$$

函数称为零次外微分形式，光滑函数即(光滑)零次外微分形式的全体记作

$$\Omega^0:=\{f|f\in C^\infty(D)\}.$$

定义0.1. *D上的k次$(k\geq 2)$外微分形式θ是D上的一个向量值函数，它在每一点$p\in D$是作用在$(T_pD)^{\otimes k}$上的一个反对称k重线性函数。即θ在p点的取值$\theta_p:T_pD\times\cdots\times T_pD\to\mathbb{R}$满足*

$$(i)\quad \theta_p(X_1,\cdots,\lambda X+\mu Y,\cdots,X_k)=\lambda\theta_p(X_1,\cdots,X,\cdots X_k)+\mu\theta_p(X_1,\cdots,Y,\cdots X_k),$$

其中$\lambda,\mu\in\mathbb{R}; X_i(i=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,k),X,Y\in T_pD$；

$$(ii)\quad \theta_p(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_j,\cdots,X_k)=-\theta_p(X_1,\cdots,X_j,\cdots,X_i,\cdots,X_k),\quad \forall i<j.$$

D上光滑k次外微分形式的全体记作$\Omega^k(D)$。

记D的维数为n，T_pD的一组基为$\{X_1,\cdots,X_n\}$。由于$k\geq n+1$时，

$$\theta_p(X_{i_1},\cdots,X_{i_k})\equiv 0,\quad \forall i_1,\cdots,i_k\in\{1,\cdots,n\}$$

从而

$$\Omega^k(D)=\{0\},\quad \forall k\geq n+1.$$

$\Omega^k(D)$中元素为向量值函数，因此同次外微分形式之间有加法和数乘运算。所有的各次外微分形式之间还有一些重要的运算，包括外积和外微分运算。当D为二维平面参数空间，外积和外微分容易具体给出。以下设$D\subset\mathbb{R}^2$。

外积：零次外微分形式与另一个$k=0,1,2$ 次外微分形式的外积即通常的乘法。两个一次微分形式的外积定义为

$$\theta\wedge\varphi:=\theta\otimes\varphi-\varphi\otimes\theta,$$

即

$$(\theta\wedge\varphi)(X,Y):=\theta(X)\varphi(Y)-\theta(Y)\varphi(X).$$

注：也有其他约定，如右边整个乘以$\frac{1}{2}$。它满足：

(i)线性性

$$(\lambda\theta_1+\mu\theta_2)\wedge\varphi=\lambda\theta_1\wedge\varphi+\mu\theta_2\wedge\varphi,\quad\forall\lambda,\mu\in C^{\infty}(D);$$

(ii)交换律(Grassmann法则)

$$\theta\wedge\varphi=-\varphi\wedge\theta.$$

特别

$$\theta\wedge\theta=0,$$

$$(f_1du+f_2dv)\wedge(g_1du+g_2dv)=(f_1g_2-f_2g_1)du\wedge dv,$$

$$\Omega^2(D)=\{f(u,v)du\wedge dv,\quad f\in C^{\infty}(D)\}.$$

例：设$\{e_1,e_2\}$为曲面切平面的单位正交基，$e_1\wedge e_2=N$，$\omega^1,\omega^2\in\Omega^1(D)$使得

$$dr=\omega^1e_1+\omega^2e_2.$$

从而

$$\langle r_\beta,e_\gamma\rangle=\langle dr(\frac{\partial}{\partial u^\beta}),e_\gamma\rangle=\langle\omega^\alpha(\frac{\partial}{\partial u^\beta})e_\alpha,e_\gamma\rangle=\omega^\gamma(\frac{\partial}{\partial u^\beta}),$$

$$\begin{aligned}
\omega^1\wedge\omega^2 &= [\omega^1(\frac{\partial}{\partial u^\alpha})du^\alpha]\wedge[\omega^2(\frac{\partial}{\partial u^\beta})du^\beta]\\
&= [\omega^1(\frac{\partial}{\partial u})\omega^2(\frac{\partial}{\partial v})-\omega^1(\frac{\partial}{\partial v})\omega^2(\frac{\partial}{\partial u})]du\wedge dv\\
&= (\langle r_u,e_1\rangle\langle r_v,e_2\rangle-\langle r_v,e_1\rangle\langle r_u,e_2\rangle)du\wedge dv\\
&= \langle r_u\wedge r_v,e_1\wedge e_2\rangle du\wedge dv\\
&= |r_u\wedge r_v|du\wedge dv\\
&= \sqrt{EG-F^2}du\wedge dv.
\end{aligned}$$

即曲面的面积元。 □

外微分
$$d:\Omega^k(D)\to\Omega^{k+1}(D),\quad k=0,1,2$$
定义为
$$\begin{aligned}df &= \frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv,\quad f\in\Omega^0;\\ d(fdu+gdv) &= df\wedge du+dg\wedge dv=(-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial u})du\wedge dv;\\ d(fdu\wedge dv) &= df\wedge du\wedge dv=0.\end{aligned}$$

设$f,g\in C^\infty(D),\varphi\in\Omega^1(D)$，则有
$$d(fg)=g(df)+fdg;$$
$$d(df)=d(\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv)=f_{uv}dv\wedge du+f_{vu}du\wedge dv=0;$$
$$d(f\theta)=df\wedge\theta+fd\theta=d(\theta f)=fd\theta-\theta\wedge df.$$

注：对任意维数的D，外微分运算$d:\Omega^k(D)\to\Omega^{k+1}(D)$由如下四条唯一确定：
$$\begin{aligned}&(i) && df=\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}du^\alpha,\quad \forall f(u^1,\cdots,u^n)\in C^\infty(D);\\ &(ii) && d(\theta_1+\theta_2)=d\theta_1+d\theta_2;\\ &(iii) && d(\theta\wedge\varphi)=d\theta\wedge\varphi+(-1)^k\theta\wedge d\varphi,\quad \forall\theta\in\Omega^k(D),\varphi\in\Omega^l(D);\\ &(iv) && dd\theta=0,\quad \forall\theta\in\Omega^k(D).\end{aligned}$$
对于二维平面区域，可以直接验证外微分满足如上四条。

例：记时空坐标为(x,y,z,t)，电场和磁场作为时空的向量值函数分别为
$$E(x,y,z,t)=(E_x,E_y,E_z),$$
$$B(x,y,z,t)=(B_x,B_y,B_z).$$
由此定义时空上的二次外微分形式
$$F=B_xdy\wedge dz+B_ydz\wedge dx+B_zdx\wedge dy+(E_xdx+E_ydy+E_zdz)\wedge dt,$$
$$*F=dt\wedge(B_xdx+B_ydy+B_zdz)+E_xdy\wedge dz+E_ydz\wedge dx+E_zdx\wedge dy,$$
其中$*$为Hodge星算子(利用时空上的Minkowski内积定义)。则
$$\begin{aligned}dF &= (\partial_tB_x-\partial_zE_y+\partial_yE_z)dt\wedge dy\wedge dz\\ &\quad +(\partial_tB_y+\partial_zE_x-\partial_xE_z)dt\wedge dz\wedge dx\\ &\quad +(\partial_tB_z-\partial_yE_x+\partial_xE_y)dt\wedge dx\wedge dy\\ &\quad +divBdx\wedge dy\wedge dz.\end{aligned}$$

因此$F=dA$满足Bianchi恒等式

$$dF=0\Leftrightarrow B_t+\nabla\wedge E=0,\quad divB=0.$$

类似由$d*F$的表达式以及相应非齐次方程可得到

$$d*F=\cdots\Leftrightarrow E_t-\nabla\wedge B=-4\pi j,\quad divE=4\pi\rho.$$

它们合在一起即Maxwell方程组。

例：设$\theta=fdu+gdv\in\Omega^1(D)$，$X,Y$为$D\subset\mathbb{R}^n$上的向量场，则有

$$(d\theta)(X,Y)=X\theta(Y)-Y\theta(X)-\theta([X,Y]).$$

其中李括号定义为

$$[X,Y]:=XY-YX=[X(Y^\beta)-Y(X^\beta)]\frac{\partial}{\partial u^\beta}.$$

证明：令

$$\theta=f_\alpha du^\alpha,\quad X=X^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha},\quad Y=Y^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

为了简化，注意到等式两边关于θ加法线性，因此只需令$\theta=fdg,f,g\in C^\infty(D)$，验证等式对$\theta=fdg$成立：首先，

$$\begin{aligned}\theta([X,Y]) &= fdg([X,Y])=f[X,Y](g)\\ &= f(X(Y^\alpha)g_\alpha-Y(X^\alpha)g_\alpha)\\ &= f[XY(g)-Y^\alpha X^\beta g_{\alpha\beta}-YX(g)+X^\alpha Y^\beta g_{\alpha\beta}]\\ &= f[XY(g)-YX(g)],\end{aligned}$$

特别

$$[X,Y](g)=XY(g)-YX(g).$$

于是，

$$\begin{aligned}d\theta(X,Y) &= [d(fdg)](X,Y)=(df\wedge dg)(X,Y)\\ &= df(X)dg(Y)-dg(X)df(Y)\\ &= X(f)Y(g)-X(g)Y(f)\\ &= [X(fY(g))-fXY(g)]-[Y(fX(g))-fYX(g)]\\ &= X[fdg(Y)]-Y[fdg(X)]-(fdg)[X,Y]\\ &= X\theta(Y)-Y\theta(X)-\theta([X,Y]).\end{aligned}$$

□

作业：14