微分方程

Black-Scholes方程
与薛定谔方程

一、Black-Scholes方程

股票价格的运动过程

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz, \quad dz = \varepsilon\sqrt{dt}$$

$\frac{dS}{S}$ ：股票的瞬间收益率

μ ：股票的期望瞬间收益率

σ ：股价收益率的瞬间标准差

伊藤引理（Ito，1951）

若随机过程 x 遵循伊藤过程：

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

则衍生品价格$G\ (x, t\ )$将遵循如下伊藤过程：

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

股价运动是一种简单的伊藤过程：

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz$$

以股票为标的资产的衍生品价格 $f(S, t)$，其运动过程可通过伊藤引理得到：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma Sdz$$

Black-Scholes 方程的推导

（1）原理

- 衍生品与标的资产（股票）价格不确定性的来源相同
- 与二叉树期权定价模型的思想类似，我们通过构造股票与衍生品的组合来消除这种不确定性

（2）假设条件

- 股价遵循几何布朗运动
- 股票交易连续进行，且股票无限可分
- 不存在交易费用及税收
- 允许卖空，且可利用所有卖空所得
- 在衍生品有效期间，股票不支付股利
- 在衍生品有效期间，无风险利率保持不变
- 所有无风险套利机会均被消除

（3）具体推导

股票及衍生品的运动过程分别为：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

为消除不确定性，构造投资组合：

衍生品：$-f$；股票：$+\ \dfrac{\partial f}{\partial S}$

投资组合的价值为：

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

投资组合的价值变动为：

$$d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS$$

$$= -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt$$

价值变动仅与时间 dt 有关，因此该组合成功消除了 dz 带来的不确定性

根据无套利定价原理，组合收益率应等于无风险利率 r (无套利机会)：

$$d\Pi = r\Pi dt$$

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt = r\left(-f+\frac{\partial f}{\partial S}S\right)dt$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=rf}$$

Black-Scholes 方程

- 任意依赖于标的资产 S 的衍生品价格 f 应满足该方程
- 衍生品的价格由微分方程的边界条件决定

例：欧式看涨期权的边界条件为：

$$C(0, t) = 0$$

$$C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0)$$

理论上通过解B-S方程，可得 *Call* 的价格。

用风险中性方法对欧式 *Call* 定价

- 假设股价期望收益率为无风险利率 r，则：

$$dS = rSdt + \sigma Sdz$$

- 欧式 *Call* 到期时的期望收益为：

$$\hat{E}[\max(S_T - K, 0)]$$

将该期望收益以无风险利率折现，得到欧式 *Call* 价格：

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)}\hat{E}[\max\ (S_T - K, 0)]$$

得：$$\boxed{C(S,t)=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)}$$

其中：$$d_1=\frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2=\frac{\ln(S/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$$

此即 **Black-Scholes 期权定价公式**。

- Black-Scholes 期权定价公式用于不支付股利的欧式看涨期权的定价（通过 *Call-Put* 平价公式可计算欧式看跌期权的价值）。
- **注意：该公式只在一定的假设条件下成立**，如市场完美（无税、无交易成本、资产无限可分、允许卖空）、无风险利率保持不变、股价遵循几何布朗运动等。

二、薛定谔方程

薛定谔 Erwin Schrödinger

奥地利人 1887-1961

创立量子力学

获1933年诺贝尔物理学奖

1926年，在一次学术讨论会上，当年轻的薛定谔介绍完德布罗意关于粒子波动性假说的论文后，物理学家德拜（P.Debey）评论说：认真地讨论波动，必须有波动方程。

几个星期后，薛定谔又作了一次报告。开头就兴奋地说：“你们要的波动方程，我找到了！”这个方程，就是著名的薛定谔方程。

薛定谔方程是量子力学的基本动力学方程，它在量子力学中的作用和牛顿方程在经典力学中的作用是一样的。

同牛顿方程一样，薛定谔方程也不能由其它的基本原理推导得到，而只能是一个基本的假设，其正确性也只能靠实验来检验。

自由粒子的薛定谔方程

由自由粒子波函数 $\Psi(x,t)=\Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)}$

微分，得

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}=E\Psi(x,t)}$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}=-p_x\Psi(x,t)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}=-\frac{p^2}{\hbar^2}\Psi(x,t)}$$

由非相对论粒子能量动量关系式，如自由粒子

$$\boxed{E=\frac{p^2}{2m}}$$

得

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}}$$

这就是一维自由粒子（无势场）的薛定谔方程。

推广到粒子在势场 $U(x, t)$ 中运动

在势场中运动粒子的薛定谔方程

在一维势场 $U(x,t)$ 中的粒子 $E=\dfrac{P^2}{2m}+\boxed{U(x,t)}$

替换原来的 E 后得到

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\boxed{U(x,t)}\right]\Psi(x,t)$$

推广到三维：$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\Rightarrow\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\equiv\nabla^2$

一般的薛定谔方程：

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\vec{r},t)\right]\Psi(\vec{r},t)}$$

定态薛定谔方程

当势能与时间无关，即$U=U(\vec{r})$时，用分离变量法

将波函数写成 $\Psi(\vec{r},t)=\psi(\vec{r})f(t)$

$$\Psi(x,y,z,t)=\psi(x,y,z)f(t)$$

代入薛定谔方程可得： $f(t)=\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ 振动因子

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+U\psi=E\psi}$$

该方程不含时间，称为定态薛定谔方程。

定态波函数 $\Psi(x,y,z,t)=\psi(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+U\psi=E\psi$$

数学上：E 不论取何值，方程都有解。

物理上：E只有取一些特定值，才能使方程的解满足波函数的物理条件（单值、有限、连续）。

- 这些特定的E值称为能量本征值
- 各E值对应的 $\psi_E(\vec{r})$ 叫能量本征函数本征波函数
- 该方程又称为：能量本征值方程
- 定态波函数：$\Psi_E(\vec{r},t)=\psi_E(\vec{r})f(t)=C\psi_E(\vec{r})e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

以下是阅读材料！

波函数的物理条件

用来描写实物粒子的波函数应满足的物理条件

1. 标准条件：单值、有限、连续

因为，粒子的概率在任何地方只能有一个值；

不可能无限大；不可能在某处发生突变。

2. 归一化条件

粒子在空间各点的概率总和应为l

*在量子力学中用

薛定谔方程式加上波函数的物理条件

求解微观粒子在一定的势场中的运动问题(求波函数，状态能量，概率密度 等)

量子力学解题的一般思路：

1. 由粒子运动的实际情况

   正确地写出势函数 $U(x)$

2. 代入定态薛定谔方程

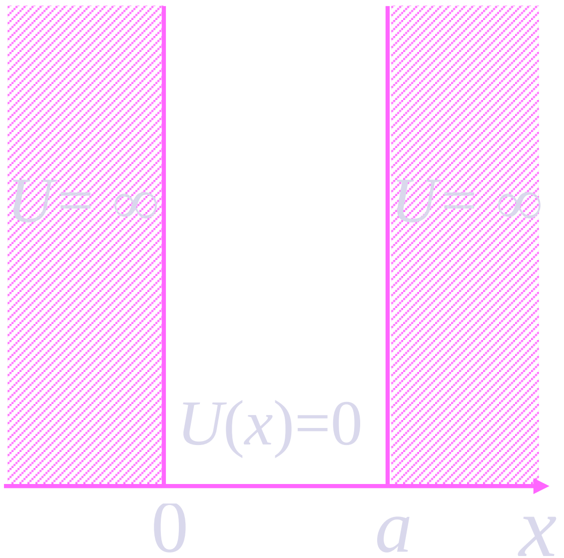
3. 解方程

4. 解出能量本征值和相应的本征函数

5. 求出概率密度分布及其他力学量

无限深方势阱中的粒子

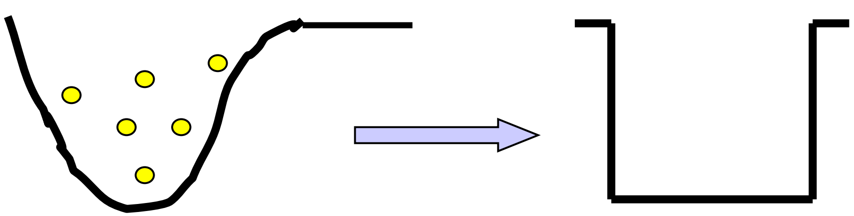
1、一维无限深方形势阱势函数

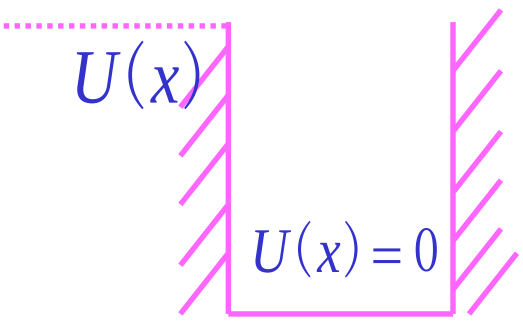


$$U(x)=\begin{cases}0 & (0<x<a)\\ \infty & (\ x\le 0\ ,\ x\ge a)\end{cases}$$

粒子在$0<x<a$范围内自由运动，但不能到达$x\le 0$或$x\ge a$范围。

是实际情况的极端化和简化





例：金属内部自由电子的运动。

方势阱

薛定谔方程和波函数

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U(\vec r)\right)\Phi(\vec r)=E\Phi(\vec r)$$

1. 定态薛定谔方程

阱外： $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\infty\right]\Phi(x)=E\Phi(x)$$

阱内： $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Phi(x)=E\Phi(x)$$

2. 求通解

阱外：根据波函数有限 $\Phi(x)=0\left(x\geq a, x\leq 0\right)$

阱内：令 $\boxed{k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}}$ 则： $\Phi''(x)+k^2\Phi(x)=0$

其通解为 $\Phi(x)=A\cos kx+B\sin kx$

通解为 $\boldsymbol{\Phi(x) = A\cos kx + B\sin kx}$

3. 由波函数的标准化条件定特解

单值、有限条件已满足；由连续条件定特解：

(1) $\boldsymbol{x=0}$ 处应 $\boldsymbol{\Phi(0)=0}$ $\Rightarrow$ $A=0$

解的形式为 $\Phi(x) = B\sin kx$

(2) $\boldsymbol{x=a}$ $\boldsymbol{\Phi(a)=0}$ $\Rightarrow B\sin ka = 0$

已有A=0，要求 $B \neq 0$, 只能 sinka 等于零

即 $\boldsymbol{ka = n\pi,}$ $\boldsymbol{(n=1,2,3,\cdots)}$ 又 $\boldsymbol{k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}}$

$\therefore$能量为：$E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$ $(n=1,2,3,\cdots)$

讨论 **能量：** $E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} n^2 \quad (n=1,2,3,\cdots)$

1）粒子能量只能取特定的分立值（能级）

能量量子化

2）最低能量不为零　波粒二象性的必然结果

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$$ **零点能**

3）当n趋于无穷时 能量趋于连续

(3)定常数 B

•由波函数的归一化性质 $k=\dfrac{n\pi}{a}\quad(n=1,2,3,\cdots)$

$$\int_0^a \Phi(x)\,\Phi^*(x)\mathrm{d}x=1 \Longrightarrow \int_0^a B^2\sin^2 kx\,\mathrm{d}x=1$$

得 $B=\sqrt{\dfrac{2}{a}}$

于是，波函数(空间部分)

阱内 $\Phi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi}{a}x\quad(n=1,2,3,\cdots)\ \ 0<x<a$

阱外 $\Phi(x)=0\left(x\geq a, x\leq 0\right)$

4. 定态波函数(包括空间、时间部分)

考虑到振动因子 $e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$

$$\Psi_n = \Phi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi}{a} x\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \quad (n = 1,2,3,\cdots) \quad 0 < x < a$$

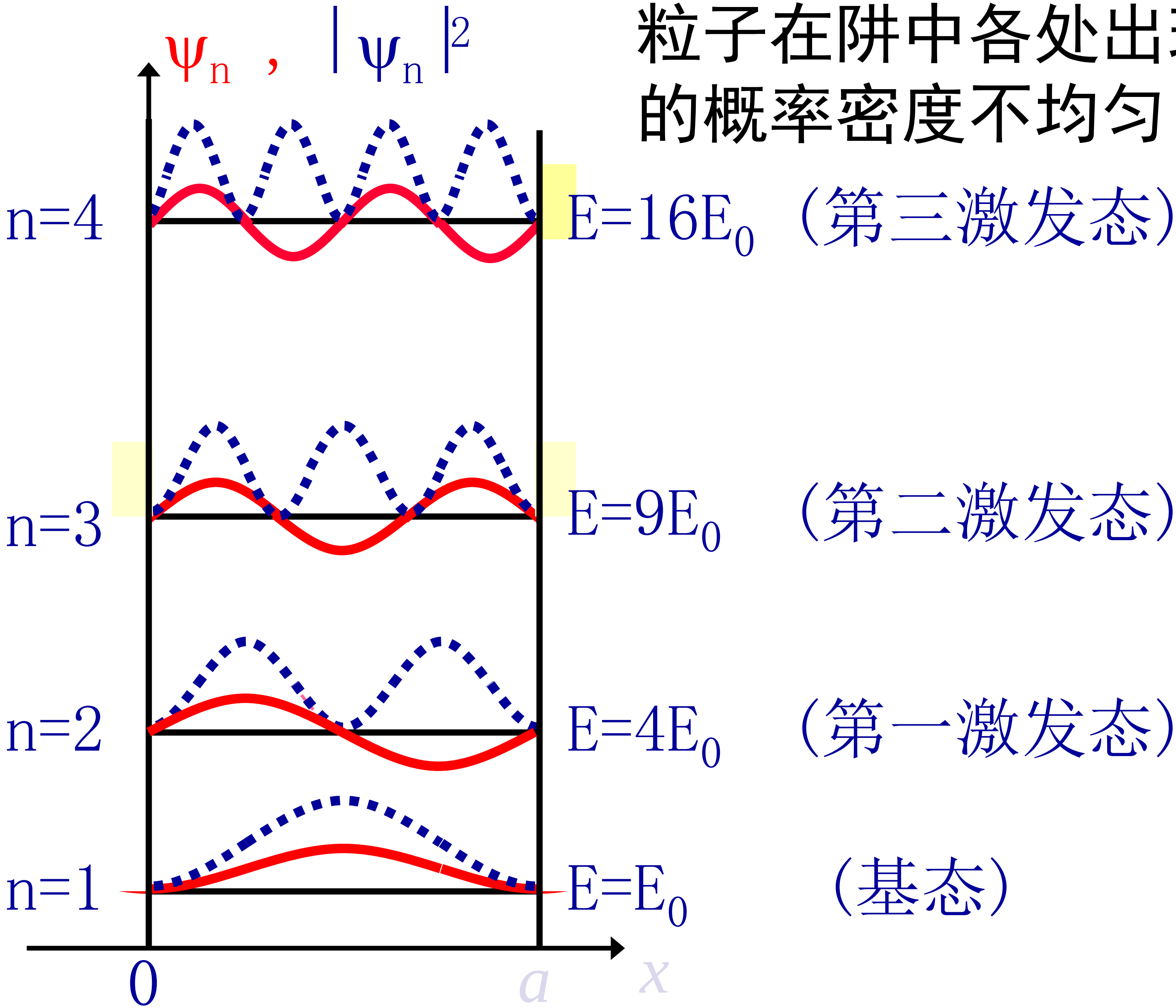
$$\Psi = 0 \quad (x \geq a, x \leq 0)$$

是以 $x = 0$ 和 $x = a$ 为节点的一系列驻波解。

5. 概率密度

$$P_n = \Psi\Psi^* = \Phi\Phi^* = \frac{2}{a}\sin^2\frac{n\pi}{a}x \quad (n = 1,2,\cdots)$$

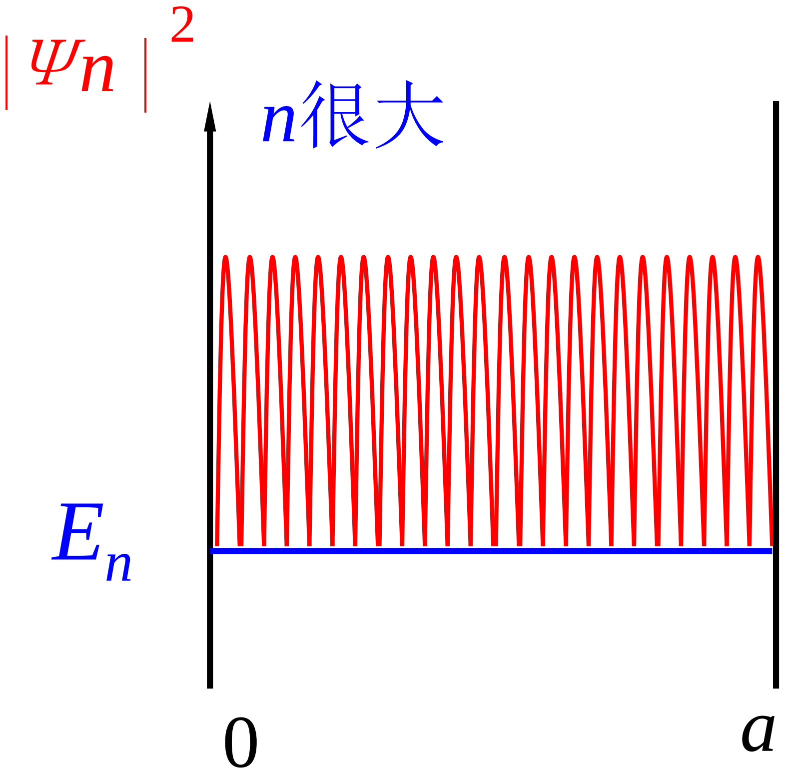
一维无限深方势阱中粒子的波函数和概率密度



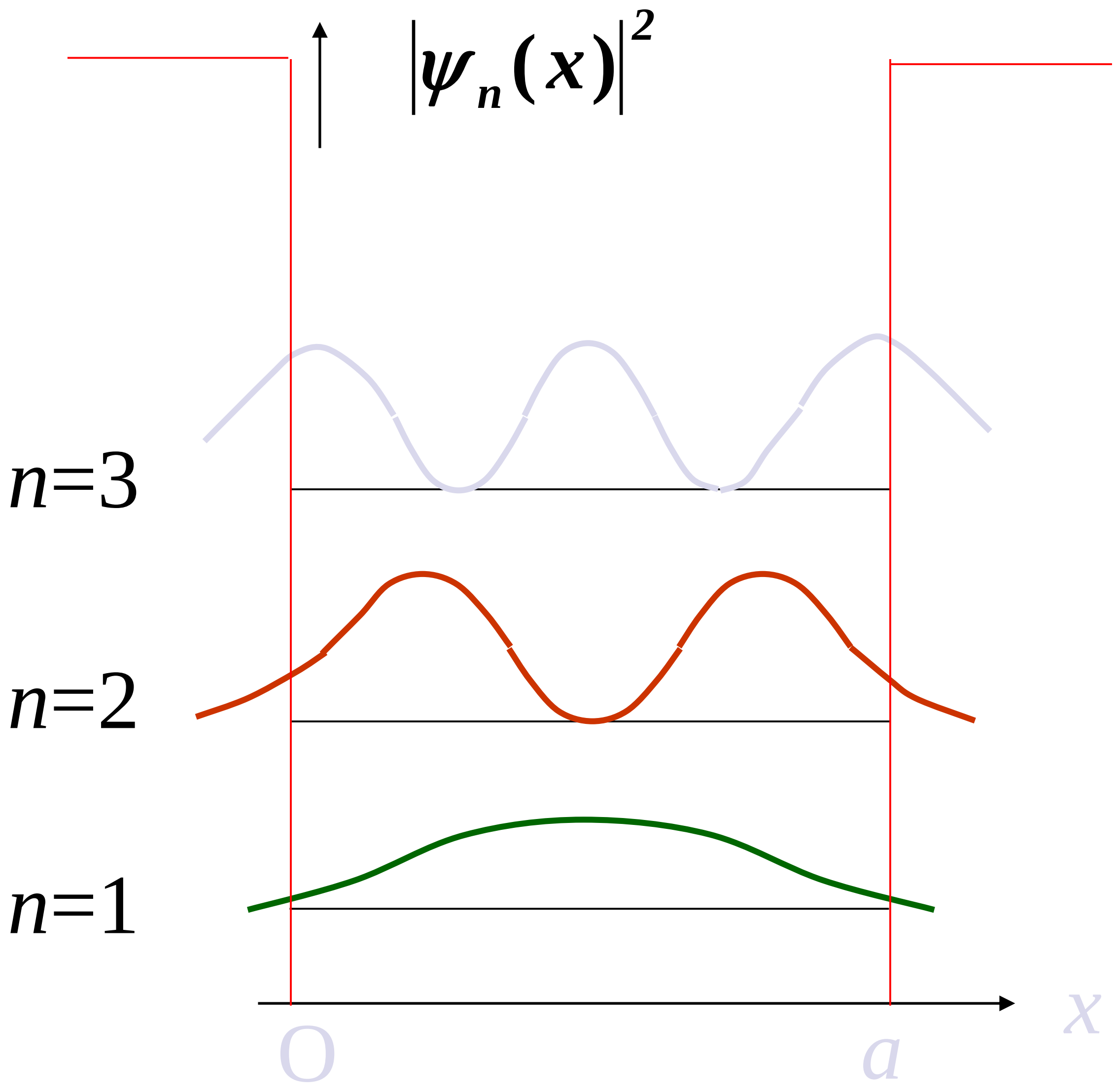
粒子在阱中各处出现的概率密度不均匀

- $n \to \infty$时，

量子→经典



有限深势阱中粒子的概率密度

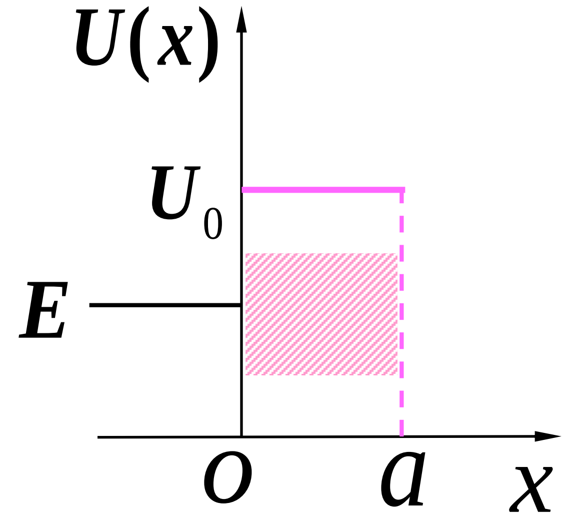


粒子在阱外不远处出现的概率不为零！从经典理论很难想象，但实验已证实了这种量子效应。

势垒穿透----量子隧穿效应

1. 一维有限宽方势垒

$$U(x)=\begin{cases}0, & x<0, x>a\\ U_0, & 0\le x\le a\end{cases}$$



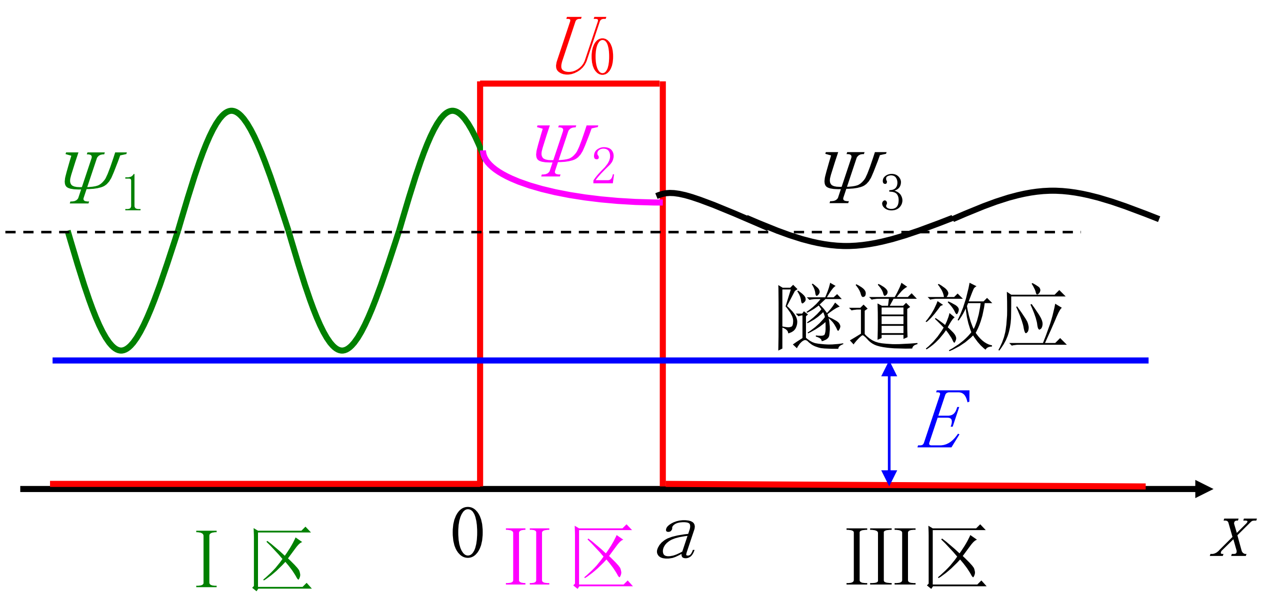
两块金属或半导体接触处势能隆起，形成势垒

粒子从x = -∞ 处以确定能量E入射

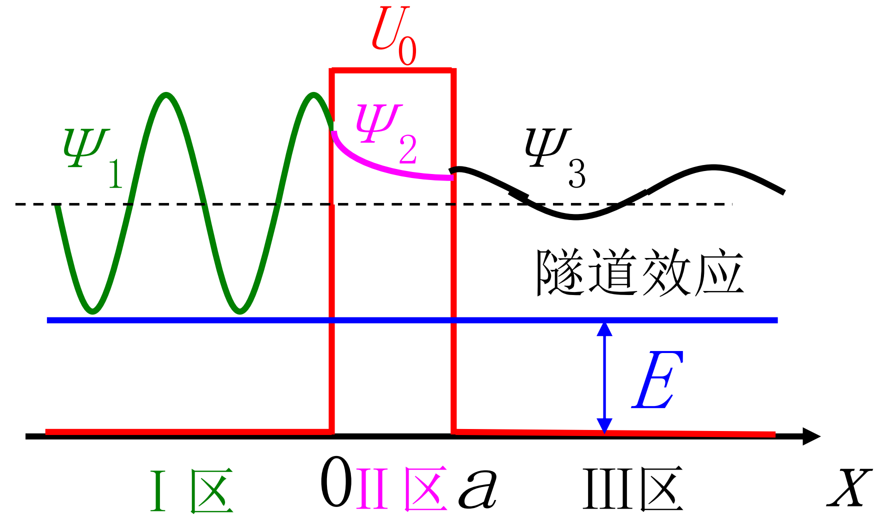
$$E<U_0$$

2.隧道效应

从势垒左方射入的粒子，在各区域内的波函数：



粒子的能量虽不足以超越势垒，但在势垒中似乎有一个隧道, 能使少量粒子穿过而进入 $x > a$ 的区域，所以形象地称之为势垒穿透或隧道效应。



经典物理：从能量守恒的角度看是不可能的

量子物理：粒子有波动性遵从不确定原理只要势垒宽度 $\Delta x = a$ 不是无限大粒子能量就有不确定量 ΔE

经典：$E = \dfrac{p^2}{2m}$

⇓

量子：$\Delta E = \dfrac{2p\Delta p}{2m}$

$\Delta x = a$ 很小时 ΔP 和 ΔE 很大 $\Delta E > U_0 - E$

隧道效应的本质：源于微观粒子的波粒二象性

3. 隧道效应的应用

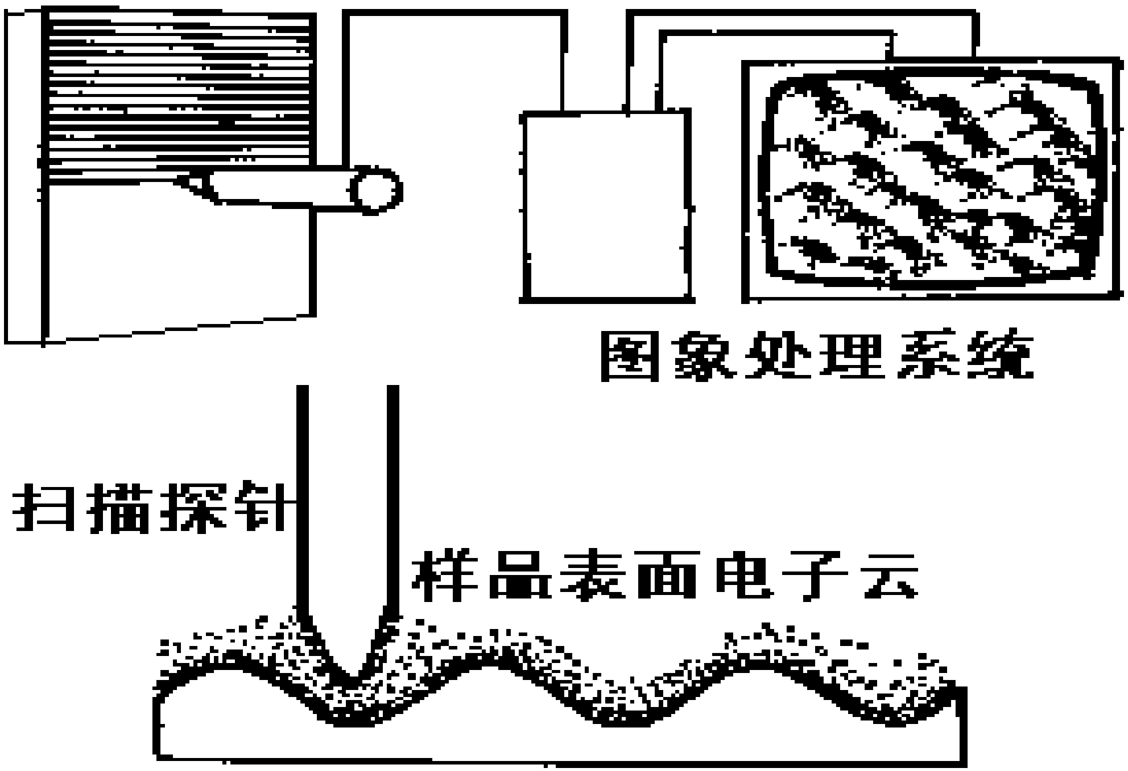
隧道二极管　金属场致发射　核的α衰变…

扫描隧道显微镜（STM）

（Scanning Tunneling Microscopy）

STM 是一项技术上的重大发明　用于观察材料表面的微观结构（不接触、不破坏样品）

应用：STM(扫描隧道显微镜1982年)

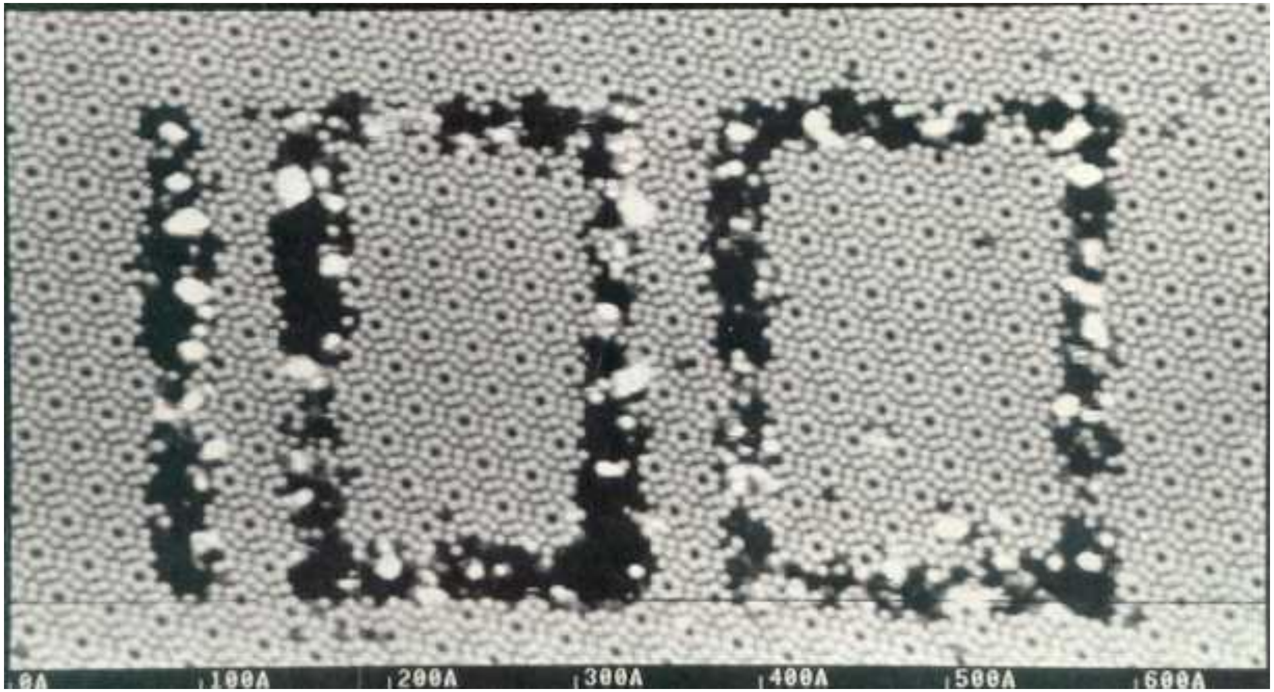


通过扫描可观测固体表面的微观结构.　探针头还可吸附并搬动原子，形成人工微结构.

1986年获诺贝尔物理学奖

原子搬迁：操纵原子不是梦

“原子书法”



硅单晶表面直接提走硅原子形成2纳米的线条

1994年中国科学院科学家“写”出的

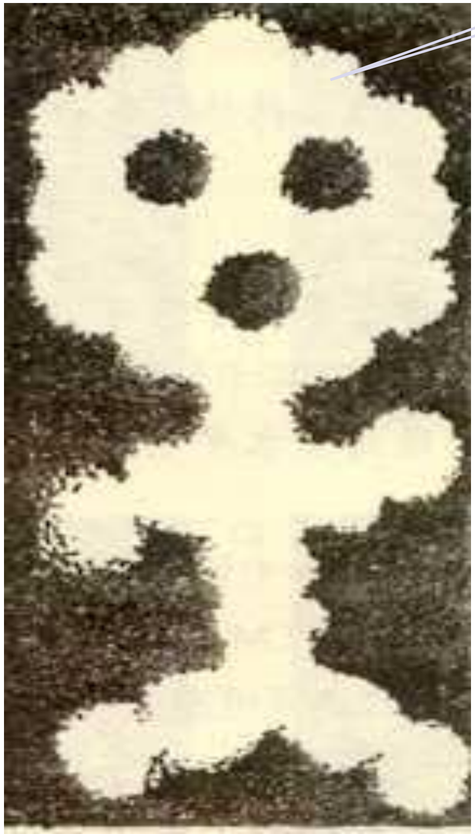
平均每个字的面积仅百万分之一平方厘米

“原子和分子的观察与操纵” -- 白春礼《扫描隧道显微术及其应用》

“扫描隧道绘画”

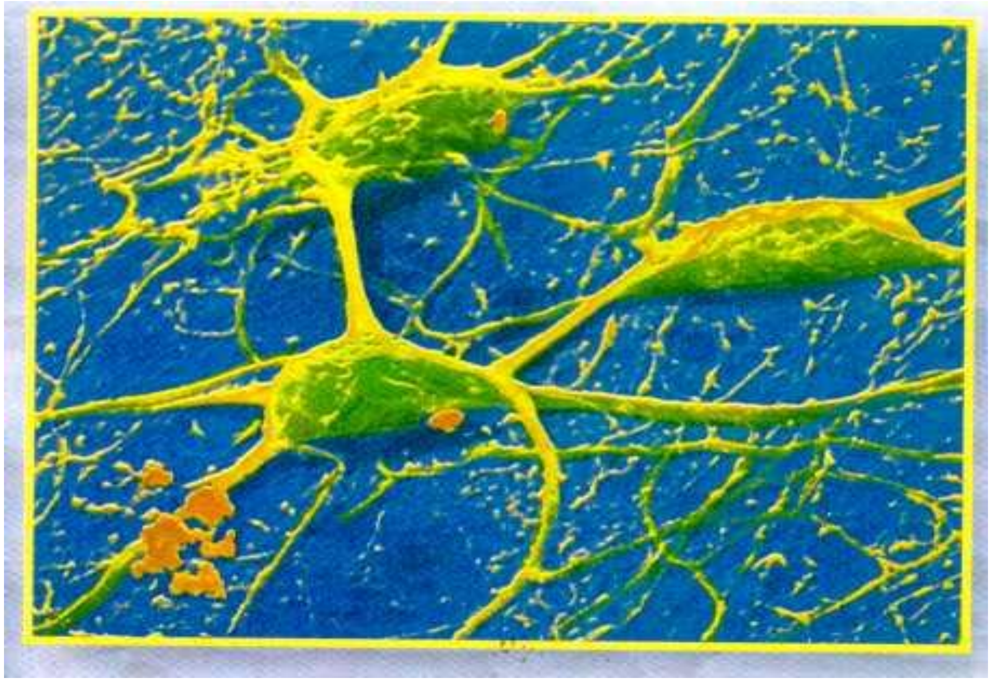
CO分子竖在铂片上

分子人高5nm

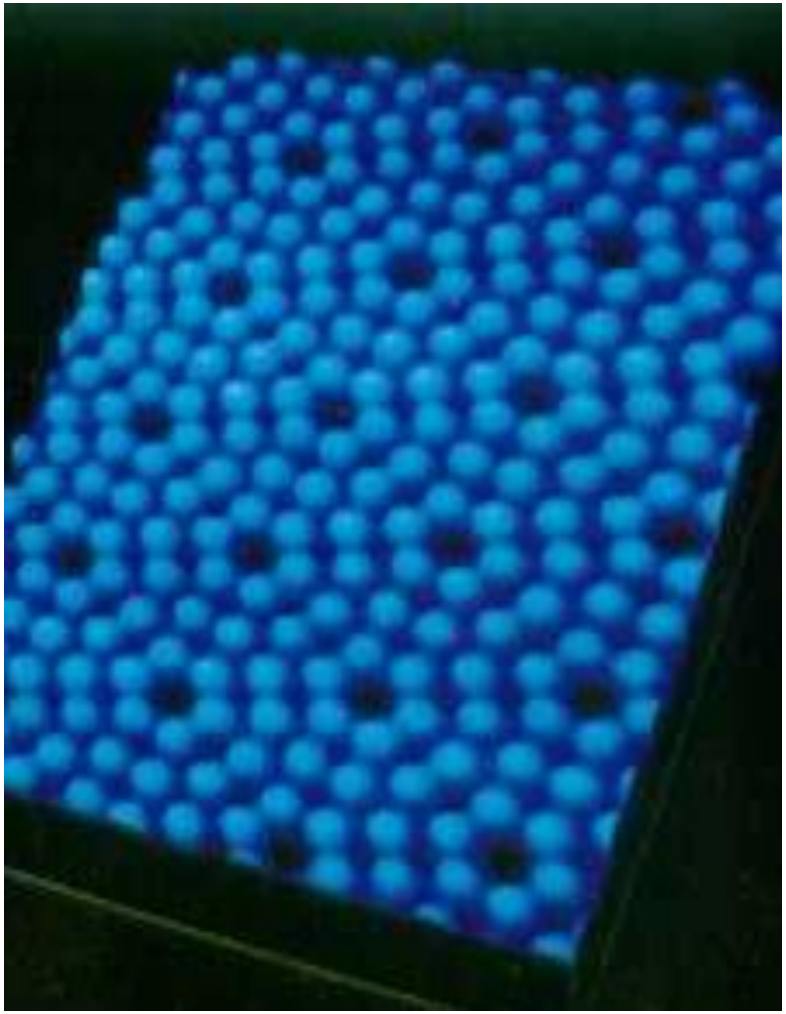


一氧化碳“分子人”

“原子和分子的观察与操纵”



用STM得到的神经细胞象



硅表面STM扫描图象

谐振子

谐振子不仅是经典物理的重要模型，也是量子物理的重要模型，如固体中原子的振动即可用此模型。

1. 势函数 $U(x)=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$

m 振子质量， ω 固有频率， x 位移

2. 定态薛定谔方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-\frac{1}{2}m\omega^2x^2)\psi(x)=0$$

3. 能量本征值

$$E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega=(n+\frac{1}{2})h\nu \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

4. 能量特点：

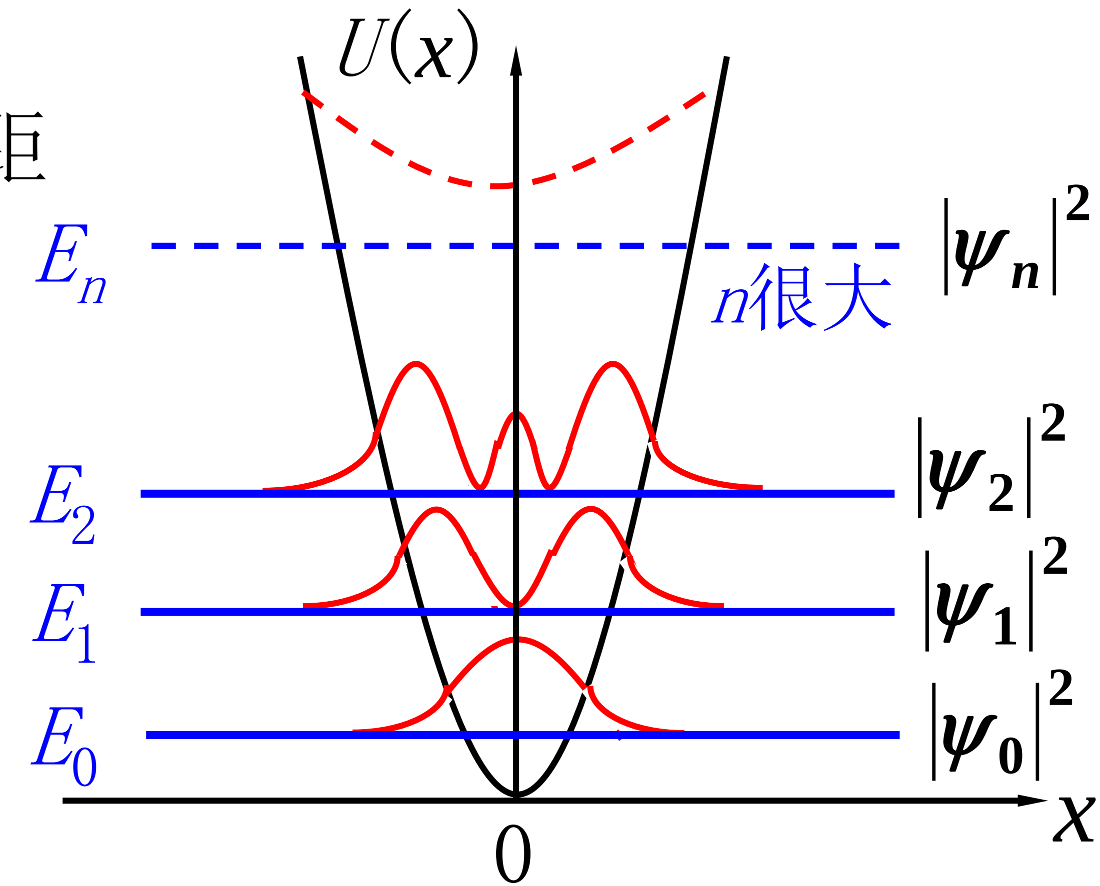
(1) 量子化　等间距

$$\Delta E = h\nu$$

(2) 有零点能

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega > 0$$

符合不确定关系



概率分布特点：　$E < U$ 区有隧道效应