一. 方阵对角化.

$\mathbb{F}$ 域. V 线性空间 $\dim_{\mathbb{F}} V = n$. $\mathcal{L}(V) = \{\varphi: V \to V$ 线性映射$\}$.

1. 基变换: $\underset{(e_1 \cdots e_n)}{V} \longrightarrow \underset{(f_1 \cdots f_n)}{V}$ ↶基.

$$(e_1 \cdots e_n) P = (f_1 \cdots f_n)$$

$$(e_1 \cdots e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f_1 \cdots f_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (e_1 \cdots e_n) P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

i.e. $P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

相似: 线性映射不依赖基的选取.

$$\varphi: V \to V.$$

A, (B) 为 φ 在基 $e_1 \cdots e_n$, $(f_1 \cdots f_n)$ 下对应的矩阵.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P^{-1}"'] & \mathbb{F}^n \arrow[d, "P^{-1}"] \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "B"] & \mathbb{F}^n \end{tikzcd}$$

应有: $P^{-1}A = B P^{-1}$

i.e. $B = P^{-1} A P$

2. (Cayley-Hamilton) $\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) \in \mathbb{F}[\ ]$.

则 $\varphi_A(A) = 0$.

- $\varphi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$. n_i 代数重数.

$m_i = \dim \ker(\lambda_i I - A)$ 几何重数.

Rem: 从 Jordan 标准型看.

3. V, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. M 为 φ-不变子空间

若 φ 可对角化, 则 $\varphi|_M$ 可对角化.

4. V, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$.

φ 可对角化 $\Leftrightarrow$ 对任意 φ-不变子空间 M, 存在

φ-不变子空间 N, 使 $V = M \oplus N$.

Hint: φ 可对角化 $\Leftrightarrow$ $V = \bigoplus_{i=1} V_{\lambda_i}$, $V_{\lambda_i} = \ker(\lambda_i I - A)$.

5. $A \in M_n(\mathbb{C})$. A 相似于上三角阵. (归纳).

6. $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$. $A_1A_2 = A_2A_1$

则 A_1 的特征子空间为 A_2 的不变子空间.

7. $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{C})$. $A_1A_2 = A_2A_1$

则 A_1, A_2 可同时上三角化.

Proof: $\Leftarrow$ 6. 对 n 归纳.

8. J 为集合, $A_j \in M_n(\mathbb{C})$ $\forall j \in J$.

$\forall i, j \in J$, $A_iA_j = A_jA_i$.

则存在 $P \in GL_n(\mathbb{C})$, s.t. $P^{-1}A_jP$ 为上三角阵.

Proof: 设 $X = \{ W \subseteq V \mid \forall j \in J, A_j(W) \subseteq W$

且 $W \neq 0 \}$.

定义偏序：$W_1 \preceq W_2$ 若 $W_2 \subseteq W_1$.

① $X \neq \phi$. $\Leftarrow$ $V \in X$.

② 取 $\{W_k\}_{k\in K}$. 令 $W = \bigcap_{k\in K} W_k$

· W: $\forall j \in J$, $A_j(W) \subseteq W$.

· $W \neq \{0\}$. 设 $m = \min_{k\in K} \dim W_k$.

则 $m \geq 1$.

则 $\exists k \in K$ s.t $\dim W_k = m$.

往证 $W_k = W$.

· $\supseteq$. 定义.

· $\subseteq$. 反证. 略.

Zorn引理⇒存在极大元 $W_0 \in X$. $W_0 \neq 0$.

Claim: $\forall j \in J$, $\exists \lambda_j \in \mathbb{C}$, s.t $W_0 \subseteq \ker(\lambda_j I - A_j)$

proof: 否则, $\ker(\lambda_j I - A_j) \cap W_0 \subsetneq W_0$

则 $0 \neq \ker(\lambda_j I - A_j) \cap W_0 \in X$.

与 W 极小性矛盾. $\square$

最后，利用归纳法.（对 $\dim V$ 归纳）.

9. J 为集合, $A_j \in M_n(\mathbb{C})$ $\forall j \in J$. 可对角化

$\forall i, j \in J$, $A_i A_j = A_j A_i$.

则存在 $P \in GL_n(\mathbb{C})$, s.t. $P^{-1} A_j P$ 为对角阵

10 (随便看看) G 有限 Abel 群, $\varphi: G \to GL_n(\mathbb{C})$ 群同态.

证明: ① $\forall g \in G$, $\varphi(g)^N = I_n$. $N = |G|$.

② $\forall g \in G$. $\varphi(g)$ 可对角化.

③ $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$. $P^{-1}\varphi(g)P$ 对角阵. $\forall g \in G$.

④ $\exists n_1 \dots n_k$, 使 $\varphi(G) \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$.

Abel 群同态

⑤ 令 $\mathbb{C}[G] = \{\sum_{g \in G} \lambda_g [g] \mid \lambda_g \in \mathbb{C}, \forall g \in G\}$.

以 $\{[g]; g \in G\}$ 为基的 $\mathbb{C}$-线性空间.

G 到 $\mathbb{C}[G]$ 上的作用:

$$h.\left(\sum_{g \in G} \lambda_g [g]\right) := \sum_{g \in G} \lambda_g [gh]$$

i.e. $G \xrightarrow{\psi} GL(\mathbb{C}[G])$ 单同态.

④ $\Rightarrow$ $G \simeq \psi(G) \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$.

i.e. 有限 Abel 群 同构于一些循环群的"直和".

Abel 群的直和.

11. 设 $f(X) \in \mathbb{C}[X]$. $f_1 \cdots f_k \in \mathbb{C}[X]$.

$f_1, \cdots, f_k$ 两两互素. $f = f_1 \cdots f_k$

若 $A \in GL(V)$. $f(A) = 0$

则 $V = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker f_i(\mathcal{A})$.

Hint: 归纳.

12. $\varphi_A(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{m_i} \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(\lambda_i I - \mathcal{A}_i)^{m_i}$.

$d_A(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{t_i} \Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(\lambda_i I - \mathcal{A}_i)^{t_i}$.

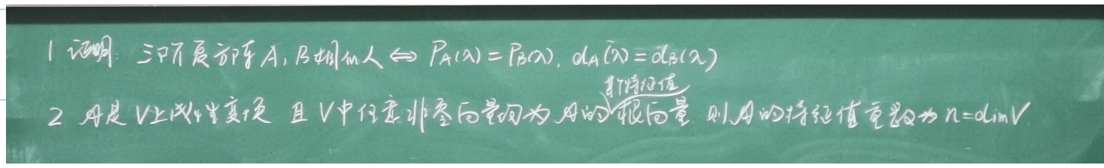
13. Jordan 标准型:

$A \in M_n(\mathbb{C})$. 则 A 相似于 $\begin{pmatrix} J_{a_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{a_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$.

Rq: 必须在 $\mathbb{C}$ 上，或其他代数闭域.

$\mathbb{R}$ 上不行.

例. 小测:



1. 注意必须是 ≤ 3 阶.
   直接利用 Jordan 标准型.

2. $V=\bigoplus_{i=1}^{k}\ker(\lambda_i I-A)^{m_i} \underset{\text{lemme}}{=} \ker(\lambda_k I-A)^{m_k}$.
   $\exists!\, k$.

   lemme: V, $V_1,\cdots,V_n$ 线性空间.
   $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_n \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} V_k \subsetneq V$.

   Fact: $V_1\subsetneq V,\cdots, V_n\subsetneq V$ 有限维 $\mathbb{R}$-线性空间.
   $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} V_i \subsetneq V$.
   p.s.: · 这个 Fact 纯代数方法 蛮难证的.
   · 无限维是错的.

14. ★ 会算 Jordan 标准型.