每日一练(III) 答案

代数基本定理的N个证明 (对应图中 (5), (7), (10)).

(3) 教材已有, 不再复述.

(一). 辐角原理证法.

当 R 充分大时, 对任意 $|z|\geq R$, 多次式 $p(z)$ 满足 $p(z)\neq 0$.
只需求 $p(z)$ 在 $B(0,R)$ 内根的个数. 设 $p(z)=\sum_{k\geq 0}^{n} a_k z^k$,
则有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{p'(z)}{p(z)}dz-n\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{na_nz^{n-1}+\cdots+a_1}{a_nz^n+\cdots+a_0}dz-n\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R}\left|\frac{a_{n-1}\cdot(n-1)z^{n-2}+\cdots+a_1}{a_nz^n+\cdots+a_0}\right|dz$$

$$\underset{(R\gg 1\text{时})}{\leq}\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2|a_{n-1}|\cdot(n-1)R^{n-2}}{|a_n|\cdot R^n/2}\cdot 2\pi R$$

$$=\frac{4(n-1)|a_{n-1}|}{|a_n|}\cdot\frac{1}{R}\to 0,\quad \text{as } R\to\infty.$$

所以辐角原理 $\Rightarrow$ $p(z)$ 有 n 个根.

(二). Rouché 定理.

还是只需在 $R\gg 1$ 时求 $p(z)$ 在 $B(0,R)$ 中的零点个数.
当 R 充分大时, 在 $|z|=R$ 上成立

$$|p(z)-a_nz^n|=|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|<|a_nz^n|.$$

由 Rouché 定理可得 $p(z)$ 的根数与 a_nz^n 的相同, 为 n.

(三). 最大模原理.

假设 $p(z)$ 无零点. 则 $\frac{1}{p(z)}$ 为整函数. 由于 $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{p(z)}=0$, 故 $\exists R>0$, $\forall |z|=R$ 成立 $\left|\frac{1}{p(z)}\right|<\left|\frac{1}{p(0)}\right|$ 从而

$$\max_{|z|=R}\left|\frac{1}{p(z)}\right|<\left|\frac{1}{p(0)}\right|\le\max_{|z|\le R}\left|\frac{1}{p(z)}\right|$$

这与最大模定理矛盾!

判断题

1. X. 在 $|z|=1$ 上成立

$$|2z^4-\sin z\,\cancel{+(\sin z)}-2z^4|=\left|\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right|\le\frac{|e^{iz}|+|e^{-iz}|}{2}\le\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})$$

$$<2=|2z^4|$$

由 Rouché 可得 $2z^4=\sin z$ 在 $B(0,1)$ 内的根数与 $2z^4$ 的根数相同 为4.

2. √ 在 $|z|=1$ 上成立

$$|z^8-4z^5+z^2-1+4z^5|=|z^8+z^2-1|\le 3<|4z^5|$$

Rouché $\Rightarrow$ $z^8-4z^5+z^2-1=0$ 在 $\overline{B(0,1)}$ 内有5个根. 在 $|z|=2$ 上成立 $|z^8-4z^5+z^2-1-z^8|=|-4z^5+z^2-1|\le 4\times2^5+2^2+1<2^8=|z^8|$

Rouché $\Rightarrow$ 方程在 $B(0,2)$ 内有8个根. 所以在 $1<|z|<2$ 上有 $8-5=3$ 个根.

3. X. 例如 $f(z)=e^z$ 在 $\mathbb{C}$ 上不单叶. 但 $f'(z)=e^z$ 恒不为0.

4. X. 例如 $D=\{-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im}z<\frac{\pi}{2}\}$, $f(z)=e^{e^z}$. 则 $\forall x\pm\frac{\pi}{2}i\in\partial D$, 有 $|f(x\pm\frac{\pi}{2}i)|=|e^{\pm ie^x}|=1$. 但在内点 $z=0$ 处 $|f(0)|=e$

5. X. 由若存在, 则 f 在 $B(0,1)$ 上恒非零. 从而 $\frac{1}{f}\in H(B(0,1))$ 且 $\frac{1}{|f(z)|}=\frac{1}{|z|^2+1}$. 由此可得 $\frac{1}{|f|}$ 在 $z=0$ 处取得最大值1. 由

最大模原理可得 f 恒为常数. 矛盾!

6. √. 由 Schwarz 引理可得 $|f(z^n)| \le |z|^n$. 任取 $K \subset\subset B(0,1)$, 设 $\rho = \mathrm{dist}(K, \partial B(0,1)) > 0$. 则

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+p} f(z^n)\right| \le \sum_{n=N+1}^{N+p} |z|^n = \frac{|z|^{N+1}(1-|z|^p)}{1-|z|} \le \frac{(1-\rho)^{N+1}}{\rho} \to 0, \text{ as } N \to \infty$$

故 $\sum f(z^n)$ 内闭一致收敛.

$\boxed{\text{证明 \& 计算}}$

1. (1). 由于 $f - \lambda g = f\left(1-\lambda\frac{g}{f}\right)$. 根据辐角原理, 只需证明 $1-\lambda\frac{g}{f}$ 沿单位圆周转一圈后辐角变化为零.

由于 $|f(z)+g(z)| < |f(z)|+|g(z)|$ 在 $|z|=1$ 时成立, 故 $|z|=1$ 时 $f(z), g(z) \neq 0$, 并且不存在非负实数 α s.t. $\alpha f(z) = g(z)$. 这说明 $1-\lambda\frac{g}{f}$ 不可能取到小于 1 的实值 (因为 $\lambda \geq 0$). 故辐角变化为 0.

(2). 由 (1) 可得 $f-g$ 和 f 在 $B(0,1)$ 内的零点个数相同. 类似地, $g-f$ 和 g 在 $B(0,1)$ 内的零点个数相同. 所以 f 和 g 的零点个数相同.

2. 由单叶可得 $p'(z) = 1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$ 在 $B(0,1)$ 内无根. 设 $p'(z)$ 的根为 $z_1, \cdots, z_{n-1}$, 由韦达定理可得

$$1 \le |z_1 \cdots z_{n-1}| = \left|\frac{1}{n a_n}\right| \Rightarrow |a_n| \le \frac{1}{n}.$$

3. 考虑函数 $F(z) = f(z) f(-z) \in H(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$. 若 z 在上半单位圆周, 则 $-z$ 在下半单位圆周; 若 z 在下半, 则 $-z$ 在上半. 由此可得 $\forall |z|=1$, $|F(z)| \le M_1 M_2$. 由最大模原理可得

$|F(0)| \le M_1 M_2 \Rightarrow |f(0)| \le \sqrt{M_1 M_2}$.

Rmk. 这个辅助函数在习题课上有过类似的构造. 见第六次习题课补充习题5.

4. 设 $a = f(0)$. ~~则~~考虑函数 $g = \varphi_a \circ f$. 其中 $\varphi_a(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

则有 ①. $g \in H(B(0,1))$. ②. $g(B(0,1)) \subset B(0,1)$. ③. $g(0)=0$

由 Schwarz 引理可得 $|g(z)| \le |z|$. $\forall z \in B(0,1)$. 所以

$$|f(z)-f(0)| = \left|\frac{g(z)+a}{1+\bar{a}g(z)} - a\right| = |g(z)|\frac{1-|a|^2}{|1+\bar{a}g(z)|}$$

$$\le z\frac{1-|a|^2}{1-|a||z|}.$$

5.
$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & B(0,2021) \\ \varphi(z)=\frac{z-i}{z+i} \big\downarrow & & \big\downarrow \frac{z}{2021} \\ B(0,1) & \xrightarrow[g]{} & B(0,1) \end{array}$$

如图，$\varphi(z)$ 是将 D 映为 $B(0,1)$ 的分式线性变换且 $\varphi(i)=0$。由此构造函数

$$g(z)=\frac{1}{2021}(f\circ\varphi^{-1})(z)=\frac{1}{2021}f\left(i\frac{1+z}{1-z}\right)$$

对应函数族 $\left\{g=\frac{f\circ\varphi^{-1}}{2021}: f\in\mathcal{F}\right\}$。由于 $g\in H(B(0,1))$，$g(B(0,1))\subset B(0,1)$ 且 $g(0)=0$。所以 $|g(z)|\le|z|$ (Schwarz).

等号成立 $\Leftrightarrow$ $g(z)=e^{i\theta}z$.

故有

$$\sup\{|f(2i)|: f\in\mathcal{F}\}=\sup\{2021|g(\tfrac{1}{3})|: g\in\mathcal{F}'\}$$

$$=\frac{2021}{3}.$$ ⊗.