微分方程

解对初值的连续
依赖性与可微性

考察初值问题 $\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}) \text{ in } D \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$ 的解 $\vec{x} = \vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)$

的一些基本性质：解对初值的连续性,解对初值和参数的连续性,解对初值的可微性.

例(1963) Lorenz方程 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y-x) \\ \dfrac{dy}{dt} = x(\rho - z) \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases}$,其中 σ,ρ,β :常数.

特别, $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = \dfrac{8}{3}$ 时产生混沌(chaos)!

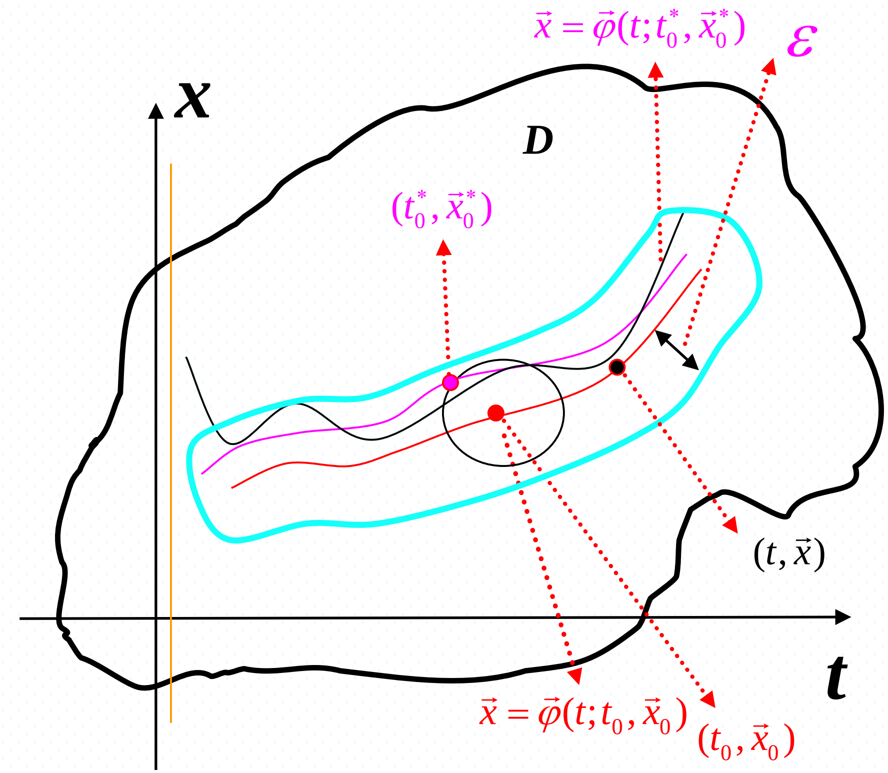
Period Three Implies Chaos

Tien-Yien Li, James A. Yorke

American Mathematical Monthly, Volume 82, Issue 10 (Dec., 1975), 985-992.

图例分析(见右)

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}) \text{ in } D \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$



解可看成是关于 $t, t_0, \vec{x}_0$

函数 $\vec{x} = \vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)$,

满足 $\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(t_0;t_0,\vec{x}_0)$.

例如,$\dfrac{dx}{dt} = x, x(t_0) = x_0$的解为$x = \varphi(t;t_0,x_0) = x_0 e^{t-t_0}$.

- 解对初值的对称性: $\vec{x} = \vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0) \xLeftrightarrow[\text{解存在唯一}]{\text{前提}} \vec{x}_0 = \vec{\varphi}(t_0;t,\vec{x})$

Q: 当初值发生变化时, 对应的解是如何变化的?

当初始值微小变动时, 方程的解变化是否也是很小呢?

按解的存在范围是否有限，分成下面两个问题：

Q1：解在某有限闭区间$[a,b]$上有定义，讨论初值$(t_0,\vec{x}_0)$的微小变化对解的影响情况，称为解对初值的连续依赖性。

内容包括：初值发生小的变化时所得到的解是否仍在$[a,b]$上有定义以及解在整个区间$[a,b]$上是否也变化很小？

Q2：若解在某个无限区间$[a,+\infty)$上有定义，讨论初值$(t_0,\vec{x}_0)$的微小变化是否仍有解在$[a,+\infty)$上有定义，且解在整个区间$[a,+\infty)$上变化也很小？这种问题称为解的稳定性问题，将在下节中讨论。

一　解对初值的连续依赖性

1. 解对初值的连续依赖性的定义

设初值问题$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$的解$\vec{x} = \vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)$在区间$[a,b]$

上存在. 若$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0, \vec{x}_0) > 0$使得对满足$|t_0^* - t_0| < \delta$,

$|\vec{x}_0^* - \vec{x}_0| < \delta$的所有$(t_0^*, \vec{x}_0^*)$,初值问题$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0^*) = \vec{x}_0^* \end{cases}$的解$\vec{x} = \vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*)$

在区间$[a,b]$上存在且$\left|\vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*) - \vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)\right| < \varepsilon, \forall t \in [a,b]$,则称

初值问题的解$\vec{x} = \vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*)$在点$(t_0,\vec{x}_0)$连续依赖于初值$(t_0^*,\vec{x}_0^*)$.

特别地, $t_0 = t_0^*$时称解$\vec{x} = \vec{\varphi}(t;\vec{x}_0^*)$在点$\vec{x}_0$连续依赖于$\vec{x}_0^*$.

2 定理1（解对初值的连续依赖性定理）

设$\vec{f}(t,\vec{x})$在区域D内连续且对$\vec{x}$满足$L-$条件,若$(t_0,\vec{x}_0)\in D$ 时

初值问题$\begin{cases}\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0\end{cases}$有解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)$且$t\in[a,b]$时

$(t,\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0))\in D$,则初值问题$\begin{cases}\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})\\ \vec{x}(t_0^*)=\vec{x}_0^*\end{cases}$的解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*)$

在点$(t_0,\vec{x}_0)$连续依赖于初值$(t_0^*,\vec{x}_0^*)$.

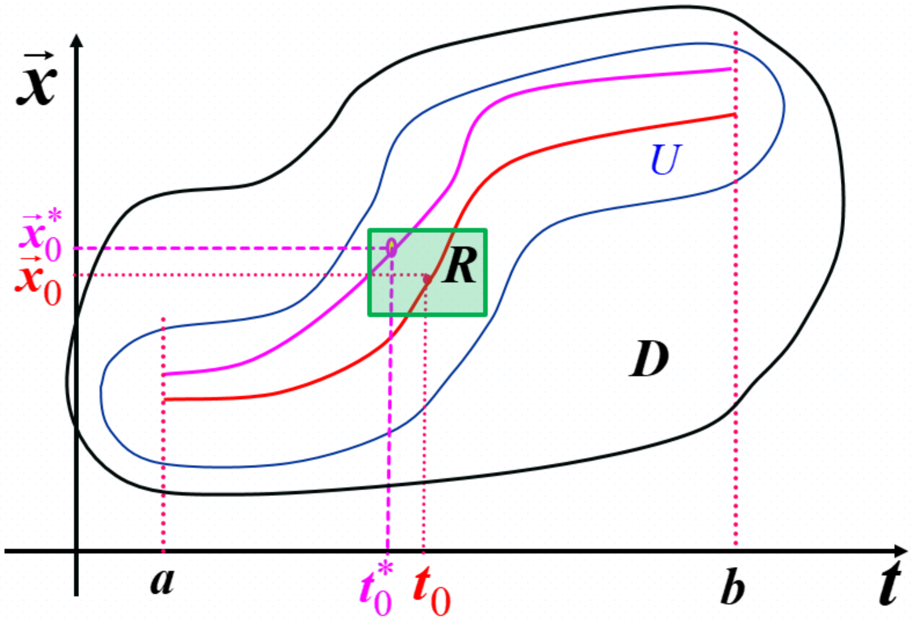
证明:第一步. 找出局部解.

$\forall \varepsilon>0, \exists 0<\delta_1<\varepsilon$使闭域$U=\{(t,\vec{x}) \mid a \le t \le b, |\vec{x}-\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)| \le \delta_1\} \subset D$.

再取$0<\delta<\dfrac{\delta_1}{M+1}e^{-L(b-a)}$ ($L>0$:李氏常数, $M=\max\limits_{U}|\vec{f}(t,\vec{x})|$)和闭矩形

$R=\{(t,\vec{x}) \mid |t-t_0| \le \delta, |\vec{x}-\vec{x}_0| \le \delta\} \subset U$.由Picard定理, $\forall (t_0^*, \vec{x}_0^*) \in R$,在$t_0^*$某

邻域内初值问题$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x}) \\ \vec{x}(t_0^*)=\vec{x}_0^* \end{cases}$有唯一解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*)$,见下图.



第二步. 证明局部不等式成立.

初值问题的解满足积分方程,即$\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s;t_0,\vec{x}_0))ds$,

$\vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*)=\vec{x}_0^*+\int_{t_0^*}^{t}\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s;t_0^*,\vec{x}_0^*))ds$. 两式相减并利用$L-$条件,有

$$
\begin{aligned}
&|\vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*)-\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)| \\
&\le|\vec{x}_0^*-\vec{x}_0|+\left|\int_{t_0}^{t}[\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s;t_0^*,\vec{x}_0^*))-\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s;t_0,\vec{x}_0))]ds\right|+\left|\int_{t_0^*}^{t_0}\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s;t_0^*,\vec{x}_0^*))ds\right| \\
&\le\delta+L\left|\int_{t_0}^{t}|\vec{\varphi}(s;t_0^*,\vec{x}_0^*)-\vec{\varphi}(s;t_0,\vec{x}_0)|ds\right|+M|t_0-t_0^*| \\
&\le\delta(1+M)+L\left|\int_{t_0}^{t}|\vec{\varphi}(s;t_0^*,\vec{x}_0^*)-\vec{\varphi}(s;t_0,\vec{x}_0)|ds\right|.
\end{aligned}
$$

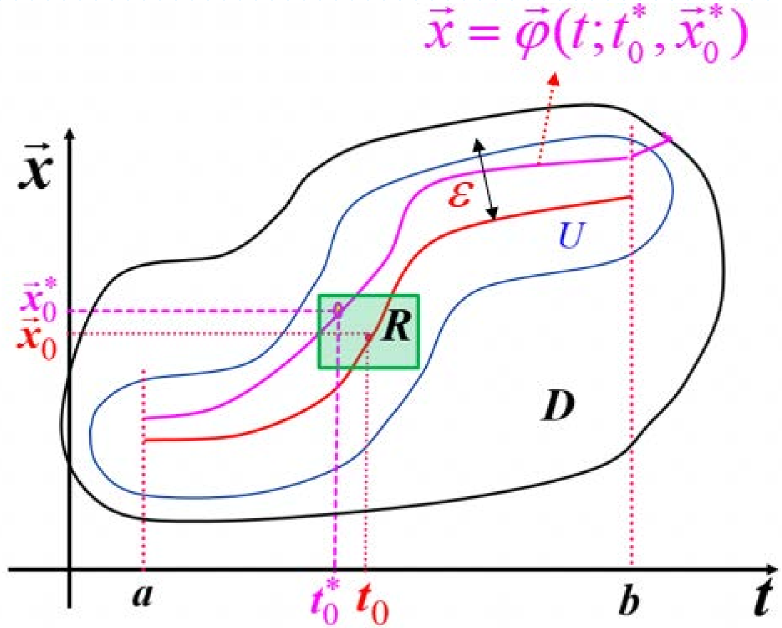
由Gronwall不等式有

$$
\begin{aligned}
&|\vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*)-\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)|\le\delta(1+M)e^{L|t-t_0^*|} \\
&\le\delta(1+M)e^{L(b-a)}<\delta_1<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

上述不等式在t 的某个小区间上成立(局部不等式).

第三步. 证明上述不等式在区间$[a,b]$上成立等价于证明$\vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*)$在$[a,b]$上存在.

仅证$[t_0^*,b]$情形.由解的唯一性知初值问题的解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*)$不能越过曲线$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)\pm\varepsilon\dfrac{\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)}{|\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)|}$,而由解的延伸定理知$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*)$可延伸到$D$的边界,故它向右延伸必由$t=b$穿出,从而$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*)$必在$[t_0^*,b]$上存在.证毕.



例(P222习题2)

2. 设 $x=\varphi_n(t)$ 是微分方程

$$\frac{dx}{dt}=1+x^2$$

以 $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ 为初值的解，试证：对于给定的 $\varepsilon>0$，存在 N 使得当 $n\geqslant N$ 时 $\varphi_n(t)$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$ 上存在，且在此区间上成立着不等式

$$|\varphi_n(t)-\operatorname{tg} t|<\varepsilon.$$

证明　因 $f(t,x)=1+x^2$ 在 O_{tx} 平面上连续且满足局部 $L-$条件，易知

方程 $\dfrac{dx}{dt}=1+x^2$ 满足 $x(0)=0$ 的唯一饱和解为 $x=\tan t, t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$.

由 $(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n^2})\to(0,0)$ $(n\to+\infty)$ 及解对初值的连续依赖性定理知，

存在 N，当 $n>N$ 时 $\varphi_n(t)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon,\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon]$ 上存在且满足不等式

$|\varphi_n(t)-\tan t|<\varepsilon$，故结论成立.

3 定理2（解对初值的连续性定理）

设$\vec{f}(t,\vec{x})$在区域D内连续且对$\vec{x}$满足$L-$条件,则

初值问题$\begin{cases}\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0\end{cases}$的解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;\vec{x}_0)$在它的存在范围内关于$(t,\vec{x}_0)$连续.

注：上述结论是在t_0不变的情况下得到的,t_0变动时结论类似.

证明：由$L-$条件和Gronwall不等式有

$$
\begin{aligned}
&|\vec{\varphi}(t;\vec{x}_0^*)-\vec{\varphi}(t;\vec{x}_0)| \\
&\le|\vec{x}_0^*-\vec{x}_0|+\left|\int_{t_0}^{t}[\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s;\vec{x}_0^*))-\vec{f}(s,\vec{\varphi}(s;\vec{x}_0))]ds\right| \\
&\le|\vec{x}_0^*-\vec{x}_0|+L\left|\int_{t_0}^{t}|\vec{\varphi}(s;\vec{x}_0^*)-\vec{\varphi}(s;\vec{x}_0)|ds\right| \\
&\le|\vec{x}_0^*-\vec{x}_0|e^{L|t-t_0|}.
\end{aligned}
$$

故$\forall t_1,t_2\in I=[t_0-h,t_0+h]$,成立

$$
\begin{aligned}
&|\vec{\varphi}(t_1;\vec{x}_0^*)-\vec{\varphi}(t_2;\vec{x}_0)| \\
&\le|\vec{\varphi}(t_1;\vec{x}_0^*)-\vec{\varphi}(t_2;\vec{x}_0^*)|+|\vec{\varphi}(t_2;\vec{x}_0^*)-\vec{\varphi}(t_2;\vec{x}_0)| \\
&\le|\vec{\varphi}(t_1;\vec{x}_0^*)-\vec{\varphi}(t_2;\vec{x}_0^*)|+|\vec{x}_0^*-\vec{x}_0|e^{L|t_2-t_0|} \\
&\le|\vec{\varphi}(t_1;\vec{x}_0^*)-\vec{\varphi}(t_2;\vec{x}_0^*)|+|\vec{x}_0^*-\vec{x}_0|e^{Lh}.
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 令$t_1\to t_2,\vec{x}_0^*\to\vec{x}_0$有$|\vec{\varphi}(t_1;\vec{x}_0^*)-\vec{\varphi}(t_2;\vec{x}_0)|\to 0$.证毕.

二　解对初值的可微性

对含参量$\vec{\lambda}$的微分方程$\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\lambda})$,设$\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\lambda})$在区域

$D_\lambda=\{(t,\vec{x},\vec{\lambda})\,|\,(t,\vec{x})\in D,\vec{\lambda}\in\Omega\subset\mathbb{R}^m\}$连续且在$D_\lambda$内一致地关于$\vec{x}$满足局部$L-$条件,即对$\forall(t,\vec{x},\vec{\lambda})\in D_\lambda$存在以$(t,\vec{x},\vec{\lambda})$为中心的球$B\subset D_\lambda$,使$\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\lambda})$在$B$ 内对$\vec{x}$ 满足$L-$条件,其中常数L与$\vec{\lambda}$无关.

则对$\forall\vec{\lambda}_0$,方程$\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\lambda})$过点$(t_0,\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$的解存在唯一性,

记这个解为$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$.

1 解对初值和参数的连续依赖定理

设$\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\lambda})$在区域$D_\lambda$连续且在$D_\lambda$内一致地关于$\vec{x}$满足局部$L-$条件,$(t_0,\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)\in D_\lambda$,$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)$是方程$\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\lambda})$过点$(t_0,\vec{x}_0)$的解,在区间$a\le t\le b$上有定义,其中$a\le t_0\le b$,则对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon,a,b)>0$,使

$$(t_0^*-t_0)^2+|\vec{x}_0^*-\vec{x}_0|^2+|\vec{\lambda}-\vec{\lambda}_0|^2\le\delta^2$$

时,方程$\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\lambda})$过点$(t_0^*,\vec{x}_0^*)$的解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*,\vec{\lambda})$在区间$a\le t\le b$上也有定义,且

$$\left|\vec{\varphi}(t;t_0^*,\vec{x}_0^*,\vec{\lambda})-\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)\right|<\varepsilon,\quad a\le t\le b.$$

2 解对初值和参数的连续性定理

设$\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\lambda})$在区域$D_\lambda$连续且在$D_\lambda$内一致地关于$\vec{x}$满足局部$L-$条件,则方程$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\lambda})$的解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0,\vec{\lambda})$作为$t,t_0,\vec{x}_0,\vec{\lambda}$的函数在存在范围内是连续的.

3 解对初值可微性定理

若函数$\vec{f}(t,\vec{x})$以及$\nabla_{\vec{x}}\vec{f}(t,\vec{x})$都在区域$D$内连续,则方程$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$的解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t;t_0,\vec{x}_0)$作为$t,t_0,\vec{x}_0$的函数在存在范围内是连续可微的.

上述定理的证明可以参考丁同仁“常微分方程教程”第二版或者王高雄“常微分方程”第三版