例　r次被击中后完全被催毁. 每次射击过程相互独立以概率 p 命中目标.

以 X 表示目标物被毁时总射击次数. 求 X 分布律.

$X = r, r+1, r+2, \cdots$

对 $k \ge r$. $p(X=k) = C_{k-1}^{r-1} p^{r-1}(1-p)^{k-r} \cdot p$

$p^r \sum_{k=r}^{+\infty} C_{k-1}^{r-1}(1-p)^{k-r} \overset{?}{=} 1$

$(\frac{1}{1-x})' = (\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1})' \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)x^{k-2}$

$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k=3}^{\infty}(k-1)(k-2)x^{k-3}$　　代入 $x = 1-p$.

$\Rightarrow \sum_{k=r}^{+\infty} C_{k-1}^{r-1}(1-p)^{k-r} = \frac{1}{p^r}$

hw: 2.1.2, 2.1.4, 2.1.5, 2.3.2, 2.3.3

满足: 存在非负函数 $f(u)$, s.t. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ 称 X 为连续型 r.v.

说明 1° $F(x)$ 是连续函数

2° x 是 $f(x)$ 的连续点　$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \to f(x_0)$　$(\Delta x \to 0)$

$f(x_0)\Delta x \approx p(X \le x_0+\Delta x) - p(X \le x_0) = p(x_0 < X \le x_0+\Delta x)$

$f(x)$ 称为概率密度函数.

3° $p(X=a) = \lim_{n\to+\infty} p(a-\frac{1}{n} < X \le a) = \lim_{n\to+\infty} p(a) - F(a-\frac{1}{n}) = 0$

4° $p(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx$

性质　1° $f(x) \ge 0$　　2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

满足性质 1°. 2° 的函数 $f(x)$ 都可以看作某 r.v. 的 p.d.f.

例　某电子元件的使用寿命 X.

p.d.f.　$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & x > 1000 \\ 0, & x \le 1000 \end{cases}$

求　1° 常数 c　　2° $p(X \le 1700 \mid 1500 < X \le 2000)$

3° 某设备中有 3 个此类元件, 问 1500 小时内至多 1 个损坏的概率.

解：(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{1000}^{+\infty} \frac{c}{x^2}\,dx = \frac{c}{1000} = 1 \Rightarrow c = 1000$

(2) $P(X \le 1700 \mid 1500 < X \le 2000)$

$$= \frac{P(1500 < X \le 1700)}{P(1500 < X \le 2000)} = \frac{\int_{1500}^{1700} \frac{1000}{x^2}\,dx}{\int_{1500}^{2000} \frac{1000}{x^2}\,dx} \approx 0.4706$$

(3) $P(X < 1500) = \int_{1000}^{1500} \frac{1000}{x^2}\,dx = \frac{1}{3}$

P(至多1个损坏) $= P$(没有损坏) $+ P$(1个损坏) $= (1-\frac{1}{3})^3 + 3\cdot\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{3})^2$

混合型

F_1 为离散型 r.v. 分布函数；F_2 为连续型 r.v. 分布函数.

$0 < \alpha < 1$，$F(x) = \alpha F_1(x) + (1-\alpha) F_2(x)$　$F(x)$ 满足单调性，有界，右连续是混合型分布.

例 掷飞镖　(x, y) 落点，　$X = \sqrt{x^2+y^2}$　标靶 $r \le 3$

掷中标靶的可能性为 α，脱靶的可能性为 $1-\alpha$.

$Z = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & \text{上靶} \\ 0, & \text{脱靶} \end{cases}$　求 Z 的分布函数.

$P(Z \le R) = P(Z \le R \mid \text{脱靶})(1-\alpha) + P(Z \le R \mid \text{中靶})\cdot\alpha$

$$\left.\begin{array}{ll} R<0 & P(Z \le R) = 0 \\ 0 \le R \le 3 & P(Z \le R) = (1-\alpha) + \alpha\cdot\frac{R^2}{3^2} \\ R \ge 3 & P(Z \le R) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(Z \le R) = \begin{cases} 0, & R < 0 \\ \alpha\cdot\frac{R^2}{9} + (1-\alpha), & 0 \le R < 3 \\ 1, & R \ge 3 \end{cases}$$

§2.5 随机向量.

一. $X_1, \cdots, X_n$ 定义在 (Ω, F, P) 的 n 个 r.v. $(X_1, \cdots, X_n)$ n 维随机向量，n-dim r.v.

$F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n)$ 称为联合分布函数.

$n=2$　(X, Y)　$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$

引理：$F(x,y)$ 是 r.v. (X,Y) 联合分布函数.

1° $0 \le F(x,y) \le 1$, $\forall (x,y) \in R^2$

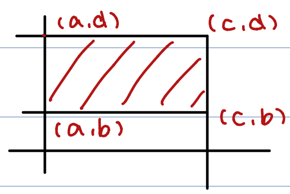
2° $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y)=0$, $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=0$

3° 固定一个变量，则 $F(X,Y)$ 关于另一变量单调增 $y_1<y_2$ $F(x,y_1) \le F(x,y_2)$

4° $a<c$, $b<d$ $F(c,d)-F(c,b)-F(a,d)+F(a,b) \ge 0$

$F(c,d)-F(c,b)-F(a,d)+F(a,b) = P(X\le c, b<Y\le d) - P(X\le a, b<Y\le d)$

$= P(a<X\le c,\ b<Y\le d) \ge 0$



5° $F(x,y)$ 固定 y，关于 x 右连续；固定 x，关于 y 右连续.

$F(x,y)=\begin{cases} 1 & x+y\ge 0 \\ 0 & x+y<0 \end{cases}$ 满足 2°, 3°, 5° 但不满足 4°.

$F(1,1)-F(-1,1)-F(1,-1)+F(-1,-1) = 1-1-1+0=-1 \Rightarrow$ 不满足 4°

推广到 n 维 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$A=(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\times\cdots\times(a_n,b_n]$

顶点集 $V=\{\{a_1,b_1\}\times\{a_2,b_2\}\times\cdots\times\{a_n,b_n\}\}$

$v\in V$. $i=v$ 的坐标中取 $\{a_k\}$ 的个数.

$sgn(v)=(-1)^i$

$P((x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A)=\sum\limits_{v\in V} sgn(v)F(v)\ge 0$

二. 边缘分布.

(X,Y) 联合分布 $F(x,y)$.

其中X.Y各自的分布 $F_X(x)=P(X\le x)$, $F_Y(y)=P(Y\le y)$ 称为X.Y的边缘分布函数.

$F_X(x)=P(X\le x)=P(X\le x, Y\in R)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$

$P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(X\le x, Y\le n))=\lim\limits_{n\to\infty}P(X\le x, Y\le n)$

例 (X,Y)联合分布函数.

$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{2})\quad (x,y)\in R^2$

求 1° 常数A.B.C的值 2° X.Y边缘分布 3° $P(X>2)$

解: (1)

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan\frac{y}{2})=0\\ \lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0\end{cases}\Rightarrow B=C=\frac{\pi}{2},\quad A=\frac{1}{\pi^2}$$

(2) $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})$

$F_Y(y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{2})$

(3) $P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F_X(2)$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ n-dim r.v. $(X_{i_1},\cdots,X_{i_k})$联合分布. K维边缘分布.

三. 离散型随机向量.

(X,Y) 取值为至多可列个.

Y \ X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{n2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
y_m	p_{1m}	p_{2m}		p_{nm}
$\vdots$				

分布列 $P((X,Y)=(x_i,y_j))=p_{ij}$

$0\le p_{ij}\le 1$, $\sum\limits_{i,j}p_{ij}=1$

hw. 2.3.5, 2.4.2