$\int_a^b f(x)dg(x)$ $g(x)$单调有界 $f(x)\in C[a,b]$ R-S积分存在

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dg(x) = \lim\limits_{\substack{a\to+\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dg(x)$

若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, dF(x) < \infty$，其中 $F(x)$ 是 r.v. X 的分布函数，称 $E(X)$ 存在。 $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dF(x)$

连续型：$dF(x) = F(x) - F(x-0)$ 离散型：$dF(x) = f(x)dx$

二、(Ω, F, P) $X: \Omega \to R$ 可测函数。

抽象积分。

定义 1° 简单随机变量（只取有限个值）

$A_i = \{w \mid x(w) = x_i\}$ $X = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}$ 定义 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(A_i)$

2° 对非负随机变量 X。

$A_n = \{w \mid x > n\}$ $A_{ni} = \{w \mid \frac{i-1}{2^n} \le x < \frac{i}{2^n}\}$

$X_n = \sum_{i=1}^{n\cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n} I_{ni} + n I_{A_n}$ $X_n \uparrow$ $|X_n - X| < \frac{1}{2^n} \to 0$

定义 $E(X) = \lim\limits_{n\to\infty} E(X_n)$

3° 一般随机变量 X。 $X = X^+ - X^-$， $X^+ = \max\{X, 0\}$ $X^- = \max\{-X, 0\}$

若 $E(X^+)$，$E(X^-)$ 都存在，定义 $E(X) = E(X^+) - E(X^-)$

记号 $\int_\Omega X(w)\, dp = E(X)$

hw: 4.9.4, 4.9.6, 4.10.1, 4.10.2

性质：(1) $E[C] = C$ (2) $X \ge 0$，则 $E(X) \ge 0$

(3) $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$ (4) 若 $p(X \ge a) = 1$，则 $E[X] \ge a$

E "连续性"

$X_n(w) \to X(w)$ 对 $w \in \Omega_0$，$P(\Omega_0) = 1$

(1) 单调收敛 $0 \le X_n \le X_{n+1}$ $\forall n$，$w \in \Omega$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$

(2) 控制收敛 $\exists$ r.v. Y s.t. $|X_n| \le Y$ 且 $E[Y] < \infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$

(3) 有界收敛 若 $|X_c| \le C$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$

定理 X, Y 相互独立. $E(|X|), E(|Y|) < \infty$ 则 $E(XY) = E(X)E(Y)$

1° 若 X, Y 是简单的 r.v. $X = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}$, $Y = \sum_{j=1}^{m} y_j I_{B_j}$ $XY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j I_{A_i B_j}$

$E[XY] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(A_i B_j) \overset{独立}{=\!=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j P(A_i)P(B_j) = \sum_i x_i P(A_i) \sum_j y_j P(B_j) = E[X]E[Y]$

2° 若 $X, Y \ge 0$. X_n 单调增收敛于 X; Y_n 单调增收敛于 Y. 可以取 X_n 与 Y_n 独立.

$E[X_n Y_n] = E[X_n]E[Y_n]$ 令 $n \to +\infty$ 由单调收敛定理, $E[XY] = E[X]E[Y]$

3° 一般 $X = X^+ - X^-$, $Y = Y^+ - Y^-$.

$E[XY] = E[X^+Y^+ - X^-Y^+ - X^+Y^- + X^-Y^-] = (E[X^+] - E[X^-])(E[Y^+] - E[Y^-]) = E[X]E[Y]$

$E[g(X)] = \int_\Omega g(x)\,dP = \int_\Omega g(x)\,dF(x)$

$(\Omega, \mathcal{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_F)$ $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$

1° $g(x)$ 简单可测函数 2° $g(x) \ge 0$ 3° 一般.

定理: 若 X, Y 同分布 $\Leftrightarrow$ $\forall$ 有界连续函数 g, $E[g(X)] = E[g(Y)]$

证:

"$\Rightarrow$" $E[g(X)] = \int_R g(x)\,dF(x)$ $E[g(Y)] = \int_R g(y)\,dF(y) \Rightarrow E[g(X)] = E[g(Y)]$

"$\Leftarrow$" $F_X(x) = P(X \le x) = E[I_{\{X \le x\}}] = E[I_{(-\infty, x]}(X)]$

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & , t \le x \\ -\frac{1}{\varepsilon}t + 1 + \frac{x}{\varepsilon} & , x < t < x+\varepsilon \\ 0 & , t \ge x+\varepsilon \end{cases}$$

$F_X(x) = E[I_{(-\infty,x]}(X)] \le E[g_\varepsilon(X)] = E[g_\varepsilon(Y)] \le F_Y(x+\varepsilon)$ 令 $\varepsilon \to 0$, $F_X(x) \le F_Y(x)$

同理 $F_Y(x) \le F_X(x)$, 则 X, Y 同分布.

定理 $k > 0$ $E(|X|^k) < \infty$. 则对 $\forall\, 0 < r < k$, $E(|X|^r) < \infty$ 且 $(E|X|^r)^{\frac{1}{r}} \le (E|X|^k)^{\frac{1}{k}}$

证：$|X|<1$时，$|X|^r<1$；$|X|\ge 1$时，$|X|^r\le |X|^k$

$$E|X|^r=\int_\Omega |X|^r dp=\int_{|X|<1}|X|^r dp+\int_{|X|\ge 1}|X|^r dp\le 1+\int_\Omega |X|^k dp<\infty.$$

Jensen inequality：$g(x)$凸函数，则$E[g(X)]\ge g(E[X])$

$g(x)=x^{\frac{k}{r}}$，$x>0$ 凸函数 $g(E|X|^r)\le Eg(|X|^r)\Rightarrow (E|X|^r)^{\frac{1}{r}}\le (E|X|^k)^{\frac{1}{k}}$

§5.2 特征函数

离散型 $G[S^X]=\sum p(X=j)s^j$ 推广 $M(t)=E[e^{tX}]$ 矩母函数.

$e^{tX}=1+tX+\frac{(tX)^2}{2!}+\cdots+\frac{(tX)^n}{n!}+\cdots \Rightarrow E(e^{tX})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E(X^n)}{n!}t^n$ $E(X^n)=M^{(n)}(0)$

性质：若$M(t)<\infty$ （当$|t|<r$）

则(1) $E[X^k]=M^{(k)}(0)$ (2) 若X.Y相互独立，$M_{X+Y}(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)$

(3) $M_X(t)=M_Y(t)$，则X.Y同分布.

例 $X\sim N(0,1)$

$$M_X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}e^{\frac{t^2}{2}}dx=e^{\frac{t^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}dx=e^{\frac{t^2}{2}}$$

$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ $Y=\sigma X+\mu$

$M_Y(t)=E[e^{tY}]=E[e^{t\sigma X+t\mu}]=e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$

联合矩母函数$(X_1,\cdots,X_n)$ $M(t_1,\cdots,t_n)=E[e^{t_1X_1+\cdots+t_nX_n}]$

若$X_1,\cdots,X_n$相互独立. $M(t_1,\cdots,t_n)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t_i)$

$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)\pi}$，$E[X]$不存在. 缺点：$M(t)$不一定存在

特征函数：$\varphi(t)=E[e^{itX}]$

注：X.Y是r.v. $X+iY$是复值r.v $E[X+iY]\triangleq E[X]+iE[Y]$

$Z_1=X_1+iY_1$，$Z_2=X_2+iY_2$独立. $\Leftrightarrow (X_1,Y_1),(X_2,Y_2)$相互独立.

$\Leftrightarrow P(X_1\le a, Y_1\le b, X_2\le c, X_2\le d) = P(X_1\le a, Y_1\le b)\cdot P(X_2\le c, Y_2\le d)$

$\varphi(t) = E[\cos(tX)+i\sin(tX)] = E[\cos(tX)] + iE[\sin(tX)]$ 存在

定理 特征函数 $\varphi(t)$ 满足

(1) $\varphi(0)=1$, $|\varphi(t)|\le 1$, $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$ (2) $\varphi(t)$ 是一致连续的函数.

(3) $\varphi(t)$ 非负定. 对 $\forall t_1,\cdots,t_n\in R$, $z_1,\cdots,z_n\in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{k,j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)\cdot z_k\cdot \bar{z}_j \ge 0$

证: (1) $\varphi(0)=E[e^0]=1$ $|\varphi(t)| = |E(e^{itX})| \le E(|e^{itX}|)=1$

$\varphi(-t) = E[e^{-tiX}] = E[\overline{e^{itX}}] = \overline{\varphi(t)}$

(2) $|\varphi(t+h)-\varphi(t)| = |E(e^{i(t+h)X} - e^{itX})| = |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t+h)x} - e^{itx}\, dF(x)|$

$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}|\cdot|e^{ihx}-1|\, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ihx}-1|\, dF(x)$

对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta$, $|h|<\delta$ 时, $|e^{ihx}-1|<\varepsilon$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon\, dF(x) = E[\varepsilon]=\varepsilon$

$\therefore |\varphi(t+h)-\varphi(t)|<\varepsilon$

(3) $\sum\limits_{k,j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)\, z_k\cdot\bar{z}_j = \sum\limits_{k,j=1}^{n} E[e^{i(t_k-t_j)X}]\, z_k\bar{z}_j = E(\sum\limits_{k,j=1}^{n} e^{it_kX}\cdot z_k\cdot \overline{e^{it_jX}}\cdot \bar{z}_j)$

$= E(\sum\limits_{k=1}^{n} e^{it_kX} z_k \overline{\sum\limits_{j=1}^{n} e^{it_jX} z_j}) = E(|\sum\limits_{k=1}^{n} e^{it_kX} z_k|^2) \ge 0$

定理: 若 $E(|X|^k)<\infty$, $\varphi^{(j)}(0) = i^j E[X^j]$ $j\le k$

证: $\varphi(t) = 1+(it)E[X] + \frac{(it)^2}{2!}E[X^2] + \cdots + \frac{(it)^k}{k!}E[X^k] + o(t^k)$

hw: 5.6.2, 5.6.4, 5.7.2, 5.7.3