第六讲 2023.3.24

①

上次讲到

Thm 设 $E \in \mathcal{L}$

(i) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists G$ 开, s.t. $E \subset G$ 且

$$m(G \setminus E) < \varepsilon.$$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F$ 闭 s.t. $F \subset E$ 且

$$m(E \setminus F) < \varepsilon.$$

(iii) 如果 $m(E) < \infty$, 则: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$ 紧 s.t. $K \subset E$ 且

$$m(E \setminus K) < \varepsilon$$

(iv) 如果 $m(E) < \infty$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Q_1, \cdots, Q_N$, s.t.

$$m\left(E \,\Delta \left(\bigcup_{k=1}^{N} Q_k\right)\right) < \varepsilon$$

<u>Pf of (iii)</u> 令 $Q_k \overset{\text{def}}{=} [-k, k]^n$

$k = 1, 2, \cdots$

2023.3.24

②

$$\Longrightarrow \quad E \cap Q_k \nearrow E$$

测度连续性

$$\Longrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \ \exists k \ \ s.t.$$

$$m(E \cap Q_k) > m(E) - \frac{\varepsilon}{2}$$

另一方面, by (ii) $\exists K$ 闭 s.t.

$$K \subset E \cap Q_k \qquad (\Rightarrow K \text{ 紧})$$

则

$$m((E \cap Q_k) \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad m(E \setminus K)$$

$$= m(E \setminus (E \cap Q_k)) + m((E \cap Q_k) \setminus K)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(iv) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Q_k$, $k = 1, 2, \cdots$ s.t. $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < m(E) + \frac{\varepsilon}{2} < \infty$$

$$\Longrightarrow \quad \exists N \ \ s.t. \ \sum_{k=N+1}^{\infty} |Q_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

2023.3.24

③

令 $F \xlongequal{def} \bigcup_{k=1}^{N} Q_k$

$\Rightarrow E \setminus F \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \setminus F \subset \bigcup_{K=N+1} Q_k$

$\Rightarrow m(E \setminus F) \le m\left(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} Q_K\right) \le \sum_{K=N+1}^{\infty} |Q_K| < \frac{\varepsilon}{2}$

而 $m(F \setminus E) \le m\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right) \setminus E\right)$

$\le \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| - m(E) < \frac{\varepsilon}{2}$

Thm 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，则

E 可测 $\Longleftrightarrow \exists G$ (G_δ 型) 和 N_1 (零测集) s.t.

$E = G \setminus N_1$

$\Longleftrightarrow \exists F$ (F_σ 型) 和 N_2 (零测集) s.t.

(HW)

$E = F \cup N_2$

Pf "$\Leftarrow$" 平凡

"$\Rightarrow$" $\forall k$, $\exists G_k$ 开, s.t. $E \subset G_k$ 且 ④

$$m(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}$$

令 $G \overset{def}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ (G_δ 集)

$$\Rightarrow \quad G \setminus E \subset G_k \setminus E$$

$$\Rightarrow \quad m(G \setminus E) \le m(G_k \setminus E) < \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow m(G \setminus E) = 0$$

令 $N_1 \overset{def}{=} G \setminus E$

Thm 1° (平移不变性) $E \in \mathcal{L}$. $h \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ $E + h \in \mathcal{L}$ 且 $m(E+h) = m(E)$

2° (旋转不变性) $E \in \mathcal{L}$, $T \in O(n)$

$\Rightarrow$ $T(E) \in \mathcal{L}$ 且 $m(T(E)) = m(E)$

$$\underbrace{T(E)}_{\overset{def}{=}\ \{Tx : x \in E\}}$$

3° (反射不变性)

$E \in \mathcal{L} \Rightarrow -E \in \mathcal{L}$ 且 $m(-E) = m(E)$

4° $E \in \mathcal{L}$, $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda E \in \mathcal{L}$ 且

$$m(\lambda E) = \lambda^n m(E)$$

Thm (Vitali, 1905) $\mathcal{L} \neq 2^{\mathbb{R}}$,

即 $\mathbb{R}$ 中一定有不可测集

选择公理 (Axiom of Choice, AC)

设 $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族互不相交的非空集合, 则

$\exists\, Y \subset \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ s.t. $\forall \alpha \in I$, $Y \cap E_\alpha$ 是一个

独点集 $\{x_\alpha\}$.

AC $\Leftrightarrow$ Zorn's lemma $\Leftrightarrow$ 良序原理.

Banach–Tarski paradox (1924)

Pf of Vitali Thm

在 $[0,1]$ 中引入等价关系：

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x - y \in \mathbb{Q}$$

令

$$E_\alpha \overset{\text{def}}{=} [\alpha] = \{x \in [0,1] : x \sim \alpha\}$$

1° $\forall \alpha, \beta \in [0,1]$，要么 $E_\alpha \cap E_\beta = \phi$，要么 $E_\alpha = E_\beta$

$\left(\text{若 } \exists \eta \in E_\alpha \cap E_\beta \Rightarrow \eta \sim \alpha \text{ 且 } \eta \sim \beta \Rightarrow \alpha \sim \beta \Rightarrow E_\alpha = E_\beta \right)$

2° $\forall \alpha$，E_α 是可数集

3° $[0,1] = \biguplus_\alpha E_\alpha$

由 AC，$\exists A \subset \bigcup_\alpha E_\alpha$ s.t. $\forall \alpha$，$A \cap E_\alpha = \{x_\alpha\}$.

Claim A 不可测

记 $\mathbb{Q}\cap[-1,1]=\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$

令 $A_k \overset{def}{=} A + r_k$, $k=1,2,\cdots$

(1) A_k, $k=1,2,\cdots$ 互不相交

假设 $\exists\, j\neq k$, s.t. $A_j\cap A_k\neq\phi$,

$\Rightarrow \exists\, \alpha\neq\beta \quad (r_j\neq r_k)$ s.t.

$$A_j \ni x_\alpha + r_j = x_\beta + r_k \in A_k$$

$\Rightarrow x_\alpha - x_\beta = r_k - r_j \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow x_\alpha \sim x_\beta$

与 $A\cap E_\alpha$ 是独点集矛盾.

(2) $[0,1]\subset \biguplus_{k=1}^{\infty} A_k \subset [-1,2]$

平凡, $\because \forall A_k\subset[-1,2]$

$\forall x\in[0,1]$, $\exists\,\alpha$ s.t.

$$x\sim x_\alpha \in E_\alpha\cap A$$

$\Rightarrow \exists r_k \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ s.t. $x - x_\alpha = r_k$

$\Rightarrow x = x_\alpha + r_k \in A_k$

现在证明 $A \notin \mathcal{L}$

假设 $A \in \mathcal{L}$

$\Rightarrow A_k \in \mathcal{L}, \quad \forall k$

由 (1), (2) 和可数可加性

$$1 \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)}_{= m\left(\biguplus_{k=1}^{\infty} A_k\right)} \leq 3$$

而由平移不变性,

$$m(A_k) = m(A), \quad \forall k$$

$\Rightarrow 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A) \leq 3$, 矛盾

<u>Rmk</u> 同样的推理可以证明: 不存在

$\mu : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ 同时满足

(i) $\mu([0, 1]) = 1$

(ii) 可数可加性

(iii) 平移不变性

可测函数

实分析中考虑的函数允许取 $\pm\infty$（称为广义实值函数）。这是为了我们所考虑的可测函数集在极限运算下封闭。

约定：

$\forall a \in \mathbb{R}$, $a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty$

$$a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} 0, & \text{if } a = 0 \\ \pm\infty, & \text{if } a > 0 \\ \mp\infty, & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

但
$$\left.\begin{array}{c}(\pm\infty)-(\pm\infty)\\ (+\infty)+(-\infty)\\ \dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}\end{array}\right\}$$
没有定义

记号

$$\{f<a\} \overset{def}{=} \{x\in E:\ -\infty\le f(x)<a\}$$
$$= f^{-1}([-\infty,a))$$
$$\{f>a\} \overset{def}{=} \{x\in E:\ a<f(x)\le+\infty\}$$

<u>Def</u> 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 可测. 如果函数 $f:E\to[-\infty,+\infty]$ 满足

$$\forall a\in\mathbb{R},\quad \{f<a\}\ 可测$$

则称 f 在 E 上可测