一、找枢轴

设 $X \sim$ p.d.f. $f(x|\theta)$，怎么找 X 枢轴？

① $f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0\le x\le 1)}$

令 $Y = X^{\theta}$，则 $f(y|\theta) = I_{(0\le y\le 1)}$ $\therefore Y \sim U(0,1)$

② $f(x|\theta) = \frac{e^x}{1-e^{\theta}} I_{(\theta\le x\le 0)}$

令 $Y = \frac{e^X}{1-e^{\theta}}$，则 $f(y|\theta) = I_{(\frac{e^{\theta}}{1-e^{\theta}}\le y\le \frac{1}{1-e^{\theta}})}$

$\therefore Y - \frac{e^{\theta}}{1-e^{\theta}} = \frac{e^X - e^{\theta}}{1-e^{\theta}} \sim U(0,1)$

③ $f(x|\theta) = \frac{\theta}{x} I(1\le x\le e^{\frac{1}{\theta}})$

令 $Y = \theta \ln X$，则 $f(y|\theta) = I(0\le x\le 1)$ $\therefore Y \sim U(0,1)$

我们发现，对 $f(x|\theta)$ 的非示性函数部分求积分，有助于我们得到枢轴.

原因：设 $f(x|\theta) = f_1(x|\theta)\, I(a(\theta)\le x\le b(\theta))$

由换元公式，$f(y|\theta)\, dy = f(x|\theta)\, dx = f_1(x|\theta)\, I(a(\theta)\le x\le b(\theta))\, dx$

若 $\frac{dy}{dx} = f_1(x|\theta)$，则 $f(y|\theta) = I_{(a(\theta)\le x(y)\le b(\theta))} = I_{(c(\theta)\le y\le d(\theta))}$

故 令 $Y = \int f_1(x|\theta)\, dx$，则 $Y \sim U(c(\theta), d(\theta))$

$\therefore \frac{Y - c(\theta)}{d(\theta) - c(\theta)} \sim U(0,1)$

二、找UMVUE（L-S定理）

① 设 $X_1, \cdots, X_n$ i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$，$\lambda > 0$. 求 $P_{\lambda}(X_1 > 1)$ 的UMVUE？

Step1. 找出充分完全统计量 $T = \sum X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$

Step2. 找出 $h(T)$ 为 $P_{\lambda}(X_1 > 1)$ 的无偏估计

法一： $P_\lambda(X_1>1)=e^{-\lambda}$

令 $E[h(T)]=\int_0^\infty h(t)\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t}dt=e^{-\lambda}$

$\Leftrightarrow \int_0^\infty h(t)\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda(t-1)}dt=1$

根据 $\Gamma(n,\lambda)$ 分布的形式猜出 $h(t)=\frac{(t-1)^{n-1}}{t^{n-1}}I_{(1,+\infty)}(t)$

法二： 令 $h(t)=E[I(X_1>1)|T=t]=P(X_1>1|T=t)$

$f_{X_1|T}(x|t)=\frac{f_{X_1,T}(x,t)}{f_T(t)}$ ， $f_T(t)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t}$ ，只要算 $f_{X_1,T}(x,t)$

令 $Y=\sum_{i=2}^n X_i\sim\Gamma(n-1,\lambda)$ 与 X_1 独立，$X_1+Y=T$

$f_{X_1,Y}(x,y)=f_{X_1}(x)f_Y(y)$ ， $f_{X_1,T}(x,t)=f_{X_1,Y}(x,y)|J|$

由此可以算出 $f_{X_1|T}(x|t)=(n-1)\frac{(t-x)^{n-2}}{t^{n-1}}$ ，$0<x<t$

故 $h(t)=P(X_1>1|T=t)=\int_1^t(n-1)\frac{(t-x)^{n-2}}{t^{n-1}}dx\, I_{(1,+\infty)}(t)=\frac{(t-1)^{n-1}}{t^{n-1}}I_{(1,+\infty)}(t)$

② $X\sim U(0,\theta)$ ，求 θ^2 UMVUE？

Step1. 充分完全统计量 $T=X_{(n)}$ ，$f_T(t)=\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}$

Step2. $h(T)$ 为 θ^2 无偏估计

令 $E[h(T)]=\int_0^\theta h(t)\frac{nt^{n-1}}{\theta^n}dt=\theta^2$

$\Leftrightarrow \int_0^\theta h(t)t^{n-1}dt=\frac{\theta^{n+2}}{n}$ ，对 θ 求导得

$h(\theta)\theta^{n-1}=\frac{n+2}{n}\theta^{n+1} \Rightarrow h(\theta)=\frac{n+2}{n}\theta^2$ ，$\forall\theta>0$

$\therefore h(t)=\frac{n+2}{n}t^2$

③ 例3.4.9

三、找辅助统计量

① $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. p.d.f 为 $f(x|\lambda)=2\lambda x e^{-\lambda x^2}$，$x>0$。$\lambda>0$ 未知

求 $E_\lambda \dfrac{X_1}{\sqrt{\sum X_i^2}}$?

关键在于说明 $\dfrac{X_1}{\sqrt{\sum X_i^2}}$ 与 $\sqrt{\sum X_i^2}$ 独立，要用Basu定理就要有辅助统计量.

而 $\sqrt{\lambda}X_1$ 的分布与 λ 无关，故 $\dfrac{X_1}{\sqrt{\sum X_i^2}}=\dfrac{\sqrt{\lambda}X_1}{\sqrt{\sum\lambda X_i^2}}$ 为辅助统计量.

PS：$\sqrt{\lambda}X_1$ 不是辅助统计量，因为它连统计量都不是.

② $X_1,\cdots,X_n$ i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$，$\lambda>0$ 未知，求 $E\left[\dfrac{X_n}{\sum X_i}\right]$

关键在于说明 $\dfrac{X_n}{\sum X_i}$ 与 $\sum X_i$ 独立

而 $\lambda X_1 \sim \lambda\Gamma(1,\lambda)\sim\Gamma(1,1)$ 与 λ 无关

故 $\dfrac{\lambda X_n}{\sum\lambda X_i}=\dfrac{X_n}{\sum X_i}$ 为辅助统计量.

③ 例2.8.7 $X_1,\cdots,X_n\sim N(\theta,1)$，$R(X)=X_{(n)}-X_{(1)}$，$T(X)=\bar{X}$，证 $T(X)$ 与 $R(X)$ 独立.

令 $Y_i=X_i-\theta\sim N(0,1)$，则 $X_{(n)}-X_{(1)}=Y_{(n)}-Y_{(1)}$，分布与 θ 无关

故 $X_{(n)}-X_{(1)}$ 为辅助统计量