思考题讨论

- 思考题 0.2 从(3.2.14)式导出$w_{极}=\frac{1}{2}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}$。
- 思考题 0.3 如果$\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 对任意闭合曲面S都成立，能否推出$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$?

- 思考题 0.2 解答

$$W_{极}=-\frac{1}{2}\iiint_V \rho_e' U \mathrm{d}V=\frac{1}{2}\iiint_V (\nabla\cdot\boldsymbol{P})U\mathrm{d}V$$
$$=\frac{1}{2}\iiint_V [\nabla\cdot(\boldsymbol{P}U)-\boldsymbol{P}\cdot\nabla U]\mathrm{d}V$$
$$=\frac{1}{2}\oiint_S (\boldsymbol{P}U)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V,$$

将V扩大到无穷空间，原始积分不变，此时S上无极化，$\boldsymbol{P}$=0，⇒上式首项为零，于是

$$W_{极}=\frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V \quad \Rightarrow w_{极}=\frac{1}{2}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}$$

第十七讲 2022-04-28
第5章 真空中的静磁场

§ 5.1 磁现象与磁场

§ 5.2 毕奥－萨伐尔定律

§ 5.3 安培定律

§ 5.4 静磁场的基本定理

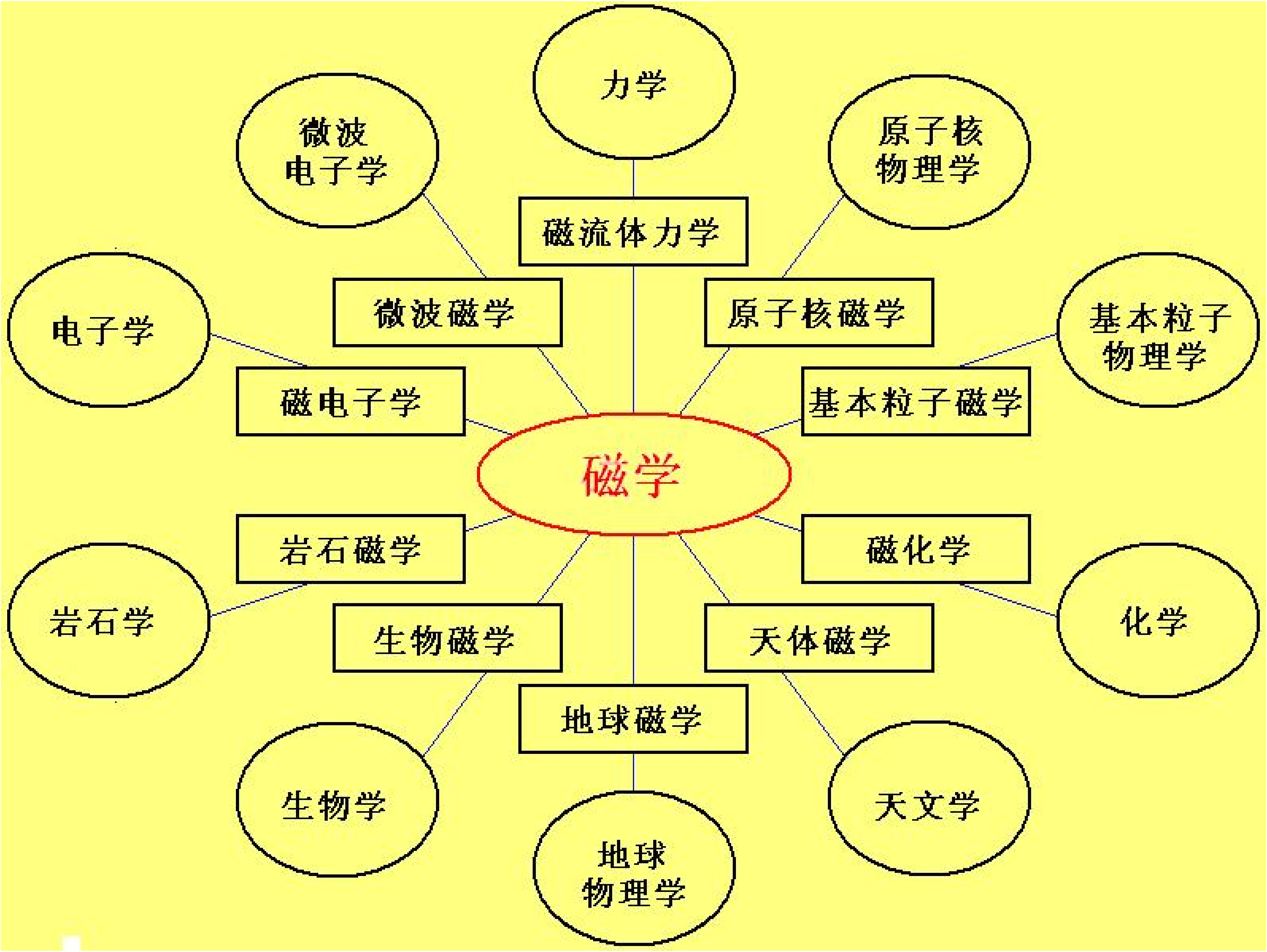
§ 5.5 带电粒子在磁场中的运动

§ 5.1 磁现象与磁场

1. 磁现象与磁学

- 磁现象的普遍性：一切物质都具有磁性，任何空间都存在磁场。
- 磁学：关于磁现象的研究与应用的学科。
- 磁学的基本任务：磁的来源和磁的性质。
- 磁学古老又年轻：古老——磁现象的发现和应用历史悠久，指南针。年轻——磁的应用越来越广泛，已形成许多与磁学有关的交叉学科。

磁学与其他学科的联系


力学
微波
电子学
原子核
物理学
磁流体力学
微波磁学
原子核磁学
电子学
基本粒子
物理学
磁电子学
基本粒子磁学
磁学
岩石磁学
磁化学
岩石学
化学
生物磁学
天体磁学
地球磁学
生物学
天文学
地球
物理学

- 对基本磁现象认识的三个阶段

1) 早期阶段：磁铁 ⇔ (磁)铁 (见下页)

2) 超距作用：电流 ⇔ 磁铁　电流 ⇔ 电流 (见5.3)

3) 近距作用：电流 ⇔ 磁场 ⇔ 电流 (见5.2)

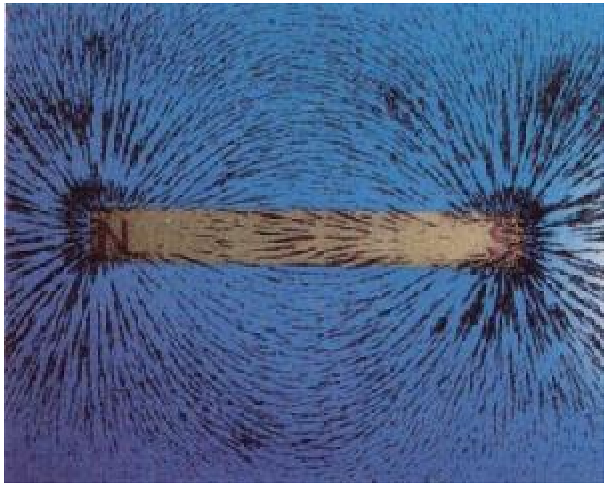
- 磁学理论的两次大进展

  时间上分别在第二、第三两个阶段

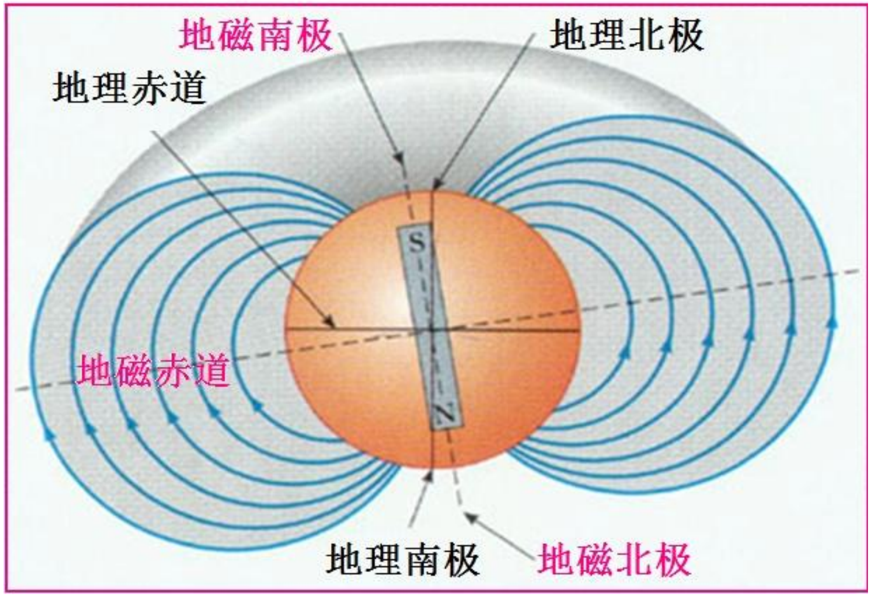
1) 19世纪20年代，以安培分子环流假说为代表的物质磁性的经典理论；

2) 一百多年后，物质磁性的量子理论。

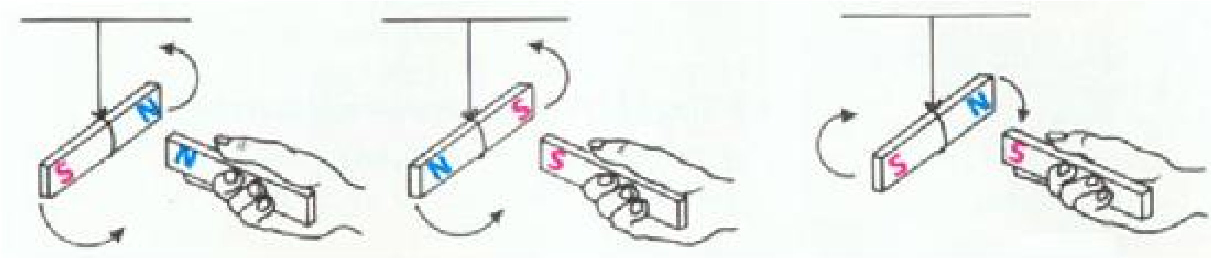
早期阶段：磁铁 ⇔ (磁)铁



- 天然磁铁 (吸铁石) 能吸引铁、镍、钴等物质。条形磁铁的两端称磁极，中部称中性区。
- 将条形磁铁的中心支撑或悬挂起来使它能够在水平面内运动，则两极近似指向南、北方向，分别称S极、N极。这是因为地球本身是一个磁体，条形磁铁 (指南针) 与地磁体发生相互作用。

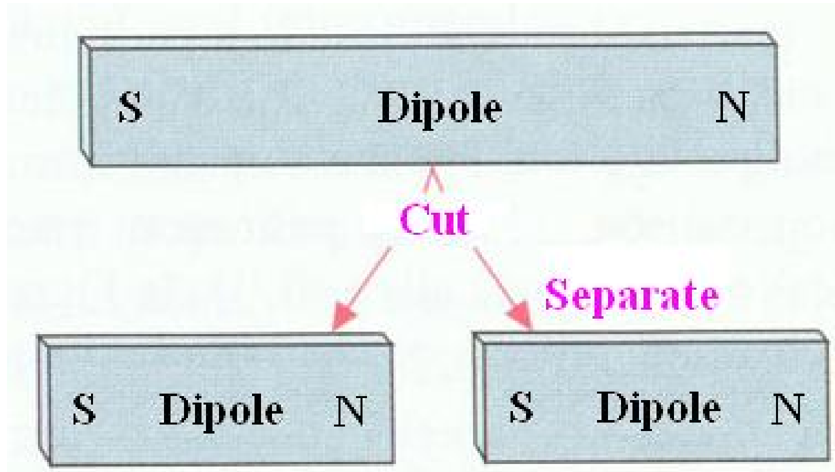


- 条形磁铁与地球磁体之间、条形磁铁之间的相互作用说明同号磁极相互排斥，异号磁极相互吸引。



同极相斥 异极相吸

- 条形磁铁一分为二，每个小磁铁都有两极。极限？
- 类比与猜想：存在独立的正负电荷，有独立的正负磁荷即磁单极子) 吗？



实验裁判！

2. 磁的库仑定律

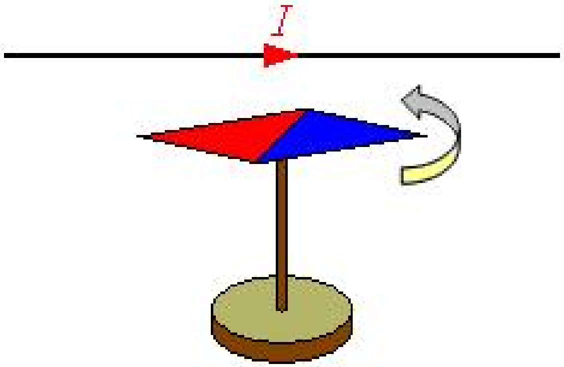
- 数学表述

$$\boldsymbol{F}=\frac{q_{\mathrm{m}0}q_{\mathrm{m}}}{4\pi\mu_0 r^3}\boldsymbol{r},$$

磁荷单位$\mathrm{N\cdot m\cdot A^{-1}}$，真空磁导率$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\mathrm{N^{-1}\cdot A^2}$.

- 定义磁场强度 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}/q_{\mathrm{m}0}$，则点磁荷的磁场强度

$$\boldsymbol{H}=\frac{q_{\mathrm{m}}}{4\pi\mu_0 r^3}\boldsymbol{r}.$$



奥斯特实验

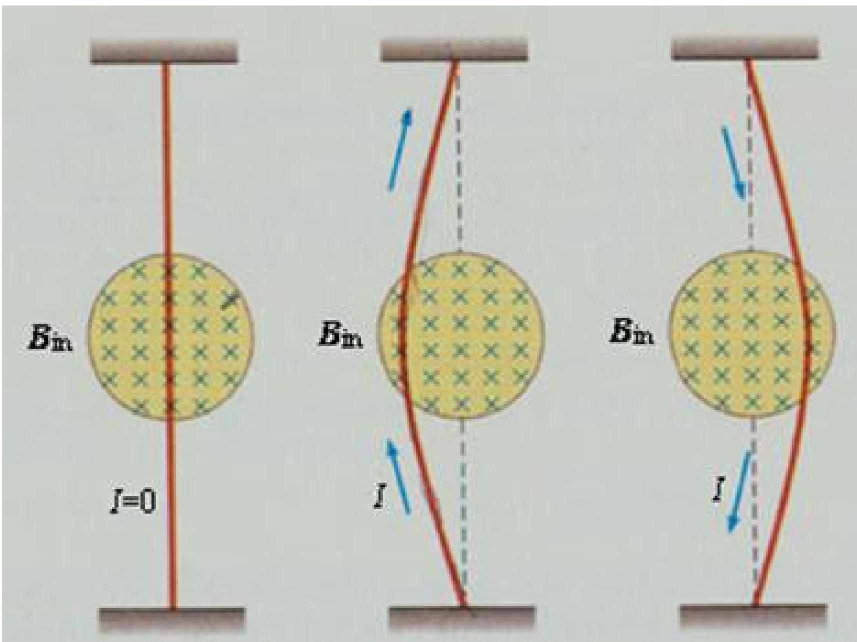
3. 电流的磁效应—奥斯特实验

1) 奥斯特实验

- 电与磁有不可分割的联系，并非“井水不犯河水”。
- 电流对磁铁的磁力是横向力 (对比：静电力径向)。

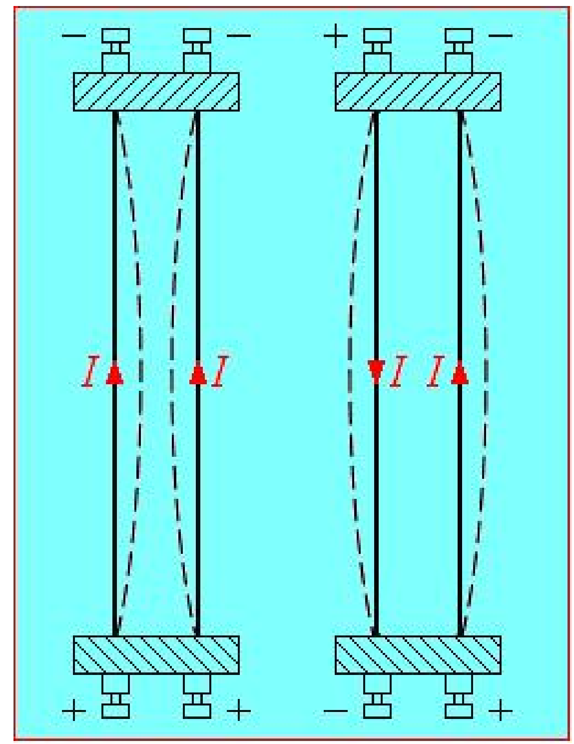
2) 引发的实验

- 磁铁对电流的作用

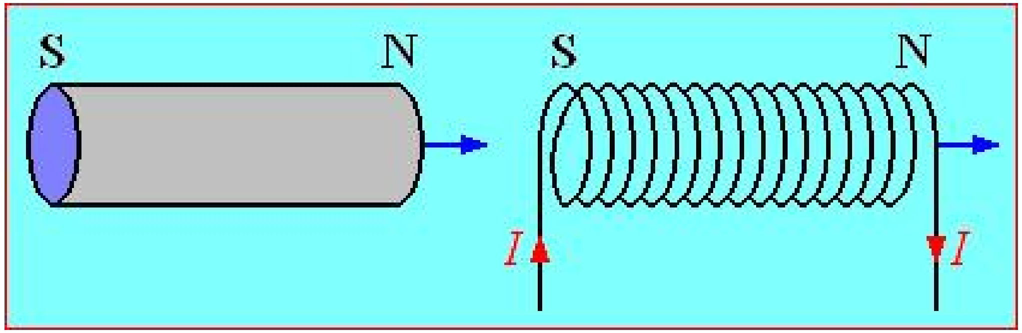


- 电流-电流相互作用

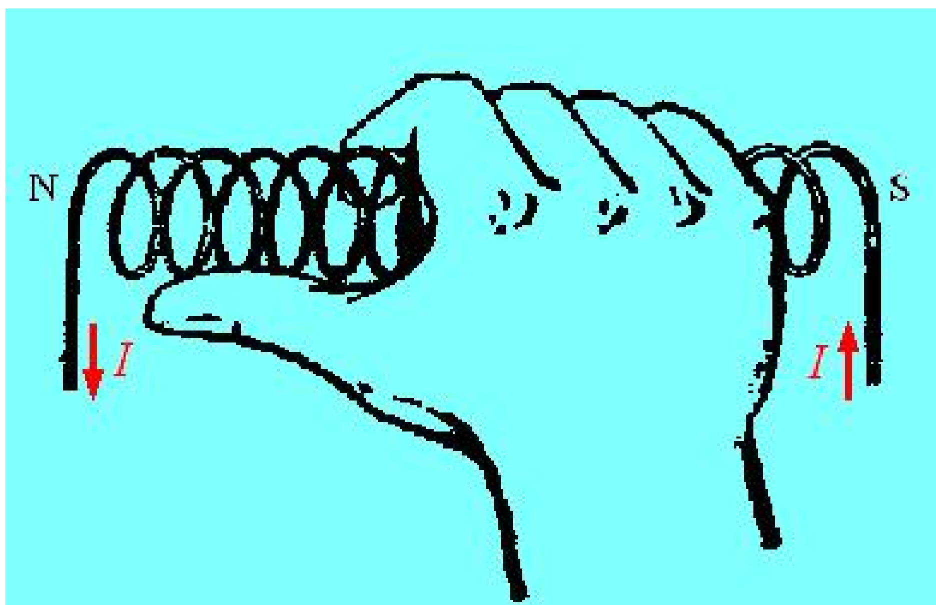
同向相吸 反向相斥



- 螺线管与磁棒的等效性



- 用右手定则来判断载流线圈的极性



3) 引发的深入研究

- 安培的实验及定律
- 毕奥—萨伐尔实验及定律

➢ 类比：静电相互作用通过电场来传递。

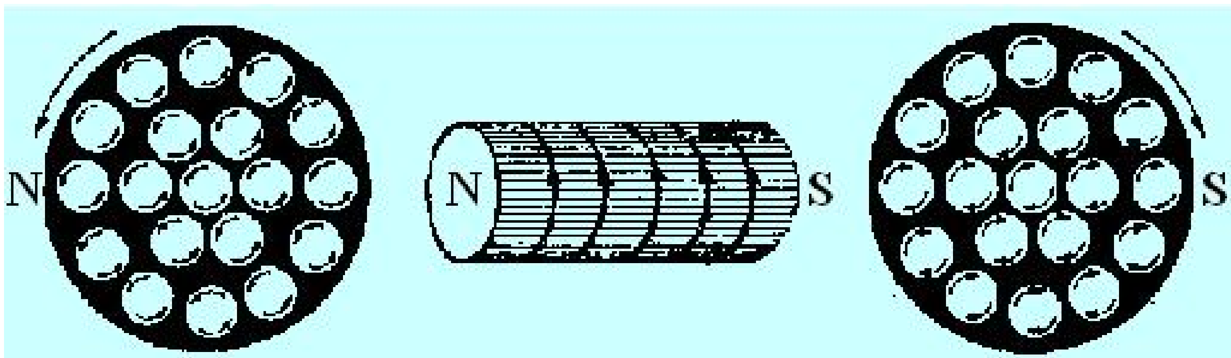
➢ 猜想：磁相互作用通过磁场来传递。

场的观点：电流 ⇔ 磁场 ⇔ 电流

- 安培分子环流假说 (见下页) → Weber电子论 (归结为运动电荷之间的作用力) → Lorentz电子论
- 逆效应的追求——法拉第电磁感应定律

安培假说——磁场的起源

- 安培假说：组成磁铁的最小单元是分子环流，这些分子环流定向排列，在宏观上显示出N、S极。



机制？

- 分子环流如何形成？当时不知原子结构，不能解释。
- 现代理论：原子由带正电的原子核和绕核旋转的负电子组成。电子不仅绕核旋转，还具有自旋。电子的这些运动形成了分子环流。

4. 磁场的定量表述与洛仑兹力

1) 磁场的定量表述——磁感应强度B

- 事实：载流导线在磁场中受到力的作用。
- 推断：电流即载流子定向运动

  →运动电荷受磁力
- 类比：用静电力定义电场强度
- 猜想：用磁力定量表述磁场强弱

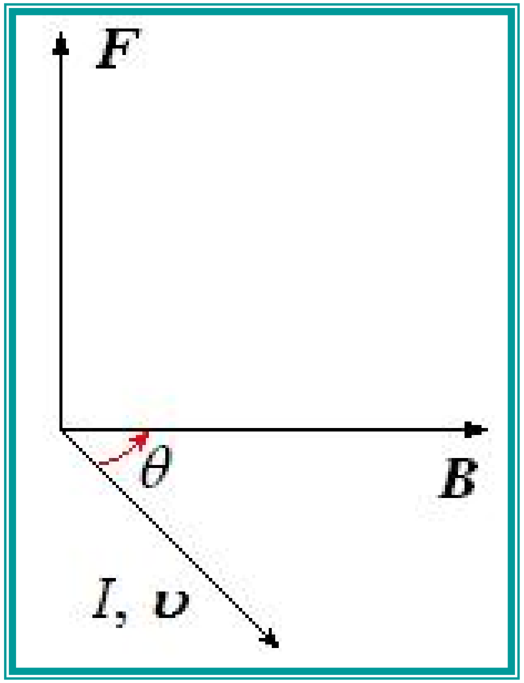
  →进入实验环节

- 实验：粒子q在固定磁场中运动，当速度υ沿某特殊方向$\boldsymbol{n}$时不受力，当υ与$\boldsymbol{n}$夹θ角时，$F \propto q\upsilon\sin\theta$，比例系数与$q$、$\upsilon$无关，可推断只由磁场 (强弱) 决定。
- 定义：方向//$\boldsymbol{n}$；大小$B=F/q\upsilon\sin\theta$
- $F=Bq\upsilon\sin\theta$的矢量式为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B}.$$

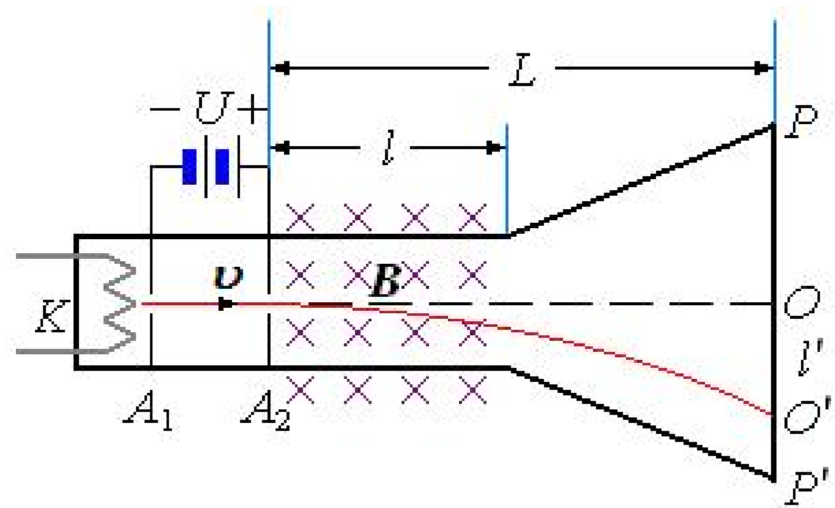
$\boldsymbol{F}$称为洛仑兹力，$\boldsymbol{B}$称为磁感应强度。

- 洛伦兹力的测量：直接测量有困难，可由动力学方法间接测得。



2) 实验验证——阴极射线偏转演示

阴极射线管：被抽成真空的喇叭形玻璃管



- 阴极***K***：发射电子
- 电极A_1，A_2：中心开有小圆孔，在两电极间加上一定的电压，使从电极A_2小圆孔出来的电子具有一定的运动速度。
- 均匀磁场***B***：在电极A_2的右边，由电磁铁产生。
- 显示屏：管底PP'涂有荧光物质，电子打到管底即显出光点。

- 实验结果：发现电子束受磁场作用而偏转，表明运动电子受磁力的作用，并证实了洛伦兹力公式

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B}.$$

- 洛伦兹力公式的两面：既是磁感应强度的定义式，又可用于求运动电荷在磁场中所受的洛伦兹力。
- 广义洛伦兹力公式：如果除了磁场外，同时还存在电场，则运动电荷受力

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B}.$$

上式也称为洛伦兹力公式。

5. 安培力公式与洛伦兹力公式

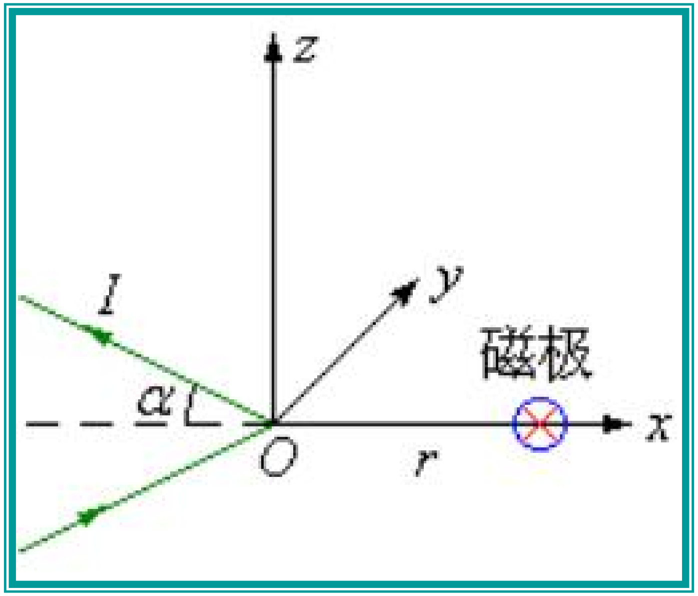
- 既然电流是电荷的宏观定向运动，由洛伦兹力公式不难推出电流在磁场中的受力公式。
- 体电流元密度的微观表达式 $\boldsymbol{j}=nq\boldsymbol{u}$，考虑处于外场 $\boldsymbol{B}$ 中的载流导体，在某个体积元 $\mathrm{d}V$ 中共有 $n\mathrm{d}V$ 个运动电荷，其中每个电荷受力为 $q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$，因此整个体积元受力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=nq\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}V$，即

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{体电流元受力} & \mathrm{d}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}V \\
\text{面电流元受力} & \mathrm{d}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{B}\mathrm{d}S \\
\text{线电流元受力} & \mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}
\end{array}\right\}\ \text{安培力公式}
$$

- 要计算整个载流导体所受的安培力，只要选取相应公式进行积分运算就行了。
- 最早对磁场和物质相互作用的实验研究，是对载流导线进行的，并且通过安培力公式来定义空间某点的磁感应强度$\boldsymbol{B}$。

§ 5.2 毕奥—萨伐尔定律

1. 毕奥—萨伐尔的重要实验



- 弯折导线对磁极的作用力

$$F \propto \frac{I}{r}\tan\frac{\alpha}{2}, \text{ or}$$

$$\boldsymbol{F} = k_1 \frac{I}{r}\tan\frac{\alpha}{2}\boldsymbol{e}_y.$$

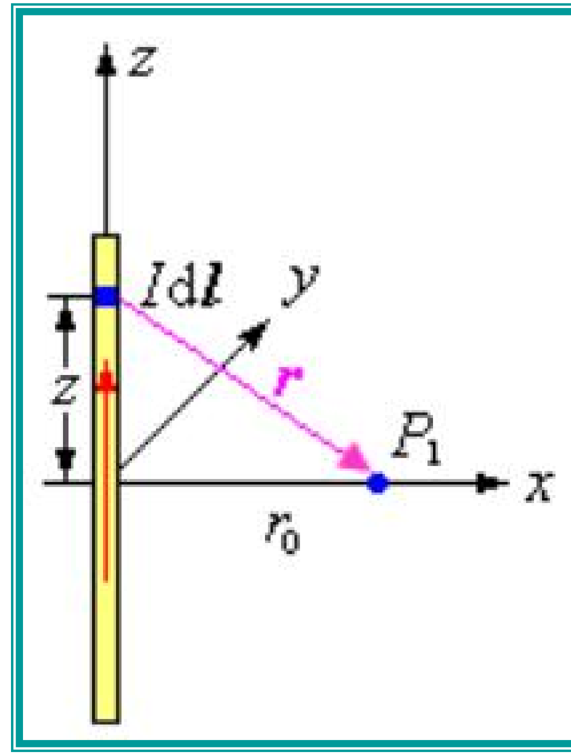
特别的，当$\alpha=\pi/2$时，是直导线。

- 由此拉普拉斯推出毕—萨定律

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

2. 求磁场举例

[例5.1] 求无限长直线电流I的磁场。



[解] $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}=I\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$，由毕一萨定律

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z\times\frac{r_0\boldsymbol{e}_x-z\boldsymbol{e}_z}{(r_0^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{r_0I\mathrm{d}z\boldsymbol{e}_y}{(r_0^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\therefore\ \boldsymbol{B}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\boldsymbol{e}_y r_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(r_0^2+z^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0}{2\pi r_0}I\boldsymbol{e}_y.$$

此结果与实验结果一致，验证了毕一萨定律。

[例5.2] 半径为R的圆形电流I，在轴线上距离为z的P_1点的磁场$\boldsymbol{B}$及周围的磁场。

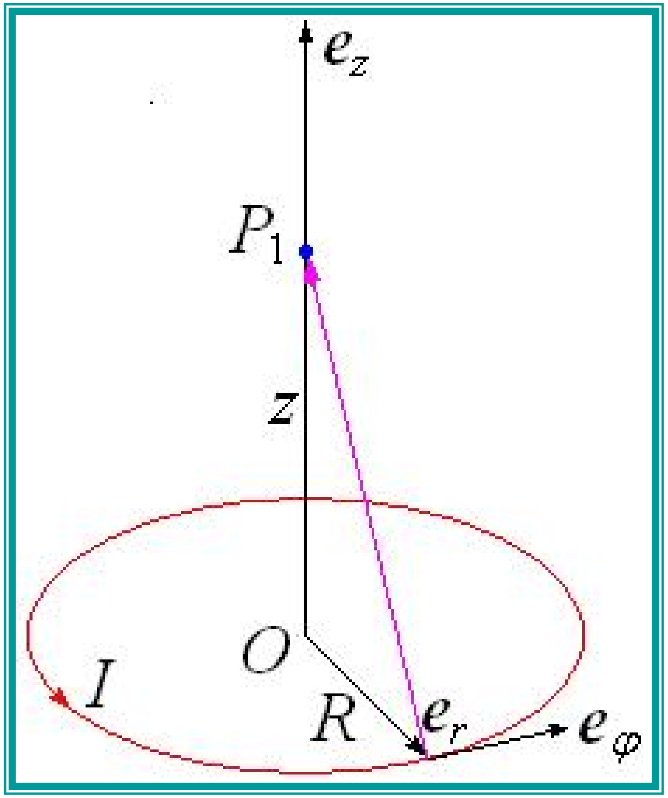
[解] 采用柱坐标系

由对称性，第一项为0！

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} IR\mathrm{d}\varphi\boldsymbol{e}_\varphi\times\frac{z\boldsymbol{e}_z-R\boldsymbol{e}_r}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} IR\mathrm{d}\varphi\frac{z\boldsymbol{e}_r+R\boldsymbol{e}_z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\mu_0}{2}\frac{IR^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{e}_z.$$



定义$\boldsymbol{m}=I\pi R^2\boldsymbol{e}_z$为圆形电流的磁矩

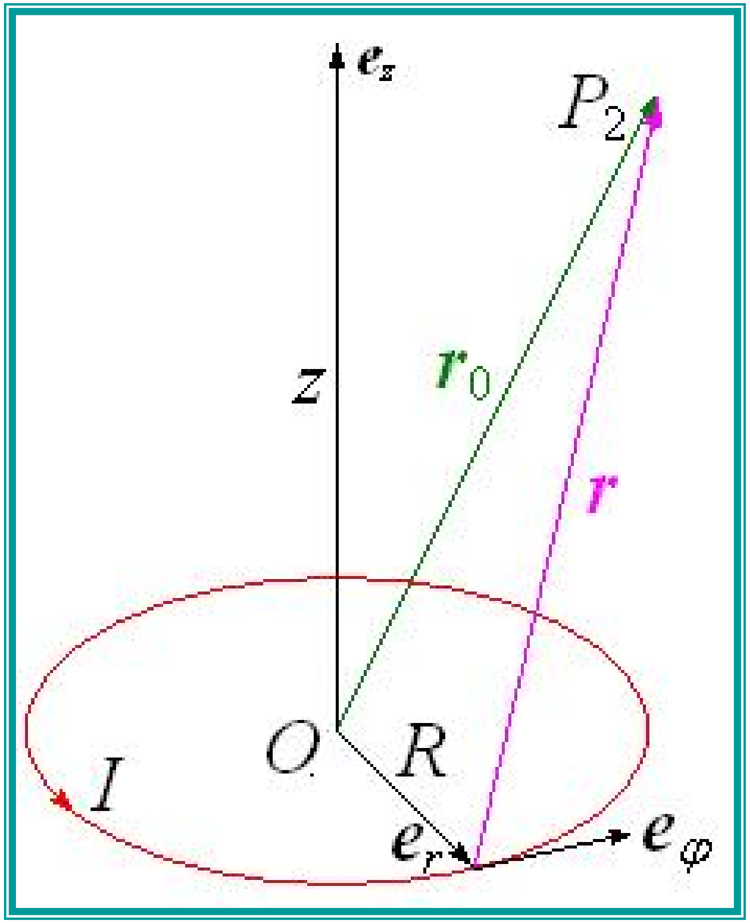
$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{m}}{(R^2+z^2)^{3/2}}.$$

圆线圈轴线外一点P_2的磁场

详见p123。

当$r_0>>R$时，磁场可近似为

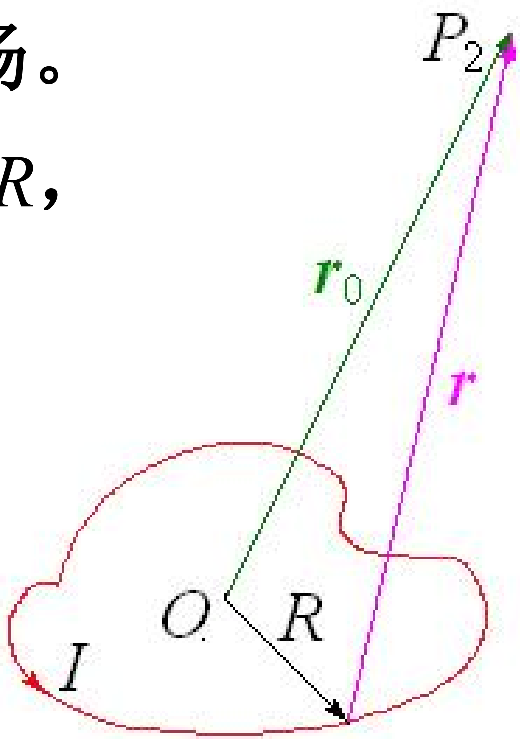
$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 \boldsymbol{m}}{4\pi r_0^3} + \frac{3\mu_0(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}_0)}{4\pi r_0^5}\boldsymbol{r}_0$$



可证此式对任意载流线圈也成立 (见例5.3)，并且与电偶极子电场公式相似：

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{r^3} + \frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}.$$

例5.3 求任意载流线圈在远处的磁场。



解：设P_2相对O点的位矢为$\boldsymbol{r}_0$，r_0>>R，P_2相对电流元的位矢$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{R}$，可证

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0\boldsymbol{m}}{4\pi r_0^3}+\frac{3\mu_0(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}_0)}{4\pi r_0^5}\boldsymbol{r}_0$$

其中磁矩 $\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}$， $\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}\oint_L\boldsymbol{R}\times\mathrm{d}\boldsymbol{R}.$

分析：近似到R的一阶项，有

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{(r_0^2-2\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0+R^2)^{3/2}}\approx\frac{(1+3\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0/r_0^2)}{r_0^3},\rightarrow$$

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \approx \frac{(1+3\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0/r_0^2)}{r_0^3}(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{R}) \approx \frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}-\frac{\boldsymbol{R}}{r_0^3}+\frac{3(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_0}{r_0^5}, \rightarrow$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{R}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{R}\times\frac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}-\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{R}\times\frac{\boldsymbol{R}}{r_0^3}+\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{R}\times\frac{3(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_0}{r_0^5}\right),$$

首项$=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{R}\right)\times\dfrac{\boldsymbol{r}_0}{r_0^3}=0$, 次项$=-\dfrac{\mu_0 I}{4\pi r_0^3}\oint_L \mathrm{d}\boldsymbol{R}\times\dfrac{\boldsymbol{R}}{r_0^3}=\dfrac{\mu_0 \boldsymbol{m}}{2\pi r_0^3}$,

$$\text{末项}=\frac{3\mu_0 I}{4\pi r_0^5}\left[\oint_L (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{R}\right]\times\boldsymbol{r}_0, \qquad (*)$$

末项的计算是本题难点，可按以下思路尝试

首项能写成全微分形式，再作闭合积分为零，可称之为无效部分；而次项则能用磁矩表达。

如果坚信小线圈的唯一特征量就是磁矩，就应预期末项可以用磁矩表达，最多加上类似首项的无效部分。

末项核心部分是$(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{R}$，往磁矩凑，有关系式

$$(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{R}\times\mathrm{d}\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{r}_0+(\mathrm{d}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{R},$$

往全微分凑，可利用分部积分

$$(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\mathrm{d}[(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{R}]-(\mathrm{d}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{R}.$$

两式中既不能写成磁矩也不能写成全微分的项恰好相反，于是两式相加除以2得

$$(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\tfrac{1}{2}\mathrm{d}[(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{R}]+\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{R}\times\mathrm{d}\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{r}_0.$$

将上式代入(*)式，即$\boldsymbol{B}$的末项表达式，有

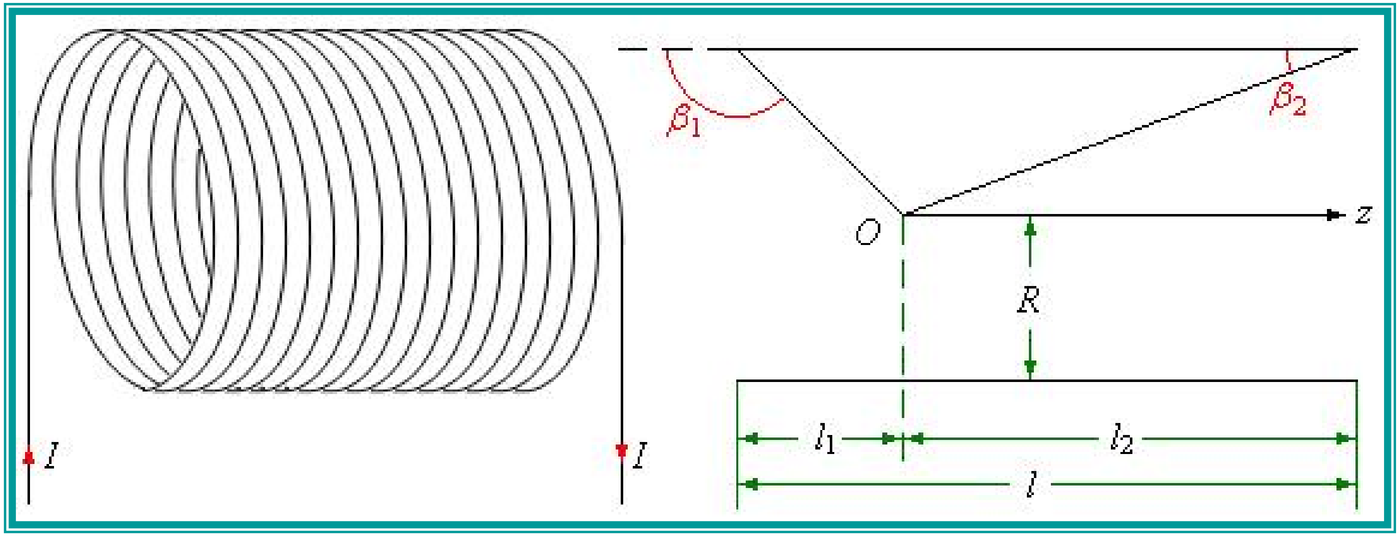
$$\text{末项}=\frac{3\mu_0 I}{4\pi r_0^5}\left[\frac{1}{2}\oint_L \mathrm{d}[(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{R}]+\frac{1}{2}\oint_L[(\boldsymbol{R}\times\mathrm{d}\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{r}_0]\right]\times\boldsymbol{r}_0$$

$$=0+\frac{3\mu_0}{4\pi r_0^5}(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{r}_0=\frac{3\mu_0[(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_0-r_0^2\boldsymbol{m}]}{4\pi r_0^5},$$

$$\therefore\ \boldsymbol{B}=\frac{\mu_0\boldsymbol{m}}{2\pi r_0^3}+\frac{3\mu_0[(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_0-r_0^2\boldsymbol{m}]}{4\pi r_0^5}=-\frac{\mu_0\boldsymbol{m}}{4\pi r_0^3}+\frac{3\mu_0(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{r}_0}{4\pi r_0^5}.$$

此结果与电偶极子的电场相似：

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}+\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}.$$



[例5.4] 绕在圆柱面上的螺旋形线圈叫螺线管。设它的长为l，半径为R，单位长度的匝数为n，电流强度为I，求螺线管轴线上的磁感应强度分布。

[解] 设螺线管是密绕的，它的磁场可近似看作一系列圆线圈磁场的叠加。考虑轴线上某点O的磁感应强度，取该点为坐标原点，Oz沿轴线。

在位置z处，长度dz内共有ndz匝线圈，它在原点产生的磁感应强度只有z分量，其大小 (见例5.2) 为

$$\mathrm{d}B = \frac{n\mu_0 IR^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\mathrm{d}z.$$

整个螺线管在原点产生的磁感应强度为:

$$B = \frac{n\mu_0 IR^2}{2}\int_{-l_1}^{l_2}\frac{\mathrm{d}z}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{n\mu_0 I}{2}\left.\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right|_{-l_1}^{l_2}$$

$$= \frac{n\mu_0 I}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1),$$

忽略了什么？

特例：无穷长螺线管$\beta_1=\pi$, $\beta_2=0$, $B=\mu_0 nI$.

半无限长螺线管一端$\beta_1=\pi/2$, $\beta_2=0$, $B=\mu_0 nI/2$.

作业、预习及思考题

- 作业：**5.1~5.4**
- 预习：**5.3 安培定律、5.4 静磁场的基本定理**

下次课讨论

- 思考题5.1 磁感应强度可否按$F=qB\times\upsilon$定义？
- 思考题5.2 用直接法计算无穷长直螺线管内、外任一点的磁感应强度。