第 6 章 微分方程

§6.1 微分方程基本概念

联系着一个自变量 x 与 (未知) 函数 y 及其微商 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 的关系式 (方程)

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为(常)微分方程. 方程中所含未知函数微商的最高阶数 n, 称为这个方程的阶. 若方程关于 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 均是一次的, 且不含它们之间的乘积, 即方程形式是

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad a_n(x) \not\equiv 0.$$

则称其为 (n 阶) 线性微分方程, 特别当 $b(x) \equiv 0$ 时, 方程称为齐次线性微分方程. 一个函数 $y = y(x)$ 称为微分方程的解, 如果它能满足该方程. 因此当给定方程后, 最基本的事情当然是求出方程的解, 即未知函数 $y = y(x)$.

微分方程在数学和其他自然科学 (物理学、化学、生物学、天文学) 中是普遍存在的. 因为自然世界中变量及其变化率之间往往是彼此相联系的, 将这种联系用数学方式表达出来, 就产生一个 (或几个) 微分方程.

Newton 基本定律 质点的质量 m 乘以运动的加速度等于质点所受的外力. 如果选定坐标, 设质点在时刻 t 时距离 (或位置) 为 $x(t)$, 所受的外力为 $F(x(t))$, 则 $x(t)$ 满足 Newton 方程

$$F(x(t)) = m\ddot{x}(t)$$

通常, 在力学中用 $\dot{x}$, $\ddot{x}$ 分别表示对时间 t 的一阶和二阶导数.

最简单的例子是自由落体的运动, 它满足

$$\ddot{x}(t) = -g \quad (g \text{ 是重力加速度})$$

以及质点沿 x 轴被弹性力拉向原点的运动, 此时质点的位置函数 $x(t)$ 满足

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \quad (k \text{ 是弹性系数})$$

例 1 贷款问题 假设某家庭从银行贷款 50 万元购房, 设银行年利率 5%, 该家庭选择每月等额还款, 并计划 10 年还请贷款. 试问每月需还款多少?

解 设该家庭在 t 个月时欠款 $W(t)$ 元, 假设 t 是连续变量. 将年利率转化为月利率 $r=\frac{0.05}{12}$. 设每月还款 k 元, 则单位时间内 (每个月内) $W(t)$ 的变化量等于欠款产生的利息与当月还款之差, 即

$$\frac{dW}{dt}=rW-k.$$

由该问题的实际情况知, $W(t)$ 应满足条件两个

$$W\Big|_{t=0}=500\,000,\quad W\Big|_{t=120}=0$$

此方程的一般解为

$$W(t)=Ce^{rt}+\frac{k}{r}\qquad (C \text{ 为常数}).$$

代入两个条件就可求得

$$k=500\,000\frac{re^{120r}}{e^{120r}-1}\approx 5294.78\text{元}.$$

一般来说微分方程解的个数不唯一. 有多个解的方程称为泛定方程. 例如, 最简单的一阶方程

$$y' = f(x)$$

它的解一定是下列形式

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C,$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 任一个确定的原函数, C 是任意常数. 即对任意的常数, $F(x) + C$ 都是方程的解. 故称这样形式的解为方程的通解. 如果事先要求所求的解在一个特定的点 x_0 满足 $y(x_0) = \alpha$, 则符合要求的解是唯一的

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \alpha$$

称为方程的一个特解.

对于一般形式的一阶微分方程

$$F(x,y,y')=0$$

如果没有任何要求, 它的解一般也含有一个任意常数 C, 通常表示为隐式

$$\Phi(x,y,C)=0$$

称为方程的通积分. 若从通积分中可解出 y 的一个显函数 $y=y(x,C)$ 就得到方程的通解.

对于一般形式的 n 阶微分方程

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

通积分或通解的含义与上面的类似, 其中包含着 n 个独立, 即彼此不能合并的任意常数. 而下列初始条件

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

一般来说决定了方程的一个特解.

微分方程与定解条件 (初始条件或其它条件) 联立就得到一个定解问题. 但在实际问题中, 微分方程的建立, 都是在抓住问题的本质忽略了一些次要因素后得到的数学模型, 可以说是实际问题的理想化或简化. 所得到的解也仅是对问题的一种近似描述. 通常考虑定解问题需要确定以下三个问题:

(1) 定解问题是否至少存在一个解, 即存在性;

(2) 定解问题是否至多只有一个解, 即唯一性;

(3) 解是否连续依赖于所给初始条件和参数, 即连续依赖性.

求微分方程的解, 是一个相当困难和复杂的问题. 但从上面的一些具体例子看出, 求解的过程就是一个积分的过程. 所以当微分方程的通积分 (或通解) 能够用初等函数及初等函数的不定积分来表示, 则称方程为可积微分方程, 而导出这种解的方法称为初等积分法.

§6.2 一阶微分方程

6.2.1 分离变量法

我们考虑形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{6.1}$$

的一阶方程. 即便是这样简单的方程, 求解也是一个困难的事情. 当方程具有某种特殊类型时, 则易于用初等积分法解决.

若 $f(x, y) = g(x)h(y)$, 这里 g, h 分别是 x 和 y 的连续函数, 且 $h(y)$ 不恒为零. 则方程为

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y). \tag{6.2}$$

这可 (分离变量) 化为

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx. \tag{6.3}$$

我们注意, 根据一阶微分形式的不变性, 若 y 为自变量时有

$$\int \frac{dy}{h(y)} = H(y) + C,$$

则当 y 是 x 的可微函数时, 等式仍然成立. 所以, 在 (6.3) 式两边分别求关于 y 和 x 的不定积分, 得出

$$H(y) = \int g(x)\, dx = G(x) + C, \tag{6.4}$$

其中 $G(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数, C 是任意常数. 这就是方程 (6.2) 的通积分.

注意, 对 $h(y)$ 的任一零点: $h(a) = 0$, 常值函数 $y = a$ 显然是方程 (6.2) 的解. 这些解, 往往在分离变量 (即 (6.2) 化为 (6.3)) 时丢失, 且有时不能包含在通积分 (6.4) 中, 故应将这样的解补上.

我们看到, 方程 (6.2) 中, 可将其中 x 的函数与 dx 置于等式一边, 而将 y 的函数与 dy 置于等式的另一边, 从而两边可各自求不定积分. 这样的方程称为**可分离变量的方程**, 这一解法也称为**分离变量法**.

例 2 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

解 将方程分离变量后, 有

$$ydy = -xdx.$$

两端求 (不定) 积分, 得方程的通积分

$$y^2 = -x^2 + C,$$

即,

$$x^2 + y^2 = C \quad (C \text{ 为任意非负常数}),$$

该方程的积分曲线, 在 Oxy 坐标系中, 表示的是以原点为圆心的同心圆族.

例 3 求解方程

$$(1+x^2)ydy+\sqrt{1-y^2}dx=0.$$

解 当 $1-y^2\neq 0$ 时, 分离变量后, 方程可改写成为

$$-\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{1+x^2}.$$

两边积分, 得方程的通积分为

$$\sqrt{1-y^2}=\arctan x+C \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

又 $y=\pm 1$ 都是原方程的解, 故应补上. 因此这个方程的解是

$$\sqrt{1-y^2}-\arctan x=C \text{ 及 } y=\pm 1.$$

6.2.2 齐次方程

有些方程本身不能直接分离变量, 但作适当的代换后, 可用分离变量法求解. 所谓的齐次微分方程就是这样的一类方程.

一个函数 $f(x,y)$ 称为 n 次齐次函数, 如果对某个范围内的 x,y 与 t 有

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y).$$

一阶微分方程

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

称为齐次的, 如果函数 P 和 Q 是同次的齐次函数. 现在 $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 是 0 次齐次函数, 因此它可写为 $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的形式. 于是上述的齐次微分方程可化为形式

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{6.5}$$

为了解方程 (6.5). 我们引入新的未知函数

$$u=\frac{y}{x}.$$

则 $y = ux$, 从而

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

于是方程 (6.5) 变成

$$x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u. \tag{6.6}$$

方程 (6.6) 可分离变量, 成为

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

两边积分, 得到

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln|x| + C.$$

求出上式左边的不定积分后, 再用 $\frac{y}{x}$ 代换其中的 u, 即得方程 (6.5) 的通积分. 注意, 若 $\varphi(u) - u$ 有一个实零点 u_0, 则 $y = u_0 x$ 就是丢失的一个特解, 应当补上.

例 4 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

解 这是一个齐次方程, 在其中令 $y = ux$, 并分离变量, 得出

$$\frac{1-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x},$$

积分得

$$\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + C_1,$$

将$u = \frac{y}{x}$ 代入上式, 得出原方程的通积分为

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{\arctan\frac{y}{x}}, \quad \text{其中 } C = e^{-C_1}.$$

若采用极坐标, 则上述通积分可写成

$$r = Ce^{\theta},$$

这表示平面上一族以原点为心的对数螺线.

例 5 求解方程 $xdy = (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx$.

解 先考虑 $x > 0$ 的情形, 此时原方程可化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

这是一个齐次方程. 作代换 $y = ux$, 得

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2}, \quad \text{即} \ \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

积分后得 $\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln x + C_1$, 其中 C_1 是任意常数. 以 $u = \frac{y}{x}$ 代入此式, 可得所给微分方程的通积分

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2, \quad \text{其中 } C = e^{C_1} > 0.$$

由此可解出通解

$$y = \frac{1}{2}\left(Cx^2 - \frac{1}{C}\right).$$

当 $x < 0$ 时, 可求得与上面相同的结果. 故原方程的解为 $y = \frac{1}{2}\left(Cx^2 - \frac{1}{C}\right)$, 其中 $C > 0$ 是常数.

6.2.3 可化为齐次方程的方程

微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \tag{6.7}$$

可以化为齐次微分方程来求解.

方法是选择常数 d_1 和 d_2 使得

$$a_1d_1 + b_1d_2 + c_1 = 0,$$
$$a_2d_1 + b_2d_2 + c_2 = 0$$

因为 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, 所以这样的 d_1, d_2 是存在的. 然后作平移变换 $x = \xi + d_1$, $y = \eta + d_2$, 方程 (6.7) 就化为

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right), \tag{6.8}$$

这是齐次微分方程.

例 6 求解方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{-7x+3y+7}{3x-7y-3}$

解 作平移变换 $\xi = x-1,\ \eta = y$, 则方程变为 $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{-7\xi+3\eta}{3\xi-7\eta}$. 这是齐次微分方程. 再令 $u = \frac{\eta}{\xi}$, 则方程变为 $u + \xi\frac{du}{d\xi} = \frac{-7+3u}{3-7u}$, 即,

$$\xi\frac{du}{d\xi} = \frac{7(u^2-1)}{3-7u}.$$

分离变量后, 方程可以写成

$$\left(-2\frac{1}{u-1} - 5\frac{1}{u+1}\right)du = \frac{7}{\xi}d\xi.$$

两边积分可得

$$-2\ln|u-1| - 5\ln|u+1| = 7\ln|\xi| + C_1$$

即,

$$|\xi|^7|u-1|^2|u+1|^5 = e^{-C_1}.$$

因此有

$$\xi^7(u-1)^2(u+1)^5 = C_2,$$

即,

$$(y-x+1)^2(y+x-1)^5 = C_2,$$

其中 C_2 是非零常数. 由于 $u = \pm 1$, 即, $y - x + 1 = 0$ 或 $y + x - 1 = 0$ 也是方程的解, 所以原方程的解是

$$(y-x+1)^2(y+x-1)^5 = C,$$

其中 C 是任意常数.

6.2.4 一阶线性方程

一阶线性微分方程的标准形式是

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x). \tag{6.9}$$

其中 $p(x)$ 和 $f(x)$ 是连续函数. 若 $f(x) \equiv 0$, 则方程称为一阶齐次线性方程; 否则, 称为非齐次线性方程. 对于齐次方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{6.10}$$

分离变量后可写为

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

积分后得到 $\ln|y| = -P(x) + C_1$, 注意 $y = 0$ 也是 (6.10) 的一个解, 因此 (6.10) 的通解是

$$y = Ce^{-P(x)},$$

其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数, C 是任意常数.

对于非齐次线性方程 (6.9), 我们在它两边乘以因子 $e^{P(x)}$ ($P(x)$ 是 $p(x)$ 的一个原函数), 得到

$$\left(ye^{P(x)}\right)' = f(x)e^{P(x)},$$

两边积分可得 (6.9) 的通解为

$$y = e^{-P(x)}\left(\int f(x)e^{P(x)}\,dx + C\right).$$

注意上面这个通解可以分为两项之和, 一项是齐次方程的通解 $Ce^{-P(x)}$, 另一项是

$$e^{-P(x)}\int f(x)e^{P(x)}\,dx$$

它是非齐次方程的一个特解, 而这个特解又恰是将齐次方程的通解中的常数 C 变为 $C(x) = \int f(x)e^{P(x)}\,dx$ 得到的. Lagrange 由此提出一种求非齐次方程特解的常数变易法: 将齐次方程的通解中的常数 C 变为 x 的函数 $C(x)$, 再将之代入非齐次方程解出 $C(x)$.

例 7 求解方程 $(2y^2 + y - x)dy - ydx = 0$.

解 对于这个方程, 如果将 y 看成是 x 的函数, 则方程不是线性的, 但如果将 x 看成是 y 的函数, 则方程可以写成线性方程

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1}{y} \cdot x = 1 + 2y.$$

因为 $\frac{1}{y}$ 的一个原函数是 $\ln y$, 所以方程的通积分是

$$x = e^{-\ln y}\left(\int (1+2y)e^{\ln y}\,dy + C\right) = \frac{1}{y}\left(\int (y+2y^2)\,dy + C\right)$$
$$= \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{C}{y}.$$

注意, $y = 0$ 也是原方程的一个解, 它并不包含在通积分中, 应补上. 故原方程的解为

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}y^2 + \frac{C}{y} \text{ 及 } y = 0,$$

其中 C 是任意常数.

有些一阶方程, 并不是线性方程, 但可以通过适当的代换化为线性方程, 例如, 下面的 Bernoulli (伯努利)方程:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \text{ 为不等于 } 0,\ 1 \text{ 的实数}.$$

对于这个方程, 可采用下面的方法: 先以 y^n 除方程的两边, 得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x),$$

再作代换 $u = y^{1-n}$, 则方程化为关于未知变量 u 的线性方程

$$\frac{du}{dx} + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x).$$

这样就容易求出伯努利方程的通解.

例 8 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = xy + x^3y^3.$$

解 这是伯努利方程, 作代换 $u = y^{-2}$, 将它化为线性方程

$$\frac{du}{dx} + 2ux = -2x^3,$$

其通解易求出为 $u = 1 - x^2 + Ce^{-x^2}$, 故原方程的通积分是

$$\frac{1}{y^2} = 1 - x^2 + Ce^{-x^2},$$

还有一个特解 $y = 0$.