Lec14 Note of Complex Analysis

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 20 日

我们补充一下例 3.4 的 (2) 的证明。

证明. (2) 要证 $|a_n r^n| \le 2A(r) - 2\mathrm{Re}f(0)$ ($A(r) = \max\limits_{|z|=r} \mathrm{Re}f(z)$)。由

$$\begin{aligned} a_n r^n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (-A(r) + \mathrm{Re}f(z))e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\,\theta\ (n \ge 1) \\ \Rightarrow |a_n| r^n &\le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |-A(r) + \mathrm{Re}f(z)| \cdot |e^{-in\theta}|\,\mathrm{d}\,\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (A(r) - \mathrm{Re}f(z))\,\mathrm{d}\,\theta = 2A(r) - 2\mathrm{Re}f(0). \end{aligned}$$

后者用到了调和函数的平均值公式。

□

例 3.5. P117.8:(Schwarz 积分公式)$f \in H(B(0,R)) \cap C(\overline{B(0,R)})$，证明：

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\mathrm{Re}f(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta + i\mathrm{Im}f(0).$$

证明. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，则

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(Re^{i\theta})e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\,\theta\ (n \ge 1) \\ a_0 &= f(0) = \mathrm{Re}f(0) + i\mathrm{Im}f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(Re^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta + i\mathrm{Im}f(0). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(Re^{i\theta})\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot R^{-n}e^{-in\theta}z^n\right]\mathrm{d}\,\theta + i\mathrm{Im}f(0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}f(Re^{i\theta})\left[1 + \frac{2\frac{z}{Re^{i\theta}}}{1-\frac{z}{Re^{i\theta}}}\right]\mathrm{d}\,\theta + i\mathrm{Im}f(0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\mathrm{Re}f(Re^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta + i\mathrm{Im}f(0). \end{aligned}$$

□

例 3.6. P117.9：设 $f \in H(B(0,R)) \cap C(\overline{B(0,R)})$，则对 $\forall\, 0 < r \le R$，有

$$f'(0) = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(re^{i\theta})e^{-i\theta}\,\mathrm{d}\,\theta.$$

证明.

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta \\
\frac{f(z)-f(0)}{z} &= \frac{1}{z}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{re^{i\theta}+z}{re^{i\theta}-z}\mathrm{Re}f(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}f(re^{i\theta})\,\mathrm{d}\,\theta\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{Re}f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}-z}\,\mathrm{d}\,\theta.
\end{aligned}$$

令 $z\to 0$，$f'(0)=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}f(re^{i\theta})e^{-i\theta}\,\mathrm{d}\,\theta$。 □

4 辐角原理与 Rouché 定理

定理 4.1. 设 $f\in H(D)$，γ 是 D 中可求长简单闭曲线，γ 的内部位于 D 中，如果 f 在 γ 上没有零点，在 γ 的内部有零点 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，阶数分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$。则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k.$$

证明. 取 $\varepsilon>0\ s.t.\ B(a_j,\varepsilon)$ 两两不交且包含在 γ 的内部 Ω 中，则 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在 $\Omega\setminus\overline{\bigcup_{j=1}^{k}B(a_j,\varepsilon)}$ 中全纯，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z = \sum_{j=1}^{k}\int_{\partial B(a_j,\varepsilon)}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z.$$

a_j 是 $f(z)$ 的 α_j 阶零点 $\Rightarrow f$ 在 a_j 的某个邻域中有 $f(z)=(z-a_j)^{\alpha_j}g_j(z)$，$g_j(z)$ 全纯且 $g_j(a_j)\neq 0$，于是

$$\begin{aligned}
\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\alpha_j(z-a_j)^{\alpha_j-1}g_j(z)+(z-a_j)^{\alpha_j}g_j'(z)}{(z-a_j)^{\alpha_j}g_j(z)} = \frac{\alpha_j}{z-a_j}+\frac{g_j'(z)}{g_j(z)} \\
\Rightarrow & \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(a_j,\varepsilon)}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}\,z = \alpha_j.
\end{aligned}$$

□

设 Γ 是 $w-$ 平面上一条不过原点的曲线，方程为 $w=w(t)$ $(a\le t\le b)$，$w(t)$ 的辐角记为 $\theta(t)$，且 $\theta(t)$ 为 t 的连续函数，记 $\triangle_\Gamma\mathrm{Arg}w=\theta(b)-\theta(a)$，称之为曲线 Γ 的**辐角增量**。

如果 Γ 为不过原点的闭曲线 (可能是非简单的闭曲线)，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}\,w}{w} = \frac{1}{2\pi}\triangle_\Gamma\mathrm{Arg}w = \Gamma\text{绕原点的圈数}.$$

例 4.1. $\Gamma\colon[0,2\pi]\to\mathbb{C},\ \gamma(t)=e^{it}$，$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}\,w}{w}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}i\,\mathrm{d}\,t}{e^{it}}=1$。

$\Gamma\colon[0,2\pi]\to\mathbb{C},\ \gamma(t)=e^{2it}$，$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}\,w}{w}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{2it}2i\,\mathrm{d}\,t}{e^{2it}}=2$。

定义 4.1. $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}\,w}{w}$ 称为闭曲线 Γ 绕原点的**环绕指数 (Winding number)**。

定理 4.2. 辐角原理：设 $f \in H(D)$，γ 为 D 中可求长简单闭曲线，γ 的内部包含在 D 内，如果 f 在 γ 上无零点，则 f 在 γ 内部的零点个数等于 $f \circ \gamma$ 绕原点的环绕指数，即 γ 在 f 下的像绕原点的圈数。

例 4.2. $f(z) = z^2$ 在 $|z| < 1$ 中的零点个数 $= 2$，另一方面，当 z 沿 $|z| = 1$ 绕行一周时，其像在 $w-$ 平面绕原点绕行 2 周。