第一次习题课

1(作业题 4): 设 G 是一个半群, 如果:

(1) G 中含有左幺元 e, 即 $\forall x \in G, ex = x$;

(2) G 的每个元素 x 有 (关于 e) 左逆元 x^{-1} 使得 $x^{-1}x = e$.

试证 G 是群.

证明*:* 我们欲说明 e 是幺元, 那么应该证明 $xe = x(x^{-1}x) = (xx^{-1})x = ex = x, \forall x \in G$, 因此我们只需要证明 $xx^{-1} = e, \forall x \in G$, 而 $xx^{-1} = e(xx^{-1}) = (ex)x^{-1} = (((x^{-1})^{-1}x^{-1})x)x^{-1} = ((x^{-1})^{-1}(x^{-1}x))x^{-1} = ((x^{-1})^{-1}e)x^{-1} = (x^{-1})^{-1}(ex^{-1}) = (x^{-1})^{-1}x^{-1} = e$. 因此 e 是 G 中幺元, 而且同时说明了 G 中任意一个元素有逆元. $\square$

2(作业题 8): 举例:

(1) 举出一个半群的例子, 其中存在元素有左逆元但是没有右逆元;

(2) 举出一个半群的例子, 其中存在元素至少有两个左逆元;

(3) 举出一个半群的例子, 其中存在元素有无数个左逆元.

证明*:* 大多数时候我们谈论左右逆元, 都是在幺半群的情况下, 因为此时只有唯一一个幺元, 性质相对会好些. 我们分别看一些例子:

(a): 右零半群.

设 S 是一个非空子集, 定义其中乘法: $a \cdot b = b, \forall a, b \in S$, 易证 S 是半群, 而且任一元素都是左幺元, 且任一元素 a 都是元素 b 的相对于左幺元 b 的左逆元. 因此 b 有 $|S|$ 个相对于 b 的左逆元. 同时, 任一元素 b 都是元素 a 的相对于左幺元 b 的左逆元

注意: 右零半群构成一个群 $\Longrightarrow ae = a = e, \forall a \in S \Rightarrow |S| = 1$.

(b): 集合的全变换半群 $\mathcal{T}(X)$(幺半群).

例: $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, n \longmapsto n+1$, 没有右逆元因为其不是满射.$f$ 有无限个左逆: $g_a : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$,

$$g_a(n) = \begin{cases} n-1 & n \geq 1 \\ a & n = 0 \end{cases} \qquad \forall a \in \mathbf{N}.$$

或者 $f(n) = n^2$.

也可以考虑 R^∞ 上的线性变换: $f : (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots) = (0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$. $\square$

Remark:

(a): 固定右零半群里的一个左幺元, 记为 e, 那么 $\forall a \in G, ab = b = e$ 意味着每个元素关于 e 都有唯一的右幺元 e, 但是 S 一般不是群.

(b) 若半群 G 有唯一的右幺元 e 并且每个元素都有关于 e 的左逆元, 那么 G 是一个群. 事实上: $e = (a^{-1})^{-1}a^{-1} = (a^{-1})^{-1}(a^{-1}a)a^{-1} = eaa^{-1}$, 所以 $\forall b \in G, b = be = beaa^{-1} = baa^{-1} \Rightarrow e = aa^{-1}$, 进一步 $ea = (aa^{-1})a = ae = a$. 因此,G 是群.

(c)Kaplansky 定理: 含幺环中一元素若有至少两个右逆元, 则其有无限个右逆元 $(x_0 + (1 - x_0 x)x^k)$.

(d) 定义 $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} n-1 & n > 1 \\ 0 & 0 \leq n \leq 1 \end{cases}.$$

易验证 f 只有两个右逆元, 因此 $\mathcal{T}(X)^{op}$ 中 f 恰有两个左逆元.

3(作业题 9): 令 S 是一非空集. 定义 S 上的运算:$a \cdot b = a (a \cdot b = b)$. 则 $(S, \cdot)$ 是一个半群, 称其为左 (右) 零半群. 若 S 是一半群, 证明如下三款等价:

(1) S 是一左零半群, 或者 S 是一右零半群;

(2) $ab = cd \Rightarrow a = c$ 或者 $b = d$;

(3) 任意映射 $f: S\to S, f(ab)=f(a)f(b)$.

证明*:* (1)⇒(3): 显然;

(3)⇒(2): 先证明 $\forall a,b\in S, ab=a$ 或者 b. 若 $ab\neq a$, 做 S 上的变化 $f(x)=a(x=ab), f(x)=ab(x\neq ab)\Rightarrow a=f(ab)=f(a)f(b)=(ab)f(b)$, 若 $f(b)=ab$, 那么 $a=(ab)(ab)=ab$(考虑到独点的映射), 矛盾, 因此 $f(b)=\neq ab$, 即 $ab=a$. 现证明命题, 设 $ab=cd$, 若 $a=b$, 那么 $ab=aa=a=b=cd=c(d)$, 若 $a\neq b$, 那么 $ab=a(b)$, 若 $ab=a$, 做 S 上的变化 $f(x)=c(x=ab), f(x)=d(x\neq ab)$, 则 $c=f(ab)=f(a)f(b)=cd=ab=a$. 若 $ab=b$, 则 $b=d$.

(2)⇒(1): 若 S 不是左零半群, 则 $\exists a_0,b_0\in S$ 使得 $a_0b_0\neq a_0$, 所以 $\forall a\in S$, 有 $(a_0b_0)a=a_0(b_0a)\Rightarrow a=b_0a\Rightarrow ba=(b_0b)a=b_0(ba)\Rightarrow a=ba, \forall b\in S\backslash\{b_0\}$. 因此 S 是一个右零半群. □

4(作业题 10): 令 G 是一个半群. 则 G 是一个群当且仅当

$$\forall a\in G, \exists! b\in G, (ab)^2=ab.$$

证明*:* 第一步: 记上述 b 为 a', 那么有 $(aa'aa')^2=aa'aa'\Rightarrow a'aa'=a'\Rightarrow (a'a)^2=a'a$. 若存在另一个 a'' 满足 $(a''a)^2=a''a$, 即 $a=(a'')'$, 那么 $(aa'')^2=aa''\Rightarrow a''=a'$.

第二步: 任意 $a,b\in G, ((ba')'(ba'))^2=(((ba')'b)a'))^2=((ba')'b)a')\Rightarrow (ba')'b=a$. 即 $xb=a$ 有解, 类似的 $ay=b$ 有解, 故 G 是群. □

5:(一些小维典型群)

(1):SO(2)≅U(1)(课堂上说过);

(2): SU(2) ↠ SO(3).

证明*:* (1):SO(2) $=\left\{\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi\end{pmatrix}\in M_2(R)|0\leq\varphi<2\pi\right\}\to$U(1)

. $$\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi\end{pmatrix}\mapsto e^{i\varphi}.$$

(2): 旋转群 SO(3). 在 $\mathbb{R}^3$ 上给定标准内积.$\mathbb{R}^3$ 的原点表示成 O,$\mathbb{R}^3$ 上的旋转 (rotation) 是一个光滑映射 $R:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, 其保持原点 O、角度、距离和定向. 考虑 $\mathbb{R}^3$ 中任意两点 A,B, 由于 R 保持距离和角度, 则四边形 $OABC$ 和四边形 $R(O)R(A)R(B)R(C)$ 全等, 因此 $\overrightarrow{OR(A)}+\overrightarrow{OR(B)}=\overrightarrow{OR(C)}$, 也就是 $R(C)=R(A+B)=R(A)+R(B)$. 而且我们有 $R(rA)=rR(A)$, 因此 R 是一个线性映射.(如果觉得该描述不够数学, 也可以利用内积得到更严格的数学证明).

因为:

$$cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}$$

一个旋转保持距离和角度当且仅当其保持内积.

为了保持定向, 只需要其保持外积 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}=det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$,$R$ 对应的矩阵同样记为 R, 则有 $\mathrm{sgn}(\det R\cdot\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}))=\mathrm{sgn}(\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}))$. 因此 $\det R>0$.

综上, 一个旋转对应于一个线性变换, 其满足:$R^TR=I_3$, $\det R=1$, 即 SO(3). 而我们又知道三阶特殊正交矩阵必有一个实特征根, 且可知其是 $1(\lambda_1\lambda_2\bar{\lambda_2}=1)$. 因此存在 e_r 使得 $Re_R=e_R$. 若 R 不是恒等矩阵, 则其属于 1 的特征子空间的维数为一, 其在 R 的作用下是不变的. 我们称改不变子空间为旋转轴 (the axis of rotation),R 可以视作绕着该轴的旋转 (角度记为 ϕ, 旋转 R 记为 $R(e_R,\phi)$). 我们能通过一个坐标变换使得 z 轴变成 e_R, 例如: 记 e_R 在 zy 平面的投影和 z 轴的夹角为 θ,e_R 和 z 轴的夹角为 φ, 则:

$$R(e_R,\phi)=\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\varphi & 0 & sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\varphi & 0 & cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & 0 \\ sin\phi & 0 & cos\phi \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

上述矩阵分别记为 $R_z(\theta), R_y(\varphi), R_z(\phi)$, 因此 $R = R_z(\theta)R_y(\varphi)R_z(\phi)$.

类似的有 $R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$. 故 SO(3) 可以由初等旋转矩阵 $R_x(\alpha), R_y(\varphi), R_z(\phi)$ 生成.

复旋转. 在 $\mathbb{C}^2$ 给定标准内积. 我们有群同态 det:$U(2) \longrightarrow U(1)$, 显然这是一个满同态, 且其 kernel 是 $SU(2)$. 特别的, 我们有 $U(2) \cong U(1) \times SU(2)$ ($U(1) \cong \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$).

$\forall U \in SU(2)$, $U^*U = I_2$, 且 det$U = 1$, 因此可以得到如下等式

$$\begin{array}{ll} |a|^2 + |c|^2 = 1, & |b|^2 + |d|^2 = 1, \\ \bar{a}b + \bar{(c)}d = 0, & ad - bc = 1. \end{array}$$

故 $U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, 所以 $d = \bar{a}, c = -\bar{b}$. 因此 $SU(2)$ 中的任意一个元素都可以写成如下形式:

$$U(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \qquad |x|^2 + |y|^2 = 1,$$

特别的我们有流形间的同构 $SU(2) \cong S^3$.

泡利矩阵. 定义如下矩阵:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

注意到 $M_0 = \mathbb{R}\sigma^1 + \mathbb{R}\sigma^2 + \mathbb{R}\sigma^3$ 是所有迹零的二阶复 Hermitian 矩阵.$\forall (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3)^T \leftrightarrow H_x := \sum_{i=1}^3 x_i\sigma^i$, 由于在 M_0 上具有矩阵 A(基: $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$) 的线性变换对应到 $\mathbb{R}^3$ 同样具有矩阵 A(基: e_1, e_2, e_3) 的线性变换, 因此我们可以简单地将这两个空间等同起来.

令 $g \in SU(2)$, 定义如下映射: $\Phi_g : H_x \mapsto gH_xg^{-1}$,$tr(gH_xg^{-1}) = tr(H_x) = 0$, $(gH_xg^{-1})^* = (g^{-1})^*H_x^*g^* = gH_xg^{-1} \Rightarrow \Phi_g(H_x) = gH_xg^{-1} \in M_0$. 又有 $\Phi_g(H_{\alpha x} + H_{\beta y}) = \alpha\Phi_g(H_x) + \beta\Phi_g(H_y)$, 即 Φ 是 M_0 上的线性算子.

设 $\Phi_g(H_x) = H_y$, 我们说明 Φ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的正交变换.$\Phi_g(x) \cdot \Phi_g(x) = y \cdot y = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ =-det $H_y = -\text{det}\Phi_g(H_x) = -\text{det}gH_xg^{-1} = -\text{det}\ H_x = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x \cdot x$.

容易证明 $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$, 因此 $\Phi : g \mapsto \Phi_g$ 是 SU(2) 到 O(3) 的同态, 其 kernel 满足 $gH = Hg, \forall H \in M_0$, 即 $g\sigma^i = \sigma^i g, 1 \le i \le 3 \Rightarrow g = \pm I_2$.

又因为:

$$U(e^{i\gamma/2}, 0)\sigma^1 U(e^{i\gamma/2}, 0)^{-1} = cos\varphi\sigma^1 + sin\varphi\sigma^2,$$
$$U(e^{i\gamma/2}, 0)\sigma^2 U(e^{i\gamma/2}, 0)^{-1} = -sin\varphi\sigma^1 + cos\varphi\sigma^2,$$
$$U(e^{i\gamma/2}, 0)\sigma^3 U(e^{i\gamma/2}, 0)^{-1} = \sigma^3.$$

因此 $\Phi(U(e^{-i\gamma/2}, 0)) = R_z(\gamma)$.

而我们又有 $g = hU(e^{-i\gamma/2}, 0)h^{-1}$,$h$ 是某个酉矩阵. 因此 detΦ_g =det$(\Phi_h\Phi_{U(e^{-i\gamma/2},0)}\Phi_{h^{-1}})$ = 1(此时的 Φ_h 的定义和上面是一样的).

同样可以计算 $\Phi(U(cos\alpha/2, -isin\alpha/2)) = R_x(\alpha), \Phi(U(cos\beta/2, -sin\beta/2)) = R_x(\alpha)$.

综上 $SU(2)/Z_2 \cong SO(3)$. □