第 4 章　原函数

§4.1　原函数及其基本的计算方法

4.1.1　概念

定义 1　设函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 若对每个 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x), \quad \text{或} \quad dF(x) = f(x)dx,$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

注意1, 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$（在区间 I 上）的一个原函数, 则 $F(x)$ 加上一个任意常数后仍然是 $f(x)$ 的一个原函数;

注意2, $f(x)$ 的任意两个原函数只相差一个常数.

定义 2 称 $f(x)$ 在区间 I 上的全体原函数 $\{F(x)+C\}$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分, 记为

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

其中 C 是任意常数, 称为积分常数; $\int$ 称为积分号; $f(x)$ 称为被积函数; $f(x)dx$ 称为被积表达式; x 称为积分变量.

几何上解释求函数 $f(x)$ 的原函数的问题: 在 Oxy 直角坐标系中找出一条曲线 $y = F(x)$, 使其在横坐标为 x 的点处的切线斜率为 $f(x)$. 这样的一条曲线, 称为 $f(x)$ 的一条积分曲线, 将它沿着 y 轴的方向作平移, 便得出所有其余 (符合上述要求) 的曲线. 因此, 在几何上, 不定积分 $\int f(x)dx$ 表示包含上述全部积分曲线的曲线族.

（1）什么样的函数有原函数（或者说什么样的被积函数有不定积分）?

（2）如果一个函数 $f(x)$ 有原函数, 那么如何具体算出 $f(x)$的原函数?

（3）由于初等函数的导数仍然是初等函数, 那么作为导数的逆运算, 一个初等函数的原函数（或者说不定积分）是否一定还能够表示成初等函数?

根据 Darboux 定理可知, 导函数满足介值定理, 不可能有第一类间断点的函数. 因此象符号函数 $y = \mathrm{sgn}x$ 这样的函数是不能表示成一个函数的导数的, 因而没有原函数. 然而, 我们将在下一章中证明一个重要事实: 对于给定区间上的连续函数, 在这区间上必有原函数.

本章只考虑定义在一个区间上的连续函数的不定积分, 并以求出不定积分作为主要目标. 这里所谓的“求出不定积分”, 是指可将不定积分表示为初等函数. 但确实有这样的初等函数, 它们的不定积分无法表示成初等函数. 例如, 可以证明下列积分 $\int e^{-x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{\ln x}\,dx$, $\int \sin x^2\,dx$ 等是不能表示成为初等函数的.

4.1.2 基本积分表

由前面的微分公式表, 可得到下面的不定积分公式表.

(i) $\int 0\,dx = C$; (ii) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$;

(iii) $\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C,\quad (\alpha \neq -1)$;

(iv) $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C\ (a > 0, a \neq 1)$;

(v) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$;

$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$; $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$;

(vi) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$;

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\,x + C_1$.

4.1.3 不定积分的线性性质

(i) 若 a 是常数 $(a \neq 0)$, 则 $\displaystyle\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$;

(ii) $\displaystyle\int \Big(f(x) \pm g(x)\Big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

我们注意, 关于不定积分的等式实际上是关于函数族的等式 (即一个集合等式). 等式 (i) 的含义是, 当 $a \neq 0$ 时, $a \cdot f$ 的原函数可由 a 乘 f 的原函数得到; 而且 a 乘 f 的原函数也必是 $a \cdot f$ 的原函数. 等式 (ii) 具有类似的含义. (我们再次提一下, 在函数连续的前提下, 原函数的存在性已得到了保证.)

等式 (i) 和 (ii) 是微分法则的显然推论 (例如, 由于 (i) 式两端中函数的微分都是 $af(x)dx$, 从而 (i) 成立; 类似地可得出 (ii)). 此外, 易知 (ii) 对于多个函数的情形也成立.

由这两个等式, 可以将一个较复杂的不定积分化为若干个已知的不定积分的和, 进而得出结果. 这种方法, 称为分项积分法.

例 1 求 $\int \frac{x^2-3x+1}{x+1}dx$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-3x+1}{x+1}dx &= \int \left(x-4+\frac{5}{x+1}\right)dx \\ &= \int x dx - 4\int dx + 5\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5\ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

注意, 上面第二个等式右端的每一个不定积分都含有一个任意常数, 最后合并记作 C; 这一点我们以后不再申明.

例 2 求 $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx \\ &= \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx \\ &= \tan x - \cot x + C.\end{aligned}$$

例 3 求 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx.$

解

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}dx &= \int \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)}dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
&= \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= -\frac{1}{x} - \arctan x + C.
\end{aligned}$$

4.1.4 不定积分的换元法

定理 1 (**第一换元法**) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数（即 $F'(x)=f(x)$），并设 $u=\varphi(x)$ 可微. 则我们有

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))+C.$$

即 $f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ 的一个原函数是 $F(\varphi(x))$.

证明 由一阶微分形式的不变性, 关系式

$$dF(u)=f(u)du$$

再以函数 $\varphi(x)$ 代替自变量 u 时仍然成立, 由此导出所说的等式.

这一方法也称为"凑微分法".

例 4 求 $\int \tan x \, dx$.

解 所求的不定积分

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(d \cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

例 5 求 $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx.$

解 记 $t=\ln x$, 所求的不定积分为

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx &= \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}d(\ln x) \\
&= \int \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt \\
&= \int \frac{(1+t)-1}{\sqrt{1+t}}dt \\
&= \int \sqrt{1+t}\,d(1+t) - \int \frac{d(1+t)}{\sqrt{1+t}} \\
&= \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} - 2\sqrt{1+t} + C \\
&= \frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2} - 2\sqrt{1+\ln x} + C.
\end{aligned}$$

例 6 求 $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

解 设 $u = \cos x$. 则

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x} dx \\
&= -\int \frac{du}{1-u^2} \\
&= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du \\
&= -\frac{1}{2} (\ln(1+u) - \ln(1-u)) + C \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1-u}{1+u} + C \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.
\end{aligned}$$

定理 2 (**第二换元法**) 设函数 $x=\varphi(t)$ 是严格单调的可微函数, 且 $\varphi'(t)$ 不取零值 (从而 φ 有反函数 φ^{-1}). 若 $G(t)$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的一个原函数, 即

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t)+C,$$

则有

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x))+C.$$

即 $G(\varphi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

证明 我们由复合函数求导法则, 反函数求导法则以及已知条件, 得出

$$\begin{aligned}\frac{dG(\varphi^{-1}(x))}{dx} &= \frac{dG(t)}{dx} = \frac{dG}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\\ &= G'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}\\ &= f(\varphi(t)) = f(x).\end{aligned}$$

由此导出所说的结果.

例 7 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

解 设 $t=\sqrt{e^x+1}$, 则 $e^x+1=t^2$, 故 $e^x dx = 2t dt$, 即 $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$. 所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt &= \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt \\ &= \ln(t-1)-\ln(t+1)+C \\ &= \ln\frac{t-1}{t+1}+C \\ &= \ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}+C \\ &= 2\ln\left(\sqrt{e^x+1}-1\right)-x+C.\end{aligned}$$

例 8 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx$.

解 被积函数的定义域为 $x > 0$. 我们令 $x = t^6\,(t > 0)$ 以消除所有根号, 则 $\sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5 dt$, 从而

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} &= 6\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} \\ &= 6\int dt - 6\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 6(t - \arctan t) + C. \\ &= 6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + C.\end{aligned}$$

例 9 求 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$, 其中 a 是一个常数, $a>0$.

解 为了去除二次根号,我们令 $x=a\sin t$, 这里 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. 则 $t=\arcsin\frac{x}{a}$, 且 $dx=a\cos t dt$. 故所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int a^2\cos^2 t dt &= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt\\ &= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C\\ &= \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C\\ &= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.\end{aligned}$$

若被积函数在定义域上连续, 则必须求出被积函数在整个定义域上的不定积分 (我们知道, 它必定存在), 而不是部分定义域上的不定积分. 我们举个例子, 以作说明.

例 10 求 $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$.

解 当 $x \neq 0$时, 将被积函数的分子、分母同除以 x^2, 得出

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx &= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}dx \\ &= \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C.\end{aligned}$$

为了求出 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$ 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上的原函数 $F(x)$, 由已

得的结果, 可设

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C_1, & x<0;\\ C, & x=0;\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C_2, & x>0.\end{cases}$$

由 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 得出

$$\lim_{x\to 0+0}F(x)=\lim_{x\to 0-0}F(x)=F(0),$$

即 $\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}+C_1=C=-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}+C_2$, 故 $C_1=C-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}$, $C_2=C+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}$. 由此易知

$$F'_+(0)=F'_-(0)=f(0).$$

从而 F 在 $x=0$ 处可导, 且 $F'(0)=f(0)$. 故

$$\int f(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}-\frac{\pi}{2}\right)+C, & x<0;\\ C, & x=0;\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+\frac{\pi}{2}\right)+C, & x>0.\end{cases}$$

4.1.5 分部积分法

定理 3 (**分部积分法**) 设函数 $u = u(x)$ 与 $v = v(x)$ 有连续的微商, 则

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)\, dx.$$

证明 根据函数乘积的微分法则, 有

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

因此,

$$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))du = u(x)v(x) + C.$$

由此即得所证.

例 11 求 $\int x^2 \ln x \, dx$.

解 因为 $d(\frac{1}{3}x^3) = x^2 dx$, 所以可取 $u(x) = \ln x, v(x) = \frac{1}{3}x^3$.

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \, dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 d(\ln x) \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.\end{aligned}$$

一般对于形如 $\int x^m \ln x dx$, $\int x^m \arctan x dx$ 的不定积分都可以仿此法求解.

例 12 设 $p(x)$ 是 n 次多项式, 求 $\int p(x)e^x dx$.

解

$$\begin{aligned}\int p(x)e^x dx &= p(x)e^x - \int p'(x)e^x dx \\ &= p(x)e^x - \left(p'(x)e^x - \int p''(x)e^x dx\right) \\ &= (p(x) - p'(x))e^x + \int p''(x)e^x dx \\ &= \cdots \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^{(k)}(x)\right) e^x + C.\end{aligned}$$

例 13 计算 $I_n = \int \cos^n x\,dx$.

解

$$\begin{aligned}
I_n &= \int (\sin x)' \cos^{n-1} x dx \\
&= \sin x \cos^{n-1} x - (n-1) \int \sin x \cos^{n-2} x(-\sin x) dx \\
&= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx \\
&= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x dx \\
&= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n.
\end{aligned}$$

所以有

$$I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

由于 $I_0 = x + C$, $I_1 = \sin x + C$, 所以由上面递推公式可以得到 I_n 的表达式.

例 14 求 $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ (a,b 是不等于零的实数).

解 记所说的不定积分为 I, 则由分部积分公式, 得出

$$I=\frac{1}{a}\int\sin bx\cdot d(e^{ax})=\frac{e^{ax}}{a}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

对右端第二个积分再用分部积分公式, 得

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}}{a}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx.$$

因此,我们有

$$I=\frac{e^{ax}}{a}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}I.$$

移项得到 (注意, I 表示一个函数族)

$$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C.$$

例 15 记 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx\ (n=1,2,\cdots)$, 其中 a 是非零实数. 证明下面的递推公式成立:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n\ (n=1,2,\cdots).$$

(由此及 $I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$, 可递推地求得 I_n.)

证明 取 $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $v = x$, 则 $du = -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$, $dv = dx$, 得

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx\\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left(\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx - a^2\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx\right)\\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left(I_n - a^2 I_{n+1}\right),
\end{aligned}$$

由此即得结果.

许多不定积分的计算, 需将分部积分法与换元法结合使用, 我们举一个这样的例子.

例 16 求 $\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}dx$.

解 我们先由分部积分得出

$$\begin{aligned}\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}dx &= -\int 2x d\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\right)\\ &= -\frac{2x}{\sqrt{1+e^x}} + 2\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.\end{aligned}$$

而上式中的不定积分可用代换法求得 (见例 7), 我们最后有

$$\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}dx = 4\ln\left(\sqrt{e^x+1}-1\right) - 2x - \frac{2x}{\sqrt{e^x+1}} + C.$$