定理4 $S_0=0$ 不再经过原点.

$$P(S_1,S_2,\cdots,S_n\neq 0,\ S_n=b)=\frac{|b|}{n}P(S_n=b)$$

证: $S_n=b$ 不过原点, 轨道数 $\frac{|b|}{n}N_n(0,b)$

$$P(S_1,S_2,\cdots,S_n\neq 0, S_n=b)=\frac{|b|}{n}N_n(0,b)\,p^{\frac{n+b}{2}}q^{\frac{n-b}{2}}$$

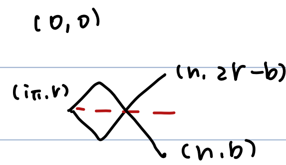
$$P(S_1,\cdots,S_n\neq 0, S_0=0)=\sum_b P(S_1,\cdots,S_n\neq 0,\ S_0=0, S_n=b)$$

$$=\sum_b \frac{|b|}{n}P(S_n=b)=\frac{1}{n}\sum_b |b|\cdot P(S_n=b)=\frac{1}{n}E(|S_n|)$$

游走最大值 记 $M_n=\max\{S_i: 0\le i\le n\}$

定理: $S_0=0, r\ge 1$

$$P(M_n\ge r, S_n=b)=\begin{cases}P(S_n=b) & b\ge r\\ \left(\frac{q}{p}\right)^{r-b}P(S_n=2r-b) & b<r\end{cases}$$



证: 记 $A=\{(0,0)\to(n,b)$ 且经过某点 $(i,r)\}$

对 $\forall \pi\in A$, 可得 π' 从 (i_π, r) 翻转, π' 是从 $(0,0)$ 到 $(n,2r-b)$ 的轨道 $\pi\longleftrightarrow\pi'$

$\# A=N_n(0,2r-b)$

$$\frac{P(\pi)}{P(\pi')}=\frac{p^{\frac{n-i_\pi+b-r}{2}}\cdot q^{\frac{n-i_\pi-b+r}{2}}}{p^{\frac{n-i_\pi-b+r}{2}}\cdot q^{\frac{n-i_\pi+b-r}{2}}}=\left(\frac{q}{p}\right)^{r-b}$$

$$P(M_n\ge r, S_n=b)=N_n(0,2r-b)P(\pi)=\underbrace{P(S_n=2r-b)}_{P(\pi')\cdot N_n(0,2r-b)}\left(\frac{q}{p}\right)^{r-b}$$

hw 3.9.3, 3.9.4, 3.9.5, 3.10.1

$$P(M_n\ge r)=\sum_{b<r}P(M_n\ge r, S_n=b)+P(S_n\ge r)$$

$$=\sum_{b<r}\left(\frac{q}{p}\right)^{r-b}P(S_n=2r-b)+P(S_n\ge r)$$

$$\overset{2r-b=c}{=}\sum_{c=r+1}^{\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^{c-r}P(S_n=c)+P(S_n\ge r)$$

$$=P(S_n=r)+\sum_{c=r+1}^{\infty}\left(1+\left(\frac{q}{p}\right)^{c-r}\right)P(S_n=c)$$

$p=q=\frac{1}{2}$ 时, $P(M_n\ge r)=P(S_n=r)+\sum_{c=r+1}^{\infty}2P(S_n=c)$

定理(首达时) $S_0=0$. 在 n 时刻首次到达 b 的概率. $f_n(b)=\frac{|b|}{n}P(S_n=b)$

证：不妨设 $b>0$. $f_n(b)=p(M_{n-1}=S_{n-1}=b-1,\ X_n=1) \overset{独立}{=} p(M_{n-1}=S_{n-1}=b-1)\cdot p$

$=p\cdot(p(M_{n-1}\geq b-1,\ S_{n-1}=b-1)-p(M_{n-1}\geq b,\ S_{n-1}=b-1))$

$=p(\ p(S_{n-1}=b-1)-(\frac{q}{p})\,p(S_{n-1}=b+1))$

$=p(\ C_{n-1}^{\frac{n+b-2}{2}}\,p^{\frac{n+b-2}{2}}\,q^{\frac{n-b}{2}}-\frac{q}{p}\cdot C_{n-1}^{\frac{n+b}{2}}\,p^{\frac{n+b}{2}}\,q^{\frac{n-b-1}{2}})$

$=\frac{\frac{n+b}{2}}{n}\,p(S_n=b)-\frac{\frac{n-b}{2}}{2n}\,p(S_n=b)$

$=\frac{b}{n}\,p(S_n=b)$

定理 $S_0=0,\ p=\frac{1}{2},\ T_{2n}=\max\{2k\,|\,S_{2k}=0,\ k=1,2,\cdots,n\}$

$p(T_{2n}=2k)=p(S_{2k}=0)\cdot p(S_{2n-2k}=0)$

证：$p(T_{2n}=2k)=p(S_{2k}=0,\ S_{2k+1},\cdots,S_{2n}\neq 0)$

$=p(S_{2k}=0)\,p(S_{2k+1},\cdots,S_{2n}\neq 0\,|\,S_{2k}=0)$

$\overset{\text{Markov}}{=} p(S_{2k}=0)\,p(S_1,\cdots,S_{2(n-k)}\neq 0\,|\,S_0=0)$

$=p(S_{2k}=0)\,p(S_1,\cdots,S_{2(n-k)}\neq 0)$

$p(S_1,\cdots,S_{2n-2k}\neq 0)=\sum_b p(S_1,\cdots,S_{2n-2k}\neq 0,\ S_{2n-2k}=b)$

$=\sum_b \frac{|b|}{2n-2k}\,p(S_{2n-2k}=b)$

$=2\sum_{b>0}\frac{b}{2n-2k}\,C_{2n-2k}^{\frac{2n-2k+b}{2}}\,(\frac{1}{2})^{2n-2k}$

$=(\frac{1}{2})^{2n-2k}\sum_{b>0}\frac{(n-k+b)-(n-k-b)}{2n-2k}\,C_{2n-2k}^{\frac{2n-2k+b}{2}}$

$=(\frac{1}{2})^{2n-2k}\,C_{2n-2k}^{n-k}=p(S_{2n-2k}=0)$

反正弦律

$n!\sim(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n},\ n\to\infty$ $\quad p(S_{2k}=0)=C_{2k}^{k}\cdot(\frac{1}{2})^{2k}=\frac{(2k)!}{k!\,k!}(\frac{1}{2})^{2k}\sim\frac{(\frac{2k}{e})^{2k}\sqrt{4\pi k}}{(\frac{k}{e})^{2k}\cdot 2\pi k}\cdot(\frac{1}{2})^{2k}$

$=\frac{1}{\sqrt{\pi k}}\ ,\ k\to\infty.$

$p(S_{2n-2k})\sim\frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}}$ $\quad p(\frac{T_{2n}}{2n}\leq x)\sim\sum_{k\leq nx}\frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}=\sum_{k\leq nx}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}}$

$\sim\int_0^x\frac{1}{\pi\sqrt{u(1-u)}}\,du$

$=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}$ （$\frac{T_{2n}}{2n}$ 渐近分布）

§4. 连续型 r.v.

§4.1 密度函数独立性

$X: \Omega \to R$

$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$，$f(t) \ge 0$，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$，$f(x)$ 称为概率密度函数. p.d.f

$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$

定义: $X_1, \cdots, X_n$ 定义在 (Ω, F, P) 上连续型 r.v.

$P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < x_i) \quad \forall x_i \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ 称 $X_1, \cdots, X_n$ 独立.

若 X_i p.d.f 为 $f_i(x)$，$(X_1, \cdots, X_n)$ 联合 p.d.f $f(x_1, \cdots, x_n)$

$X_1, \cdots, X_n$ 独立 $\Leftrightarrow f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$

$\Rightarrow$: $X_1, \cdots, X_n$ 独立. $P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x_i)$

$$\int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \cdots, t_n)\,dt_1 \cdots dt_n = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_i(t_i)\,dt_i$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} f_i(t_i)\,dt_1 \cdots dt_n$$

对 $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$ 成立. 故 $f(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$

$\Leftarrow$: $P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} f_i(t_i)\,dt_1 \cdots dt_n$

$$= \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_i(t_i)\,dt_i = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x_i)$$

定理 $g_1, \cdots, g_n$ 是一元 Borel 可测函数. $X_1, \cdots, X_n$ 独立 r.v. 则 $g_1(X_1), \cdots, g_n(X_n)$ 相互独立.

证: $\forall x_i$，$B_i = \{x \mid g_i(x) \le x_i\} \in \mathcal{B}(R)$

$$P(g_1(X_1) \le x_1, \cdots, g_n(X_n) \le x_n) = P(X_1 \in B_1, \cdots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i) = \prod_{i=1}^{n} (g(X_i) \le x_i)$$

§4.2 数学期望

离散型 $E(X) = \sum_x x\,P(X = x)$

连续型 $\sum_x x\,P(x < X \le x + \Delta x) \sim \sum_x x f(x) \Delta x \sim \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

定义：r.v. X 有 p.d.f. $f(x)$ 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)|x|dx$ 收敛.

记 $E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ 称为 X 的数学期望

定理：若 X. $g(X)$ 都是连续型 r.v. X p.d.f. 为 $f(x)$. $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f(x)\,dx<+\infty$.

则 $E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$

引理：X 为非负连续型 r.v. $E(X)$ 存在. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(X>x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}(1-F(x))\,dx$.

一般. $E(X)=\int_{0}^{+\infty}(1-F(x))dx-\int_{0}^{+\infty}F(-x)\,dx$

证：X 的 p.d.f. 记为 $f(x)$.

$\int_{0}^{+\infty}P(X>x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}\int_{x}^{+\infty}f(t)\,dt\,dx=\int_{0}^{+\infty}dt\int_{0}^{t}f(t)\,dx=\int_{0}^{+\infty}t f(t)\,dt$

一般. $\int_{0}^{+\infty}F(-x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{-x}f(t)\,dt\right)dx=\int_{-\infty}^{0}dt\int_{0}^{-t}f(t)\,dx=\int_{-\infty}^{0}-t f(t)\,dt$

$\int_{0}^{+\infty}(1-F(x))dx-\int_{0}^{+\infty}F(-x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}t f(t)\,dt=E[X]$

证：$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\,dx$

$E(g(X))=\int_{0}^{+\infty}P(g(X)>y)\,dy-\int_{0}^{+\infty}P(g(X)<-y)\,dy$

$=\int_{0}^{+\infty}\int_{\{x:g(x)>y\}}f(x)\,dx\,dy-\int_{0}^{+\infty}\int_{\{x:g(x)<-y\}}f(x)\,dx\,dy$

$=\int_{0}^{+\infty}dx\int_{0}^{g(x)}f(x)\,dy-\int_{-\infty}^{0}dx\int_{0}^{-g(x)}f(x)\,dy$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\,dx$

hw：4.1.1(c)，4.1.4，4.2.2，4.2.3，4.3.3，4.3.5