微分方程

传染病模型

动态模型

- 描述对象特征随时间(空间)的演变过程
- 分析对象特征的变化规律
- 预报对象特征的未来性态
- 研究控制对象特征的手段

微分方程建模

- 根据函数及其变化率之间的关系确定函数
- 根据建模目的和问题分析作出简化假设
- 按照内在规律或用类比法建立微分方程

传染病模型

问题

- 描述传染病的传播过程
- 分析受感染人数的变化规律
- 预报传染病高潮到来的时刻
- 预防传染病蔓延的手段
- 按照传播过程的一般规律，
  用机理分析方法建立模型

模型1　　已感染人数 (病人) $i(t)$

假设

• 每个病人每天有效接触(足以使人致病)人数为λ

建模

$$i(t+\Delta t)-i(t)=\lambda i(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $$i(t)=i_0 e^{\lambda t}$$

$\Rightarrow$ $t\to\infty \Rightarrow i\to\infty$ ？

若有效接触的是病人，则不能使病人数增加

$\Rightarrow$ 必须区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

模型2　区分已感染者(病人)和未感染者(健康人)

假设

1）总人数N不变，病人和健康人的 比例分别为 $i(t), s(t)$

SI 模型

2）每个病人每天有效接触人数为λ, 且使接触的健康人致病

λ~日接触率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=[\lambda s(t)]Ni(t)\Delta t$$

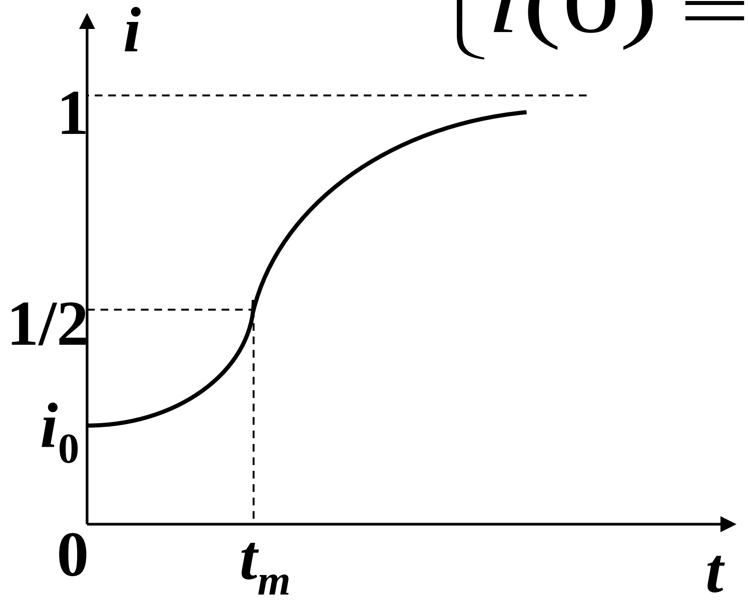
$$\frac{di}{dt}=\lambda si$$

$$s(t)+i(t)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i) \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

模型2

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda i(1-i) \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$ ⇨ Logistic 模型



$$i(t) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{i_0}-1\right)e^{-\lambda t}}$$

$$t_m = \lambda^{-1} \ln\left(\frac{1}{i_0}-1\right)$$

$t=t_m$, di/dt 最大

$t \to \infty \Rightarrow i \to 1$

t_m~传染病高潮到来时刻

λ (日接触率)↓ → t_m↑

模型3

传染病无免疫性——病人治愈成为健康人，健康人可再次被感染

SIS 模型

增加假设

3）病人每天治愈的比例为μ

μ~日治愈率

建模

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \\ i(0)=i_0 \end{cases}$$

λ~日接触率

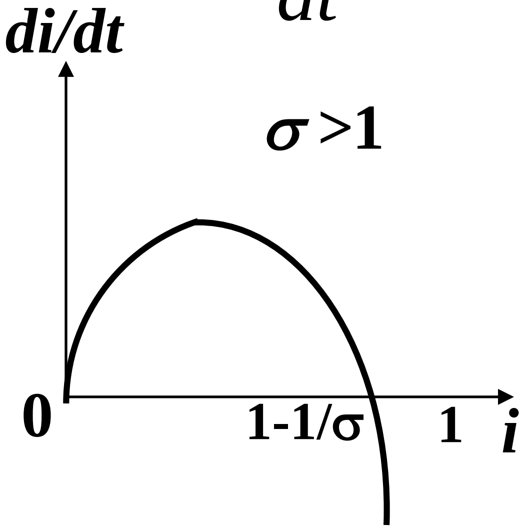
$1/\mu$~感染期

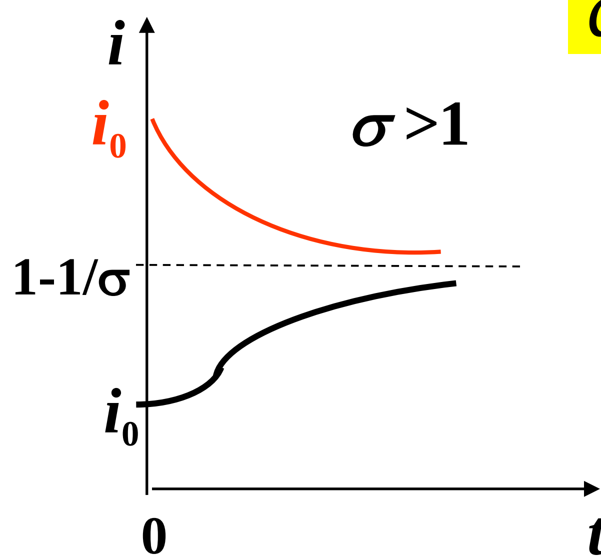
$\sigma=\lambda/\mu$

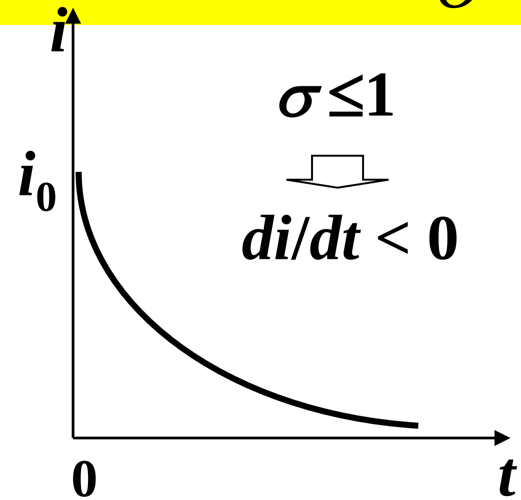
σ~一个感染期内每个病人的有效接触人数，称为**接触数**。

模型3 $\frac{di}{dt}=\lambda i(1-i)-\mu i \quad \sigma=\lambda/\mu$

$$\frac{di}{dt}=-\lambda i[i-(1-\frac{1}{\sigma})]$$







$$i(\infty)=\begin{cases}1-\frac{1}{\sigma}, & \sigma>1\\ 0, & \sigma\le 1\end{cases}$$

接触数σ=1 ~ 阈值

$\sigma\le 1 \Rightarrow i(t)\downarrow$

$\sigma>1$, i_0小 $\Rightarrow i(t)$按S形曲线增长

感染期内有效接触感染的健康者人数不超过病人数

模型2(SI模型)如何看作模型3(SIS模型)的特例

模型4 传染病有免疫性——病人治愈后即移出感染系统，称**移出者** **SIR模型**

假设

1）总人数N不变，病人、健康人和移出者的比例分别为 $i(t), s(t), r(t)$

2）病人的日接触率λ, 日治愈率μ,
接触数 $\sigma = \lambda / \mu$

建模

$$s(t) + i(t) + r(t) = 1$$

需建立 $i(t), s(t), r(t)$ 的两个方程

模型4

SIR模型

$$N[i(t+\Delta t)-i(t)]=\lambda Ns(t)i(t)\Delta t-\mu Ni(t)\Delta t$$

$$N[s(t+\Delta t)-s(t)]=-\lambda Ns(t)i(t)\Delta t$$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt}=\lambda si-\mu i \\ \dfrac{ds}{dt}=-\lambda si \\ i(0)=i_0,\ s(0)=s_0 \end{cases}$$

无法求出 $i(t), s(t)$ 的解析解

在相平面 $s\sim i$ 上研究解的性质

$i_0+s_0\approx 1$（通常 $r(0)=r_0$ 很小）

模型4

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

消去dt

$\sigma = \lambda / \mu$

SIR模型

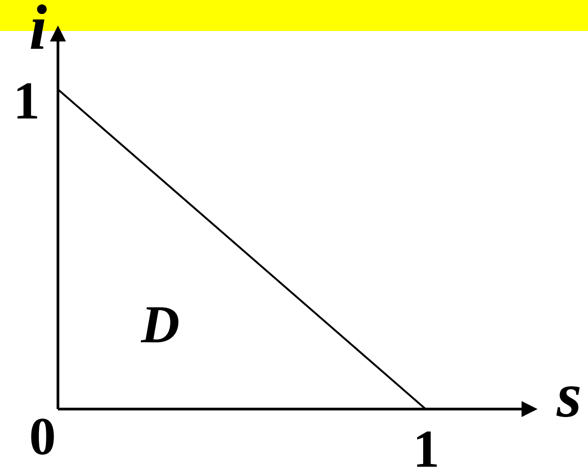
$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

相轨线

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$

相轨线 $i(s)$ 的定义域

$$D = \{(s,i) \mid s \ge 0,\ i \ge 0,\ s+i \le 1\}$$



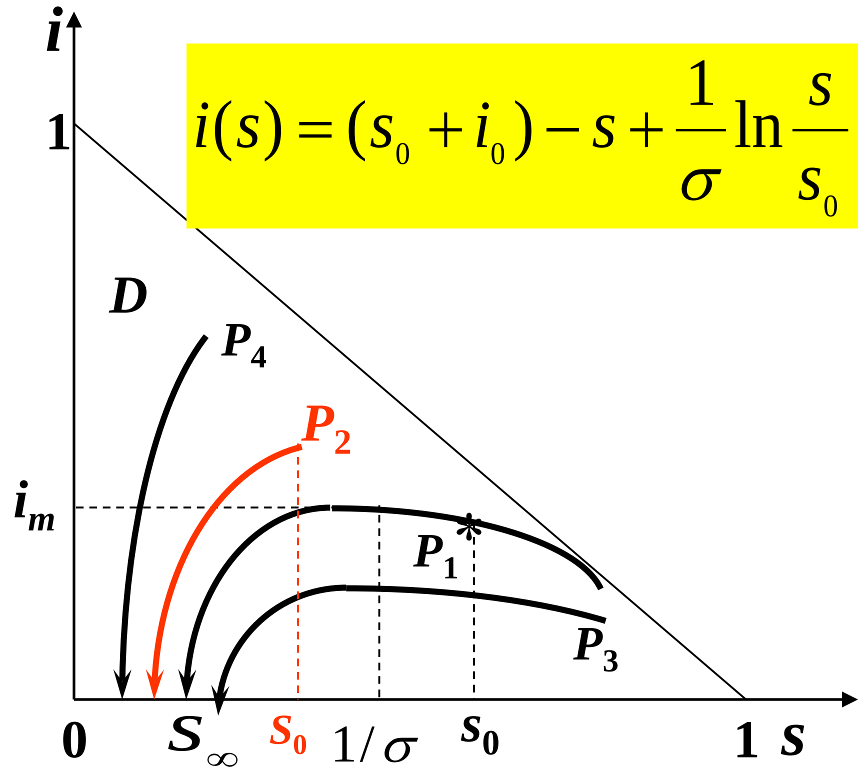
在D内作相轨线$i(s)$的图形，进行分析

模型4　相轨线 $i(s)$ 及其分析　SIR模型

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \lambda si - \mu i \\ \dfrac{ds}{dt} = -\lambda si \\ i(0) = i_0,\ s(0) = s_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{di}{ds} = \dfrac{1}{\sigma s} - 1 \\ i\big|_{s=s_0} = i_0 \end{cases}$$

$$i(s) = (s_0 + i_0) - s + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s}{s_0}$$



$s(t)$单调减→相轨线的方向

$$s = 1/\sigma,\ i = i_m \quad t \to \infty,\ i \to 0$$

s_∞满足 $s_0 + i_0 - s_\infty + \dfrac{1}{\sigma}\ln\dfrac{s_\infty}{s_0} = 0$

P_1: $s_0 > 1/\sigma \to i(t)$先升后降至0 ⇨ 传染病蔓延

P_2: $s_0 < 1/\sigma \to i(t)$单调降至0 ⇨ 传染病不蔓延

$1/\sigma$~阈值

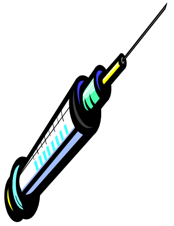
模型4 **预防传染病蔓延的手段** **SIR模型**

传染病不蔓延的条件——$s_0<1/\sigma$

- **提高阈值 $1/\sigma$** ⇨ **降低 $\sigma(=\lambda/\mu)$** ⇨ $\lambda\downarrow$, $\mu\uparrow$

λ (日接触率)$\downarrow \Rightarrow$ 卫生水平$\uparrow$

μ(日治愈率)$\uparrow \Rightarrow$ 医疗水平$\uparrow$



- **降低 s_0** ⇨ **提高 r_0** ⇨ 群体免疫

$$s_0+i_0+r_0=1$$

σ 的估计

$$s_0+i_0-s_\infty+\frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0}=0$$

忽略i_0

$$\sigma=\frac{\ln s_0-\ln s_\infty}{s_0-s_\infty}$$

模型4　　**被传染人数的估计**　　**SIR模型**

记被传染人数比例 $x = s_0 - s_\infty$

$$s_0 + i_0 - s_\infty + \frac{1}{\sigma}\ln\frac{s_\infty}{s_0} = 0$$

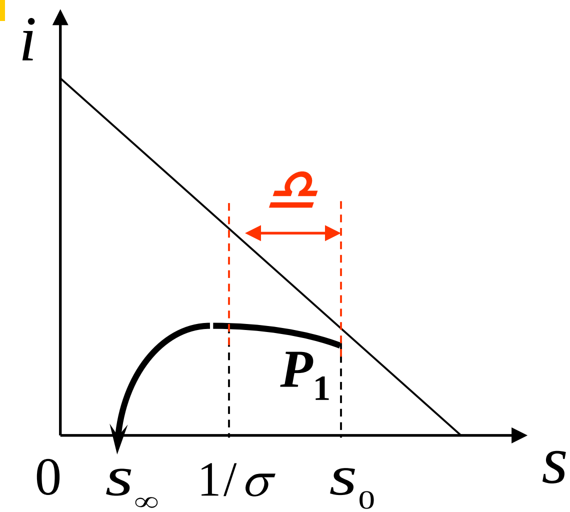
$i_0 \cong 0,\ s_0 \cong 1$

$$x + \frac{1}{\sigma}\ln\left(1 - \frac{x}{s_0}\right) \cong 0$$

$x \ll s_0$

$$x\left(1 - \frac{1}{s_0\sigma} - \frac{x}{2s_0^2\sigma}\right) \cong 0$$

$$x \approx 2s_0\sigma\left(s_0 - \frac{1}{\sigma}\right)$$



$s_0 - 1/\sigma = \delta$

δ小, $s_0\sigma \cong 1$

$$x \cong 2\delta$$

提高阈值$1/\sigma$→降低被传染人数比例 x

模型5

$$\frac{dS}{dt} = n - \frac{bS(\alpha P + \alpha A + I)}{N} - \frac{nS}{N} \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{bS(\alpha P + \alpha A + I)}{N} - \frac{E}{D_e} - \frac{nE}{N} \quad (2)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{E}{D_e} - \frac{P}{D_p} - \frac{nP}{N} \quad (3)$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{(1-r)P}{D_p} - \frac{A}{D_i} - \frac{nA}{N} \quad (4)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{rP}{D_p} - \frac{I}{D_i} - \frac{I}{D_q} \quad (5)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{I}{D_q} - \frac{H}{D_h} \quad (6)$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{A+I}{D_i} + \frac{H}{D_h} - \frac{nR}{N} \quad (7)$$

Xingjie Hao etc. “**Reconstruction of the full transmission dynamics of COVID-19 in Wuhan**”， ***Nature*** 584, 420–424(2020)

通过数学模型评估防控效果，揭示新冠病毒的传播特征，有利于世界各国更有效地制定预防政策和方案，对我国取得抗疫的最终胜利和应对将来潜在的新发传染病具有重要指导意义。