Lec7 Note of Abstract Algebra

Xuxuayame

日期：2023 年 3 月 31 日

定义 4.2. 设 $N \lhd G$，在 G/N 上定义运算：

$$\cdot\colon G/N \times G/N \to G/N,\ aN \cdot bN = abN.$$

则 $(G/N, \cdot)$ 构成一个群，称为 G 对于正规子群 N 的**商群 (Quotient group)**。

首先，若 $aN \cdot bN = abN$，那么 $an_1N \cdot bn_2N = abN$，可见其定义是合理的。
而 $(aN \cdot bN) \cdot cN = (ab)cN,\ aN \cdot (bN \cdot cN) = a(bc)N$，二者当然是相等的。
$1_{G/N} = N,\ (aN)^{-1} = a^{-1}N$。
可见 G/N 的确构成群。

例 4.2.

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 为商群。
- 定义
$$PGL_n(\mathbb{F}) = GL_n(\mathbb{F})/\{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times\} = GL_n(\mathbb{F})/\mathbb{F}^\times I_n.$$
称为**射影线性群**。
- $$PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$$
称为**模群 (Modular group)**。

4.2 同态基本定理

定理 4.1. $f\colon G \to H$ *群同态*。

(1) $\mathrm{Ker} f := f^{-1}(\{1_H\}) = \{g \in G \mid f(g) = 1\} \lhd G$。

(2) $\mathrm{Im} f := \{f(g) \mid g \in G\} \le H$。

(3) f *诱导群同构*：

$$\overline{f}\colon G/\mathrm{Ker} f \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im} f,$$
$$\overline{g} \mapsto f(g).$$

证明. (1) $\forall\, g \in \mathrm{Ker} f,\ \forall\, x \in G,\ f(g) = 1$，那么

$$f(xgx^{-1}) = f(x)f(g)f(x^{-1}) = f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(1) = 1$$
$$\Rightarrow xgx^{-1} \in \mathrm{Ker} f.$$

(2) 显然。

(3) 首先验证定义合理性，$\forall\, x \in \mathrm{Ker} f,\ f(gx) = f(g)f(x) = f(g)$，从而 $\overline{f}$ 良定义。

由 $\overline{f}(\overline{g}\overline{h}) = \overline{f}(\overline{gh}) = f(gh) = f(g)f(h) = \overline{f}(\overline{g})\overline{f}(\overline{h})$，从而为群同态。

因为 $\forall\, h \in \mathrm{Im} f,\ \exists\, g \in G\ s.t.\ h = f(g) \Rightarrow h = \overline{f}(\overline{g})$，所以 f 是满射。

设 $\overline{f}(\overline{g}) = 1$，即 $f(g) = 1 \Rightarrow g \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow \overline{g} = \overline{1}$。

□

例 4.3. (1) $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$。

考虑指数映射

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to S^1, \\ x &\mapsto e^{2\pi i x}. \end{aligned}$$

则 $\mathrm{Ker}\exp = \{x \mid e^{2\pi i x} = 1\} = \mathbb{Z}$，所以 $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$。

(2) $GL_n(\mathbb{F})/SL_n(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}^\times$。

考虑行列式映射

$$\det\colon GL_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}^\times.$$

它显然是满射，且 $SL_n(\mathbb{F}) = \mathrm{Ker}\det$。

(3) 考虑映射

$$\begin{aligned} \varphi\colon SL_2(\mathbb{Z}) &\twoheadrightarrow SL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这里 n 为正整数，φ 是满射 (需证明)。

$$\Gamma(n) = \mathrm{Ker}\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \middle| a-1 \equiv b \equiv c \equiv d-1 \equiv 0 \mod n \right\}$$

称为**主同余子群 (Principal congruence subgroup)**。可知

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(n)] = |SL_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})|.$$

(4) 考虑

$$\Gamma(n) \hookrightarrow SL_2(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow PSL_2(\mathbb{Z}),$$

则有 $\Gamma(n) \hookrightarrow PSL_2(\mathbb{Z})$，于是

$$\Gamma(n) \cap \{\pm I_n\} = \begin{cases} \{I_n\},\ (n > 2), \\ \{\pm I_n\},\ (n = 2). \end{cases}$$

命题 4.2. 设 $N \lhd G$，则有一一对应

$$\{\overline{M} \mid \overline{M} \leq G/N\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \{M \mid N \leq M \leq G\},$$

$$\overline{M} = M/N \longleftarrow M,$$

$$\overline{M} \longmapsto \bigcup_{\overline{m} \in \overline{M}} \overline{m}.$$

命题 4.3. *(1) $N \lhd G$, $H \leq G$，则 $N \cap H \lhd H$, $N \lhd NH$，且 $H/N \cap H \simeq NH/N$。*

(2) $N \lhd G$, $M \lhd G$, $N \leq M$，则 $M/N \lhd G/N$，且 $G/M \simeq \frac{G/N}{M/N}$。

证明. (1) $\forall\, h \in H$, $h(N \cap H)h^{-1} \subset hNh^{-1} \cap hHh^{-1} = N \cap H$，所以 $N \cap H \lhd H$。

我们进一步验证 $NH \leq G$。因为 $aN = Na, \forall\, a \Rightarrow NH = HN$，所以 $NH \cdot NH \subset NH$。而 $(NH)^{-1} \subset H^{-1}N^{-1} = HN = NH$。于是 $N \leq NH \leq G$，可见 $N \lhd NH$。

于是我们可以构造映射：

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & NH/N \\ f\colon & & NH \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd},$$

$$h \longmapsto \overline{h} := hN.$$

f 满，因为 $\forall\, xN \in NH/N \Rightarrow xN = hN, \exists\, h$，因为 $xN = nhN = hn'N = hN$。

下证 $\mathrm{Ker} f = H \cap N$。若 $h \in \mathrm{Ker} f$，则 $h \in H$，而 $hN = N \Rightarrow h \in N \Rightarrow h \in H \cap N$。

另一方面。若 $h \in H \cap N \Rightarrow hN = N$，所以 $h \in \mathrm{Ker} f$，从而二者相等。

于是 $H/H \cap N = H/\mathrm{Ker} f \simeq \mathrm{Im} f = NH/N$。

(2) 由于 $N \leq M \lhd G$，有 $M/N \lhd G/N$，这是因为 $\forall\, gN \in G/N$, $mN \in M/N$ 有

$$(gN)(mN)(gN)^{-1} = (gmg^{-1})N \in M/N.$$

于是可以构造映射

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads] \arrow[rr, bend right, "f"'] & G/N \arrow[r, two heads] & \frac{G/N}{M/N} \end{tikzcd},$$

$$g \longmapsto gN \longrightarrow gN \cdot M/N.$$

于是 $g \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow gN \in M/N \Leftrightarrow g \in M$，所以 $\mathrm{Ker} f = M$，于是 $G/M = G/\mathrm{Ker} f \simeq \mathrm{Im} f = \frac{G/N}{M/N}$。

或者还可以定义

$$\varphi\colon G/N \twoheadrightarrow G/M,$$

$$gN \mapsto gM.$$

则 $\varphi(gN) = gM = M \Leftrightarrow g \in M$，可见 $\mathrm{Ker}\varphi = M/N$，于是 $\frac{G/N}{M/N} \simeq G/M$。

□

例 4.4. 设 $G = \mathbb{Z}$，$m \mid n$ 为正整数，则 $m\mathbb{Z} \geq n\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$。