4.1 略

4.2 (1)

$\forall y \in f(\bigcup_\lambda A_\lambda)$, $\exists x \in \bigcup_\lambda A_\lambda$, $y = f(x)$

$\exists \lambda_0$, $x \in A_{\lambda_0} \Rightarrow y \in f(A_{\lambda_0}) \Rightarrow y \in \bigcup_\lambda f(A_\lambda)$

$\Rightarrow f(\bigcup A_\lambda) \subset \bigcup f(A_\lambda)$

$f(A_\lambda) \subset f(\bigcup_\lambda A_\lambda) \Rightarrow \bigcup_\lambda f(A_\lambda) \subset f(\bigcup_\lambda A_\lambda)$

反例 $f: 1 \mapsto 0$, $2 \mapsto 0$, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$

(2) 仅选两个作参考

$f^{-1}(\bigcap_\lambda B_\lambda) \subset f^{-1}(B_\lambda)$, $\forall \lambda \Rightarrow f^{-1}(\bigcap_\lambda B_\lambda) \subset \bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda)$

$\forall x \in \bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda) \Rightarrow f(x) \in B_\lambda, \forall \lambda \Rightarrow f(x) \in \bigcap_\lambda B_\lambda$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(\bigcap_\lambda B_\lambda) \Rightarrow \bigcap_\lambda f^{-1}(B_\lambda) \subset f^{-1}(\bigcap_\lambda B_\lambda)$

$\forall x \in f^{-1}(Y-B)$, $f(x) \in Y-B$, $f(x) \notin B \Rightarrow x \notin f^{-1}(B)$

$\Rightarrow x \in X - f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(Y-B) \subset X - f^{-1}(B)$

$\forall x \in X - f^{-1}(B)$, $x \notin f^{-1}(B)$, $f(x) \notin B$, $f(x) \in Y-B$, $x \in f^{-1}(Y-B)$

$\Rightarrow X - f^{-1}(B) \subset f^{-1}(Y-B)$

4.14. (1)

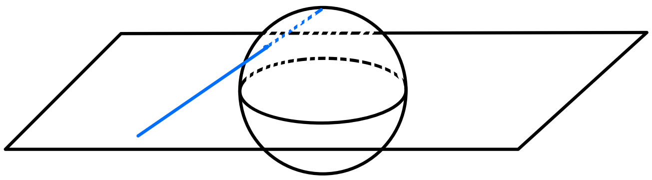
$f: S^n \to \partial A$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|_\infty}$ 连续(因每个分量连续)

$g: \partial A \to S^n$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|_2}$ 连续(因每个分量连续)

$$f \circ g(x) = \frac{x/\|x\|_2}{\|x/\|x\|_2\|_\infty} = \frac{x/\|x\|_2}{\|x\|_\infty/\|x\|_2} = \frac{x}{\|x\|_\infty} = x$$

类似，$g\circ f(x) = x$ 故同胚.

(2) 球极投影



North Pole

$f: S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$

$(x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}) \mapsto \lambda(x^1, \cdots, x^n)$

s.t. $(x^1, \cdots, x^n, x^{n+1})$, $(\lambda x^1, \cdots, \lambda x^n, 0)$, $(0, \cdots, 0, 1)$ 共线

$\Rightarrow \dfrac{\lambda x^i}{x^i} = \dfrac{-1}{x^{n+1}-1} \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{1-x^{n+1}}$

$f(x^1, \cdots, x^n, x^{n+1}) = \dfrac{1}{1-x^{n+1}}(x^1, \cdots, x^n)$

$g: \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$

$y = (y^1, \cdots y^n) \mapsto (\lambda y^1, \cdots, \lambda y^n, y^{n+1})$

s.t. $(y^1, \cdots y^n, 0)$, $(\lambda y^1, \cdots, \lambda y^n, y^{n+1})$, $(0, \cdots, 0, 1)$ 共线

$\Rightarrow \dfrac{\lambda y^i - y^i}{0 - y^i} = \dfrac{y^{n+1}-0}{1-0} \Rightarrow 1-\lambda = y^{n+1}$

$\Rightarrow |1-\lambda|^2 = 1 - |\lambda|^2 |y|^2 \Rightarrow \lambda^2(1+|y|^2) = 2\lambda$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{2}{1+|y|^2}$

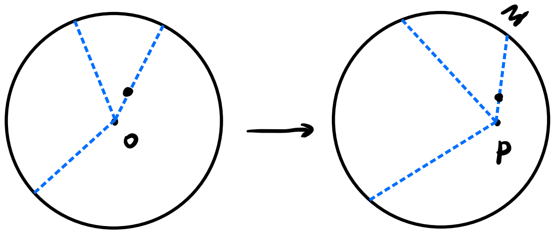
$g(y) = \left(\dfrac{2y^1}{1+|y|^2}, \cdots \dfrac{2y^n}{1+|y|^2}, \dfrac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right)$

f, g 连续，$f\circ g(y) = y$，$g\circ f(x) = x \Rightarrow$ 同胚.

4.15. B^n 指赋范中 V^n，其范数规范的开球记号.

我们只考虑 $\varphi_p: \overline{B^n} \to \overline{B^n}$ 同胚，$\varphi_p|_{S^{n-1}} = I_{S^{n-1}}$，$\varphi_p(0) = p$

进而 $f = \varphi_q \circ \varphi_p^{-1}$



$$\varphi_p(x) = (1-\|x\|_2)\cdot p + \|x\|_2 \cdot \frac{x}{\|x\|_2} = (1-\|x\|_2)\, p + x$$

然后计算 φ_p 的逆 …… 难算，换种做法.

法 II.

不妨 $p, q \neq N$ (north Pole)

考虑球极投影 $\varphi: S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$，$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$x \mapsto x + \varphi(q) - \varphi(p)$

$f \triangleq \varphi^{-1} \circ T \circ \varphi : S^n\setminus\{N\} \to S^n \setminus\{N\}$ 为同胚复合

易验证 $\lim_{x \to N} f(x) = N$，故可定义 $\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & x \neq N \\ N, & x = N \end{cases}$

为所求（学了流形后可验证该映射为微分同胚）

4.17 略

4.18.(5) $f: \mathbb{R} \to S^1$，$t \mapsto e^{2\pi i t}$ 连续，在 Y 的每个纤维上常值，故诱导连续映射 $\tilde{f}: Y \to S^1$，易验证 $\tilde{f}$ 为双射

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\forall\, U \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 开，则 $p^{-1}(U)$ 开，可写为若干长度小于1开区间 I_λ 的并

$\forall$ 开区间 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$，$\varepsilon < \frac{1}{2}$，$f((x-\varepsilon, x+\varepsilon))$ 开

$\tilde{f}(U) = f(p^{-1}(U)) = f(\cup I_\lambda) = \cup f(I_\lambda)$ 开

故 $\tilde{f}$ 同胚

(6) 证明方式与(5)完全一样

Rmk: 虽然这里 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$，但对一般拓扑群

这个结论并不成立，这门课不要求掌握

考试千万别直接认为这两空间同胚!!!