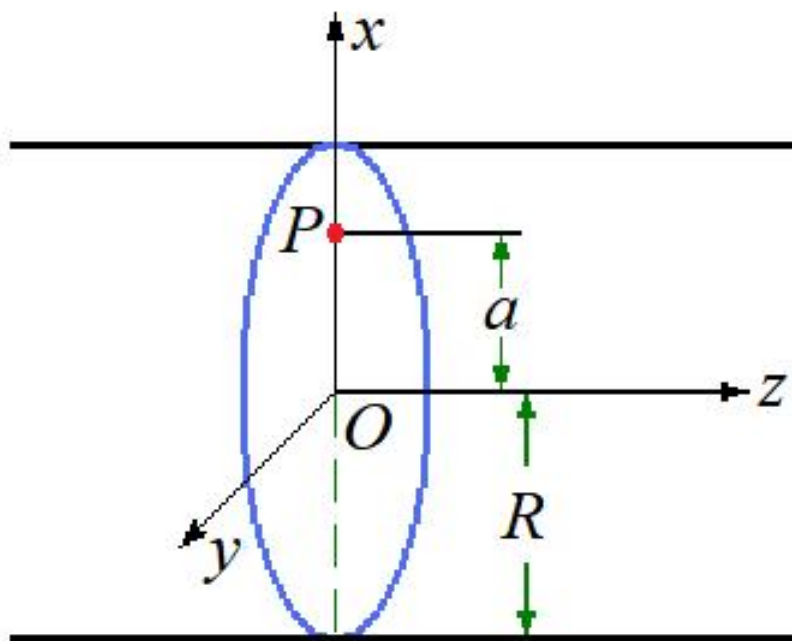


思考题讨论

- 思考题5.1 磁感应强度可否按 $F=q\mathbf{B}\times\mathbf{v}$ 定义？
- 思考题5.2 用直接法计算无穷长直螺线管内、外任一点的磁感应强度。



思考题5.3 用直接法计算无穷长直螺线管内、外任一点的磁感应强度。

$$\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_x = -\cos \varphi \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_y = -\sin \varphi \mathbf{e}_z$$

解：设线电流元的直角坐标 $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$ ，场点 P 在 x 轴上，直角坐标 $(a, 0, 0)$ 。

z 的奇函数

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} nI d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} nIR d\varphi \mathbf{e}_\varphi \times \frac{(a - R\cos\varphi)\mathbf{e}_x + (0 - R\sin\varphi)\mathbf{e}_y - z\mathbf{e}_z}{[(a - R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi + z^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 nIR}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{(R - a\cos\varphi)\mathbf{e}_z - \cancel{z\mathbf{e}_r}}{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 nIR}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \frac{\cos\alpha (R - a\cos\varphi)\mathbf{e}_z}{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi} \\ &= \frac{\mu_0 nIR}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{2(R - a\cos\varphi)\mathbf{e}_z}{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi} \end{aligned}$$

$$\text{令 } z = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi} \tan\alpha$$

$$\text{令 } \tan(\varphi / 2) = u$$

$$= \frac{\mu_0 n I R}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \frac{2(R - a \cos \varphi) \mathbf{e}_z}{a^2 + R^2 - 2aR \cos \varphi}$$

$$= \frac{\mu_0 n I R}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2du}{1+u^2} \frac{2(R - a \frac{1-u^2}{1+u^2}) \mathbf{e}_z}{a^2 + R^2 - 2aR \frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

$$\text{令 } s = \left| \frac{R+a}{R-a} \right| u$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2\pi} \mathbf{e}_z \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{1+u^2} + \frac{R^2 - a^2}{(R-a)^2 + (R+a)^2 u^2} \right] du$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2\pi} \mathbf{e}_z \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{1+u^2} \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{1+s^2} \right)$$

$$= \begin{cases} \mu_0 n I, & a < R \\ 0, & a > R \end{cases}$$

第十八讲 2022-05-03

第5章 真空中的静磁场

§ 5.1 磁现象与磁场

§ 5.2 毕奥—萨伐尔定律

§ 5.3 安培定律

§ 5.4 静磁场的基本定理

§ 5.5 带电粒子在磁场中的运动

§ 5.3 安培定律

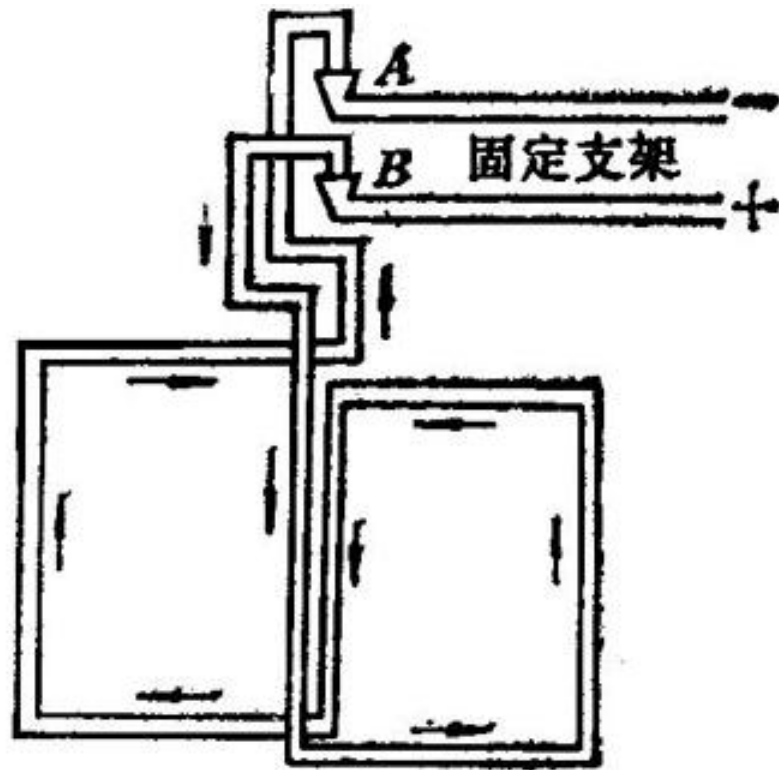
在奥斯特的发现之后，安培研究了载流导线间的相互作用，通过四个精巧的示零实验，加上一个关键 (但却错误) 的假设和高超的数学技巧，最终获得了电流元之间相互作用的安培定律。

- 实验=理论方案+实验仪器+具体操作+分析、综合
- 广义示零实验：无仪器 (或曰仪器示零)，无操作。
 - 1) 自然过程，罕见或平常，如彩虹、奥伯斯佯谬；
 - 2) 大脑思想，在相对论、量子力学中常出现。

1. 安培的四个示零实验

无定向秤

结构：用一根硬导线弯成两个相同且共面的矩形线框，线框的两个端点 A 、 B 通过水银槽与固定支架相连。通电时两个线框中的电流反向。整个线框能以水银槽为支点自由转动。



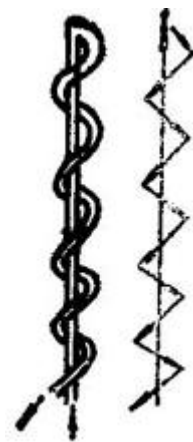
性质：在均匀磁场 (如地磁场) 中所受合力和合力矩为零，处随遇平衡；但在非均匀磁场中会运动。

实验一：将对折的通电导线移近无定向秤，
无定向秤无任何反应。

←电流反向时，产生的作用力也反向，且大小相等的电流产生的力大小相等。

实验二：将对折导线中的一段绕在另一段上，
成螺旋形，通电后移近无定向秤，无定向秤
仍无任何反应。

←螺旋状导线与直长导线的作用相同，从而
证明电流元具有矢量性质，即许多电流元的
合作用是各电流元作用的矢量叠加。

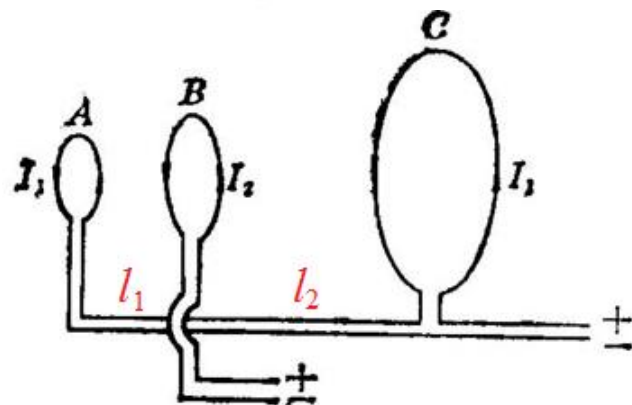
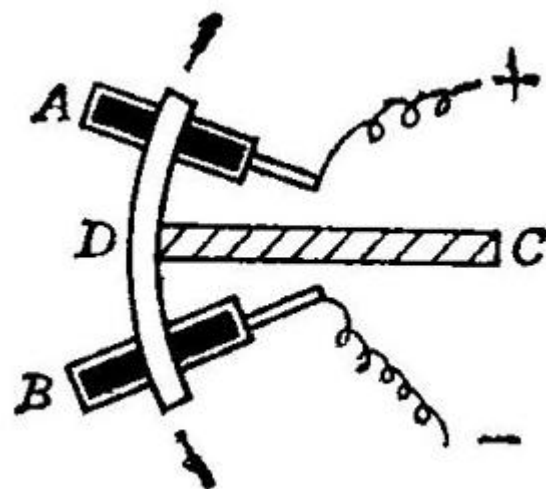


实验三： 弧形导体 D 架在水银槽 A 、 B 上，构成一个只能弧形移动、不能径向运动的电流元。用各种载流线圈检验， D 不动。

← 电流元受力 \perp 电流，**横向力**。

实验四： A 、 B 、 C 三个导线圈形状相似，周长比 $1:k:k^2$ 。 A 、 C 串联，位置固定，电流 I_1 ， B 可活动，电流 I_2 。仅当 $l_1:l_2=1:k$ 时， B 才不动，→ A 对 B 、 C 对 B 的作用力**等大反向**。

← **作用力**随**电流元长度**增加而**上升**，随**间距**增大而**下降**； A 、 C 周长比 $1:k^2$ ，到 B 距离比 $1:k$ ， $F \propto 1/r^2$ 。



- 在以上实验基础上，安培又补充假设：两个线电流元间的作用力沿它们的连线 (×)。→原始公式

$$d\mathbf{F}'_{12} = -kI_1I_2\mathbf{r}_{12} \left[\frac{2}{r_{12}^3}(\mathbf{dl}_1 \cdot \mathbf{dl}_2) - \frac{3}{r_{12}^5}(\mathbf{dl}_1 \cdot \mathbf{r}_{12})(\mathbf{dl}_2 \cdot \mathbf{r}_{12}) \right].$$

- 正确形式
$$d\mathbf{F}_{12} = k \frac{I_2 \mathbf{dl}_2 \times (I_1 \mathbf{dl}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}.$$
- 可证
$$d\mathbf{F}'_{12} - d\mathbf{F}_{12} = d[kI_1I_2(\mathbf{dl}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})\mathbf{r}_{12} / r_{12}^3].$$

→两公式对闭合线圈有相同结果。

- 两个体电流元间、两个面电流元间的作用力分别为

$$d\mathbf{F}_{12} = k \frac{\mathbf{j}_2 dV_2 \times (\mathbf{j}_1 dV_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}, \quad d\mathbf{F}_{12} = k \frac{\mathbf{i}_2 dS_2 \times (\mathbf{i}_1 dS_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}.$$

2. 安培定律

- 由安培定律，电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 对电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的作用力为

$$d\mathbf{F}_{12} = k \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3},$$

式中 \mathbf{r}_{12} 是电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 到受力电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 方向的矢径。

- 对上式的讨论

- 式中 k 是比例系数，在国际单位制中 $k=\mu_0/4\pi$ 。
- 电流元之间的相互作用力不一定满足牛顿第三定律。
- 稳恒电流元不能孤立存在，只能是闭合电路的一部分。若将 $d\mathbf{F}_{12}$ 和 $d\mathbf{F}_{21}$ 分别沿两闭合电路积分，总是等大反向的。

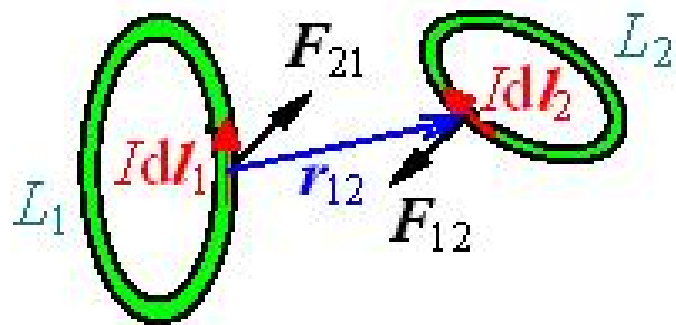
例子: $I_1 d\mathbf{l}_1 \perp \mathbf{r}_{12}$, $I_2 d\mathbf{l}_2 // \mathbf{r}_{12}$.

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 d\mathbf{l}_1 I_2 d\mathbf{l}_2}{4\pi r_{12}^2} \mathbf{e}_z, \quad d\mathbf{F}_{21} = 0$$



这两个电流元之间的作用力 **不满足牛顿第三定律**。

两个 **(小)** 线圈之间的作用力 **部分满足** 牛顿第三定律: 即 $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, 但作用力一般不平行于二者连线 (类于 **两个电偶极子** 情形)。



$F_{12} = -F_{21}$ 的证明

$$\because A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C, \quad \mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21},$$

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{F}_{12} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} I_2 d\mathbf{l}_2 \times \left(I_1 d\mathbf{l}_1 \times \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} d\mathbf{l}_1 - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} [(I_2 d\mathbf{l}_2) \cdot (I_1 d\mathbf{l}_1)] \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} [(I_2 d\mathbf{l}_2) \cdot (I_1 d\mathbf{l}_1)] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{21}^3} [(I_1 d\mathbf{l}_1) \cdot (I_2 d\mathbf{l}_2)] = -\mathbf{F}_{21}. \end{aligned}$$

其中 $\oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \overset{r_1 \text{ 不变}}{=} \int_{L_2} \frac{d\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} = \int_{L_2} \frac{dr_{12}}{r_{12}^2} = 0.$

电流强度单位：安培的定义

- 真空中两条无限长、圆截面可以忽略的、平行圆直导线相距 1m ，通以等量恒定电流时，若此两导线之间产生的力等于 $1 \times 10^{-7}\text{N/m}$ ，则此恒定电流的电流强度定为 1A 。
- 在力学和电磁学领域，长度、质量、时间、电流为国际单位制的基本量，其他物理量为导出量。
- 哪些物理量选作基本量既有自然性，也有人为性。

3. 安培定律、安培力公式和毕—萨定律关系

比较 $dF_{12}=I_2 d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B}_1$ 和 $dF_{12}=I_2 d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mu_0 (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{4\pi r_{12}^3}$,

可得 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 产生的磁感应强度 (略去下标1)

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

根据叠加原理推出回路线圈 L 所产生的磁场强度为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L I d\mathbf{l} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

这就是毕奥—萨伐尔定律。

安培定律=安培力公式+毕—萨定律

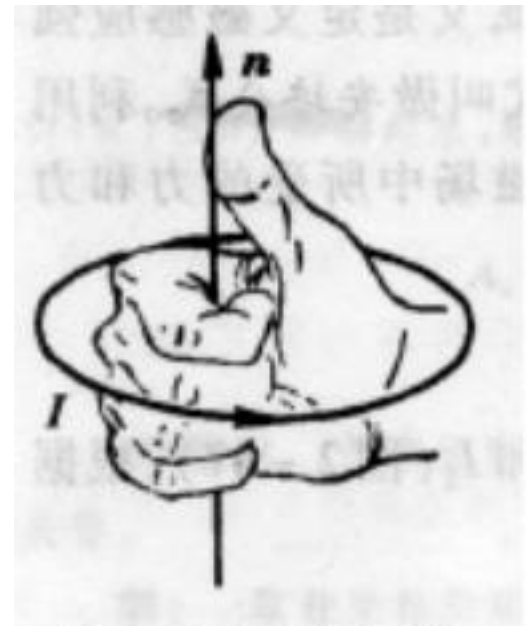
4. 安培力与电动机

电流元在外磁场 B 中所受的**安培力**为

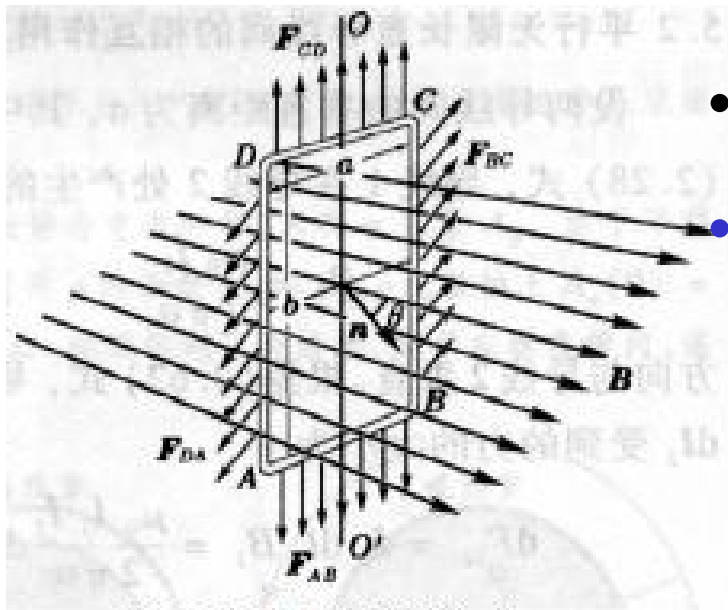
$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

该式即**安培力公式**，可用来计算各种形状的**载流回路**在外磁场中所受的力和**力矩**。

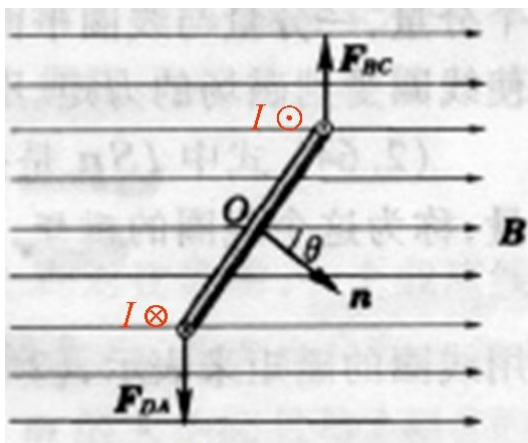
为表达方便且避免负号，用**右手定则**规定**载流线圈**的空间取向，如图所示。



规定线圈法线方向的右手定则



矩形线圈在均匀
磁场中所受力矩



俯视图

- 矩形线圈，电流 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ 。
- AB 、 CD 受力等大反向共线，抵消； BC 、 DA 受力等大反向不共线，对轴 OO' 的力偶矩

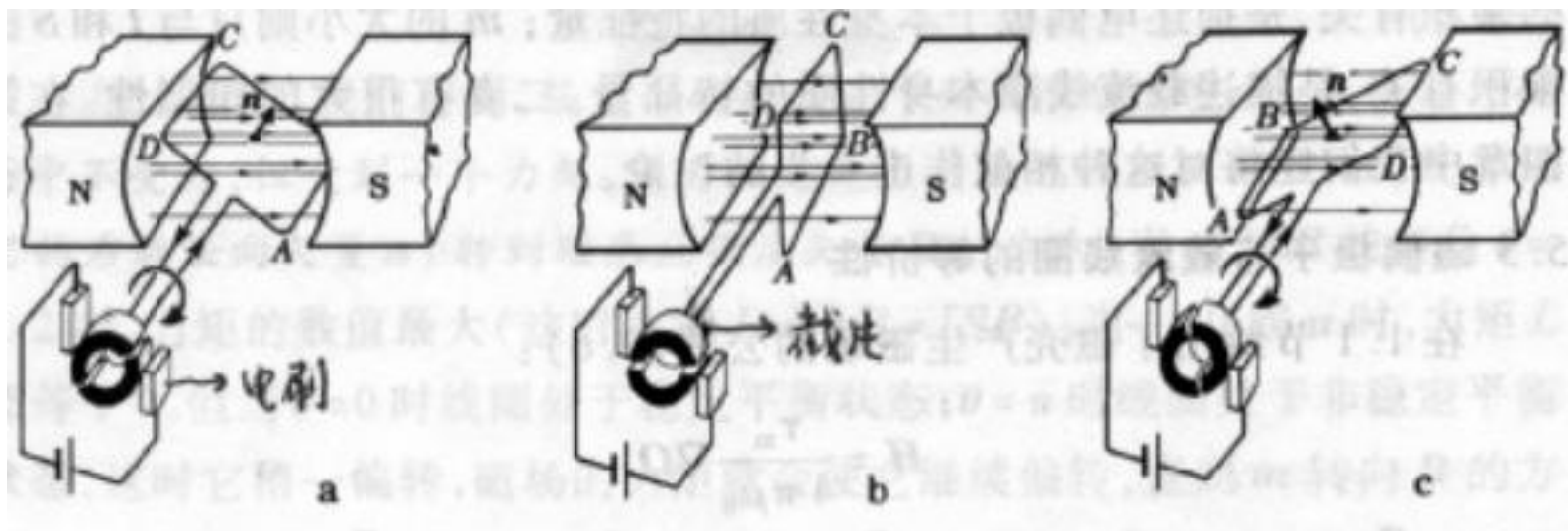
$$L = 2F_{BC}(a/2)\sin\theta$$

$$= I b B a \sin\theta = I S B \sin\theta,$$

矢量式为

$$\mathbf{L} = IS(\mathbf{n} \times \mathbf{B}) = \mathbf{m} \times \mathbf{B}.$$

- \mathbf{L} 使得线圈法线转向 \mathbf{B} 的方向。
- 对比：电偶极子在外电场中所受力矩 $\mathbf{L} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ 。



直流电动机原理图

直流电动机就是根据上述通电线圈在磁场中受到力矩作用的原理制成的。这里是一个单匝线圈的电动机模型。

线圈的两端接有**换向器**，它是一对相互绝缘的**半圆形截片**，它们通过**固定的电刷**与直流电源相接。

§ 5.4 静磁场的基本定理

1. 磁感应线与磁通量

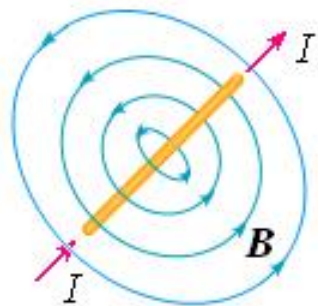
- 正如前面所讲，与电场中引入电场线相似，磁场中可引入磁感应线 (又称磁场线、磁力线)。

1) 磁感应线

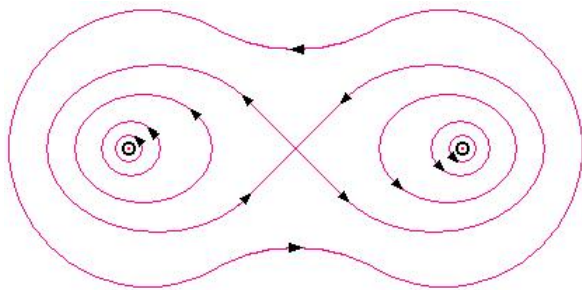
- **作用**：形象描述磁感应强度矢量的空间分布。
- **定义**：磁感应线上任一点的**切线方向**是该点 **B 方向**；该点磁感应线的**单位横截面**上所穿过的**磁感应线根数**表示 **B 大小**，即

$$B = \Delta N / \Delta S_{\perp}.$$

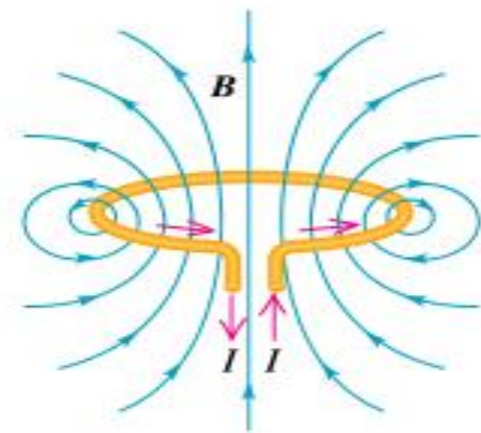
几种磁感应线



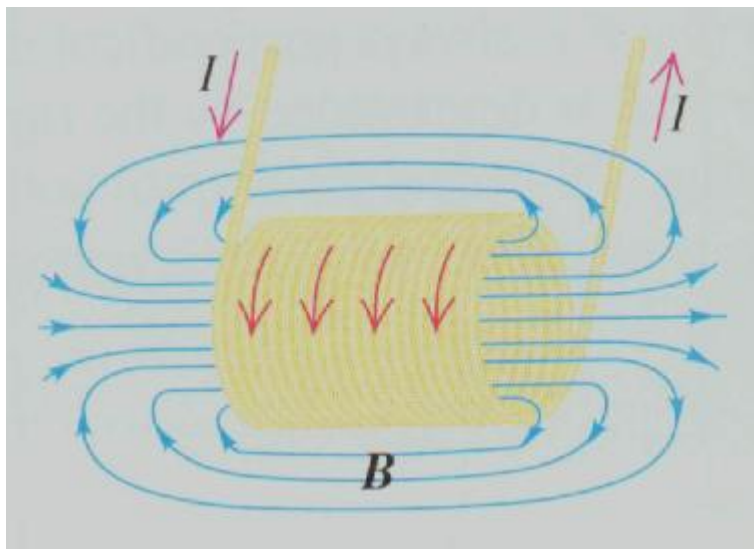
直线电流



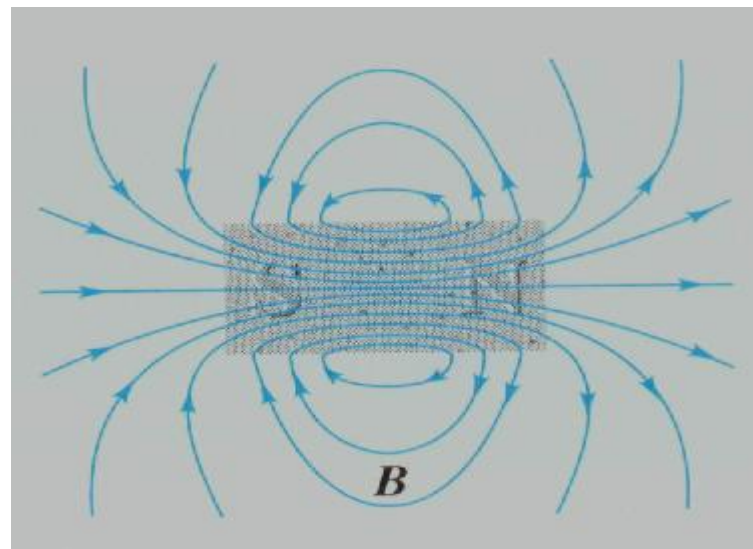
两根平行直线电流



圆环电流



有限长螺线管电流



电磁铁

2) 磁通量

- **定义**：类于电通量 $E \cdot \Delta S \equiv \Delta \Phi_E$ ， $B \cdot \Delta S \equiv \Delta \Phi_B$ 称为通过 ΔS 的**磁通量**，形象地说是通过 ΔS 的磁感应线**根数**。
而通过某曲面 S 的磁通量

$$\Phi_B = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

- 磁通量满足**标量叠加原理**。
- 磁通量管：一束磁感应线围成的管状区域。在同一个磁通量管中，磁感应线的根数不会改变。

电场线管内电场线的根数会改变吗？

2. 高斯定理 (通量定律)

- 高斯定理：通过任意闭合曲面 S 的磁通量为零，即

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

微分形式： $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

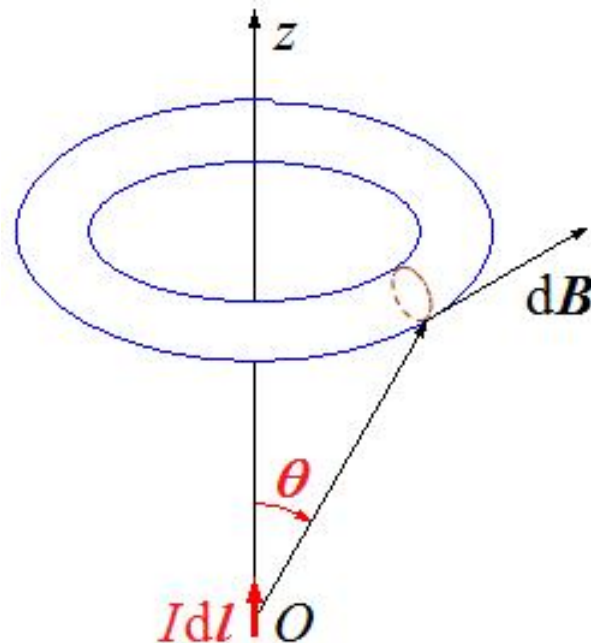
- 物理意义：反映了磁场的无源性，即不存在孤立的磁荷，磁场线闭合 (???)。

???：不闭合其实是更一般的情况，所以加下划线句子修正如下：孤立磁荷之不存在导致磁场线无起终点，可能闭合。(稳恒电流线为什么总闭合?)

证明 任意磁场都可视为由**线电流元**的磁场叠加而成。
只要证明**线电流元的磁场遵守高斯定理**，由磁通量叠加性，任意磁场也遵守。

以电流元 **Idl** 位置为原点，电流元**方向**为 **z** 轴。由毕—萨定律，在以 **z** 为轴的任意圆上，

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$$



所以圆上任意一点 **$d\mathbf{B}$** 的**大小**相同，方向与圆相切。

→穿过以 **z** 为轴的**任一环形管内任意截面的磁通量为常量**，与截面在管中的位置、取向无关。**(磁通量管)**

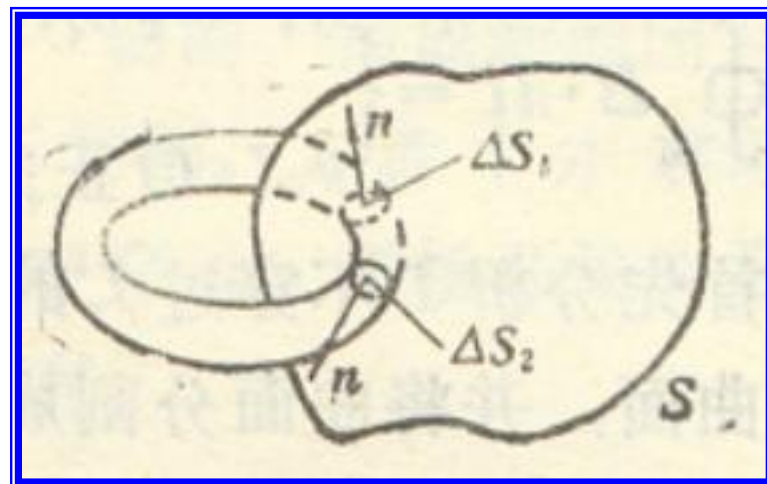
对于任一封闭曲面 (高斯面) S , 上述环形管每穿过 S 一次, 均会在 S 上切出两 (偶数) 个面元 ΔS_1 、 ΔS_2 , 且其磁通量

$$\mathbf{B}_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \Delta \mathbf{S}_2 = B \Delta S - B \Delta S = 0.$$

高斯面 S 可由一对对这样的 (环形管穿过 S 时产生的) 截面组成。由于每对面元的磁通量之和为零, 所以穿过 S 的总磁通

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

证毕。

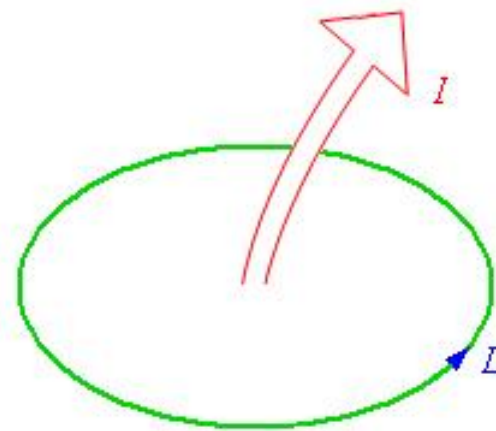


3. 安培环路定理

- 类于静电场环量，引入**磁场环量** $\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$.
- **安培环路定理**：磁感应强度 \mathbf{B} 沿任何闭合曲线 L 的环量等于穿过 L 的电流强度代数总和的 μ_0 倍，即

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum \pm I.$$

其微分形式为 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$.



- **物理意义**：磁场是**有旋场**。
- **I 的正负规则**：设定 L 的绕行方向，采用右手定则，四指沿 L 方向，若 I 与大拇指方向一致则 I 取正，反之取负。

证明 产生磁场的稳恒电流可等效为一些稳恒的闭合线电流的叠加，所以只要证明其中任一**闭合线电流** I 满足

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \begin{cases} 0, & (I \text{ 不穿过 } L) \\ \mu_0 I, & (I \text{ 正向穿过 } L) \\ -\mu_0 I, & (I \text{ 反向穿过 } L) \end{cases}$$

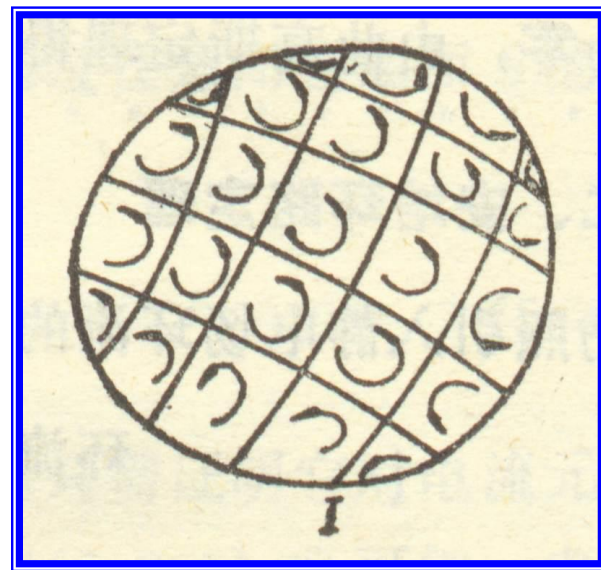
则按照叠加原理，安培环路定理成立。

先证明 **I 不穿过** L 的情形，再证明 **I 正向、反向穿过** L 的情形。

1) 闭合线电流 I 不穿过闭合回路 L

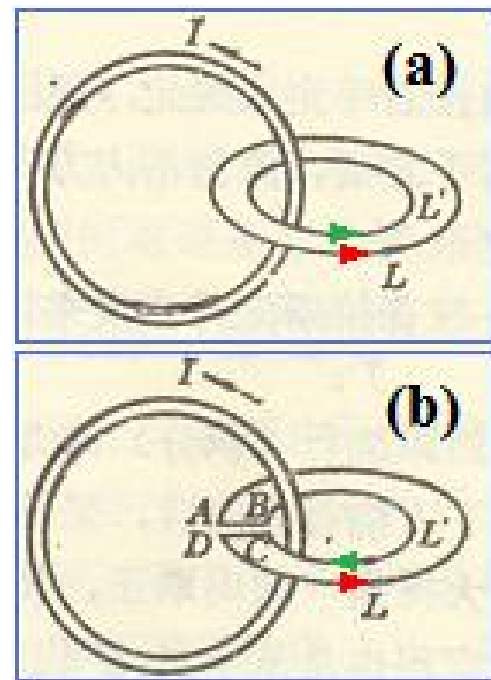
- 此时，闭合线电流 I 与图示的元电流组等效：各元电流的相邻部分相消 $\rightarrow B_{\text{闭合线电流}} = \Sigma B_{\text{元电流}}$ 。
- 元电流 I (磁偶极子) 在远处的磁场与电偶极子电场的函数形式相同 (见例5.2)。
- 类比静电场环路定理 $\oint_L E \cdot dl = 0$,
对元电流 I 有 $\oint_L B \cdot dl = 0$.
 \rightarrow 全体元电流 I 的磁场环量为零,
 \rightarrow 闭合线电流 I 的磁场环量为零,

得证。



2) I 正向穿过 L

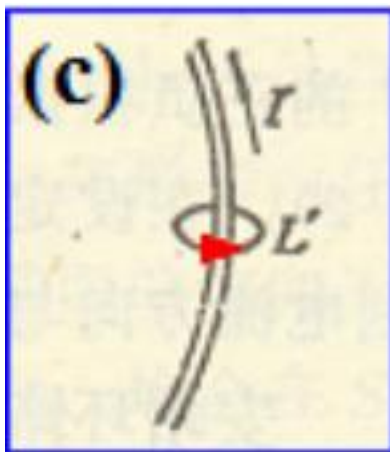
- 另作任一让 I 正向穿过的回路 L' ，在 L 与 L' 上切开一小口，形成新回路 $ABL'CDLA$ 。其中 DLA 与(a)中 L 同向， $BL'C$ 与(a)中 L' 反向。
- 由1)的结论知



$$\oint_{ABL'CDLA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \left(\int_{AB} + \int_{BL'C} + \int_{CD} + \int_{DLA} \right) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{AB} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= - \int_{CD} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \\ \int_{BL'C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= - \oint_{L'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \\ \int_{DLA} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{L'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= 0, \\ \text{即 } \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_{L'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \end{aligned}$$



- 由 L' 的任意性，可令其为半径 r_0 (\ll 电流 I 的曲率半径) 的圆，圆心在电流 I 回路上，圆面 $\perp I$ 。则 L' 上的场近似为一无穷长直电流 I 的场，由例5.1可知

$$\oint_{L'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} 2\pi r_0 = \mu_0 I$$

- 3) 反向情形类于正向情形，只是添上负号，不在话下。

5. 两条定理与毕—萨定律关系

- 两条定理均由毕—萨定律导出。
- 从高斯定理的证明过程可知，它**不要求**毕—萨定律中的**距离平方反比关系**。
- 证明安培环路定理时的一个关键步骤涉及无穷长直线电流的磁场。当电流元的 $B \propto r^{-n}$ 时可推出无穷长直线电流的 $B \propto r^{-n+1}$ ，于是 $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I r_0^{-n+2}$ 。若 $n \neq 2$ ，该环量与 r_0 有关，安培环路定理不能成立。
- 对随时间变化的磁场，高斯定理仍然成立；而安培环路定理应予修正。

作业、预习及思考题

- 作业： 5.5~5.9
- 预习： 5.4余下部分、5.5 带电粒子在磁场中的运动、6.1 磁场对电流的作用

下次课讨论

- 思考题5.3 证明 $d\mathbf{F}'_{12} - d\mathbf{F}_{12} = d[kI_1I_2(d\mathbf{l}_2 \cdot \mathbf{r}_{12})\mathbf{r}_{12} / r_{12}^3]$.
- 思考题5.4 电场线管内场线的根数会改变吗？