第七讲

2023.3.29

①

Def 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，~~如果~~ ~~函数~~ $f: E\to[-\infty,+\infty]$ 满足

$$\forall a\in\mathbb{R},\ \{f<a\}\ \text{可测}$$

则称 f 在 E 上可测

Prop 以下等价

(i) $\forall a\in\mathbb{R}$, $\{f<a\}$ 可测

(ii) $\forall a\in\mathbb{R}$, $\{f\le a\}$ 可测

(iii) $\forall a\in\mathbb{R}$, $\{f>a\}$ 可测

(iv) $\forall a\in\mathbb{R}$, $\{f\ge a\}$ 可测

Pf

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\quad \{f\le a\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{f<a+\frac{1}{k}\}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $\quad \{f>a\}=E\setminus\{f\le a\}$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\quad \{f\ge a\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\{f>a-\frac{1}{k}\}$

(iv) $\Rightarrow$ (i) $\quad \{f<a\}=E\setminus\{f\ge a\}$

Prop. f 可测 $\iff \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$
$$\{a \le f < b\} \in \mathcal{L}$$

Pf "$\Longrightarrow$"

f 可测 $\Longrightarrow$ $\forall a, \{f \ge a\} \in \mathcal{L}$
$\forall b, \{f < b\} \in \mathcal{L}$

$$\Longrightarrow \{a \le f < b\} = \{f \ge a\} \cap \{f < b\} \in \mathcal{L}$$

"$\Longleftarrow$"

$$\forall b, \ \{f < b\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{-k \le f < b\} \in \mathcal{L}$$

例: Dirichlet 函数 $D = \chi_{\mathbb{Q}}$ 可测

$$\{\chi_{\mathbb{Q}} < a\} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{if } a > 1 \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} & \text{if } 0 < a \le 1 \\ \phi, & \text{if } a \le 0 \end{cases}$$

Prop 以下等价:

(i) f 可测

(ii) $\forall G \subset \mathbb{R}$ 开, $f^{-1}(G) \in \mathcal{L}$

(iii) $\forall F \subset \mathbb{R}$ 闭, $f^{-1}(F) \in \mathcal{L}$

(iv) $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{L}$

Pf. (HW)

Prop
$$\left.\begin{aligned} &f: E \to \mathbb{R} \text{ 可测} \\ &g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ 连续} \end{aligned}\right\} \Rightarrow g\circ f \text{ 可测}$$

Pf
$$(g\circ f)^{-1}((-\infty, a)) = \underbrace{f^{-1}(\underbrace{g^{-1}((-\infty, a))}_{\text{开}})}_{\text{可测}}$$

注意不必考虑 $[-\infty, a)$
因为 $g\circ f$ 是实值函数

Rmk
$$\left.\begin{aligned} &f: E \to \mathbb{R} \text{ 连续} \\ &g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ 可测} \end{aligned}\right\} \not\Rightarrow g\circ f \text{ 可测}$$

(HW: Ex. 35)

由此可证明 $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$

Prop 1° f 可测 $\Rightarrow$ f^k 可测, $\forall k \in \mathbb{N}$

2° f, g 可测 $\Rightarrow$ λf, $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$ 都可测 (如果有定义)

Pf 1° <u>Case 1</u>: k 为奇数

$$\forall a,\quad \{f^k > a\} = \{f > a^{\frac{1}{k}}\} \in \mathcal{L}$$

<u>Case 2</u>: k 为偶数.

$$\{f^k > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{if } a < 0 \\ \{f > a^{\frac{1}{k}}\} \cup \{f < -a^{\frac{1}{k}}\} & \text{if } a \geq 0 \end{cases}$$

2° (i) $$\{\lambda f > a\} = \begin{cases} \{f > \frac{a}{\lambda}\} & \text{if } \lambda > 0 \\ \{f < \frac{a}{\lambda}\} & \text{if } \lambda < 0 \end{cases}$$

(ii) $$\{f+g > a\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \left(\{f > a-r\} \cap \{g > r\}\right)$$

LHS $\supset$ RHS 平凡

$$x \in \text{LHS} \iff f(x) + g(x) > a$$

$$\iff \exists r \in \mathbb{Q},\ \text{s.t.}\ g(x) > r > a - f(x)$$

$$\iff \exists r \in \mathbb{Q},\ \text{s.t.}\ x \in \{f > a-r\} \cap \{g > r\}$$

(iii) $fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$

(iv) $$\left\{\frac{1}{g} > a\right\} = \begin{cases} \left\{g < \frac{1}{a}\right\} & \text{if } a > 0 \\ \{g > 0\} & \text{if } a = 0 \\ \{g > 0\} \cup \left\{\frac{1}{a} < g < 0\right\} & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{1}{g}$ 可测

$\Rightarrow \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ 可测

Def 设 $E \subset \mathbb{R}^n$，令

$$\chi_E(x) \overset{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{if } x \in E \\ 0 & \text{if } x \notin E \end{cases}$$

称为E之特征函数 (characteristic function) 或示性函数 (indicator function)

Prop χ_E 可测 $\Longleftrightarrow$ E 可测

Pf

$$\{\chi_E > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{if } a < 0 \\ E & \text{if } 0 \le a < 1 \\ \phi & \text{if } a \ge 1 \end{cases}$$

Def 形如

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}, \quad E_k,\ k=1,\cdots,N \text{ 可测}$$

之函数称为简单函数.

Rmk: 与 Stein 之定义不同! 那里要求 $m(E_k) < \infty$

Prop 简单函数可测, 且有标准化表示

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$$

with $a_k \in \mathbb{R}$, $a_j \neq a_k$ if $j \neq k$

E_k 可测, $E_j \cap E_k = \phi$ if $j \neq k$

且 $\bigcup_{k=1}^{N} E_k = \mathbb{R}^n$

Pf. 设 $\text{Range}(\varphi) = \{a_1, \cdots, a_N\}$

令 $E_k \overset{def}{=} \{\varphi = a_k\}$, $k = 1, 2 \cdots, N$

$\Longrightarrow \varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$ 之标准化表示

Def 阶梯函数 $\overset{def}{=}$ 有限个矩体之示性函数之 (step function) 线性组合. 形如 $\sum_{k=1}^{N} a_k \chi_{R_k}$

Thm 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列可测函数，则

$$\left.\begin{aligned}&\sup_k f_k\\&\inf_k f_k\\&\limsup_{k\to\infty} f_k\\&\liminf_{k\to\infty} f_k\end{aligned}\right\}\ \text{都可测}$$

特别地，如果 $\lim_{k\to\infty} f_k$ 存在，则可测。

即可测函数类对极限运算封闭

Pf

$$\{\sup_k f_k > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{f_k > a\}$$

$$\inf_k f_k = -\sup_k(-f_k)$$

$$\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_k \sup_{j\geq k} f_j$$

Cor. f, g 可测 $\Longrightarrow \left\{\begin{aligned}&\max\{f, g\}\\&\min\{f, g\}\end{aligned}\right.$ 可测

Def $f^+(x) \overset{\text{def}}{=} \max\{f(x), 0\}$ 称为 f 的正部

$f^-(x) \overset{\text{def}}{=} \max\{-f(x), 0\}$ - - - 负部

Rmk: $f = f^+ - f^-$

$|f| = f^+ + f^-$

Cor f 可测 $\Longleftrightarrow$ f^+, f^- 都可测

$\Longrightarrow |f|$ 可测

HW: 举例说明 $|f|$ 可测 $\not\Rightarrow$ f 可测

Def 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测，$P(x)$ 是一个与 x 相关的性质。如果

$$m(\{x \in E : P(x) \text{ 不成立}\}) = 0$$

则称 P 在 E 上$\underbrace{\text{几乎处处}}_{\text{记为 a.e.}}$成立。

例. $f = g$ a.e. $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $m(\{f \neq g\}) = 0$

Prop f_k 可测，$k = 1, 2 \cdots$

$f_k \to f$ a.e. $\Longrightarrow$ f 可测

即 可测函数集 对 a.e. 极限也封闭.

Pf: (HW)

Thm 设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上非负可测，则 $\exists \varphi_k \geq 0$, simple, $k=1,2\cdots$ s.t. $\varphi_k \nearrow f$

即 $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$0 \leq \varphi_1(x) \leq \cdots \leq f(x)$$

且 $\varphi_k(x) \to f(x)$, as $k \to \infty$

若 f 有界，则 $\varphi_k \rightrightarrows f$

Pf：对 $k=1,2,\cdots$

$j = 0,1,2,\cdots, 2^{2k}-1$

令

$$E_{k,j} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{j}{2^k} \leq f < \frac{j+1}{2^k} \right\}$$

$$F_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f \geq 2^k \right\}$$

$$\varphi_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{2^{2k}-1} \frac{j}{2^k} \chi_{E_{k,j}} + 2^k \chi_{F_k}$$