1. f 可测

$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, f^{-1}(B) \in \mathcal{L}$

证明：令 $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{L}\}$

则易知 $\mathcal{A}$ 包含所有开集

$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$

$f^{-1}(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ 为一个 σ 代数

$\Rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}$

(Ex 35)

2. 存在 f 可测，Φ 连续，但 $f \circ \Phi$ 不可测

证明：根据提示，

$\Phi(N) \subset \mathcal{C}_2$，$m(\mathcal{C}_2) = 0$

$\Rightarrow \Phi(N)$ 可测

$\Rightarrow f = \chi_{\Phi(N)}$ 可测

但 $f \circ \Phi = \chi_N$ 不可测

由上题知，若 $\Phi(N)\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

则 $\Phi^{-1}\circ\Phi(N)\in\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$，矛盾

$\Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\setminus\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\neq\emptyset$

3. $f_k\xrightarrow{a.e.}f$，f_k 可测 $\Rightarrow f$ 可测

证明：

$$E_a:=\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{k=j}^{\infty}\{f_k<a\} \text{ 可测}$$

且 $m(\{f<a\}\Delta E_a)=0$

$\Rightarrow \{f<a\}$ 可测

实际上 $\forall f_k$ 可测，有 $\sup f_k$，$\limsup f_k$ 可测

从而 $f_k\xrightarrow{a.e.}f$ 时，$f=\limsup f_k$ a.e. 可测

4. $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$

$\Rightarrow f$ 的不连续点集可测

证明：对 $\mathbb{R}^d$ 进行2进分解，

得到 $\mathbb{R}^d=\biguplus_j Q_{j,n}$，其中 $Q_{j,n}$ 的边长为 2^{-n}

令 $F_{k,n}=\{j \mid \sup_{x,y\in Q_{j,n}}|f(x)-f(y)|>\frac{1}{k}\}$

$$E_{k,n}=\bigcup_{j\in F_{k,n}} Q_{j,n},\quad E_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_{k,n}$$

$\Rightarrow E_k$ 可测

$\Rightarrow E:=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 可测

令 $A=\bigcup_{j,n}\partial Q_{j,n}$

$\Rightarrow m(A)=0$

又 $E\setminus A$ 为 A^c 上所有不连续点集合

从而结论成立

(实际上可以证明连续点集为 G_δ 集，

见 Stein chap 1 Problem 4)

5\. f 可测 $\Rightarrow \exists f_k\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $f_k \xrightarrow{a.e.} f$

证明：由 Ex 18，不妨设 $f\in C(\mathbb{R}^d)$

取 ψ_k, s.t. $\psi_k|_{\{|x|\le k\}}\equiv 1$, $\operatorname{supp}\psi_k\subset\{|x|<k+1\}$

则 $f\cdot\varphi_k \xrightarrow{a.e.} f$

$\Rightarrow$ 不妨设 $f\in C_0(\mathbb{R}^d)$

取 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, s.t. $\varphi\geq 0$, $\operatorname{supp}\varphi\subset\{|x|<1\}$,

(Rieman积分) $\int_{\mathbb{R}}\varphi=1$

令 $\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^d}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}}\varphi_\varepsilon=1$, $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon\subset\{|x|<\varepsilon\}$

令 $f_k=f*\varphi_{\frac{1}{k}}$, 由 $f\in C_0(\mathbb{R}^d)$

$\Rightarrow f_k\rightrightarrows f$, 且 $f_k\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$

(对一般 f 可测, $f_k\xrightarrow{a.e.} f$, $f_{k,n}\xrightarrow{a.e.} f_k$, $f_k<\infty$, a.e.

$\exists\, n_k$, $m(\{|f_{k,n_k}-f_k|>\frac{1}{k}\}\cap\{|x|<k\})<2^{-k}$

则 $f_{k,n_k}\xrightarrow{a.e.} f$, 因此上述"不妨设"是可行的.)

6. 存在 f 可测, $\forall\, g=f$, a.e., 有 g 处处不连续

证明: 构造 E, 使 $\forall\, m(A)>0$, A 为区间

有 $m(E\cap A)\,m(E^c\cap A)>0$.

在$[0,1]$上取一个类Cantor集，
s.t. $m(C_{1,1})>0$，
然后在去掉的长度大于$\frac{1}{2}$的区间上
放入压缩为对应区间长度的正测
类Cantor集$C_{2,1},\cdots,C_{2,n_2}$
再对去掉长度大于$\frac{1}{3}$的区间上重复…

令 $C=\bigcup C_{j,k}$

$$E=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(C+k)$$

E即为所求

令 $f=\chi_E$

若 $g=f$, a.e.

令 $F=\{g\neq f\}$，则 $m(F)=0$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\delta>0$,

$m(E\cap(x-\delta,x+\delta)\setminus F)>0$

$\Rightarrow \exists y\in(x-\delta,x+\delta)$, s.t. $g(y)=1$

同理，$\exists z\in(x-\delta,x+\delta)$, s.t. $g(z)=0$