定理8.2 设方程组(8.14)中 $A(t)\equiv A$ 为常数矩阵，如果 A 的所有特征值的实部均为负数，则方程组(8.14)的零解是 Lyapunov 正向渐近稳定的。

证明：由于 A 的特征值的实部均为负数，设这些负数均不大于 -2σ，$\sigma>0$。

则 $\exists A_0>1$，s.t. $|e^{tA}|\le A_0 e^{-\sigma t}$，$t\ge 0$。

[e^{tA} 中的每一列均为 $P_s(t)e^{\lambda_s t}$ 的线性组合，$\mathrm{Re}\lambda_s\le -2\sigma$，$P_s$ 是多项式。

故 $|P_s(t)e^{-\sigma t}|\le \bar{A}_0$，$\forall t\ge 0$，于是 $|e^{tA}|\le A_0 e^{-\sigma t}$，$\forall t\ge 0$。]

(8.14) 等价于积分方程 $x(t)=e^{tA}x_0+\int_0^t e^{(t-s)A}N(s,x(s))ds$。

要证：当 $|x_0|$ 充分小时，$\lim\limits_{t\to+\infty}|x(t)|=0$。

由于 $\lim\limits_{|x|\to 0}\frac{|N(t,x)|}{|x|}=0$，知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta$，s.t. $|x|<\delta$，$|N(t,x)|\le\varepsilon|x|$。

取 $|x_0|<\delta$，则由解对初值的连续依赖性，$\exists t_1>0$，s.t.

$|x(t,x_0)|\le\delta$，$\forall t\in[0,t_1)$。

令 $T_*=\sup\{T \mid |x(t)|\le\delta,\ \forall t\in[0,T)\}$，则 $T_*>t_1$。若 $T_*<\infty$。

则 $|x(T_*)|=\delta$。于是，由积分方程，

~~$|x(T_*)|\le e^{-\sigma T_*}A_0|x_0|+\varepsilon A_0\int_0^{T_*}e^{-(T_*-s)\sigma}|x(s)|ds$~~

$$|x(t)|\le e^{-\sigma t}A_0|x_0|+\varepsilon A_0\int_0^t e^{-(t-s)\sigma}|x(s)|ds,\quad \forall t\in[0,T_*)$$

$$\Rightarrow e^{\sigma t}|x(t)|\le A_0|x_0|+\varepsilon A_0\int_0^t e^{\sigma s}|x(s)|ds$$

$$\overset{\text{Gronwall}}{\Longrightarrow} e^{\sigma t}|x(t)|\le A_0|x_0|e^{\varepsilon A_0 t}$$

$$\Rightarrow |x(t)|\le A_0|x_0|e^{-(\sigma-\varepsilon A_0)t}$$

取 ε 充分小，使得 $\sigma>\varepsilon A_0$，则可选择使得

取 $|x_0|$ 充分小，使得 $A_0|x_0|<\delta$，

$|x(t_1)| < \delta$. 矛盾！因此，$T^* = \infty$.

于是，重复上述过程，$e^{\sigma t}|x(t)| \le A_0|x_0| + \varepsilon A_0 \int_0^t e^{\sigma s}|x(s)|ds$

$\Longrightarrow |x(t)| \le A_0|x_0| e^{-(\sigma-\varepsilon A_0)t}$，$\forall t \in (0, \infty)$

因此，$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0$.

定理8.3 设方程(8.4)中的 $A(t) \equiv A$ 为常矩阵，而且 A 的特征根中至少有一个具有正的实部，则(8.4)的零解是不稳定的。

§8.2.3. Lyapunov 第二方法.

考虑自治系统 $\frac{dy}{dt} = f(y)$，f，f_{y_j} $(j=1,\dots,n)$ 在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上连续.

设 $0 \in D$，$f(0)=0$ 且 0 是 f 的孤立临界点，即存在 0 的邻域，在这个邻域内无其它临界点.

令 $V(y)$ 是区域 Ω 上的标量连续函数，包含原点，称 V 在 Ω 上正定当且仅当 $V(0)=0$，且 $V(y)>0$，$\forall y \in \Omega\setminus\{0\}$. 称 V 在 Ω 上负定，如果 $-V$ 在 Ω 上正定.

定义 $V(y)$ 关于方程组 $\frac{dy}{dt}=f(y)$ 的导数为

$$V^*(y) = \nabla V(y)\cdot f(y) = \frac{\partial V}{\partial y_1}(y) f_1 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial y_n}(y) f_n(y)$$

Rmk: 若 $y=\phi(t)$ 是 $\frac{dy}{dt}=f(y)$ (8.19) 的解，则

$$\frac{d}{dt}V(\phi(t)) = \nabla V\cdot\frac{d\phi}{dt} = (\nabla V)(\phi(t))\, f(\phi(t)) = V^*(\phi(t))$$

定理8.41 若存在标量函数 $V(y)$ 在包含原点的某个区域 Ω 上正定，且关于 (8.19) 满足 $V^*(y)\le 0$，则 (8.19) 的零解是稳定的.

(定义 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta$，s.t. $\forall |y_0|<\delta$，$|\varphi_t(y_0)|<\varepsilon$，$\forall t\ge 0$).

证明：由于 Ω 是包含原点的区域，$\exists r>0$，s.t. $B_r(0)\subset\Omega$ 且 $V(y)$ 在其上正定. $V(0)=0$ 且 $V^*(y)\le 0$，$\forall y\in B_r(0)$.

令 $0<\varepsilon\le r$. 令 $S=\{y \mid \varepsilon\le|y|\le r\}$. 则由于 V 在 $B_r(0)$ 上连续，故 $V(y)$ 在 S 上有最小值. 令 $\mu=\min\limits_{y\in S}V(y)$，则 $\mu>0$. 由于 $V(0)=0$，V 在 $B_r(0)$ 连续. $\exists\delta>0$，s.t. $V(y)<\mu$，$\forall |y|\le\delta$.

对于任意给定 $y_0\in B_\delta(0)$，由 Picard 存在唯一性定理，以 y_0 为初值的解 $y=\varphi(t)$ 在 $[0,t_1]$ 上存在，不妨设 t_1 是它的最大存在时间.

Claim：$t_1=+\infty$.

由于 $\frac{d}{dt}V(\varphi(t))=V^*(\varphi(t))\le 0$. 故 $V(\varphi(t))\le V(\varphi(0))$ ~~...~~.

而且 $V(\varphi(t))\neq 0$. 否则 $\exists \bar{t}\in[0,t_1]$，s.t. $V(\varphi(\bar{t}))=0$. 故 $\varphi(\bar{t})=0$. 于是 $\varphi(t)\equiv 0$. $\Rightarrow V(\varphi(t))\equiv 0$. ~~...~~ $\Rightarrow y_0=0$ 矛盾!

因此，$0<V(\varphi(t))\le V(\varphi(0))$，$\forall t\in[0,t_1]$.

Claim：$|\varphi(t)|<\varepsilon$，$\forall t\in[0,t_1]$.

否则，$\exists \bar{t}\in[0,t_1]$，s.t. $|\varphi(\bar{t})|=\varepsilon$. 于是，$V(\varphi(\bar{t}))\ge\mu$.

但 $V(\varphi(t))\le V(\varphi(0))<\mu$，$\forall t\in[0,t_1]$. 矛盾!

于是，由延拓定理，$t_1=+\infty$. 且 $|\varphi(t)|\le\varepsilon$，$\forall t\ge 0$.

定理8.42 若存在函数 $V(y)$ 在 Ω 上正定，且关于(8.19)满足 $V^*(y)<0$。则(8.19)的零解是渐近稳定的。

证明：由定理8.41，零解是稳定的。于是，取 $\varepsilon=r$，则 $\exists\,\delta>0$，s.t. $\forall\,|y_0|<\delta$，$|\varphi(t,y_0)|<\varepsilon$，$\forall\,t\geq 0$。~~并且~~ 由于 $V(\varphi(t))$ 关于 t 单减。当 $t\to+\infty$ 时，$V(\varphi(t))$ 存在极限。要证 $V(\varphi(t))\to 0$, as $t\to+\infty$.

否则，$\exists\,\eta>0$, s.t. $V(\varphi(t))\geq\eta$，$\forall\,t\geq 0$。由于 $V(0)=0$，故 $\exists\,\alpha>0$, s.t. $0<V(y)\leq\eta$，$\forall\,|y|<\alpha$。于是，$|\varphi(t)|>\alpha$，$\forall\,t\geq 0$。

令 $S=\{y\mid\alpha\leq|y|\leq r\}$，则 $-V^*(y)$ 在 S 上有最小值 $\mu>0$。且 $\varphi(t)\in S$，$\forall\,t\geq 0$。

由于 $\frac{d}{dt}V(\varphi(t))=V^*(\varphi(t))\leq-\mu<0$，于是，$V(\varphi(t))-V(\varphi(0))\leq-\mu t$

即 $V(\varphi(t))\leq V(y_0)-\mu t$。当 t 充分大时，$V(\varphi(t))<0$。矛盾！

定理8.43. 若存在连续函数 $V(y)$，$V(0)=0$，使得 $V^*(y)$ 正定，且在原点的任何邻域内存在点 $a\neq 0$ 使得 $V(a)>0$，则零解是不稳定的。

(只要证明：$\exists\,\varepsilon>0$, s.t. $\forall\,\delta>0$，$\exists\,|a|<\delta$，s.t. $|\varphi_t(a)|\geq\varepsilon$ for some t.)

证明：设 $r>0$，使得 $\overline{B_r(0)}\subset\Omega$。由于 V 在 Ω 上连续，故 $|V(y)|\leq M$，$\forall\,y\in B_r(0)$。

由假设，$\forall\,\delta>0$，$\exists\,|a|<\delta$，s.t. 且 $V(a)>0$。令 $\varphi(t)$ 是以 a 为初值的解。

claim: $\exists\,t_1<\infty$, s.t. $|\varphi(t_1)|=r$.

否则，$|\varphi(t)|<r$，$\forall\,t<+\infty$。则由 $V^*(\varphi(t))>0$，有 $\frac{d}{dt}V(\varphi(t))>0$。

因此，$V(\varphi(t))\geq V(\varphi(0))=V(a)>0$。由 V 的连续性，$V(0)=0$，可知 $\exists\,\alpha>0$, s.t.

$V(y) < V(\alpha)$, $\forall\ |y| \le \alpha$. 因此, $|\phi(t)| > \alpha$, $\forall t \ge 0$.

令 $\mu = \min\limits_{\alpha \le |y| \le r} V^*(y)$, 则 $V^*(\phi(t)) \ge \mu$. 故 $V(\phi(t)) - V(\phi(0)) \ge \mu t$.

$\Rightarrow V(\phi(t)) \ge \mu t + V(a) \to +\infty$, as $t \to +\infty$. 这与 $V(\phi(t)) \le M$ 矛盾!

因此零解是不稳定的. ($\alpha < r$).

定理5.44. 若存在函数 V 使得在 $\Omega \ni 0$ 上, $V^* = \lambda V + W$, 其中 $\lambda > 0$, W 或者恒为零, 或者恒非正, 或恒非负且使得在原点的任何一个邻域上存在一点 a 有 $V(a) \cdot W(a) > 0$, 则零解是不稳定的.

例1. 考虑方程 $y'' + g(y) = 0$, 其中 $g(y)$ 在 $|y| < k$ 上连续, $y g(y) > 0$, 对 $y \ne 0$; $g(0) = 0$,

令 $y_1 = y$, $y_2 = y'$. 则
$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -g(y_1) \end{cases}$$

定义 $V(y_1, y_2) = \frac{1}{2} y_2^2 + \int_0^{y_1} g(s)\,ds$

则 $V(y_1, y_2)$ 在 $\Omega = \{(y_1, y_2) \mid |y_1| < k, |y_2| < +\infty\}$ 上连续. 且 $V(y_1, y_2) \ge 0$.

$V(y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow (y_1, y_2) = 0$.

则 $V^*(y) = g(y_1) y_2 + y_2 \cdot (-g(y_1)) = 0$

故由定理5.41, 零解是稳定的.