Example (3.1)

(【1】例9.2.1) 设$X_1, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\sigma^2 > 0$已知，$\mu \in \mathbb{R}$未知，
(1) 考虑检验问题$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$，找出其水平为$\alpha$ 的一个检验；
(2) 能否从(1)中所得检验的接受域得到关于μ的一个区间估计？这个区间估计量的置信水平/系数为多大？

注 由上例可知，由样本空间中水平为α的H_0的接受域

$$A(\mu_0) = \{\vec{x} \in \mathcal{X} : \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} < \bar{x} < \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\},$$

可导出参数空间中置信水平为$1-\alpha$的一个置信区间

$$C(\vec{x}) = \{\mu : \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2} < \mu < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\}.$$

反之，也可由$C(\vec{x})$导出$A(\mu_0)$，即两集合之间有1-1对应关系。

Theorem (3.1, 【1】定理9.2.2)

1. 对每一个$\theta_0 \in \Theta$，设$A(\theta_0)$是$H_0 : \theta = \theta_0$的一个水平为α的检验的接受域。对每一个$\vec{x} \in \mathcal{X}$，在参数空间Θ上定义一个集合
$$C(\vec{x}) = \{\theta_0 \in \Theta : \vec{x} \in A(\theta_0)\},$$
则随机集合$C(\vec{X})$是一个置信水平为$1-\alpha$的置信集合；
2. 反之，设$C(\vec{X})$是一个置信水平为$1-\alpha$的置信集合，对任意$\theta_0 \in \Theta$，定义
$$A(\theta_0) = \{\vec{x} \in \mathcal{X} : \theta_0 \in C(\vec{x})\},$$
则$A(\theta_0)$是$H_0 : \theta = \theta_0$的一个水平为α的检验的接受域。

- 证明见【1】。
- 两个集合$A(\theta_0)$，$C(\vec{X})$ 通过如下等价关系建立起联系：
$$\vec{x} \in A(\theta_0) \Leftrightarrow \theta_0 \in C(\vec{x}).$$
- 备择假设H_1规定$A(\theta_0)$的形式，而$A(\theta_0)$的形式决定$C(\vec{X})$的形状。
- 一般而言，单侧检验给出单侧区间，双侧检验给出双侧区间。

Example (3.2)

设$X_1,\ldots,X_n$ $i.i.d. \sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2>0$已知，$\mu\in\mathbb{R}$未知，试通过反转检验问题$H_0:\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1:\mu=\mu_1$, $\mu_0>\mu_1$ 的水平为α的一个检验的接受域得到关于μ的置信水平为$1-\alpha$的一个置信区间。

注 回顾例3.1可知，对同一分布族，若采用的假设检验问题不同，则通过反转一个检验统计量得到的置信区间也不同。

Example (3.3)

(【1】例9.2.5) 设$X_1,\ldots,X_n$ $i.i.d. \sim Bernoulli(p)$，$p\in(0,1)$未知，试通过反转一个检验统计量得到关于p的置信水平为$1-\alpha$的置信下限。

练习 考虑检验问题$H_0:p=p_0 \leftrightarrow H_1:p=p_1$, $p_0>p_1$，试通过反转它的一个检验的接受域得到关于p的置信水平为$1-\alpha$的置信上限。

3.2 通过置信区间得到假设检验

Example (3.4)

设$X_1, \ldots, X_m$ $i.i.d. \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y_1, \ldots, Y_n$ $i.i.d. \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且样本$\vec{X}$ 和$\vec{Y}$独立，假设$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 > 0$，而$\sigma^2, \mu_1, \mu_2$均未知，

1. 考虑检验问题
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1 : \mu_1 \neq \mu_2,$$
利用$\mu_1 - \mu_2$的置信区间找到一个水平为α的检验.

2. * 考虑检验问题
$$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2,$$
利用$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间找到一个水平为α 的检验.

- 基于枢轴统计量，我们可以利用反转区间估计给出如下正态总体下两样本的检验结果。
- σ_1^2, σ_2^2已知：检验统计量

$$U = \frac{\overline{Y}-\overline{X}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}},$$

则

H_0	H_1	水平为α的拒绝域
$\mu_2-\mu_1=\mu_0$	$\mu_2-\mu_1\neq\mu_0$	$\lvert U\rvert > u_{\alpha/2}$
$\mu_2-\mu_1\leq\mu_0$	$\mu_2-\mu_1>\mu_0$	$U > u_\alpha$
$\mu_2-\mu_1\geq\mu_0$	$\mu_2-\mu_1<\mu_0$	$U < -u_\alpha$

注 上述三个检验分别对应$\mu_2-\mu_1$置信水平为$1-\alpha$的三个区间估计：

1. $\left[\overline{Y}-\overline{X}-u_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}, \overline{Y}-\overline{X}+u_{\alpha/2}\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}\right]$
2. $\left[\overline{Y}-\overline{X}-u_{\alpha}\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}, +\infty\right)$
3. $\left(-\infty, \overline{Y}-\overline{X}+u_{\alpha}\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}\right]$

- $\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知：检验统计量

$$T=\frac{\overline{Y}-\overline{X}-\mu_0}{S_{m,n}},$$

这里，

$$S_{m,n}^2=(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}.$$

则

H_0	H_1	水平为α的拒绝域
$\mu_2-\mu_1=\mu_0$	$\mu_2-\mu_1\neq\mu_0$	$\lvert T\rvert>t_{m+n-2}(\alpha/2)$
$\mu_2-\mu_1\leq\mu_0$	$\mu_2-\mu_1>\mu_0$	$T>t_{m+n-2}(\alpha)$
$\mu_2-\mu_1\geq\mu_0$	$\mu_2-\mu_1<\mu_0$	$T<-t_{m+n-2}(\alpha)$

注 上述三个检验分别对应$\mu_2-\mu_1$置信水平为$1-\alpha$的三个区间估计：

1. $\left[\overline{Y}-\overline{X}-u_{\alpha/2}S_{m,n},\overline{Y}-\overline{X}+u_{\alpha/2}S_{m,n}\right]$
2. $\left[\overline{Y}-\overline{X}-u_{\alpha}S_{m,n},+\infty\right)$
3. $\left(-\infty,\overline{Y}-\overline{X}+u_{\alpha}S_{m,n}\right]$

两个正态总体方差比的假设检验【0】表5.2.4

- μ_1, μ_2已知：令

$$
\begin{aligned}
S_{1*}^2 &= \sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2/m, \quad S_{2*}^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2/n, \\
F_* &= S_{2*}^2/S_{1*}^2
\end{aligned}
$$

则

H_0	H_1	水平为α的拒绝域
$\sigma_2^2=\sigma_1^2$	$\sigma_2^2\neq\sigma_1^2$	$F_*<F_{n,m}(1-\alpha/2)$ 或$F_*>F_{n,m}(\alpha/2)$
$\sigma_2^2\leq\sigma_1^2$	$\sigma_2^2>\sigma_1^2$	$F_*>F_{n,m}(\alpha)$
$\sigma_2^2\geq\sigma_1^2$	$\sigma_2^2<\sigma_1^2$	$F_*<F_{n,m}(1-\alpha)$

注 上述三个检验分别对应σ_2^2/σ_1^2置信水平为$1-\alpha$的三个区间估计：

$$
\left[\frac{F_*}{F_{n,m}(\alpha/2)}, \frac{F_*}{F_{n,m}(1-\alpha/2)}\right], \quad \left[\frac{F_*}{F_{n,m}(\alpha)}, +\infty\right), \quad \left(0, \frac{F_*}{F_{n,m}(1-\alpha)}\right]
$$

两个正态总体方差比的假设检验【0】表5.2.4

- μ_1, μ_2未知：令

$$F = S_Y^2 / S_X^2$$

则

H_0	H_1	水平为α的拒绝域
$\sigma_2^2 = \sigma_1^2$	$\sigma_2^2 \neq \sigma_1^2$	$F < F_{n-1,m-1}(1-\alpha/2)$ 或$F > F_{n-1,m-1}(\alpha/2)$
$\sigma_2^2 \leq \sigma_1^2$	$\sigma_2^2 > \sigma_1^2$	$F > F_{n-1,m-1}(\alpha)$
$\sigma_2^2 \geq \sigma_1^2$	$\sigma_2^2 < \sigma_1^2$	$F < F_{n-1,m-1}(1-\alpha)$

注 上述三个检验分别对应σ_2^2/σ_1^2置信水平为$1-\alpha$的三个区间估计：

$$\left[\frac{F}{F_{n-1,m-1}(\alpha/2)}, \frac{F}{F_{n-1,m-1}(1-\alpha/2)}\right], \quad \left[\frac{F}{F_{n-1,m-1}(\alpha)}, +\infty\right),$$

$$\left(0, \frac{F}{F_{n-1,m-1}(1-\alpha)}\right]$$

作业

- 习题5：Ex. 20, 22, 56, 57.

- 理想状态： 区间具有小的长度或尺寸（精度高），大的覆盖率（置信度高）。但一般两者很难同时达到。
- 考虑简单情形： 给定覆盖概率，求基于枢轴的最短置信区间。

Theorem (4.1)

（【1】定理9.3.2） 设$f(x)$是一个单峰的概率密度函数，如果区间$[a, b]$满足

(i) $\int_a^b f(x)dx = 1-\alpha$;

(ii) $f(a) = f(b) > 0$;

(iii) $a \le x^* \le b$, 其中x^*是$f(x)$的极大值点（*mode*）.

则$[a, b]$是所有满足*(i)*式的区间中最短的。

- 证明见【1】.

最短枢轴区间

Theorem (4.2)

设$f(x)$是一个定义在$[A,B]$上严格单调的概率密度函数，区间$[a,b]$满足

$$\int_a^b f(x)dx = 1-\alpha. \qquad (1)$$

1. 如果$f(x)$严格单调增，且$[c,B]$满足(1)式，则$[c,B]$是所有满足(1)式的区间中最短的。
2. 如果$f(x)$严格单调降，且$[A,b]$满足(1)式，则$[A,b]$是所有满足(1)式的区间中最短的。

- 定理参考【1】习题9.41。
- **定义4.1** 称基于枢轴Q得到的最短区间为**最短枢轴区间**。

注 定义参考【1】例9.3.4。

举例说明

- 若$Q(\overrightarrow{X},\theta) \propto \theta^d$, $d > 0$ 或θ是位置参数，则求最短枢轴区间可操作如下：
  1. 找出区间$[a, b]$，使得它是满足$\mathbb{P}(a \le Q(\overrightarrow{X},\theta) \le b) = 1-\alpha$的所有区间中最短的；
  2. 关于θ的不等式$a \le Q(\overrightarrow{X},\theta) \le b$的解就是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的最短枢轴区间$[L(\overrightarrow{X}), U(\overrightarrow{X})]$.

Example (4.1)

设$X_1, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2 > 0$ 已知，$\mu \in \mathbb{R}$未知，求μ的置信水平为$1-\alpha$ 的最短枢轴区间。

Example (4.2)

设$X_1, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim U(0,\theta)$，$\theta > 0$ 未知，求θ的置信水平为$1-\alpha$ 的最短枢轴区间。

作业

作业1 设$X_1,\ldots,X_n$ $i.i.d. \sim N(\mu,\sigma^2)$，$n\geq 4$，$\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma^2>0$ 均未知，分别求μ和$\eta=\frac{1}{\sigma^2}$ 的置信水平为$1-\alpha$ 的最短枢轴区间。

作业2 设$X_1,\ldots,X_n$ $i.i.d. \sim X$，总体X的概率密度函数$f(x|\lambda)=e^{-(x-\lambda)}$, $x>\lambda$, 参数$\lambda\in\mathbb{R}$ 未知，求λ 的置信水平为$1-\alpha$ 的最短枢轴区间。