§0.1 欧式空间

教材:《微分几何》彭家贵，陈卿

参考书:

《微分几何初步》(陈维桓)

《A Comprehensive Introduction to Differential Geometry》Michael Spivak (Volume 2, Chapter 1-3)

《Differential geometry of curves and surfaces》Do Carmo

本课程很大一部分内容是介绍三维欧式空间中曲线与曲面的局部理论。首先回顾三维欧式空间的一些基本知识。

§0.1.1 向量空间与欧式空间

欧式空间是一类非常特殊的空间，它的元素是向量，具有向量空间的线性结构（满足熟知运算法则的加法和数乘），因此构成一个实线性空间，并且它具有内积结构。

定义0.1.（欧式空间与内积）

(1) 欧式空间是定义了内积的有限维（实）向量空间。

(2) 向量空间V上的内积是一个双线性函数$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \langle x, y\rangle$，满足

$$(i) \quad \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle; \quad \text{(对称性)}$$

$$(ii) \quad \langle x,x\rangle \geq 0; \quad \langle x,x\rangle = 0 \quad \textit{iff} \quad x=0. \quad \text{(正定性)}$$

注：经典的欧式空间E^n（点的集合）中取定一点O，则$P \in E^n$一一对应到向量$\overrightarrow{OP}$。

n维欧式空间中向量长度（诱导范数）、两个向量的夹角分别定义为

$$|x| := \langle x,x\rangle^{1/2}, \quad \cos\alpha := \frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}, \quad \alpha \in [0,\pi].$$

常用不等式有：Cauchy-Schwarz不等式

$$|\langle x,y\rangle| \leq |x||y|$$

以及三角不等式

$$|x| + |y| \geq |x+y|.$$

给定线性空间的一组基$(v_1,\cdots,v_n)^T$后，向量与数组可等同：

$$V \ni x=\sum_{i=1}^{n} x^i v_i \leftrightarrow (x^1,\cdots,x^n).$$

n维欧式空间的一组基，可通过Schmidt正交化得到一组单位正交基$(e_1,e_2,\cdots,e_n)^T$，即

$$\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

选取一组单位正交基$(e_1,e_2,\cdots,e_n)^T$之后，n维欧式空间与n维数组空间$\mathbb{R}^n$就有最常用的等同

$$x=\sum x^i e_i \leftrightarrow (x^1,\cdots,x^n)\in\mathbb{R}^n.$$

两个n维欧式空间各选取一组单位正交基之后自然给出保内积的同构(基变换诱导的线性变换)，所以在保内积同构意义下n维欧式空间唯一。因此通过默认一组单位正交基，n维欧式空间记作$(\mathbb{R}^n,\langle,\rangle)$，或简单记作$\mathbb{R}^n$。

$\mathbb{R}^n$中取定一点p、以及一组基$(v_1,\cdots,v_n)^T$（直观上v_i以p作为起点），则$\{p;v_1,\cdots,v_n\}$称为$\mathbb{R}^n$ 的一个标架；当$(v_1,\cdots,v_n)^T$为单位正交基时，$\{p;v_1,\cdots,v_n\}$称为$\mathbb{R}^n$的一个正交标架。两个正交标架之间相差一个平移与正交变换。

另外，给定一个标架$\{p;v_1,\cdots,v_n\}$，则由它确定了欧式空间的一个定向。事实上对另一个标架$\{p';v_1',\cdots,v_n'\}$，设$(v_1',\cdots,v_n')^T=A(v_1,\cdots,v_n)^T$。如果$\det A>0$则称两个标架定向相同，如果$\det A<0$则称两个标架定向相反。$\mathbb{R}^n$总共有两种定向。

令

$$g_{ij}:=\langle v_i,v_j\rangle=g_{ji},$$

$$x=\sum_i x^i v_i,\quad y=\sum_j y^j v_j,$$

则由双线性性

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x^i y^j=xGy^T,$$

$G=(g_{ij})$是一个n阶对称方阵。特别当选取了$\mathbb{R}^n$的单位正交基$(e_1,\cdots,e_n)$时，

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\delta_{ij}x^i y^j=xy^T.$$

§0.1.2 合同变换

取定n维欧式空间的一组单位正交基$(e_1, e_2, \cdots, e_n)^T$。则$x = (x^1, \cdots, x^n), y = (y^1, \cdots, y^n)$之间的距离定义为

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{\sum_i (x^i - y^i)^2}.$$

定义0.2. （合同变换）称$\mathbb{R}^n$之间一一对应为变换。如果变换T保持距离，即

$$|T(x) - T(y)| = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

则称T为合同变换（或欧式变换）。

如下变换为合同变换：

$$T(x) = xA + x_0, \quad x, x_0 \in \mathbb{R}^n, A \in O(n).$$

因

$$|T(x) - T(y)|^2 = |(x - y)A|^2 = (x - y)AA^T(x - y)^T = (x - y)(x - y)^T = |x - y|^2.$$

定理0.3. 设T为$\mathbb{R}^n$的合同变换，则存在$A \in O(n), x_0 \in \mathbb{R}^n$使得

$$T(x) = xA + x_0.$$

证明：令$x_0 = T(0)$，则

$$T'(x) := T(x) - x_0$$

使得$T'(0) = 0$，

$$|T'(x) - T'(y)| = |T(x) - T(y)| = |x - y|.$$

因此不妨设$T(0) = 0$，只需证明$T(x) = xA, A \in O(n)$。由$T(0) = 0$，则可验证T保持内积，并且是线性变换。

设$T(0) = 0$。注意T保距离，欧式空间中距离可极化得到内积，因此T保内积：

$$\begin{aligned}
\langle T(x), T(y) \rangle &= \frac{1}{2}(|T(x)|^2 + |T(y)|^2 - |T(x) - T(y)|^2) \\
&= \frac{1}{2}(|T(x) - T(0)|^2 + |T(y) - T(0)|^2 - |T(x) - T(y)|^2) \\
&= \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2) \\
&= \langle x, y \rangle.
\end{aligned}$$

设$\{e_i\}$为$\mathbb{R}^n$的单位正交基，则由T保内积

$$\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},$$

即$T(e_i)$同样为$\mathbb{R}^n$的单位正交基。从而

$$T(x) = \sum_i \langle T(x), T(e_i)\rangle T(e_i) = \sum_i \langle x, e_i\rangle T(e_i).$$

验证T为线性变换：

$$\begin{aligned} T(ax+by) &= \sum_i \langle ax+by, e_i\rangle T(e_i) \\ &= \sum_i (a\langle x, e_i\rangle + b\langle y, e_i\rangle) T(e_i) \\ &= aT(x) + bT(y). \end{aligned}$$

因此T是一个线性变换，即$T(x) = xA$。由$\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$，在正交基$(e_1, \cdots, e_n)^T$之下

$$\langle xA, yA\rangle = xAA^T y^T = \langle x, y\rangle = xy^T,$$

因此$AA^T = I_n$，$A \in O(n)$。 □

注：由定义或上述定理直接验证，合同变换的全体构成一个群，称为合同变换群或欧式变换群。欧式空间的合同变换包含平移、旋转（$SO(n)$中的元素）、镜面反射。当$\det A = 1$，对应的合同变换称为一个刚体运动。刚体运动即平移和旋转的复合。$\det A = -1$的合同变换称为反向刚体运动。

另外，$\mathbb{R}^n$的合同变换与$\mathbb{R}^n$的正交标架一一对应，因为可考虑从合同变换到正交标架之间的映射（将$(O; e_1, \cdots, e_n)$按合同变换的形式映为另一正交标架）

$$T \mapsto (x_0; A(e_1, \cdots, e_n)^T), \quad \forall T(x) = xA + x_0, A \in O(n), x, x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

§0.1.3　欧式向量空间中一些微分运算、代数运算

（1）几个微分运算：

选定欧式空间$\mathbb{R}^n$的一组单位正交基。设有光滑向量值函数$a(t) \in \mathbb{R}^n$，例如$a(t)$代表一个运动粒子在t时刻的位置、速度等，其分量形式为

$$a(t) = (a^1(t), a^2(t), \cdots, a^n(t))$$

则

$$\frac{d}{dt}a(t) := \lim_{h\to 0}\frac{a(t+h) - a(t)}{h} = (\frac{da^1}{dt}, \cdots, \frac{da^n}{dt}).$$

设$\lambda=\lambda(t)$，由Leibniz求导法则可得

$$\frac{d}{dt}(\lambda a)=\frac{d\lambda}{dt}a+\lambda\frac{da}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\langle a,b\rangle=\langle\frac{da}{dt},b\rangle+\langle a,\frac{db}{dt}\rangle.$$

例：设有C^1向量值函数$r:I=[a,b]\to\mathbb{R}^n$，以及$t_0\in(a,b)$使得

$$|r(t_0)|=\min_{t\in I}|r(t)|>0.$$

则

$$0=\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\langle r(t),r(t)\rangle=2\langle r(t_0),r'(t_0)\rangle,$$

即

$$r'(t_0)\perp r(t_0).$$

两个一阶线性微分算子：

(i)函数$f(x^1,\cdots,x^n)$的梯度

$$\mathrm{grad}f=\nabla f:=(\frac{\partial f}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x^n}).$$

(ii)向量场$X=X(x^1,\cdots,x^n)=(X^1(x^1,\cdots,x^n),\cdots,X^n(x^1,\cdots,x^n))$的散度

$$\mathrm{div}X=\nabla\cdot X:=\frac{\partial X^1}{\partial x^1}+\cdots+\frac{\partial X^n}{\partial x^n}.$$

容易验证：

$$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f,$$

$$\mathrm{div}(fX)=f\mathrm{div}(X)+\langle\nabla f,X\rangle.$$

（2）三维欧式空间中外积、混合积、旋度：

取$\mathbb{R}^3$自然定向（右手系）的单位正交基$(e_1,e_2,e_3)^T$。$a,b\in\mathbb{R}^3$的外积定义为

$$a\wedge b:=(a^2b^3-a^3b^2,a^3b^1-a^1b^3,a^1b^2-a^2b^1)=\begin{vmatrix}e_1&e_2&e_3\\a^1&a^2&a^3\\b^1&b^2&b^3\end{vmatrix}.$$

a,b,c的混合积定义为

$$(a,b,c)=\langle a,b\wedge c\rangle=\begin{vmatrix}a^1&a^2&a^3\\b^1&b^2&b^3\\c^1&c^2&c^3\end{vmatrix}=(c,a,b)=\langle c,a\wedge b\rangle=\langle a\wedge b,c\rangle.$$

即a,b,c三个向量张成的平行六面体的有向体积。也可以反过来通过混合积以及关系式

$$(a,b,c)=\langle a,b\wedge c\rangle,\quad \forall a\in\mathbb{R}^3$$

来定义外积$b\wedge c$。由行列式的线性性，外积与混合积关于每一个变量都是线性的。

由于

$$0=(a,a,b)=\langle a,a\wedge b\rangle,\quad 0=(b,a,b)=\langle b,a\wedge b\rangle,$$

$a\wedge b$与a,b都垂直。由混合积对应有向体积，取(c,a,b)中$c=\frac{a\wedge b}{|a\wedge b|}$为垂直于$a,b$的单位向量，因此$|(c,a,b)|=|a\wedge b|$，由此可见$|a\wedge b|$等于$a,b$张成平行四边形的面积。$a,b$线性无关时混合积$(a\wedge b,a,b)=|a\wedge b|^2>0$，$(a\wedge b,a,b)$构成右手系。可直接验证

$$b\wedge a=-a\wedge b,$$

$$\frac{d}{dt}(a\wedge b)=\frac{da}{dt}\wedge b+a\wedge\frac{db}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(a,b,c)=(\frac{da}{dt},b,c)+(a,\frac{db}{dt},c)+(a,b,\frac{dc}{dt}).$$

注意外积不满足结合律：

$$(e_1\wedge e_1)\wedge e_2=0,\quad e_1\wedge(e_1\wedge e_2)=e_1\wedge e_3=-e_2.$$

$\mathbb{R}^3$中向量场$F(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$的旋度

$$\mathrm{rot}F=\nabla\wedge F:=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

容易验证：

$$\mathrm{rot}(fF)=f\mathrm{rot}(F)+\nabla f\wedge F.$$

作业：习题一2，3