2022 期中考试解答

一、填空题

1. 两个点电荷静电力和电势，0.18 N, 1.64×10^5V,
2. 两个导体球的电量转移和总电容，$bq/(a+b)$, $4\pi\varepsilon_0(a+b)$,
3. 串联电容的总电容和耐压值，2.0pF, 45V,
4. 电偶极子在外场中的电势能和静电力矩，–1.25J, 2.17N·m,
5. 导线电阻、漂移速度和热功率，$2.87\times10^{-2}\Omega$, 2.13×10^{-4}m/s, 0.348W,
6. 电路的节点数和独立回路数，7, 12 或 6, 10,
7. 等效电阻和支路电流，$108/55\approx1.96\Omega$, $10/27\approx0.370$A.

二、判断题

1. (×) 电场线是试探电荷在电场中的运动轨迹。
2. (×) 静电力可以使电荷体系实现稳定平衡。
3. (×) 导体平板与外电场斜交时，感应电荷在平板上近似均匀分布。
4. (√) 一球壳由彼此绝缘的两个金属半球壳组成，一半接地，另一半电势为 U，则球心处的电势为 $U/2$。
5. (×) 有极分子在外电场中主要产生位移极化。
6. (√) 均匀电介质内没有自由电荷的地方也没有极化电荷。
7. (√) 铁电体中电位移与电场强度一般不成正比。
8. (√) 总相互作用能为零的点电荷体系至少包含三个点电荷。
9. (√) 带正电导体 A 附近有一中性导体 B，则当 A 离 B 越近，A 的电势越低。
10. (×) 气体的压强越小，欧姆定律的精度越高。

三、简答题

1.答：真空中静电场的高斯定理和环路定理均可由库仑定律导出。这两个定理反映了库仑定律的两类基本性质：高斯定理揭示了静电场的距离平方反比律，静电场是有源场。环路定理揭示了静电场的径向性，静电场是无旋场。

2.答：无极分子在静电场中产生与温度无关的位移极化，有极分子在静电场中主要产生与温度有关的取向极化。在法拉第实验中，极板电压受极化程度影响，所以只需测量不同温度下的极板电压。如果电压不随温度变化，则介质分子是无极分子；如果电压随温度变化，则介质分子是有极分子。

3.答：否。按能量法，假设正极板有垂直方向的虚位移δx，并认为电容器电容变为$\varepsilon S/(d+\delta x)$，最终可以得到该结果。但上述假设中要求介质的厚度增加δx，改变了正极板之外的带电体。

正确做法是，正极板有垂直方向的虚位移δx，但正极板和内部介质之间会产生一个厚度为δx的真空层，电容器电容倒数变为 $d/\varepsilon S+\delta x/\varepsilon_0 S$，接下来用能量法计算即可得正确结果。或者用直接法，介质板的极化电荷对正极板的合力为零，正极板受力来自于负极板电荷。

4.答：电场和电势均不改变。

当腔内电荷 q 大小不变，仅位置变化时，导体内腔表面的感应电荷量保持为$-q$ 不变，因而导体外表面的电荷量也是确定的。导体外区域的边界有两部分构成，一部分是无穷远边界，电势为零，另一部分是导体外表面，电量确知。于是根据唯一性定理，导体外区域的电场和电

势有唯一解，与导体腔内带电体位置无关。

直观理解：当腔内电荷 q 大小不变，仅位置变化时，导体内腔表面的感应电荷分布会及时调整，以保证这两部分电荷对导体内的电场处处为零。于是可以猜测导体外表面的电荷分布保持不变，从而导体外的电场和电势均不改变。该猜测解能够满足所有静电场基本规律和附加条件，根据唯一性定理，排除了导体外表面其他电荷分布的可能。

四、计算题

1. 解：(1) 以原点为中心，作一个半径趋于无穷的球面高斯面，运用高斯定理得

$$Q=\lim_{r\to\infty}4\pi\varepsilon_0 r^2E=\lim_{r\to\infty}4\pi\varepsilon_0 r^2A\frac{\mathrm{e}^{-br}}{r^2}=0$$

(2) 以原点为中心，作两个半径分别为 R 和 R+dR 的球面共同作为高斯面，运用高斯定理得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Q&=4\pi\varepsilon_0(R+\mathrm{d}R)^2E(R+\mathrm{d}R)-4\pi\varepsilon_0R^2E(R)\\&=\frac{\mathrm{d}[4\pi\varepsilon_0R^2E(R)]}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R=\frac{\mathrm{d}(4A\pi\varepsilon_0\mathrm{e}^{-bR})}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R=-4Ab\pi\varepsilon_0\mathrm{e}^{-bR}\mathrm{d}R\end{aligned}$$

(3) 由(2)中结果可得，体电荷密度 $\rho=\dfrac{\mathrm{d}Q}{4\pi R^2\mathrm{d}R}=\dfrac{-Ab\varepsilon_0\mathrm{e}^{-bR}}{R^2}$

2. 解：(1) 本题属于介质界面与电场线平行情形，电场与无介质时有相同分布形式，即为均匀场。用长方形高斯面刚好包围住正极板，由高斯定理得：

$$Q=\oiint_S\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oiint_S\varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=bE\int_0^a(\varepsilon_1+\alpha x)\mathrm{d}x=(\varepsilon_1a+\alpha a^2/2)bE$$

$$\Rightarrow E=\frac{Q}{(\varepsilon_1a+\alpha a^2/2)b},\quad D=(\varepsilon_1+\alpha x)E=\frac{(\varepsilon_1+\alpha x)Q}{(\varepsilon_1a+\alpha a^2/2)b}$$

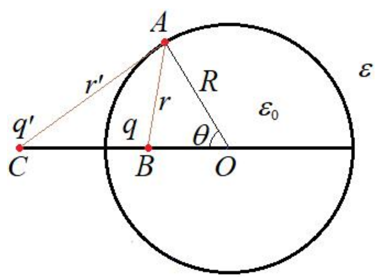
另解：电容 $C=\displaystyle\int_0^a\frac{(\varepsilon_1+\alpha x)b\mathrm{d}x}{d}=\frac{(\varepsilon_1a+\alpha a^2/2)b}{d}\quad\Rightarrow U=\frac{Q}{C}=\frac{Qd}{(\varepsilon_1a+\alpha a^2/2)b}$

$$\Rightarrow E=\frac{U}{d}=\frac{Q}{(\varepsilon_1a+\alpha a^2/2)b},\quad D=\varepsilon E=\frac{(\varepsilon_1+\alpha x)Q}{(\varepsilon_1a+\alpha a^2/2)b}$$

(2) 正极板处 $\sigma_{\mathrm{e}0}=D=\dfrac{(\varepsilon_1+\alpha x)Q}{(\varepsilon_1a+\alpha a^2/2)b}$

(3) 正极板-介质界面处 $\sigma'_{\mathrm{e}}=-P=-(D-\varepsilon_0E)=-(\varepsilon_1-\varepsilon_0+\alpha x)E=-\dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_0+\alpha x)Q}{(\varepsilon_1a+\alpha a^2/2)b}$

3. 解：(1) 球壳内表面感应电荷总量为$-q$，其等效的像电荷 q'在 OB 延长线上 C 点。为保持球壳电中性，在球壳外表面均匀分布电荷 q。设 $OC=s$，q 和 q'在球面上任一点 A 的电势为零，即



$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r'}\right)=0,$$

其中 $r=\sqrt{R^2+l^2-2Rl\cos\theta}$，$r'=\sqrt{R^2+s^2-2Rs\cos\theta}$.

由上式解得：$q'=-Rq/l$，$s=R^2/l$。

球壳外表面均匀分布的电荷对 q 无作用力，球壳对 q 的作用力即 q'对 q 的作用力：

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(s-l)^2}=-\frac{Rl}{(R^2-l^2)^2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}，方向 O\to B$$

(2) 球壳电势 (不考虑介质的效应) $U_1=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

单独 q'在 q 处的电势 $U_2=\dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0(s-l)}=-\dfrac{qR}{4\pi\varepsilon_0(R^2-l^2)}$

所以球壳上的感应电荷与 q 之间的相互作用静电能

$$W_{互}=q(U_1+U_2)=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{q^2R}{4\pi\varepsilon_0(R^2-l^2)}=-\frac{q^2l^2}{4\pi\varepsilon_0 R(R^2-l^2)}$$

(3) 球外区域的电场由外壳 q 在介质中产生， $E_1=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$

球外区域的总静电能

$$W_1=4\pi\int_R^{\infty}\frac{1}{2}\varepsilon E_1^2r^2\mathrm{d}r=4\pi\int_R^{\infty}\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\right)^2r^2\mathrm{d}r=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon R}$$