微分方程

Picard定理的补充

说明和附加作业4

Picard定理　若$\vec{f}(t,\vec{x})$在矩形区域

$$D:\{(t,\vec{x})\in\mathbb{R}^n \mid \ |t-t_0|\le a,\quad |\vec{x}-\vec{x}_0|\le b\}$$

内连续且对$\vec{x}$满足L-条件,则

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0\end{cases}$$

在区间$I=[t_0-h,t_0+h]$上存在唯一解, 其中常数

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\qquad M=\max_{D}|\vec{f}(t,\vec{x})|.$$

主要证明步骤：

(1°) 初值问题等价于积分方程

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}\left(s,\vec{x}(s)\right)ds$$

(2°) 构造Picard序列$\{\vec{x}_k(t)\}$

$$\vec{x}_k(t)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}\left(s,\vec{x}_{k-1}(s)\right)ds \quad (t\in I)$$

(3°) Picard序列$\{\vec{x}_k(t)\}$在区间I上一致收敛到积分方程的解$\vec{\varphi}(t)$

(4°) 证明唯一性

Picard定理的补充说明

1. 定理中$h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$的几何意义

在矩形D中有$\left|\vec{f}(t,\vec{x})\right|\le M$，故初值问题的解

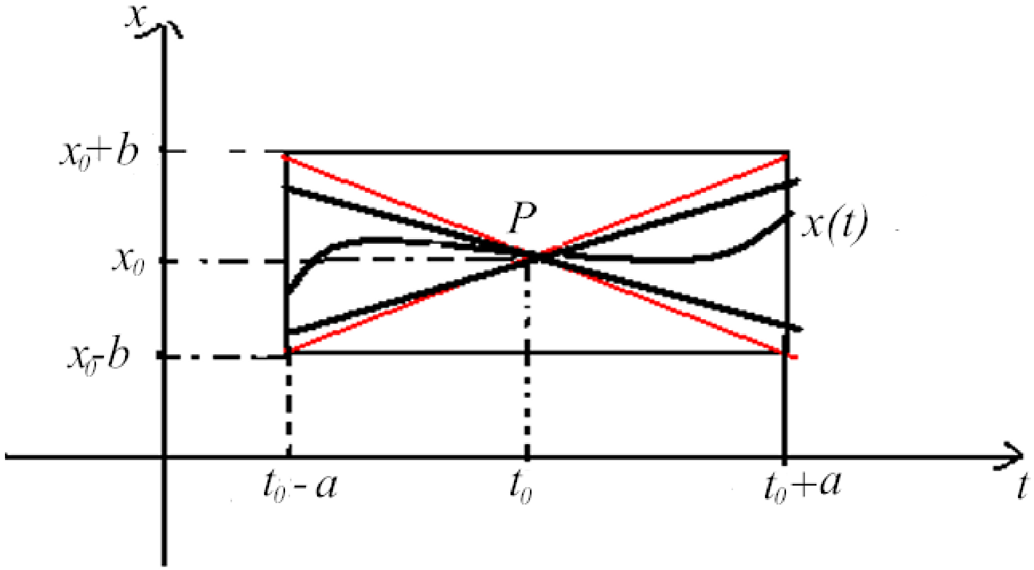
即积分曲线的斜率必介于$-M$与M之间,

过点$(t_0,\vec{x}_0)$分别作斜率为$-M$和M的直线,

当$M\le\dfrac{b}{a}$时(如右图),

解$\vec{x}(t)$在$t_0-a\le t\le t_0+a$

中有定义;



而当$M > \frac{b}{a}$时(见下图),不能保证解$\vec{x}(t)$在

$t_0 - a \le t \le t_0 + a$中有定义;

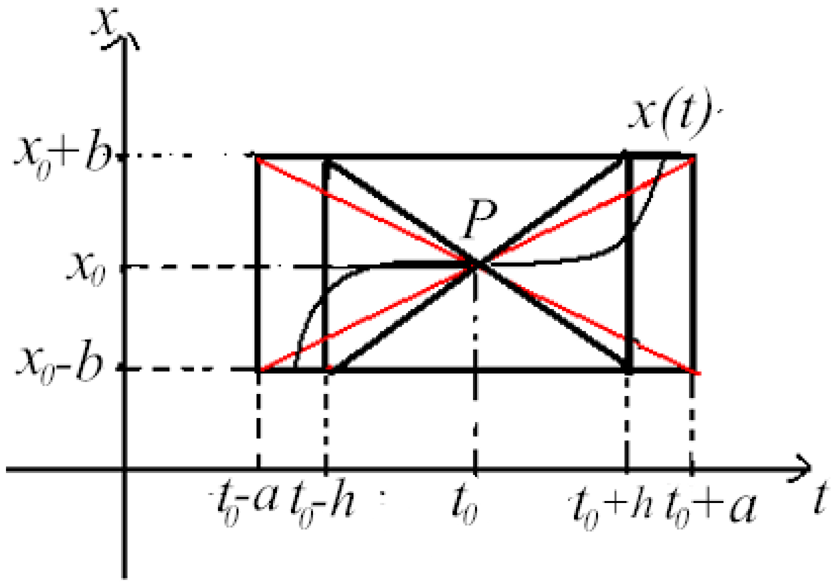
它有可能在区间内跑到矩形D外,使得解无意义,

只有当$t_0 - \frac{b}{M} \le t \le t_0 + \frac{b}{M}$时,才能保证解$\vec{x}(t)$

在D内.

故要求解的存在

范围为$|t - t_0| \le h$.



2. *Lipschitz*条件在实际应用中容易判断的两个充分条件

1° 如果$\vec{f}(t,\vec{x})$在D上关于$\vec{x}$的梯度矩阵$\nabla_{\vec{x}}\vec{f}(t,\vec{x})$存在且有界

2° 如果$\vec{f}(t,\vec{x})$在D上关于$\vec{x}$的梯度矩阵$\nabla_{\vec{x}}\vec{f}(t,\vec{x})$连续

3. 第k次近似解和误差估计

对于Picard序列第k项

$$\vec{x}_k(t)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}\left(s,\vec{x}_{k-1}(s)\right)ds\quad(t\in I)$$

确定的函数称为初值问题的**第k次近似解.**

第k次近似解与精确解在I内的误差估计式为

$$\boxed{\left|\vec{x}_k(t)-\vec{x}(t)\right|\le\frac{ML^k}{(k+1)!}|t-t_0|^{k+1}\le\frac{ML^k}{(k+1)!}h^{k+1}}$$

这样, 在进行近似计算时, 可以根据误差要求, 选取适当的逐次逼近函数$\vec{x}_k(t)$.

证明:误差估计式可用数学归纳法证明.

$\left|\vec{x}_0(t)-\vec{x}(t)\right| \le \int_{t_0}^{t}\left|\vec{f}(s,\vec{x}(s))\right|ds \le M\left|t-t_0\right| \le Mh, k=0$时误差估计式成立.

设$\left|\vec{x}_{k-1}(t)-\vec{x}(t)\right| \le \dfrac{ML^{k-1}}{k!}|t-t_0|^k \le \dfrac{ML^{k-1}}{k!}h^k$,

则$\left|\vec{x}_k(t)-\vec{x}(t)\right| \le \int_{t_0}^{t}\left|\vec{f}(s,\vec{x}_{k-1}(s))-\vec{f}(s,\vec{x}(s))\right|ds$

$$\le L\int_{t_0}^{t}\left|\vec{x}_{k-1}(s)-\vec{x}(s)\right|ds \le \frac{ML^k}{k!}\int_{t_0}^{t}|s-t_0|^k ds$$

$$=\frac{ML^k}{(k+1)!}|t-t_0|^{k+1} \le \frac{ML^k}{(k+1)!}h^{k+1}.$$

由归纳法知误差估计式成立.

4. 连续性保证解的存在性(Peano定理)，*Lipschitz*条件保证解的唯一性.

5. *Lipschitz*条件是保证解唯一的充分条件，但不是必要条件.

例如，考察方程

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{当} x = 0, \\ x \ln|x|, & \text{当} x \neq 0. \end{cases}$$

$f(x,y)$不满足Lipschitz条件，但方程经过平面上任意点的解都是唯一的.

附加作业4

1. 讨论Riccati方程初值问题$\dfrac{dx}{dt}=t^2+x^2,\quad x(0)=0$

解的存在唯一区间,并求在此区间上与真正解的误差不超过0.05的近似解的表达式,

其中$D:-1\le t\le 1,-1\le x\le 1.$

2. 令$I=[a,b]$,设函数$f(t)$在I上连续和$K(t,s)$在$I\times I$上连续, 证明：积分方程

$x(t)=f(t)+\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s$在$I$上有唯一解.