Sturm-Liouville边值问题

回顾：Fourier级数展开

三角函数系的正交性

- 三角函数

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \cdots,\sin nx,\ \cos nx,\cdots$$

称为三角函数系；

- 三角函数系在其一个周期$[-\pi,\ \pi]$上的正交性，是指三角函数系中任何两个不同函数的乘积在区间$[-\pi,\ \pi]$上的积分为零，即

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\mathrm{d}x=0,\ \ n=1,2,3,\cdots;$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x=0,\ \ m\neq n,\ \ m,n=1,2,3,\cdots;$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x=0,\ \ m,n=1,2,3,\cdots.$

回顾：Fourier级数展开

Fourier级数

- 在一定条件下，任何周期为2π的函数$f(x)$,都可以展成Fourier级数，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中a_0，a_n，$b_n, n=1,2,3,\cdots$称为$f(x)$的Fourier系数;

- 利三角函数系的正交性，我们可以计算出函数$f(x)$的Fourier系数,即

$$a_m=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\mathrm{d}x}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\mathrm{d}x}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\mathrm{d}x,\quad m=0,\ 1,\cdots,$$

$$b_m=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\mathrm{d}x}{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\mathrm{d}x}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\mathrm{d}x,\quad m=1,\ 2,\cdots.$$

Sturm-Liouville问题

特征值问题

- 三角函数系

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \cdots,\sin nx,\ \cos nx,\cdots$$

是特征值问题

$$\begin{cases} \Theta''(\theta)+\lambda\Theta(\theta)=0, \\ \Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi) \end{cases} \tag{*}$$

的特征函数系；

- 特征值问题(*)存在一列离散的特征值$\lambda=n^2$和特征函数系——三角函数系；
- 特征函数系——三角函数系具有正交性；
- 三角函数系具有完备性，即Dirichlet收敛定 理；

Sturm-Liouville问题

Sturm-Liouville型特征值问题

- 称二阶线性微分方程

$$\frac{d}{dx}(k(x)\frac{dX}{dx}) - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0 \tag{1}$$

为Sturm-Liouville型方程;

- 称特征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(k(x)\dfrac{dX}{dx}) - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0, \ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

为Sturm-Liouville型特征值问题。

- Sturm-Liouville型特征值问题是一个自共轭算子的特征值问题。

自共轭算子的特征值问题

加权内积空间

- 定义实函数空间$L^2_\rho[a,\ b] = \{f(x) \mid \int_a^b \rho(x)|f(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty\}$，及其上的加权内积

$$< f(x), g(x) >= \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \mathrm{d}x$$

- 函数空间$L^2_\rho[a,\ b]$中所有具有二阶连续导数的函数、且满足边界条件

$$\alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0,\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0$$

的函数全体构成一个子空间，记为$\mathcal{H}$。

自共轭算子的特征值问题

自共轭算子

- 定义算子

$$L = -\frac{1}{\rho(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + \frac{q(x)}{\rho(x)}.$$

- 算子L为自共轭算子，即对$\mathcal{H}$中任意两个函数$f(x)$和$g(x)$，有

$$< Lf(x), g(x) >=< f(x), Lg(x) >$$

- 事实上，利用分部积分公式，有

$$\begin{aligned} &< Lf(x), g(x) > - < f(x), Lg(x) > \\ = &-k(x)\left[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\right]_a^b = 0 \end{aligned}$$

自共轭算子的特征值问题

自共轭算子的特征值问题

- 考虑特征值问题

$$\begin{cases} LX(x) = \lambda X(x), \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0,\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

- 回顾，线性代数中，对称矩阵的特征值（固有值）都是实数；不同特征值对应的特征（固有）向量相互正交；可逆对称矩阵的特征向量构成正交基。自共轭算子的特征值问题的特征值和特征函数具有类似性质，这就是Sturm-Liouville定理的核心内容。

常点情形

- 设$k(x) \in C^1[a,b], q(x), \rho(x) \in C[a,b]$;
  且在$[a,b]$上,$k(x) > 0, \rho(x) > 0, q(x) \geq 0$, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$,
  $\alpha_i{}^2+\beta_i{}^2 \neq 0, i=1,2$,称特征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(k(x)\frac{dX}{dx}) - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \\ \alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) = 0,\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

为常点情形的Sturm-Liouville型特征值问题。

特征值问题(4) 的特征值和特征函数具有 以下性质.

常点情形（续）

1. **非负性.** 所有特征值λ均为非负实数;
2. **可数性.** 全体特征值组成无穷数列

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty,$$

对应于每个特征值λ_n，只有一个线性独立的特征函数，组成对应的特征函数系

$$X_1(x),\ X_2(x),\ \cdots,\ X_n(x), \cdots.$$

3. **正交性.** 不同特征值对应的特征函数相互加权正交，即如果$n \neq m$，则

$$< X_n(x), X_m(x) >= \int_a^b \rho(x) X_n(x) X_m(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Sturm-Liouville定理

常点情形（续）

4. **完备性.** 特征函数系$\{X_n(x),\ n =, 1, 2, \cdots\}$构成函数空间$L^2_\rho[a,\ b]$中完备正交基，即$L^2_\rho[a,\ b]$中的任意函数$f(x)$可以按特征函数系$\{X_n(x),\ n =, 1, 2, \cdots\}$展开成广义Fourier级数(证明可以参考陈祖墀“偏微分方程”第四版3.3节)。

- 广义Fourier级数的收敛性，又分以下两种方式。

广义Fourier级数的收敛性

绝对一致收敛

- 当$f(x)\in\mathcal{H}$时，其对应的广义Fourier级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_nX_n(x),\quad C_n=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}\rho(x)f(x)X_n(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\pi}^{\pi}\rho(x)|X_n(x)|^2\mathrm{d}x}$$

在$[a,b]$上绝对一致收敛到函数$f(x)$本身；

均方收敛

- 当$f(x)\in L_{\rho}^2[a,\ b]$时，其对应的广义Fourier级数在均方收敛意义下收敛到函数$f(x)$，即

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\rho(x)\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}C_nX_n(x)\right|^2\mathrm{d}x=0.$$

Sturm-Liouville定理

周期性条件

- 设$k(x) \in C^1[a,b]$, $k(a)=k(b), q(x), \rho(x) \in C[a,b]$;
  且在$[a,b]$上,$k(x)>0, \rho(x)>0, q(x)\geq 0$, 则称特征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(k(x)\dfrac{dX}{dx}) - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \\ X(a)=X(b),\ X'(a)=X'(b), \end{cases} \tag{5}$$

  为周期性条件下的Sturm-Liouville型特征值问题。

- 周期性条件下的Sturm-Liouville型特征值问题的特征值和特征函数具有类似于常点情形的性质.

  区别：周期条件下，对应于每一个非零特征值，有两个相互正交的特征函数(简并现象)。