微分方程

一般情形下的Green函数

内容：

1. 问题的引入
2. 基本积分公式
   - 基本解
   - Green公式的应用
   - 对左端做估计
   - 取极限得结论
3. Green函数的引入
   - 第I边值问题
   - 第II边值问题
   - 第III边值问题
4. Green函数的对称性(倒易性)
5. 讨论

一、问题的引入：

设有界区域 $D\subset\mathbb{R}^n(n\geq 2)$ 的边界 ∂D 分片光滑，考虑Poisson方程的边值问题：

$$\begin{cases}\Delta u = f(x),\ x\in D\subset\mathbb{R}^n\\ \left.(\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial \nu})\right|_{\partial D} = \varphi(x)\end{cases}$$

其中 $f(x)\in C(D),\varphi(x)\in C(\partial D)$ 且 $\alpha^2+\beta^2\neq 0:\beta=0$ 对应第I(Dirichlet)边值问题，$\alpha=0$ 对应第II(Neumann)边值问题，其它情形对应第III(Robin)边值问题

当 $f\equiv 0$ 且 $D\subset\mathbb{R}^3$ 为长方体、球体和柱体时，求解此边值问题可以用分离变量法，但 $f\not\equiv 0$ 或 $D\subset\mathbb{R}^3$ 为一般有界区域时

分离变量法失效！

二、基本积分公式:

1.全空间中 $\Delta U(x)=\delta(x),\ x\in\mathbb{R}^n$ 的**基本解**(用**Fourier变换**求出)为

$$\boxed{U(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & n=2\\[2ex] -\dfrac{|x|^{2-n}}{n(n-2)\omega_n}, & n\geq 3\end{cases}}$$

其中 $|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$, ω_n 为 n 维单位球体积:

$$\boxed{\omega_n=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}=\begin{cases}\dfrac{\pi^m}{m!}, & n=2m\\[2ex] \dfrac{2^{m+1}\pi^m}{(2m+1)!!}, & n=2m+1\end{cases},\quad \omega_3=\frac{4}{3}\pi.}$$

可以验证函数 $u(x)=U(x)*f(x)$ 为 $\Delta u=f(x),\ x\in\mathbb{R}^n$ 的广义解

2.Green公式的应用：

令 $\boxed{V=V(x-y)=V(y-x):=U(x-y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ln|x-y|, & n=2\\ -\dfrac{|x-y|^{2-n}}{n(n-2)\omega_n}, & n\geq 3\end{cases}}$

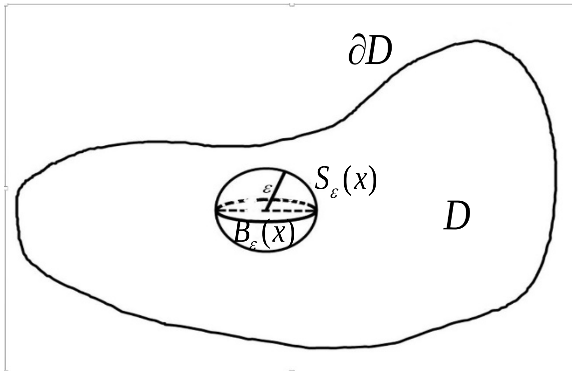
显然 $V(x-y)$ 仅在 $x=y$ 处有奇性且满足：

$$\boxed{\Delta V=\Delta_x V=\Delta_y V=\delta(x-y),\ x,y\in\mathbb{R}^n}$$ (由对称性)

令 $B_a(x), S_a(x)$ 分别为半径 a 球心在 x 点的球和球面，

则对 $\forall u(x)\in C^2(\overline{D})$ 和充分小 $\varepsilon>0$ 成立Green第二公式：

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{\partial D-S_\varepsilon(x)}[u(y)\frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu}-V(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}]dS(y)\\ =&\int_{D-B_\varepsilon(x)}[u(y)\Delta V(y-x)-V(y-x)\Delta u(y)]dy\end{aligned}}$$



3. 对左端做估计：

首先，在 $S_\varepsilon(x)$ 上 $\left|\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}\right|$ 有界，球面积 $|S_\varepsilon(x)|=n\omega_n\varepsilon^{n-1}=C\varepsilon^{n-1}$，

这里和下文中 C 为不依赖于 ε 的各种常数，从而

$$\left|\int_{S_\varepsilon(x)} V(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}dS(y)\right| \le C\varepsilon^{n-1}\max_{S_\varepsilon(0)}|V| = \begin{cases} C\varepsilon|\ln\varepsilon|, & \mathrm{n}=2 \\ C\varepsilon^{n-1}\varepsilon^{2-n}, & \mathrm{n}\ge 3 \end{cases}$$

$$\to 0 \ (\varepsilon \to 0)$$

其次，在 $S_\varepsilon(x)$ 上

$$\frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu} = \nabla V(y-x)\cdot\vec{\nu} = \nabla_y \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln|y-x|, n=2 \\ -\frac{|y-x|^{2-n}}{n(n-2)\omega_n}, \mathrm{n}\ge 3 \end{cases} \cdot \frac{y-x}{|y-x|}$$

$$= \frac{1}{n\omega_n}\frac{y-x}{|y-x|^n}\cdot\frac{y-x}{|y-x|} = \frac{1}{n\omega_n|y-x|^{n-1}} \quad (n\ge 2)$$

$$= \frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}} = \frac{1}{|S_\varepsilon(x)|}$$

最后，由上式及变量变换有

$$-\int_{S_\varepsilon(x)} u(y)\frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu}dS(y)$$

$$=-\frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{S_1(0)} u(x+\varepsilon z)\varepsilon^{n-1}d\tilde{S}(z)\ (\because |S_1(0)|=n\omega_n, dS=\varepsilon^{n-1}d\tilde{S})$$

$$\to -u(x)\ (\varepsilon\to 0)$$

4. 取极限得结论：

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{\partial D-S_\varepsilon(x)}[u(y)\frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu}-V(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}]dS(y)\\ =&\int_{D-B_\varepsilon(x)}[u(y)\Delta V(y-x)-V(y-x)\Delta u(y)]dy\end{aligned}}$$

利用上述估计以及

$$\Delta V(y-x)=0 \text{ in } D-B_\varepsilon(x),$$

在Green第二公式中取极限，有

$$\boxed{u(x)=\int_D V(y-x)\Delta u(y)dy+\int_{\partial D}[u(y)\frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu}-V(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}]dS(y)}$$

(基本积分公式)

$$u(x)=\int_D V(y-x)\Delta u(y)dy+\int_{\partial D}[u(y)\frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu}-V(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}]dS(y)$$

三、Green函数的引入：

观察基本积分公式，可以分三种情形讨论：

1.第I边值问题： $\alpha=1,\beta=0,\ (\mathrm{D})\begin{cases}\Delta u=f(x),\ x\in D\\ u|_{\partial D}=\varphi(x)\end{cases}$

引入修正函数 $H(y,x)$ 满足 $\Delta_y H(y,x)=0,\ x,y\in D;H\big|_{\partial D}=-V(y,x),$

则 $\int_D[H(y-x)\Delta u(y)-u(y)\Delta H(y-x)]dy=\int_{\partial D}[H(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}-u(y)\frac{\partial H(y-x)}{\partial \nu}]dS(y)\Rightarrow$

$$\int_{\partial D}-V(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}dS(y)=\int_{\partial D}H(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}dS(y)=\int_D H(y-x)f(y)dy+\int_{\partial D}u(y)\frac{\partial H(y-x)}{\partial \nu}dS(y).$$

称满足 $\boxed{\begin{cases}\Delta_y G(x,y)=\delta(x-y),\ x,y\in D\\ G|_{\partial D}=0\end{cases}}$ 的解 $G(x,y)=V(y-x)+H(y,x)$

为Poisson方程第一边值问题的**Green函数**,边值问题**(D)**的解为

$$\boxed{u(x)=\int_D G(x,y)f(y)dy+\int_{\partial D}\varphi(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}dS(y)}$$ **(Poisson公式)**

$$u(x)=\int_D V(y-x)\Delta u(y)dy$$
$$+\int_{\partial D}[u(y)\frac{\partial V(y-x)}{\partial \nu}-V(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}]dS(y)$$

从物理意义看，**Green**函数是边界接地条件下 y 点电荷 $-\varepsilon$ 在 x 点产生的电场，具有倒易性

2.第II边值问题： $\alpha=0,\beta=1,(\mathrm{N})\begin{cases}\Delta u=f(x),\ x\in D\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial D}=\varphi(x)\end{cases}$ **(解不唯一！)**

如果仍像第一种情形一样定义 $(\mathrm{G})\begin{cases}\Delta_y G(x,y)=\delta(x-y),\ x,y\in D\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial \nu}\right|_{\partial D}=0\end{cases}$

的解为**Poisson**方程第**II**边值问题的**Green**函数，似乎可得问题**(N)**的解为 $u(x)=\int_D G(x,y)f(y)dy-\int_{\partial D}\varphi(y)G(x,y)dS(y).$

然而，定解问题**(G)**的解**不存在!** 实际上从物理角度看内部放热而边界绝热，温度分布不可能稳定.

如果内部增加均匀分布的冷源，则可抵消放热，因此重新定义场位方程第二边值问题的**Green函数**为

$$\boxed{\begin{cases}\Delta_y G(x,y)=\delta(x-y)-\dfrac{1}{|D|},\ x,y\in D\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial \nu}\right|_{\partial D}=0\end{cases}}$$

$$(0=\int_{\partial D}\frac{\partial G}{\partial \nu}dS=\int_D \Delta G dy=\int_D(\delta-\frac{1}{|D|})dy)$$

的解，此时由Green第一公式边值问题(N)有解的必要条件为

$$\int_{\partial D}\varphi(y)dS(y)=\int_{\partial D}1\cdot\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}dS(y)=\int_D 1\cdot\Delta u(y)dy+\int_D \nabla 1\cdot\nabla u(y)dy=\int_D f(y)dy.$$

而解为 $\boxed{u(x)=\int_D G(x,y)f(y)dy-\int_{\partial D}\varphi(y)G(x,y)dS(y)+C}$

3.第III边值问题: $\alpha\neq 0,\beta\neq 0,(\mathrm{R})\begin{cases}\Delta u=f(x),\ x\in D\\ \left.(\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial \nu})\right|_{\partial D}=\varphi(x)\end{cases}$

与第一种情形类似，可以定义Poisson方程第III边值问题的Green函数为

$$\begin{cases} \Delta G(x,y)=\delta(x-y),\ x,y\in D \\ (\alpha G+\beta\dfrac{\partial G}{\partial \nu})\Big|_{\partial D}=0 \end{cases}$$

的解，则在边界上

$$\varphi G=(\alpha Gu+\beta G\frac{\partial u}{\partial \nu})-(\alpha Gu+\beta u\frac{\partial G}{\partial \nu})=\beta(G\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial G}{\partial \nu})$$

$$\Rightarrow (G\frac{\partial u}{\partial \nu}-u\frac{\partial G}{\partial \nu})=\frac{\varphi G}{\beta}$$

此时边值问题**(R)**的解为

$$\begin{aligned} u(x)&=\int_D G(x,y)f(y)dy-\frac{1}{\beta}\int_{\partial D}\varphi(y)G(x,y)dS(y) \\ &=\int_D G(x,y)f(y)dy+\frac{1}{\alpha}\int_{\partial D}\varphi(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu}dS(y) \end{aligned}$$

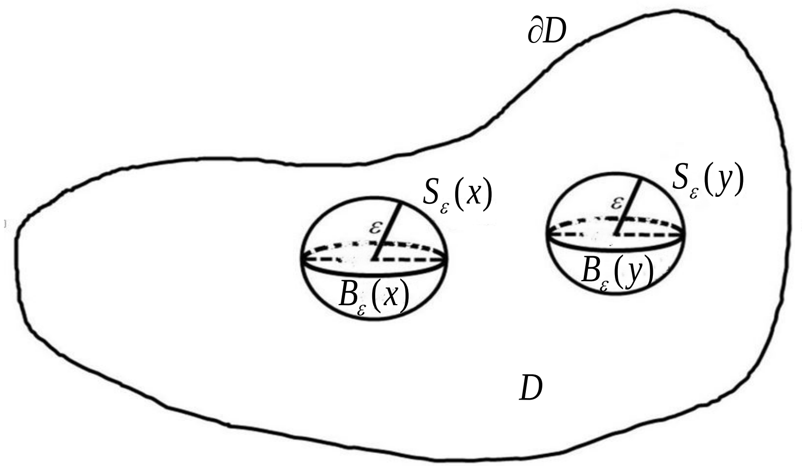
四、Green函数的对称性(倒易性)：

对称性(倒易性)： $\boxed{G(x,y)=G(y,x).}$

证：任意固定 $x,y\in D, x\neq y,$

则 $u(z)=G(z,y),\ v(z)=G(z,x)$

在 $D-B_\varepsilon(y)-B_\varepsilon(x)$ 上均无奇点，



由Green第二公式有

$$\int_{\partial D-S_\varepsilon(y)-S_\varepsilon(x)}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)dS(z)=\int_{D-B_\varepsilon(y)-B_\varepsilon(x)}(u\Delta v-v\Delta u)dz=0$$

对三种边界条件均有 $\displaystyle\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)dS(z)=0$

$$\Rightarrow \int_{S_\varepsilon(y)}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)dS(z)+\int_{S_\varepsilon(x)}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu}-v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)dS(z)=0$$

令 $\varepsilon\to 0 \Rightarrow 0-v(y)+u(x)-0=0$ $\Rightarrow$ $G(x,y)=u(x)=v(y)=G(y,x).$

五、讨论：

重点考察第I边值问题：

$$\begin{cases} \Delta u = f(x),\ x \in D \subset \mathbb{R}^n, n \ge 2 \\ u\big|_{\partial D} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\boxed{u(x) = \int_D G(x,y) f(y) dy + \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu} dS(y)}$$

(Poisson公式)

$$\boxed{\begin{cases} \Delta_y G(x,y) = \delta(x-y),\ x,y \in D \\ G\big|_{\partial D} = 0 \end{cases}}$$

(Green函数)

1.解的表示式有没有实际用途？Green函数容不容易找出来？

2.整个推导建立在解是二阶连续可导的基础上的，如果给定的函数不满足连续性，那么解的表达式还有没有意义？

3.这种方法能推广到其它方程吗？比如Δ→线性偏微分算子？