Lec8 Note of Abstract Algebra

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 7 日

Part II

群在集合上的作用

1 对称群

我们回忆，对集合 X，$S_X := \{f : X \to X \mid f\text{双射}\}$，则 $(S_X, \circ)$ 构成群，称为集合 X 的**对称群**。

若 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$，则 $S_X =: S_n$ 称为 n **阶对称群**。显然 $|S_n| = n!$。

若 $\sigma \in S_n$，我们采用表示方法：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

定义 1.1. $a_1, a_2, \cdots, a_k \in S_n$, $1 \le k \le n$ 两两不同。若

$$\sigma(a_i) = a_{i+1},\ i = 1, 2, \cdots, k-1,$$
$$\sigma(a_k) = a_1,$$
$$\sigma(x) = x,\ \forall\, x \notin \{a_1, \cdots, a_k\},$$

则称 σ 为一个 $k-$ **轮换 (Cycle)**。σ 记为 $(a_1a_2\cdots a_k)$。

$2-$ 轮换称为**对换 (Transposition)**。

评论. $1-$ 轮换为恒同映射。

$(a_1\cdots a_k)(a_k\cdots a_1) = 1$, $(a_1\cdots a_k) = (a_2\cdots a_ka_1) = \cdots = (a_ka_1\cdots a_{k-1})$。

所有 $k-$ 轮换的个数是 $C_n^kA_{k-1}^{k-1}$。

定义 1.2. $\{a_1, \cdots, a_k\} \cap \{b_1, \cdots, b_r\} = \varnothing$，则称轮换 $(a_1\cdots a_k), (b_1\cdots b_r)$ **不相交**。

定理 1.1. *(1)* 两个不相交的轮换可交换。

(2) 任一置换可写成若干个互不相交的轮换乘积，且在相差次序下唯一。

例 1.1.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&1&6&4&7&5\end{pmatrix}$$
$$=(123)(4675).$$

证明. (1) 设 $\sigma_1=(a_1\cdots a_k)$, $\sigma_2=(b_1\cdots b_r)$，则

$$\sigma_1\sigma_2(x)=\begin{cases}x, & x\neq a_i,b_j,\\ a_{i+1}, & x=a_i,\\ b_{j+1}, & x=b_j,\end{cases}$$

$$\sigma_2\sigma_1(x)=\begin{cases}x, & x\neq a_i,b_j,\\ a_{i+1}, & x=a_i,\\ b_{j+1}, & x=b_j.\end{cases}$$

故 $\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$。

(2) 在 S_n 上定义 $\sim$:

$$i\sim j:\Leftrightarrow i=\sigma^k(j).$$

若 $\{a_1,\cdots,a_k\}$ 为等价类,则轮换可表为 $(a_1\sigma(a_1)\sigma^2(a_1)\cdots\sigma^{k-1}(a_1))$,且 $a_1,\sigma(a_1),\cdots,\sigma^{k-1}(a_1)$ 两两不同。

□

例 1.2.

$$\begin{aligned}&(123456)(1234567)\\=&(135)(2467),\\&(12345)(3216)\\=&(1645).\end{aligned}$$

例 1.3.

$$\sigma(a_1\cdots a_k)\sigma^{-1}(y)=\begin{cases}y & y\notin\{\sigma(a_1),\cdots,\sigma(a_k)\},\\ \sigma(a_{i+1}), & y=\sigma(a_i).\end{cases}$$

定义 1.3. 将 σ 写成互不相交的轮换乘积，其中 $k-$ 轮换出现的次数为 λ_k，则称 σ 的**型**为

$$1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots k^{\lambda_k}.$$

若 σ 的型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$，则必然有

$$1\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n.$$

命题 1.2. σ 与 σ' 同型 $\Leftrightarrow$ σ 与 σ' 共轭。

例 1.4. 正规子群在共轭下封闭 $\Rightarrow$ 正规子群为共轭类的并。