菲涅耳圆孔衍射和圆屏衍射

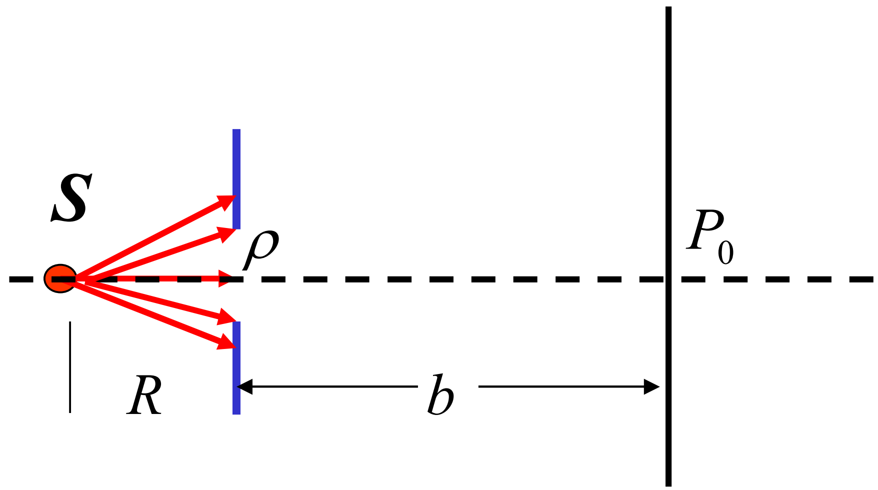
半波带法

矢量图解法

菲涅耳波带片

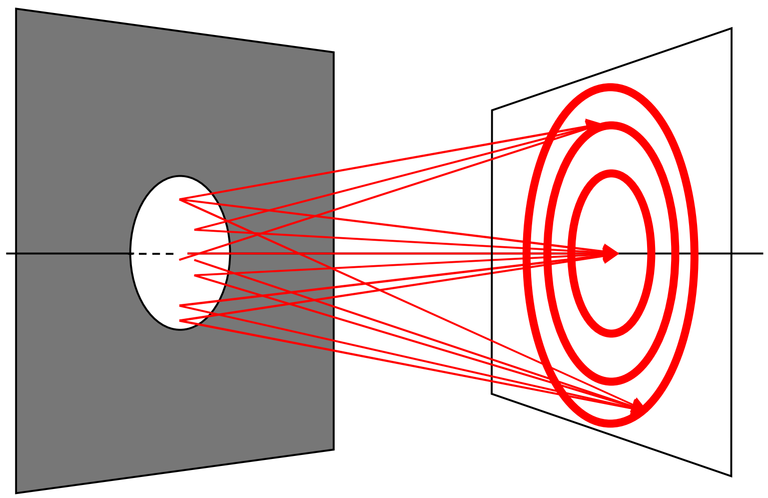
实验装置数据

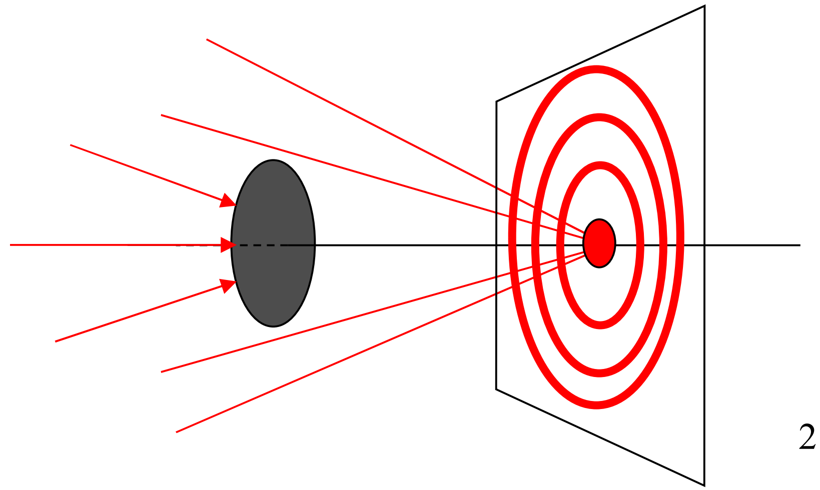
$$\rho \sim mm, R \sim m, b \sim 3-5m$$



衍射现象

- 圆孔衍射：接收屏上可见同心圆环，接收屏沿轴向移动圆环中心明暗交替变化。孔半径改变也会出现明暗交替变化。
- 圆屏衍射：接收屏上可见同心圆环，接收屏沿轴向移动，圆环中心永远是亮点。



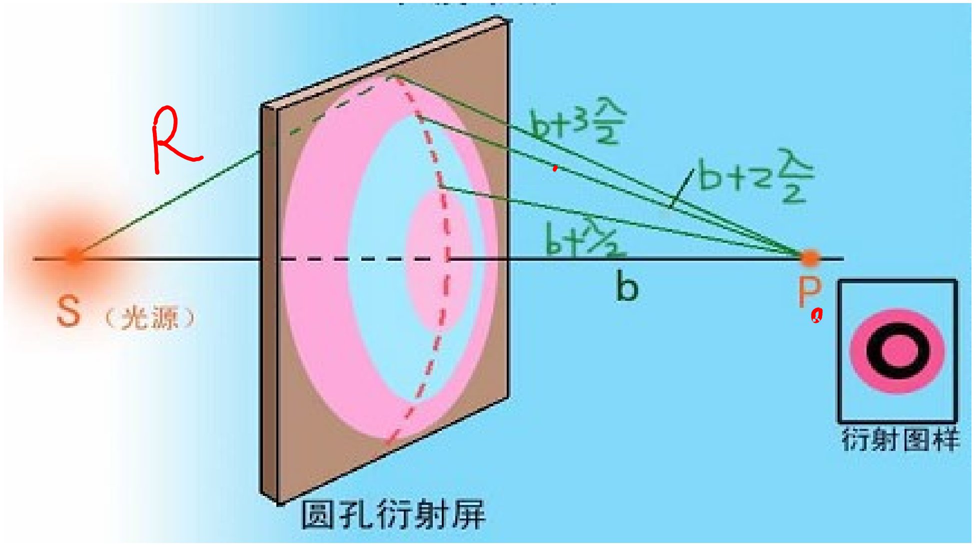


1、半波带法

$$E(p)=K\iint_{\Sigma}E(Q)F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}d\Sigma$$

半波带到轴上场点p_0的距离为

$$r_n=b+n\frac{\lambda}{2}$$



以轴上场点p_0为中心,分别以$b+\dfrac{\lambda}{2},b+\lambda,b+3\dfrac{\lambda}{2}\cdots$为半径作球面

将波前分割为一系列环形带　到P_0点的光程逐个相差半个波长

半波带

$$\Delta E_1(p_0) = A_1(p_0)e^{i\varphi_1}$$

$$\Delta E_2(p_0) = A_2(p_0)e^{i(\varphi_1+\pi)}$$

$$\Delta E_3(p_0) = A_3(p_0)e^{i(\varphi_1+2\pi)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n \propto f(\theta_n)\frac{\Delta\Sigma_n}{r_n}$$

$$\frac{\Delta\Sigma_n}{r_n} \qquad ??$$

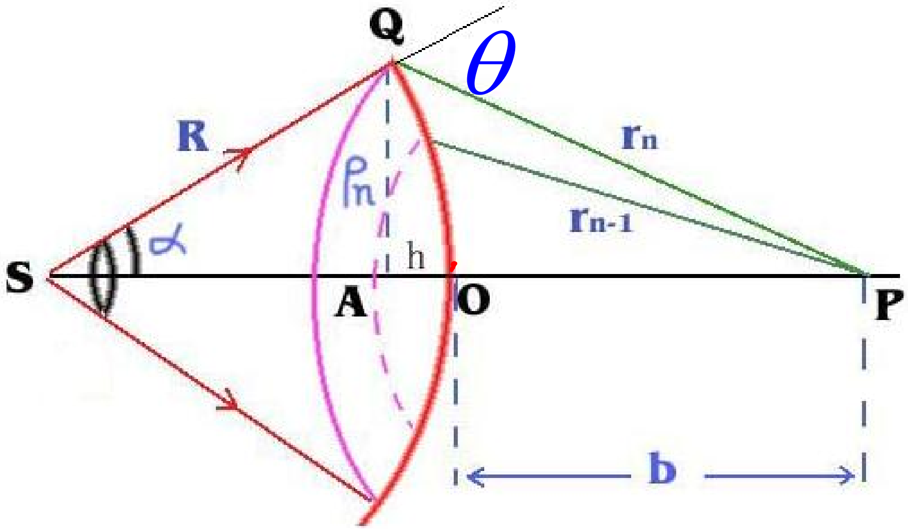
$$f(\theta) \qquad ??$$

$\Rightarrow$

轴上p_0点的复振幅

$$|E(p_0)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \Delta E_k(p_0)\right|$$

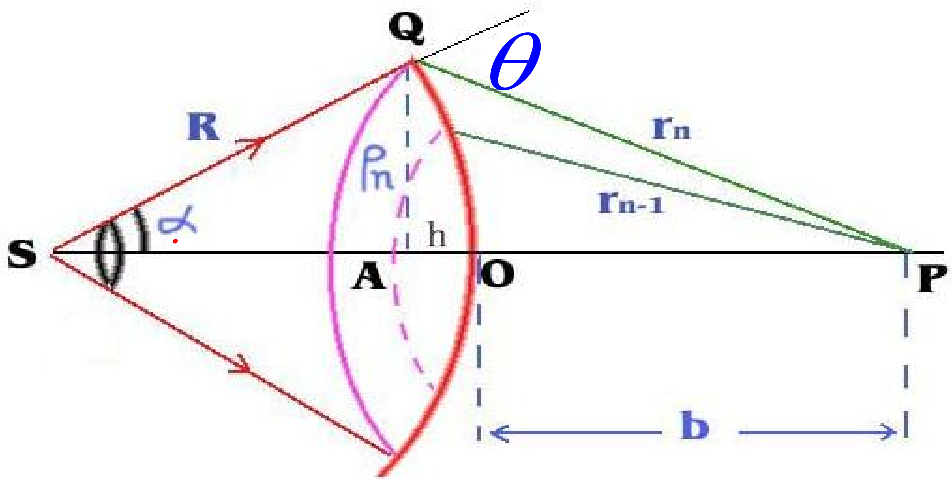
$$= A_1(p_0) - A_2(p_0) + A_3(p_0) - \cdots + (-1)^{n+1}A_n(p_0)$$



$$\frac{\Delta\Sigma_n}{r_n} \quad ??$$

$$r_n = b + n\frac{\lambda}{2}$$

球冠的面积：$\Sigma = 2\pi Rh$



$$\boxed{\Sigma = 2\pi R(R - R\cos\alpha)} \Rightarrow \Delta\Sigma = 2\pi R^2 \sin\alpha d\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{R^2 + (R+b)^2 - r_n^2}{2R(R+b)} \xrightarrow{\text{对}r\text{微分}} \sin\alpha d\alpha = \frac{r_n dr_n}{R(R+b)}$$

$$\frac{\Delta\Sigma_n}{r_n} = \frac{2\pi R dr_n}{R+b} \overset{dr_n=\lambda/2}{=} \frac{\pi R\lambda}{R+b} \quad \text{与}n\text{无关}$$

对每一个半波带都是一样的

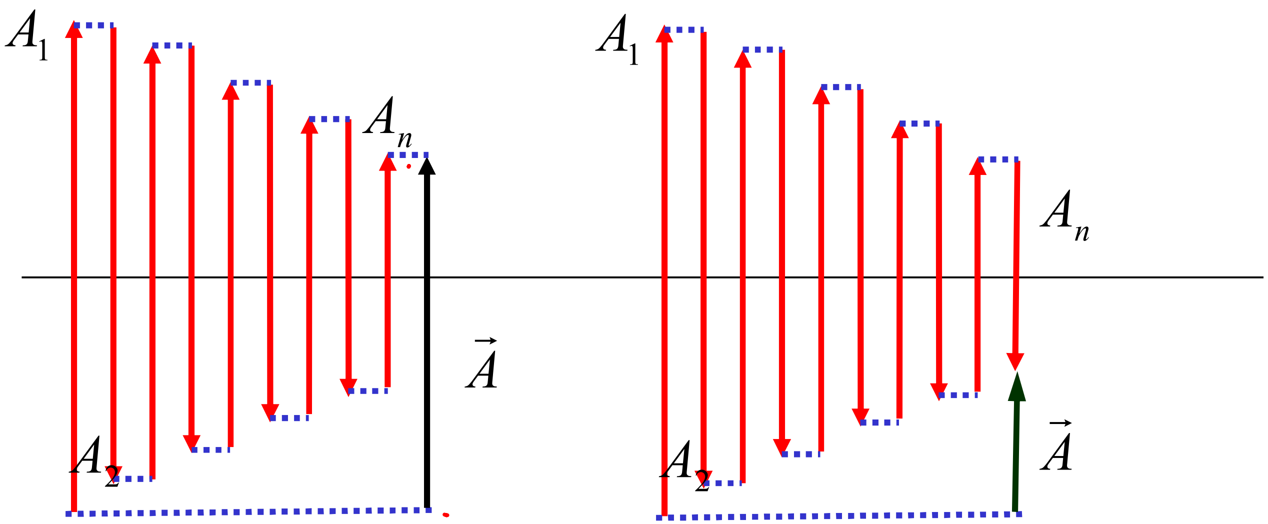
$f(\theta_n)$随$n\uparrow$缓慢地变化

举例：$R \sim 1m, b \sim 1m, \lambda \sim 600nm, n = 10^4$

$$n\frac{\lambda}{2} = 3mm \ll R, b$$

$$\cos\theta_n = -\frac{R^2 + (b + n\frac{\lambda}{2})^2 - (R+b)^2}{2R(b + n\frac{\lambda}{2})} \approx 1 - 0.003$$

$$\cos\theta_1 = 1, f(\theta_1) = 1 \qquad f(\theta_n) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta_n) = 1 - 0.0015$$



差分相消：$A_1 - A_2 = \frac{1}{2}A_1 + (\frac{1}{2}A_1 - A_2 + \frac{1}{2}A_3) - \frac{1}{2}A_3$

$$A_1 - A_2 + A_3 = \frac{1}{2}A_1 + (\frac{1}{2}A_1 - A_2 + \frac{1}{2}A_3) + \frac{1}{2}A_3$$

合成振幅为

$$\boxed{A(p_0) = \frac{1}{2}[A_1 + (-1)^{n+1}A_n]}$$

由此可定性分析

圆孔衍射

当圆孔中包含奇数个半波带时，中心是亮点；
当圆孔中包含偶数个半波带时，中心是暗点；

自由传播情形

$$f(\theta_n) \to 0 \Rightarrow A_n \to 0 \qquad \boxed{A(p_0) = \frac{1}{2}A_1(p_0)}$$

圆屏衍射

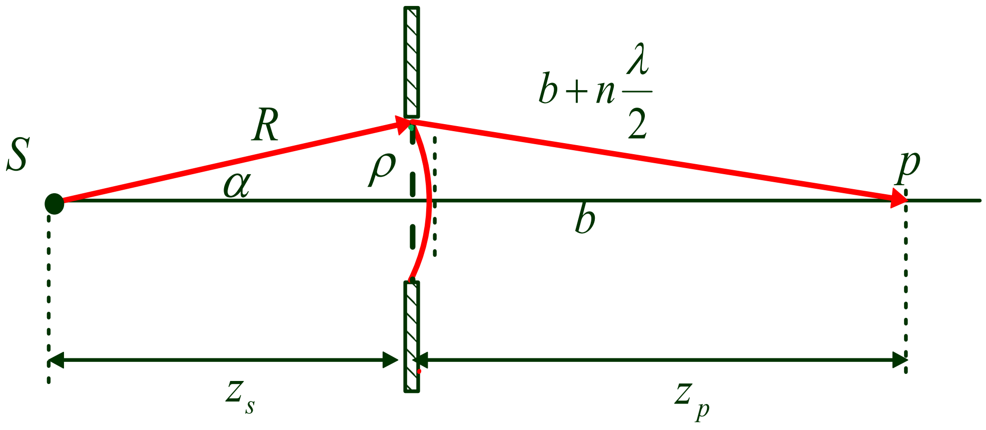
设圆屏遮住了前K个半波带

$$A(p_0) = A_{k+1}(p_0) - A_{k+2}(p_0) + \cdots + (-1)^{n+1}A_n(p_0)$$
$$= \frac{1}{2}A_{k+1}(p_0)$$

无论K是奇是偶，中心总是亮的（泊松亮点）

半波带数目n

圆孔半径为 ρ



考虑$n\lambda, \rho, h << R, b$;忽略$(n\lambda)^2, h^2$

$$\rho^2 = r_n^2 - (b+h)^2; r_n = b + n\lambda/2 \quad \Rightarrow \rho^2 \approx n\lambda b - 2bh$$

$$\rho^2 = R^2 - (R-h)^2 = r_n^2 - (b+h)^2 \Rightarrow h = \frac{nb\lambda}{2(R+b)}$$

$$n = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{b}\right)\frac{\rho^2}{\lambda} = \left(\frac{1}{z_s} + \frac{1}{z_p}\right)\frac{\rho^2}{\lambda}$$

2、矢量图解法

振动矢量合成

⇧

圆孔内包含的不是整数个半波带，半波带法讨论有困难

每个半波带需要进一步细分→分割为**m**个更窄的环带

第一个半波带

$$\text{以}p_0\text{为中心,分别以}b+\frac{\lambda}{2m},b+\frac{2\lambda}{2m},b+\frac{3\lambda}{2m}\cdots\text{为半径作球面}$$

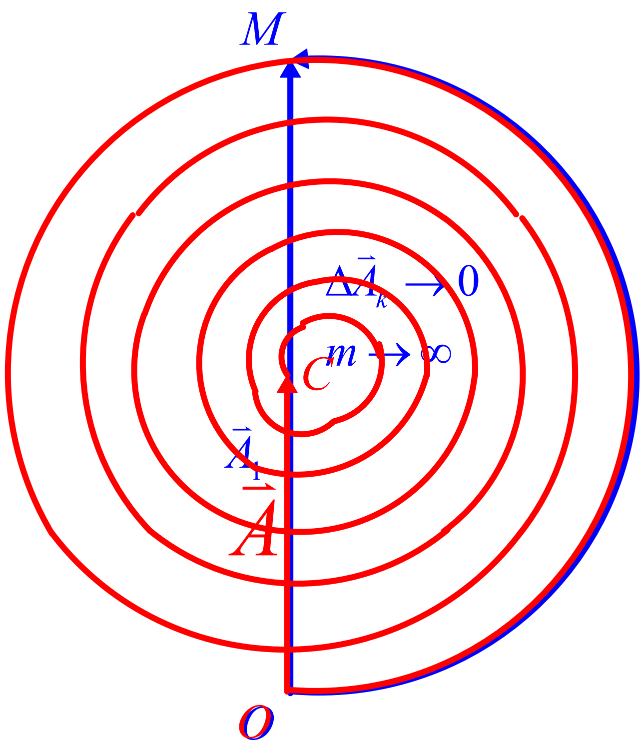
振幅贡献?　　　**振动相位差?**

考虑倾斜因子

$$\theta_n \uparrow \Rightarrow f(\theta_n) \downarrow$$

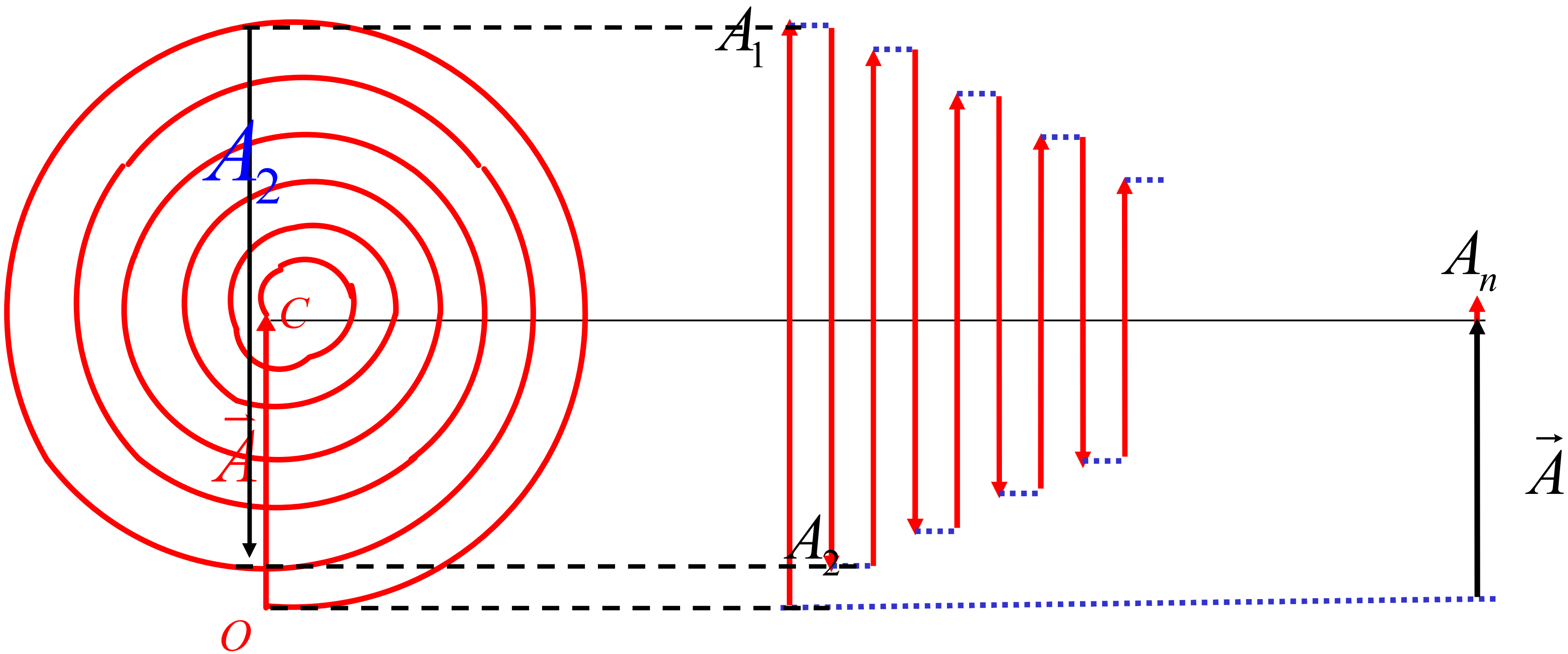
在自由传播情况：

这螺旋线一直旋绕到半径趋于0为止，最后到达圆心C



比较可得 $A = A_1/2$

自由传播时整个波前产生的振幅是*第一个半波带*的效果之半

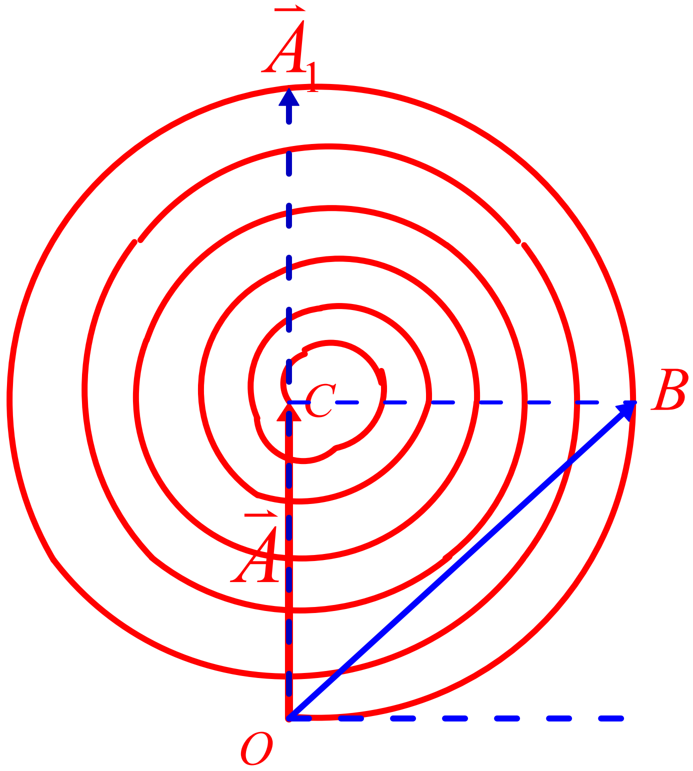


$$\boxed{A(p_0) = \frac{1}{2}[A_1 + (-1)^{n+1} A_n]}$$

例 对于轴上一点P_0，圆孔恰好包含了1/2个半波片，求轴上P_0点的衍射强度

边缘与中心光程差为$\lambda/4$

相位差为$\pi/2$



振动曲线应取OB一段

$$A_{OB}=\sqrt{2}A$$

光强为自由传播时的两倍

利用该振动曲线图可以较方便的求出任何半径的圆孔和圆屏在轴上产生的振幅和光强

3、菲涅耳波带片

$$E(p_0) = A_1(p_0) - A_2(p_0) + A_3(p_0) - \cdots + (-1)^{n+1} A_n(p_0)$$

?? 只让奇（偶）序数半波带透过

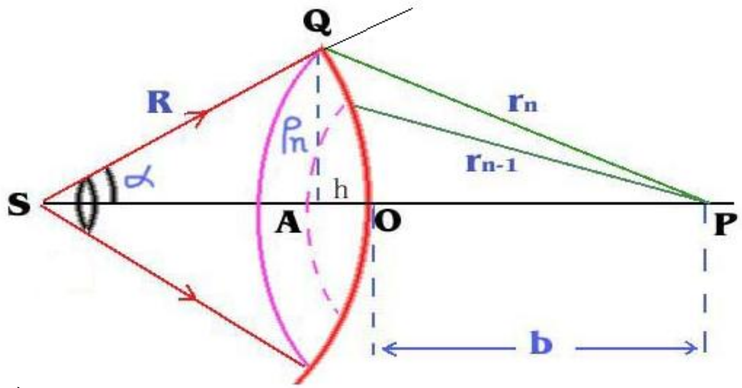
一块波带片的孔径内20个半波带，透奇挡偶，轴上场点的强度是自由传播时的多少倍 ？？

$$A' = A_1 + A_3 + A_5 + \cdots + A_{19} \approx 10 A_1 = 20 A$$

自由传播时的振幅是第一个半波带振幅的一半

点光源S发出的光经过菲涅耳波带片可在适当的位置P形成很强的亮点

半波带的半径ρ_n



$$\rho_n = \sqrt{\frac{Rb}{R+b} n\lambda} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{Rb\lambda}{R+b}}$$ 第一个半波带的半径

$$\rho_n = \sqrt{\frac{Rb}{R+b} n\lambda} \Rightarrow \frac{n\lambda}{\rho_n^{\ 2}} = \frac{R+b}{Rb}$$

令$f = \dfrac{\rho_n^{\ 2}}{n\lambda} \xrightarrow{\rho_n = \sqrt{n}\rho_1} \dfrac{\rho_1^{\ 2}}{\lambda}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}$

与透镜的成像公式的形式相同，R相当于物距，b相当于像距，f主焦距（是一个与n无关的量，完全可以用ρ1表示）

如平行光照明圆孔 $R \to \infty, b = f$

波带片制作：

1、确定工作波长λ及所需的主焦距f

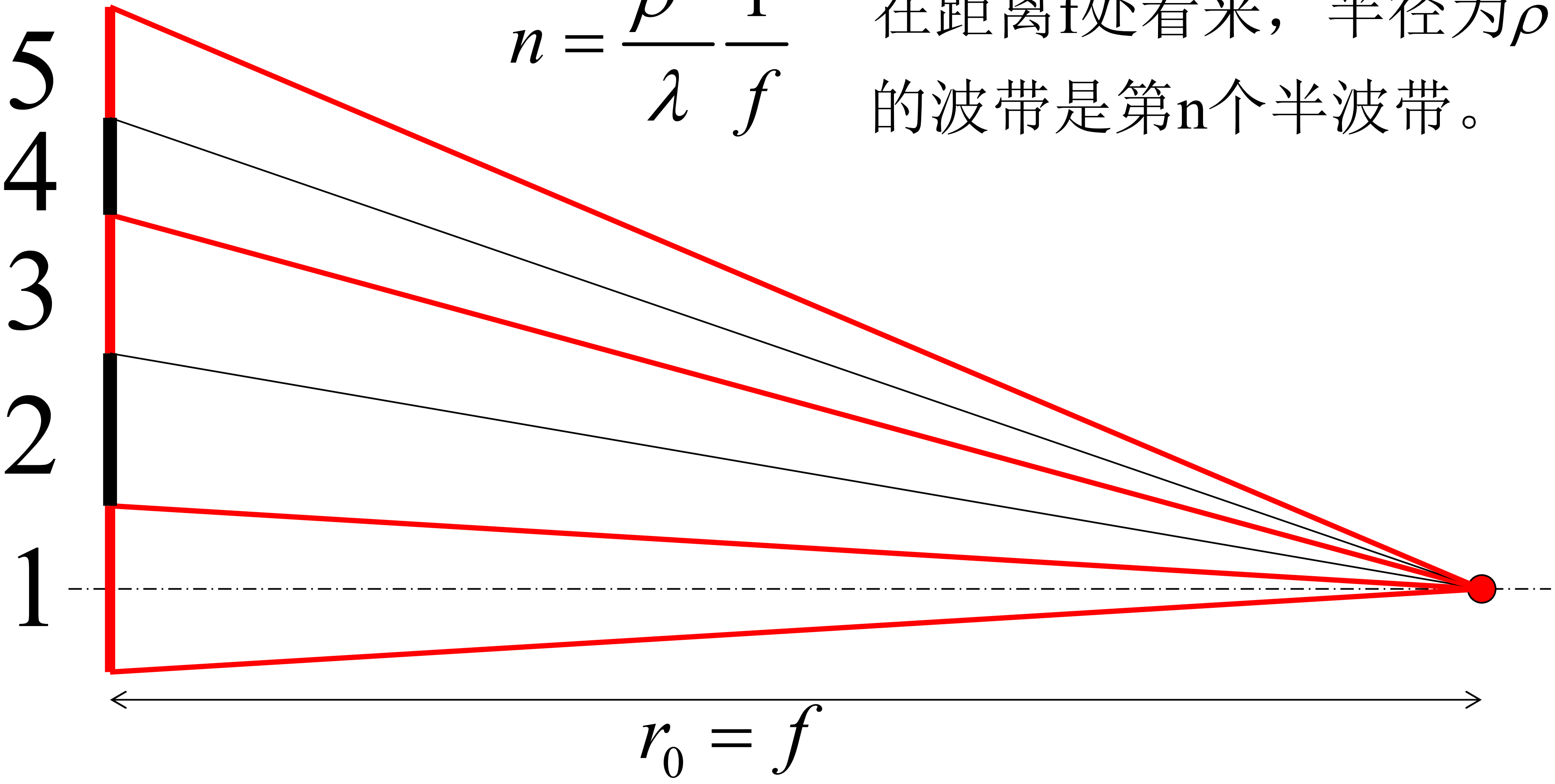
$$f = \frac{\rho_1^2}{\lambda} \qquad \rho_n = \sqrt{\frac{Rb}{R+b}n\lambda} = \sqrt{n}\rho_1 = \sqrt{n\lambda f}$$

2、算出相应的半径，并将各个环带相间涂黑

3、缩微照相制版方法；干涉记录方法

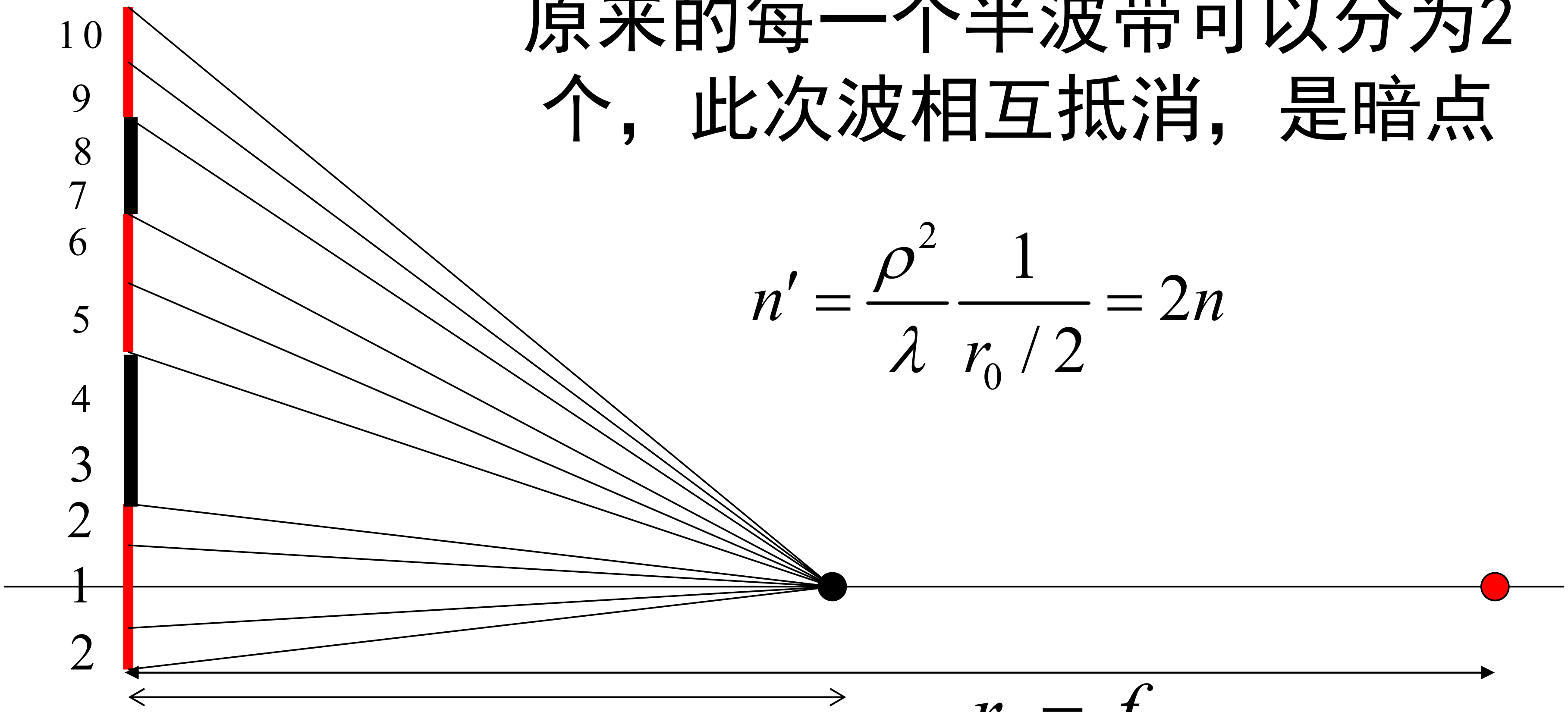
$$n = \frac{\rho^2}{\lambda}\frac{1}{f}$$

在距离f处看来，半径为ρ的波带是第n个半波带。



原来的每一个半波带可以分为2个，此次波相互抵消，是暗点

$$n' = \frac{\rho^2}{\lambda} \frac{1}{r_0 / 2} = 2n$$



$$r_0 = f$$

$$r_0' = \frac{f}{2}$$

波带片与透镜的重要区别

- 波带片有多个焦点（亮点）

$f(\text{主焦点}), f/3, f/5, f/7\cdots\cdots$ 次焦距都小于主焦距

- 波带片的成像原理与普通透镜不同

普通透镜，从物点到像点是等光程的，这种成像过程也可看作是一种各光束光程相等的相长干涉过程

波带片，由物点通过不同透光环带到达像点的光程各不相同，但其差值均为波长的整数倍，形成亮点，是一种各光束光程不相等的相长干涉过程