§0.1 曲面的第二基本形式

曲面$r(u,v)$有坐标切向量r_u, r_v，因此有单位法向量

$$N(u,v) := \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|}.$$

它是向量值函数(值域属于单位球面)

$$N : D \to T_{r(u,v)}\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3.$$

定义0.1. *(第二基本形式) 曲面的第二基本形式定义为*

$$II := -\langle dr, dN\rangle.$$

这里dr, dN分别为映射$r, N : D \to \mathbb{R}^3$的微分。负号是因为闭曲面时通常约定$N$为单位内法向。与$I = \langle dr, dr\rangle$类似，$-\langle dr, dN\rangle$中既包含$\mathbb{R}^3$的内积，还隐含了$D$上一次微分形式的张量积。其等价形式为

$$II_p(X,Y) = -\langle dr_p(X), dN_p(Y)\rangle, \quad p = (a,b) \in D; \quad X, Y \in T_pD.$$

回顾映射的微分：

$$dr_p(\frac{\partial}{\partial u}) = \frac{d}{dt}|_{t=0} r(a+t,b) = r_u(a,b),$$
$$dN_p(\frac{\partial}{\partial u}) = \frac{d}{dt}|_{t=0} N(a+t,b) = N_u(a,b).$$

Proposition 0.2. *II_p为T_pD上的对称双线性函数。*

证明：映射的微分dr_p, dN_p都是T_pD上的线性映射，因此II为T_pD上的双线性函数。接下来直接验证II对称，即

$$II_p(X,Y) = II_p(Y,X), \quad X, Y \in T_pD.$$

首先有

$$\begin{aligned} II_p(X,Y) &= -\langle dr_p(X), dN_p(Y)\rangle = -\langle X(r), Y(N)\rangle \\ &= -Y\langle X(r), N\rangle + \langle Y(X(r)), N\rangle \\ &= \langle Y(X(r)), N\rangle, \end{aligned}$$

交换X, Y可得

$$II_p(Y,X) = \langle X(Y(r)), N\rangle.$$

因此

$$II_p(X,Y)-II_p(Y,X)=\langle Y(X(r))-X(Y(r)),N\rangle.$$

希望

$$Y(X(r))-X(Y(r))\in T_PS?$$

分别记$X=X^1\frac{\partial}{\partial u}+X^2\frac{\partial}{\partial v}=X^i\partial_i,\quad Y=Y^1\frac{\partial}{\partial u}+Y^2\frac{\partial}{\partial v}=Y^j\partial_j$, 计算

$$\begin{aligned} X(Y(r))-Y(X(r)) &= X^i\partial_i(Y^jr_j)-Y^j\partial_j(X^ir_i)\\ &= X^iY^jr_{ji}+X^i\partial_i(Y^j)r_j-X^iY^jr_{ij}-Y^j\partial_j(X^i)r_i\\ &= X^i\partial_i(Y^j)r_j-Y^j\partial_j(X^i)r_i \end{aligned}$$

从而

$$II_p(X,Y)-II_p(Y,X)=\langle Y(X(r))-X(Y(r)),N\rangle=0.$$

□

由证明可知第二基本形式的另一等价定义

$$II(X,Y)=II(Y,X)=\langle X(Y(r)),N\rangle,\quad X,Y\in\mathbb{R}^2.$$

定义并计算

$$\begin{aligned} L: &= II(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u})=-\langle r_u,N_u\rangle=-\frac{\partial}{\partial u}\langle r_u,N\rangle+\langle r_{uu},N\rangle=\langle r_{uu},N\rangle,\\ M: &= II(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v})=-\langle r_u,N_v\rangle=\langle r_{uv},N\rangle\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\langle r_v,N\rangle-\langle r_v,N_u\rangle=-\langle r_v,N_u\rangle=II(\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial u}),\\ N: &= II(\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v})=-\langle r_v,N_v\rangle=\langle r_{vv},N\rangle. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} II &= -\langle dr,dN\rangle=-\langle r_udu+r_vdv,N_udu+N_vdv\rangle\\ &= Ldudu+2Mdu\cdot dv+Ndvdv\\ &= (du\quad dv)\begin{pmatrix} L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix} du\\ dv\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

即第二基本形式表示为定义在D上、取值于对称二次微分形式的向量值函数。此对称双线性函数(二次型)在基$(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v})$ 之下的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} II(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial u}) & II(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v})\\ II(\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial u}) & II(\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial v})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L & M\\ M & N\end{pmatrix},$$

$$II(X,Y)=(X^1 \quad X^2)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y^1 \\ Y^2 \end{pmatrix}.$$

第二基本形式的几何意义：考虑曲面S上一条曲线

$$r(t)=r\circ\gamma(t)=r(u(t),v(t)),\quad r(t=0)=r(p)=P,\quad r'(0)=dr_p(X)=X^1r_u+X^2r_v.$$

则

$$\begin{aligned} II_p(X,X) &= -\langle dr(\gamma'(t)),dN(\gamma'(t))\rangle|_{t=0}=-\langle r'(t),\frac{d}{dt}N(\gamma(t))\rangle|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt}|_{t=0}\langle r'(t),N(\gamma(t))\rangle+\langle r''(0),N\rangle \\ &= \langle r''(0),N\rangle. \end{aligned}$$

$\langle r''(0),N\rangle$即加速度$r''(0)$在N方向的分量。

第二基本形式在曲面重新参数化、以及$\mathbb{R}^3$合同变换下的变化。

Proposition 0.3. 当曲面S的两个参数化$r=r(u,v),r=r(\bar{u},\bar{v})$为同向参数变换时，$II(u,v)=II(\bar{u},\bar{v})$；当曲面$S$的两个参数化$r=r(u,v),r=r(\bar{u},\bar{v})$为反向参数变换时，$II(u,v)=-II(\bar{u},\bar{v})$。

证明：由

$$r_{\bar{u}}\wedge r_{\bar{v}}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}r_u\wedge r_v,$$

当$(u,v)=\sigma(\bar{u},\bar{v})$为同向参数变换时，$N(\bar{u},\bar{v})=N(u,v)$。利用一阶微分的形式不变性，即

$$dr(\bar{u},\bar{v})=dr(u,v),\quad dN(\bar{u},\bar{v})=dN(u,v)$$

可得

$$II(\bar{u},\bar{v})=-\langle dr(\bar{u},\bar{v}),dN(\bar{u},\bar{v})=-\langle dr(u,v),dN(u,v)\rangle=II(u,v).$$

当$(u,v)=\sigma(\bar{u},\bar{v})$为反向参数变换时，

$$N(\bar{u},\bar{v})=-N(u,v),$$

$$II(\bar{u},\bar{v})=-\langle dr(\bar{u},\bar{v}),dN(\bar{u},\bar{v})=\langle dr(u,v),dN(u,v)\rangle=-II(u,v).$$

□

Proposition 0.4. 令$\widetilde{r}:=T\circ r(u,v)$。当$T$是刚体运动时，$\widetilde{II}(u,v)=II(u,v)$；当$T$是反向刚体运动时，$\widetilde{II}(u,v)=-II(u,v)$。

证明：记

$$\widetilde{r}(u,v)=Tr(u,v)=r(u,v)A+x_0,\quad A\in O(3),x_0\in\mathbb{R}^3.$$

则

$$\widetilde{r}_u=r_uA,\quad \widetilde{r}_v=r_vA,$$

$$\widetilde{r}_u\wedge\widetilde{r}_v=(r_uA)\wedge(r_vA)=\det(A)(r_u\wedge r_v)A.$$

因此

$$\widetilde{N}=\det(A)NA,$$

$$\widetilde{II}=-\langle d\widetilde{r},d\widetilde{N}\rangle=-\langle drA,\det(A)dNA\rangle=-\det(A)\langle dr,dN\rangle=\det(A)II.$$

□

例：$II\equiv 0$当且仅当曲面为平面或平面的一部分。

证明：设$S=r(u,v)$为平面，r_0为平面上一点，则法向量N为常值向量。因此

$$II=-\langle dr,dN\rangle\equiv 0.$$

反过来如果$II\equiv 0$，则由$L=M=N=0$可知

$$\langle r_u,N_u\rangle=\langle r_v,N_u\rangle=0,$$

又有$\langle N,N_u\rangle=0$，因此$N_u=0$。类似有$N_v=0$。从而N为单位常向量。固定曲面一点r_0，任意一点P通过$r(t)=r(\gamma(t))$与P_0相连，$r(0)=r_0,r(t_1)=P$，则有

$$\frac{d}{dt}\langle r(t)-r_0,N\rangle=\langle r'(t),N\rangle\equiv 0,$$

因此$\langle r(t)-r_0,N\rangle\equiv 0$，特别$\langle P-r_0,N\rangle=0$，即曲面为平面的一部分。 □

例：柱面$r(u,v)=(x(u),y(u),v)$，其中u为平面曲线的弧长参数。

$$r_u=(x'(u),y'(u),0),$$

$$r_v=(0,0,1),$$

$$N=(y'(u),-x'(u),0),$$

$$r_{uu}=(x''(u),y''(u),0),\quad r_{uv}=r_{vv}=0.$$

记平面曲线的曲率为

$$\kappa=\langle r_{uu},Jr_u\rangle=\langle r_{uu},-y'(u)e_1+x'(u)e_2\rangle,$$

则

$$L = \langle r_{uu}, N \rangle = -\kappa, \quad M = N = 0,$$

$$II = -\kappa dudu.$$

柱面和平面具有相同的第一基本形式($I = dudu + dvdv$)，但第二基本形式不同。第一基本形式反映曲面的内蕴几何，而第二基本形式对应曲面的外蕴几何。

例：求半径为R的球面在球坐标下的第二基本形式。

$$r(\theta, \varphi) = R(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

$$r_\theta = R(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$$

$$r_\varphi = R(-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0)d\varphi,$$

$$N = \frac{r}{R} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

$$r_{\theta\theta} = R(-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, -\cos\theta)$$

$$r_{\theta\varphi} = R(-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0) = r_{\varphi\theta}$$

$$r_{\varphi\varphi} = R(-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, 0)$$

因此

$$L = \langle r_{\theta\theta}, N \rangle = -a, \quad M = \langle r_{\theta\varphi}, N \rangle = 0, \quad N = \langle r_{\varphi\varphi}, N \rangle = -a\sin^2\theta,$$

$$II = -R(d\theta d\theta + \sin^2\theta d\varphi d\varphi).$$

回顾球面的第一基本形式为

$$I = R^2(d\theta d\theta + \sin^2\theta d\varphi d\varphi).$$

因此半径为R的球面在球坐标参数化下$II = -\frac{1}{R}I$。对任意参数化，

$$II = \pm\frac{1}{R}I.$$

II_p的二次型类型与曲面在$P = P(a, b)$附近的形状有关：II_p分为如下三类

(i) $LN - M^2 > 0$: II正定或负定；

(ii) $LN - M^2 < 0$: II不定；

(iii) $LN - M^2 = 0$: II退化。例如平面、柱面。

Proposition 0.5. *II_p正定或负定，则曲面在P附近是凸的(或凹的，与参数(u,v)定向选取有关)；II_p不定，则曲面在P附近是马鞍形的。*

证明：设$P=P(a,b)$。考虑曲面的高度函数

$$f(u,v):=\langle r(u,v)-r(a,b),N(a,b)\rangle.$$

则有

$$f_u(a,b)=f_v(a,b)=0,$$

即(a,b)为f的临界点。f在$p=(a,b)$处的Hessian矩阵为

$$\begin{pmatrix} f_{uu} & f_{uv} \\ f_{vu} & f_{vv} \end{pmatrix}(a,b)=\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}(a,b).$$

这也是第二基本形式的一个几何意义。当第二基本形式II在p点正定(负定)时，$f(a,b)=0$是局部最小值(局部最大值)，曲面在P附近是凸的(凹的)。当II在p点不定时，$f(a,b)=0$即不是局部最大值也不是局部最小值，在一个特征方向凸、另一个特征方向凹，即曲面在P附近是马鞍形的。 □

作业：14, 15, 16