- 用犯错误的概率大小来评价和比较同一假设检验问题的不同检验结果的优劣。

真实情况\ 判决	接受H_0	拒绝H_0
H_0	正确判决	第一类错误
H_1	第二类错误	正确判决

- **定义2.1** 如果$\vec{\theta} \in \Theta_0$，但是假设检验不正确地判定“拒绝$H_0$”，这类检验错误称为**第一类错误**（Type I Error）；另一方面，如果$\vec{\theta} \in \Theta_0^c$，但是假设检验不正确地判定“接受$H_0$”，检验就犯了**第二类错误**（Type II Error）。

注1　上述定义和表格可参考【0】5.1.3和【1】8.3.1小节。

注2　令R(Rejection)表示一个检验的拒绝域，则

$$\mathbb{P}_{\vec{\theta}}(\vec{X} \in R) = \begin{cases} \text{犯第一类错误的概率}, & \text{如果}\vec{\theta} \in \Theta_0 \\ 1 - \text{犯第二类错误的概率}, & \text{如果}\vec{\theta} \in \Theta_0^c \end{cases}$$

- **定义2.2** （【0】定义5.1.2，【1】定义8.3.1）一个拒绝域为R的假设检验的**功效函数**（Power function）是指

$$\beta(\vec{\theta}) = \mathbb{P}_{\vec{\theta}}(\vec{X} \in R).$$

注1 回顾检验函数$\phi(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \in R \\ 0, & \vec{x} \in R^c \end{cases}$，则

$$\beta(\vec{\theta}) = \mathbb{E}_{\vec{\theta}}\phi(\vec{X}).$$

注2 一个好的检验的功效函数应在大多数$\vec{\theta} \in \Theta_0^c$上接近1，而在大多数$\vec{\theta} \in \Theta_0$上接近0，从而在大多数$\vec{\theta} \in \Theta$上检验犯第一类错误和第二类错误的概率均接近0。

举例说明

Example (2.1)

（例1.1续） 设$X_1, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim N(\mu, \sigma^2)$，在$\sigma^2$已知情形下，由本章例1.1 可知，假设检验

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$$

的一个似然比检验（LRT）为

$$\text{"若}|\overline{X} - \mu_0| > d\text{，则拒绝}H_0\text{ ."}$$

这里$d > 0$为某个常值。

1. 求这个检验的功效函数，用标准正态的累积分布函数(c.d.f.) $\Phi(\cdot)$表示；
2. 实验者希望犯第一类错误的概率不超过0.05，同时在$\mu = \mu_0 + \sigma$点犯第二类错误的概率不超过0.25，求达到这一要求的最小样本容量n。

检验水平

- 定义2.3 （【0】定义5.1.3，【1】定义8.3.6） 设$0 \le \alpha < 1$，称一个功效函数为$\beta(\vec{\theta})$的检验是水平为α的检验（Level α Test）如果

$$\sup_{\vec{\theta} \in \Theta_0} \beta(\vec{\theta}) \le \alpha.$$

- 定义2.4 （【1】定义8.3.5） 设$0 \le \alpha < 1$，称一个功效函数为$\beta(\vec{\theta})$的检验是真实水平为α的检验（Size α Test）如果

$$\sup_{\vec{\theta} \in \Theta_0} \beta(\vec{\theta}) = \alpha.$$

注1 $\{$水平为α的检验$\} \supseteq \{$真实水平为α的检验$\}$。

注2 例2.1中检验“当$\frac{\sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0|}{\sigma} \ge 1.96$时，拒绝$H_0$”即为（真实）水平$\alpha = 0.05$的检验。

举例说明

Example (2.2)

（例1.2续） 设$X_1,\ldots,X_n$ $i.i.d.\sim X$，总体X的$p.d.f.$ 如下

$$f(x|\theta)=e^{-(x-\theta)}\mathrm{I}_{[\theta,\infty)}(x),-\infty<\theta<\infty.$$

求假设检验$H_0:\theta\le\theta_0\leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$ 水平为α 的似然比检验（LRT）.

Example (2.3)

（【0】例5.3.2） 设$X_1,\ldots,X_n$ $i.i.d.\sim N(\mu,\sigma^2),\mu\in\mathbb{R},\sigma^2>0$ 均未知，$n\ge 2$。考虑下列检验问题$H_0:\mu\le\mu_0\leftrightarrow H_1:\mu>\mu_0$,

(a) 求水平为α的似然比检验；

(b) 对于(a)中所得检验，此时若真实值为$\mu=\mu_0+\sigma$，则犯第二类错误的概率为多大？

练习 求解【0】例5.3.3 $\sim$ 5.3.5的水平为α的似然比检验。

- σ^2已知：令检验统计量

$$U=\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)/\sigma,$$

则

H_0	H_1	水平为α的拒绝域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert U\rvert>u_{\alpha/2}$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$U>u_\alpha$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$U<u_\alpha$

这里，u_α是$N(0,1)$的临界值符号。

- σ^2未知：令检验统计量

$$T=\sqrt{n}(\overline{X}-\mu_0)/S,$$

则

H_0	H_1	水平为α的拒绝域
$\mu=\mu_0$	$\mu\neq\mu_0$	$\lvert T\rvert>t_{n-1}(\alpha/2)$
$\mu\leq\mu_0$	$\mu>\mu_0$	$T>t_{n-1}(\alpha)$
$\mu\geq\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$T<t_{n-1}(\alpha)$

单个正态总体方差的假设检验【0】表5.2.2

- μ已知：令$S_\mu^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2/n$，则

H_0	H_1	水平为α的拒绝域
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$nS_\mu^2/\sigma^2 < \chi_n^2(1-\alpha/2)$ 或$nS_\mu^2/\sigma^2 > \chi_n^2(\alpha/2)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$nS_\mu^2/\sigma^2 > \chi_n^2(\alpha)$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$nS_\mu^2/\sigma^2 < \chi_n^2(1-\alpha)$

- μ未知：

H_0	H_1	水平为α的拒绝域
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$(n-1)S^2/\sigma^2 < \chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)$ 或$(n-1)S_\mu^2/\sigma^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha/2)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$(n-1)S^2/\sigma^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha)$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$(n-1)S^2/\sigma^2 < \chi_{n-1}^2(1-\alpha)$

Example (2.4)

（【1】例8.3.2） 设$X_1, \ldots, X_5$ *i.i.d.* $\sim$ *Bernoulli*(θ)，$0 < \theta < 1$未知。令$S = X_1 + \cdots + X_5$，对于检验问题：$H_0 : \theta \le \frac{1}{2} \leftrightarrow H_1 : \theta > \frac{1}{2}$，分别求如下检验的水平$\alpha$，以及假设真实值$\theta \in (0.5, 0.95)$时检验犯第二类错误的最小概率:

(a) 当$S = 5$ 时拒绝H_0;

(b) 当$S \ge 3$时拒绝H_0.

讨论 一般情形下，对于一个固定样本，检验不可能做到使犯两类错误的概率同时很小。因此通常，我们先考虑将犯第一类错误的概率控制在一个指定水平α下的检验集合，然后再在这个集合中考察犯第二类错误的概率尽可能小的检验。

作业 习题5: Ex. 2, 4, 7, 10, 11, 15(用似然比检验方法), 35, 36.