Exe. 7.9.3. A 特征多项式 $\varphi_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)^{m_i}$.

$V=\bigoplus_{i=1}^{t}$ ~~$\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)^{m_i}$~~ $\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)^{m_i}$ 由CRT(中国剩余定理),

$\exists\ g(x)$, s.t. $g(x)\equiv\lambda_i\ (\mathrm{mod}\,(x-\lambda_i)^{m_i})$. $(*)$

令 $B=g(A)$, $C=A-g(A)$. 下证 B可对角化, C幂零.

令 $v_i\in\mathrm{Ker}(A-\lambda_i I)$ 由$(*)$可得 $g(x)-\lambda_i=h_i(x)(x-\lambda_i)^{m_i}$.

$(g(A)-\lambda_i I)v_i=h_i(A)(A-\lambda_i I)^{m_i}=0$

i.e. v_i 是 $g(A)$ 属于 λ_i 的特征向量, 由 $V=\bigoplus_{i=1}^{t}\mathrm{Ker}(A-\lambda_i)^{m_i}$,

知 $\mathrm{Ker}(A-\lambda_i)^{m_i}$ 为 $g(A)$ 的特征子空间, 故 $g(A)$ 可对角化.

$\forall v\in V$, $v=\sum_{i=1}^{t}c_i v_i$ 对 $v_j\in\mathrm{Ker}(A-\lambda_j I)$.

$C^n v_j=$ ~~$(Av_j-g(A)v_j)^n=Av_j-\lambda v_j$~~ $(A-g(A))^n v_j$

$=\left(A-\lambda_j I-\cancel{h_i(x)=\lambda_i}\ h_j(A)(A-\lambda_j I)^{m_j}\right)^n v_j$.

$=(A-\lambda_j I)^n v_j+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}$ ~~每~~ $(A-\lambda_j I)^i\left(h_j(A)(A-\lambda_j I)^{m_j}\right)^{n-i}v_j$.

$n-i\geq 1$, 知. $C^n v_j=(A-\lambda_j I)^n v_j$ 故取 $n=\max\{m_1,\dots,m_t\}$.

即 $C^n v=0$, $\forall\ v\in V\Rightarrow C^n=0$. C幂零.

唯一性: 若 $A=B+C=B_1+C_1$, $B_1C_1=C_1B_1\Rightarrow B_1A=AB_1$ & $C_1A=AC_1$

故 B_1, C_1 与 $g(A)$, $A-g(A)$ 均可交换, 即 $B-B_1=C_1-C$ 幂零.

B, B_1 交换，可分别对角化 $\Rightarrow$ 可同时对角化，即 $\exists P$，

$P^{-1}(B-B_1)P = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 而 $C_1 - C$ 幂零 $\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow B - B_1 = 0$. $\quad C - C_1 = 0 \quad \Rightarrow$ 唯一 $\square$.

Remark: ① 由于唯一性较困难，直接由 $B - B_1 = C_1 - C$ 无法得出 ~~B=B~~ $C_1 - C = 0$，这点需可交换，而 $BC = CB \Rightarrow BA = AB \ \& \ CA = AC$

故若 B, C 均为 A 的多项式则唯一性可证，因而我们会弃直接使用 Jordan 理论改为用根子空间分解.

②. 此定理为 Jordan-Chevalley 分解，在 Lie Algebra 中有重要作用，感兴趣可参考 GTM9.

Exe: 1. (1) 若 $g \mid f$，$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. $\quad \ker g(A) \subseteq \ker f(A)$.

(2) $d = \gcd(f, g)$，则 $\ker d(A) = \ker g(A) \cap \ker f(A)$.

(3). $f = f_1 \cdot f_2$，$\gcd(f_1, f_2) = 1 \Rightarrow \ker f(A) = \ker f_1(A) \oplus \ker f_2(A)$.

proof: (1). $\forall \ v \in \ker g(A) \quad f(A)v = h(A)g(A)v = 0$

(2). $uf + vg = d$. $x \in \ker g(A) \cap \ker f(A) \Rightarrow$ ~~d(A)v = 0 v~~,

$d(A)x = u(A)(f(A)x) + v(A)(g(A)x) = 0$. 由(1) $x \in d(A)$

$\Rightarrow x \in g(A) \ \& \ x \in f(A)$. $\quad (*)$.

(3) $uf_1 + vf_2 = 1$. $x \in \ker f_1(A) \cap \ker f_2(A) \Rightarrow x = u(A)f_1(A)x + v(A)f_2(A)x$
$= 0$.

由(*)知 $u(A)f_1(A)x\in \ker f_2$，$v(A)f_2(A)x\in\ker f_1 \Rightarrow \ker f=\ker f_1+\ker f_2$

Remark: 该题可直接导出根子空间分解.

7.9.4. $\underbrace{A=A_DA_U}_{\text{可逆}}$，$\underbrace{}_{A_DA_U=A_UA_D}$ A_D可对角化，A_U特征值均为1，分解唯一.

proof: J为A Jordan标准形，$J=$ ~~Ξ~~ $\mathrm{diag}(J_1,\dots,J_s)$.

对 $J_{m_i}(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ & & & \lambda_i\end{pmatrix}=(\lambda_i I_{m_i})\begin{pmatrix}1 & \lambda_i^{-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i^{-1}\\ & & & 1\end{pmatrix}$ （A可逆$\Rightarrow\lambda_i\neq 0$）.

故 $\mathrm{diag}(J_1,\dots,J_s)=$ ~~$\mathrm{diag}(\lambda_0$~~ $\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s I_{m_s}\end{pmatrix}\cdot\mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix}1 & \lambda_1^{-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_1^{-1}\\ & & & 1\end{pmatrix}_{m_1\times m_1},\dots,\right.$

$\left.\begin{pmatrix}1 & \lambda_s^{-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_s^{-1}\\ & & & 1\end{pmatrix}_{m_s\times m_s}\right)=J_D\cdot J_U=J_UJ_D$ 满足条件.

取 $A=PJP^{-1}=PJ_DP^{-1}\cdot PJ_UP^{-1}$ 即可.

唯一性: 若 $A=A_DA_U=A_1A_2$ (*)，A_2最小多项式为$(\lambda-1)^d$.

~~$(A-I)^d$~~ 故 $A=$ ~~A_0~~ A_1+A-A_1，$(A-A_1)^n=$ ~~$A-A_1$~~ $\left((A_2-I)\cdot A_1\right)^n$.

A_1,A_2可换给 ~~A_1A~~ $A-A_1$幂零. 而(*)给出

$A=A_1+(A-A_1)=A_D+(A-A_D)$两个分解，$A_1(A-A_1)=(A-A_1)A_1$可换. $\square$
(Exe.7.9.3).

8.5.5. $S_i \in \mathbb{F}^{n\times n}$，实对称方阵 $S_1^2+\cdots+S_m^2=0 \Leftrightarrow S_1=\cdots=S_m=0$.

Proof: "$\Leftarrow$" trivial

"$\Rightarrow$": $\mathrm{tr}(S_1^2+\cdots+S_m^2) = \mathrm{tr}(S_1^2)+\cdots+\mathrm{tr}(S_m^2)=0$ (*)

$\mathrm{tr}(S_i^2) = \mathrm{tr}(S_i^T S_i) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} S_{kl}^2 \geq 0$.

故. (*) $\Leftrightarrow \mathrm{tr}(S_i^2)=0$, i.e. $S_{kl}=0$, $\forall k,l \Rightarrow S_i=0$.

Remark: Trace 函数!

Review: ① A 幂零 $\Leftrightarrow \mathrm{tr}(A^k)=0$, $\forall k\in\mathbb{N}^+$.

Hint: Use A. nilpotent $\Leftrightarrow$ A 特征值均为 0.

& Newton Polynomial (§5.7, e.g 8).

② ex. 6.13: $\mathbb{F}^{n\times n}$ 上线性函数. $f(AB)=f(BA)$

均为 $c\,\mathrm{tr}$. c constant!

③. Prop. 9.5.4. $\mathrm{tr}(A_2A_2^T)=0 \Rightarrow A_2=0$.

$\rho(A) \le \|A\|$.　$\left(\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1,\, x\in\mathbb{R}^n} \|Ax\| \right)$. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$　$\begin{matrix}\rho(A) \\ \shortparallel \\ |\lambda|\end{matrix}$

复特征值: $\exists$ $a+bi$ 特征向量 X_1+iY_1, $X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^n$　$|a+bi| = |\lambda|$

$$\begin{cases} AX_1 = aX_1 - bY_1 \\ AY_1 = bX_1 + aY_1 \end{cases}$$

$$\underbrace{|aX_1 - bY_1|^2 + |bX_1 + aY_1|^2}_{= |AX_1|^2 + |AY_1|^2} = (a^2+b^2)(|X_1|^2 + |Y_1|^2) \quad (*)$$

则 $\dfrac{|AX_1|^2}{|X_1|^2} \ge a^2+b^2$ 或 $\dfrac{|AY_1|^2}{|Y_1|^2} \ge a^2+b^2$. (都"<")与 $(*)$ 矛盾).

$$\Rightarrow |\lambda| = \sqrt{a^2+b^2} \le \max\left(\frac{|AX_1|}{|X_1|}, \frac{|AY_1|}{|Y_1|} \right) \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{|Ax|}{|x|} = \|A\|$$

(来自一位高人的解答).

另证: 对 $\|A\|_1 = \sup\limits_{|x|=1,\, x\in\mathbb{C}^n} |Ax|$, $\|A\|_2 = \sup\limits_{|x|=1,\, x\in\mathbb{R}^n} |Ax|$.

显然 $\|A\|_1 \ge \|A\|_2$. 取 $\underbrace{u+iv \in \mathbb{C}^n}_{|u+iv|=1}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ s.t. $|A(u+iv)| = \|A\|_1$

则 $|A(u+iv)| = \sqrt{|Au|^2 + |Av|^2} \le \sqrt{\|A\|_2^2 (|u|^2 + |v|^2)} = \|A\|_2$.

$\Rightarrow \|A\|_1 \le \|A\|_2$. 故 $\|A\|_1 = \|A\|_2$. 而对 $\|A\|_1$,

$\rho(A) = |\lambda|$　$u+iv$ 为 A 特征向量 (为 λ), $|\lambda| = \dfrac{|A(u+iv)|}{|u+iv|} \le \|A\|_1$.

i.e. $\rho(A) \le \|A\|$

(来自群内船火儿同学)

$|\mathscr{A}(\alpha)| = |\mathscr{A}^*(\alpha)| \Leftrightarrow \mathscr{A}$ 规范

"$\Leftarrow$" ✓.

"$\Rightarrow$" 写成坐标 $x^T(AA^T - A^TA)x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

注意只能推出 $AA^T - A^TA$ 反称，本题成立的原因是

$AA^T - A^TA$ 对称，故 $AA^T - A^TA \in V_{对} \cap V_{反} = \{0\}$.

Exe. $Q(\alpha) = \det\begin{pmatrix} S & \alpha^T \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ 负定，其中 $\alpha \in \mathbb{R}^{1\times n}$，$S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 正定.

proof："打洞" 该方法在期末依旧重要！

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\alpha S^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & \alpha^T \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -S^{-1}\alpha^T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & -\alpha S^{-1}\alpha^T \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} S & \alpha^T \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \det(S)\cdot(-\alpha S^{-1}\alpha^T).$$

S 正定 $\Rightarrow S^{-1}$ 正定. 故 $Q(\alpha) \le 0$，$Q(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$.