

homework4

游瀚哲

2023 年 11 月 7 日

一、作业要求

1. 考虑两点边值问题

$$\begin{cases} \epsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = a, 0 < a < 1, \\ y(0) = 0, y(1) = 1 \end{cases}$$

容易知道它的精确解为

$$y = \frac{1-a}{1-e^{-\frac{1}{\epsilon}}} (1 - e^{-\frac{x}{\epsilon}}) + ax$$

为了把微分方程离散化, 把 $[0, 1]$ 区间 n 等分, 令 $h = \frac{1}{n}, x_i = ih, i = 1, \dots, n-1$, 得到差分方程

$$\epsilon \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = a$$

简化为

$$(\epsilon + h)y_{i+1} - (2\epsilon + h)y_i + \epsilon y_{i-1} = ah^2$$

离散化后得到线性方程组 $Ay = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} -(2\epsilon + h)y_i & (\epsilon + h) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \epsilon & -(2\epsilon + h) & (\epsilon + h) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \epsilon & -(2\epsilon + h) & (\epsilon + h) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \epsilon & -(2\epsilon + h) & (\epsilon + h) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \epsilon & -(2\epsilon + h) \end{bmatrix}$$

注意 A 为 $n-1$ 阶矩阵, 将线性方程组与差分方程进行对比得出正确的 b 向量 (尤其注意第一行和最后一行)。

对 $\epsilon = 1, a = 1/2, n = 100$, 分别用 Jacobi 迭代法, G-S 迭代法和 SOR 迭代法求线性方程组的解, 要求 4 位有效数字, 然后比较迭代次数, 运行时间与精确解的误差。迭代法终止条件为 $\|x_{k+1} - x_k\| < 10^{-6}$ 。

对 $\epsilon = 0.1, 0.01, 0.0001$, 考虑同样的问题。要求输出计算结果, 收敛所需要的迭代次数和运行时间。

2. 考虑偏微分方程

$$-\Delta u + g(x, y)u = f(x, y), (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

边界条件为 $u = 1$. 沿 x 方向和 y 方向均匀剖分 N 等份, 令 $h = 1/N$, 并设应用中心差分离散化后得到差分方程的代数方程组为

$$-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + (4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f(ih, jh)$$

取 $g(x, y) = \exp(xy)$, $f(x, y) = x+y$, 分别用 Jacobi 迭代法, G-S 迭代法和 SOR 迭代法求解上述代数方程组, 要求输出解的最小分量, 并比较 $N = 20, 40, 60$ 时收敛所需要的迭代次数和运行时间, 迭代终止条件为 $\|x_{k+1} - x_k\|_2 < 10^{-7}$ 。

要求仿照下面写的 Jacobi 迭代格式的推导过程推导处 G-S 迭代和 SOR 迭代的格式 (在报告中写出推导过程), 在用 SOR 迭代法求解的过程中, 请对不同的 N 使用合适的松弛因子 ω , 并在程序输出中打印松弛因子的值。观察运行结果后选取合适的。(代码中不需要体现选取过程, 只需给出即可)。

注意本题中的三个迭代法的算法需要重新写, 不能用矩阵的通用算法!!!

二、作业涉及的算法

必须实现的算法有: 矩阵方程的 Jacobi 迭代、G-S 迭代和 SOR 迭代方法。

第二题中的三个迭代法需要单独实现, 不能用矩阵的通用算法!!!

新建一个空项目, 根据需要将之前的程序文件添加到项目中。

1、Jacobi 迭代法

考虑其迭代格式 $Dx_{(k+1)} = (L + U)x_k + b$ 。对第 i 行有 $D_i x_i^{(k+1)} = \sum_{j \neq i} (L + U)_{ij} x_j^{(k)} + b_i$ 。将 D, L, U 还原成 A 得到代数方程组

$$A_{i1}x_1 + \cdots + A_{in}x_n = b_i$$

的 Jacobi 迭代式

$$A_{i1}x_1^{(k)} + \cdots + A_{ii}x_i^{(k+1)} + \cdots + A_{in}x_n^{(k)} = b_i$$

即只有与向量 b 的下标相同的位置替换成 x^{k+1} 。

由此类比推广至矩阵 (或者可以直接将矩阵拉直成向量), 知代数方程组 (1) 的 Jacobi 迭代格式为

$$-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + (4 + h^2 g(ih, jh))u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f(ih, jh)$$

2、G-S 迭代法

3、SOR 迭代法

三、附加说明

1. 尽量使用 `c++` 和 `visual studio`。
2. 本次作业最迟 ddl 为 **2023.11.23(周四)23:59**, 请大家尽早提交, 后面的作业只会更难。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况请提前私聊助教沟通。迟交的作业会视情况酌情扣分。
3. 请确保你的程序能顺利跑出正确的结果再上交! 可以用 `Mathematica`/`Matlab` 等工具来验证你的解是否正确。

4. 没有报告的程序作业不予批改, 报告一定要交 pdf 版本。