§1.3 函数极限

1.3.1 函数

函数就是量与量之间的数学关系式. 数学和其他科学中绝大部分关系都受到函数关系的支配. 例如, 自由落体下落时间 t 与下落距离 h 之间的关系是

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

（其中, g 是重力加速度）; 质量是 m 的运动质点的动能是通过它的运动速度 v 按照公式

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

给出的;

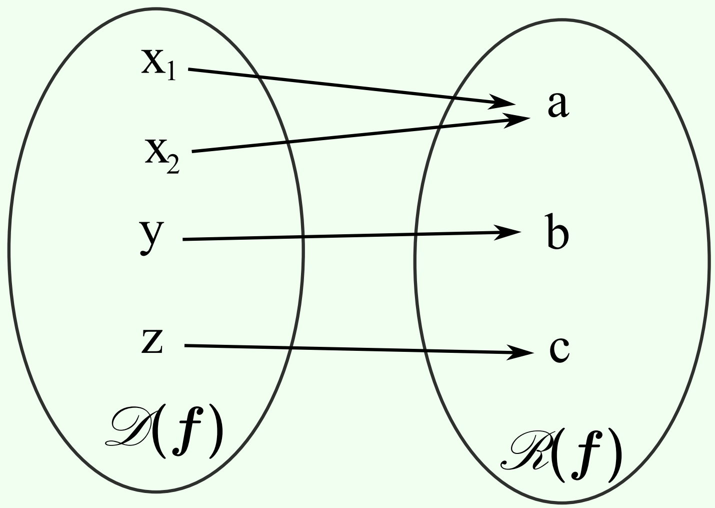
定义在实数集合 $\mathbb{R}$ 的子集上且取值为实数的函数, 其严格的定义如下:

定义 1 设 D 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集, 若按照某种对应关系 f, 对于 D 中的每一个数 x, 有唯一确定的 $y \in \mathbb{R}$ 与之对应, 将 y 记成 $f(x)$, 那么, 就称 f 是 D 上的一个实值函数. 集合 D 称为 f 的定义域, 记为 $\mathscr{D}(f)$, 而数 $f(x)$ 称为 f 的值. f 的一切值的集合叫做 f 的值域, 通常记成 $\mathscr{R}(f)$, 即 $\mathscr{R}(f) = \{y \mid y = f(x),\ x \in \mathscr{D}(f)\}$. 习惯上, 称上述的 x 为自变量, y 为因变量.

一个函数, 也可以看成是一个将 $D \subset \mathbb{R}$ 映入 $\mathbb{R}$ 内的一个映射:

$$f:\ D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{或} \quad f:\ x \longmapsto y = f(x)$$

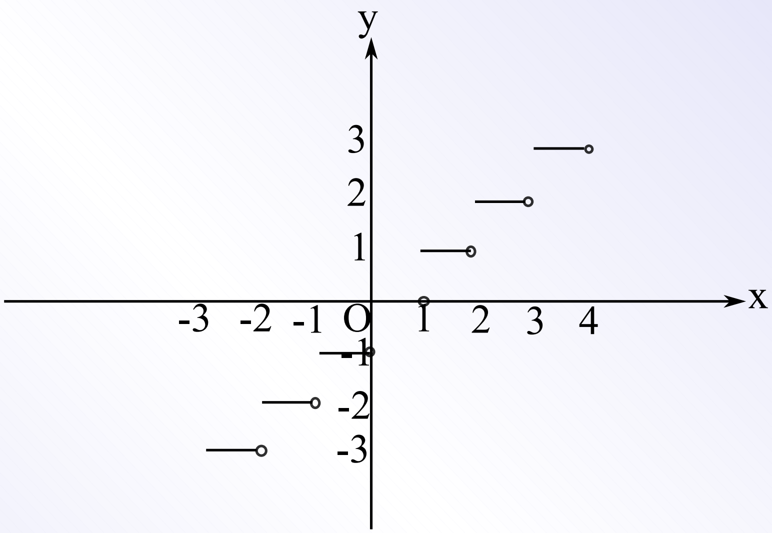
要注意因变量是由自变量唯一确定的, 即函数具有单值性, 但不同的数的值可以是相同的.



当 $A \subset \mathscr{D}(f)$ 时, 称集合 $f(A) := \{f(x) \,|\, x \in A\}$ 为 A 在函数 f 下的像. 当 $B \subset \mathbb{R}$ 时, 称集合 $f^{-1}(B) := \{x \in \mathscr{D}(f) \,|\, f(x) \in B\}$ 为 B 在 f 下的原像. $\mathbb{R}^2$ 中的点集 $\{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathscr{D}(f)\}$ 称为函数 f 的图像.

常值函数: 函数的取值是一个固定的数, 其图像为一段水平直线.

取整函数: $f(x) = [x]$, 其图像为一阶梯形状.



Dirichlet 函数: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

有界函数: 函数的值域是 $\mathbb{R}$ 中一个有界集.

单调函数: 函数的定义域与值域同序(或者反序),即定义域中任意两个数 x_1, x_2 的大小次序, 均与它们对应的值域中的两个数 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ 的大小次序相同(或者相反), 有两种情形:

单调递增函数, 对任意的 $x_1, x_2 \in \mathscr{D}(f)$, 如果 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;

单调递减函数, 对任意的 $x_1, x_2 \in \mathscr{D}(f)$, 如果 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$;

若上面的不等号为严格不等号, 则称 $f(x)$ 为严格单调递增(减)函数.

反函数: 若对每一个 $y \in \mathscr{R}(f)$, 都有唯一确定的 $x \in \mathscr{D}(f)$ 使得 $f(x) = y$, 即, 从函数图象上看, 就是任何一条平行于 x 轴的直线, 与函数的图象至多有一个交点. 此时, 自然地导出一个由 $\mathscr{R}(f)$ 到 $\mathscr{D}(f)$ 的映射. 这个映射称为 f 的反函数(或逆映射), 记为 f^{-1}, 它的定义域为 $\mathscr{R}(f)$, 值域为 $\mathscr{D}(f)$. 显然, 当且仅当 f 是 $\mathscr{D}(f)$ 到 $\mathscr{R}(f)$ 的一一对应时, f 才有反函数, 而且反函数是唯一的.

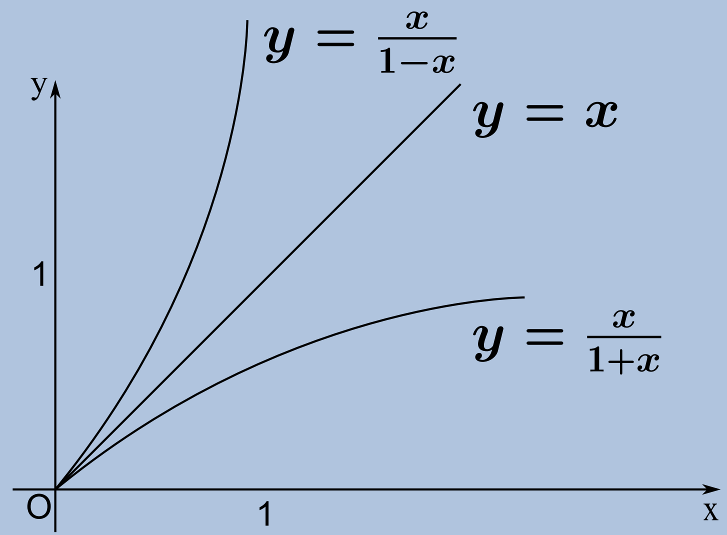
例 1 证明函数 $y=\frac{x}{1+x}\ (0<x<+\infty)$ 是一一的, 并求其反函数.

证明 该函数的定义域是 $(0,+\infty)$, 值域是 $(0,1)$. 对于两个正数 x_1, x_2 有

$$\frac{x_1}{1+x_1}=\frac{x_2}{1+x_2}\Longrightarrow\frac{1}{1+x_1}=\frac{1}{1+x_2}\Longrightarrow x_1=x_2,$$

所以该函数是一一的, 因而有反函数.

从 $y=\frac{x}{1+x}$ 可得 $x=\frac{y}{1-y}$, 所以该函数的反函数是 $y=\frac{x}{1-x}$, $(0<x<1)$.



常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数, 是最基本的函数. 称它们为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次加、减、乘、除和复合运算得出的函数称为初等函数.

有限个幂函数的线性组合称为多项式:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 称为多项式的系数.

两个多项式函数 $f(x)$、$g(x)$ 的商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 称为有理函数, 它的定义域当然就是不包括 $g(x) = 0$ 的实根的所有实数.

设 $f(x)$ 是一个函数, 称 $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$ 为 $f(x)$ 的正部, 称 $f^-(x) := -\min\{f(x), 0\}$ 为 $f(x)$ 的负部. 显然有

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

函数的表示

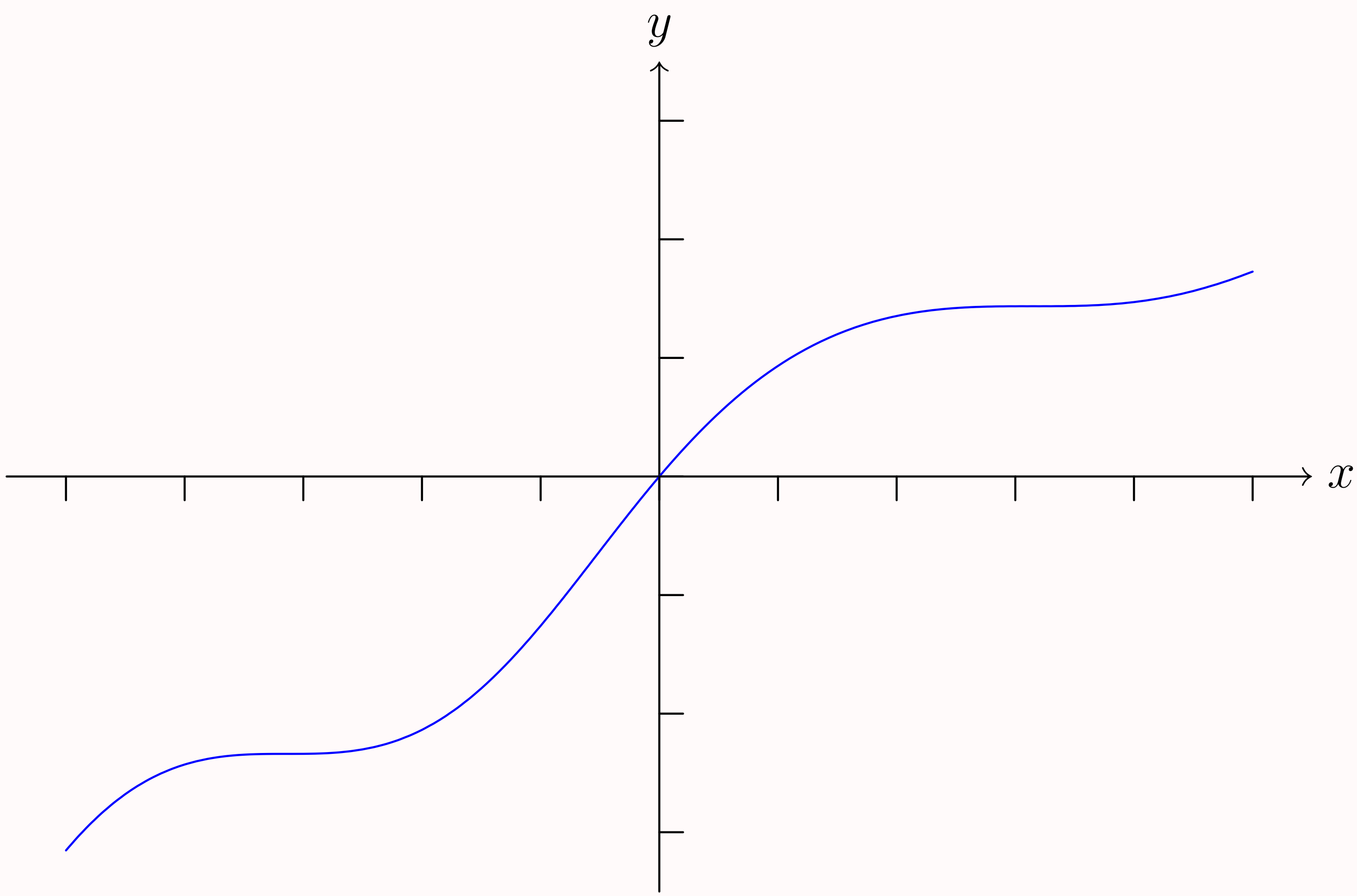
显式函数 象基本初等函数那样用明显的代数式子: $y = f(x)$ 表达的函数. 例如, $y = \sin x$, $y = x + \ln x$, 等.

隐式函数 变量 x 和 y 的依赖关系通过一个二元方程 $F(x, y) = 0$ 给出. 例如,

$$y + 2^y - x - \sin x = 0$$

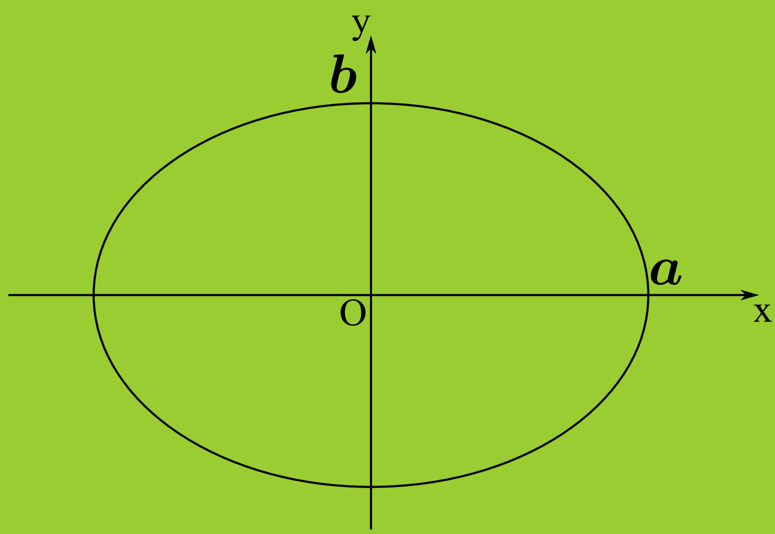
决定了一个函数 $y = f(x)$, 我们给不出这个函数的明确表达式, 但以后我们可以证明这是一个严格单调递增函数, 定义域和值域都是 $(-\infty, +\infty)$.

$y+2^y-x-\sin x=1$ 在 $x\in[-5,5]$ 时的图像如下:

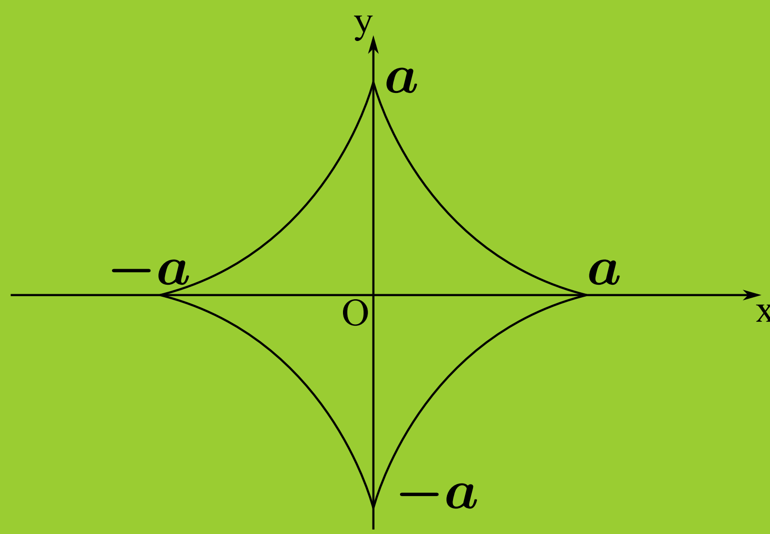


一般地, 满足二元方程 $F(x, y) = 0$ 的点 (x, y) 所成的图像可以更复杂.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$



参数方程 变量 x 和 y 都是第三个变量 t 的函数, 即,

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

比如前面的椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos(t), \\ y = b\sin(t), \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

星形线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \big(a\cos(t)\big)^3, \\ y = \big(a\sin(t)\big)^3, \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

例 2 半径为 a 的圆在 x 轴上滚动时, 圆周上一个定点在平面上所描绘出的轨迹称为**摆线**, 其参数方程为

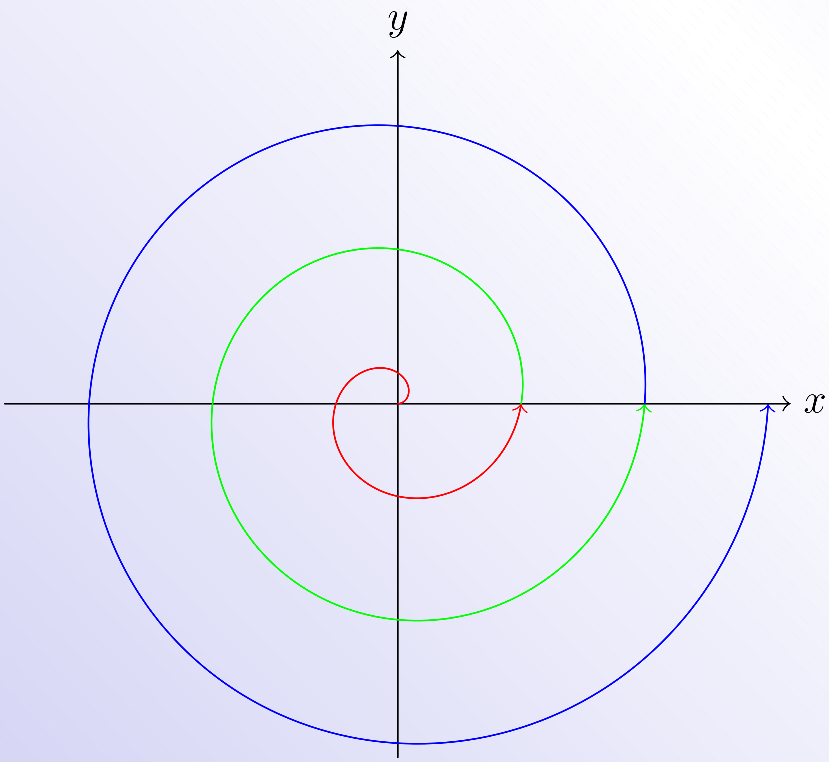
$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta < +\infty).$$

例 3 动圆绕与其半径相同的定圆圆周外滚动时, 动圆上一个定点在平面上所描绘出的轨迹称为心脏线, 其参数方程为

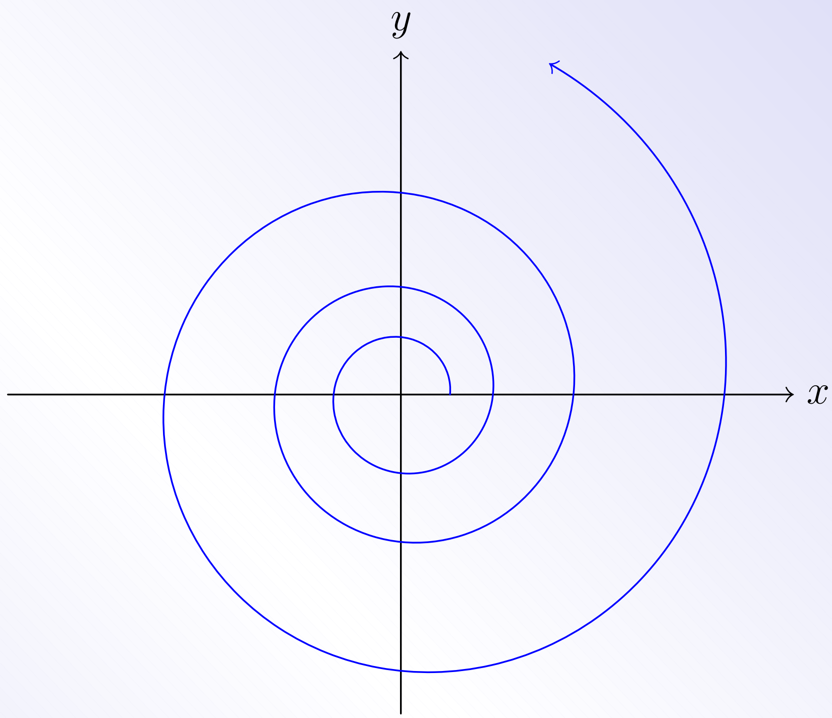
$$\begin{cases} x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta) \\ y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta) \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

它的图像是下图中的虚线.

极坐标方程 在直角坐标系中, 设从原点指向点 (x, y) 的向量与 x 轴正向夹角为 θ, 原点到 (x, y) 的距离为 r, 则 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 给出 r 与 θ 的关系, 可以得到 x, y 的一个关系. (r, θ) 称为点 (x, y) 的极坐标, 由极坐标表示的方程称为极坐标方程. 极坐标方程可以表现为 r 与 θ 之间的显式、隐式、参数方程等形式.



阿基米德螺线: $r = \theta$, $\theta \in (0, 6\pi)$



对数螺线: $r = e^{0.1\theta}$, $\theta \in (0, 20)$

例 4 求出所有定义域为实轴的函数使得对于任意实数 x, y 有

$$f(2f(x)+f(y))=2x+f(y). \tag{1}$$

解 设 $f(x)$ 是这样的一个函数. 在 (1) 中令 $x=y$ 得

$$f(3f(x))=f(x)+2x. \tag{2}$$

将 (2) 中的 x 换为 $3f(x)$, 并利用 (2) 可得

$$\begin{aligned} f(3f(3f(x))) &= f(3f(x))+6f(x)=f(x)+2x+6f(x) \\ &= 7f(x)+2x. \end{aligned}$$

因此 $f(3f(3f(0)))=7f(0)$. 由 (2) 得 $f(3f(0))=f(0)$, 这推出 $f(3f(3f(0)))=f(0)$. 于是 $7f(0)=f(0)$, 即 $f(0)=0$.

在 (1) 中令 $x=0$, 得 $f(f(y))=f(y)$. 因此将 (1) 中的 x 换为 $f(y)$ 得

$$f(3f(y))=3f(y).$$

由此并结合 (2) 即得 $f(x)=x$.

1.3.2 函数在无穷大处的极限

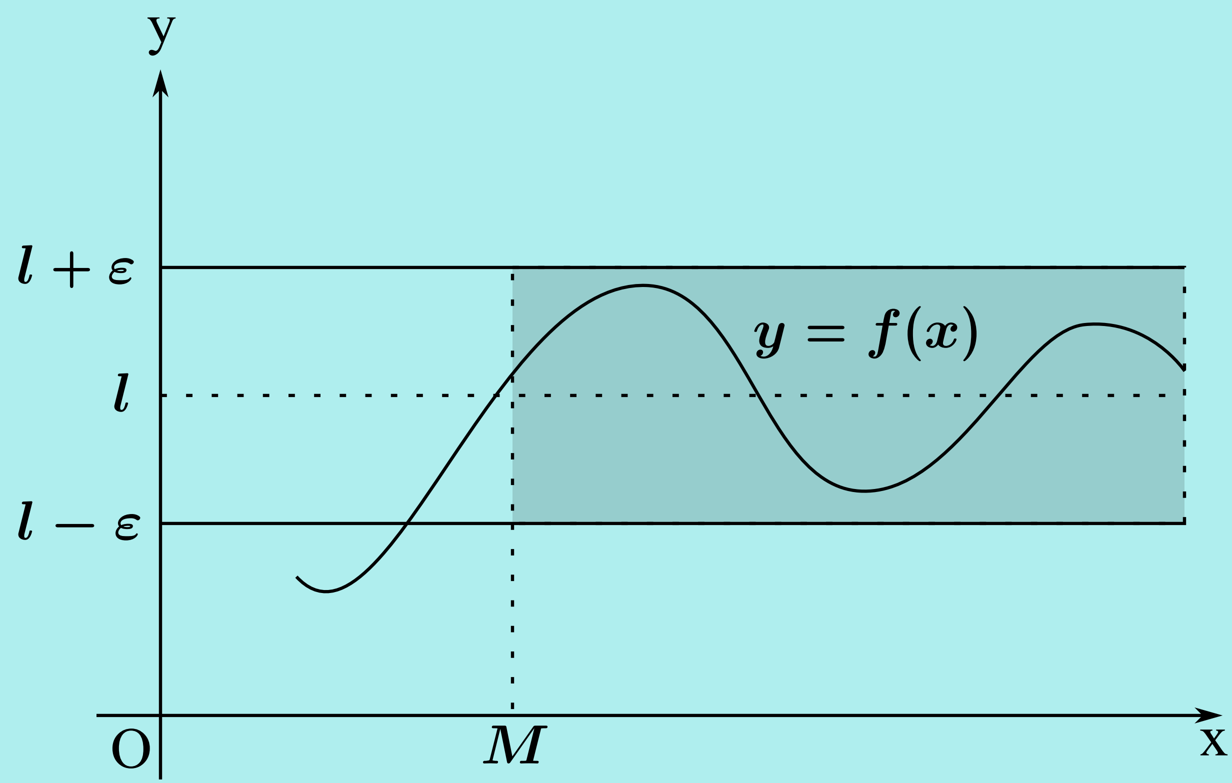
定义 2 (**在** $+\infty$ **的极限**) 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 有定义. 如果有一个实数 l 具有下列性质: 对于任意给定的正数 ε, 总存在一个正数 $M = M(\varepsilon) > a$, 使当 $x > M$ 时有

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

则称当 x 趋向正无穷大时, $f(x)$ 以 l 为极限. 记成

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l, \quad \text{或} \quad f(x) \to l \ (x \to +\infty).$$

函数在 $+\infty$ 的极限的几何意义



对于任意以 $y=l$ 为中心线的带状区域, 都存在 $M>0$, 使得当 $x>M$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的图像都在此带状区域中.

定义 3 (在 ∞ 的极限) 设 $a > 0$, 函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ 有定义. 如果有一个实数 l 具有下列性质: 对于任意给定的正数 ε, 总存在一个正数 $M = M(\varepsilon) > a$, 使当 $|x| > M$ 时有

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

则称当 x 趋向无穷大时, $f(x)$ 以 l 为极限. 记成

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l, \quad 或 \quad f(x) \to l \ (x \to \infty).$$

易知有

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = l \text{ 同时 } \lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

例 5 设 k 是正整数, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=0$.

证明 对任意的正数 ε, 要想找到所希望的 M, 只要解不等式

$$\left|\frac{1}{x^k}-0\right|<\varepsilon.$$

从这个不等式解得 $|x|>\varepsilon^{1/k}$. 所以只要取 $M=\varepsilon^{1/k}$, 当 $x>M$ 时, 就能保证上列成立, 即, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=0$.

例 6 证明: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

证明 任给一个正数 $\varepsilon<1$, 要使 $0<|e^x-0|=e^x<\varepsilon$, 只要 $x<\ln\varepsilon$. 故取 $M=-\ln\varepsilon$, 则当 $x<-M=\ln\varepsilon$ 时有 $e^x<\varepsilon$, 即是所要证明的结论.

例 7 证明 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

证明 任给正数 $\varepsilon<\frac{\pi}{2}$, 要使

$$-\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\arctan x<-\frac{\pi}{2}+\varepsilon$$

只需 $x<\tan\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$, 所以取 $M=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)>0$, 当 $x<-M$ 时, 就有

$$\left|\arctan x+\frac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$$

即

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

同理可证

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$$

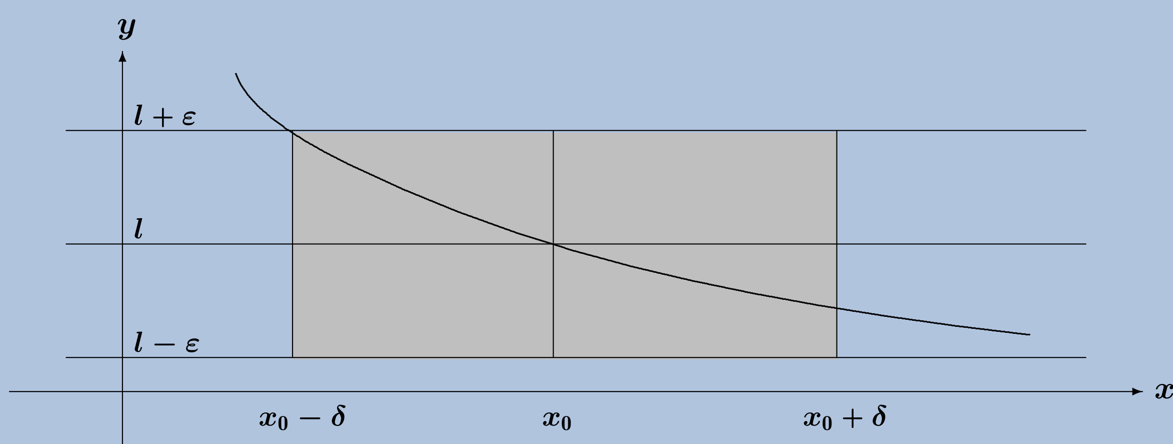
由于当 x 趋于正、负无穷大时, 函数 $\arctan x$ 的两个单测极限不相等, 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

1.3.3 函数在一点处的极限

定义 4 设 $f(x)$ 在 x_0 附近有定义（在 x_0 不要求有定义）. 如果对任意给定的正数 ε, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - l| < \varepsilon$. 则称 l 为当 x 趋向 x_0 时 $f(x)$ 的极限, 记成

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \quad 或 \quad f(x) \to l \ (x \to x_0).$$

从函数 $f(x)$ 的图象可以看出, $f(x)$ 在 x 趋于 x_0 时以 l 为极限的几何意义如图所示.



例 8 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2$.

证明 $\frac{x^2-1}{x^2-x}$ 在 $x=1$ 处没有定义, 而当 $x\neq 1$ 时, 我们要估计

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|=\left|\frac{x-1}{x}\right|.$$

由于所说的极限仅与 1 附近的 x 有关, 故可以先限制 x 的范围, 例如设 $|x-1|<\frac{1}{2}$, 即 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$. 在这个范围内, 上面的估计为

$$\left|\frac{x-1}{x}\right|<2|x-1|.$$

所以, 对于任意给定的正数 ε, 取 $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, 则当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|=\left|\frac{x-1}{x}\right|<2|x-1|<2\delta\leqslant\varepsilon,$$

这就证明了 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2$.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

解 注意, 函数在 $x=0$ 处没有定义. 当 $x\neq 0$时, 总有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant |x|.$$

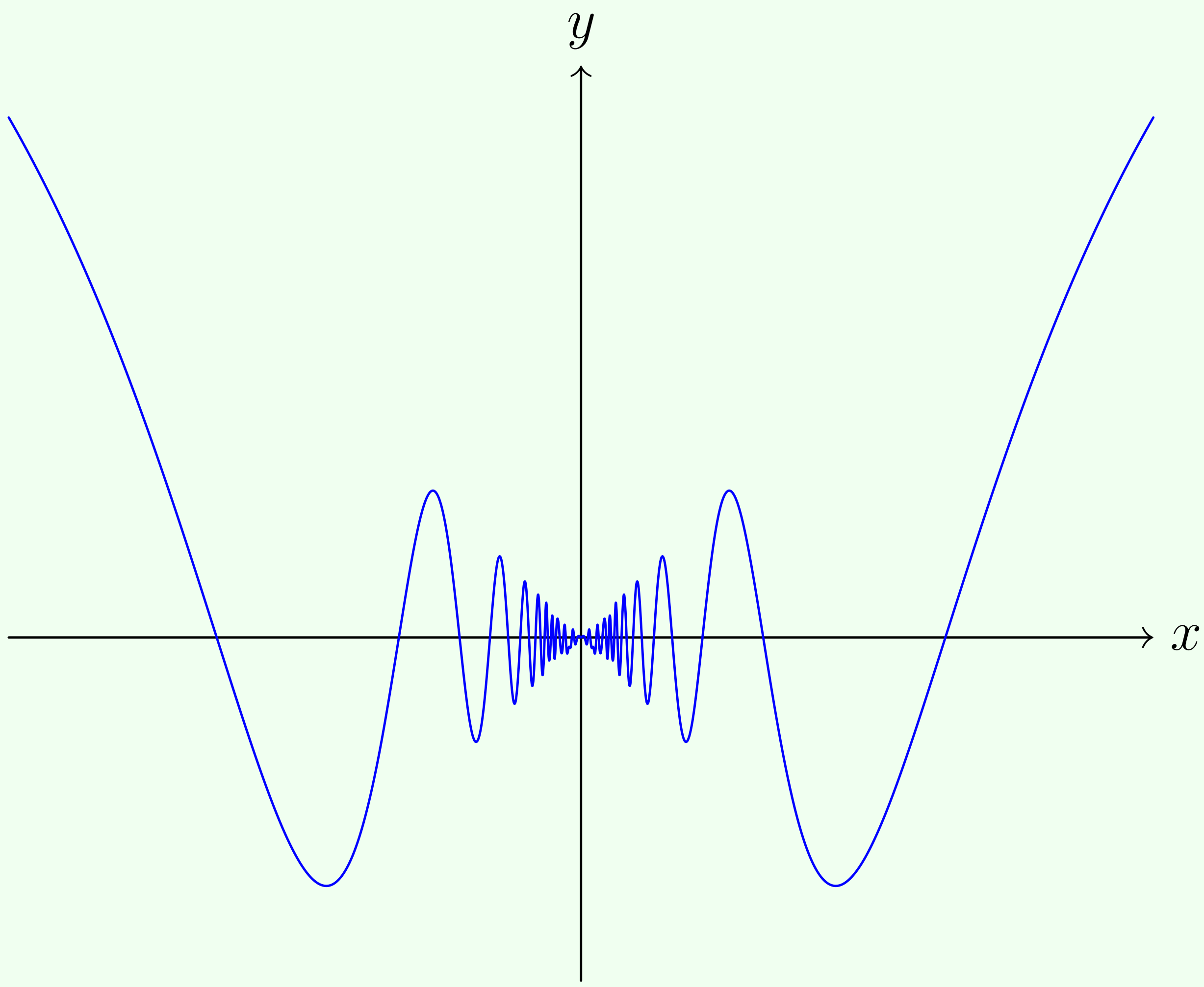
因此, 对任意的正数 ε, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $0<|x|<\delta$ 时, 就有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

$x \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $x \in [-0.5, 0.5]$ 上的图像



定义 5 设 $f(x)$ 在 x_0 的左侧附近有定义. 如果有一个常数 l 满足下述性质: 对于任意的正数 ε, 总存在正数 δ, 使得当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, 有 $|f(x) - l| < \varepsilon$, 则称 l 是 $f(x)$ 在 x_0 的左极限, 记成

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l, \quad \text{或} \quad f(x) \to l \ (x \to x_0^-)$$

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的右侧附近有定义, 类似地可以定义 $f(x)$ 在 x_0 的右极限, 只要在关于左极限定义中的不等式 $-\delta < x - x_0 < 0$ 换成 $0 < x - x_0 < \delta$ 即可. 习惯上, 记函数 $f(x)$ 在 x_0 的左右极限分别记为 $f(x_0 - 0)$ 和 $f(x_0 + 0)$.

定理 1 函数 $f(x)$ 在 x_0 有极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 的左右极限都存在而且相等.

这个简单的事实可以用来判断函数 $f(x)$ 在 x_0 没有极限.

例 10 证明 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$, 这里 $a > 0$.

证明 当 $a = 1$ 时, 结论显然成立. 故以下设 $a \neq 1$. 先证 $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1$. 为此分两种情形:

设 $a > 1$, 此时 $a^x > 1$. 对于任意的正数 ε, 要使

$$|a^x - 1| < \varepsilon, \quad \text{即} \quad 1 < a^x < 1 + \varepsilon,$$

只要

$$x \ln a < \ln(1+\varepsilon) \quad \text{或} \quad x < \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}$$

即可. 所以只要取 $\delta = \frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}$, 则当 $0 < x < \delta$ 时上述不等式成立, 即 $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1$.

当 $0 < a < 1$ 时, 只要注意到此时 $\ln a < 0$, 仍可得到 $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x = 1$.

再注意到, $a^{-x} = (1/a)^x$, 就能证明 $\lim\limits_{x\to 0^-} a^x = 1$.

例 11 设 $x_0 > 0$, 则有 $\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$.

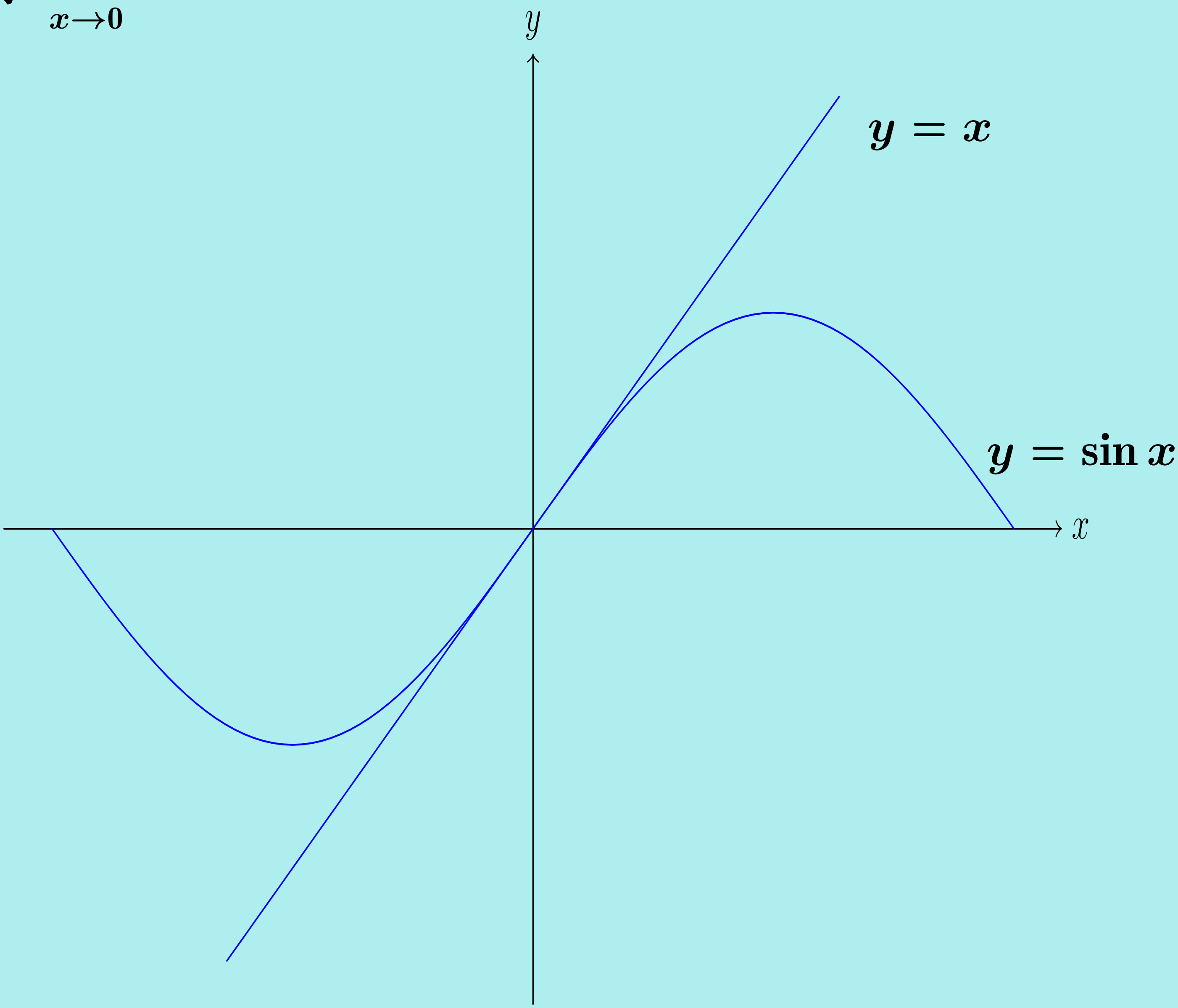
证明 对于任意正数 ε, 取 $\delta = x_0(e^{\varepsilon} - 1)$, 则当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有 $x/x_0 < e^{\varepsilon}$, 因而

$$|\ln x - \ln x_0| = \ln \frac{x}{x_0} < \ln e^{\varepsilon} = \varepsilon.$$

这说明 $\lim\limits_{x \to x_0^+} \ln x = \ln x_0$.

同理可证明 $\lim\limits_{x \to x_0^-} \ln x = \ln x_0$. 于是有 $\lim\limits_{x \to x_0} \ln x = \ln x_0$.

例 12 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x$.



引理 1 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x < x < \tan x$.

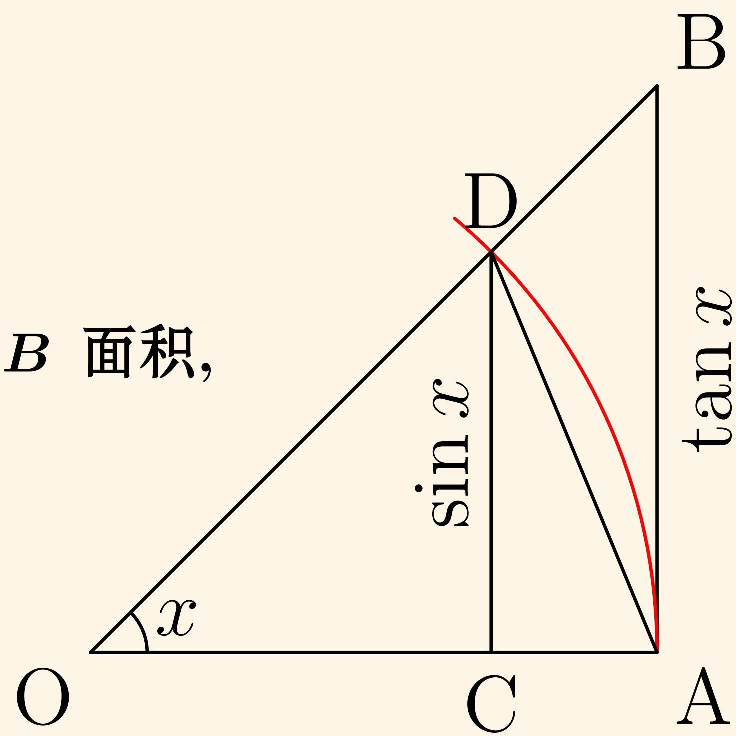
证明 如图所示, 单位圆上一点 A 的切线与半径 OD 的延长线交于点 B, DC 垂直于 OA, 由于

$\triangle AOD$ 面积 $<$ 扇形AOD 面积 $< \triangle AOB$ 面积,

也就是

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x.$$

这就是要证明的结果.



现在来求 $\lim\limits_{x \to 0} \sin x$.

因为对任意正数 ε, 存在正数 $\delta = \min\{\varepsilon, \frac{\pi}{2}\}$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时, 有

$$|\sin x| < |x| < \delta \leqslant \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

例 13 求证 $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

证明 因为

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2 \left|\sin \frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant |x - x_0|,$$

所以对任意正数 ε, 存在正数 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

1.3.4 函数极限的性质与运算

定理 2 若当 $x \to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 有极限 l, 则

1° 极限是唯一的.

2° $f(x)$ 在 x_0 的近旁是有界的. 即存在正数 M 和 δ, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| \leqslant M$.

3° 若 $a < l < b$, 则在 x_0 的近旁, 有 $a < f(x) < b$, 即存在一个正数 δ, 使得对于满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的所有 x, 有 $a < f(x) < b$.

证明 1° 若有两个极限 a 和 b, 不妨设 $a \neq b$. 则对于 $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - a| < \varepsilon, \quad |f(x) - b| < \varepsilon$. 于是

$$|b - a| \leqslant |f(x) - a| + |f(x) - b| < 2\varepsilon = |b - a|,$$

这是矛盾! 因此极限是唯一的. 2° 和 3° 可类似证明.

定理 3 设当 $x \to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别以 l 和 l' 为极限, 则

1° 若在 x_0 的附近, 有 $f(x) \geqslant g(x)$, 则 $l \geqslant l'$.

2° 若 $l > l'$, 则在 x_0 的附近, 必有 $f(x) > g(x)$, 即存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > g(x)$.

3° 作为 1° 和 2° 的推论, 如果在 x_0 的附近, 有 $f(x) \geqslant 0$, 则 $l \geqslant 0$; 如果 $l > 0$, 则在 x_0 的附近, 有 $f(x) > 0$.

证明 2° 对于 $\varepsilon = \frac{l-l'}{2}$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - l| < \varepsilon, \quad |g(x) - l'| < \varepsilon.$$

因此

$$f(x) > l - \varepsilon = l' + \varepsilon > g(x).$$

1° 和 3° 都是 2° 的推论.

定理 4 设当 $x \to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别以 l 和 l' 为极限, 则

1° $f(x) \pm g(x)$ 在 x_0 处有极限, 且极限为 $l \pm l'$, 即

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) \pm \lim_{x \to x_0} g(x_0).$$

2° 函数 $f(x)g(x)$ 在 x_0 有极限, 且极限是 ll', 即

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

特别, $\lim\limits_{x \to x_0} cf(x) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, 其中 c 是常数.

3° 对于 $l' \neq 0$, 函数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限存在, 且等于 $\frac{l}{l'}$. 即

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

例 14 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+1}$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=1.$$

例 15 设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 则对于任意一点 x_0, 有

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0).$$

证明 利用 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$, 得 $\lim\limits_{x\to x_0}x^k=x_0^k$, 再利用极限得加法, 就得到结果.

例 16 求 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$.

解 当 $x\to-1$ 时, 原式括号中的每一项都没有极限. 所以不能直接利用极限的性质计算. 但是, 当 $x\neq-1$时, 可以将括号内的分式进行通分和化简得

$$\frac{x-2}{x^2-x+1},$$

此时, 分子分母在 $x\to-1$时, 都有极限, 因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)&=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}\\&=\frac{\lim\limits_{x\to-1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to-1}(x^2-x+1)}=-1.\end{aligned}$$

定理 5 函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的数列 $\{a_n\}$ $(a_n \neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$.

证明 "必要性" 设 $\{a_n\}$ $(a_n \neq x_0)$ 是一个以 x_0 为极限的数列. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, 故对于任意给定得正数 ε, 一定存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - l| < \varepsilon$. 又由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, 所以对于已经有的 $\delta > 0$, 存在一个自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $0 < |a_n - x_0| < \delta$, 所以当 $n > N$ 时, $|f(a_n) - l| < \varepsilon$. 即是

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l.$$

"充分性" (反证) 假设当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 不以 l 为极限. 那么一定有一个 $\varepsilon_0 > 0$, 使对于任何一个正数 δ, 都能找到一个 x_δ, 即使 $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$, 仍有 $|f(x_\delta) - l| \geqslant \varepsilon_0$.

因此, 取 $\delta_n = \frac{1}{n}$, 对应每一个这样的 δ_n, 都可找到 a_n, 使

$$0 < |a_n - x_0| < \delta_n = \frac{1}{n},$$

但

$$|f(a_n) - l| \geqslant \varepsilon_0$$

当 $n \to \infty$ 时, 上面第一个不等式表明 $\{a_n\}$ 以 x_0 为极限, 而第二个不等式表明, $\{f(a_n)\}$, $(a_n \neq x_0)$ 不以 l 为极限. 这与条件相矛盾, 所以假设不成立, 即有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. 证毕.

定理 5 说明, 当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 的趋向性态如果在两个趋于 x_0 的点列上不一致, 则 $f(x)$ 一定没有极限.

例 17 证明: 当 $x \to 0$ 时 $\sin \frac{1}{x}$ 没有极限.

证明 取 $a_n = \frac{1}{2n\pi}$, $b_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 显然有 $\lim a_n = \lim b_n = 0$. 但是, $\lim f(a_n) = 0$, $\lim f(b_n) = 1$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

定理 5 可以细化为如下结论.

定理 6 1° 函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0^-$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的单调递增数列 $\{a_n\}$ $(a_n \neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$;

2° 函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0^+$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的单调递减数列 $\{a_n\}$ $(a_n \neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$.

定理 7 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, 且当 $t \neq t_0$ 时, $g(t) \neq x_0$. 则

$$\lim_{t\to t_0} f(g(t)) = l = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

证明 任给一个正数 ε, 根据 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ 知, 一定存在一个正数 δ, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

又因为 $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, 所以对于正数 δ, 一定存在一个 $\tau > 0$, 使得当 $0 < |t - t_0| < \tau$ 时, 有 $0 < |g(t) - x_0| < \delta$. 所以, 当 $0 < |t - t_0| < \tau$ 时有

$$|f(g(t)) - l| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{t\to t_0} f(g(t)) = l.$$

定理 7 告诉我们, 在求极限的过程中可以使用“变量代换”, 从而有可能简化求极限的过程.

例 18 设 $a > 0$, 证明: $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

证明 记 $y = x - x_0$, 则当 $x \to x_0$ 时有 $y \to 0$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (a^x - a^{x_0}) &= a^{x_0} \lim_{x \to x_0} (a^{x - x_0} - 1) \\ &= a^{x_0} \lim_{y \to 0} (a^y - 1) = 0. \end{aligned}$$

例 19 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 其中 A,B 都是实数. 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=A^B.$$

证明 令 $y=g(x)\ln f(x)$. 由条件可知当 $x\to x_0$ 时, 有 $y\to B\ln A$. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)}\\ &= \lim_{y\to B\ln A} e^{y}\\ &= e^{B\ln A}\\ &= A^B.\end{aligned}$$

1.3.5 函数极限存在的判别法

定理 8 (两边夹定理) 设在 x_0 的附近, 有 $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, 而且当 $x \to x_0$ 时, 函数 $h(x)$ 和 $g(x)$ 都以 l 为极限, 那么, $f(x)$ 也以 l 为极限.

证明 证法与数列的两边夹定理类似. 因为 $h(x)$ 和 $g(x)$ 都以 l 为极限, 所以对任意正数 ε 存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon, \quad l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon,$$

因为 $f(x)$ 在 $h(x)$ 和 $g(x)$ 之间, 上面的不等式蕴含

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon,$$

即 $|f(x) - l| < \varepsilon$. 于是 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

定理 9 设 $f(x)$ 在 (a,b) 中单调有界, 则 $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 均存在.

证明 我们来证 $f(b-0)$ 存在. 不妨设 $f(x)$ 为单调增. 由于 $f(x)$ 在 (a,b) 有上界, 故有上确界 M. 下面就来证明 $f(b-0)=M$.

任给 $\varepsilon>0$, 由于 $M-\varepsilon$ 不是 $f(x)$ 的上界, 故必存在 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>M-\varepsilon$. 取 $\delta=b-x_0$, 由 f 的单调性可知, 当 $b-\delta=x_0<x<b$ 时, 就有

$$M-\varepsilon<f(x)\leqslant M.$$

因此 $f(b-0)=M$.

推论 1 设 $f(x)$ 在 (a,b) 中单调有界, 则 $f(x)$ 在(a,b) 中每一点 x_0 都有左右极限.

证明 取 $x_0\in(a,b)$, 只要分别在 (a,x_0) 和 (x_0,b) 中应用定理 9 即可.

定理 10 (Cauchy **判别准则**) 函数 $f(x)$ 在 x_0 有极限的充分必要条件是: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x' - x_0|, |x'' - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

证明 "$\Rightarrow$" 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. 则对于任意 $\varepsilon > 0$, 按极限的定义存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

故当 $0 < |x' - x_0|, |x'' - x_0| < \delta$ 时

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - l| + |l - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

"$\Leftarrow$" 假设对于任意给定的正数 ε, 存在 $\delta > 0$, 使得当

$$0 < |x' - x_0|, |x'' - x_0| < \delta$$

时有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

因为对于任意一个以 x_0 为极限的数列 $\{a_n\}$ $(a_n \neq x_0)$, 存在自然数 N, 使得当 $m, n > N$ 时, 有

$$0 < |a_m - x_0|,\ |a_n - x_0| < \delta,$$

因此也就有

$$|f(a_m) - f(a_n)| < \varepsilon.$$

所以数列 $\{f(a_n)\}$ 满足数列的 Cauchy 收敛准则, 故收敛. 设

$$\lim f(a_n) = l.$$

这个极限 l, 也正是函数在 $x \to x_0$ 时的极限. 事实上对于任意给定的正数 ε, 一方面, 由充分性条件可知, 存在 $\delta > 0$, 使得当

$$0 < |x' - x_0|,\ |x'' - x_0| < \delta$$

时, 都有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

另一方面, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, 故存在一个自然数 m, 使

$$0 < |a_m - x_0| < \delta, \quad |f(a_m) - l| < \varepsilon/2.$$

于是当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x) - l| \leqslant |f(x) - f(a_m)| + |f(a_m) - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

1.3.6 两个重要极限

定理 11 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

证明 首先考虑右极限. 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$, 由于 $\sin x>0$, 由引理1 易知

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

因此

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2<2\sin\frac{x}{2}<x.$$

由两边夹的方法得到

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

当 $x \to 0^-$时, 令 $y = -x$, 则 $y \to 0^+$, 则有

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

所以定理得证.

定理 12 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

证明 首先对任意的 $x>1$, 有 $[x]\leqslant x<[x]+1$, 以及

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} = e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]}\right) = e.$$

所以根据两边夹的法则, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

当 $x \to -\infty$ 时, 令 $y = -x$, 则 $y \to +\infty$, 利用上面结果, 就有

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e,$$

从而就有了定理的结果. 证毕.

定理 12 中的极限, 还有下列一种常见的等价形式

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

例 20 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ 以及 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$.

证明 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 因为

$$0 < 1 - \cos x < x$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0+}\cos x = 1$. 但 $\cos x$ 是偶函数, 故有 $\lim\limits_{x\to 0-}\cos x = 1$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

根据这个结果, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.$$

例 21 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\\ &= \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 22 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 令 $y=(1+x)^{1/x}$, 则当 $x\to 0$ 时, $y\to e$. 根据复合函数的极限, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}\\ &= \lim_{y\to e}\ln y\\ &= \ln e\\ &= 1.\end{aligned}$$

例 23 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

解 令 $y=\frac{2}{x-1}$, 则 $x=1+\frac{2}{y}$. 当 $x\to+\infty$ 时, $y\to 0^+$. 因此,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x\\ &= \lim_{y\to 0^+}(1+y)^{1+2/y}\\ &= \lim_{y\to 0^+}(1+y)\left((1+y)^{1/y}\right)^2\\ &= e^2.\end{aligned}$$

1.3.7 无穷大量与无穷小量

无穷小量及其比较

定义 6 在一个极限过程中趋于零的量称为(在这个极限过程中的)无穷小量. 在一个极限过程中总是有界的量称为(在这个极限过程中的)有界量.

注意, 1. 无穷小量是变量不是数. 2. 这个变量的极限为零. 3. 无穷小量也是有界量. 例如,

$\frac{1}{n^2}$ 和 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$ 当 $n \to +\infty$ 时都是无穷小量.

$\sin x$ 和 $\cos x - 1$ 当 $x \to 0$ 时都是无穷小量.

$(-1)^n$ 当 $n \to +\infty$ 时是有界量.

习惯上, 用 $o(1)$ 表示无穷小量. 用 $O(1)$ 表示有界量.

性质 1 有限个无穷小量的代数和及其乘积仍是无穷小量，即，

$$o(1)+o(1)=o(1),\quad o(1)\cdot o(1)=o(1).$$

性质 2 无穷小量与有界量的和是有界量，无穷小量与有界量的乘积是无穷小量，即，

$$o(1)+O(1)=O(1),\quad o(1)\cdot O(1)=o(1).$$

证明 我们来证明第二个式子. 设 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时是无穷小量，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 再设 $g(x)$ 当 $x\to+\infty$ 是有界量，即，存在 x_0 及 $M>0$ 使得当 $x>x_0$ 时 $|g(x)|<M$. 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 知，对任意 $\varepsilon>0$ 存在 $A>x_0$ 使得当 $x>A$ 时，有

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{M},$$

因此当 $x>A$ 时有 $|f(x)g(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$. 于是 $f(x)g(x)$ 是无穷小量.

定义 7 (**无穷小量的比较**) 设在同一个极限过程中 (以 $x \to x_0$ 为例) 变量 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是无穷小量, 并且 $\beta(x) \neq 0$.

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ 为一有限数, 则称当 $x \to x_0$ 时, $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量. 特别当 $A = 1$ 时, 称 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是等价无穷小量, 记为

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \quad (x \to x_0).$$

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 更高阶的无穷小量, 这意味着 $\alpha(x)$ 趋于零的速度比 $\beta(x)$ 趋于零的速度更快, 此时记为

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \quad (x \to x_0).$$

记号 $\alpha(x) = o(1)$ $(x \to x_0)$ 就表示 $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, 即 $\alpha(x)$ 是无穷小量.

(3) 如果存在一个正数 M, 使得在 x_0 的附近, 有 $\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right| \leqslant M$, 则记为

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \quad (x \to x_0).$$

特别, $\alpha(x) = O(1)$ $(x \to x_0)$ 就表示在 x_0 的附近 $\alpha(x)$ 是一个有界量.

例 24

$$\sin x \sim x \quad (x \to 0)$$

$$\tan x \sim x \quad (x \to 0)$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \quad (x \to 0)$$

$$\ln(x+1) \sim x \quad (x \to 0)$$

$$\sqrt{x+1} - 1 \sim \frac{1}{2}x \quad (x \to 0)$$

性质 3 (**等价无穷小替换**) 设当 $x \to x_0$ 时, $\alpha(x), \alpha_1(x), \beta(x), \beta_1(x)$ 都是无穷小量, 且 $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$. 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在, 则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ 也存在, 且

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

证明 只需注意到

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}$$

即可完成证明.

例 25 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$

解 因为 $\sin x\sim x$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)=2.$$

例 26 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

需注意的是只能对无穷小量和无穷大量的因子实行等价替换, 而用加、减号连接的式子里, 就不能任意实行等价替换, 例如在上面的例子中, 分子里的 $\tan x$ 和 $\sin x$ 如果用等价无穷小量 x 去替换, 就会得到错误的结果.

定义 8 (**无穷小量的阶**) 当 $x \to x_0$ 时, 若 $\alpha(x)$ 是与 $(x-x_0)^k$ 同阶的无穷小量, 其中 k 是正常数, 则称 $\alpha(x)$ 是关于 $x-x_0$ 的 k 阶无穷小量.

$\sin x$, $\tan x$, $\ln(x+1)$, e^x-1 都是当 $x \to 0$ 时关于 x 的一阶无穷小量.

$1-\cos x$, e^x-1-x 都是当 $x \to 0$ 时关于 x 的二阶无穷小量.

注意, 并不是所有无穷小量都有阶, 例如,

$$x \sin \frac{1}{x}$$

是当 $x \to 0$ 时的无穷小量, 但关于 x 是没有阶的.

无穷大量及其比较

定义 9 设 $f(x)$ 在 x_0 附近定义. 若对任意 $M > 0$ 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > M$, 则称当 $x \to x_0$ 时, $f(x)$ 是一个无穷大量, 记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

注 1: 也可以定义在其它极限过程 (如 $x \to +\infty$) 中的无穷大量.

注 2: 无穷大和无穷小量都与极限过程有关, 例如, 当 $x \to 0$ 时 $\frac{1}{x}$ 是无穷大量, 但当 $x \to +\infty$ 时 $\frac{1}{x}$ 是无穷小量. 又例如函数 $\tan x$ 当 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时是无穷大量, 但当 $x \to 0$ 时是无穷小量.

性质 4 两个无穷大量的乘积仍是无穷大量. 记为

$$\infty \cdot \infty = \infty.$$

性质 5 无穷大量与有界量的和或差仍是无穷大量. 记为

$$\infty \pm O(1) = \infty.$$

性质 6 无穷大量与非零常数的乘积仍是无穷大量. 记为

$$\infty \cdot C = \infty, \quad (C\text{是非零常数}).$$

定义 10 设在同一极限过程中 (以 $x \to x_0$ 为例), 变量 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 都是无穷大量.

(1) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ 为有限数, 则称当 $x \to x_0$ 时, $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是同阶无穷大量. 特别当 $A = 1$ 时, 称为等价无穷大量, 此时记为

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \quad (x \to x_0).$$

(2) 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称当 $x \to x_0$ 时, $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 更高阶的无穷大量, 此时 $\beta(x)$ 趋于无穷大的速度比 $\alpha(x)$ 更快, 可记为

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \quad (x \to x_0).$$

(3) 如果存在正常数 M, 使得在 x_0 附近有 $\left|\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right| \leqslant M$, 则记为

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \quad (x \to x_0).$$

例 27 设 $\alpha > 0$. 则当 $x \to +\infty$ 时, x^α 是比 $\ln x$ 更高阶的无穷大量.

证明 对 $x > 1$, 存在自然数 k, 使得

$$2^{k-1} < x \leqslant 2^k.$$

故有

$$\ln x \leqslant k \ln 2 < k.$$

于是

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2k}{2^k} = \frac{2k}{(1+1)^k} < \frac{2k}{\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{4}{k-1}.$$

由于当 $x \to +\infty$ 时, $k \to +\infty$, 故由两边夹定理, 即有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

设 $\alpha > 0$, 则当 $x \to +\infty$ 时, $y = x^\alpha \to +\infty$, 故

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^\alpha}{\alpha x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0.$$

所以对任何 $\alpha > 0$, 都有

$$\ln x = o(x^{\alpha}) \quad (x \to +\infty).$$

即当 $x \to +\infty$ 时, 不管 α 是多小的正数, $\ln x$ 都是比 x^{α} 还低级的无穷大量. 所以它趋向无穷大的速度“很慢”.

例 28 设 $\alpha > 0, a > 1$, 则当 $x \to +\infty$ 时, a^x 是比 x^{α} 更高阶的无穷大量.

证明 令 $a = 1 + b$, $b > 0$. $n = [x/\alpha] - 1$, 则 $\alpha(n+1) \leqslant x < \alpha(n+2)$

$$\frac{a^{x/\alpha}}{x} = \frac{(1+b)^{x/\alpha}}{x} > \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{x} > \frac{\frac{1}{2}n(n+1)b^2}{\alpha(n+2)} \to \infty, \quad (x \to +\infty)$$

当无穷大量和无穷小量出现在同一个式子中时可能产生所谓的"未定式", 如:

$\frac{0}{0}$ 表示两个无穷小量的商.

$\frac{\infty}{\infty}$ 表示两个无穷大量的商.

$0 \cdot \infty$ 表示一个无穷小量与一个无穷大量的乘积.

$\infty \pm \infty$ 表示两个无穷大量的和或差.

1^{∞} 和 ∞^{0} 也是未定式.