微分方程

解的延伸定理及应用

Picard定理保证$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t,\vec{x}) \text{ in } D \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$的解在区间$I = [t_0 - h, t_0 + h]$上

存在唯一，其中$h = \min\{a, \dfrac{b}{M}\}$，　$M = \operatorname*{Max}_D \left|\vec{f}(t,\vec{x})\right|$.

问题：如果$\vec{f}(t,\vec{x})$的定义域D越大，解的存在区间也应越大，

但由Picard定理的结论，可能出现这种情况：即随着$\vec{f}(t,\vec{x})$

的定义域的增大，解的存在唯一区间反而缩小.

例　对$\begin{cases} x' = t^2 + x^2 \\ x(0) = 0 \end{cases}$，当取定义域为$D: -1 \le t \le 1, -1 \le x \le 1$ 时,

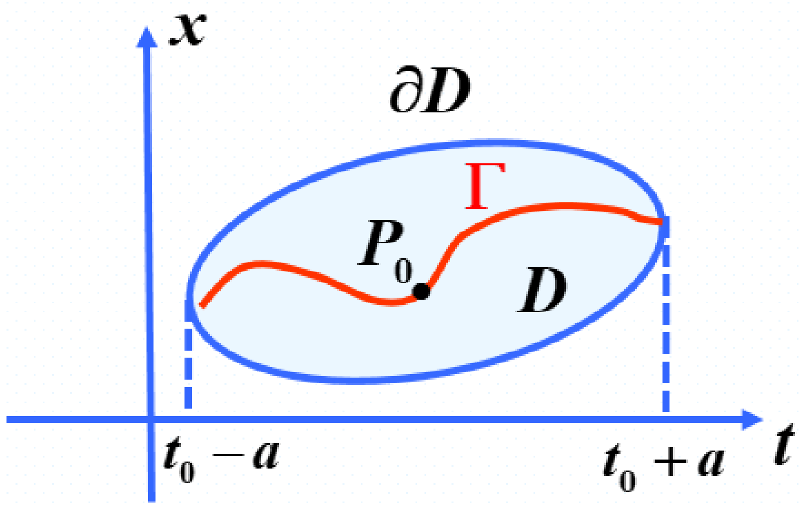
解的存在区间$|t| \le h = \min\{1, \dfrac{1}{2}\} = \dfrac{1}{2}$. 定义域为$D: -2 \le t \le 2, -2 \le x \le 2$ 时,

解的存在区间$|t| \le h = \min\{2, \dfrac{2}{8}\} = \dfrac{1}{4}$,变小！

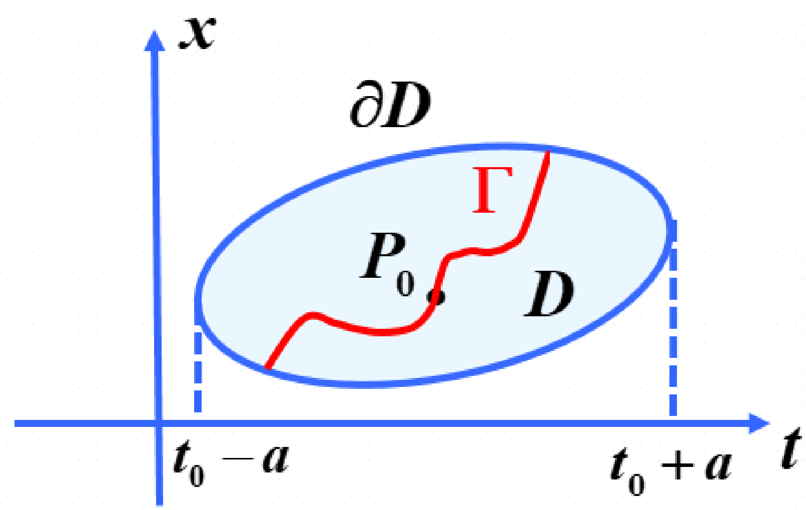
解决办法：延伸思想

解的延伸定理： 设$\vec{f}(t,\vec{x})$在开区域D内连续且Γ是方程$\dfrac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(t,\vec{x})$过$D$内任一点$P_0(t_0,x_0)$的任一条积分曲线,则$\Gamma$将在区域$D$内延伸到边界.

注： D未必有界. 对任何有界闭区域$D_1\subset D$，Γ将延伸到D_1之外. 另外，积分曲线不一定到达定义区间左右端点，到边界即可.



可以到达左右端点



不能到达左右端点

延伸定理的证明:

记$\Gamma: \vec{x}(t)=\vec{\varphi}(t), t\in J$：最大存在区间（饱和解）.

先考虑右最大存在区间$J^{+}=J\bigcap[t_0,+\infty)$,则有以下三种情形:

1) $J^{+}=[t_0,+\infty)$,显然可以延伸到边界.

2) $J^{+}=[t_0,t_1]$, $t_0<t_1<+\infty$.

因D为开区域,故存在闭子区域

$$D_1=\{(t,\vec{x})\,||\,t-t_1|\le a_1, |\vec{x}-\vec{\varphi}(t)|\le b_1\}\subset D,$$

其中$a_1,b_1>0$充分小,则有Peano定理知在D_1内至少有一个解

$$\vec{x}=\vec{\psi}(t)\ \left(|t-t_1|\le h_1=\min\{a_1,\frac{b_1}{\max_{D_1}|\vec{f}\,|}\}\right).$$

满足初值条件$\vec{\psi}(t_1)=\vec{\varphi}(t_1)$,从而$\vec{x}(t)=\begin{cases}\vec{\varphi}(t), & t_0\le t\le t_1\\ \vec{\psi}(t), & t_1<t\le t_1+h_1\end{cases}$

满足方程,即Γ的存在区间$\supset[t_0,t_1+h_1]\Rightarrow$矛盾！此情形排除.

3) $J^+=[t_0,t_1),\ t_0<t_1<+\infty.$

反证法.若Γ不能延伸到D的边界,则存在闭子区域D_2使得

$(t,\vec{\varphi}(t))\in D_2,\forall t\in J^+$.由中值定理易知

$$|\vec{\varphi}(t)-\vec{\varphi}(\tilde{t})|=|\vec{\varphi}'(\theta)(t-\tilde{t})|\le K|t-\tilde{t}|,K=\max_{D_2}|\vec{\varphi}'|.$$

从而由函数极限的Cauchy收敛准则知$\lim\limits_{t\to t_1}\vec{\varphi}(t)=\vec{x}_1$存在.

$\therefore\vec{\psi}(t)=\begin{cases}\vec{\varphi}(t), & t_0\le t<t_1\\ \vec{x}_1, & t=t_1\end{cases}$在$[t_0,t_1]$上连续且满足积分方程

$\vec{\psi}(t)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(s,\vec{\psi}(s))ds\Rightarrow$Γ可以延伸到$[t_0,t_1]$,矛盾！

因此Γ一定能延伸到D的边界.对向左延伸情形类似. 证毕.

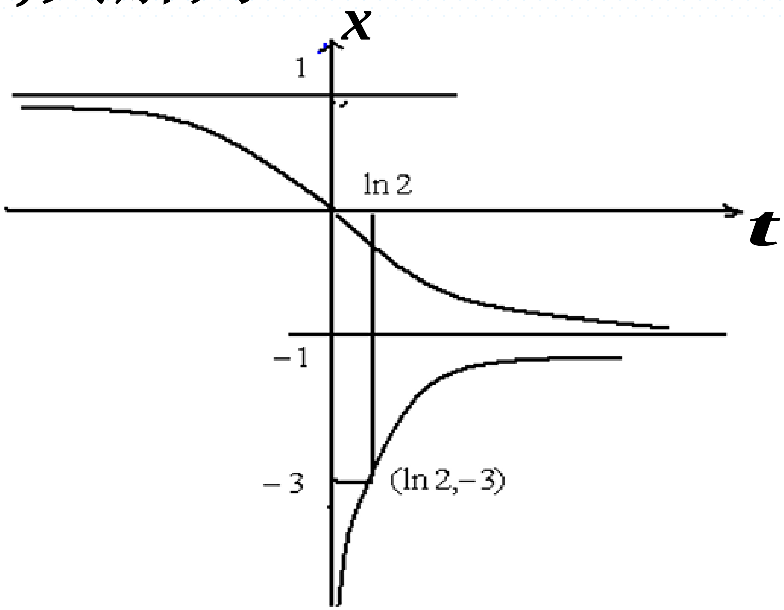
推论：如果函数$\vec{f}(t,\vec{x})$在区域D内连续，且在D内$\vec{f}(t,\vec{x})$关于$\vec{x}$满足局部Lipschitz条件，则方程过D内一点$(t_0,\vec{x}_0)$存在唯一解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$且它可延伸到D的边界.

局部Lipschitz条件：对于$\vec{f}(t,\vec{x})$定义域D内任一点$(t_0,\vec{x}_0)$，都存在以这点为中心完全属于D的闭矩形区域R，使得$\vec{f}(t,\vec{x})$在R上关于$\vec{x}$满足Lipschitz条件.相应的李氏常数L依赖区域R.

例 求方程$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x^2-1}{2}$过点$(\ln 2,-3)$的解最大存在区间.

解 该方程右侧函数定义在整个O_{tx}平面上且满足解的存在唯一性定理及解的延伸定理条件,其解为

$$x=\frac{1+Ce^t}{1-Ce^t},$$



故过点$(\ln 2,-3)$的解为$x=\dfrac{1+e^t}{1-e^t}$

这个解的存在区间为$(0,+\infty)$,

如右图,过点$(\ln 2,-3)$的解向右可延拓到$+\infty$,但向左只能延伸到0,因$t\to 0$时,$x\to+\infty$.

例 证明Riccati方程$x' = t^2 + x^2$任一解的存在区间有界.

解 $t^2 + x^2$在O_{tx}平面光滑,满足$x(t_0) = x_0$的解$x = x(t)$可以延伸到无穷远处. 设$J^+ = [t_0, +\infty)$,令$a = |t_0| + 1 \le t < +\infty$时,

$$x' = t^2 + x^2 \ge a^2 + x^2 \Rightarrow \frac{x'}{a^2 + x^2} \ge 1$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} \frac{x'}{a^2 + x^2} dt \ge \int_a^{+\infty} 1 dt = +\infty.$$

但左边$\int_a^{+\infty} \frac{x'}{a^2 + x^2} dt = \frac{1}{a}(\arctan\frac{x(\infty)}{a} - \arctan\frac{x(a)}{a}) \le \frac{\pi}{a}$,

矛盾！因此它的存在区间一定是有界区间.

12th Oral Exam of S.-T. Yau College Student Mathematics Contests 2021

Analysis and differential equations

Group Contest

4. Prove that the life span of any solution to the following differential equation

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

is finite.

例 讨论方程初值问题$\begin{cases} x' = \dfrac{x(x-1)}{1+t^2+x^2} \\ x(t_0) = x_0 \in (0,1) \end{cases}$ 解的最大存在区间.

解 $f(t,x) = \dfrac{x(x-1)}{1+t^2+x^2}, f_x(t,x) = \dfrac{(2x-1)(1+t^2+x^2)-2x^2(x-1)}{(1+t^2+x^2)^2}$

在O_{tx}平面连续，$f(t,x)$在O_{tx}平面满足局部$L-$条件，故方程在O_{tx}平面上满足解的存在唯一性定理和解的延伸定理的条件. 显然$x=0, x=1$均为方程在$(-\infty,+\infty)$的解.任取$t_0 \in (-\infty,+\infty), x_0 \in (0,1)$，令$x = x(t)$为过$(t_0, x_0)$的解，则$x(t)$可以唯一地向无穷远处延伸，但上不能穿越$x=1$，下不能穿越$x=0$，故它的最大存在区间是$(-\infty,+\infty)$.