§3.4 Cauchy 中值定理和未定式的极限

3.4.1 Cauchy 中值定理

定理 1 (Cauchy **中值定理**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微. 而且对任一点 $x \in (a,b), g'(x) \neq 0$. 则在 (a,b) 内, 必存在一点 ξ, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明 设辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\Big(g(x) - g(a)\Big)$$

易知, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $F(b) - F(a) = 0$. 即, $F(x)$ 满足 Rolle 定理的三个条件.

根据 Rolle 定理, 存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi) = 0.$$

根据条件有 $g'(\xi) \neq 0$, 及 $g(a) \neq g(b)$. 于是有

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

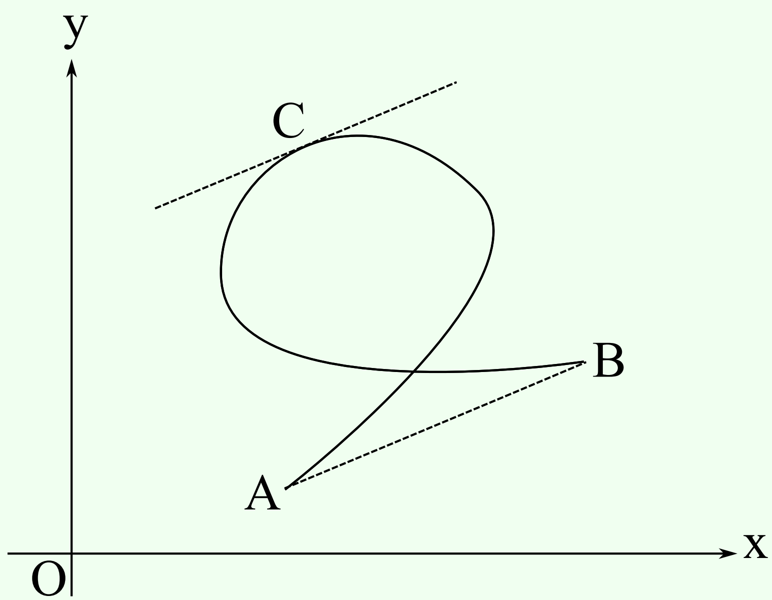
此即定理的结论. 证毕.

Cauchy 中值定理的几何意义

设 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $t \in [a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微. 考察参数方程

$$x = g(t),\ y = f(t), \quad (t \in [a,b])$$

所确定的曲线 L, 该曲线的两个端点是 $A = (g(a), f(a))$ 和 $B = (g(b), f(b))$, 连接这两个端点的直线的斜率是 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. 根据条件知在曲线 L 上除端点外的每一点都是有切线的. Cauchy 中值定理的几何意义就是曲线上有一点 $C = (g(\xi), f(\xi))$ 的切线斜率 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 恰好等于 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.



例 1 设 $0 < a < b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可导. 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

证明 所要证明的式子可以写成

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}} = \left.\frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\right|_{x=\xi}.$$

因此只要对函数 $\frac{f(x)}{x}$ 和 $\frac{1}{x}$ 应用 Cauchy 中值定理, 即可得到结论.

例 2 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 其中 $g'(x)$ 在区间 (a,b) 中无零点. 求证: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}.$$

证明 考察函数

$$F(x) = \big(f(x)-f(a)\big)\big(g(b)-g(x)\big).$$

根据条件可知, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且显然有 $F(a) = F(b) = 0$. 由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即,

$$f'(\xi)\big(g(b)-g(\xi)\big) - g'(\xi)\big(f(\xi)-f(a)\big) = 0.$$

由于 $g'(x)$ 在区间 (a,b) 中无零点, 有 $g'(\xi) \neq 0$, 及 $g(b)-g(\xi) \neq 0$. 因而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}.$$

定理 2 (Cauchy **中值定理的推广**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 阶导函数, 且对任意 $x\in(a,b)$ 有 $g^{(n)}(x)\neq 0$. 则在 $\xi\in(a,b)$ 内, 使得

$$\frac{f(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}{g(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}.$$

证明 构造两个函数

$$F(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$G(x)=g(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

则 $F(x)$ 和 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上有 n 阶导函数, 且

$$F(a)=F'(a)=\cdots=F^{(n-1)}(a)=0,$$

$$G(a)=G'(a)=\cdots=G^{(n-1)}(a)=0.$$

由于 $g^{(n)}(x) \neq 0$, 反复应用 Rolle 定理可知 $G^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ 在 (a, b) 内无零点. 再反复应用 Cauchy 中值定理, 有

$$
\begin{aligned}
\frac{F(b)}{G(b)} &= \frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} \\
&= \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} \\
&= \cdots \\
&= \frac{F^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - F^{(n-1)}(a)}{G^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - G^{(n-1)}(a)} = \frac{F^{(n)}(\xi)}{G^{(n)}(\xi)} \\
&= \frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}
\end{aligned}
$$

其中 $a < \xi < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_2 < \xi_1 < b$.

3.4.2 $\frac{0}{0}$ 型未定式

定理 3 ($\frac{0}{0}$ **型 L'Hospital 法则**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 附近可微, $g'(x) \neq 0$, 且满足

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, 那么有 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 这里 l 可以是一个有限实数, 也可以是 ∞.

证明 由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, 而且当 $x \to x_0$ 时, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限与函数 f 和 g 在 x_0 的值无关, 因此我们不妨假设 $f(x_0) = g(x_0) = 0$, 这样, 函数 f 和 g 在 x_0 都连续.

设 x 是区间 $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ 中的任意一点 ($x \neq x_0$) , 在以 x 和 x_0 为端点的闭区间上, f 和 g 满足 Cauchy 中值定理的一切条件, 于是存在介于 x

和 x_0 之间的一点 ξ, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

因为 $|\xi - x_0| < |x - x_0|$, 所以当 $x \to x_0$ 时, $\xi \to x_0$. 由定理的假设, 即得到

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = l.$$

注1: 定理中的极限过程可改为单测极限 (即$x \to x_0 \pm 0$), 此时结论同样成立, 另一方面对于极限过程 $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ 或 $x \to \infty$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 也有类似的 L'Hospital 法则.

以 $x \to \infty$ 时为例, 如果 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, 则 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

证明的过程中只要设 $y=\frac{1}{x}$, 则 $x\to\infty$ 时, $y\to 0$, 而且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{y^2}f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y^2}g'\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

注2: 在使用 L'Hospital 法则时, 如果 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 即不但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$, 而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g'(x)=0$, 则可以继续考虑二阶导数, 如果 $\lim\limits_{\xi\to x_0}\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}=l$, 则 $\lim\limits_{\xi\to x_0}\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=l$. 不管使用几次, 前提条件一是前者必须是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 二是后者的极限一定存在, 两者缺一不可.

注3: 在使用 L'Hospital 法则之前, 最好先用等价无穷小替换的方法将分子或分母换成简单的函数.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}$.

解 这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 由 L'Hospital 法则知

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}2e^{2x}=2$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$.

解 这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 但分子分母各自求导后的比式

$$\frac{(e^{x}+e^{-x}-2)'}{(\sin^2 x)'}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin 2x}$$

仍然是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 因此需要再次使用 L'Hospital 法则, 即

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2\cos 2x}=1.$$

3.4.3 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 4 ($\frac{\infty}{\infty}$ **型** L'Hospital **法则**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 附近可微, $g'(x) \neq 0$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, 则有 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 这里 l 可以是一个有限实数, 也可以是 ∞.

证明 只对 l 为实数的情况证明, $l = +\infty$ 或 $l = -\infty$ 的情况类似. 由 $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ 时, 有

$$l - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \varepsilon.$$

由 Cauchy 中值定理, 对于 $(x, c) \subset (x_0, x_0 + \delta_1)$, 存在 $\xi \in (x, c)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

因此,

$$l - \varepsilon < \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} < l + \varepsilon.$$

由于 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, 对于固定的 c, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, 有 $\left|\frac{g(c)}{g(x)}\right| < \varepsilon$, $\left|\frac{f(c)}{g(x)}\right| < \varepsilon$. 于是, 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(c)}{g(x)} + \frac{f(c)}{g(x)} \\ &< l + \varepsilon + (|l| + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon; \end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} > l - \varepsilon - (|l| + \varepsilon)\varepsilon - \varepsilon.$$

因此,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < (2 + |l| + \varepsilon)\varepsilon.$$

由此证明了 $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. 同理, 有 $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. 证毕.

L'Hospital 法则与 Stolz 定理的比较

($\frac{0}{0}$ **型 L'Hospital 法则**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上可微, $g'(x) \neq 0$, 且当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都趋于 0,

$$\text{如果} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad \text{那么有} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

这里 A 可以是一个有限实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

($\frac{0}{0}$ **型 Stolz 定理**) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个趋于零的数列, 且 $\{b_n\}$ 严格单调递增.

$$\text{如果} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A, \quad \text{那么有} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = A,$$

其中 A 可以是实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

($\frac{\infty}{\infty}$ **型** L'Hospital **法则**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上可微, $g'(x) \neq 0$, 且 $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty$.

$$\text{如果} \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \quad \text{那么有} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

这里 A 可以是一个有限实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

($\frac{\infty}{\infty}$ **型** Stolz **定理**) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\{b_n\}$ 严格单调递增趋于 $+\infty$.

$$\text{如果} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A, \quad \text{那么有} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A,$$

其中 A 可以是实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

例 5 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}f'(x)=0$. 求证:

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2}f(x)=0.$$

证明 根据 L'Hospital 法则, 有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{-x^2} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{2xe^{x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}\cdot f'(x)e^{-x^2}=0.\end{aligned}$$

再根据 L'Hospital 法则, 得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)}{e^{x^2}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+xf'(x)}{2xe^{x^2}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x}\cdot f(x)e^{-x^2}+\frac{1}{2}f'(x)e^{-x^2}\right)=0.\end{aligned}$$

例 6 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+xf'(x)\ln x)=l$. 求证: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

证明
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\ln x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)\ln x+f(x)\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}(f(x)+xf'(x)\ln x)=l.$$

例 7 设 $\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$.

解 这是一个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 所以
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}\cdot x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$
如果用 $\frac{1}{x}$ 代替 x, 则 $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=0$.

这个例子说明无论 α 是多小的正数, 当 $x\to+\infty$ 时, 幂函数 x^α 总是比对数函数更高阶的无穷大量.

例 8 设 $\mu > 0$, $a > 1$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\mu}{a^x}$.

解 注意到, 只要 $\mu - k > 0$, 当 $x \to +\infty$ 时, 本题的分子部分 k 次导函数仍是无穷大量, 而分母部分的任意阶导函数都是无穷大量. 因此取正整数 $n > \mu$. 则当 $x > 1$ 时有

$$0 < \frac{x^\mu}{a^x} < \frac{x^n}{a^x}.$$

接连使用 n 次 L'Hospital 法则就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \cdots \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x (\ln a)^n} = 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = 0.$$

此例说明, $a > 1$ 时, 有 $a^x >> x^\mu$ $(x \to +\infty)$.

例 9 设 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0)=1$, $f''(0)\neq 0$, 且 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$. 令

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_1\in(0,a).$$

(i) 求证 $\{x_n\}$ 收敛并求极限;

(ii) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则说明理由. 若收敛, 则求其极限.

证明 (i) 由条件有 $0<x_2=f(x_1)<x_1$, 归纳地可证得

$$0<x_{n+1}<x_n,$$

于是 $\{x_n\}$ 有极限, 设为 x_0. 由 f 的连续性, 及 $x_{n+1}=f(x_n)$ 得

$$x_0=f(x_0).$$

又因为当 $x>0$ 时, $f(x)>x$, 所以只有 $x_0=0$. 即,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

(ii) 由 Stolz 定理和 L'Hospital 法则,

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1/x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/x_{n+1} - 1/x_n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n - x_{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n f(x_n)}{x_n - f(x_n)} = \lim_{x\to 0} \frac{xf(x)}{x - f(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) + xf'(x)}{1 - f'(x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2f'(x) + xf''(x)}{-f''(x)}$$
$$= -\frac{2}{f''(0)}$$

例 10 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上三次可导, 且 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上均取正值. 如果存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)f'''(x)}{(f''(x))^2}=l,\ l\neq 1, \tag{1}$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{1}{2-l}.$$

证明 先证

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{xf''(x)}=1-l. \tag{2}$$

即,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{f'(x)}{xf''(x)}\right)=l.$$

由 L'Hospital 法则和 (1) 可得

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{f'(x)}{xf''(x)}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x-f'(x)/f''(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1-(f'(x)/f''(x))'}{1} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{(f''(x))^2-f'''(x)f'(x)}{(f''(x))^2}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{f'''(x)f'(x)}{(f''(x))^2}=l.
\end{aligned}$$

由 (2) 知 $1-l>0$, 于是有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf''(x)}{f'(x)}=\frac{1}{1-l}.$$

由中值定理, 当 $x > x_0 > 0$ 时, 存在 $\xi \in (x_0, x)$ 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

因此 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

再用 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x) + xf''(x)}{f'(x)} = 1 + \frac{1}{1-l} = \frac{2-l}{1-l},$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{xf''(x)}{f'(x)} \frac{f(x)}{xf'(x)} \\ &= \frac{1}{1-l}\frac{1-l}{2-l} = \frac{1}{2-l}.\end{aligned}$$

3.4.4 其他类型的未定式

除了前面重点介绍的 $\frac{0}{0}$ 型未定式和 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式之外, 还有下列几种未定式

$$0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^{\infty},\quad 0^{0},\quad \infty^{0}$$

前两种均容易化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型; 而后三种可通过现对函数取对数, 再化为基本的 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 因此上述五类未定式, 都可以用 L'Hospital 法则处理.

例 11 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

解 这是一个 $0\cdot\infty$ 型未定式, 可将它化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式处理

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

例 12 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{1-x}\right)$.

解 这是一个 $\infty-\infty$ 型未定式. 令 $y=x-1$, 则当 $x\to 1$ 时有 $y\to 0$. 原式可化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 在处理过程中, 可以用同阶的无穷小量进行替代, 如 $\ln(1+y)\sim y$, $y\to 0$, 所以

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y-\ln(1+y)}{y\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\ln(1+y)}{y^2}$$
$$=\lim_{y\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+y}}{2y}=\frac{1}{2}.$$

例 13 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

解 这是 0^0 型未定式, 由例 7 以及指数函数的连续性得

$$\lim_{x\to 0^+} x^x=\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x}=e^0=1$$

例 14 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 这是 1^∞ 型未定式, 令

$$y = y(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

则

$$\ln y = \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2}$$

这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2} = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

例 15 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

解 这是 ∞^0 型未定式, 记 $y = y(x) = x^{1/\sqrt{x}}$, 则 $\ln y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 由例 7 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, 所以

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to+\infty} \ln y} = e^0 = 1.$$

例 16 求 $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)^{\tan x}$.

解 这是 0^0 型未定式

$$\lim_{x\to 0} (1-\cos x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0} e^{\tan x \ln(1-\cos x)}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \tan x \ln(1-\cos x) &= \lim_{x\to 0} x \ln(1-\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^{-2}(\cos x - 1)} = 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\tan x}=1.$$

例 17 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}$.

解 这是 ∞^0 型未定式

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to+\infty} e^{\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)\ln x}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)\ln x&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln x}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}=1.$$

例 18 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$.

解 这是 $\infty-\infty$ 型未定式

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}$$
$$=\frac{1}{3}.$$

1. 是否存在可导函数 $f(x)$ 使得 $f'(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. 若 $f(x)$ 在区间上严格递增且可导, 则 $f'(x) > 0$.

3. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 则 $f'(x)$ 的值域是一个区间.

4. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, $x_0 \in (a, b)$. 若 $f'(x)$ 在 x_0 左边为正, 在 x_0 的右边为负, 则 $f(x)$ 在 x_0 取最大值.