# §4.2 有理函数的不定积分

## 4.2.1 有理函数的不定积分

所谓有理函数是指一个分子、分母都是 $x$ 的多项式的分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_n \neq 0;$$
$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0, \quad b_m \neq 0.$$

若 $n \geqslant m$, 称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理假分式; 若 $n < m$, 则称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理真分式.

由多项式的除法易知, 任何有理假分式可表示为一个多项式与一个有理真分式之和. 由于多项式的原函数易于计算, 其结果仍是一个多项式. 因此, 求有理函数的不定积分, 只需考虑有理真分式的不定积分.

**定理 1** (**代数学基本定理**) 设

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

是一个复系数 $n$ 次多项式, 即, $a_i \in \mathbb{C}$, $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 且 $a_n \neq 0$. 则存在复数 $z_1, z_2 \cdots, z_n$ 使得

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

**定理 2** (**多项式因式分解**) 任何实系数的 $m$ 次多项式 $Q(x)$ 可分解为乘积

$$Q(x) = b_m(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}, \quad (4.1)$$

这里 $r_1+\cdots+r_k+2s_1+\cdots+2s_l=m$, 所有的 $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j$ 都是实数, 且 $\beta_j^2-4\gamma_j<0$ $(j=1,2,\cdots,l)$.

**定理 3** (**部分分式分解**) 设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 分别是 $n$ 和 $m$ 次实系数多项式, 并且 $n<m$. 若 $Q(x)$ 已分解为 (4.1) 中的形式, 则存在实数 $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$, 使得

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{(x-\alpha_1)}+\cdots+\frac{A_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\cdots+\frac{A_{k,1}}{(x-\alpha_k)}+\cdots+\frac{A_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\\ &\quad+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)}+\cdots+\frac{B_{1,s_1}x+C_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}}+\cdots\\ &\quad+\frac{B_{l,1}x+C_{l,1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_l)}+\cdots+\frac{B_{l,s_l}x+C_{l,s_l}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}}.\end{aligned}$$

**例 1** 将 $\frac{1}{x^3+1}dx$ 进行部分分式分解.

**解** 因为 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$, 由定理 3, 可设

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

其中, $A, B, C$ 均是待定的实数. 将上式去分母, 得到恒等式

$$A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=1.$$

比较等式两边同次幂的系数, 有

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -A+B+C=0, \\ A+C=1. \end{cases}$$

由此可解得 $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$. 于是

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{-x+2}{x^2-x+1}.$$

求有理分式的不定积分, 可以化为求以下两种特殊类型分式的不定积分:

$$(1)\quad \frac{1}{(x-a)^k}; \qquad\qquad (2)\quad \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k},$$

其中 $k$ 是自然数, $p^2-4q<0,\ k=2,3,\cdots$ .

对于第一类的不定积分, 有

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}dx = \frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.\ (k>1)$$

对于第二类的不定积分, 有

$$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k} = \frac{a(x+\frac{p}{2})+b-\frac{ap}{2}}{\left((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^k}$$
$$= a\frac{t}{(t^2+d^2)^k} + b_1\frac{1}{(t^2+d^2)^k},$$

这里 $b_1 = b - \frac{ap}{2}$, $d = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, $t = x + \frac{p}{2}$.

当 $k=1$ 时, $\displaystyle\int \frac{t}{t^2+d^2}dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+d^2)+C$,

$$\int \frac{1}{t^2+d^2}dt = \frac{1}{d}\cdot\arctan\frac{t}{d}+C$$

当 $k>1$ 时, $\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+d^2)^k}dt = \frac{1}{2(1-k)}\cdot\frac{1}{(t^2+d^2)^{k-1}}+C$,

$\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+d^2)^k}dt$ 可用递推公式求出.

**例 2** 求 $\int \frac{1}{x^3+1}dx.$

**解** 根据前面的例子可知 $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{-x+2}{x^2-x+1}.$

$$\int \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1| + C.$$

$$\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx = \int \frac{-t+\frac{3}{2}}{t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}dt \qquad (t = x-\frac{1}{2})$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(t^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\right) + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right) + C$$

于是

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})\right) + C.$$

## 4.2.2 可有理化函数的原函数

可有理化函数: 通过换元可将函数表示为新变量的有理函数.

二元多项式: 形如 $P(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}a_{ij}x^iy^j$ 的二元函数.

二元有理式: 若 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是二元多项式, 则

$$R(x,y)=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

称为二元有理式.

1. **设** $R(x,y)$ **是二元有理式, 则** $\int R(\cos x, \sin x)dx$ **可有理化**

引入万能变换:

$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad |x| < \pi$$

则有

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

$$\frac{x}{2} = \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

**例 3** 求 $I=\int\frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

**解** 由万能变换: $t=\tan\frac{x}{2}$, 有

$$
\begin{aligned}
I &= \int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} \\
&= \frac{1}{2}\int\left(t+\frac{1}{t}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t+\ln|t|+C\right) \\
&= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C_1.
\end{aligned}
$$

另外的解法: 令 $t=\cos x$,

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x(1+\cos x)} \\
&= \int \frac{-d\cos x}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)} \\
&= -\int \frac{dt}{(1-t)(1+t)^2} \\
&= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t}\right) dt \\
&= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t+1|\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.
\end{aligned}
$$

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

2. **设** $R(x, y)$ **是二元有理式, 则** $\int R(\cosh x, \sinh x)dx$ **可有理化**

引入万能变换:

$$t = \tanh \frac{x}{2},$$

利用 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$, 可得

$$\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \ \sinh x = \frac{2t}{1-t^2}, \ dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

则

$$\int R(\cosh x, \sinh x)dx = \int R\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2dt}{1-t^2}.$$

3. **设** $R(x,y)$ **是二元有理式, 则** $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ **可有理化, 其中** $ad \neq bc$

作换元 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, 则

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},\ x = \frac{dt^n - b}{-ct^n + a},$$

$\frac{dx}{dt}$ 是 $t$ 的有理式.

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^n - b}{-ct^n + a}, t\right)\frac{dx}{dt}\cdot dt.$$

**例 4** 求 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2+x}}$.

**解** 令 $t=\sqrt{2+x}$, 则 $x=t^2-2$, $dx=2tdt$. 所以

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x+\sqrt{2+x}} &= \int \frac{1}{t^2+t-2} 2tdt \\
&= \frac{2}{3} \int \frac{3t}{(t+2)(t-1)} dt \\
&= \frac{2}{3} \int \left( \frac{2}{t+2} + \frac{1}{t-1} \right) dt \\
&= \frac{2}{3} \big( 2\ln|t+2| + \ln|t-1| \big) + C \\
&= \frac{4}{3} \ln(\sqrt{2+x}+2) + \frac{2}{3} \ln|\sqrt{2+x}-1| + C.
\end{aligned}
$$

4. **设** $R(x,y)$ **是二元有理式, 则** $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)dx$ **可有理化**

作换元 $x=\cos t$ 则有

$$\int R\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)dx=-\int R\left(\cos t,\sin t\right)\cos t\,dt.$$

5. **设** $R(x,y)$ **是二元有理式, 则** $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt{x^2-1}\right)dx$ **可有理化**

作换元 $x=\cosh t$, 则有

$$\int R\left(x,\sqrt{x^2-1}\right)dx=\int R\left(\cosh t,\sinh t\right)\sinh t\,dt.$$

6. **设** $R(x, y)$ **是二元有理式, 则** $\int R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right) dx$ **可有理化**

作换元 $x = \sinh t$, 则有

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right) dx = \int R(\sinh t, \cosh t) \cosh t \, dt.$$

也可直接用变换

$$u = x + \sqrt{x^2+1}.$$

则

$$x = \frac{u^2-1}{2u}, \quad \sqrt{x^2+1} = \frac{u^2+1}{2u}, \quad dx = \frac{u^2+1}{2u^2} du.$$

因此

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2+1}\right) dx = \int R\left(\frac{u^2-1}{2u}, \frac{u^2+1}{2u}\right) \frac{u^2+1}{2u^2} du.$$