主讲内容

1. 基本概念
2. 枢轴变量法 (区间估计量的求法I)
3. 区间估计与假设检验
   (区间估计量的求法II：反转一个检验统计量)
4. 区间估计量的评价方法

- **定义1.1** （【0】定义4.1.1，【1】定义9.1.1）（一维情形）
  设θ为一个实值参数，$\mathrm{L}(\vec{X})$和$\mathrm{U}(\vec{X})$是定义在样本空间$\mathcal{X}$上，取值在参数空间Θ上的任意一对函数，满足$\forall \vec{x} \in \mathcal{X}$, 均有$\mathrm{L}(\vec{x}) \leq \mathrm{U}(\vec{x})$。如果观测到样本$\vec{X} = \vec{x}$，则作出推断$\mathrm{L}(\vec{x}) \leq \theta \leq \mathrm{U}(\vec{x})$，则称随机区间$[\mathrm{L}(\vec{X}), \mathrm{U}(\vec{X})]$ 为**区间估计量**（Interval Estimator）.

注 根据需要也可考虑单侧区间估计，例如$(-\infty, \mathrm{U}(\vec{X})]$, $[\mathrm{L}(\vec{X}), \infty)$ 或者开区间$(\mathrm{L}(\vec{X}), \mathrm{U}(\vec{X}))$, 半开半闭等。

问 已有点估计，为何还要考虑区间估计？

Example (1.1)

（【1】例9.1.2） 设$X_1, \ldots, X_4$ $i.i.d. \sim N(\mu, 1)$，$\mu \in \mathbb{R}$未知，μ的点估计之一为$\overline{X}$，求
(1) $\overline{X}$恰好为真实值μ的概率$\mathbb{P}_\mu(\overline{X} = \mu)$?
(2) 真实值μ被区间$(\overline{X} - 1, \overline{X} + 1)$覆盖的概率$\mathbb{P}_\mu(\overline{X} - 1 < \mu < \overline{X} + 1)$?

注 任意一个区间估计$[L(\vec{X}), U(\vec{X})]$不一定包含θ，只能以一定概率，这个概率称为置信水平/覆盖概率。

- **定义1.2**（【0】定义4.1.2，【1】定义9.1.4，9.1.5）
  设$[L(\vec{X}), U(\vec{X})]$ 为参数θ的一个区间估计，则$[L(\vec{X}), U(\vec{X})]$包含θ的概率$\mathbb{P}_\theta(L(\vec{X}) \le \theta \le U(\vec{X}))$称为此区间估计的**置信水平**（Confidence Level）或覆盖概率（Coverage Probability）。置信水平在参数空间Θ上的下确界$\inf_{\theta\in\Theta} \mathbb{P}_\theta(L(\vec{X}) \le \theta \le U(\vec{X}))$称为该区间估计的**置信系数**（Confidence Coefficient）。

注1 置信水平一般与θ有关，此时如果针对一个θ_1，其值很小，而对另一个θ_2，其值很大，则在θ未知情形下，就难以判断总体情形。因此我们有必要考虑置信系数。

注2 一个区间估计置信水平或置信系数要越大越好。

- **定义1.3** （【0】定义4.1.4） 设$L(\vec{X})$, $U(\vec{X})$ 是定义在样本空间$\mathcal{X}$上，取值在参数空间Θ上的两个统计量。若对给定$\alpha \in (0,1)$，有

$$\mathbb{P}_\theta(\theta \le U(\vec{X})) \ge 1-\alpha, \forall \theta \in \Theta,$$
$$\mathbb{P}_\theta(\theta \ge L(\vec{X})) \ge 1-\alpha, \forall \theta \in \Theta,$$

  则分别称$U(\vec{X})$和$L(\vec{X})$是θ的置信水平为$1-\alpha$的（单侧）**置信上限**（Upper Confidence Limit）和**置信下限**（Lower Confidence Limit），而概率$1-\alpha$在参数空间Θ 上的下确界分别称为置信上、下限的置信系数。
- **定义1.4** （【0】定义4.1.5）（高维参数情形）
  设参数$\vec{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$, $k \ge 2$, 如果统计量$\mathbf{S}(\vec{X})$满足
  1. 对任一样本$\vec{x}$, $\mathbf{S}(\vec{x})$是Θ的一个子集,
  2. 对给定的$\alpha \in (0,1)$, $\mathbb{P}_{\vec{\theta}}(\vec{\theta} \in \mathbf{S}(\vec{X})) \ge 1-\alpha$, $\forall \in \Theta$,

  则称$\mathbf{S}(\vec{X})$是$\vec{\theta}$的置信水平为$1-\alpha$的**置信域**（Confidence Region）或置信集，而$\inf_{\vec{\theta}\in\Theta} \mathbb{P}_{\vec{\theta}}(\vec{\theta} \in \mathbf{S}(\vec{X}))$称为置信系数。

- 基本思想 利用参数的点估计构造置信区间。
- **定义2.1**（【1】定义9.2.6）称一个随机变量$Q(\vec{X},\theta)$是一个枢轴量或**枢轴**（Pivot），如果它的分布不依赖于参数θ。
- **枢轴变量法** 即利用$Q(\vec{X},\theta)$，找到一个集合A（不依赖于θ），对于给定置信系数/置信水平$1-\alpha$，满足$\mathbb{P}(Q(\vec{X},\theta)\in A)\geq 1-\alpha$; 同时，存在区间估计量$[\mathrm{L}(\vec{X}),\mathrm{U}(\vec{X})]$，使得$\forall\theta\in\Theta$,

$$\{\vec{x}\in\mathcal{X}:\mathrm{L}(\vec{x})\leq\theta\leq\mathrm{U}(\vec{x})\}=\{\vec{x}\in\mathcal{X}:Q(\vec{x},\theta)\in A\}.$$

- 正态总体参数的置信区间

Example (2.1)

（【0】例4.2.1）设$X_1,\ldots,X_n\ i.i.d.\sim N(\mu,\sigma^2)$，$\sigma^2>0$已知，$\mu\in\mathbb{R}$未知，用枢轴变量法求$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的一个置信区间。

注1 由定义1.3可知，$L(\vec{X}) = \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha$ 也是μ的置信水平为$1-\alpha$的（单侧）置信下限。

注2 由$N(0,1)$分布的对称性可知，$\forall 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1$，满足$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$，即

$$[1 - \Phi(u_{\alpha_1})] + [1 - \Phi_(u_{\alpha_2})] = \alpha,$$

均有$\mathbb{P}(-u_{\alpha_1} \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq u_{\alpha_2}) = 1-\alpha$。上式等价于

$$\mathbb{P}_\mu(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha_2} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha_1}) = 1 - \alpha.$$

即$[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha_2}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha_1}]$亦是$\mu$的置信水平（系数）$1-\alpha$的置信区间。

问题 考虑另一枢轴$\widetilde{Q} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S}$，求此时置信水平为$1-\alpha$的置信区间？以“区间长度越短越好”为衡量标准，利用哪个枢轴得到的区间估计量好？

练习 【0】例4.2.2.

举例说明

Example (2.2)

设$X_1,\ldots,X_n$ $i.i.d. \sim N(\mu,\sigma^2)$，$\mu \in \mathbb{R}$已知，$\sigma^2 > 0$未知，用枢轴变量法求$\sigma^2$的置信水平为$1-\alpha$的一个置信区间。

注1 由定义1.3可知，$\frac{nS_n^2}{\mathcal{X}_n^2(\alpha)}$是$\sigma^2$的单侧置信下限，这里$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2$, $\mathcal{X}_n^2(\alpha)$ 满足$\mathbb{P}(\mathcal{X}_n^2 > \mathcal{X}_n^2(\alpha)) = \alpha$。

注2 与例2.1注2类似，$\forall \alpha_1,\alpha_2 \in (0,1)$，满足$\alpha_1-\alpha_2 = 1-\alpha$，可得$[\frac{nS_n^2}{\mathcal{X}_n^2(\alpha_2)}, \frac{nS_n^2}{\mathcal{X}_n^2(\alpha_1)}]$均为$\sigma^2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间。若令$\alpha_1 = 1$, 即得单侧置信区间估计$[\frac{nS_n^2}{\mathcal{X}_n^2(\alpha)}, \infty]$.

注3 考虑σ^2的另一点估计$\widetilde{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2$, 此时$\widetilde{Q} = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$ 也可作为枢轴，求此时置信水平为$1-\alpha$的置信区间？

练习 【0】例4.2.4.

举例说明

Example (2.3)

设$X_1, \dots, X_n$ $i.i.d. \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ 均未知，用枢轴变量法分别求μ和σ^2的置信水平为$1-\alpha$的一个置信区间。

练习1 请自行找出置信水平为$1-\alpha$的其它置信区间。

练习2 【0】例4.2.3, 4.2.5.

练习3 两个正态总体参数的置信区间，【0】例4.2.6 $\sim$ 4.2.8.

非正态总体参数的置信区间

- 有时可通过观察充分统计量的概率密度函数的形式看出是否存在枢轴。

Example (2.4)

设$X_1, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim Exp(\lambda)$，总体概率密度函数$f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$，$x > 0$，参数$\lambda > 0$ 未知，用枢轴变量法求λ 的置信水平为$1-\alpha$ 的一个置信区间。

练习1 请自行找出置信水平为$1-\alpha$的其它置信区间。

练习2 【0】例4.3.1.

Example (2.5)

设$X_1, \ldots, X_n$ $i.i.d. \sim U(0, \theta)$，参数$\theta > 0$ 未知，用枢轴变量法求θ 的置信水平为$1-\alpha$ 的一个置信区间。

练习 请自行找出置信水平为$1-\alpha$的其它置信区间。

作业

- 习题4，Ex. 1, 3, 4, 10, 13, 14, 16, 19, 23.