一些可能有用的妙妙工具（来自周民强习题解答，建议细品）

1. $f\in BV[a,b]$，$\frac{d}{dx}T_f[a,x]=|f'(x)|$ a.e.

2. f Rieman 可积，$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，则 $V_a^b F=\int_a^b |f|\,dt$

3. $f\in BV[a,b]$，$x_0\in[a,b]$，f 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow$ $T_f[a,x]$ 在 x_0 连续

4. $f_n\in BV[a,b]$，$\forall\, \varepsilon>0$，$\exists\, n_0$，$\forall\, m,n>n_0$，$V_a^b(f_n-f_m)<\varepsilon$，
   且 $f_n(a)$ 收敛，则 $\exists\, f\in BV[a,b]$，s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} V_a^b(f_n-f)=0$

5. 存在 $f\in AC[a,b]$，f 无处单调
   ($E\subset[a,b]$，$\forall\, I$ interval，$m(I\cap E)>0$，$f(x)=m([a,x]\cap E)-m([a,x]\cap E^c)$)

6. $f\in BV$，$f\in AC \Leftrightarrow T_f[a,x]\in AC \Leftrightarrow T_f[a,b]=\int_a^b |f'|\,dx$

7. $f,g\in AC$，则 $T_{f\cdot g}[a,x]\in AC$

8. $f\in AC$，则 $\mathrm{Length}((x,f(x)))=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

本次习题课有空的话会证明其中某些。

Warning：我想到啥就写了啥，不代表考试范围。以下所有命题的证明原则上要求熟记，但奈何实分析试卷太小。

外测度 $\xrightarrow{\text{Carathéodory}}$ 测度　　$m^*(A) = m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E^c)$.

等价定义：$\forall \varepsilon$，$\exists O$ 开，$m^*(O\setminus E)<\varepsilon$

$\forall \varepsilon$，$\exists F$ 闭，$m^*(E\setminus F)<\varepsilon$

Cantor集，类Cantor集

(试着用类Cantor集造一个集合 E，任意区间 I，$m(E\cap I)>0$) 很经典的例子

(外)测度的性质：

(1) $m\left(\coprod_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$,

(2) $E_k \nearrow$, $m(\lim E_k) = \lim m(E_k)$

(3) $m^*(\underline{\lim}\, E_k) \le \underline{\lim}\, m^*(E_k)$. In particular, $E_k \uparrow E$, $m^*(E) = \lim m^*(E_k)$

可测函数　$f\in L(E) \iff \exists g_k \in C(\mathbb{R}^n)$, $g_k \to f$ a.e.

not topological convergence.

收敛 $\begin{cases} \text{a.e.} \\ \text{a.un}, \ \forall \varepsilon>0, \exists E_\varepsilon, \ m(E\setminus E_\varepsilon)<\varepsilon, \ f_n \rightrightarrows f \text{ on } E_\varepsilon \\ m \\ L^p \end{cases}$

$$\begin{tikzcd}
L^\infty = \text{un} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
& \text{a.un} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{a.e} \arrow[l, bend right, "m(E)<\infty"'] \arrow[dl, Rightarrow, "m(E)<\infty"'] \\
& m \arrow[u, bend left, Rightarrow, "\exists\text{ subseq}"] \arrow[ur, Rightarrow, bend right, "子列"'] & L^p\ (p\in[1,\infty)) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow, "子列"'] \arrow[d, Rightarrow, "m(E)<\infty"] \\
& & L^{p-\varepsilon}
\end{tikzcd}$$

没有标注箭头的地方试着举出反例 or 何时成立.

Littlewood 三原理 (拓扑、测度)

(1) Carathéodory：可测集差不多是开集

(2) Lusin：可测函数几乎是连续函数　　注意条件 a.e. finite.

(3) Egorov：a.e. convergence $\Longleftrightarrow$ a.un when $m(E)<\infty$.

f 可积 $\Longleftrightarrow$ f^+, f^- 可积 (若 $f\in L^+$, $\int f=\infty$ 不是那么没意义)

Fact: $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，则

(1) $\forall \varepsilon>0, \exists R, \int_{B(0,R)^c}|f|<\varepsilon$

(2) $\forall \varepsilon>0, \exists \delta, \forall E, m(E)<\delta, \int_E |f|<\varepsilon$

(3) $\forall \varepsilon>0, \exists M>0$, s.t. $\int_{\{|f|>M\}}|f|<\varepsilon$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\int_E |f(x+h)-f(x)|=0$

(5) $\lim\limits_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy=f(x)$ a.e. x.

Levi　$f_n\in L^+, f_n\nearrow \Rightarrow \lim\int f_n=\int f$

Fatou　$f_n\in L^+, \int \underline{\lim} f_n\le \underline{\lim}\int f_n$

$\Big\}$ L^+ allows $\int f=\infty$

Lebesgue　$f_n\xrightarrow{a.e.}f$, $|f_n|\le g\in L^1 \Rightarrow f_n\xrightarrow{L^1}f$

Fubini　$f\in L^1$, $\int_{\mathbb{R}^{m+n}}f=\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^n}f(x,y)\,dm(y)\,dm(x)$

推论：

1. $f_n\in L(E,\overline{\mathbb{R}})$, $f_n\nearrow f$, $f_1^-\in L^1 \Rightarrow \int_E f_n\nearrow\int_E f$

2. $f_n\in L(E,\overline{\mathbb{R}})$, $(\inf\limits_n f_n)^-\in L^1 \Rightarrow \int_E \underline{\lim} f_n\le\underline{\lim}\int_E f_n$

3. $f_n\in L^1(E)$, $g_n\in L^1(E)$, $g_n\to g$ a.e., L^1, $f_n\to f$ a.e.
$\Rightarrow f_n\to f$ L^1.

4. $f, f_n\in L^1(E)$, $m(E)<\infty$, $f_n\to f$ a.e. 则

$f_n\xrightarrow{L^1}f \Longleftrightarrow$

$\sup\limits_n\int_E|f_n|<\infty$, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall A, m(A)<\delta$, $\sup\limits_n\int_A|f_n|<\infty$.

f 在 $[a,b]$ Riemann 可积 $\Rightarrow$ Lebesgue 可积. 若涉及广义积分，则未必.

极大函数 f^*, Mf $\quad m\{Mf>\alpha\} \le \frac{A}{\alpha^p}\|f\|_{L^p}^p$

用极大函数证明 a.e. 收敛性，见我上次习题课讲义.

Vitali Cover:

(1) $\{B_1,\cdots,B_N\}$ 开球，$\exists\, B_{i_1},\cdots B_{i_k}$ 无交，$m(\bigcup_{i=1}^N B_i) \le 3^d \sum_{j=1}^k m(B_{i_k})$.

(2) $\mathcal{B}$ 开球族，Vitali cover of E，$m(E)<\infty$，$\forall\, \varepsilon>0$，$\exists\, B_1\cdots B_N \subset \mathcal{B}$ disjoint，$\sum_{i=1}^N m(B_i) \ge m(E)-\varepsilon$.

Lebesgue 微分定理:

$f:[a,b]\to\mathbb{R} \nearrow \Rightarrow f'$ a.e. 存在且有限，$\int_a^b f'(x)\,dx \le f(b)-f(a)$

有界变差 $f\in BV[a,b] \Leftrightarrow \exists\, f_1,f_2 \nearrow$，$f=f_1-f_2$.

绝对连续 $AC[a,b]$. Fact: $f\nearrow$，则 $f\in AC \Leftrightarrow \int_a^b f' = f(b)-f(a)$

Sobolev 空间 $W^{1,1}[a,b] = \{f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 可测 $\mid f'$ a.e. 存在, $f,f'\in L^1[a,b]\}$

$$C^1 \subset AC \subset BV\cap C \subset BV \subset W^{1,1} \subset L^1$$

N-L formula:

$$C \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int}{\rightleftarrows}} C^1/\mathbb{R}$$

$$L^1/\text{a.e.} \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int}{\rightleftarrows}} AC/\mathbb{R} \qquad \text{on } [a,b]$$

$$L^\infty/\text{a.e.} \underset{\frac{d}{dx}}{\overset{\int}{\rightleftarrows}} Lip/\mathbb{R}$$

Fubini 逐项微分定理.

(1) f_n 递增，$\sum f_n$ 收敛，则 $\frac{d}{dx}(\sum f_n) = \sum \frac{d}{dx} f_n$ a.e.

$$\left(\text{Use } \int \sum_{n=N+1}^\infty (f_n)' = \sum_{n=N+1}^\infty \int f_n' \le \sum_{n=N+1}^\infty (f_n(b)-f_n(a)) \to 0 \right)$$

(2) $f_n\in AC[a,b]$，$\exists\, x_0$，$\sum_{n=1}^\infty f_n(x_0)$ 收敛，$\sum_{n=1}^\infty \int_a^b |f_n'(x)|\,dx<\infty$，则

$\sum_{n=1}^\infty f_n \in AC[a,b]$，且 $(\sum f_n)' = \sum f_n'$ a.e.