# 2023 春复分析每日一练 (IV)

黄天一

2023 年 6 月 18 日

## 1 核心内容回顾

**1.** 全纯函数可以在圆环区域上展开为 Laurent 级数; Laurent 级数在收敛圆环上内闭一致收敛.

**2.** 函数的三种孤立奇点和非孤立奇点, 函数在三种孤立奇点附近的性质刻画和 Laurent 展式特点.

**3.** $\mathbb{C}_\infty$ 上的全纯、亚纯函数; 两个重要的全纯自同构群: $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ 和 $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$.

## 2 计算 Laurent 展开

**1.** 求函数 $\frac{1}{1-z}$ 在 $B(\infty,1)$ 上的 Laurent 展开式.

**2.** 求函数 $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$ 在 $2<|z|<3$ 和 $3<|z|<\infty$ 的 Laurent 展开式.

**3.** 求 $\mathrm{Log}\frac{z-a}{z-b}$ 在 $\max(|a|,|b|)<|z|<\infty$ 上的 Laurent 展开式.

## 3 证明与计算题

**1.** 判断下列函数的奇点类型, 并指明极点的阶数.

(1) $\frac{\mathrm{e}^z}{z(1-\mathrm{e}^z)}$.

(2) $\cos(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}})$.

(3) $\frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi z}{z+1}$.

**2.** 设 $a\in\mathbb{C}_\infty$ 是函数 $f(z)$ 的极点, 讨论 $\mathrm{e}^{f(z)}$ 在 $a$ 处的奇点类型.

**3.** 设 $f$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上亚纯, 极点集合为 $\{1,2,\infty\}$. 若 $f$ 在这三个极点处的 Laurent 展开式的主要部分分别为 $\frac{1}{z-1}, \frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}, z+z^2$, 并且 $f(0)=0$, 求 $f(z)$.

**4.** 设函数 $f(z)$ 在 $H(\infty,R)$ 上全纯, 并且满足 $|\mathrm{Re}\, f(z)|\leqslant M$. 证明: $\infty$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

**5.** (21 期末) 记 $D=\{s\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\, s>1\}$, 考虑函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

(1) 证明: 对任意 $s\in D$, 上述级数收敛.

(2) 定义 $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $s\in D$. 证明: $\zeta(s)$ 为 $D$ 上的全纯函数.

(3) 我们知道, 复平面上的亚纯函数 $\cot(\pi z)$ 的部分分式展开为

$$\cot(\pi z)=\frac{1}{\pi z}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right).$$

利用该部分分式展开证明: 亚纯函数 $\cot(\pi z)$ 在 $z=0$ 附近的 Laurent 展开为

$$\cot(\pi z) = \frac{1}{\pi z} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(2k) z^{2k-1}.$$

(4) 计算 $\zeta(2)$ 的值.