思考题讨论

- 思考题**1.9** 例**1.10**中能用$E_x=-\partial U/\partial x$求$E_x$吗？
- 思考题**1.10** 半径为a的细圆环λ_e为常数，位于xy平面，中心在原点，求点$(\Delta x, 0, 0)$的电势和场强 $(\Delta x<<a)$。
- 思考题**1.11** 点电荷$3q$与$-q$相距l，求零等势面方程。

思考题1.10 半径为a的细圆环λ_e为常数，位于xy平面，中心在原点，求点$(\Delta x, 0, 0)$的电势和场强$(\Delta x \ll a)$。

$$U=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_e a\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a^2-2a\Delta x\cos\varphi+\Delta x^2}}=\frac{\lambda_e}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-2\frac{\Delta x}{a}\cos\varphi+\frac{\Delta x^2}{a^2}}}$$

$$\approx\frac{\lambda_e}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}[1+\frac{1}{2}(\frac{2\Delta x}{a}\cos\varphi-\frac{\Delta x^2}{a^2})+\frac{3}{8}(\frac{2\Delta x}{a}\cos\varphi-\frac{\Delta x^2}{a^2})^2]\mathrm{d}\varphi$$

$$\approx\frac{\lambda_e}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}[1+\frac{\Delta x}{a}\cos\varphi+\frac{\Delta x^2}{a^2}\frac{(3\cos^2\varphi-1)}{2}]\mathrm{d}\varphi$$

保留至二次小量

$$=\frac{\lambda_e}{4\pi\varepsilon_0}2\pi(1+0\cdot\frac{\Delta x}{a}+\frac{1}{4}\frac{\Delta x^2}{a^2})=\frac{\lambda_e}{2\varepsilon_0}(1+\frac{1}{4}\frac{\Delta x^2}{a^2})$$

$$E=E_x=-\frac{\partial U}{\partial \Delta x}=-\frac{\lambda_e\Delta x}{4\varepsilon_0 a^2},\quad \text{方向沿}-x\text{轴}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x}}\approx 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2}$$

第六讲 2022-03-10

第2章 静电场中的导体和电介质

§ 2.1 物质的电性质

§ 2.2 静电场中的导体

§ 2.3 电容与电容器

§ 2.4 电介质

§ 2.5 极化强度矢量$\boldsymbol{P}$

§ 2.6 电介质中静电场的基本定理

§ 2.7 边值关系和唯一性定理

§ 2.8 电像法

有时外场与物质自身场难以分开，怎么办？形式上

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_t-\boldsymbol{E}_1$$

其中$\boldsymbol{E}_t$为施力和受力带电体的总电场

$\boldsymbol{E}_1$为受力带电体产生的电场

$\boldsymbol{E}$为施力带电体的电场，即外场

如何扣除$\boldsymbol{E}_1$？化于无形 **or** 简单

对体电荷和面电荷受力带电体这两种情况，只要从中分别减去体电荷元和面电荷元的贡献即可。

这样做的后果是将受力带电体各部分的内力也计入到总力$\boldsymbol{F}$之中。由于内力相互抵消，不会影响结果！

- 体电荷： $E_1=\rho_e r/3\varepsilon_0$，当$r\to 0$时，$E_1\to 0$，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_t$;
- 面电荷： $E_1=\pm\sigma_e/2\varepsilon_0$ (详见例**2.1**)，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_t-\boldsymbol{E}_1$;
- 线电荷： $E_1=\lambda_e/(2\pi\varepsilon_0 r)$，当$r\to 0$时，$E\to\infty$，

  原因：线电荷近似失效。

  对策：此时外场一般很明确，不必绕弯子。

受力带电体内力相互抵消的证明

- 带电体受力

$$\boldsymbol{F}=\iiint\rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{E}_t-\boldsymbol{E}_1)\mathrm{d}V=\iiint\rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{E}_t-\boldsymbol{E}_1'-\boldsymbol{E}_{10})\mathrm{d}V.$$

其中$\boldsymbol{E}_{10}$是体电荷元$\rho_{\mathrm{e}}\Delta V$产生的电场，$\boldsymbol{E}_1'$是受力带电体扣除掉$\rho_{\mathrm{e}}\Delta V$后产生的电场。

$\boldsymbol{E}_1'$对带电体的作用力写成离散求和：

$$\boldsymbol{F}_1'=\sum_i\rho_{\mathrm{e}i}\boldsymbol{E}_{1i}'\Delta V_i=\sum_i\rho_{\mathrm{e}i}\sum_{j\neq i}\frac{\rho_{\mathrm{e}j}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|^3}\Delta V_j\Delta V_i$$

$$\overset{i,j\text{互换}}{=}\sum_{i\neq j}\frac{\rho_{\mathrm{e}i}\rho_{\mathrm{e}j}(\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r}_j-\boldsymbol{r}_i|^3}\Delta V_i\Delta V_j=-\boldsymbol{F}_1'=0.$$

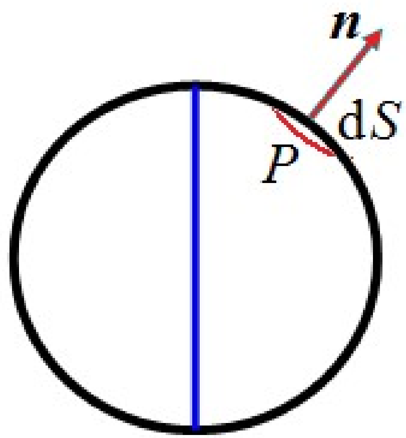
$$\therefore\boldsymbol{F}=\iiint\rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{E}_t-\boldsymbol{E}_{10})\mathrm{d}V.$$

[例2.1] 将一带电量为Q、半径为a的均匀带电球面切成两半，求两半球面间的静电力。

[解] 由高斯定理求得球面两侧的总电场分别为

$$E_t=\begin{cases}\sigma_e/\varepsilon_0, & (r=a+0)\\ 0, & (r=a-0)\end{cases}$$

式中$\sigma_e=Q/(4\pi a^2)$。受作用面元在自身两侧产生的电场为



$$E_1=\begin{cases}\sigma_e/2\varepsilon_0, & (r=a+0)\\ -\sigma_e/2\varepsilon_0, & (r=a-0)\end{cases}$$

$r=a$处电场沿径向，$E=E_t-E_1=\sigma_e/2\varepsilon_0$。

矢量形式为

$$\boldsymbol{E} = \sigma_{\mathrm{e}}\hat{r} / 2\varepsilon_0$$

左半球面对右半球面的静电力为

$$\boldsymbol{F} = \iint_s \sigma_{\mathrm{e}} \boldsymbol{E} \mathrm{d}S = \iint_s \frac{\sigma_{\mathrm{e}}^2}{2\varepsilon_0} \hat{r} \mathrm{d}S$$

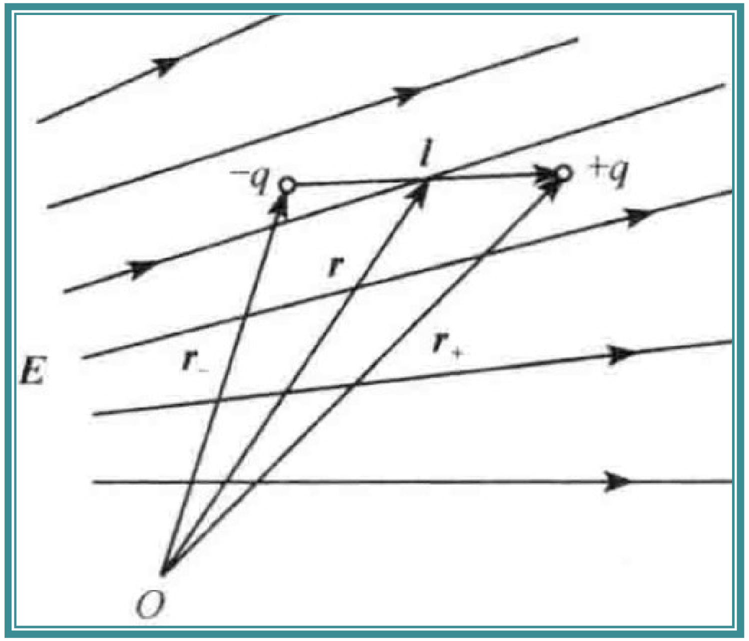
取z轴⊥切割面，由对称性，$\boldsymbol{F}$只有z分量。

$$F = F_z = \frac{a^2 \sigma_{\mathrm{e}}^2}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi a^2 \sigma_{\mathrm{e}}^2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 a^2}$$

$F > 0$，表明两半球间的静电力为排斥力。

右半球面对左半球面的静电力与上述力等大反向。

[例2.2] 右下图所示的电偶极子由一对相距为l的等量异号电荷$\pm q$构成，两个电荷的位置分别为$\boldsymbol{r}_{\pm}$，相应电偶极矩为$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}=q(\boldsymbol{r}_{+}-\boldsymbol{r}_{-})$。求该电偶极子在外场$\boldsymbol{E}$ 中所受的力$\boldsymbol{F}$及所受的力矩 $\boldsymbol{L}$。



[解] 设在$\boldsymbol{r}_{-}$与$\boldsymbol{r}_{+}$处的外电场强度分别为$\boldsymbol{E}_1$和$\boldsymbol{E}_2$，则有

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}_2-q\boldsymbol{E}_1=q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_{+})-q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_{-}).$$

设$\boldsymbol{r}$为电偶极子中点的矢径，

电场在$\boldsymbol{l}$尺度内变化平缓，则由泰勒展开取头两项得

$$\boldsymbol{F}=q[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}/2)-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{l}/2)]\approx q(\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}).$$

即

$$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}).$$

在外电场中受力矩 **(以电偶极子中点为参考点)**为

$$\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{r}_+-\boldsymbol{r})\times q\boldsymbol{E}_2-(\boldsymbol{r}_--\boldsymbol{r})\times q\boldsymbol{E}_1\approx q\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{E}.$$

即

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}$$

在推导中，近似取$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{E}$ **(?)**.

该近似可略去高阶小量的贡献

泰勒展开详情

- 单变量函数 $f(x+\Delta x)=f(x)+\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Delta x$
- 多变量函数

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) &= f(\boldsymbol{r})+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z \\
&= f(\boldsymbol{r})+(\Delta x,\Delta y,\Delta z)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)f \\
&= f(\boldsymbol{r})+(\Delta\boldsymbol{r}\cdot\nabla)f
\end{aligned}
$$

- 多变量矢量函数

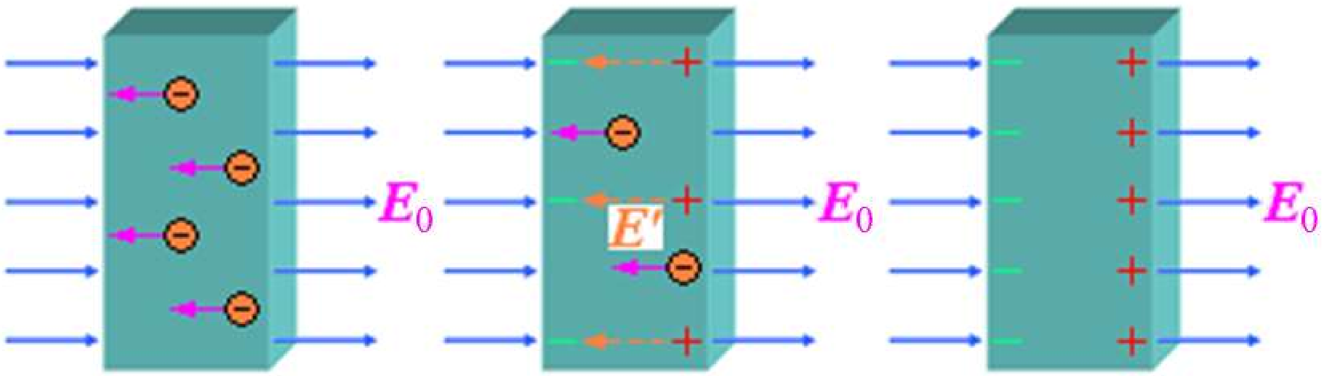
$$
\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}+\frac{\boldsymbol{l}}{2}\right)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\left(\frac{\boldsymbol{l}}{2}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{E}
$$

§2.2 静电场中的导体

1. 导体达到静电平衡的条件

- 静电场改变导体内电荷的分布→电荷分布的改变影响电场的分布→直到导体内电场强度处处为零，自由电荷才不再运动，导体内自由电荷分布以及导体内外的电场分布不再随时间变化——导体达到静电平衡。该过程大约只需10^{-8}~10^{-10}s。
- 对于不存在非静电力的均匀、各向同性导体，达到静电平衡的条件是导体内部电场强度处处为零。

导体的静电平衡条件



$E=E_0$ $\quad$ $E=E_0+E'>0$ $\quad$ $E=0,\ F=0$

总电场　外电场　感应场

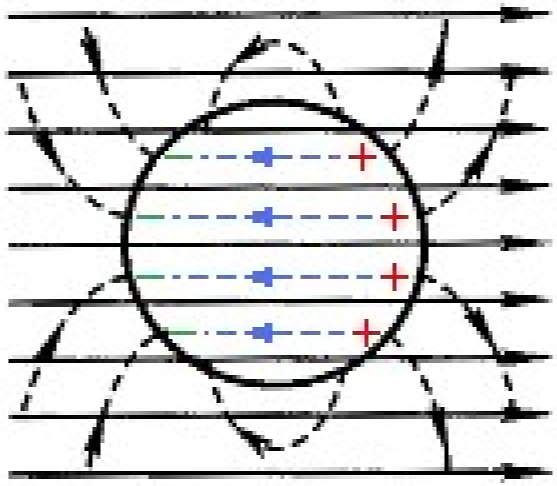
导体刚放入匀强电场中

只要$E\neq 0$，自由电荷分布会改变

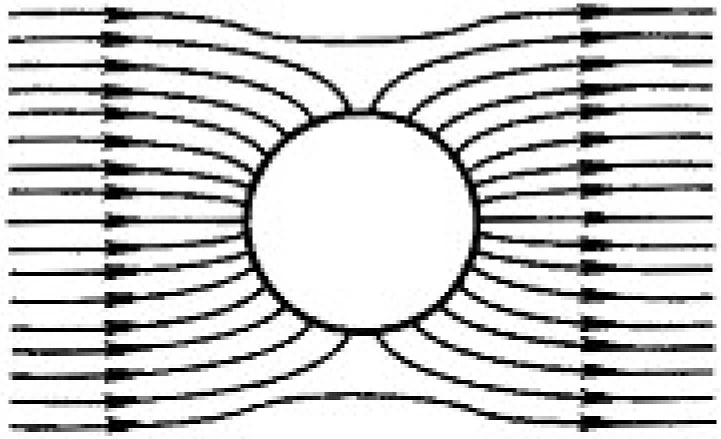
直到内部总场=0，静电平衡

静电感应过程

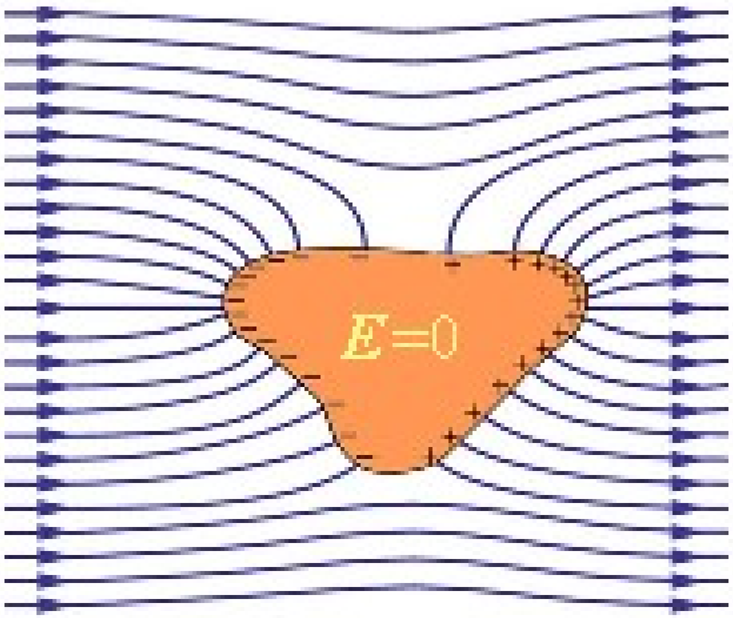
a)



b)



c)



a) 静电场中的导体球：球内感应电荷的场强与外场强等量反向

b) 静电场中导体球的内外电场分布

c) 一般导体的内外电场分布

2. 处在静电平衡条件下导体的性质

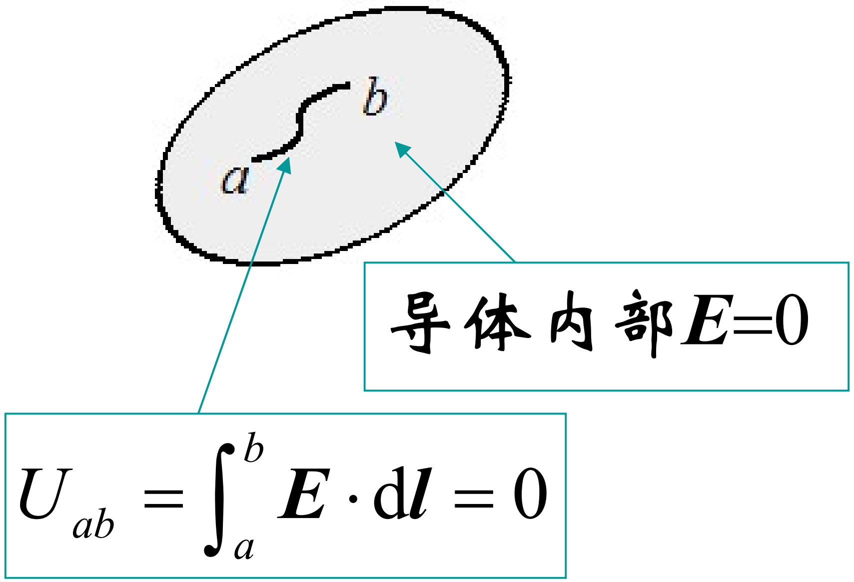
1) 内部电场

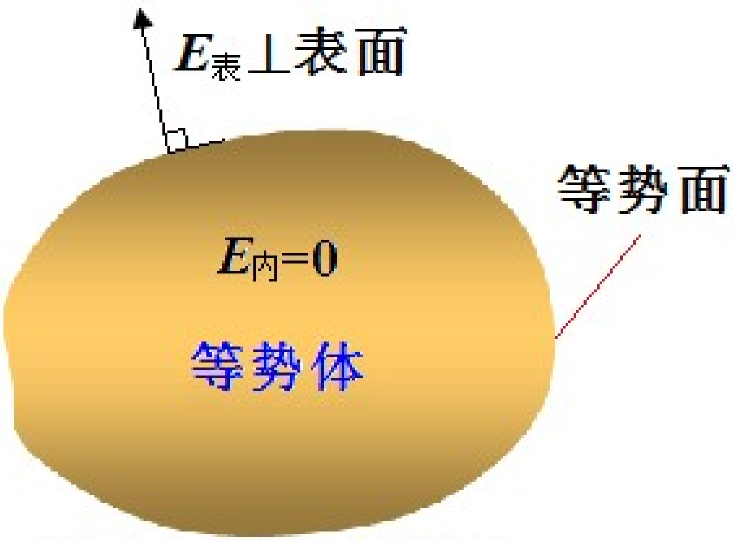
导体内部电场$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}'=0$ (静电平衡条件)

2) 电势分布

导体内部任意两点间电势差为零→各点等电势→

导体为等势体→表面为等势面



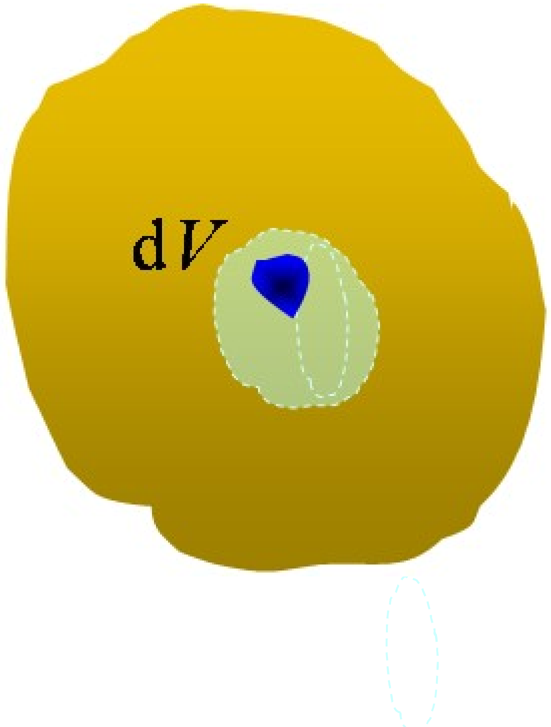


静电平衡时的导体

3) 电荷分布

a. 实心导体：体内没有净电荷存在，即处处有ρ_e=0，电荷只分布在导体表面 (导体表面电荷的电荷层一般只有**1**至**2**个原子的厚度)。

[证明] 在导体内任取体积元dV，



由高斯定理，

$$\varepsilon_0 \oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q_i$$

由于 $\boldsymbol{E}_i = 0, \quad \therefore \sum q_i = \int_V \rho_e \mathrm{d}V = 0$

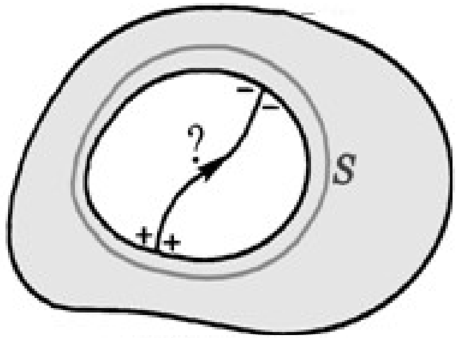
$$\text{而体积元d}V\text{任取，} \therefore \rho_e = 0$$

b. 空腔导体 (腔内无荷) 内表面处处无电荷，电荷分布在导体外表面，腔内处处$\boldsymbol{E}$=0，与导体等电势。

与书不同
考虑电场线

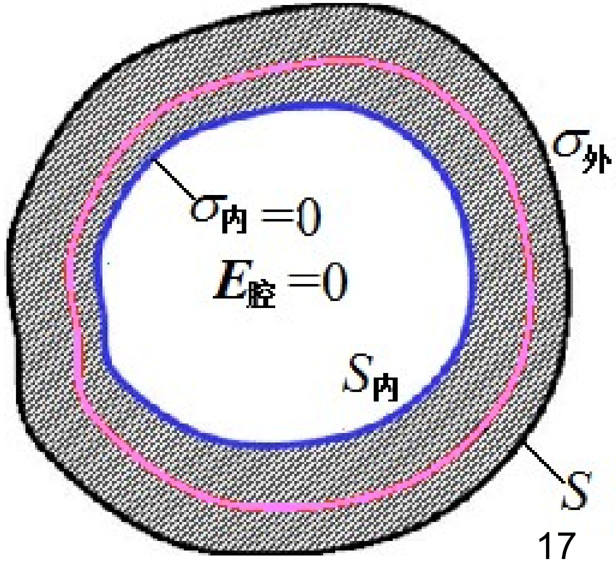
[证明] 在导体中包围空腔取高斯面S，则

$$\oiint_S \boldsymbol{E}_{导内}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q/\varepsilon_0 = 0,$$



将高斯面趋近腔表面，上式恒成立，→腔表面总电荷=0。

若$\sigma_{内}$不是处处为零，则必有正负，从正荷所发$\boldsymbol{E}$线必止于负荷，起、终点间有电势差，与导体是等势体矛盾！→$\sigma_{内}$=0。



腔内无$\boldsymbol{E}$线→$\boldsymbol{E}_{腔}$=0→$U_{腔}$=常数

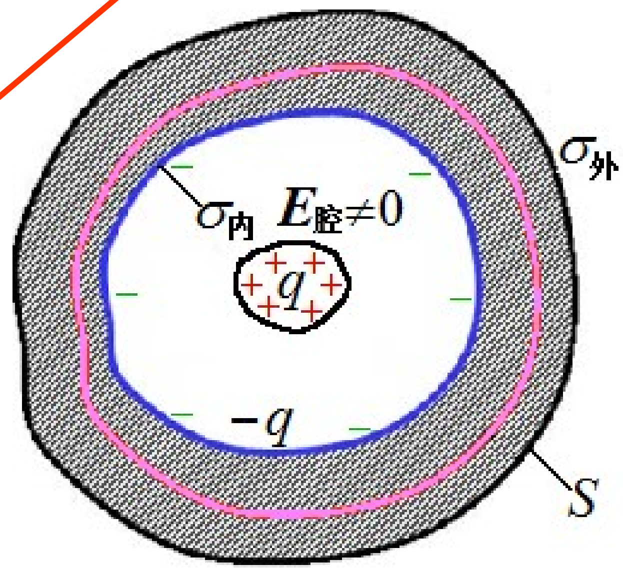
c. 空腔导体 (腔内有荷) 内表面必有电荷，$q_{内表}= -q$。

[证明] 在导体中选取高斯面S包围空腔，则

$$\oiint_S \boldsymbol{E}_{导内} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q + q_{内表}) = 0,$$

$\rightarrow q_{内表} = -q$

$\therefore \sigma_{内} \neq 0$，$\boldsymbol{E}_{腔} \neq 0$



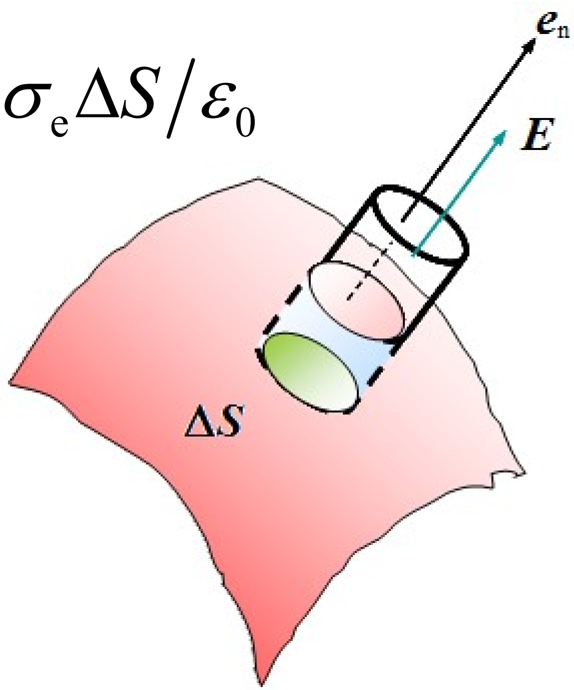
导体内表面上所带电荷与腔内电荷的代数和为零。

4) 导体表面附近的场强垂直于表面，大小为σ_e/ε_0。

[证明]

a. 方向：如果不垂直，$\boldsymbol{E}$有切向分量，电荷受力在表面移动→没有达到静电平衡；

b. 大小：$\Phi_E = \oiint\limits_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_{S内} q_i = \sigma_e \Delta S/\varepsilon_0$

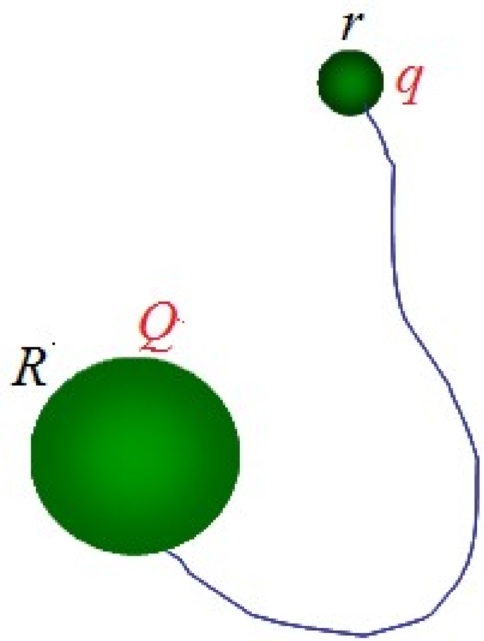


下底面和侧面电通量均为零→

$$\left(\iint\limits_{上底} + \iint\limits_{下底} + \iint\limits_{侧面}\right)\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = E\Delta S$$

$$E = \sigma_e/\varepsilon_0 ,\quad \boldsymbol{E} = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_0}\boldsymbol{e}_n$$

[例] 半径分别为R和r ($R>r$) 的两个导体球相距无限远，中间用细导线连接。求两球表面电荷面密度与曲率的关系。



[解] 每个球可近似为孤立导体，表面电荷分布均匀，两球电势相等。

$$U_R = U_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

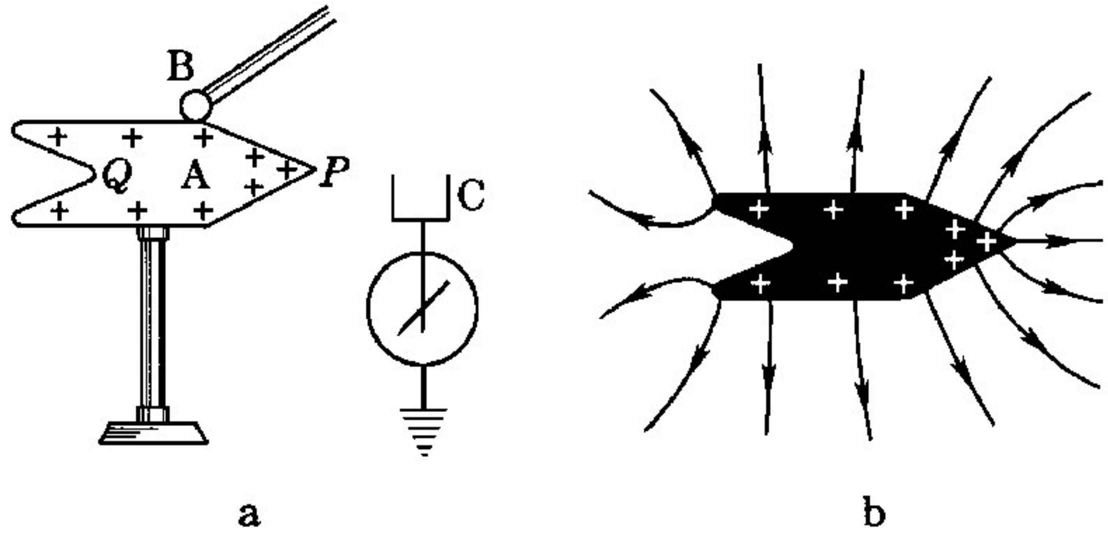
$$\frac{Q}{q} = \frac{R}{r}, \quad \frac{4\pi R^2\sigma_R}{4\pi r^2\sigma_r} = \frac{R}{r},$$

$$\frac{\sigma_R}{\sigma_r} = \frac{r}{R}$$ 电荷面密度与半径成反比，与曲率成正比

此结论并非普遍规律！

5) 表面电荷分布

a. 导体表面凸出而尖锐的地方(曲率较大)，电荷面密度较大



b. 导体表面平坦的地方 (曲率较小)， σ_e较小

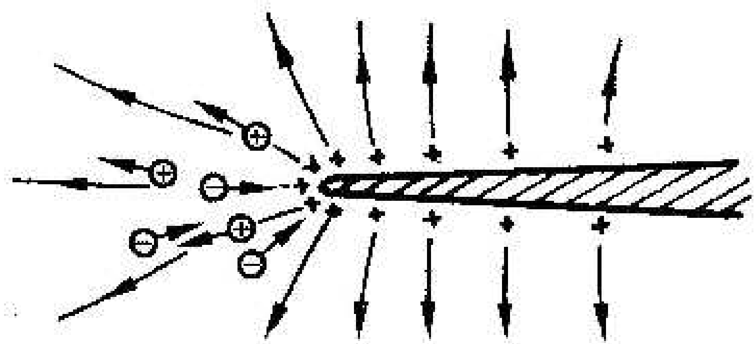
c. 导体表面凹进去的地方(曲率为负)， σ_e更小

但是：孤立导体的面电荷分布规律很复杂，与该处曲率并不存在单一的函数关系，还与附近表面的形状乃至整个导体形状都有关系！

3. 导体在静电场中性质的应用

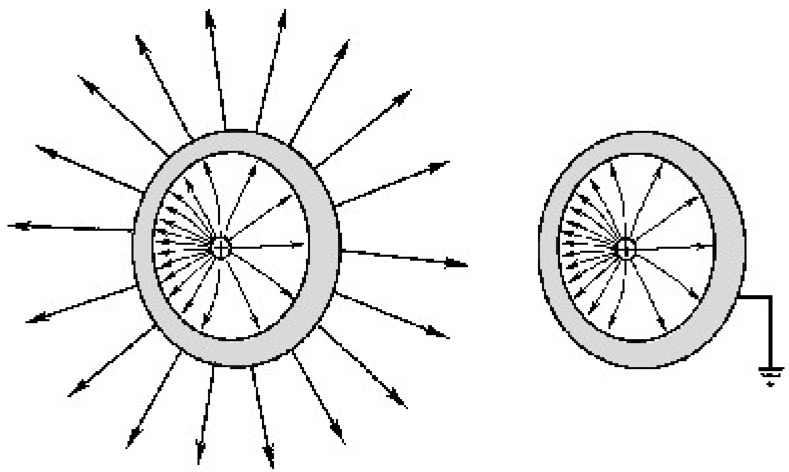
- 尖端放电　曲率大，σ_e大，$E=\sigma_e/\varepsilon_0$大

  应用：避雷针、静电复印机、场致发射显微镜、范德格拉夫起电机



- 静电屏蔽　空腔导体可保护腔内空间不受腔外电场影响

  应用：屏蔽室、带电作业、范德格拉夫起电机

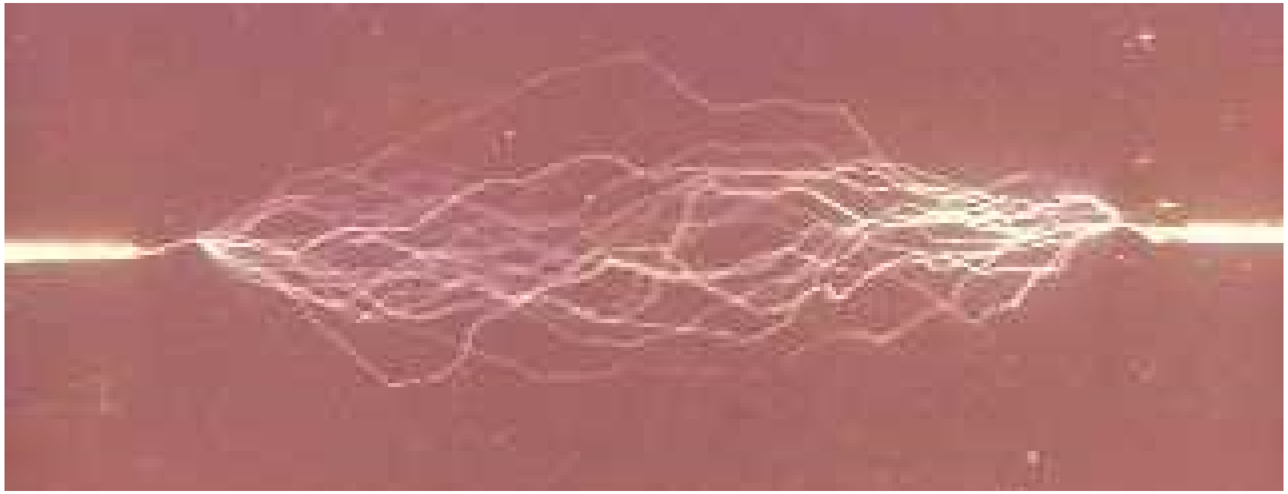


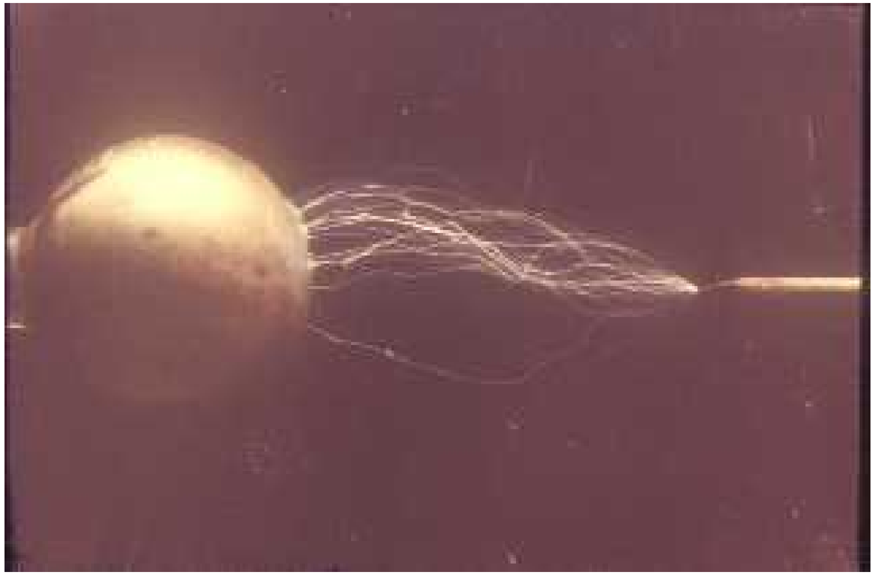
a　　b

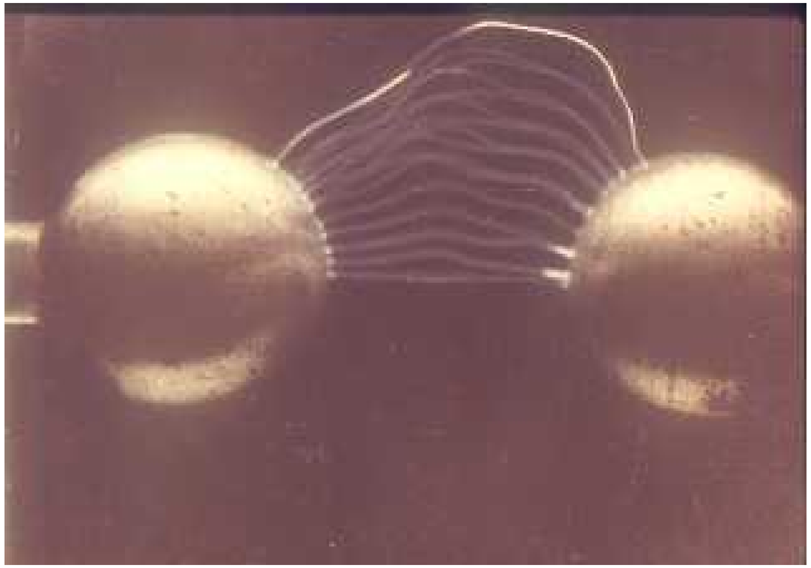
4. 库仑定律的精确验证

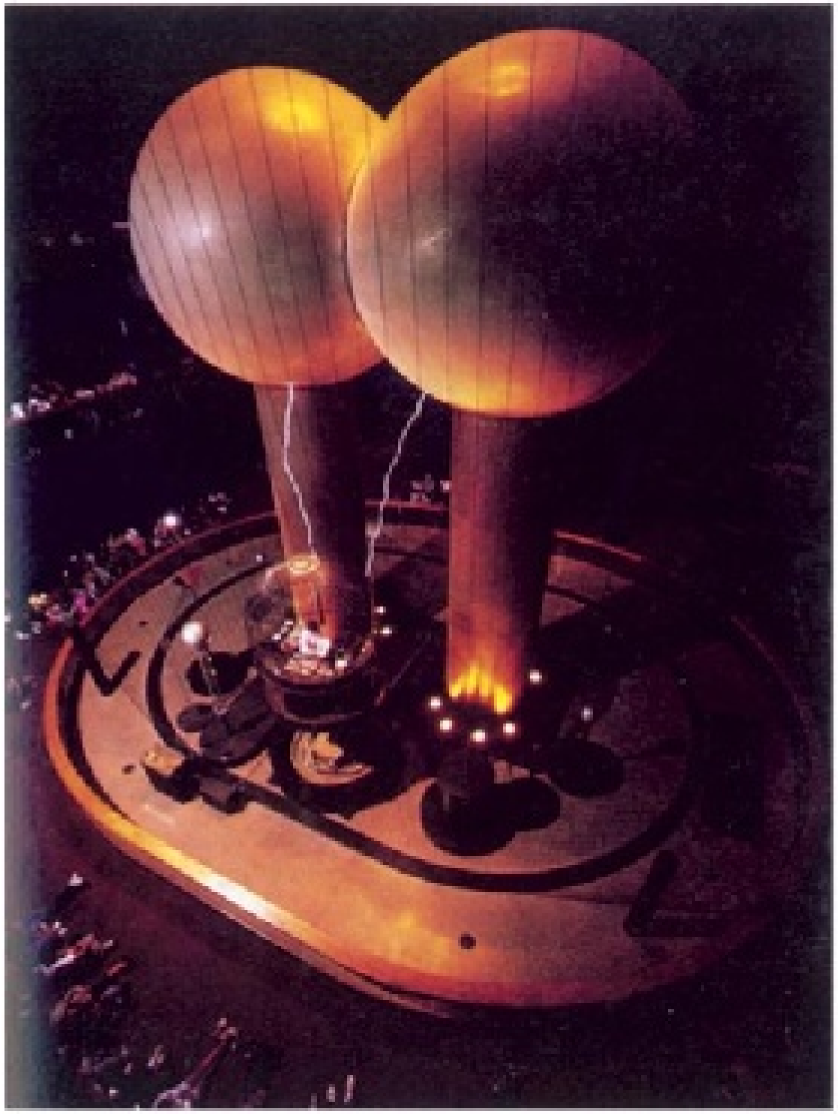
云层和大地间的闪电

空气中的直流高压放电图片







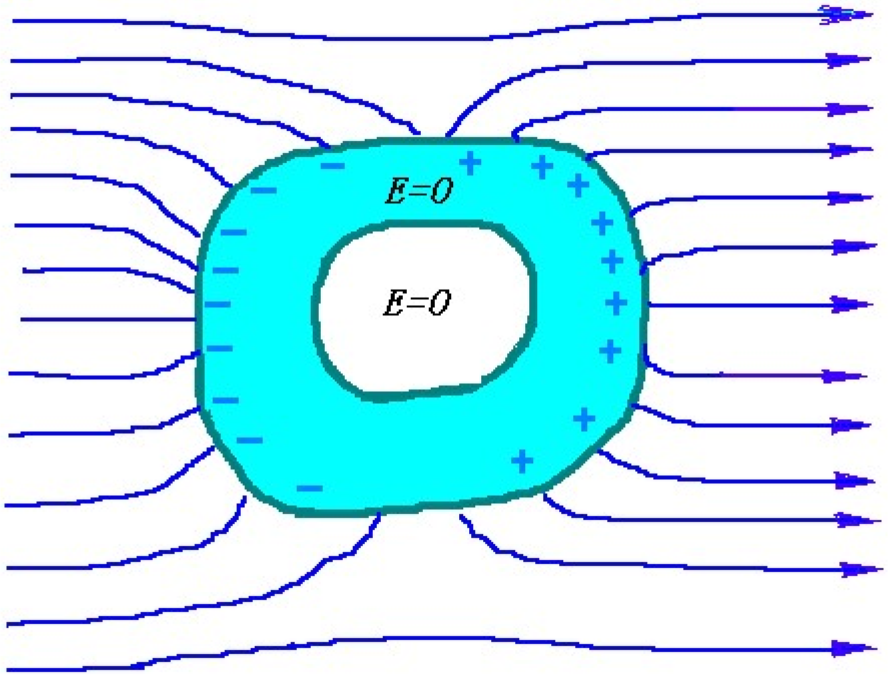


范德格拉夫起电机

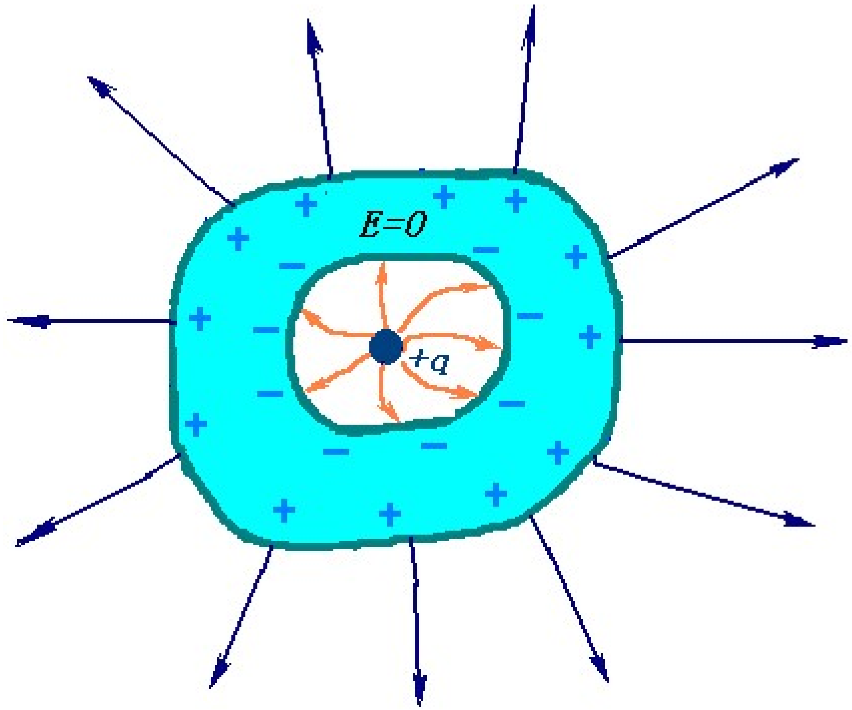
静电屏蔽

(1) 腔外不影响腔内

(2) 腔内却影响腔外

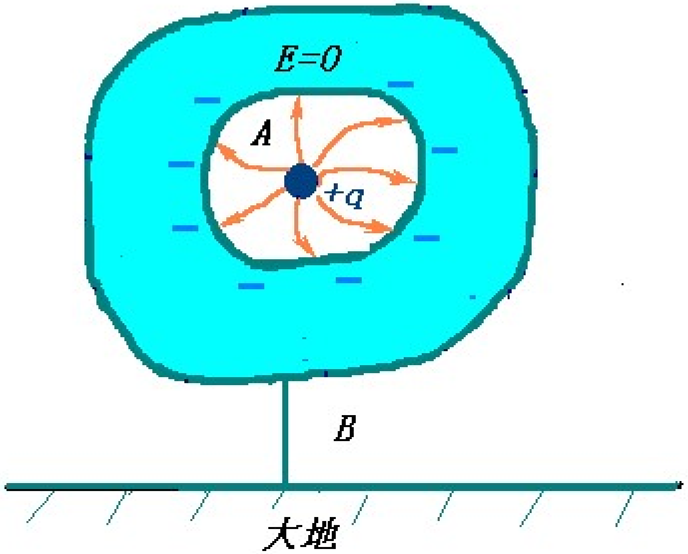


腔内无电荷

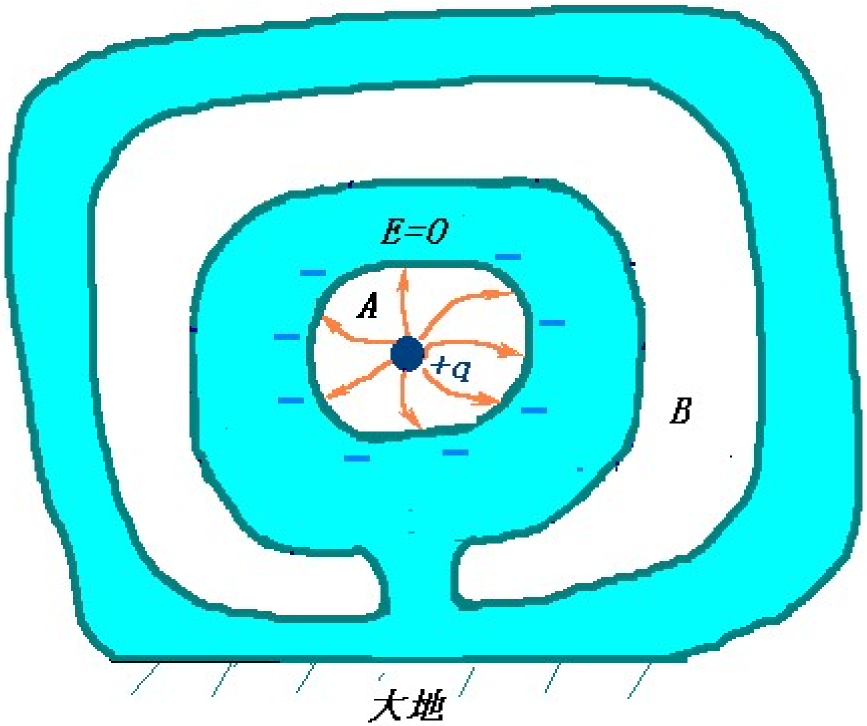


腔内有电荷

(3) 空腔接地，腔内腔外互不影响



腔内有电荷，导体腔接地



等效图

作业、预习及思考题

- 作业：**2.1~2.3, 2.5**
- 补充作业：将例**2.1**中的球面改为均匀带电球体 (总电量不变)，求两半球间的作用力。
- 预习：**2.3** 电容与电容器、**2.4** 电介质

下次课讨论

- 思考题**2.1** 静电场中试探电荷能否稳定平衡？
- 思考题**2.2** 习题**2.4**