§5.3 微元法

定积分所表达的量都有两个共同点: 第一, 所求的未知量 Q 具有整体性, 它依赖于某个区间 $[a,b]$ 上的变量 x, $Q(x)=Q([a,x])$; 第二, 未知量 Q 在区间上具有可加性, 即, 对 $a<c<b$, 有

$$Q([a,c])+Q([c,b])=Q([a,b]).$$

换句话说, 就是当区间 $[a,b]$ 被分成几个不重迭的区间之并时, 总量 $Q([a,b])$ 等于相应于各子区间的局部量的和.

在具体求这种未知量时, 可以分两个步骤:

第一步, 在区间 $[a,b]$ 上任取一个长度为 dx 的小区间 $[x,x+dx]$, 求出局部量

$$\Delta Q=Q(x+dx)-Q(x)$$

的一个近似值 $f(x)dx$, 其中 $f(x)$ 是某个函数, 使得 $\Delta Q-f(x)dx$ 是较 dx

更高阶的无穷小, 即

$$\Delta Q = f(x)dx + o(dx),$$

因而 $f(x)dx$ 是函数 $Q(x)$ 的微分. 我们也将 $f(x)dx$ 称为整体量 Q 的微元.

第二步, 将所得的微元在区间 $[a,b]$ 上"无限累加"——积分, 则由 Newton–Leibniz 公式得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b Q'(x)dx = Q(x)\Big|_a^b = Q(b) - Q(a)\\ &= Q(b) = Q.\end{aligned}$$

即量 Q 可以表示为积分

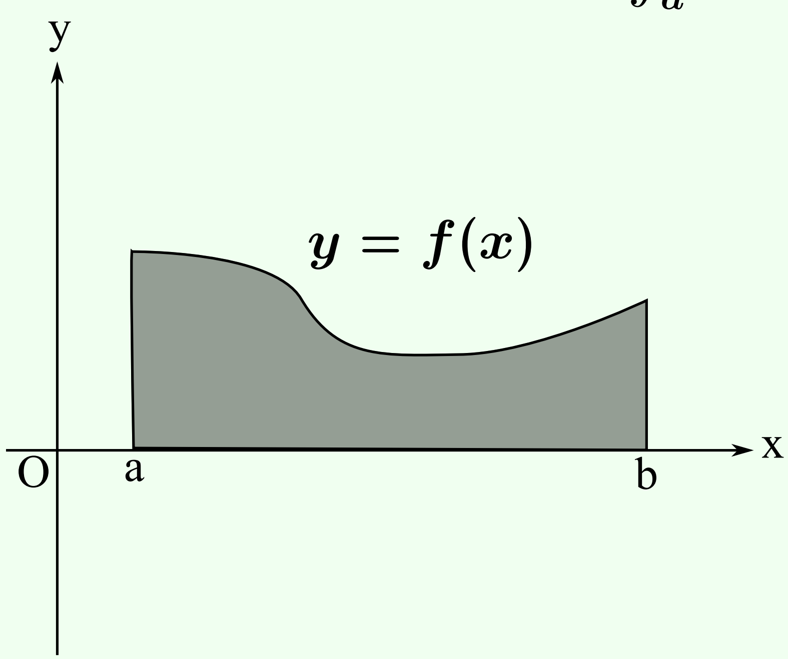
$$Q = \int_a^b f(x)dx.$$

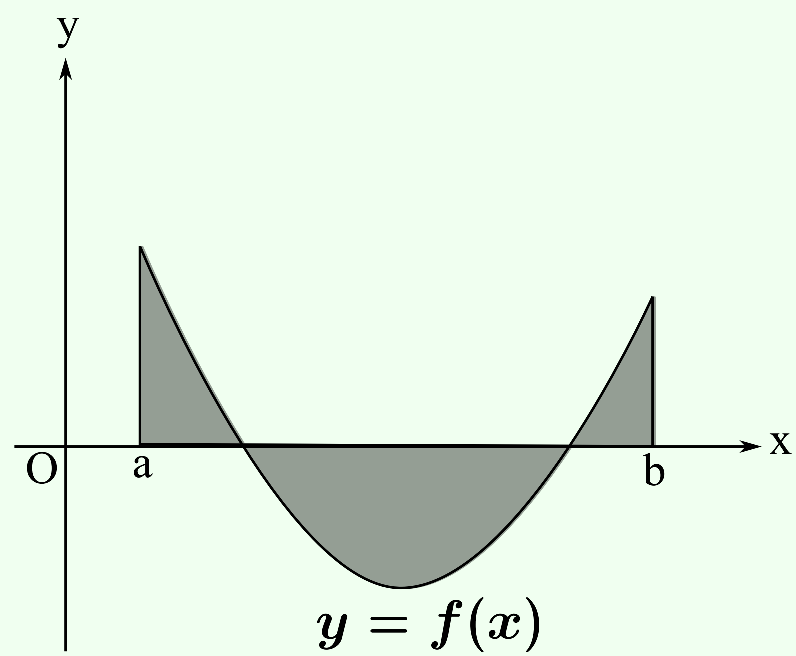
微元法的关键在于确定微元. 因为量 Q 是待求的, 部分量 $Q(x)$ 是未知的. 因此, 一般而言, 求出 $Q(x)$ 的微分, 即 ΔQ 的线性主要部分, 是一件相当困难的事.

5.3.1 平面图形的面积

直角坐标系下面积公式 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 则 $f(x)$ 的图像与 x 轴, 以及垂直直线 $x = a$ 和 $x = b$ 所围成的区域的面积为

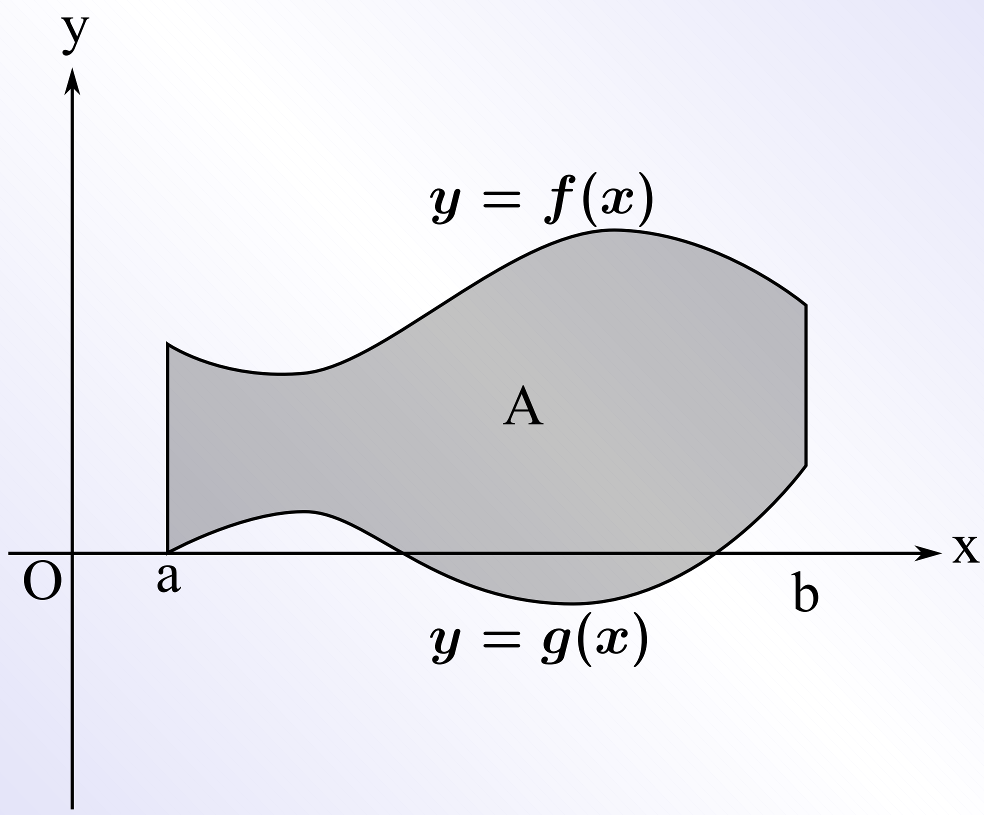
$$\int_a^b |f(x)|\, dx.$$



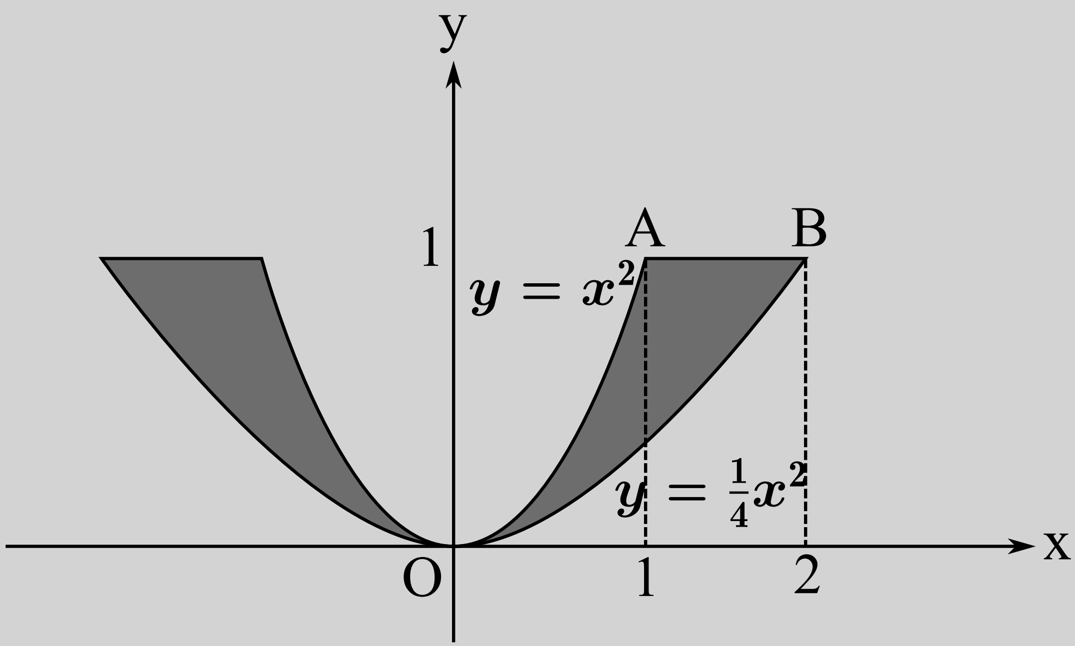


设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 则 $f(x)$ 的图像与 $g(x)$ 的图像, 以及垂直直线 $x = a$ 和 $x = b$ 所围成的区域的面积为

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$



例 1 求由曲线 $y=x^2$ 与 $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=1$ 围成的平面区域的面积.



解 对于这个例子来说, 用 y 作为积分变量更简便些.

$$S = 2\int_0^1 (2\sqrt{y} - \sqrt{y})\,dy = 2\int_0^1 \sqrt{y}\,dy = 2\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

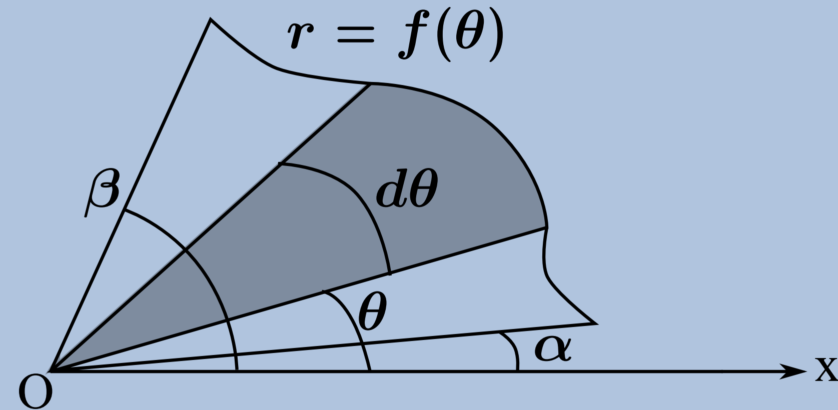
极坐标系下面积公式　极坐标方程 $r = f(\theta)$, $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 所确定的曲线与射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 所围成的扇形的面积为

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\,d\theta.$$

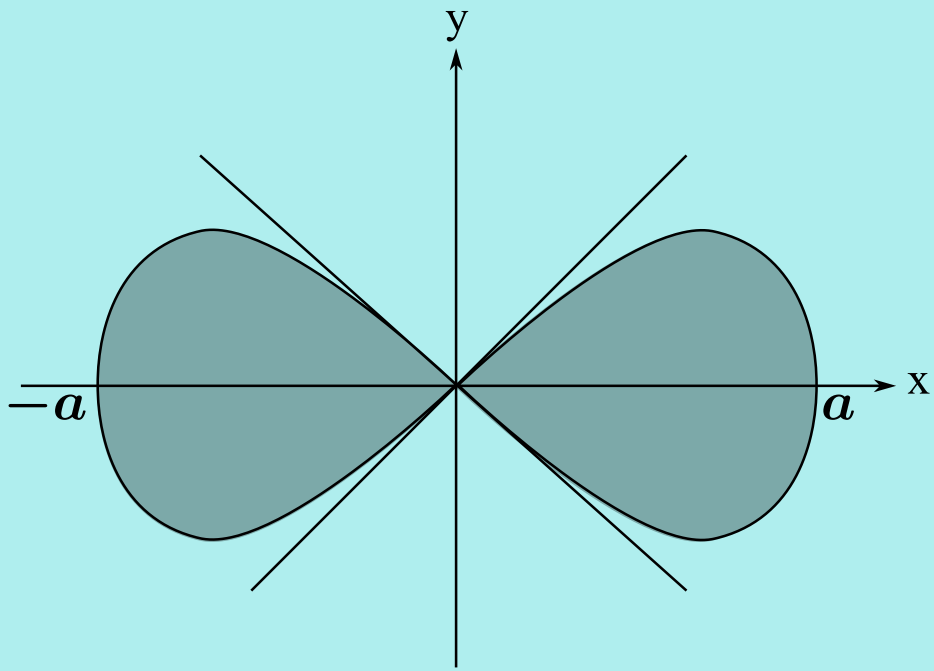
给变量 θ 一个小的增量 $d\theta$, 在区间 $[\theta, \theta + d\theta]$ 上, $r = f(\theta)$ 近似为常数, 因此变量从 θ 增加到 $\theta + d\theta$ 时, 得到的小扇形近似为一个夹角为 $d\theta$ 半径为 $f(\theta)$ 的圆扇形, 这个圆扇形的面积为所考虑问题的面积微元:

$$dA = \frac{1}{2}f^2(\theta)d\theta,$$

对此微元积分就得到所求面积的计算公式.



例 2 计算双纽线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(a>0)$ 所围成的区域的面积.



解 所围成的区域在四个象限是对称的. 只需计算第一象限的图形与 x 轴所围成的区域的面积的 4 倍. 在第一象限的极坐标方程是 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4})$. 所求面积是

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta = a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

参数方程的图形所围成的区域的面积公式 设平面区域由参数方程

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

所围, 且当 t 增加时, (x, y) 在曲线上逆时针行走, 其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 有连续的一阶导函数. 则所围区域的面积是

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \Big(\psi'(t)\varphi(t) - \varphi'(t)\psi(t)\Big)\, dt.$$

例 3 计算椭圆 $x = a\cos t, y = b\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 所围成的区域的面积.

解 所求面积为

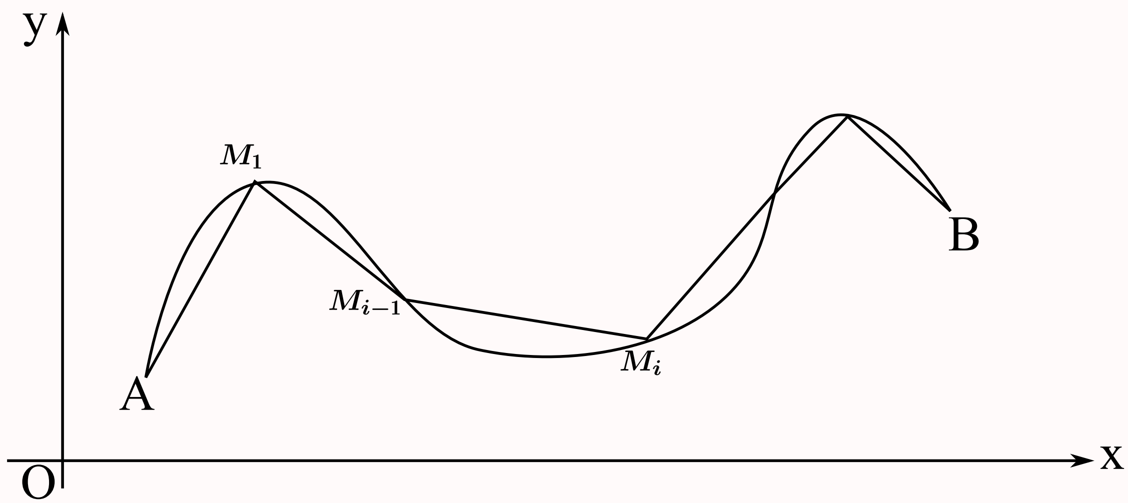
$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \Big((b\sin t)'(a\cos t) - (a\cos t)'(b\sin t)\Big)\, dt \\ &= \frac{1}{2}ab\int_{0}^{2\pi} 1\, dt = \pi ab. \end{aligned}$$

5.3.2 平面曲线的弧长

设 L 是平面上一条连续曲线, 起点为 A 终点为 B. 在曲线上从 A 到 B 取一些分点得到一个分割:

$$T:\ A = M_0, M_1, \cdots, M_{n-1}, M_n = B.$$

用直线段连接相邻的分点得到曲线的一条内折线. 若当分割的宽度 $\|T\| := \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} M_{i-1}M_i$ 趋于零时, 折线的长度极限存在, 就称曲线 L 是可求长的, 并且这个极限就定义为 L 的长度.



直角坐标方程表示的曲线的弧长 设 $y=f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续可导函数. 则其图像曲线的弧长为

$$s=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)}\,dx.$$

证明 设函数 $f(x)$ 的图像为曲线 L. 设 $dx>0$, 在 L 上任取两点 M 和 M', 其横坐标分别为 x 与 $x+dx$. 则这两点的距离为

$$\sqrt{(dx)^2+\big(f(x+dx)-f(x)\big)^2}=\sqrt{(dx)^2+\big(f'(x)dx+o(dx)\big)^2}.$$

我们由此得到弧长的微元 (即弧长的微分)

$$ds=\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}dx.$$

将 ds 在区间 $[a,b]$ 上积分, 即得上述弧长公式. 上面的弧长微元公式也可写成

$$ds^2=dx^2+dy^2.$$

也就是说: 弧长微元是微分三角形的斜边的长.

参数方程表示的曲线的弧长 设 L 是由参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 确定的光滑曲线, 即, $|\varphi'(t)|+|\psi'(t)|\neq 0$. 则曲线 L 的弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2+\big(\psi'(t)\big)^2}\,dt.$$

证明 不妨设 $\varphi'(t)>0$. 此时 y 是 x 的函数. 设 A 是 L 的起点, B 是 L 的终点, 则有

$$(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=A,\ (\varphi(\beta),\psi(\beta))=B.$$

因为

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ dx=\varphi'(t)dt,$$

所以

$$s=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)}\sqrt{1+(y'(x))^2}dx=\int_\alpha^\beta\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2+\big(\psi'(t)\big)^2}\,dt.$$

例 4 求旋轮线(也称摆线) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 一支的弧长.

解 旋轮线一支就是参数 $t \in [0, 2\pi]$ 时的一段曲线. 由弧长公式得

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2}dt \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}dt \\
&= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt \\
&= 8a
\end{aligned}
$$

即旋轮线一支的弧长等于滚动轮直径的 4 倍.

极坐标方程表示的曲线的弧长 设曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 由极坐标方程 $r = f(\theta)$ $(\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 表示, 且 $f(\theta)$ 连续可导. 则曲线的弧长公式为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2}\, d\theta.$$

证明 把 θ 看成参数, 则曲线弧的参数方程为

$$x = f(\theta)\cos\theta,\ y = f(\theta)\sin\theta,\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta).$$

因为

$$x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \quad y'(\theta) = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta,$$

所以根据参数方程的弧长公式得

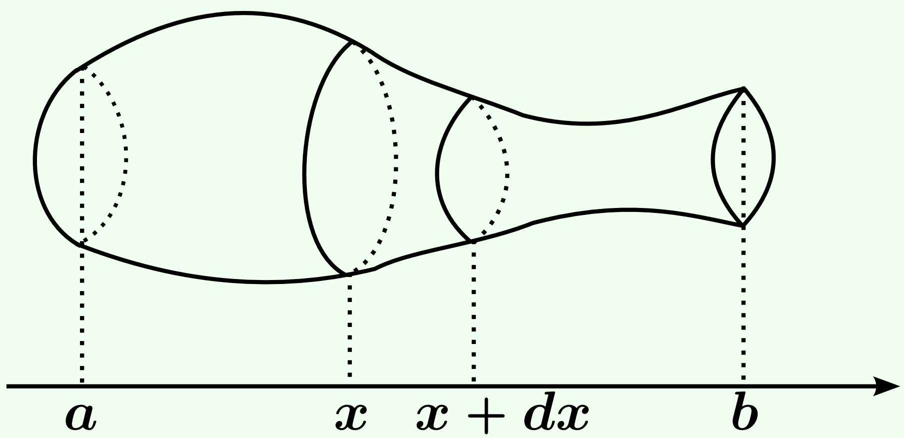
$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2}\, d\theta.$$

5.3.3 用横截面积计算立体体积

设空间中某个立体由一曲面与垂直于 x 轴的两平面 $x=a$ 及 $x=b$ 围成. 若过任意一点 x $(a \leqslant x \leqslant b)$ 且垂直于 x 轴的平面截立体所得的截面面积 $S(x)$ 为已知的连续函数, 则立体的体积为

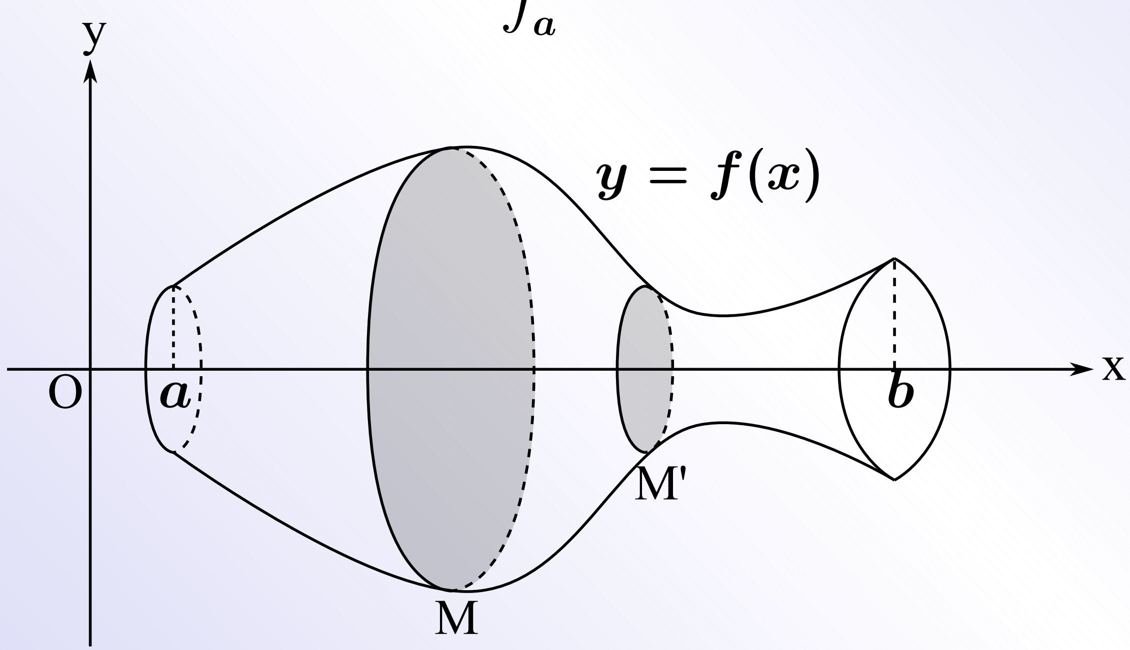
$$V=\int_a^b S(x)\,dx.$$

证明 任取区间 $[a,b]$ 上一个长度为 dx 的小区间 $[x,x+dx]$, 小区间上的立体可近似地看作上、下底的面积都是 $S(x)$, 而高为 dx 的小的正柱体. 于是得出体积的微元为 $dV=S(x)dx$. 将 dV 从 a 到 b 积分, 则可得到上面的计算公式.



旋转体的体积 设有连续函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)\geqslant 0$ (对 $x\in[a,b]$). 由 $y=f(x)$, 直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴围成的曲边梯形, 绕 x 轴旋转一周, 得一旋转体. 对区间 $[a,b]$ 上任一点 x, 作垂直于 x 轴的平面, 截旋转体所得截面的面积, 等于半径为 $y=f(x)$ 的圆的面积, 即 $S(x)=\pi y^2=\pi f^2(x)$. 因此,该旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$



旋转体的侧面积 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的微商, 并且 $f(x) \geqslant 0$ (对 $x \in [a,b]$). 将此曲线段绕 x 轴旋转一周, 要求所产生的旋转曲面的侧面积. 为此, 在区间 $[a,b]$ 上任取长度为 dx 的小区间 $[x, x+dx]$, 考虑相应于这区间上的弧段 MM' 绕 x 轴旋转所得的侧面积 ΔF. MM' 可用切线段 ML (长度为 ds) 近似代替, 因此 ΔF 可由 ML 绕 x 轴旋转所得的圆台的侧面积来近似代替. 这个小圆台侧面积为

$$\begin{aligned}&\pi\cdot(\text{上底半径} + \text{下底半径}) \cdot \text{斜高}\\ &= \pi[y + (y + dy))] \cdot ds = 2\pi y ds + \pi dy \cdot ds.\end{aligned}$$

略去 dx 的高阶无穷小 $\pi dy \cdot ds$, 得到侧面积微元

$$dF = 2\pi y ds = 2\pi y\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

于是所求的侧面积为

$$F = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

若问题中曲线段由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

给出, 其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的微商, 则侧面积公式为

$$F = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

若曲线段由极坐标方程

$$r = r(\theta) \ \ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$$

给出, 则可选 θ 作为参数, 侧面积公式为

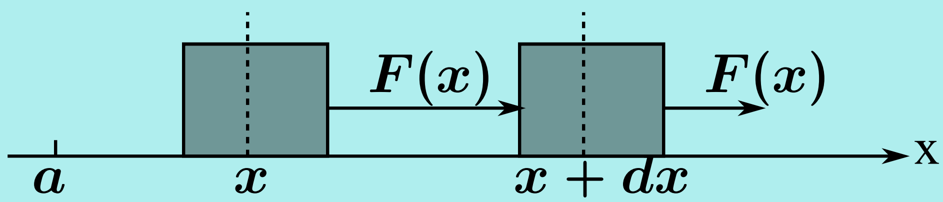
$$F = 2\pi \int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, d\theta.$$

5.3.4 变力作功

设物体在(变)力 $F = F(x)$ (假定 $F(x)$ 是 x 的连续函数) 的作用下沿 x 轴作直线运动 (力的方向与物体的运动方向一致), 若物体从 a 点运动到 b 点, 则变力对物体所作的功 W 为

$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

证明 在区间 $[a, b]$ 上任取一个长度为 dx 的小区间 $[x, x + dx]$. 由于在这个小区间上, 由变力的连续性, 变力所作的功可近似地看作大小和方向都不变的力 $F(x)$ 所作的功. 于是得到功的微元 $dW = F(x)dx$. 将 dW 从 a 到 b 积分, 就得出变力 $F(x)$ 所作的功的公式.



5.3.5 引力

由万有引力定律可知, 距离为 r 的两个质点之间的引力为

$$F = k\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

其中 m_1, m_2 分别是两个质点的质量, k 为引力常数. 如果要确定一个物体对一个质点的引力, 或者两个物体之间的引力, 一般而言, 需要应用多重积分. 但在某些简单情况下, 可以用微元法来解决.

例 5 设有一个均匀细棒, 质量为 m, 长度为 $2l$. 在棒 (所在直线) 的延长线上有一单位质量的质点 Q, 距离棒的中心为 a (这里 $a > l$). 求棒对质点 Q 的引力 F.

解 以棒的中心为原点, 棒所在的直线为 x 轴, 并使质点 Q 在 x 轴正方向上.

对区间 $[-l, l]$ 中任一长度为 dx 的小区间 $[x, x + dx]$. 将这小段近似地视为一质点, 其质量为 $\frac{m}{2l} \cdot dx$, 而与质点 Q 的距离为 $a - x$. 由万有引力定

律, 这一小段对 Q 的引力为 $k\frac{m}{2l(a-x)^2}dx$, 即

$$dF = k \cdot \frac{m}{2l(a-x)^2}\,dx,$$

于是棒对质点 Q 的引力大小为

$$F = \frac{km}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{1}{(a-x)^2}dx = \frac{km}{a^2-l^2}.$$

引力的方向朝 x 轴负向.