Lec9 Note of Abstract Algebra

Xuxuayame

日期：2023 年 4 月 12 日

命题 1.3. *(1)* 任一 $k-$ 轮换可写为 $k-1$ 个对换乘积。

(2) $(12),(13),\cdots,(1n)$ 为 S_n 的一组生成元。

证明. (1) 考虑一个 $k-$ 轮换 $(a_1a_2\cdots a_k)$。注意到 $(a_1\cdots a_k)=(a_1a_2)(a_2\cdots a_k)$。那么

$$\begin{aligned}(a_1\cdots a_k)&=(a_1a_2)(a_2\cdots a_k)\\&=(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{k-1}a_k)\\&=(a_1a_k)(a_1a_{k-1})\cdots(a_1a_3)(a_1a_2)\end{aligned}$$

(2) $(1i)(1j)(1i)=(ij),\forall\, i,j$。

□

定理 1.4. 存在唯一的群同态 ϵ: $S_n\to\{\pm1\}$ 使得对一对换 τ, $\epsilon(\tau)=-1$。

证明. 逆序数。 □

对 $\sigma\in S_n$，称 (i,j) 为其**逆序对**，指的是 $1\leq i<j\leq n$ 但 $\sigma(i)>\sigma(j)$。而 σ 的**逆序数**定义为

$$|\{(i,j)\mid 1\leq i<j\leq n,\ \sigma(i)>\sigma(j)\}|.$$

即逆序对的个数。而若 τ 为对换，则 σ 与 $\sigma\tau$ 的逆序数奇偶性相反。

若置换的逆序数为奇，则称为**奇置换**，若逆序数为偶，则称为**偶置换**。于是显然，只要将奇置换映到 -1，偶置换映到 1，所得的 ϵ 就满足要求。

记

$$A_n=\mathrm{Ker}\epsilon=\{\text{偶置换}\},$$

称为**交错群**。有 $[S_n:A_n]=2,\ A_n\lhd S_n$。

值得一提的是，设 σ 的型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$，则 σ 的奇偶性与 $\lambda_2+2\lambda_3+\cdots+(n-1)\lambda_n$ 相同。记 σ 的逆序数为 $n(\sigma)$，则 σ 可写成 $n(\sigma)$ 个对换乘积。

以及，显然，$|A_n|=\frac{n!}{2},\ n\geq 2$。

定义 1.4. 单群 (Simple group) 是指不含非平凡正规子群的群。

换言之，$N\lhd G\Rightarrow N=\{1\}$ 或 G。

例 1.5. 对 p 素，$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 为单群。

定理 1.5. A_n $(n \geq 5)$ 为单群。

证明. 当 $n=1$ 时，$A_n=\{1\}$。

当 $n=2$ 时，$A_n=\{1\}$。

当 $n=3$ 时，$A_n \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。

当 $n=4$ 时，$K_4 \triangleleft A_4$ 不为单群。 □

在进一步的证明前，我们需要两个引理。

引理 1.6. A_n 由三轮换生成。

证明. 当 $n \leq 3$ 时，显然。

当 $n \geq 4$ 时，注意到

$$\begin{aligned}
&(ij)(ij) = 1, \\
&(ij)(ik) = (ikj),\ i \neq j \neq k, \\
&(ij)(kl) = (ij)(jk)(jk)(kl) = (ijk)(jkl),\ i \neq j \neq k \neq l.
\end{aligned}$$

而偶置换必然分解为偶数个对换个乘积，从而两两配对后可由三轮换表示。 □

引理 1.7. 对 $n \geq 5$，A_n 中所有的 $3-$ 轮换在 A_n 中共轭。

证明. 我们证明 A_n 中的每个 $3-$ 轮换都在 A_n 中共轭到 (123)。设 σ 为 A_n 中的 $3-$ 轮换，则它显然在 S_n 中共轭到 (123)：

$$(123) = \pi\sigma\pi^{-1},\ \exists\, \pi \in S_n.$$

如果 $\pi \in A_n$ 则证明完毕。否则，取 $\pi' = (45)\pi$，则 $\pi' \in A_n$，且

$$\pi'\sigma\pi'^{-1} = (45)\pi\sigma\pi^{-1}(45) = (45)(123)(45) = (123).$$

□

于是我们接着上面的证明。

证明. 设 $\{1\} \neq N \triangleleft A_n$，只需证明 N 中含有一个 $3-$ 轮换。那么我们知道 $3-$ 轮换在 A_n 中彼此共轭，就可以由正规子群得到所有的 $3-$ 轮换，从而生成 A_n。

设 $\sigma \in N,\ \sigma \neq (1)$，有

$$\sigma = \pi_1\pi_2\cdots\pi_k,$$

这里 π_i 为彼此不交的轮换 (所以它们交换，于是我们可以出于便利而将它们重新排列)。不妨剔除所有的 $1-$ 轮换。

Case 1 若某些 π_i 至少长度为 4，重排后不妨设为 $\pi_1 = (12\cdots r)$, $r \geq 4$。设 $\varphi = (123)$，则 $\varphi\sigma\varphi^{-1} \in N$，且

$$\begin{aligned}\varphi\sigma\varphi^{-1} &= \varphi\pi_1\varphi^{-1}\pi_2\cdots\pi_k \\ &= \varphi\pi_1\varphi^{-1}\pi_1^{-1}\sigma \\ &= (123)(123\cdots r)(132)(r\cdots 21)\sigma \\ &= (124)\sigma,\end{aligned}$$

从而 $(124) = \varphi\sigma\varphi^{-1}\sigma^{-1} \in N$。

Case 2 若所有的 π_i 长度均不大于 3，且至少两个长为 3(所以 $n \geq 6$)。不失一般性，设 $\pi_1 = (123)$, $\pi_2 = (456)$。取 $\varphi = (124)$，则

$$\begin{aligned}\varphi\sigma\varphi^{-1} &= \varphi\pi_1\pi_2\varphi^{-1}\pi_3\cdots\pi_k \\ &= \varphi\pi_1\pi_2\varphi^{-1}\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}\sigma \\ &= (124)(123)(456)(142)(465)(132)\sigma \\ &= (12534)\sigma,\end{aligned}$$

故 $\varphi\sigma\varphi^{-1}\sigma^{-1} = (12534) \in N$。由 Case1，从该 5− 轮换出发又可以得到 3− 轮换。

Case 3 若仅有一个长为 3 的 π_i，其余 π_i 长度均在 3 以下。不失一般性，设 $\pi_1 = (123)$，其余 π_i 为 2− 轮换。则 $\sigma^2 = \pi_1^2 \in N$，而 $\pi_1^2 = (132)$。

Case 4 若所有的 π_i 均为 2− 轮换，则必然 $k > 1$。记 $\pi_1 = (12)$, $\pi_2 = (34)$。设 $\varphi = (123)$，则

$$\begin{aligned}\varphi\sigma\varphi^{-1} &= \varphi\pi_1\pi_2\varphi^{-1}\pi_3\cdots\pi_k \\ &= \varphi\pi_1\pi_2\varphi^{-1}\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}\sigma \\ &= (123)(12)(34)(132)(34)(12)\sigma \\ &= (13)(24)\sigma.\end{aligned}$$

故

$$\varphi\sigma\varphi^{-1}\sigma^{-1} = (13)(24) \in N.$$

设 $\psi = (135)$，则

$$\begin{aligned}(13)(24)\psi(13)(24)\psi^{-1} &= (13)(24)(135)(13)(24)(153) \\ &= (13)(135)(13)(153) \\ &= (135),\end{aligned}$$

故 N 包含 3− 轮换。

$\square$