线 性 代 数

Linear Algebra

主 讲: 鄭業龍 博士 副教授

E-mail: zhengyl@ustc.edu.cn

中国科学技术大学

数学科学学院

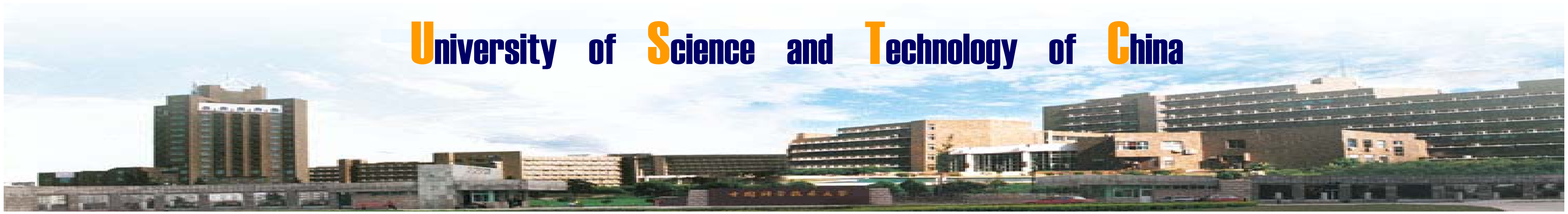
School of Mathematical Sciences, USTC

University of Science and Technology of China

第七章　欧几里得空间

在第五章我们引进了一般线性空间的概念。作为线性空间的一个具体模型–三维几何空间$\mathbb{R}^3$，其中向量的长度、夹角等几何性质在一般线性空间中没有得到反映。而这种反映向量之间的度量等几何性质的空间在物理和几何等许多问题中具有十分重要的作用。因此，本章的主要目的就是研究一类具有度量的线性空间，即欧几里得(Euclid)空间。

向量的内积，欧氏空间，向量的长度(模)，单位向量，向量间的夹角与距离，正交(垂直)，*Cauchy-Schwarz*不等式，三角形不等式，度量矩阵，标准正交基(向量组)，*Schmidt*正交化，正交变换与正交矩阵及其性质，对称变换与实对称矩阵及其正交相似对角化；欧氏空间的同构，欧氏空间子空间的正交性、正交补子空间，酉空间。



§7.1 定义与基本性质

从解析几何中我们知道，对于$\mathbf{R}^3$中任意两个向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$，设$|\mathbf{a}|$和$|\mathbf{b}|$分别是它们的长度，θ是它们之间的夹角，则其内积(有时又称为数量积或点乘)定义为

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta. \tag{7.1}$$

反之，向量$\mathbf{a}$的长度以及向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$之间的夹角也可由内积表示

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})}, \tag{7.2}$$

$$\theta = \arccos\frac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b})}}. \tag{7.3}$$

因此，在一般线性空间内，如果我们首先能给出满足基本性质的内积，则向量之间的长度和夹角也就可以由内积来定义，从而可以引进度量。

§7.1.1 欧几里得空间的定义

定义7.1.1. 设V是实数域$\mathbf{R}$上的线性空间，如果V中任意两个向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$都按某一法则对应于一个实数，记作$(\mathbf{a},\mathbf{b})$，且满足

(1) **对称性**：即对任意两个向量$\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$，有

$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b},\mathbf{a}) \tag{7.4}$$

(2) **线性性**：即对任意一个实数λ和任意三个向量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in V$，有

$$(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a},\mathbf{b}) \tag{7.5}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{c})+(\mathbf{b},\mathbf{c}) \tag{7.6}$$

(3) **正定性**：即对于任意一个向量$\mathbf{a}\in V$，有$(\mathbf{a},\mathbf{a})\geq 0$，等号成立当且仅当$\mathbf{a}=\mathbf{0}$。

则称$(\mathbf{a},\mathbf{b})$为向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$的**内积**，定义了内积的实数域$\mathbf{R}$上的线性空间V称为**欧几里得(Euclid)空间**，简称**欧氏空间**。

从上述定义可以看出，欧氏空间实际上就是装配了内积的线性空间。这样的线性空间，不但具有线性运算结构，同时也具有了几何结构。

注意到从定义中的(1)和(2)可知，对任意两个实数λ_1,λ_2和任意三个向量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in V$，有

$$(\lambda_1\mathbf{a}+\lambda_2\mathbf{b},\mathbf{c})=\lambda_1(\mathbf{a},\mathbf{c})+\lambda_2(\mathbf{b},\mathbf{c})$$

$$(\mathbf{a},\lambda_1\mathbf{b}+\lambda_2\mathbf{c})=\lambda_1(\mathbf{a},\mathbf{b})+\lambda_2(\mathbf{a},\mathbf{c})$$

一般地有

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{a}_i,\sum_{j=1}^{m}\mu_j\mathbf{b}_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i\mu_j(\mathbf{a}_i,\mathbf{b}_j). \tag{7.7}$$

特别地 $(\mathbf{a},\mathbf{0})=0.$ 读者不妨自己证明。

从（7.7）式看出，如果线性空间V的一组基之间的内积确定了，则任意两个向量之间的内积也确定了。

§7.1.2 欧几里得空间的性质

定理7.1.1 (Cauchy-Schwarz不等式). 设V是欧氏空间, $(\cdot,\cdot)$是V的内积, 则对V中的任意两个向量a和b, 有

$$|(\mathbf{a},\mathbf{b})| \le \sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b})}. \tag{7.8}$$

证明. 如果$\mathbf{a}$或者$\mathbf{b}$有一个为零向量，则结论显然成立。否则对任意实数λ，有

$$0 \le (\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}, \lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{a})\lambda^2 + 2(\mathbf{a},\mathbf{b})\lambda + (\mathbf{b},\mathbf{b}).$$

上式右端是λ的二次多项式，其值非负，故其判别式满足

$$4(\mathbf{a},\mathbf{b})^2 - 4(\mathbf{a},\mathbf{a})(\mathbf{b},\mathbf{b}) \le 0.$$

由此知结论成立。 □

定义7.1.2. 设V是欧氏空间，$(\cdot,\cdot)$是V的内积，对于任意的$\mathbf{a}\in V$，称

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{(\mathbf{a},\mathbf{a})} \tag{7.9}$$

称为$\mathbf{a}$的**长度**或**模**。

从内积性质(3)可知，$|\mathbf{a}|=0$的充分必要条件是$\mathbf{a}$为零向量。当$|\mathbf{a}|=1$时，称$\mathbf{a}$为**单位向量**。对于任意一个非零向量$\mathbf{a}$，向量$\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$为单位向量。因此通过这样的方式可以把任何一个非零向量“压缩”(或“放大”)为一个单位向量，这个过程称为向量的**单位化**。

根据长度的定义，Cauchy-Schwarz不等式就表示为$|(\mathbf{a},\mathbf{b})| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$。我们可进一步证明下列三角不等式

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|. \tag{7.10}$$

这是因为

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{a}) + 2(\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{b},\mathbf{b}) \\ &\le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2 \end{aligned}$$

所以

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

利用长度可给出欧氏空间中任意两个向量**a**和**b**之间的“距离”

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|. \tag{7.11}$$

读者不难验证，上述定义满足

- **对称性**: $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) = d(\mathbf{b},\mathbf{a})$;
- **正定性**: $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \geq 0$，等号成立当且仅当$\mathbf{a}=\mathbf{b}$;
- **三角不等式**: $d(\mathbf{a},\mathbf{b}) \leq d(\mathbf{a},\mathbf{c}) + d(\mathbf{c},\mathbf{b})$。

由Cauchy-Schwarz不等式还可以得到

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \leq 1.$$

由此可以定义两向量的夹角。

定义7.1.3. 对于欧氏空间V中两个非零向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$，定义它们之间的夹角为

$$\theta = \arccos \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \tag{7.12}$$

特别，当$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$时，称向量$\mathbf{a}$和$\mathbf{b}$**正交或垂直**，记作$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$。

例7.1.1. 设$V=\mathbf{R}^n$，对于任意两个向量 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$

定义
$$(\mathbf{a},\mathbf{b})=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \tag{7.13}$$

显然,它是$\mathbf{R}^n$上的一个内积。故$\mathbf{R}^n$中向量$\mathbf{a}$的长度为 $|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$,

两个向量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的夹角为 $\theta=\arccos\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}$.

对应这种内积，Cauchy-Schwarz不等式为

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

例7.1.2. 对于实数域上任何一个n维线性空间V，取定V的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$。

对任意向量 $\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n,\quad \beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n,$

定义它们的内积为 $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$

定义它们的夹角为 $\theta=\arccos\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}}.$

在上述内积定义下，基向量$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是相互垂直的，即

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\delta_{ij},\qquad i,j=1,2,\ldots,n. \qquad \square$$

上述例子说明，实数域上n维线性空间V的内积是一定存在的，从而可以构造相应的欧氏空间。

例7.1.3. 设$C[a,b]$是闭区间$[a,b]$上实的连续函数的全体，它是实数域上的线性空间(注意，这个空间不是有限维的)。对于任意的$f,g\in C[a,b]$，

定义
$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{7.14}$$

容易验证，它满足内积定义中的(1)和(2)。如果 $(f,f)=\int_a^b f^2(x)dx=0$，则由连续函数的性质可知$f\equiv 0$，所以(3)也满足。因此，（7.14）式定义了$C[a,b]$上的内积。对应的Cauchy-Schwarz不等式为

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leq\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

对于$C[-\pi,\pi]$，可以验证三角函数$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots,\cos nx,\sin nx$在上述内积之下是两两正交的。

§7.2　内积的表示与标准正交基

“基”是有限维线性空间理论中的“纲”。对于线性空间上的线性变换，如果知道了它在基向量上的取值，也就知道了它在整个线性空间上的取值，而且该变换还可以”表示”成为一个矩阵。反之，如果在基向量上定义一个变换，就可以线性扩张成整个线性空间上的一个线性变换。根据同样的思路，现在我们要研究欧氏空间中内积在空间的基之下的表示，以及空间的基向量之间的内积关系。

设V是有限维的欧氏空间，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$是它的一组基。任取$V$中任意两个向量$\alpha$和$\beta$，

$$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n,$$

$$\beta=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n,$$

根据内积的线性性，α和β的内积可以表示为

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i,j=1}^{n}(\alpha_i,\alpha_j)a_ib_j.$$

因此，把握住内积在基向量的取值，也就把握住了内积在任何两个向量上的取值。记矩阵

$$G = (g_{ij})_{n\times n}, \tag{7.15}$$

其中

$$g_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j), \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.16}$$

称矩阵G是内积$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的**度量矩阵**。利用度量矩阵，内积可以表示为

$$(\alpha, \beta) = \mathbf{x}^T G \mathbf{y}, \tag{7.17}$$

其中$\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_n)^T$，$\mathbf{y} = (b_1, \ldots, b_n)^T$。

由内积性质知，度量矩阵是实对称方阵，并且具有性质

$$\mathbf{x}^T G\mathbf{x} \geq 0,\quad \text{且等号成立当且仅当}\ \mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{7.18}$$

称满足上述性质的实对称方阵G为**正定方阵**。

反之，给定一个对称的正定矩阵G，按照（7.17）可定义欧氏空间V中一个内积。因此，给定一组基后，内积与一个实对称正定方阵建立了一一对应关系。由于内积与欧氏空间的基没有必然关系，因此，自然提出以下问题：

(1) 欧氏空间的内积在不同的基下对应的度量矩阵之间有没有什么关系？

(2) 是否存在一组特殊的基，使得欧氏空间的内积对应的度量矩阵尽可能简单？

要回答第一个问题就要从n维线性空间中两组不同的基之间的关系出发。设$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 是欧氏空间V的另一组基，从基$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$到基$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ 的过渡矩阵为P，即

$$(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)P.$$

设向量α在基$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 与$\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$下的坐标分别为$\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}}$，向量$\beta$在上述两组基下的坐标分别为$\mathbf{y},\bar{\mathbf{y}}$，则

$$\mathbf{x}=P\bar{\mathbf{x}},\qquad \mathbf{y}=P\bar{\mathbf{y}}.$$

再设内积在两组基下的度量矩阵分别为G与$\overline{G}=(\bar{g}_{ij})$，则

$$(\alpha,\beta)=\mathbf{x}^TG\mathbf{y}=\bar{\mathbf{x}}^TP^TGP\bar{\mathbf{y}}=\bar{\mathbf{x}}\bar{G}\bar{\mathbf{y}}.$$

因此

$$\overline{G}=P^TGP. \tag{7.19}$$

$$\overline{G} = P^T G P. \tag{7.19}$$

矩阵之间的关系(7.19)称为**相合关系**，所以内积在不同基下的度量矩阵彼此相合。相合也是一种等价关系，按照相合关系，实对称方阵可以分成不同的类。对于第二个问题，就是要找度量矩阵的相合标准形，我们将在第八章详细讨论。

如果度量矩阵G是单位阵，则$(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$，即基向量$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$两两正交，并且每个基向量为单位向量。此时，我们称$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$为一组标准正交基。

定义7.2.1. 在n维欧氏空间V中，一组两两正交的非零向量称为**正交向量组**。由正交向量组构成的基称为**正交基**。由单位向量组构成的正交基称为**标准正交基**。

显然，$\mathbf{R}^n$中的单位坐标向量组$\mathbf{e}_i, i = 1,2,\ldots,n$是标准正交基。

命题7.2.1. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为欧式空间中的正交向量组，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

证明. 设
$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_r\mathbf{a}_r=\mathbf{0},$$

则两边分别与$\mathbf{a}_i$作内积，得
$$\lambda_i|\mathbf{a}_i|^2=0.$$

因为$\mathbf{a}_i$是非零向量，所以就有$\lambda_i=0$，即向量组$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_r$线性无关。

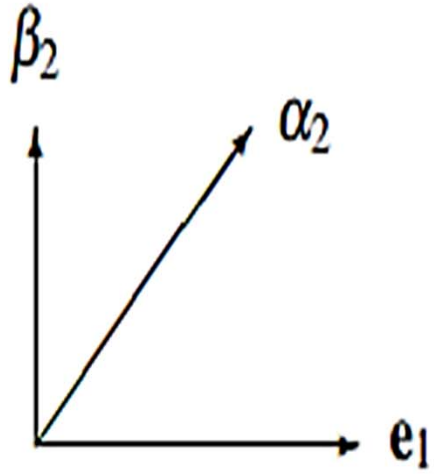
n维欧氏空间的标准正交基总是存在的。实际上，从任意一组基出发，我们可以构造出一组标准正交基，其过程称为**Schmidt正交化**。

n维欧氏空间的标准正交基总是存在的。实际上，从任意一组基出发，我们可以构造出一组标准正交基，其过程称为**Schmidt正交化**。

定理7.2.1 (Schmidt正交化). 从n维欧氏空间V的任意一组基出发，可以构造一组标准正交基。

证明. 设$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$是欧氏空间$V$的一组基。首先将$\alpha_1$归一化，

令 $\mathbf{e}_1 = \dfrac{\alpha_1}{|\alpha_1|}$,



则有$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1$。然后在$\mathbf{e}_1$与$\alpha_2$所张成的子空间中找出一个与$\mathbf{e}_1$正交的向量。

上图启发我们这样的向量为α_2减去α_2在$\mathbf{e}_1$上的投影，其代数表示为

$\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1$.　　不难验证，$(\mathbf{e}_1, \beta_2) = 0$。将$\beta_2$归一化得 $\mathbf{e}_2 = \dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}$.

显然，$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=0$，$(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)=1$。

继续上面的过程， 假设利用$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k-1}$已经构造出了单位化的正交向量组$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_{k-1}$， 我们再从$\alpha_k$和$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_{k-1}$所张成的子空间中挑选一个与$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_{k-1}$都正交的向量$\beta_k$如下

$$\beta_k=\alpha_k-\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_k,\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i.$$

显然，它一定非零，否则就有

$$\alpha_k=\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_k,\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i,$$

即α_k是$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_{k-1}$的线性组合， 从而也是$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k-1}$的线性组合， 这与$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$线性无关矛盾。另一方面

$$(\beta_k,\mathbf{e}_j)=(\alpha_k,\mathbf{e}_j)-\sum_{i=1}^{k-1}(\alpha_k,\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=0,\quad j=1,2,\ldots,k-1,$$

故β_k与所有$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_{k-1}$正交。将$\beta_k$归一化得到一个与所有$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_{k-1}$都正交的单位向量

$$\mathbf{e}_k=\frac{\beta_k}{|\beta_k|}.$$

将上述过程一直进行到$k=n$，这样就得到了一组标准正交基$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$。

例7.2.1. 把下列向量化为标准正交基

$$\alpha_1 = (1,1,0,0), \alpha_2 = (1,0,1,0), \alpha_3 = (-1,0,0,1), \alpha_4 = (1,-1,-1,1).$$

解. 先把α_1归一化得

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0).$$

令

$$\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(1,-1,2,0),$$

再归一化得

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2,0).$$

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0).$$

继续正交化α_3, α_4得

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2,0)$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - (\alpha_3, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\alpha_3, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}(-1,1,1,3), \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1,1,1,3),$$

$$\beta_4 = \alpha_4 - \sum_{i=1}^{3}(\alpha_4, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i = (1,-1,-1,1), \quad \mathbf{e}_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1).$$

三、度量矩阵与内积的坐标-矩阵表示

1.度量矩阵。称

$$G = (g_{ij})_{n\times n} \tag{19}$$

为n维欧氏空间V的内积$(\ ,\ )$在基$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$下的**度量矩阵或Gram矩阵**，其中$g_{ij} = (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j), i, j = 1, 2, ..., n$。

2.内积的**坐标-矩阵表示**。设$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$为$n$维欧氏空间$V = \mathbb{E}_n(\mathbb{R})$的一组基，$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$在基$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$下的坐标分别为$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$和$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$，即$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)\cdot X$，$\mathbf{b} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n)\cdot Y$，则

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = X^T \cdot G \cdot Y \tag{20}$$

3.度量矩阵G为n阶**正定**的**实对称**矩阵，即$G \in M_n(\mathbb{R}), G^T = G$，亦即$g_{ij} = g_{ji} \in \mathbb{R}, i, j = 1, 2, ..., n$，并且满足：对于任意一个向量$X \in \mathbb{R}^n$，有

$$X^T \cdot G \cdot X \geq 0 \tag{21}$$

且等号仅当$X = \mathbf{0}$时成立。

4.设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$为$n$维实线性空间$V=V_n(\mathbb{R})$的一组基，$G$为$n$阶正定实对称矩阵，$\mathbf{a}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n)\cdot X,\mathbf{b}=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n)\cdot Y\in V$,其中$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in\mathbb{R}^n$，则$(\mathbf{a},\mathbf{b})=X^T\cdot G\cdot Y$为$V$上的内积。

5.集合$\{V_n(\mathbb{R})$上的内积$\}$与集合$\{n$阶正定实对称矩阵$\}$的元素一一对应。

6.设$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$和$\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n$为$n$维欧氏空间$V=\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$的两组基，过渡矩阵为$T$（$n$阶可逆实方阵），即基变换为$(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_n)=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n)\cdot T$，则$V$的内积在上述两组基下的度量矩阵$G$和$\tilde{G}$相合，即

$$\tilde{G}=T^T\cdot G\cdot T \tag{22}$$

四、标准正交基

1.正交向量组：由两两正交的非零向量构成的向量组。

2.正交向量组必线性无关。

3.正交基：由正交向量组构成的基。

4.标准正交向量组：由单位正交向量组成的向量组。

5.标准正交基：由标准正交向量组构成的基称为**标准正交基**或**Descartes基**。

6.标准正交基的存在性及其求法-Schmidt正交化：将欧氏空间中任意一组向量（或基）改造成标准正交向量组（或基）的过程称为Schmidt正交化。具体做法是：对n维欧氏空间$V=\mathbb{E}_n(\mathbb{R})$的一组线性无关的向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_k, k\le n$。

8.3 二次型的有定性

一、有定性的概念

1.设n元实二次型$Q(X)=X^TAX$，如果对任意n维非零实向量X，恒有$Q(X)>(\geq,<,\leq)0$，则分别称二次型$Q(X)=X^TAX$为**正定（半正定，负定，半负定）**的；同时分别称相应的实对称矩阵A为**正定（半正定，负定，半负定）**的，且分别记为$A>(\geq,<,\leq)0$。

2.正定、半正定、负定和半负定的二次型及其矩阵统称为**有定**的，而其余的称为**不定**的。

二、有定性的等价条件与运算性质

1.正定的等价条件。下列条件均与A正定（即$A>0$）等价：

(1) $-A<0$;

(2)$P^TAP>0$(其中P为n阶可逆实方阵)，即正定是相合不变性；

(3)A的正惯性指数$s=rankA=n$（负惯性指数$t=0$）；

(4)$A\cong I_n$(A的规范形)；

(5)$A=B^TB$（其中B为n阶可逆实方阵）；

(6)A的特征值全为正实数。

(7)$T^{-1}AT>0$(其中T为n阶可逆实方阵，且$T^{-1}AT$实对称)，即正定是相似不变性；

2.若$A>0,\mu\in\mathbb{R}^+,k\in\mathbb{Z}$，则 $\mu A>0$, $A^k>0$, $A^*>0$; $detA>0$, $(A)_{ij}>0$ 。

3.设A,B为同阶正定实对称矩阵，则（1）$A+B>0$; (2)$AB>0\Leftrightarrow AB=BA$。

4.设A,B为（不一定同阶）正定实对称矩阵，则$A\oplus B=diag\{A,B\}>0$。

仿照1-4可得矩阵半正定和（半）负定以及二次型有定的等价条件和运算性质。如

5.半正定的等价条件。下列条件均与A半正定（即$A \geq 0$）等价：

(1) $-A \leq 0$;

(2) $P^T AP \geq 0$(其中P为n阶可逆实方阵)，即半正定是相合不变性;

(3) A的正惯性指数$s = rankA < n$，且负惯性指数$t = 0$;

(4) $A \cong diag\{I_s, O\}$(A的规范形), $s < n$;

(5) $A = B^T B$（其中B为n阶不可逆实方阵）;

(6) A的特征值全为非负实数。

(7) $T^{-1}AT \geq 0$(其中T为n阶可逆实方阵，且$T^{-1}AT$实对称)，即半正定是相似不变性;

6.若$A \geq 0, \mu \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}$，则 $\mu A \geq 0$, $A^k \geq 0$, $A^* \geq 0$; $detA \geq 0$, $(A)_{ij} \geq 0$ 。

三、有定性的判定

1.正定的判定（霍尔维茨定理）。n元实二次型$Q(X)=X^TAX$（或实对称矩阵A）正定$\Leftrightarrow A$的各阶（顺序）主子式全正，即$detA\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}>0,k=1,2,\cdots,n$。

仿照1，可得实二次型或实对称矩阵半正定和（半）负定的判定如下：

2.半正定的判定。n元实二次型$Q(X)=X^TAX$或实对称矩阵A半正定$\Leftrightarrow A$的各阶主子式全非负，且$detA=0$，即$detA\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix}\geq 0,1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$，$k=1,2,\cdots,n-1$，且$detA=0$。

3.负定的判定。n元实二次型$Q(X)=X^TAX$或实对称矩阵A负定$\Leftrightarrow A$的各奇数阶（顺序）主子式全负，各偶数阶（顺序）主子式全正，即$(-1)^k detA\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}>0,k=1,2,\cdots,n$。

4.半负定的判定。n元实二次型$Q(X)=X^TAX$或实对称矩阵A半负定$\Leftrightarrow A$的各奇数阶主子式全非正，各偶数阶主子式全非负，且$detA=0$，即$(-1)^k detA\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix}\geq 0,1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n,k=1,2,\cdots,n-1$，且$detA=0$。

四、同时相合对角化:若A,B都是n阶实对称矩阵，且$A>0$，则存在n阶可逆实方阵P，使得$P^TAP=I$，且P^TBP为对角阵。

五、应用:多元函数的极值的判定。

谢 谢！

Thank you !

University of Science and Technology of China