# 数学分析讲义

## 第一册

中 国 科 学 技 术 大 学

二〇一八年二月

# 目　录

# 第 1 章　极限

微积分实际上是用微分和积分的方法来研究变量, 大体上可分为微分部分、积分部分和它们之间的关系这三个部分. 现在公认为微积分是由 Newton（牛顿）和 Leibniz（莱布尼兹）发明的. 微积分的基础是极限理论, 在微积分发展初期, 极限的概念从逻辑上来说很不严密, 从而造成长达两百年之久的争论. 直到 19 世纪初 Cauchy（柯西）、Weierstrass（魏尔斯特拉斯）、Riemann（黎曼）等人在前人工作的基础上逐步完成了极限理论的严格化, 这种争论才算结束. 极限理论严格化的标志性节点是实数理论的建立, 而极限理论的严格化以及后来微积分的进一步发展都离不开对实数集合的讨论.

## §1.1　实数

有关实数理论的详细讨论将在第三册中展开, 作者也可以从其他教学参考书中得到更多信息.这里仅做描述性介绍并陈述一些基本事实.

### 1.1.1　整数与有理数

自然数是一切数的出发点. 通常用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集合

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

自然数集对加法运算封闭, 即任意两个自然数 $a$ 和 $b$, 他们的和 $a + b$ 还是自然数. 自然数集对减法运算不封闭, 对加减法运算封闭的数集是整数集合

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\},$$

它是自然数集的一个扩充. 如果考虑乘法运算, 则整数集对乘法运算封闭, 但对乘法运算的逆运算——除法运算不封闭. 在整数集合中添加整数相除的商, 就得到有理数的全体

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\},$$

它对加减乘除四则运算封闭, 也称 $\mathbb{Q}$ 为**有理数域**.

在数的发展之初, 主要是用来计数和丈量线段的长度. 但是由勾股定理可知边长为 1 的正方形的对角线长度 $a$ 满足 $a^2 = 2$（这个数记为 $a = \sqrt{2}$）, 这样的数是不能用有理数表示的, 因此必须引入更多的数.

### 1.1.2 10 进制小数

每个有理数都可以表示为小数的形式, 如

$$\frac{1}{8}=0.125,\ \frac{1}{3}=0.3333\cdots,\ \frac{2}{11}=0.181818\cdots$$

一般地, 一个（正）十进制小数 $a$ 是指

$$a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中 $a_0$ 是一个非负十进制整数, $a_1,a_2\cdots\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,9\}$, $a$ 也可以记为

$$a=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots\frac{a_n}{10^n}+\cdots.$$

如果小数点后边只有有限个数不是 0, 称 $a$ 是有限小数: 如果小数点后面的数是循环出现的, 既存在自然数 $n,k$ 使得 $a_{n+i}=a_{n+i+k}$ 对 $i=1,2,3,\cdots$ 均成立, 称小数 $a$ 是循环小数, 记为

$$a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\dot{a}_{n+1}\cdots\dot{a}_{n+k}.$$

每一个有理数都可以写成有限小数或循环小数. 反之, 每一个有限小数或循环小数都是有理数. 例如, 循环小数 $a=0.\dot{1}5\dot{8}$ 是有理数,

$$\begin{aligned}1000a&=158.\dot{1}5\dot{8}\\999a&=158\\a&=\frac{158}{999}.\end{aligned}$$

无限不循环小数称为**无理数**. 有理数和无理数通称**实数**, 全体实数的集合记为 $\mathbb{R}$. 实数有多种构造方式, 彼此等价. 以上我们用10 进制表示实数是一种直观的描述.

### 1.1.3 实数域

实数域（即实数的全体）是有理数域的扩充, 除了与有理数域一样对加、减、乘、除四则运算封闭外, 还具有以下基本特点，即

**完备性（连续性）公理** 设 $X$ 和 $Y$ 是实数集$\mathbb{R}$ 中的两个非空子集, 并满足对于任何 $x\in X$, $y\in Y$, 有 $x\leqslant y$, 那么一定存在一个介于 $X$ 和 $Y$ 之间的实数, 即存在 $c\in\mathbb{R}$, 使得对任何 $x\in X$, $y\in Y$, 有 $x\leqslant c\leqslant y$.

实数的完备性公理是实数理论的基础，但该公理对有理数域并不成立. 例如对于有理数域 $\mathbb{Q}$ 的两个子集

$$X=\{x\mid x\in\mathbb{Q},x^2<2,x>0\},\quad Y=\{y\mid y\in\mathbb{Q},y^2>2,y>0\}$$

就不存在介于两者之间的一个有理数. 尽管如此, 有理数域在实数域内具有**稠密性**, 即

**定理 1.1** 任何两个实数(不管是有理数还是无理数)之间一定存在一个有理数.

**证明** 设 $a,b\in\mathbb{R}$ 满足 $a<b$, 不妨设 $b-a<1$, 则

$$b-a=\frac{c_n}{10^n}+\frac{c_{n+1}}{10^{n+1}}+\cdots,$$

其中$n\geqslant 0,\ c_n\geqslant 1$. 所以

$$10^{n+1}(b-a)>1,\quad \text{或}\quad 10^{n+1}b>1+10^{n+1}a$$

取$[10^{n+1}a]$ 为 $10^{n+1}a$ 表示成无穷小数后的整数部分, 它满足

$$[10^{n+1}a]\leqslant 10^{n+1}a<[10^{n+1}a]+1$$

综合上述不等式, 不难发现有理数 $c=\frac{1+[10^{n+1}a]}{10^{n+1}}$ 满足 $a<c<b$. □

### 1.1.4 数轴

在直线 $l$ 上标定一个点为**原点**, 并规定其右侧为正向, 取一个长度为**单位长**, 标定了原点、单位长和方向的直线称为**数轴**. 一个基本事实是: **数轴上的点与实数是一一对应的**. 例如依单位长度往正向逐次丈量, 就得到自然数在数轴上对应的点, 同理往原点左侧的丈量得到负整数对应的点.

为描述有理数对应的点, 设数轴上 1 对应的点为 $A$, 过原点作一条异于数轴的直线 $l'$, 对任意的自然数 $n>0$, 在 $l'$ 上取点 $A',B'$ 满足 $OA'=n,\ OB'=1$, 过点 $B'$ 作线段 $\overline{AA'}$ 的平行线, 交数轴于 $B$ 点, 则 $OB=\dfrac{1}{n}$。利用 $OB$ 作为新的尺度逐次丈量, 可以在数轴上表出所有有理数.

如果数轴上一个点 $A$ 不能对应任何一个有理数, 则点 $A$ 将数轴分成左边和右边两部分. 设左边部分那些点对应的有理数集合记为 $X$, 右边那些点对应的有理数集合记为 $Y$, 显然对任意 $x\in X,\ y\in Y$, 有 $x<y$ 根据实数完备性(连续性)公理, 存在一个实数 $a$ 介于 $X,\ Y$ 之间, 这个数就与点 $A$ 对应.

与点对应的数也称为点的**坐标**. 正是基于这种对应关系, 在今后的讨论中, 不再严格区分数轴上点和其对应的实数(点的坐标). 甚至将整数(或有理数、无理数)对应的点称为整数点(或有理点、无理点).

数轴上一点 $A$ 到原点 $O$ 的距离就是对应实数的绝对值 $|a|$. 绝对值满足

1° $|a|\geqslant 0$, 等号成立当且仅当 $a=0$, 即正定性;

2° $|a-b|=|b-a|$, 即对称性;

3° $|a+b|\leqslant|a|+|b|$, 即三角不等式.

以上三条正是定义距离的三个要素. 当然, 绝对值还有其他一些性质, 不再赘述.

设$a,b\in\mathbb{R},\ a<b$，集合$(a,\ b)=\{x\in\mathbb{R}|a<x<b\}$称为以$a,b$为端点的**开区间**，集合$[a,\ b]=\{x\in\mathbb{R}|a\leqslant x\leqslant b\}$称为以$a,b$为端点的**闭区间**，它们对应数轴上以点$a,\ b$为端点的线段，开区间不含端点，闭区间包含端点。

同样可以定义半开半闭区间

$$(a,\ b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leqslant b\},\quad [a,\ b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x<b\}.$$

记号 "$\infty$" 称为 "无穷"，"$+\infty$"称为正无穷，"$-\infty$"称为负无穷，注意，无论是正无穷还是负无穷，它们不是一个数，但可以利用它们表示无限区间

$$\begin{aligned}(-\infty,\ a)&=\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\},\quad &(-\infty,\ a]\ &=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant a\},\\(a,\ +\infty)&=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\},\quad &[a,\ +\infty)\ &=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant a\}.\end{aligned}$$

以后经常用到的是以一点为中心的开区间$(a-\delta,\ a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$, 称为 $a$ 的一个**邻域**. 而用集合 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 表示去掉中心点的邻域，有时用它来刻画"点 $a$ 的**附近**".

## 习题 1.1

1. 设 $a$ 是有理数, $b$ 是无理数. 求证: $a+b$ 和 $a-b$ 都是无理数; 当 $a\neq 0$ 时, $ab$ 和 $b/a$ 也都是无理数.

2. 求证: 两个不同的有理数之间有无理数.

3. 求证: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 以及 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 都是无理数.

4. 把下列循环小数表示为分数:

$$0.249\,99\cdots, \quad 0.\dot{3}7\dot{5}, \quad 4.\dot{5}1\dot{8}$$

5. 设 $r,s,t$ 都是有理数. 求证:
(1) 若 $r+s\sqrt{2}=0$, 则 $r=s=0$;
(2) 若 $r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}=0$, 则 $r=s=t=0$.

6. 设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有相同的符号, 且都大于 $-1$. 证明:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

7. 设 $a,b$ 是实数, 且 $|a|<1,|b|<1$. 证明:

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$

## §1.2 数列极限

### 1.2.1 数列极限的定义

所谓**数列**, 就是定义在自然数集上, 并按照自然数顺序排列的一串实数.

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

通常用 $\{a_n\}$, $(n \geqslant 1)$ 这样的记号来表示, 第 $n$ 项 $a_n$ 则称为这个数列的通项. 或者说, 数列 $\{a_n\}$ 是正整数集 $\mathbb{N}^+$ 到实数集合的一个映射, $n$ 的像就是 $a_n \in \mathbb{R}$. 根据实数和数轴上点的对应, 数列可以看成是数轴上的一串点. 所以也称数列为**点列**.

数列 $\{a_n\}$, $(n \geqslant 1)$ 的极限, 就是研究当 $n$ 无限增大时, 通项 $a_n$ 的变化趋势. 例如下面两个数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\cdots;$$
$$1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ 1,\ \frac{1}{n},\cdots;$$

当 $n$ 无限增大时, 第一个数列的通项"无限接近"一个固定的数"0"; 第二个数列则不然, 它的通项一会儿是 1, 一会儿接近 0, 其性态与第一个数列完全不同, 不能"无限接近"于任何一个固定的数.

一个数列 $\{a_n\}$, $(n \geqslant 1)$ 中的通项 $a_n$ 当 $n$ "无限增大"时"无限接近于某个实数 $a$", 是我们感兴趣的事情. 所谓"无限接近"某个实数, 即是"要说多接近就多接近". 也就是说, 如果有一个实数 $a$, 不管你预先指定"接近"的程度是多小, 当 $n$ 足够大后, 所有的 $a_n$ 总能达到你的要求.

因此, 代替这种描述性的解释, 我们必须要有刻划"接近"的度量, 同时在逻辑上对"$n$ 足够大后"以及"$a_n$ 与 $a$ 接近程度达到要求"等这类说法赋予确切的含义.

正如上节所提到的那样, 在实数集合中 (或者说在实数轴上), 数的绝对值自然给出了一种度量, 用以衡量两个数之间的差 (或者说对应数轴上点之间的距离). 随着 $n$ 的不断增大, $|a_n - a|$ 愈小, 则表示 $a_n$ 与 $a$ 愈接近.

以数列 $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$ 为例, 对于固定的数"0", 如果要求 $\frac{1}{n}$ 与 0 的接近的程度小于 $10^{-2}$, 那么当 $n > 100$ 后, 所有的 $a_n = \frac{1}{n}$ 都能满足要求: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 10^{-2}$; 如果要求接近的程度小于 $10^{-100}$, 那么当 $n > 10^{100}$ 后, 所有的 $\frac{1}{n}$ 都满足要求: $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 10^{-100}$.

一般地, 如果你任意选定一个正数 $\varepsilon$, 并要求当 $n$ 足够大后, $\frac{1}{n}$ 与 0 的接近程度不超过 $\varepsilon$: $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ (即, 不超过预先指定的接近程度). 那么, $n$ 大到什么程度后, 能够保证满足你的要求呢? 我们发现, 对于眼前这个例子, 只要 $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (这里 $[x]$ 表示不超过实数 $x$ 的最大整数) 后, 就有

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

所以, 对于任意给定一个正数 $\varepsilon$, 是否在 $n$ 充分大后, 数列与一个数接近的程度不超过 $\varepsilon$ 的关键, 就成了是否能够找到这样的 $N$, 来刻划“$n$ 充分大后”, 虽然 $N = N(\varepsilon)$ 的存在可能会依赖于 $\varepsilon$, 而且也不是唯一的（上面的例子看得很清楚）. 通常, $\varepsilon$ 愈小, (要求愈严), 相应的 $N$ 也就愈大.

**定义 1.2** 设 $\{a_n\}$ 是给定的数列. 如果有一个实数 $a$ 具有下列性质: 对任意给定的一个正数 $\varepsilon$, 总是存在一个自然数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

即

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

成立, 那么称 $a$ 是数列 $\{a_n\}$ 的极限, 或数列 $\{a_n\}$ 以 $a$ 为极限, 也称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$. 记成

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{或} \quad \lim a_n = a,$$

也可以记成 $a_n \to a\,(n \to \infty)$, 称为“当 $n$ 趋于无穷时, $a_n$ 趋于 $a$”.

有极限的数列称为**收敛数列**, 不收敛的数列称为**发散数列**.

我们还需要说明上述定义的合理性, 即所定义数列的极限是唯一的. 我们将在极限的性质中作出说明.

数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$ 的几何描述是: 对任意的 $\varepsilon$, 都有相应的自然数 $N$, 使得 $N$ 以后的所有项(或点) $a_n$ 都落在以 $a$ 为中心, 以 $\varepsilon$ 为半径的开区间 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 之中, 而落在这个区间之外的点, 至多只有 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$ 这有限几个点（如图1.1）.

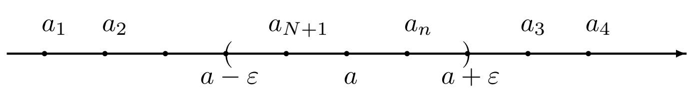


图 1.1

从数列极限的定义, 我们看到如果数列 $\{a_n\}$ 不以实数 $a$ 为极限, 是指: 存在一个正数 $\varepsilon_0$, 使得对任意自然数 $N$, 都存在比 $N$ 还大的自然数 $n$, 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon_0$. 或者从几何上说, 存在一个以 $a$ 为中心的开区间, 使得在此区间之外有数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项.

**例 1.2.1** 数列 $a_n = a\,(n = 1, 2, 3, \ldots)$, 称为**常数列**. 则 $\lim a_n = a$.

**例 1.2.2** $\alpha > 0$, 则 $\lim \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$.

**证明** 对任意给定的正数 $\varepsilon$, 解不等式

$$\left|\frac{1}{n^{\alpha}}-0\right|=\frac{1}{n^{\alpha}}<\varepsilon$$

得, $n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$, 所以只要取

$$N=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}\right]+1,$$

当 $n>N$时, 就有 $\left|\frac{1}{n^{\alpha}}-0\right|<\varepsilon$ . 由定义可知 $\lim\frac{1}{n^{\alpha}}=0$.

**例 1.2.3** 设数列 $a_1=0.9,\ a_2=0.99,\ a_3=0.999,\ \cdots$, 证明 $\lim a_n=1$.

**证明** 注意到 $1-a_n=\dfrac{1}{10^n}$, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 取 $N=\left[\log_{10}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right]+1$, 当 $n>N$ 时,

$$|a_n-1|=\frac{1}{10^n}<\varepsilon,$$

所以 $\lim a_n=1$.

因为 $\varepsilon$ 的作用是刻划 $a_n$ 与 $a$ 接近的程度, 我们只对它越小越感兴趣. 为方便起见, 有时也可限定 $\varepsilon$ 的一个上界, 这并不影响极限的讨论.

**例 1.2.4** 设 $q$ 是一个给定的实数, 满足 $|q|<1$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

**证明** 当 $q=0$ 时, 结论显然成立, 故以下假设 $q\neq 0$. 为了论证方便, 设任意给定的正数 $\varepsilon$ 满足 $\varepsilon<1$. 直接解不等式

$$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon,$$

得 $n\ln|q|<\ln\varepsilon$. 由于 $0<|q|<1$, 并且已经假设 $0<\varepsilon<1$, 故 $\ln|q|<0,\ \ln\varepsilon<0$, 因此有 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$. 根据这些分析, 只要取

$$N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]+1,$$

则当 $n>N$ 时,就有

$$|q^n-0|<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$.

**例 1.2.5** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

**证明** 设 $\varepsilon$ 是任意给定的一个正数, 要想效仿前面的例子, 从不等式 $\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|=\frac{2^n}{n!}<\varepsilon$ 中直接找出一个 $N$ 并不容易. 好在只要求 $N$ 是存在的, 所以我们可以将估计 $\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|$ 适当放大, 方便求解$N$. 由

$$\left|\frac{2^n}{n!}-0\right|=\frac{2\cdot 2\cdots 2}{1\cdot 2\cdots n}<2\cdot\frac{2}{n}=\frac{4}{n},$$

所以解不等式 $\frac{4}{n} < \varepsilon$, 得 $n > \frac{4}{\varepsilon}$. 故取 $N = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$, 则当 $n > N$时, 有

$$\left|\frac{2^n}{n!} - 0\right| = \frac{2^n}{n!} < \frac{4}{n} < \frac{4}{N} < \varepsilon.$$

利用极限的定义, 可以证明一些简单数列的收敛性. 然而, 这个过程实际上是预先看出具体的极限值, 再根据定义来验证. 对一些较为复杂的数列, 一方面它的极限值未必容易观察; 另一方面, 即使观察出极限, 利用定义来验证也可能相当困难. 因此, 进一步了解数列收敛性的性质, 可以加深对收敛性的认识, 扩大计算极限的范围.

### 1.2.2 收敛数列的性质

本节将讨论收敛数列的一些基本性质. 在理解和证明这些性质的过程中, 关于数列收敛的几何解释是非常有帮助的.

**定理 1.3** $1^\circ$ 若 $\{a_n\}$ 是收敛数列, 则 $\{a_n\}$ 的极限是唯一的.

$2^\circ$ 改变数列中有限多项的值, 不影响数列的收敛性及其极限.

**证明** $1^\circ$ 如果 $\{a_n\}$ 有两个极限值 $a$ 和 $b$. 根据极限的定义, 对于任意的正数 $\varepsilon$ ,注意到 $\frac{\varepsilon}{2}$ 也是一个正数, 因此对应两个极限值, 分别存在正整数 $N_1$ 和 $N_2$, 使得当

$$n > N_1 \text{ 时有 } |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$n > N_2 \text{ 时有 } |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

因此, 当 $n > \max(N_1,\ N_2)$ 时 ( 即 $n$ 同时满足 $n > N_1,\ n > N_2$ ), 上面两个不等式都满足, 所以

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

两个数的距离要小于任意一个正数, 这两个数必须相等, 即 $a = b$.

从几何上看, 如果有两个不相等的极限值 $a$ 和 $b$, 则一定存在分别以 $a$ 和 $b$ 为中心、且没有公共点的两个开区间 $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ 和 $(b - \varepsilon,\ b + \varepsilon)$ ( 事实上, 只要取 $\varepsilon < \frac{|a-b|}{2}$ 即可 ). 根据极限的定义, 当 $n$ 充分大后, $a_n$ 既要落到第一个开区间中, 又要落到第二个开区间中去. 这显然是不可能的.

$2^\circ$ 因为极限的定义完全取决于充分大以后的各项取值的趋势, 所以, 改变有限项的值不会影响充分大以后的事情. □

**定理 1.4** 设 $\{a_n\}$ 为收敛数列, 极限值记为 $a$.则

$1^\circ$ $\{a_n\}$ 为有界数列. 即存在一个正数 $M$ ( 与变量 $n$ 无关 ), 使得 $|a_n| \leqslant M$ 对所有的 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 成立.

2° 若存在实数 $l$, 使得 $l<a$(或$l>a$), 则当 $n$ 充分大时, 有 $a_n>l$(或$a_n<l$). 特别地, 若 $a>0$(或$a<0$), 则当 $n$ 充分大时, 有 $a_n>0$(或$a_n<0$).

3° 若存在实数 $l$, 使得对 $n$ 充分大时, 有 $a_n\geqslant l$(或$a_n\leqslant l$),则$a\geqslant l$(或$a\leqslant l$). 特别对充分大的 $n$, 若 $a_n\geqslant 0$ (或 $a_n\leqslant 0$), 则 $a\geqslant 0$(或$a\leqslant 0$).

**证明** 1° 取 $\varepsilon=1$, 由定义知道, 当然存在一个自然数 $N$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<1$, 即当 $n>N$ 时, 有 $|a_n|<|a|+1$. 取

$$M=\max(|a|+1,\ |a_1|,\ |a_2|,\ \cdots,\ |a_N|),$$

注意到, 第一, 有限个数中一定能取到一个最大的; 第二, 上面确定的 $M$ 显然与 $n$ 无关. 则对所有自然数 $n$, 也就是数列的所有项, 都有 $|a_n|\leqslant M$.

2° 若 $a>l$, 取 $\varepsilon=a-l>0$, 则存在一个自然数 $N$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon=a-l$, 因此

$$-(a-l)<a_n-a$$

即, 当 $n>N$ 时，不等式 $a_n>l$ 成立. 对于$a<l$的情形，可类似证明,在这种情况下，只要取 $\varepsilon=l-a>0$ 即可.

3° 的结论实际上是 2° 的推论.可以采取反证法：假如结论不真,即 $a<l$, 由定理中 2° 的结论，当 $n$ 充分大时，就有 $a_n<l$,这与给定条件相矛盾,因此结论成立. □

定理 1.4中的 1° 给出了收敛数列的一个必要条件, 即收敛数列必有界. 因此，无界数列一定是发散的. 例如数列 0, 1, 0, 2, 0, 3, $\cdots$, 0, $n$, $\cdots$是一个无界数列, 因此是发散的. 但是并非所有有界的数列都是收敛的, 例如 $\{(-1)^{n-1}\}$ 是一个有界数列, 但是不收敛(见例 1.2.12). 也就是说, 有界不能保证收敛性. 有界只是对数列每一项取值范围的限制, 是一种宏观控制, 而收敛是要求数列的通项坚定不移地无限接近一个固定的数.

定理 1.4 中的2° 和 3° 给出的, 是由数列极限值的界限推断出当 $n$ 充分大时数列通项 $a_n$ 的界限, 以及由收敛数列通项的界限推断出其极限值的界限.

需要特别指出的是, 在定理 1.4 ( 3°)中,即使是 $a_n>l$(即是严格的不等式), 也不一定能够保证 $a>l$. 例如 $a_n=\frac{1}{n}>0$, 但它的极限值却是 0.

**定理 1.5** 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个收敛数列, 则通过四则运算形成新的数列 $\{a_n\pm b_n\}$ , $\{a_nb_n\}$ , $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ (当 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$ 时)都收敛, 且

1° $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

2° $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, 特别有 $\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. 其中 $c$ 是一个常数.

3° $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{a}{b}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$ .

**证明** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ , $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ .

$1^\circ$ 目的是要证明对于任意的正数 $\varepsilon$, 能够找到一个正整数 $N$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式 $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| < \varepsilon$ 成立. 由 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的收敛性知, 对于 $\frac{\varepsilon}{2}$ , 分别存在 $N_1$ 和 $N_2$ 使得,

$$\text{当 } n > N_1 \text{ 时, 有 } \ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

以及

$$\text{当 } n > N_2 \text{ 时, 有 } \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时, 上面两个式子同时成立, 所以有

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$2^\circ$ 注意到

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leqslant |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|. \end{aligned}$$

由于 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是收敛数列, 故都是有界的, 取一个大的界 $M$, 使得

$$|a_n|, \ |b_n| < M \quad (n \geqslant 1).$$

因而 $|b| \leqslant M$（定理 1.4 中的$3^\circ$ ）. 对于任意的正数 $\varepsilon$ , 对应 $\frac{\varepsilon}{2M}$, 分别存在整数 $N_1$ 和 $N_2$, 因此取 $N = \max(N_1, N_2)$, 使得当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ \ |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

同时成立. 所以当 $n > N$时, 有

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &< M|b_n - b| + M|a_n - a| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$3^\circ$ 因为

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n},$$

且 $b \neq 0$, 由 $2^\circ$ 可知, 只需证明数列 $\{\frac{1}{b_n}\}$ 收敛于 $\frac{1}{b}$ 即可. 不妨假定 $b > 0$, 则

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|}.$$

由于$b_n$ 收敛于$b$, 一方面对于正数 $b/2 > 0$, 存在$N_1$, 当 $n > N_1$ 时,有

$$|b_n - b| < \frac{b}{2}$$

由此得

$$b_n > b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$$

另一方面, 对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 存在 $N_2$, 使得当 $n > N_2$ 时, 有

$$|b_n - b| < \frac{b^2\varepsilon}{2}.$$

所以, 当 $n > N = \max(N_1, N_2)$ 时

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{2}{b^2} \cdot \frac{b^2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. □

定理 1.5 说明收敛数列的极限运算和四则运算是可以交换的, 并可推广到有限多个收敛数列参与四则运算的情形. 对于 3° 中的结论, 会因为某些 $b_n$ 为 0 而使得分式没有意义. 但是因为 $\{b_n\}$ 的极限 $b \neq 0$, 所以 $b_n$ 为 0 的项至多只有有限多个. 可以改变这有限多项的值, 这不会改变 $\{b_n\}$ 的收敛性和极限. 或者在 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 中删除这些没有定义的有限多项, 不会改变其收敛性和极限. 有了定理 1.5, 在计算复杂数列极限时, 可以将其化为简单极限的四则运算即可, 而不必再使用"$\varepsilon$–$N$"语言作繁琐的叙述.

**例 1.2.6** 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}.$$

**解** 借助 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**例 1.2.7** 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 5\cdot 3^n}{3^n + 5\cdot 2^n}.$$

**解** 借助 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 5\cdot 3^n}{3^n + 5\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 5}{1 + 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 5.$$

**定理 1.6** *设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别收敛于 $a$ 和 $b$.*

*1° 若当 $n$ 充分大时有 $a_n \geqslant b_n$, 则 $a \geqslant b$;*

*2° 若 $a > b$, 则当 $n$ 充分大时, 有 $a_n > b_n$.*

**证明** 1° 假设结论不真, 即 $a < b$. 取 $l$ 满足 $a < l < b$, 则由定理 1.4（2°）知, 当 $n$ 充分大时, 即存在正数 $N_1$, 使得当 $n > N_1$时, 有 $a_n < l$. 同理, 存在 $N_2$, 当 $n > N_2$ 时, 有 $b_n > l$. 所以当 $n > \max(N_1, N_2)$ 时, 就有 $a_n < l < b_n$, 这与条件相矛盾, 这说明假设错误, 即结论成立.

2° 取 $l$ 满足 $a > l > b$, 因为 $\{a_n\}$ 的极限是 $a$, 所以由定理 1.4（2°）知, 存在一个整数 $N_1$, 使得 $n > N_1$ 时, 有 $a_n > l$. 同理, 存在一个整数 $N_2$, 使得当 $n > N_2$ 时, 有 $b_n < l$. 所以当 $n > \max(N_1, N_2)$ 时结论成立. □

定理 1.6 说明，极限过程能够保持“顺序”, 即两个数列中较大数列的极限值也较大. 反之, 对极限值较大的数列, 其本身也较大. 如果有一个数列夹在两个数列之间, 当两端的数列收敛到同一个数时, 夹在当中的数列一定会“被迫”收敛到同一个数. 即

**定理 1.7** 若数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 都收敛于 $a$, 且对所有充分大的 $n$, 有

$$b_n \leqslant a_n \leqslant c_n,$$

则数列 $\{a_n\}$ 也收敛, 而且极限也为 $a$.

**证明** 因为 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 都收敛于 $a$, 所以对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 一定存在相应的正整数 $N_1$ 和 $N_2$, 使得当 $n > N_1$ 时, $|b_n - a| < \varepsilon$, 当 $n > N_2$ 时, $|c_n - a| < \varepsilon$, 从而

$$a - \varepsilon < b_n, \quad c_n < a + \varepsilon.$$

条件中所谓 “对所有充分大的 $n$” , 即表明存在整数 $N_3$, 使得当 $n > N_3$ 时, 有

$$b_n \leqslant a_n \leqslant c_n.$$

现在取 $N = \max(N_1, N_2, N_3)$, 则当 $n > N$ 时, 上述三个不等式同时满足, 因此有

$$a - \varepsilon < b_n \leqslant a_n \leqslant c_n < a + \varepsilon.$$

即 $|a_n - a| < \varepsilon$, 这表明 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$. □

注意到, 这里并没有事先假定数列 $\{a_n\}$ 收敛. 定理 1.7 用来判别数列收敛是一个初等而实用的方法, 其基本精神是用已知收敛的数列, 推断所考虑的数列的收敛性. 关键是对所考察的数列, 能否找到另外两个具有同样极限的数列夹住它. 这样不仅能够证明被考察数列的收敛性, 而且还能求出具体的极限值. .

**例 1.2.8** 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}}$, 其中 $\alpha$ 是给定的正实数.

**解** 当 $\alpha > 0$ 时, 显然有

$$1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} < 1 + \frac{1}{n^\alpha}$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1$, 而不等式的左端是一个常数列, 所以应用定理 1.7, 所求极限为 1.

**例 1.2.9** 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

**解** 注意到

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

而

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}},\quad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}},$$

因此由上一个例题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1,$$

因此, 所求的极限为 1.

**例 1.2.10** 设 $a>0$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

**证明** 当 $a=1$ 时, 结论是显然的. 若 $a>1$, 则 $\sqrt[n]{a}>1$, 故可设 $\sqrt[n]{a}=1+\lambda_n$ ($\lambda_n>0$). 于是

$$a=(1+\lambda_n)^n>1+n\lambda_n.$$

即

$$0<\lambda_n=\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a-1}{n}=0$, 故由定理 1.7 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

若 $0<a<1$, 则 $\frac{1}{a}>1$, 故有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=1.$$

**例 1.2.11** 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

**证明** 命 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda_n$, 则有

$$\begin{aligned}n=(1+\lambda_n)^n&=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2+\cdots\\&>1+\frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2,\end{aligned}$$

由上式解得 $\lambda_n<\sqrt{\frac{2}{n}}$, 故有

$$0<\sqrt[n]{n}-1=\lambda_n<\sqrt{\frac{2}{n}}.$$

由定理 1.7, 就得到所证结果.

收敛数列的下一个性质是关于子数列的收敛问题. 所谓一个数列 $\{a_n\}$ 的**子数列**(简称子列), 是指取自原数列 $\{a_n\}$ 中的无穷多项, 按照原数列中同样的顺序写成的一个新的数列. 于是 $\{a_n\}$ 的子列是这种形式: $\{a_{n_k}\}$ ($k\geqslant 1$), 其中 $n_k$ ($k\geqslant 1$) 都是正整数, 满足 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$. 因此子列会随着数列的收敛而收敛.

**定理 1.8** 设 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$, 则其任意一个子数列也收敛于 $a$.

**证明** 设 $\{a_{n_k}\}$ $(k \geqslant 1)$ 是 $\{a_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 的一个子列, 对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 我们要证明, 存在一个正数 $K$, 使得 $k > K$ 时, 有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$

事实上, 由于 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$, 所以对于上述的 $\varepsilon$, 一定存在一个正数 $N$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

因为 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, 而且都是正整数, 所以一定存在某个 $K$, 使得当 $k > K$ 时, $n_k > N$, 于是, 当 $k > K$ 时, 有

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. □

从定理 1.8 可知, 如果一个数列有两个子列分别收敛到不同的值, 或者有一个子列不收敛, 那么这个数列一定没有极限. 因此, 这个性质通常用来判断一个数列是否发散.

**例 1.2.12** 求证: 数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

**证明** 设 $a_n = (-1)^n$, 则它的子列 $\{a_{2k}\}$ 以 1 为极限, 而子列 $\{a_{2k-1}\}$ 以 $-1$ 为极限. 故原数列发散.

**例 1.2.13** 数列

$$1,\ 1, 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ \cdots,\ 1,\ n,\ \cdots$$

有一个子列

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \ldots$$

是发散的, 所以原数列发散.

**例 1.2.14** 如果收敛数列的极限不为 0, 则这个数列中至多只有有限多项为 0.

**证明** 假如数列中有无穷多项是 0, 则这些项可构成原数列的一个子列, 它的极限显然是 0, 但由定理 1.8 知, 它的极限应该和原数列一样不为 0, 矛盾. 故结论成立.

### 1.2.3 实数完备性若干等价命题

本节通过介绍实数完备性的若干等价命题, 了解实数完备性在极限中的基础性作用, 加深对极限理论的理解.

首先建立**确界原理**, 为此先给出如下定义

**定义 1.9** *设 $X \subset \mathbb{R}$ 是一个非空集合, 若存在一个实数 $a$, 使得对于任何 $x \in X$, 有 $x \leqslant a$, 则称 $a$ 是数集 $X$ 的一个* **上界**. *若存在实数 $b$, 使得对于任何 $x \in X$, 有 $x \geqslant b$, 则称 $b$ 是数集 $X$ 的一个* **下界**. *若数集 $X$ 既有上界, 又有下界, 则称 $X$ 是* **有界集合**.

显然, 如果数集 $X$ 有上界（或者下界）, 那么它的上界（或者下界）一定不唯一. 我们感兴趣的是最小的上界和最大的下界. 所谓数集 $X$ 的最小的上界 $a$ 是指: 第一, $a$ 是它的一个上界; 第二, 任何比 $a$ 小的数都不再是它的上界. 用数学的语言来描述就是

**定义 1.10** 设 $a$ 是数集 $X$ 的上界, 若对于任意的正数 $\varepsilon$, 都存在一个数 $x_\varepsilon \in X$, 使得 $x_\varepsilon > a - \varepsilon$. 则称 $a$ 为 $X$ 的**上确界**, 记为 $\sup X$. 同理可定义**下确界**, 记为 $\inf X$.

根据上（下）确界的定义容易看出, 上（下）确界只要存在必定是唯一的.这是因为如果存在两个不相等的上确界 $a$ 和 $a'$, 不妨设 $a' < a$, 那么 $a$ 就不是最小上界, 矛盾, 所以上确界如果存在一定唯一.

**定理 1.11** $\mathbb{R}$ 中任何有上（下）界的非空数集一定有上（下）确界.

**证明** 设 $X \subset \mathbb{R}$ 有上界. 记 $Y = \{y \mid y \in \mathbb{R},\ y \geqslant x, \text{对任意的} x \in X \text{成立}\}$ , 也就是说 $Y$ 为 $X$ 的所有上界构成的数集. 显然, $X$, $Y$ 满足完备性（连续性）公理的条件, 因此存在一个数 $a$, 使得对任意的 $x \in X$, $y \in Y$, 有 $x \leqslant a \leqslant y$, 即 $a$ 是 $X$ 最小的上界. 同理可证明下确界的存在性. □

一个数集的上（下）确界, 既可以是数集中的数, 也可以不是, 例如

$$\inf\left\{\frac{1}{n},\ n = 1, 2, \cdots\right\} = 0, \quad \sup\left\{\frac{1}{n},\ n = 1, 2, \cdots\right\} = 1$$

$$\inf\{x,\ 0 \leqslant x < 1\} = 0, \quad \sup\{x,\ 0 \leqslant x < 1\} = 1$$

利用确界原理, 可以给出关于单调数列收敛性的判别法.

**定义 1.12** 数列 $\{a_n\}$ 称为***单调递增（或单调增）的***, 如果 $a_n \leqslant a_{n+1}$, $(n = 1, 2, \cdots)$; 称为***单调递减（或单调减）的***, 如果 $a_n \geqslant a_{n+1}$, $(n = 1, 2, \cdots)$. 单调递增和单调递减数列, 通称***单调数列***.

由极限的性质已经知道, 收敛数列必有界, 但有界数列未必收敛, 这是因为有些数列可以在界限范围内不断摆动（数列 $\{(-1)^{n-1}\}$ 就是一个典型的例子）. 但是对单调数列如果有界, 情况就不同了. 例如, 对单调增的数列 $\{a_n\}$, 如果有界, 等同于说它有上界, 即存在一个常数 $M$, 使得 $a_n \leqslant M$, $n = 1, 2, \cdots$ , 数列的通项 $a_n$ 随着 $n$ 的增大而不断增大, 但始终受到上界的"阻拦" , 具体来说, 有

**定理 1.13** 单调增（减）有界数列必收敛, 其极限值等于数列构成的数集的上确界（或下确界）, 也称为数列的上确界（或下确界）.

**证明** 设数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界, 因此根据确界原理（定理 1.11）, 数集

$$X = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$$

必有上确界, 记上确界为 $a$, 也就是说对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 数 $a - \varepsilon$ 不是 $X$ 的上界, 因此数列中存在一项 $a_N \in X$, 使得 $a_N > a - \varepsilon$. 又因为 $\{a_n\}$ 是单调递增的, 所以当

$n>N$ 时, 有 $a_n \geqslant a_N > a-\varepsilon$ 显然 $a+\varepsilon > a \geqslant a_n$ 对任何 $n$ 成立. 所以当 $n>N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 即 $\lim a_n = a$. □

**例 1.2.15** 设 $a_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ ($n$ 重根式), 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

**解** $a_n$ 就是由如下递推关系

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$$

定义的一个数列. 首先观察到: $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > a_1$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} > \sqrt{2+\sqrt{2}} = a_2$. 如果 $a_n > a_{n-1}$ 成立, 则

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n+2} - \sqrt{a_{n-1}+2} = \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{a_n+2}+\sqrt{a_{n-1}+2}} > 0,$$

即 $a_{n+1} > a_n$, 所以由归纳法证得, $\{a_n\}$ 是单调递增的.

另一方面, 利用归纳法, 因为 $a_1 < 2$, $a_2 < 2$, 若 $a_n < 2$, 则 $a_{n+1} = \sqrt{a_n+2} < 2$. 即数列 $\{a_n\}$ 是有上界的. 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设其极限为 $a$. 将递推公式变为

$$a_{n+1}^2 = a_n + 2$$

在上式两端令 $n\to\infty$（注意上式两端的极限都已经知道是存在的, 所以可以这么做）得

$$a^2 = a + 2$$

解得 $a=-1$ 或 $a=2$. 但是 $a_n > 0$, 故 $a \geqslant 0$, 从而可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

由定理 1.13 还将得到下面的重要结果.

**定理 1.14** 设 $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geqslant 1$, 则数列 $\{e_n\}$ 收敛, 并记数列 $\{e_n\}$ 的极限为

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

**证明** 首先证明该数列是递增的. 事实上, 由二项式定理可得

$$\begin{aligned} e_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

$$e_{n+1} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

比较 $e_n$ 和 $e_{n+1}$ 两个表达式子的右端和号中的对应项, 显然, 前者较小. 而 $e_{n+1}$ 所多出来的一项 $\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 0$, 故 $e_{n+1} > e_n$. 所以 $\{e_n\}$ 为严格单调增加数列.

其次, 我们将证明数列是有界的. 在 $e_n$ 的上述展开式中

$$0<\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1.$$

所以

$$\begin{aligned}2<e_n<&2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}=3-\frac{1}{n}<3,\end{aligned}$$

$n=1,2,\cdots$, 也就是说数列 $\{e_n\}$ 是单调递增有上界的, 因此一定收敛. □

注记 由于 $2<e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$, 所以 $2\leqslant e\leqslant 3$. 在第三章中我们将用 *Taylor* 公式进一步证明 $e$ 是一个无理数! 其数值是 $e=2.718281828\cdots$. 注意到数列 $\{e_n\}$ 的每一项都是有理数, 但是它的极限值却是无理数 $e$. 由此提醒读者注意以下两点:

1° 极限的理论问题首先是极限的存在性问题, 一个数列的极限存在与否不仅与数列本身的性态有关, 还与数列所在的数域有关. 如果限制在有理数域讨论数列的极限, 定理 *1.14* 说明, 有理数域对极限运算是不封闭的, 因此有必要对其进行扩充, 使之成为一个完备(连续)的数域.

2° 从另一个角度看, 定理 *1.14* 是用有理数列的极限来产生一个数的例子, 或者说无理数 $e$ 可以用有理数数列的极限表示. ***习题*** *1.2* 中第*18*题(*3*)给出了用有理数列构造无理数 $\sqrt{2}$ 的例子, 熟知的无理数 $\pi$ 也可借助单位圆具有 $2^n$ 条边的内接正多边形面积所构成的数列的极限来定义. 这种现象不是孤立的, 事实上利用有理数列的极限可以构造所有无理数! (参见第三册).

在微积分以及在工程技术运用中, 常用到以 $e$ 为底的对数(我们将在介绍导数时作一种解释), 这种对数称为自然对数, 简记为 ln. 另一方面, 定理 1.14 给出的数列极限也是一个典型的数列极限. 不少数列极限问题可以化为数 $e$ 的极限, 请看下面例题.

**例 1.2.16** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

**解**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\\&=e.\end{aligned}$$

作为定理 1.13 的一个重要应用, 我们有下列**区间套定理**

**定理 1.15** (区间套定理) 设有一列闭区间 $[a_n,\ b_n]$, $n=1,2,\cdots$, 满足下列条件

1° $[a_1,\ b_1]\supset[a_2,\ b_2]\supset\cdots\supset[a_n,\ b_n]\supset\cdots$

2° $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

则存在唯一一个点 $\xi$ 属于所有闭区间 $[a_n,\ b_n], n=1,2,\cdots$

**证明** 由条件 1° 知, 所有区间的左端点构成的数列 $\{a_n\}$ 是单调增的且以 $b_1$ 为上界, 所有区间的右端点构成的数列 $\{b_n\}$ 是单调减的且以 $a_1$ 为下界. 根据定理 1.13 , 两个数列分别收敛, 记

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

因为 $a_n < b_n$, 所以 $a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$. 由条件 2°,

$$0 \leqslant b-a \leqslant \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

所以 $\xi = a = b$ 即是所求的点. □

利用区间套定理, 可以直接证明下列**列紧性定理**

**定理 1.16** (Bolzano-Weierestrass 定理) 从任何有界的数列中可选出一个收敛的子列.

**证明** 设 $\{a_n\}$ 是一个有界的数列, 不妨设 $\{a_n\}\subset[c,d]$. $[c,\frac{c+d}{2}]$ 和 $[\frac{c+d}{2},d]$ 这两个区间中至少有一个含有数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 记这个区间为 $[c_1,d_1]$. 同样, 在 $[c_1,\frac{c_1+d_1}{2}]$ 和 $[\frac{c_1+d_1}{2},d_1]$ 这两个区间中至少有一个含有数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 记这个区间为 $[c_2,d_2]$. 继续做下去, 可得一列区间 $[c_k,d_k]$, $k=1,2,\cdots$ , 使得每个这样的区间都含有数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 且

$$[c_1,d_1]\supset[c_2,d_2]\supset\cdots[c_k,d_k]\supset\cdots$$
$$d_k - c_k = \frac{1}{2^k}(d-c)\to 0,\ k\to 0,$$

根据定理 1.15, 可知

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} d_k = a.$$

在 $[c_1,d_1]$ 中取数列的一项 $a_{n_1}$, 接着在 $[c_2,d_2]$ 中取 $a_{n_2}$, 且 $n_2>n_1$. 由于每一个区间 $[c_k,b_k]$ 中包含数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 所以这样的选择可以继续下去并得到$\{a_n\}$ 的子列 $a_{n_k}\in[c_k,d_k]$. 根据定理 1.7 得 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. □

我们知道收敛数列的子列一定也收敛于同一个极限(定理 1.8), 即“部分服从整体”, 定理1.16 的含义是即使数列发散但有界, 就一定存在部分构成的子列是收敛的.

**定义 1.17** 数列 $\{a_n\}$ 称为基本列, 若对任意给定的正数 $\varepsilon$, 存在整数 $N=N(\varepsilon)$(即 $N$ 可能依赖于 $\varepsilon$), 使得当 $m,n>N$ 时, 就有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

注意, 基本列的条件也可以表示成: 对任意给定的正数 $\varepsilon$, 存在自然数 $N$, 使得当 $n>N$ 时, 不等式

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

对所有自然数 $p$ 成立.

**定理 1.18** (Cauchy 收敛准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 是基本列.

**证明** 必要性是容易证明的, 因为 $\{a_n\}$ 收敛, 对于任意的一个正数 $\varepsilon$, 存在整数 $N$, 使得当 $m,n>N$ 时

$$|a_m-a|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此就有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon.$$

下面证明充分性. 对于正数 1, 存在整数 $N_1$, 使得当 $m,n\geqslant N_1$ 时, 有 $|a_m-a_n|<1$. 令

$$M=\max(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{N_1}|,|a_{N_1}|+1).$$

则有 $|a_n|\leqslant M$, $n=1,2,\cdots$. 这说明 $\{a_n\}$ 是有界的. 由定理 1.16, 存在收敛的子列 $\{a_{n_k}\}$.

因为 $\{a_n\}$ 是基本列, 所以对任意正数 $\varepsilon$, 存在整数 $N_2$, 使得当 $m,n\geqslant N_2$ 时, 有

$$|a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于这个 $\varepsilon$, 因为 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a$, 存在一个整数 $K$, 使得当 $k>K$ 时, 有 $|a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 特别可取一个 $n_k$ 使得 $n_k>N_2$ 且 $k>K$. 于是, 当 $n>N_2$ 时, 有

$$\begin{aligned}|a_n-a|&\leqslant|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. □.

*注记 Cauchy 收敛准则是在不借助外在信息情况下, 仅根据数列自身内在性态来判断数列的收敛性. 数列收敛的定义主要在于估计差值 $|a_n-a|$, 但这种判断方法只是当极限值是已知的情况下才有可能应用. 而定理 1.13 给出的是一种根据数列内在单调性判断数列是否收敛的方法. 但是对于一般的数列, Cauchy 收敛准则断言, 一个数列收敛, 必须且只需其充分靠后的任意两项均接近到任意指定的程度.*

**例 1.2.17** 设 $a_n=\frac{\sin 1}{1^2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

**证明** 因为

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&=\left|\frac{\sin(n+1)}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{(n+p)^2}\right|\\&\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

所以, 对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n>N$ 时, 对任何自然数 $p$ 都有

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛准则可知 $\{a_n\}$ 收敛.

**例 1.2.18** 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. 求证: $\{a_n\}$ 发散.

**证明** 对任何自然数 $n$, 取 $p=n$, 则有

$$a_{2n}-a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

由 Cauchy 收敛准则可知 $\{a_n\}$ 发散.

### 1.2.4 发散到无穷大的数列

大致地说, 当 $n$ 无限增大时如果数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 中的通项 $a_n$ 的绝对值任意地大, 就称该数列发散到无穷大.

**定义 1.19** *设 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 是给定的数列, 若对于任意给定的正数 $M$, 都存在自然数 $N$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n|>M$, 则称数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 发散到无穷大, 记作*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty,\quad \text{或}\quad a_n\to\infty\ (n\to\infty)$$

必须注意的是, 趋于无穷大的数列是发散的数列, 因此关于极限的性质, 运算和定理等, 对于这种数列一般并不成立.

由定义可知, 发散到无穷大的数列一定是无界的, 但反之不然. 例如数列

$$0,\ 1,\ 0,\ 2,\ \cdots,\ 0,\ n,\ \cdots$$

显然是无界的, 但并不趋于无穷大. 然而, 对于单调数列, 趋于无穷大与无界是等价的(试比较定理 1.13).

**定理 1.20** *单调数列发散到无穷大的充分必要条件是其为一个无界数列.*

**证明** 定理必要性证明已经在上面说明. 现在证明充分性. 事实上, 对任意的正数 $M$, 因为 $\{a_n\}$ 无上界, 故必然存在自然数 $N$, 使得 $a_N>M$. 由于数列是单调递增的, 所以当 $n>N$ 时, 有 $a_n>a_N>M$, 即 $\lim a_n=\infty$.

关于单调递减数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 的情况可以类似的证明, 也可以利用上面的结果, 因为 $\{-a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 就转化为单调递增的情况. □

数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 发散于无穷大, 则称当 $n$ 趋于无穷时 $a_n$ 是**无穷大量**. 对应地, 如果一个数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 收敛于0, 那么称当 $n$ 趋于无穷时 $a_n$ 是**无穷小量**.

### 1.2.5 Stolz 定理

该定理在求数列的极限时, 也是常用的.

**定理 1.21** ($\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 定理) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\{b_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A,$$

其中 $A$ 可以是实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

**证明** 这里, 只对 $A$ 是实数的情况给予证明. 不妨设 $\{b_n\}$ 是正项数列. 假设条件成立, 则对任意正数 $\varepsilon$, 存在自然数 $N_1$ 使得

$$A-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<A+\varepsilon,\quad n>N_1,$$

由于 $\{b_n\}$ 严格单调增, 所以

$$(A-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(A+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n),\quad n>N_1.$$

在上面不等式中, 分别列出 $N_1+1,N_1+2,\cdots,n-1$ 并将所得不等式相加, 得到

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_{N_1+1})<a_n-a_{N_1+1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{N_1+1}).$$

同除以 $b_n$ 并整理得

$$\frac{a_{N_1+1}}{b_n}-\frac{Ab_{N_1+1}}{b_n}-\varepsilon\left(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_n}\right)<\frac{a_n}{b_n}-A<\frac{a_{N_1+1}}{b_n}-\frac{Ab_{N_1+1}}{b_n}+\varepsilon\left(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_n}\right).$$

注意到 $\{b_n\}\to+\infty$, 对固定的 $N_1$, 存在自然数 $N_2$, 使得当 $n>N_2$ 时, 有

$$-\varepsilon<\frac{a_{N_1+1}}{b_n}-\frac{Ab_{N_1+1}}{b_n}<\varepsilon.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 于是当 $n>N$ 时, 有

$$-2\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-A<2\varepsilon.$$

□

**定理 1.22** ($\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理) 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个收敛于 0 的数列, 且 $\{b_n\}$ 是严格递减数列. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A,$$

其中 $A$ 可以是实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

证明留作习题.

注记

1° 对于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的 *Stolz* 定理中并没有要求数列 $\{a_n\}$ 的极限一定为 $\infty$, 只是为了与 $\frac{0}{0}$ 型的 *Stolz* 定理对应, 采用了记号"$\frac{\infty}{\infty}$".

2° 两种类型的 *Stolz* 定理的逆定理并不成立. 例如对 $a_n = (-1)^n$, $b_n = n$, 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$. 但是$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 2(-1)^n$ 的极限并不存在.

3° 在 §3.4 中, 我们将介绍求 "$\frac{0}{0}$" 和 "$\frac{\infty}{\infty}$" 型函数未定式极限的 *L'Hospital* 法则. 这里介绍的 *Stolz* 定理可以看成是一种离散形式的 *L'Hospital* 法则.

**例 1.2.19** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

**证明** 令 $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = n$. 则 $\{B_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$, 且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}-A_n}{B_{n+1}-B_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. 根据 Stolz 定理, 即得结论.

这个例子的含义是对于一个收敛数列 $\{a_n\}$, 它的前 $n$ 项的算术平均所构成的数列收敛于同一极限. 根据这个结果可以证明下面例题

**例 1.2.20** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

**证明** 若 $b = 0$, 即 $b_n \to 0$, 所以 $|b_n| \to 0$. 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 所以有界 $|a_n| \leqslant M$, $n = 1, 2, \cdots$, 于是由例1.2.19 得

$$\left|\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}\right| \leqslant M \frac{|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|}{n} \to 0$$

若 $b \neq 0$, 则 $b_n - b \to 0$, 由上面的结果得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(b_n - b) + a_2(b_{n-1} - b) + \cdots + a_n(b_1 - b)}{n} = 0$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} - b\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right) = 0,$$

再次利用例1.2.19 即得结论.

### 1.2.6 上极限与下极限*

根据定理 1.16, 有界数列必有收敛子列.这一小节我们考虑有界数列收敛子列极限的最大最小值.

从定理 1.4 和定理 1.8, 我们知道收敛数列有界, 而且任何子列与原数列有相同的极限. 一个自然的问题是: 当有界数列的任何收敛子列都有相同的极限时, 该有界数列是否收敛? 回答是肯定的, 证明留作习题. 因此, 有界数列如果不收敛的话, 可能有许多子列收敛到不同的极限. 如果 $a$ 是数列 $\{a_n\}$ 的某个子列的极限, 那么称 $a$ 为 $\{a_n\}$ 的一个 **部分极限**.

设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 定义集合

$$\mathbf{E} = \{l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} : \ a_n \text{ 中有子列 } a_{k_n} \to l,\, n \to \infty\}$$

是数列部分极限的集合, 其中 $l = \pm\infty$ 是指 $\{a_n\}$ 有子列发散到 $\pm\infty$. 集合 $\mathbf{E}$ 总是非空的, 如果 $\{a_n\}$ 是有界数列, 则 $\mathbf{E}$ 有界, 如果数列无界, 则 $\mathbf{E}$ 含有 $+\infty$ 或 $-\infty$.

令 $a^* = \sup \mathbf{E}$, $a_* = \inf \mathbf{E}$, 他们分别被称为数列 $\{a_n\}$ 的 **上极限**和 **下极限**, 记作

$$\limsup_{n\to\infty} a_n, \quad \liminf_{n\to\infty} a_n, \quad \text{或者} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

根据上确界和下确界的定义, 可以证明 $a^*$ 和 $a_*$ 都在 $\mathbf{E}$ 中, 因此有界数列 $\{a_n\}$ 的上(下)极限正是它的一切收敛子列的极限所组成的集合中的最大(小)者. 显然下确界不超过上确界, 而且不难证明

**定理 1.23** $a_n \to a$ 等价于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = a$.

**定理 1.24** $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geqslant n} a_k$, $\quad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geqslant n} a_k$.

**证明** 我们只对有界数列的情况证明. 设 $\{a_n\}$ 是一个有界数列, 则集合 $B_n = \{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$ 是有界数集, 记 $\beta_n = \inf B_n = \inf\limits_{k\geqslant n} a_k$. 不难看出 $\{\beta_n\}$ 单调递增且有界, 因此有极限 $\beta = \lim \beta_n$. 利用下确界的定义, 可归纳地选出自然数 $k_n$ 使得 $\beta_{k_{n-1}+1} \leqslant a_{k_n} < \beta_{k_{n-1}+1} + \frac{1}{n}$, 以及 $k_n < k_{n+1}$. 因为 $\{\beta_{k_{n-1}+1}\}$ 作为 $\{\beta_n\}$ 的子列收敛到 $\beta$, 由夹逼原理知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \beta$. 这说明 $\beta$ 是一个部分极限. 它也是最小的部分极限, 因为对每个 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 $n$, 使得 $\beta - \varepsilon < \beta_n$. 因此当 $k \geqslant n$ 时, 有 $a_k \geqslant \beta_n > \beta - \varepsilon$. 由此知 $\{a_n\}$ 的部分极限都不会比 $\beta - \varepsilon$ 小. 因为 $\varepsilon$ 是任意正数, 所以部分极限都不会比 $\beta$ 小, 这说明 $\beta$ 是最小的部分极限. 即, $\beta = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. 同理可证明上极限的情况.

## 习题 1.2

1. 用定义证明下面的结论:

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5+3n}=\dfrac{1}{3}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$;

   (3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

2. 若数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 满足条件: 任给正数 $\varepsilon$, 存在自然数 $N$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<M\varepsilon$ (其中 $M$ 为常数), 则 $\{a_n\}$ 必以 $a$ 为极限.

3. 证明: 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

4. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

5. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 又 $|b_n|\leqslant M,\ (n=1,2,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

6. 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$, 及 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

7. 证明下列数列不收敛:

   (1) $a_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$; (2) $a_n=5\left(1-\dfrac{2}{n}\right)+(-1)^n$.

8. 求下列极限:

   (1) $a_n=\frac{4n^2+5n+2}{3n^2+2n+1}$;

   (2) $a_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$;

   (3) $a_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n(n+1)/2}\right)$, $n=2,3,\cdots$;

   (4) $a_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

   (5) $a_n=(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n}),\ (|q|<1)$.

9. 若 $a_n\neq 0\,(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$?

10. 若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=0$, 是否必有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$? 若还假设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 回答同样的问题.

11. 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n\pm b_n\}$, $\{a_n\cdot b_n\}$ 的收敛性如何? 举例说明. 若数列 $\{a_n\}$与 $\{b_n\}$ 皆发散, 回答同样的问题.

12. 下面的推理是否正确?

(1) 设数列 $\{a_n\}$： $a_1=1, a_{n+1}=2a_n-1\ (n=1,2,3,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 在 $a_{n+1}=2a_n-1$ 两边取极限, 得 $a=2a-1$, 即$a=1$.

(2)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\\
&=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{n\text{个}}=0.
\end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n=1^n=1.$

13. 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分别收敛于 $a,\ b$. 若 $a>b$, 则从某一项开始, 有 $a_n>b_n$; 反过来, 若从某项开始恒有 $a_n\geqslant b_n$, 则 $a\geqslant b$.

14. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别收敛于 $a$ 及 $b$. 记 $c_n=\max(a_n,b_n),\ d_n=\min(a_n,b_n)\,(n=1,2,\cdots)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\max(a,b),\quad \lim_{n\to\infty} d_n=\min(a,b).$$

15. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^k-n^k]$, 其中 $0<k<1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-n+2}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}$.

16. 设 $a_1,\cdots,a_m$ 为 $m$ 个正数, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max(a_1,a_2,\cdots,a_m)$.

17. 证明下列数列收敛:

(1) $a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$;

(2) $a_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}$;

(3) $a_n=\alpha_0+\alpha_1 q+\cdots+\alpha_n q^n$, 其中 $|\alpha_k|\leqslant M,(k=1,2,\cdots)$, 而 $|q|<1$;

(4) $a_n=\frac{\cos 1}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2}{2\cdot 3}+\frac{\cos 3}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{\cos n}{n\cdot(n+1)}$.

18. 证明下列数列收敛,并求出其极限:

(1) $a_n = \frac{n}{c^n},\ (c>1)$;

(2) $a_1 = \frac{c}{2},\ a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2},\ (0 \leqslant c \leqslant 1)$;

(3) $a>0,\ a_0>0,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$, (提示: 先证明 $a_n^2 \geqslant a$.);

(4) $a_0 = 1,\ a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$;

(5) $a_n = \sin\sin\cdots\sin 1$, ($n$ 个 sin).

19. 设 $a_n \leqslant a \leqslant b_n\ (n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

20. 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

21. 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是正数列, 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n = 1,2,\cdots$. 求证: 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

22. 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, 求下列数列的极限:

(1) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$; (2) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n-2}\right)^{n+1}$;

(3) $a_n = \left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^{n}$; (4) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^3}\right)^{2n^3}$.

23. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 且 $|b_n| \geqslant b > 0\,(n=1,2,\cdots)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

24. 确定 $n\to\infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}$ 与 $n\sin\frac{n\pi}{2}$ $(n \geqslant 1)$ 是否有界, 是否趋于无穷大.

25. 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}\,(n \geqslant 1)$ 定义. 证明: $a_n \to +\infty\,(n\to\infty)$.

26. 给出 $\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理的证明.

## §1.3 函数极限

### 1.3.1 函数

函数就是量与量之间的对应关系. 数学和其他科学中绝大部分关系都可以抽象成函数关系. 例如, 自由落体下落时间 $t$ 与下落距离 $h$ 之间的关系是 $h_0 - h = \frac{1}{2}gt^2$ (其中 $g$ 是重力加速度); 质量是 $m$ 的运动质点的动能是通过它的运动速度 $v$ 按照公式 $E = \frac{1}{2}mv^2$ 给出的; 而导线中有电流通过单位时间内产生的热量与电流强度 $I$ 的关系是 $Q = \frac{1}{2}RI^2$, 其中 $R$ 是导线的电阻; 在几何中, 对于给定锐角 $\alpha$ 的直角三角形, 与 $\alpha$ 相邻的直角边的长度 $x$ 与三角形面积 $S$ 之间的关系是 $S = \frac{1}{2}(\tan\alpha)x^2$; 二维平面坐标中顶点在原点的抛物线上点的横坐标与纵坐标之间的关系是 $y = \frac{1}{2}ax^2$ (其中 $a$ 表示抛物线开口的方向和大小). 有意思的是，这里举出的例子，虽然考虑的问题不同，但抽象出来都是同样的二次函数. 当然, 一般的函数更为复杂，表达方式也不尽相同.

**(1) 基本概念**

对于定义在实数集合 $\mathbb{R}$ 的子集上且取值为实数的函数, 严格定义如下:

**定义 1.25** 设 $A$ 是 $\mathbb{R}$ 的子集, 若对于 $A$ 中的每一个数 $x$, 有唯一确定的 $y \in \mathbb{R}$ 与之对应 (即函数的单值性), 将 $y$ 记成 $f(x)$, 那么, 就称 $f$ 是 $A$ 上的一个实值函数. 集合 $A$ 称为 $f$ 的定义域, 而数 $f(x)$ 称为 $f$ 的值. $f$ 的一切值的集合叫做 $f$ 的值域, 通常记成 $f(A)$, 即 $f(A) = \{y \mid y = f(x),\ x \in A\}$. 习惯上, 称上述的 $x$ 为自变量, $y$ 为因变量.

一个函数, 也可以看成是一个将 $A \subset \mathbb{R}$ 映入 $\mathbb{R}$ 内的一个映射:

$$f:\ A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad 或 \quad f:\ x \longmapsto y = f(x)$$

把实数与实数轴上的点一一对应, 则定义在实数上、取值为实数的函数有一种几何表示, 即 $y = f(x)$ 的图象. 将定义域所在的数轴作为二维坐标平面 $Oxy$ 的横轴、值域所在的数轴作为纵轴, 则 $y = f(x)$ 的图象即是 $Oxy$ 中坐标为 $(x,\ f(x))$ $(x \in A)$ 的点构成的平面点集 (大多数情况下, 这个点集是一条 (分段) 曲线).

函数的单值性反映在函数的图象上, 就是任何一条平行于 $y$ 轴的直线, 与 $y = f(x)$ 的图象至多有一个交点.

设函数 $f$ 的定义域为 $A$, 一般而言, 其值域 $f(A)$ 的性态极其复杂, 但有三种情形在微积分中特别重要.

$1^\circ$ **函数的值域** $f(A)$ **是一个有界数集**. 若存在一个常数 $M$, 使得 $f(A)$ 包含在区间 $[-M,\ M]$ 中, 即对任何一个 $x \in A$, 有 $|f(x)| \leqslant M$. 称满足这种情形的函数为 $A$ 上的**有界函数**, 或者说函数 $f$ 在 $A$ 上有界.

$2^\circ$ **定义域 $A$ 与值域 $f(A)$ 同序（或者反序）**. 即 $A$ 中任意两个数 $x_1$, $x_2$ 的大小顺序, 均与它们对应的值域 $f(A)$ 中的两个数 $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ 的大小顺序相同（或者相反）, 此时称函数 $f(x)$ 是单调的. 确切地说, $f(x)$ 称为 $A$ 上

$$\text{单调增函数, 对任意的 } x_1,\ x_2 \in A, \quad \text{如果 } x_1 < x_2, \quad \text{有} f(x_1) \leqslant f(x_2);$$

$$\text{单调减函数, 对任意的 } x_1,\ x_2 \in A, \quad \text{如果 } x_1 < x_2, \quad \text{有} f(x_1) \geqslant f(x_2);$$

单调增和单调减函数, 统称为**单调函数**. 若上面的不等号为严格不等号, 则称 $f(x)$ 为**严格单调增（减）函数**.

$3^\circ$ **定义域 $A$ 与值域 $f(A)$ 一一对应**. 即对每一个 $y \in f(A)$, 都有唯一确定的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$. 从函数图象上看, 就是任何一条平行于 $x$ 轴的直线, 与函数的图象至多有一个交点. 此时, 自然地导出一个由 $f(A)$ 到 $A$ 的映射. 这个映射称为 $f(x)$ 的反函数（或逆映射）, 记为 $f^{-1}$ ,即$x = f^{-1}(y)$. 它的定义域为 $f(A)$, 值域为 $A$.

很明显, 若 $f$ 是 $A$ 上严格单调的函数, 则 $f$ 必然是 $A$ 到 $f(A)$ 的一个一一映射, 因此也就有反函数.

**（2）函数的复合**

不同的函数在他们公共有定义的区域内是可以进行加、减、乘、除四则运算的（做除法时, 只能在分母不为零的区域内进行）. 这里主要介绍函数的另一种运算—— 函数的复合运算.

设有函数 $y = f(u)$, 定义域为 $B$, 值域为 $C$, $u = g(x)$, 定义域为 $A$, 如果函数 $g(x)$ 的值域 $g(A)$ 包含在 $B$ 内. 那么由

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

定义了一个新函数 $f \circ g$, 称之为 $f$ 与 $g$ 的**复合函数**, 它的定义域是 $A$ . 通常记为 $y = f(g(x))$, 而称 $u$ 为中间变量.

从映射的角度看, 复合函数就是从 $A$ 到 $B$ 再到 $C$ 的一个映射

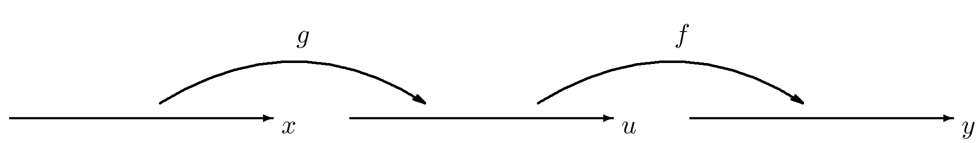


图 1.2

注意, $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 一般并不相同, 但容易看到, 复合运算满足结合律

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h),$$

因此用 $f\circ g\circ h$ 表示, 或者记为 $f(g(h(x)))$, 这是三个函数的复合. 类似地可以考虑任意有限多个函数的复合.

**(3)初等函数**

这里, 简单地罗列一些微积分中经常涉及的函数. 最基本的函数是多项式函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数, 称它们为 **基本初等函数**. 由基本初等函数经过有限次加、减、乘、除和复合运算得出的函数称为 **初等函数**.

**例 1.3.1** 设$n$是非负整数,形如

$$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

的函数称为 **多项式函数**. 两个多项式函数 $f(x)$、$g(x)$ 的商 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 称为 **有理函数**, 它的定义域是不包括满足 $g(x)=0$ 的所有实数.

**例 1.3.2** 形如

$$f(x)=x^\alpha$$

的函数称为 **幂函数**, 其中 $\alpha$ 可以是任意实数.如果 $\alpha$ 是整数, 它就是有理函数; 如果 $\alpha=\frac{1}{m}$, $m\geqslant 2$, $f(x)=x^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{x}$ 是根式函数,如果 $m$ 是偶数, $f$ 的定义域为 $x\geqslant 0$, 如果 $m$ 是奇数, $f$对任意 $x$有定义; 如果 $\alpha$ 是无理数, $f$ 的定义域一般规定为 $x>0$.

**例 1.3.3** 所谓 **双曲函数**是指如下4个函数,它们的定义域是 $\mathbb{R}$.

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},\qquad \coth x=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\ (x\neq 0).$$

它们分别称为双曲正弦函数、双曲余弦函数、双曲正切函数、双曲余切函数.双曲函数与三角函数有十分相似的性质,读者可自证之.

$$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y,$$
$$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y,$$
$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1,\quad \sinh 2x=2\sinh x\cosh x,\quad \cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x.$$

**例 1.3.4** 求双曲正弦函数$y=\sinh x$的反函数$y=\sinh^{-1}x$.

**解** 设$y=\sinh^{-1}x$,$x=\sinh y$,由

$$e^y=\cosh y+\sinh y=\sqrt{1+\sinh^2 y}+\sinh y=\sqrt{1+x^2}+x$$

可得$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

**(4)函数的其他表达方式**

通常把函数 $y=f(x)$ 的表达方式称为 **显式表示** 或者**显表示**. 但在实际应用中还存在函数的其他表达方式.

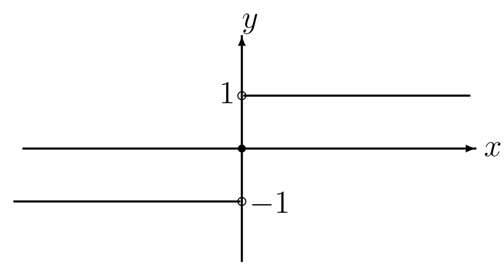


图 1.3

1° **分段函数** 所谓分段函数, 简单地讲, 就是对于自变量不同的取值范围, 相应的函数表达式 ( 即对应关系 ) 不同. 例如

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

和

$$y=f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 0\\ x^2, & x<0\end{cases}$$

等等,就是这类函数.上面第一个例子称为**符号函数**.

2° **函数的隐表示** 即自变量和因变量之间的对应关系是通过一个方程给出来的,因此称这类函数为**隐函数**. 例如半径为 $r$ 的圆由方程

$$x^2+y^2=r^2$$

给出. 当然, 从上述方程可以分别解出圆的上半部分和下半部分的显表示

$$y=\sqrt{r^2-x^2},\quad -r\leqslant x\leqslant r$$

和

$$y=-\sqrt{r^2-x^2},\quad -r\leqslant x\leqslant r$$

但是, 不是每个函数的隐表示都可以从方程中解出,例如

$$\sin(x+y)+2x+y=0,$$

要想直接求解方程是十分困难的. 函数的隐表示一般由下列方程给出

$$\varphi(x,y)=0$$

对通过这样方式表示的函数, 我们还将在第二册中进行更深入的讨论.

3° **函数的参数方程表示** 所谓参数方程表示, 是指曲线上点的两个坐标 $x$ 与 $y$ 之间的关系是通过一个参数相联系的, 即 $x$ 和 $y$ 可表示成下列形式

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

这样的参数方程表示也可以看成是从 $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ 到平面 $Oxy$ 内的一个映射,

$$\boldsymbol{r}: \ [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

映射的像是 $Oxy$ 平面上一条曲线.由平面上点与向量的对应关系,可以把映射表示成

$$t \longmapsto \boldsymbol{r}(t) = (x(t), \ y(t))$$

所以有时也称之为**向量值函数**.注意到在函数的参数方程表示中,$x$ 和 $y$ 的地位是完全平等的.

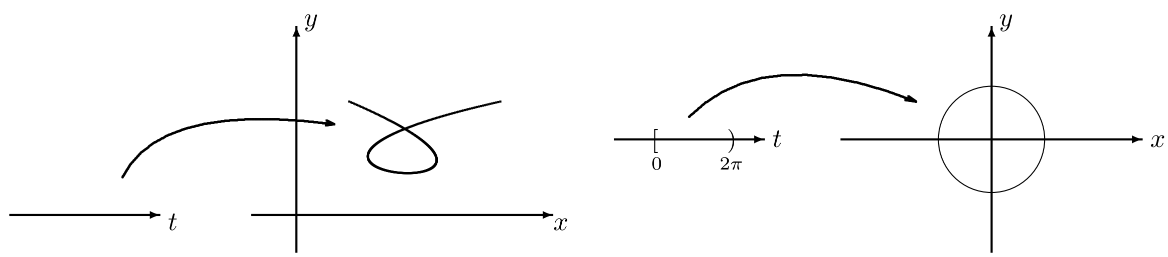


图 1.4

例如, 以原点为圆心, 半径为 $r$ 的圆的参数方程

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

它在 $Oxy$ 平面上的图象是一个圆, $t$ 表示圆的中心角.

当一个半径为 $a$ 的圆沿着 $x$ 轴匀速而无滑动地滚动时, 圆上一固定点 $P$ 的运动轨迹称为 **摆线**, 设 $t = 0$ 时 $P$ 点位于原点,则在任何 $t$ 时刻,$P$ 点的坐标 $(x, y)$ 分别为

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

这就是变量 $x$ 和$y$ 都依赖参数 $t$ 的参数方程表示.

对于显式表示的函数 $y = y(x)$, 也可以将它看成是一个参数方程表示的函数

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y(x), \end{cases} \qquad x \in [a, b]$$

这里, $x$ 扮演了参变量的角色.

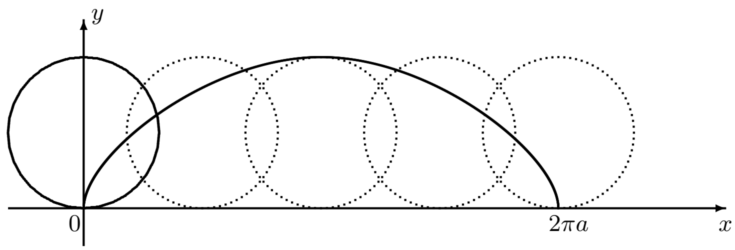


图 1.5

然而, 参数方程表示的函数（以及它对应的曲线）一般情况下却不能写出通常的显式表示. 以单位圆（$r = 1$）为例, 显然它不能表示成 $y = y(x)$ 或 $x = x(y)$, 因为无论在那种情况下, 都无法保证单值性. 但是, 如果在一个局部考虑, 就有可能写出显示表达式. 例如, 如果只考虑上半圆, 函数 $x = \cos t$ 在 $(0,\ \pi)$ 上有反函数, 所以 $t = \cos^{-1} x$, $x \in (-1,\ 1)$, 代入 $y = \sin t$, $t \in (0,\ \pi)$ （此时, $y > 0$）则 $y = \sqrt{1 - \cos^2(\cos^{-1} x)} = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1,\ 1)$. 同理在下半圆 $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1,\ 1)$. 上下半圆分别有不同的显示表示.

一般情况下,如果 $x = x(t)$ 在某个局部存在反函数 $t = x^{-1}(x)$, 那么 $y = y(t) = y(x^{-1}(x))$ 给出 $x$ 和 $y$ 之间的显表示. 正如上述圆的情况一样, 这种显表示往往只能存在于一个局部.

函数的参数方程表示在物理等学科应用广泛,例如观察一个质点在空间的运动,往往把时间变量 $t$ 作为参变量,空间中质点运动的轨迹（曲线）上的点就可以表示成时间 $t$ 的参数方程或向量值函数.

### 1.3.2　函数在无穷大处的极限

类比于数列极限, 我们首先讨论函数 $y = f(x)$ 当 $|x|$（相当于数列的 $n$）无限增大时, $f(x)$ 是否有一个“确定的趋势”. 当然, 这里我们要求函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义. 例如, $f(x) = \frac{1}{x}$（类比于离散的数列 $a_n = \frac{1}{n}$）, 不难看出, 当 $|x|$ 无限增大时, $f(x) = \frac{1}{x}$ 无限接近于 0. 也就是说, 只要 $|x|$ 充分大, 我们就能使 $\frac{1}{x}$ 接近于 0 达到预先指定的程度. 事实上, 对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 只要 $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, 就有 $|\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$.

**定义 1.26**　*设函数 $y = f(x)$ 至少在 $|x| > a > 0$ 有定义. 如果有一个实数 $l$ 具有下列性质: 对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 总存在一个正数 $X = X(\varepsilon) > a$, 使当 $|x| > X$ 时有*

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

*那么称当 $x$ 趋向无穷大时, $f(x)$ 以 $l$ 为极限. 记成*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l, \quad 或 \quad f(x) \to l\ (x \to \infty).$$

这种定义和数列 $\{a_n\}$ 以 $a$ 为极限的定义基本意思是一样的. 只不过数列 $\{a_n\}$ 是定义在自然数集上的函数, 其自变量 $n$ 离散地增加直至无穷大. 而函数 $f(x)$ 的自变量 $|x|$ 则是连续地增加直至无穷大.

上述定义同样也有几何上的直观描述. 即在直角坐标系 $Oxy$ 中, $f(x) \to l\ (x \to \infty)$ 等价于说, 对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 在 $x$ 轴上, 总存在一点 $X$, 使得当 $|x| > X$ (或 $x > X$, $x < -X$) 时, 函数 $f(x)$ 的图象, 一定会落在以两条平行于 $x$ 轴的直线 $y = l - \varepsilon$, $y = l + \varepsilon$ 所夹的狭长区域之内 (图1.6).

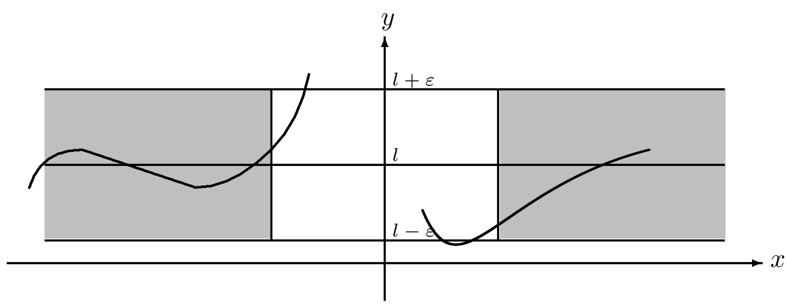


图 1.6

类似于上述定义, 我们还可以给出当 $x \to +\infty$时, $f(x)$ 以 $l$ 为极限的定义; 以及当 $x \to -\infty$ 时, $f(x)$ 以 $l$ 为极限的定义. 只要把定义 1.26 中的"$|x| > X$"分别换成"$x > X$"和"$x < -X$"即可 (读者可以自行给出完整的叙述). 这两种极限分别记成

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l, \quad \text{或} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l.$$

$f(x)$ 在正 (或者负) 无穷大处的极限, 称为 $f(x)$ 在无穷大处的 (两个) 单侧极限. 不难看出, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在的充分必要条件, 是两个单侧极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 存在且相等.

**例 1.3.5** 设 $k$ 是正整数, 证明: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

**证明** 对任意的正数 $\varepsilon$, 要想找到所希望的 $X$, 只要解不等式

$$\left|\frac{1}{x^k} - 0\right| < \varepsilon.$$

从这个不等式解得 $|x| > \varepsilon^{-1/k}$. 所以只要取 $X = \varepsilon^{-1/k}$, 当 $|x| > X$ 时, 就能保证上列成立, 即, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0$.

**例 1.3.6** 设 $0 < a < 1$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$.

**证明** 对任意给定的正数 $\varepsilon$, 不妨设 $\varepsilon < 1$, 要使 $|a^x - 0| = a^x < \varepsilon$, 只要

$$x \ln a < \ln \varepsilon,$$

由于 $\ln a < 0$, $\ln\varepsilon < 0$, 故只要取 $X = \frac{\ln\varepsilon}{\ln a} > 0$, 所以当 $x > X$ 时, 有 $|a^x - 0| = a^x < \varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, $(0 < a < 1)$.

**例 1.3.7** 证明: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

**证明** 任给一个正数 $\varepsilon < 1$, 要使 $0 < |e^x - 0| = e^x < \varepsilon$, 只要 $x < \ln\varepsilon$. 故取 $X = -\ln\varepsilon$, 则当 $x < -X = \ln\varepsilon$ 时有 $e^x < \varepsilon$, 即是所要证明的结论.

**例 1.3.8** 证明 $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.

**证明** 任给正数 $\varepsilon$, 要使

$$-\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arctan x < -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

只需 $x < \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)$, 所以取 $X = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) > 0$, 当 $x < -X$ 时,就有

$$\left|\arctan x + \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$$

即

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2},$$

同理可证

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

由于当 $x$ 趋于正、负无穷大时, 函数 $\arctan x$ 的两个单侧极限不相等, 所以 $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$ 不存在.

### 1.3.3 函数在一点处的极限

现在考虑当 $x$ 与某个有限数 $x_0$（或者说数轴上一个固定的点）无限接近时, 函数 $f(x)$ 的变化趋势. 这里自然要求 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的附近有定义（但在点 $x_0$ 处可以没有定义）, 即对某个正数$\delta_0$,函数在集合 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta_0\}$ 上有定义.

因此, 如果当 $x$ 与$x_0$ 无限接近时, 函数 $f(x)$ 无限接近一个数 $l$, 则说 $f(x)$ 当 $x$ 趋于 $x_0$ 时, 以 $l$ 为极限. 或者说当 $|x - x_0|$ 充分小时, $|f(x) - l|$ 可以任意小. 换成 “$\varepsilon$-$\delta$” 语言, 就有

**定义 1.27** 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 附近有定义（在 $x_0$ 不要求有定义）. 如果对任意给定的正数 $\varepsilon$, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - l| < \varepsilon$. 那么称 $l$ 为当 $x$ 趋向 $x_0$ 时 $f(x)$ 的极限, 记成

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l, \quad \text{或} \quad f(x) \to l \ (x \to x_0).$$

从函数 $f(x)$ 的图象可以看出, $f(x)$ 在 $x$ 趋于 $x_0$ 时以 $l$ 为极限的几何意义如图1.7所示.

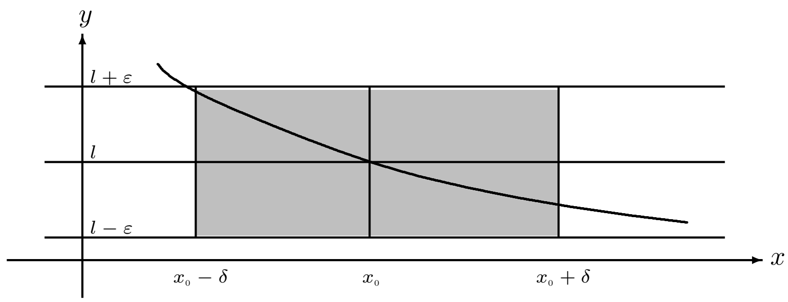


图 1.7

即, 当 $x$ 的值限制在区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 内时, $f(x)$ 的图象夹在平行于 $x$ 轴的两条直线 $y=l+\varepsilon$ 和 $y=l-\varepsilon$ 之间. 显然, 常值函数 $f(x)=c$ 在任何一点 $x_0$ 的极限是 $c$. 下面列举一些其他例子.

**例 1.3.9** 设 $f(x)=x$, 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x_0$

**证明** 任给一个正数 $\varepsilon$, 我们只要取一个正数 $\delta=\varepsilon$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 就有

$$|f(x)-x_0|=|x-x_0|<\varepsilon.$$

**例 1.3.10** 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

**解** 注意, 函数在 $x=0$ 处没有定义. 当 $x\neq 0$时, 总有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant |x|.$$

因此, 对任意的正数 $\varepsilon$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $0<|x|<\delta$ 时, 就有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

**例 1.3.11** 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2$.

**证明** $\frac{x^2-1}{x^2-x}$ 在 $x=1$ 处没有定义, 而当 $x\neq 1$ 时, 我们要估计

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|=\left|\frac{x-1}{x}\right|.$$

由于所说的极限仅与 1 附近的 $x$ 有关, 故可以先限制 $x$ 的范围, 例如设 $|x-1|<\frac{1}{2}$, 即 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$. 在这个范围内, 上面的估计为

$$\left|\frac{x-1}{x}\right|<2|x-1|.$$

所以, 对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 取 $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, 则当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|=\left|\frac{x-1}{x}\right|<2|x-1|<2\delta\leqslant\varepsilon.$$

在定义 1.27 中, 并没有限制 $x$ 从什么方向接近 $x_0$. 如果要求 $x$ 从直线上一个固定方向接近 $x_0$, 就是所谓的单侧极限.

**定义 1.28** 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的左侧附近有定义. 如果有一个常数 $l$ 满足下述性质: 对于任意的正数 $\varepsilon$, 总存在正数 $\delta$, 使得当 $-\delta<x-x_0<0$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$, 那么称 $l$ 是 $f(x)$ 在 $x_0$ 的左极限, 记成

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=l,\quad \text{或}\quad f(x)\to l\ (x\to x_0^-)$$

若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的右侧附近有定义, 类似地可以定义 $f(x)$ 在 $x_0$ 的右极限, 只要在关于左极限定义中的不等式 $-\delta<x-x_0<0$ 换成 $0<x-x_0<\delta$ 即可. 习惯上, 记函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的左右极限分别记为 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$. 注意, $f(x_0\pm 0)$ 仅表示函数在一点$x_0$的左右极限,与函数$f(x)$ 在$x_0$ 的取值没有必然关系.

**定理 1.29** 函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 有极限的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $x_0$ 的左右极限都存在而且相等.

证明是显然的. 这个简单的事实可以用来判断函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 没有极限.

**例 1.3.12** 证明 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$, 这里 $a>0$.

**证明** 当 $a=1$ 时, 结论显然成立. 故以下设 $a\neq 1$. 先证 $\lim\limits_{x\to 0^+}a^x=1$. 为此分两种情形:

设 $a>1$, 此时 $a^x>1$. 对于任意的正数 $\varepsilon$, 要使

$$|a^x-1|<\varepsilon,\quad \text{即}\ \ 1<a^x<1+\varepsilon,$$

只要

$$x\ln a<\ln(1+\varepsilon)\quad \text{或}\ \ x<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}$$

即可. 所以只要取 $\delta=\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln a}$, 则当 $0<x<\delta$ 时上述不等式成立, 即 $\lim\limits_{x\to 0^+}a^x=1$. 同理可证明 $\lim\limits_{x\to 0^-}a^x=1$.

当 $0<a<1$ 时, 只要注意到此时 $\ln a<0$, 其他类似上述证明, 亦可得到 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$. 结论成立.

**例 1.3.13** 设

$$f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\geqslant 1\\ 2x-5, & x<1\end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

**证明** 不难看出在 1 的左侧, $f(x)=2x-5$, 所以左极限为 $f(1-0)=-3$; 而在 1 的右侧, $f(x)=3x+1$, 所以, 右极限为 $f(1+0)=4$, 因此, 函数 $f(x)$ 在 $x$ 趋近于1 时, 左右极限存在但不相等, 所以极限不存在.

### 1.3.4 函数极限的性质和运算

我们已经分别定义了 $x\to\infty$, $x\to\pm\infty$ 以及 $x\to x_0$, $x\to x_0^{\pm}$ 等极限过程. 下面将讨论极限的基本性质和四则运算. 为了便于讨论, 只考虑 $x\to x_0$ ($x_0$ 是有限) 的情形, 其他情形可类似得到.

**定理 1.30** 若当 $x\to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 有极限 $l$, 则

$1^\circ$ 极限是唯一的.

$2^\circ$ $f(x)$ 在 $x_0$ 的附近是有界的. 即存在正数 $M$ 和 $\delta$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)|\leqslant M$.

$3^\circ$ 若 $a<l<b$, 则在 $x_0$ 的附近, 有 $a<f(x)<b$, 即存在一个正数 $\delta$, 使得对于满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的所有 $x$, 有 $a<f(x)<b$.

**定理 1.31** 设当 $x\to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别以 $l$ 和 $l'$ 为极限, 则

$1^\circ$ 若在 $x_0$ 的附近, 有 $f(x)\geqslant g(x)$, 则 $l\geqslant l'$.

$2^\circ$ 若 $l>l'$, 则在 $x_0$ 的附近, 必有 $f(x)>g(x)$, 即存在 $\delta>0$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $f(x)>g(x)$.

$3^\circ$ 作为 $1^\circ$ 和 $2^\circ$ 的推论, 如果在 $x_0$ 的附近, 有 $f(x)\geqslant 0$, 则 $l\geqslant 0$; 如果 $l>0$, 则在 $x_0$的附近, 有 $f(x)>0$.

**定理 1.32** 设当 $x\to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有极限, 则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (当 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ 时) 均有极限, 且

$1^\circ$ $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

$2^\circ$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. 特别, $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x)=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, 其中 $c$ 是常数.

$3^\circ$ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, 其中 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$.

以上定理的证明与数列极限的对应定理的证明完全类似, 不再重复.

**定理 1.33** 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 附近, $g(t)$ 在 $t_0$ 附近分别有定义, 但当 $t\neq t_0$ 时,

$g(t) \neq x_0$. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{t \to t_0} g(t) = x_0$, 则

$$\lim_{t \to t_0} f(g(t)) = l.$$

**证明** 任给一个正数 $\varepsilon$, 根据 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ 知, 一定存在一个正数 $\tau$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \tau$ 时, 有

$$|f(x) - l| < \varepsilon.$$

又因为 $\lim\limits_{t \to t_0} g(t) = x_0$, 所以对于上述正数 $\tau$, 一定存在一个正数 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时, 有 $0 < |g(t) - x_0| < \tau$. 所以, 当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时有

$$|f(g(t)) - l| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{t \to t_0} f(g(t)) = l.$$

□

定理 1.33 告诉我们, 在求极限的过程中可以使用“变量代换”, 从而有可能简化求极限的过程.

**例 1.3.14** 求 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+1}$.

**解** $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+2x+3}{x^2+3x+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1.$

**例 1.3.15** 设 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则对于任意一点 $x_0$, 有

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0).$$

**证明** 利用 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, 得 $\lim\limits_{x \to x_0} x^k = x_0^k$, 再利用极限得加法, 就得到结果.

**例 1.3.16** 求 $\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1}\right)$.

**解** 当 $x \to -1$ 时, 原式括号中的每一项都没有极限. 所以不能直接利用极限的性质计算. 但是, 当 $x \neq -1$时, 可以将括号内的分式进行通分和化简得

$$\frac{x-2}{x^2-x+1},$$

此时, 分子分母在$x \to -1$时, 都有极限, 因此

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1}\right) &= \lim_{x \to -1} \frac{x-2}{x^2-x+1} \\ &= \frac{\lim_{x \to -1}(x-2)}{\lim_{x \to -1}(x^2-x+1)} = -1.\end{aligned}$$

**例 1.3.17** 设 $a > 0$, 证明: $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

**证明** 记 $y=x-x_0$, 则当 $x\to x_0$ 时有 $y\to 0$, 故由定理 1.33 就得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(a^x-a^{x_0})&=a^{x_0}\lim_{x\to x_0}(a^{x-x_0}-1)\\&=a^{x_0}\lim_{y\to 0}(a^y-1)=0.\end{aligned}$$

下面讨论函数极限和数列极限的关系.

**定理 1.34** *函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时有极限 $l$ 的充分必要条件是: 对于任意一个以 $x_0$ 为极限的数列 $\{a_n\}$ $(a_n\neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$.*

**证明** "必要性": 设 $\{a_n\}$ $(a_n\neq x_0)$ 是一个以 $x_0$ 为极限的数列. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$, 故对于任意给定得正数 $\varepsilon$, 一定存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$. 又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$, 所以对于上述 $\delta>0$, 存在一个自然数 $N$, 使得当 $n>N$时, 有 $0<|a_n-x_0|<\delta$, 所以当 $n>N$ 时, $|f(a_n)-l|<\varepsilon$. 即是

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=l.$$

"充分性" (反证): 假设当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 不以 $l$ 为极限. 那么一定有一个 $\varepsilon_0>0$, 使对于任何一个正数 $\delta$, 都能找到一个 $x_\delta$, 即使 $0<|x_\delta-x_0|<\delta$, 仍有 $|f(x_\delta)-l|\geqslant\varepsilon_0$.

因此, 取 $\delta_n=\frac{1}{n}$, 对应每一个这样的 $\delta_n$, 都可找到 $a_n$, 使

$$0<|a_n-x_0|<\delta_n=\frac{1}{n},\quad 但\quad |f(a_n)-l|\geqslant\varepsilon_0$$

当 $n\to\infty$ 时, 上面第一个不等式表明 $\{a_n\}$ $(a_n\neq x_0)$ 以 $x_0$ 为极限, 而第二个不等式表明, $\{f(a_n)\}$, 不以 $l$ 为极限. 这与条件相矛盾, 所以假设不成立, 即有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$. □

该定理说明, 当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 的趋向性态如果在两个趋于 $x_0$ 的点列上不一致, 则 $f(x)$ 一定没有极限.

**例 1.3.18** 证明: 当 $x\to 0$ 时 $\sin\frac{1}{x}$ 没有极限.

**证明** 分别取 $a_n=\frac{1}{2n\pi}$, $b_n=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}$ $(n=1,2,\cdots)$. 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. 但是, $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=1$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

### 1.3.5 函数极限存在判别法

**定理 1.35** *设在 $x_0$ 的附近, 有 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$, 而且当 $x\to x_0$ 时, 函数 $h(x)$ 和 $g(x)$ 都以 $l$ 为极限, 那么, $f(x)$ 也以 $l$ 为极限.*

其证明与数列的定理 1.7 的证法类似.

**定理 1.36** *设 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 中单调有界, 则 $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 均存在.*

**证明** 不妨设 $f(x)$ 为单调增. 由于 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 有上界, 故有上确界 $M$. 下面就来证明 $f(b-0)=M$.

任给 $\varepsilon>0$, 由于 $M-\varepsilon$ 不是 $f(x)$ 的上界, 故必有 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>M-\varepsilon$. 取 $\delta=b-x_0$, 由 $f$ 的单调性可知, 当 $b-\delta=x_0<x<b$ 时, 就有

$$M-\varepsilon<f(x)\leqslant M.$$

因此 $f(b-0)=M$. 类似可证明 $f(a+0)$ 存在. □

**推论 1.37** 设 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 中单调有界, 则 $f(x)$ 在$(a,b)$ 中每一点 $x_0$ 都有左右极限.

取 $x_0\in(a,b)$, 只要分别在 $(a,x_0)$ 和 $(x_0,b)$ 中应用定理 1.36 即可.

**定理 1.38** (Cauchy 判别准则) 设函数 $f(x)$ 在$x_0$ 附近有定义, 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 有极限的充分必要条件是: 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x'-x_0|,\ |x''-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

**证明** "必要性": 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$. 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

故当 $0<|x'-x_0|,\ |x''-x_0|<\delta$ 时

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&\leqslant|f(x')-l|+|l-f(x'')|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

"充分性": 对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x'-x_0|,\ |x''-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 任取一个以 $x_0$ 为极限的数列 $\{a_n\}$ $(a_n\neq x_0)$, 即 $\lim a_n=x_0$, 故对上述 $\delta>0$, 存在正整数 $N$, 使得当 $m,n>N$ 时, 有 $0<|a_m-x_0|,\ |a_n-x_0|<\delta$, 因此也就有

$$|f(a_m)-f(a_n)|<\varepsilon.$$

所以数列 $\{f(a_n)\}$ 满足数列的 Cauchy 收敛准则, 故收敛. 设

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=l.$$

这个极限 $l$, 也正是函数在 $x\to x_0$ 时的极限. 事实上, 对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 一方面由充分性条件可知, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x'-x_0|,\ |x''-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2},$$

另一方面, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$, 故存在一个自然数 $m$, 使 $0<|a_m-x_0|<\delta$ 以及 $|f(a_m)-l|<\varepsilon/2$, 于是当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned}|f(x)-l|&\leqslant|f(x)-f(a_m)|+|f(a_m)-l|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l.$$

□

### 1.3.6 两个重要极限

下面, 我们将利用函数极限的性质, 给出两个重要的函数极限. 首先证明一个引理.

**引理 1.39** 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin x < x < \tan x$.

**证明** 如图1.8所示, 单位圆的切线与 $OD$ 的延长线交于点 $B$, 由于

$\triangle AOD$ 面积 $<$ 扇形$AOD$ 面积 $< \triangle AOB$ 面积,

也就是

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x.$$

□

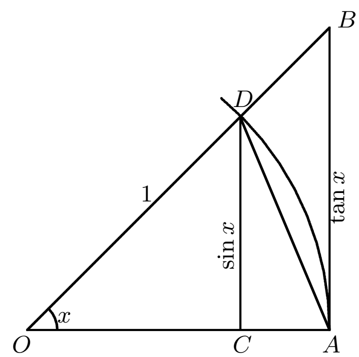


图 1.8

由该引理易知, 对于所有实数 $x$, 有 $|\sin x| \leqslant |x|$, 且等号只在 $x = 0$ 成立.

**定理 1.40** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

**证明** 首先考虑右极限. 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 由于 $\sin x > 0$, 由引理易知

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{即} \ \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

因此

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 < 2\sin\frac{x}{2} < x.$$

所以, 由两边夹的方法得到

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

当 $x \to 0^-$时, 令 $y = -x$, 则 $y \to 0^+$, 所以

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

□

下述定理说明, 当 $x \to \infty$ 时, 函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的极限存在, 而且和数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的极限相等（前者是连续的变量, 后者是离散的变量）.

**定理 1.41** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

**证明** 由于对任意的 $x>1$, 有 $[x] \leqslant x < [x]+1$, 以及

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1} = e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right) = e.$$

根据定理 1.35 中两边夹的方法, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

当 $x \to -\infty$ 时, 令 $y=-x$, 则 $y\to+\infty$, 利用上面结果, 就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^y \\ &= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e.\end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

□

定理 1.41 中的极限, 还有下列一种常见的等价形式

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

定理 1.40 和定理 1.41 的证明是基本的, 而且不少函数的极限问题最终可以归结到这两个极限.

**例 1.3.19** 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ 以及 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1.$

**证明** 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, 因为

$$0 < 1-\cos x < x$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x = 1$. 但 $\cos x$ 是偶函数, 故有 $\lim\limits_{x\to 0^-}\cos x = 1$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1.$$

根据这个结果, 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1.$$

**例 1.3.20** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

**解**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\\&=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**例 1.3.21** 设 $x_0$ 是任意实数, 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

**证明** 由引理 1.39 得到的不等式 $|\sin x|\leqslant|x|$ 可知

$$\begin{aligned}0\leqslant|\sin x-\sin x_0|&=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\\&\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\\&\leqslant|x-x_0|.\end{aligned}$$

利用极限的定义可知结论成立.

### 1.3.7 无穷大量与无穷小量

在极限过程中趋于无限大的量, 称为“无穷大量”, 严格地说, 就是

**定义 1.42** *设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的附近有定义. 若对于任意给定的一个正数 $M>0$, 都存在正数 $\delta$, 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)|>M$, 则称$f(x)$* **是当 $x\to x_0$ 时的无穷大量**. *记成*

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\quad\text{或}\quad f(x)\to\infty\ (x\to x_0).$$

如果当 $x$ 在 $x_0$ 的某个邻域中变化时, 无穷大量 $f(x)$ 保持恒正或恒负, 我们就给 $\infty$ 也冠以相应的符号, 即可以定义

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty,\quad\text{或}\quad\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty.$$

对于其他形式的极限过程, 也可以类似地定义无穷大量. 注意, “无穷大量”并非指(绝对值)很大的数, 而是在变化过程中趋于无穷大的变量. 例如

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to(\pi/2)^-}\tan x=+\infty,\quad\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty,\quad\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\\&\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty\quad\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty.\end{aligned}$$

显然, 在同一个极限过程中(例如同是 $x\to\infty$ 或同是 $x\to x_0$ 等等), 两个无穷大量的积还是无穷大量, 但是两个无穷大量的和、差、商的性态具有各种可能. 故分别称为“$\infty\pm\infty$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式. 关于这些未定式的极限的计算将在后面章节中讨论.

类似地, 可以定义无穷小量.

**定义 1.43** 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 附近有定义, 若 $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ 则称$f(x)$ **是当 $x\to x_0$ 时的无穷小量**.

例如, $x$, $x^2$, $\sin x$ 等函数是 $x\to 0$ 时的无穷小量; $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1+x^2}$ 等函数, 是 $x\to\infty$ 时的无穷小量. 同样需要注意的是, "无穷小量" 这个名称, 所要描述的是其在某个极限过程中的变化特征, 而不是一个量的大小.

有限个无穷小量的代数和(线性组合)仍然是无穷小量; 有限个无穷小量的积仍是无穷小量; 一个有界变量与无穷小量的乘积仍然是无穷小量. 但是两个无穷小量的商却有各种不同的性态, 称为 "$\frac{0}{0}$" 型不定式.

例如, 当 $x\to 0$ 时,

$$x,\quad x^2,\quad \sin x,\quad x\sin\frac{1}{x}$$

都是无穷小量, 但是它们的商在 $x\to 0$ 时, 就有不同的性态: $\frac{x^2}{x}=x$ 是无穷小量; 而 $\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$ 却是无穷大量; $\frac{\sin x}{x}$ 的极限为 1, 而 $\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}$ 既不是无穷大也不是无穷小.

显然, 在同一个极限过程中, 如果 $u(x)$ 是无穷大量, 则 $\frac{1}{u(x)}$ 就是无穷小量. 反之如果 $u(x)$ 是无穷小量, 且 $u(x)\neq 0$, 则 $\frac{1}{u(x)}$ 就是无穷大量; 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=l$, 则 $u(x)-l$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

**定义 1.44** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大量, 即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,\qquad \lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$$

1° 如果有非零常数 $c$, 使 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=c$, 那么称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是(当 $x\to x_0$ 时的)同级无穷大量. 特别当 $c=1$ 时, 称它们是等价无穷大量, 记成

$$f(x)\sim g(x)\qquad (x\to x_0).$$

2° 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=\infty$, 那么称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低级的无穷大量或 $g(x)$ 是比 $f(x)$ 高级的无穷大量. 记成

$$f(x)=o(g(x))\qquad (x\to x_0).$$

**例 1.3.22** $x^2+3x+5\sim x^2$ $(x\to\infty)$.

**例 1.3.23** 证明: $\ln x=o(x)$ $(x\to+\infty)$.

**证明** 对 $x>1$, 存在自然数 $k$, 使得

$$2^{k-1}<x\leqslant 2^k.$$

故有

$$\ln x\leqslant k\ln 2<k.$$

于是

$$0<\frac{\ln x}{x}<\frac{2k}{2^k}=\frac{2k}{(1+1)^k}<\frac{2k}{\frac{k(k-1)}{2}}=\frac{4}{k-1}.$$

由于当 $x\to+\infty$ 时, $k\to+\infty$, 故根据定理 1.35 有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$$

事实上,设 $\alpha>0$, 则 $x\to+\infty$ 时, $y=x^\alpha\to+\infty$, 故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x^\alpha}{\alpha x^\alpha}=\frac{1}{\alpha}\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0.$$

所以对任何 $\alpha>0$, 都有

$$\ln x=o(x^\alpha)\qquad(x\to+\infty).$$

即当 $x\to+\infty$ 时, 不管 $\alpha$ 是多小的正数, $\ln x$ 都是比 $x^\alpha$ 还低级的无穷大量. 所以它趋向无穷大的速度“很慢”.

**定义 1.45** 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的两个无穷小量.

1° 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$. 则称 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是(当 $x\to x_0$ 时的)同级无穷小量. 特别, 当 $c=1$ 时, 称它们是等价无穷小量, 记成

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\qquad(x\to x_0).$$

2° 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$), 则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高级的无穷小量, 而 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低级的无穷小量. 记成

$$\alpha(x)=o(\beta(x))\quad(x\to x_0).$$

例如, 我们已经知道, 当 $x\to 0$ 时

$$\tan x\sim\sin x\sim x,\qquad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}.$$

**定理 1.46** 设 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量(即 $\alpha(x)\sim\beta(x),\ \ (x\to x_0)$), 如果

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)u(x)=l,\qquad\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)}{\alpha(x)}=l',$$

则

$$\lim_{x\to x_0}\beta(x)u(x)=l,\qquad\lim_{x\to x_0}\frac{v(x)}{\beta(x)}=l',$$

其中 $l$ 和 $l'$ 还可以是无穷大.

**证明**　$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)u(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\cdot\alpha(x)u(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)u(x)=l.$
另一个等式类似可证. □

这个定理说明, 在求极限的过程中, 整个式子的一个无穷小因子用一个与它等价的无穷小量替换, 最终结果不变. 由于无穷大量的倒数是无穷小量, 所以无穷大因子也可以实行等价替换.

**例 1.3.24**　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}$

**解**　因为 $\sin x\sim x$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+1)=2.$$

**例 1.3.25**　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

**解**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

需注意的是只能对无穷小量和无穷大量的因子实行等价替换, 而用加、减号连接的式子里, 就不能任意实行等价替换, 例如在上面的例子中, 分子里的 $\tan x$ 和 $\sin x$ 如果用等价无穷小量 $x$ 去替换, 就会得到错误的结果.

在一个极限过程中对两个量（不管是无穷大量还是无穷小量）进行比较时, “$O$” 和 “$o$” 是两个常用的记号. 通常

$1^\circ$　如果在 $x_0$ 附近, 比值 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 有界, 即存在一个常数 $c>0$, 使得

$$|f(x)|\leqslant c|g(x)|,$$

就记

$$f(x)=O(g(x))\quad x\to x_0.$$

特别,

$$f(x)=O(1)\quad (x\to x_0)$$

表示 $f(x)$ 在 $x_0$ 的附近是有界量.

$2^\circ$　如果

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0,$$

则记

$$f(x)=o(g(x))\quad (x\to x_0).$$

需注意的是, 这里的等号, 只表示在 $x\to x_0$ 时, 两者之间的一种比较.

## 习题 1.3

1. 按定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0,\ (a>1)$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$;

(3) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2-1}{x^2+x} = 2$;

(4) $\lim\limits_{x\to0+0} x^{1/q} = 0$ ($q$ 为自然数).

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1} \left(x^5-5x+2+\frac{1}{x}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^n-1}{x-1}$ ($n$ 为自然数);

(3) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$.

3. 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$;

(2) $\lim\limits_{x\to0} \frac{|x|}{x}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在正无穷大处的极限为 $l$, 则对于任意趋于正无穷大的数列 $\{a_n\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$. 特别地 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = l$.

5. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的极限.

(1) $f(x) = [x]$;

(2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$;

(3) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x>0; \\ 0, & x=0; \\ 1+x^2, & x<0. \end{cases}$

(4) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x>0; \\ x, & x\leqslant 0. \end{cases}$

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

7. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sin\frac{\alpha}{n^2}+\sin\frac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n^2}\right) = \frac{\alpha}{2}$.

8. 证明: 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$, 则 $\lim\limits_{x\to0} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 反之亦正确. 叙述并证明, 当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时类似的结论. (应用本题结论, 可将极限过程为 $x\to\infty$ 的问题化为 $x\to0$ 处理, 或者反过来. 例如, 我们有 $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e$.)

9. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

10. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\arctan x}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0} x^2\sin\frac{1}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to2} \frac{x^3-2x^2}{x-2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x^2-x+1)$.

11. 按定义证明.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty,\ (a>1)$; (2) $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_a x=-\infty,\ (a>1)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}\tan x=+\infty$; (4) $\lim\limits_{x\to 0+0}e^{1/x}=+\infty$.

12. 证明: 函数 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界; 但当 $x\to+\infty$ 时, 这个函数并不是无穷大量.

13. 函数 $y=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是否有界? 又当 $x\to 0+0$ 时, 这个函数是否为无穷大量?

14. 本题所涉及的函数极限有着鲜明的几何意义.

记函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线为 $C$. 若动点沿曲线无限运离原点时, 此动点与某一固定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线 $C$ 的一条渐近线.

(i) 垂直渐近线 易知(垂直于 $x$ 轴的)直线 $x=x_0$ 为曲线 $C$ 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\infty \text{ 或 } \lim_{x\to x_0+0}f(x)=\infty.$$

(ii) 水平渐近线 易知(平行于 $x$ 轴的)直线 $y=b$ 为曲线 $C$ 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}f(x)=b.$$

(iii) 斜渐近线 请读者证明, 方程为 $y=ax+b\ (a\neq 0)$ 的直线 $L$ 为曲线 $C$ 的渐近线的充分必要条件是

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big);$$

或者

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-ax\big).$$

这里自然要假定所说的极限都存在. (提示: 以 $x\to+\infty$ 为例, 设曲线 $C$ 及直线 $L$ 上的横坐标为 $x$ 的点分别为 $M,N$. 则 $M$ 至 $L$ 的距离, 是 $|MN|$ 的一个常数倍. 因此, 直线 $L$ 为曲线 $C$ 的渐近线, 等价于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$, 由此易得所说的结果.)

求下列曲线的渐近线方程.

(1) $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$; (2) $y=\frac{3x^2-2x+3}{x-1}$.

15. 证明: 在同一极限过程中等价的无穷小量有下列性质:

(1) $\alpha(x)\sim\alpha(x)$ (自反性);

(2) 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$, 则 $\beta(x)\sim\alpha(x)$ (对称性);

(3) 若 $\alpha(x)\sim\beta(x),\ \beta(x)\sim\gamma(x)$, 则 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$ (传递性).

(注意, (1) 中自然需假定 $\alpha(x)$ 不取零值; 而在 (2)、(3) 中, 条件蕴含着, 所说的无穷小量在极限过程中均不取零值.)

16. 当 $x \to 0$ 时, 比较下列无穷小量的级
    (1) $\tan x - \sin x$ 与 $x^3$; (2) $x^3 + x^2$ 与 $\sin^2 x$;
    (3) $1 - \cos x$ 与 $x^2$.

17. 当 $x \to +\infty$ 时, 试比较下列无穷大量的级:
    (1) $n$ 次多项式 $P_n(x)$ 与 $m$ 次多项式 $P_m(x)$ ($m, n$ 均为自然数);
    (2) $x^\alpha$ 与 $x^\beta$, $(\alpha, \beta > 0)$;
    (3) $a^x$ 与 $b^x$, $(a, b > 1)$.

18. 试用等价无穷小量代换的方法计算下列极限.
    (1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ ($m, n$ 均为自然数); (2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan ax}{x}$;
    (3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;
    (5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

## 第 1 章综合习题

1. 求下列数列的极限:
   (1) $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}$ (提示: $\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.);
   (2) $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{12}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$;
   (3) 设 $a_1 > 1,\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n},\ n = 1, 2, \cdots$;
   (4) 设 $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n},\ n = 1, 2, \cdots$.

2. 设 $\{a_n\}$ 为单调递增的数列, 并且收敛于 $a$, 证明, 对一切 $n$ 有 $a_n \leqslant a$. (对单调递减且有极限的数列, 类似的结论成立.)

3. 证明下面的数列收敛:
   (1) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$;
   (2) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

4. 试构造一个发散的数列 $\{a_n\}$, 满足条件: 对任意正数 $\varepsilon$, 存在自然数 $N$, 使当 $n > N$ 时, 有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

5. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在常数 $M$, 使得对一切 $n$ 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leqslant M.$$

证明: (1) 数列 $\{A_n\}$ 收敛; (2) 数列 $\{a_n\}$ 也收敛.

6. 设 $\{a_n\}$ 是正严格递增数列. 求证: 若 $a_{n+1}-a_n$ 有界, 则对任意 $\alpha\in(0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}\right)=0$. 并说明此结论的逆不对, 即, 存在正严格递增数列 $\{a_n\}$ 使得对任意 $\alpha\in(0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}\right)=0$, 但是 $a_{n+1}-a_n$ 无界. (提示: 考虑 $a_n=n\ln n$.)

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a$.

8. 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 且 $a_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

9. 证明: 若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 也存在, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

10. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

11. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}$.

12. 设 $\{a_n\}$ 且 $a_n\to a\in\mathbb{R}$, 又设 $\{b_n\}$ 是正数列, $c_n=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$. 求证: (1) $\{c_n\}$ 收敛; (2) 若 $(b_1+b_2+\cdots+b_n)\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

13. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x=\begin{cases}1, & p>1,\\ e, & p=1,\\ \infty, & p<1.\end{cases}$

14. 设 $f(x)$ 为周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, 证明 $f(x)$ 恒为零.

15. 证明 （1）函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0-$ 时有极限 $l$ 的充分必要条件是: 对于任意一个以 $x_0$ 为极限的单调递增数列 $\{a_n\}$ $(a_n\neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$;（2）函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0+$ 时有极限 $l$ 的充分必要条件是: 对于任意一个以 $x_0$ 为极限的单调递减数列 $\{a_n\}$ $(a_n\neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$.

16. 设 $\xi$ 是一个无理数. $a,b$ 是实数, 且 $a<b$. 求证: 存在整数 $m,n$ 使得 $m+n\xi\in(a,b)$, 即, 集合

$$S=\{m+n\xi\,|\,m,n\in\mathbb{Z}\}$$

在 $\mathbb{R}$ 稠密.

# 第 2 章　函数的连续性

## §2.1　连续函数的基本概念

### 2.1.1　连续的定义

直观上讲, 函数连续, 就是指函数的图象是一条 “没有断开” 的 “连续” 的曲线. 为了进一步给出严格的定义, 首先观察以下几个例子.

第一个例子是符号函数 ( 图2.1中第一个图象 )

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

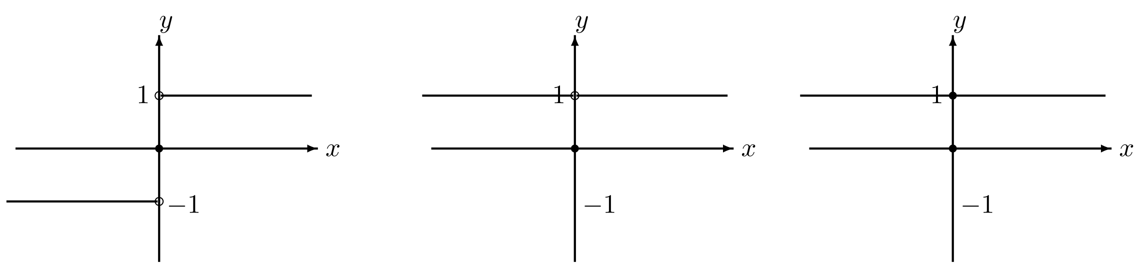


图 2.1

从图形上看, 它在 $x = 0$ 处是断开的. 而在 “间断点” $x = 0$ 处的显著特点是, 当 $x \to 0$ 时, 函数没有极限 ( 因为左右极限分别为 $-1$ 和 $1$, 两者不相等 ) . 因此从直观上看, 要使函数在一点是 “连接” 的, 也就是 “连续” 的, 应该要求函数在这一点有极限.

第二个例子是 ( 图2.1中的第二个图象 )

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

显然, 它在 $x = 0$ 处是断开的, 原因是函数虽然在 $x = 0$ 以 $1$ 为极限, 但极限值与函数本身在这一点的函数值 ( $f(0) = 0$ ) 不相符.

如果改变这个函数在 $x = 0$ 的定义, 使得函数在 $x = 0$ 的值等于函数在 $x = 0$ 的极限值, 那么它在 $x = 0$ 处就连续了. 改变后的函数是 $f(x) = 1,\ x \in (-\infty, +\infty)$ ( 图2.1中的第三个图象 ) .

所以我们观察到, 函数在一点 $x_0$ 处如果连续, 应该具备两个要素: 其一是函数在这一点 $x_0$ 处应该有极限, 其二是极限值应该等于函数在这一点的值.

**定义 2.1** 设 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域内(即包含 $x_0$ 的一个开区间)有定义, 若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

则称 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 处连续, $x_0$ 是 $f(x)$ 的连续点, 否则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续, 或 $x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点.

根据上述定义, 函数 $f(x)$ 在一点 $x_0$ 处的连续性, 取决于 $f$ 在这一点附近的值和在这点的值, 这个事实表明(在一点的)连续性, 是一种"局部性质".

如果用"$\varepsilon-\delta$"语言叙述, 就是: 称函数在定义域内的一点 $x_0$ 连续, 如果对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 总存在一个 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

另一种等价的定义叙述是基于所谓"增量"(亦称"改变量")的概念.

设函数在 $x_0$ 的一个邻域内有定义, 当自变量由值 $x_0$ 变到另外一个值 $x$ 时, 就说自变量在 $x_0$ 处有了一个增量 $\Delta x=x-x_0$(注意, 增量 $\Delta x$ 可正可负, 也可以是零). 相应自变量的一个增量, 函数由值 $y_0=f(x_0)$ 变到新的值 $y=f(x)=f(x_0+\Delta x)$, 因此, 函数值也就有了一个与自变量的增量相应的增量

$$\Delta y=y-y_0=\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x).$$

因此, 函数在一点 $x_0$ 连续, 就等价于说当 $x_0$ 的增量 $\Delta x$ 趋于 0 时, 函数的增量 $\Delta y$ 也趋于 0, 即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0,\quad \text{或}\ \ \Delta y\to 0\ (\Delta x\to 0).$$

于是, 函数在一点连续可以简单地描述为: 当自变量在该点变化很小时, 相应的函数值的变化也很小.

**定义 2.2** 若 $y=f(x)$ 在区间 $I=(a,b)$ 中的任一点连续, 则称 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上连续.

这样, 我们就定义了区间上的连续函数. 直观上看, 区间上连续的函数图象, 就是一条没有断开的曲线.

例如, 函数 $f(x)=|x|$ 是连续的; 第 1 章中所介绍的多项式函数, 是连续函数; 从第 1.3.6 节中的例 1.3.21 可知, 函数 $f(x)=\sin x$ 也是连续函数.

### 2.1.2 左(右)连续与间断

为了判别函数 $f(x)$ 在一点 $x_0$ 的连续性, 即是否有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 有时考虑 $f(x)$ 在一点 $x_0$ 的两个单侧极限更为方便. 根据函数极限的定义以及函数连续性的定义,

$f(x)$ 在一点 $x_0$ 连续等价于 $f(x)$ 在一点 $x_0$ 的左、右极限都存在而且等于 $f(x_0)$, 即

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0).$$

**定义 2.3** *设 $f(x)$ 在 $x_0$ 的一个邻域内有定义. 若 $f(x_0+0)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 右连续; 若 $f(x_0-0)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 $x_0$ 左连续.*

显然 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $x_0$ 左连续同时也右连续.

$f(x)$ 在一个包含端点的区间上连续, 是指 $f(x)$ 在区间内部每一点都连续, 并且在端点上有相应的单侧连续性.

函数在一点 $x_0$ 不连续称该点为**间断点**. 发生间断会有下列三种情形:

$1^\circ$ 函数在一点 $x_0$ 左右极限都存在且相等(所以在这一点有极限), 但不等于 $f(x_0)$,

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)\neq f(x_0).$$

$2^\circ$ 函数在一点 $x_0$ 左右极限都存在, 但是不相等,

$$f(x_0+0)\neq f(x_0-0).$$

$3^\circ$ 函数在一点 $x_0$ 左右极限至少有一个不存在.

对于情形 $1^\circ$ 中的间断(参见图2.1中的第二个图象), 只要重新定义(改变或补充)$f(x_0)$ 的值使之等于 $f(x_0^+)$ 就可以修复 $f(x)$ 在 $x_0$ 的连续性, 因此这类间断点是非本质的, 称为**可去间断点**.

对于情形 $2^\circ$ 中的间断, 因为 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$, 此时函数值在 $x_0$ 处有一个 "跳跃"(跳跃的幅度是 $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$). 因此称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**跳跃点**.

情形 $1^\circ$ 和 $2^\circ$ 中的间断点(即可去间断点和跳跃点)统称为 $f(x)$ 的**第一类间断点**.

情形 $3^\circ$ 中的间断点称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

显然 $f(x)$ 在定义区间的端点就只有两种间断情况: 可去间断(在该端点 $f(x)$ 的相应单侧极限存在但与函数值不等)和第二类间断点(在该端点 $f(x)$ 的相应单侧极限不存在).

**例 2.1.1** 研究函数$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $(x\neq 0)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

**解** 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 虽然函数在 $x=0$ 没有定义, 但只要补充定义函数在 $x=0$ 的值为1, 即

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

则函数在 0 连续.

**例 2.1.2** 讨论

$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\geqslant 1,\\ 2x-5 & x<1\end{cases}$$

在 $x=1$ 处的连续性.

**解** 因为 $f(1+0)=4,\ f(1-0)=-3$, 故 $x_0=1$ 是 $f(x)$ 的跳跃点, 跃度为 7.（注意函数在 $x=1$ 处是右连续的）.

**例 2.1.3** 讨论

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

**解** 因为函数在 $x=0$ 的右极限不存在, 所以该函数 $x=0$ 处不连续.

**例 2.1.4** 证明下面 **Dirichlet 函数**在任何一点都有第二类间断.

$$D(x)=\begin{cases}1 & x \text{ 为有理数},\\ 0 & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

**证明** 任给一点 $x_0$, 我们可以取到一个由有理数组成的单调增（减）数列 $\{a_n\}$收敛到 $x_0$ , 也可以找到无理数组成的单调增（减）数列 $\{b_n\}$收敛到 $x_0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}D(a_n)=1$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}D(b_n)=0$. 所以函数在任何一点的左右极限都不存在, 都是第二类间断点.

### 2.1.3 连续函数的运算

根据连续函数的定义, 只要求函数在一点 $x_0$ 的极限存在并且极限就是 $f(x_0)$, 因此, 自然就有连续函数的四则运算和连续函数的复合的连续性结论.

**定理 2.4** 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x_0$ 连续, 则函数 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$（当 $g(x_0)\neq 0$ 时）在 $x_0$ 处也连续.

**定理 2.5** 设 $u=g(x)$ 在区间 $I$ 上有定义, 函数 $y=f(u)$ 在区间 $J$ 上有定义, 且 $g(I)\subseteq J$. 若 $u=g(x)$ 在 $x_0\in I$ 连续, $y=f(u)$ 在 $u_0=g(x_0)$ 处连续（即 $f(u)$ 在 $u_0$ 连续, $u_0=g(x_0)$）, 则复合函数 $f(g(x))$ 也在 $x_0$ 连续.

**证明** 对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 因为 $f$ 在 $u_0$ 连续, 则存在一个正数 $\eta>0$, 使得当 $|u-u_0|<\eta$ 时, 有

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$$

对于上述 $\eta>0$, 又因为 $g$ 在 $x_0$ 连续, 所以存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|g(x)-g(x_0)|=|u-u_0|<\eta$$

于是, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 从上面两个不等式得到

$$|f(g(x))-f(g(x_0))|=|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon,$$

即函数 $f(g(x))$ 在 $x_0$ 连续. □

该定理也可以表示为下面形式

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(g(x_0))=f(\lim_{x\to x_0} g(x)),$$

即在连续的条件下, 可将复合函数的极限运算移到内层函数来运算.

下面将讨论反函数的连续性问题. 我们知道对于定义在数集 $A$ 上的函数 $f(x)$ , 它具有反函数的充分必要条件是 $f(x)$ 为定义域到值域的一一映射. 如果 $f(x)$ 在 $A$ 上是严格单调的, 则 $f(x)$ 有反函数. 但是, 有反函数的函数不必是严格单调的, 例如

$$f(x)=\begin{cases}-1-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

然而, 对于在一个区间上的连续函数, 情形则很不相同, 下列定理是关于连续函数有反函数的最基本的一个结果.

**定理 2.6** *设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个连续函数, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在反函数的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增(减). 当这个条件成立时, $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}$ 在其相应的定义域内也是严格单调增(减)的连续函数.*

从直观上看, 连续函数的反函数也是连续的这个结论是显然的. 因为函数$y=f(x)$和反函数$x=f^{-1}(y)$在同一坐标平面上的图象是相同的.

我们将在 §2.2 的最后给出该定理的严格证明.

### 2.1.4 初等函数连续性

在介绍了连续函数的定义和基本性质后, 我们将看到, 初等函数在其定义域内是连续的.

(1) *多项式函数*: 首先注意到, 常值函数 $f(x)=c$ ( $c$ 是一个常数) 以及线性函数 $f(x)=x$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上连续函数. 所以经过四则运算所得到的任何 $x$ 的多项式函数都是连续的.

(2) *三角函数与反三角函数*: 由 §1.2 中的例 1.3.21 可知, 函数 $\sin x$ 是连续函数. 而 $\cos x$ 可以看成是 $\sin u$ 和 $u=\frac{\pi}{2}-x$ 两个连续函数的复合

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

的结果, 所以是连续的. 其他的三角函数

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\ \text{是整数});\quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}\ (x \neq k\pi,\ k\ \text{是整数});$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}\ (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\ \text{是整数});\quad \csc x = \frac{1}{\sin x}\ (x \neq k\pi,\ k\ \text{是整数});$$

在各自的定义域内, 都是 $\sin x$、$\cos x$ 以及 $f(x)=1$ 经过四则运算所得到的, 所以都是连续函数.

对于所有的反三角函数 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\mathrm{arccot} x$, 由定理 2.6 可知它们在各自的定义域内都是连续的.

(3) *指数函数与对数函数*: 根据 §1.2 中的例 1.3.17, 指数函数 $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ 是其定义域内的连续函数. 特别 $f(x)=e^x$ 是连续函数. 因为

当 $a>1$ 时, $f(x)=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是严格递增的;

当 $0<a<1$ 时, $f(x)=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是严格递减的;

而且无论是那种形式, 函数的值域都是 $(0,+\infty)$. 根据定理 2.6, $f(x)=a^x$ 的反函数 $f^{-1}(x)=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是连续的. 特别, $f(x)=\ln x$ 是连续的.

(4) *幂函数*: 对于幂函数 $f(x)=x^\alpha$ $(\alpha\neq 0)$, 在其基本的定义域 $x>0$ 内, 由于

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

所以幂函数在 $x>0$ 连续.

通过上述结论, 我们知道所有基本初等函数在各自的定义域内连续的. 再根据定理 2.4 和定理 2.5, 我们有

**定理 2.7** *初等函数在其定义域内是连续函数.*

定理2.7的一个直接应用是, 若 $x_0$ 是初等函数 $f(x)$ 定义域内的一点, 则 $f(x)$ 在这一点的极限就是函数在该点的值 $f(x_0)$.

**例 2.1.5** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sin(\arctan(x+1))$.

**解** 因为 $x=0$ 是函数 $\sin(\arctan(x+1))$ 定义域内的点, 所以极限是 $\sin(\arctan 1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**例 2.1.6** 求证 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

**证明** 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$, 令

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{1/x}, & x\neq 0\\ e, & x=0\end{cases}$$

则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 由于 $\ln y$ 在 $y=e$ 连续, 所以复合函数 $\ln f(x)$ 在 $x=0$

连续, 从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln\lim_{x\to 0}f(x)=\ln e=1.$$

## 习题 2.1

1. 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 附近有定义, 且 $\lim\limits_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$. 问 $f(x)$ 是否必在 $x=x_0$ 处连续?

2. 若对任意正数 $\varepsilon$, 函数 $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ 上连续, 证明: $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内连续.

3. 设在点 $x=x_0$ 处, 函数 $f(x)$ 连续, 而 $g(x)$ 不连续, 问函数 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 $x_0$ 的连续性如何? 若 $f(x), g(x)$ 在 $x_0$ 处都不连续, 回答同样的问题.

4. (1) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=x_0$ 处也连续.
   (2) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在一个区间 $I$ 上连续. 证明, 函数 $M(x)=\max(f(x),g(x))$ 及 $m(x)=\min(f(x),g(x))$ 在区间 $I$ 上均连续.

5. 证明, 存在这样的函数 $f(x)$, 处处不连续, 但函数 $|f(x)|$ 处处连续.（提示: 适当地修改狄利克雷函数可得出一个例子.）

6. 指出下列函数的间断点,并说明其类型.

   (1) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$;  (2) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0;\end{cases}$

   (3) $f(x)=[|\cos x|]$;  (4) $f(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}$;

   (5) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7\\ x, & -7\leqslant x\leqslant 1\\ (x-1)\sin\frac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty;\end{cases}$

   (6) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 4, & x=2.\end{cases}$

7. 试确定 $a$, 使得函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ a+x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

8. 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在点 0 处右连续, 但不左连续.

9. 证明, 对每个实数 $x$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 存在; 将这极限值记为 $f(x)$, 试讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

10. 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续, 则存在一个正数 $\delta$, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上有界. (这一结果称为连续函数的局部有界性.)

11. 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续, 且 $f(x_0) \neq 0$, 则存在一个正数 $\delta$, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上与 $f(x_0)$ 同号. (这一结果称为连续函数的局部保号性) 进一步, 存在某个正数 $\gamma$, 使得 $f(x)$ 在这一区间中满足 $|f(x)| \geqslant \gamma$.

12. 证明: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$ (从而 $x_0$ 为 $g(x)$ 的可去间断点), $f(u)$ 在 $u=a$ 处连续, 则
$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = f(a).$$
(这一结论对其他五种极限过程也成立.)

13. 证明: 若函数 $u(x), v(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 且 $u(x_0) > 0$, 则函数 $u(x)^{v(x)}$ 也在点 $x_0$ 处连续.

14. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且对于任意 $x$ 有 $f(2x) = f(x)$. 求证 $f(x)$ 是常数.

15. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且对于任意 $x, y$ 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 求证 $f(x) = cx$, 其中 $c$ 是常数.

16. 当 $x \to 0$ 时, 用 $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$ 证明 $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$; 用 $\ln(1+x) \sim x$ 证明 $(e^x - 1) \sim x$.
(上述的等价无穷小, 是微积分中非常基本的事实.)

17. 求极限:
(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$;
(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sqrt[10]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot \arcsin(\sin x)}{1-\cos x}$;
(5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$; (6) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$;
(7) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$; (8) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{2 - \frac{\sin x}{x}}$.

18. 函数 $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 与 $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 分别称为双曲正弦与双曲余弦 (统称为双曲函数), 它们均在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 证明以下各题. (可与三角函数的性质作比较.)
(1) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$; (2) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;
(3) $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$; (4) $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$;
(5) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$; (6) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.

## §2.2 闭区间上连续函数的性质

本节主要介绍在闭区间上连续函数的几个重要性质. 我们将用 $C[a,b]$ 表示定义在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数全体.

### 2.2.1 零点定理与介值定理

在**习题**2.1 的第11题中, 我们证明了连续函数有这样的性质: 设函数 $f(x)$ 在一点 $x_0$ 连续, 如果 $f(x_0)\neq 0$, 不妨设 $f(x_0)>0$, 则存在一个正数 $\delta$, 使得在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内有 $f(x)>0$. 这个性质称为连续函数的**局部保号性**. 这个事实的反面是: 如果在以 $x_0$ 为中心的任意一个开区间 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 内, 连续函数 $f(x)$ 既取到正值, 又取到负值, 则只能有 $f(x_0)=0$. 因此, 函数在一点连续, 就能够由函数在该点附近的某些信息, 推断函数在这一点的值. 如果函数在一个闭区间上连续, 则有下列更强的定理.

**定理 2.8** (零点定理) 设 $f(x)\in C[a,b]$, 且函数在两个端点的值 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号, 即 $f(a)f(b)<0$, 则必有一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$.

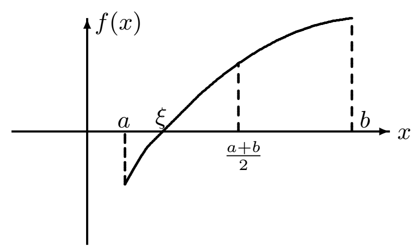


图 2.2

**证明** 不妨设 $f(a)<0<f(b)$. 将区间 $[a,b]$两等分, 如果在分点 $\frac{a+b}{2}$ 处 $f(x)$ 取值为零 $f(\frac{a+b}{2})=0$, 则取 $\xi=\frac{a+b}{2}$, 定理得证. 否则 $f(\frac{a+b}{2})$ 必然与 $f(a)$ 和 $f(b)$ 中某一个异号, 即在两个闭子区间

$$\left[a,\ \frac{a+b}{2}\right],\quad \left[\frac{a+b}{2},\ b\right]$$

中, 必有一个使得 $f(x)$ 在其端点取值异号, 且保持在左端点取值为负, 在右端点取值为正. 记这个区间为 $[a_1,\ b_1]$. 重复上述过程, 除非某一次正好在分点处 $f(x)$ 取值为零, 则定理得证, 否则就得到一列区间 $[a_n,\ b_n]$ 使得 $f(x)$ 在其左端点取值为负，在右端点取值为正, 即

$$f(a_n)<0<f(b_n)$$

这一列区间 $[a_n,\ b_n]$ 满足区间套定理条件, 因此存在一点 $\xi\in[a_n,\ b_n]$, 满足

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=\xi,$$

由函数连续性可知

$$f(\xi)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)\leqslant 0\leqslant \lim_{n\to\infty}f(b_n)=f(\xi),$$

即 $f(\xi)=0$. □

因此, 对于闭区间上连续函数, 由函数"区间端点的值异号"的信息, 便能断定函数在区间上有零点. 注意, 定理的条件中的三个基本要素: 闭区间、连续、在端点异号.

从几何上看, 闭区间上的连续函数, 其图像从 $x$ 轴的下（上）方通到上（下）方时, 必然穿过 $x$ 轴, 即, 与 $x$ 轴有交点.

**定理 2.9** (介值定理) *设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 能取到介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意值.*

**证明** 不妨设 $f(a) < f(b)$, 且 $r$ 是介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意一个数: $f(a) < r < f(b)$, 考虑辅助函数 $g(x) = f(x) - r$, 则 $g(x)$ 也是 $[a,b]$ 上连续函数, 而且

$$g(a) = f(a) - r < 0, \quad g(b) = f(b) - r > 0$$

故满足零点定理的条件, 因而有 $\xi \in (a,b)$ 使 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = r$. □

零点定理稍加推广, 即是对于区间上的连续函数, 只要在区间内有两点的值是异号的, 就一定有零点. 而介值定理告诉我们, 函数一定能取到介于任意两点之间的值.

**例 2.2.1** 证明函数 $f(x) = 2^x - 4x$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内有一个零点.

**证明** 显然, $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上连续. 且 $f(0) = 1 > 0$, $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{2} - 2 < 0$, 所以 $f(x) = 2^x - 4x$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内有一个零点.

**例 2.2.2** 证明任何奇次多项式至少有一个实根.

**证明** 设 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个奇次多项式, 即 $n$ 是奇数, $a_n \neq 0$. 不妨设 $a_n > 0$. 则 $P(x) \sim a_n x^n$,（$x \to \infty$）. 因为 $n$ 是奇数, 所以当 $x \to \pm\infty$ 时, $P(x) \to \pm\infty$. 故存在两个数 $a < b$, 使得 $f(a) < 0 < f(b)$, 由零点定理知 $P(x)$ 一定有一个零点.

如果是偶次多项式, 结果则不相同, 例如 $P(x) = x^2 + 1$, 就没有实根.

### 2.2.2 有界性与最大最小值定理

根据函数的连续性定义, 如果函数在一点 $x_0$ 连续, 则对于一个正数, 例如 $\varepsilon = 1$, 则存在一个正数 $\delta$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$, 有 $|f(x) - f(x_0)| < 1$. 换句话说, 在区间 $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$上, 函数

$$|f(x)| < 1 + |f(x_0)|$$

因此是有界的. 即"一点连续, 蕴含着附近有界". 如果函数在整个闭区间上连续, 是否蕴含着函数的有界性? 答案是肯定的.

**定理 2.10** *若 $f(x) \in C[a,b]$, 则它在整个区间上有界. 即存在一个常数 $M$, 使得当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$.*

**证明** (反证) 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 则对于任意自然数 $n$, 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得 $|f(x_n)| \geqslant n$. 因为 $\{x_n\}$ 是有界数列, 所以根据 Bolzano-Weierestrass 定理知存在收敛子列. 设 $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$ 是一个收敛子列. 显然, $x \in [a,b]$. 由 $f$ 的连续性, 得 $f(x_{n_k}) \to f(x)$, $(k \to \infty)$ 但是根据 $x_n$ 的选择, 有 $|f(x_{n_k})| \geqslant n_k, (k \to \infty)$ , 这是矛盾的. 因此, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. □

**定理 2.11** (最值定理) 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值. 即存在 $x_* \in [a,b]$ 和 $x^* \in [a,b]$, 使得对所有的 $x \in [a,b]$, 有

$$f(x_*) \leqslant f(x) \leqslant f(x^*)$$

**证明** 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 所以在 $[a,b]$ 上有界. 设 $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. 由上确界的定义可知, 对任意自然数 $n$ 存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M.$$

这说明 $\{f(x_n)\}$ 收敛到 $M$. 根据 Bolzano-Weierestrass 定理知存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $x_{n_k} \to x^* \in [a,b]$. 于是

$$M = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x^*).$$

这就证明了 $f$ 在 $[a,b]$ 上取到上确界 $M$. 同理可证 $f$ 在 $[a,b]$ 上取到下确界. □

此定理比定理 2.10 更进一步, 闭区间上的连续函数, 不但有界, 而且能达到最大值(上确界)和最小值(下确界).

注意, 定理 2.10 和定理 2.11 中的条件“闭区间”是必不可少的. 例如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 这个开区间上有定义, 但它是在 $(0,1)$ 上无界的函数, 当然也不可能达到最大值. 连续性的条件, 也是必须的. 如函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0, 1 \end{cases}$$

在开区间 $(0,1)$ 中连续, 但在闭区间 $[0,1]$ 上不连续, 虽然有界, 但是却达不到最大值和最小值.

应用介值定理和最值定理, 我们有

**定理 2.12** 若 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 的值域是一个闭区间.

**证明** 记 $I = [a,b]$. 根据最值定理, 任何一点的函数值, 都介于最大值 $f(x^*)$ 和最小值 $f(x_*)$ 之间, 所以

$$f(I) \subset [f(x_*),\ f(x^*)]$$

另一方面, 任给一个数 $r \in [f(x_*),\ f(x^*)]$, 根据介值定理, 一定存在一点 $x_0$ 使得 $r = f(x_0)$, 即 $r = f(x_0) \in f(I)$. 因而

$$[f(x_*),\ f(x^*)] \subset f(I)$$

综合上述结果, 即知值域就是闭区间 $[f(x_*),\ f(x^*)]$. □

最后, 我们给出定理 2.6 的证明.

**定理 2.6 的证明** 首先证明区间 $[a,b]$ 上连续函数有反函数的充分必要条件是严格单调函数.

充分性是显然的, 因为严格单调函数是其定义域到值域的一一映射, 因此有反函数.

必要性的证明如下: 假设 $f(x)$ 不是严格单调的, 则存在 $[a,b]$ 中三个点 $x_1 < x_2 < x_3$, 使得 $f(x_2)$ 不在 $f(x_1)$ 和 $f(x_3)$ 之间. 在这种情况下, 或者$f(x_1)$ 在 $f(x_2)$ 和 $f(x_3)$ 之间, 或者$f(x_3)$ 在 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 之间. 不妨设前一种情况发生, 由于 $f(x)$ 在 $[x_2,x_3]$ 上连续, 所以由介值定理存在一点 $x_1' \in [x_2,x_3]$, 使得 $f(x_1') = f(x_1)$. 因此 $f(x)$ 不是区间上一一对应的函数, 也就不可能有反函数, 这与条件相矛盾. 所以 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是严格单调的.

其次证明严格单调且连续函数的反函数也是严格单调且连续的.

不妨设 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增. 所以有反函数 $f^{-1}$. 根据定理2.12, 我们知道 $f$ 的值域, 也就是反函数 $f^{-1}$ 的定义域也是一个区间 $[f(a),f(b)]$.

1° 先证 $f^{-1}$ 也是严格递增的. 任给 $y_1 < y_2$, 其中 $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. 于是 $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. 如果 $x_2 \leqslant x_1$, 由于 $f(x)$ 是严格单调增的, 就有 $y_2 = f(x_2) \leqslant f(x_1) = y_1$, 这与 $y_1 < y_2$ 相矛盾. 因此 $x_1 < x_2$, 即 $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, 故 $f^{-1}(y)$ 为严格单调增.

2° 现在证明 $x = f^{-1}(y)$ 在值域 $[f(a),f(b)]$ 上的连续性. 任取值域中一点 $y_0 \in (f(a),f(b))$. 则有 $x_0 \in (a,b)$, 使 $y_0 = f(x_0)$. 对任给的满足 $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset (a,b)$ 的正数 $\varepsilon$. 由 $f(x)$ 的单调性可知有

$$y_1 = f(x_0-\varepsilon) < y_0 = f(x_0) < f(x_0+\varepsilon) = y_2.$$

取 $\delta = \min(y_0-y_1, y_2-y_0)$. 则当 $|y-y_0| < \delta$ 时, 就有

$$y_1 < y < y_2.$$

由 $f^{-1}(y)$ 的单调性可知, 当 $|y-y_0| < \delta$ 时, 必有

$$f^{-1}(y) > f^{-1}(y_1) = x_0 - \varepsilon = f^{-1}(y_0) - \varepsilon$$

及

$$f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \varepsilon = f^{-1}(y_0) + \varepsilon.$$

即当 $|y-y_0|<\delta$ 时,

$$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\varepsilon.$$

故 $f^{-1}(y)$ 在 $y_0$ 连续, 由 $y_0$ 的任意性 $f^{-1}(y)$ 在 $(f(a),f(b))$ 连续. 至于 $f^{-1}(y)$ 在端点的单侧连续性则用上述方法类似可证. □

### 2.2.3 一致连续性

首先观察一个例子

$$f(x)=\frac{1}{x}, \quad x\in(0,1)$$

显然它是区间 $(0,1)$ 上的连续函数, 即在每一点 $x\in(0,1)$ 都连续.

但是, 任给一个正数 $\varepsilon$, 对于不同的点 $x_0$, 能够保证 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 所存在的正数 $\delta$（即刻划 “$x$ 充分接近 $x_0$” 的尺度: $0<|x-x_0|<\delta$ ）并不一定是一样的. 例如对于 $x_0=\frac{1}{n}$, 要使

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\left|\frac{1}{x}-n\right|<\varepsilon$$

$x$ 必须满足

$$-\frac{\varepsilon}{n(n+\varepsilon)}<x-x_0=x-\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{n(n-\varepsilon)}$$

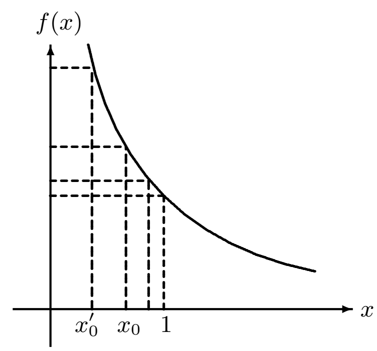


图 2.3

因此, 对于 $x_0=\frac{1}{n}$, 只有取

$$\delta=\frac{\varepsilon}{n(n+\varepsilon)}\sim\frac{\varepsilon}{n^2}$$

才能使得当 $|x-x_0|<\delta$, 时有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

而在点 $x_0'=1-\frac{1}{n}$ 处, 对应同一个正数 $\varepsilon$, 要使

$$|f(x)-f(x_0')|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0'}\right|=\left|\frac{1}{x}-\frac{n}{n-1}\right|<\varepsilon$$

必须

$$-\frac{\varepsilon(n-1)^2}{n(n+\varepsilon(n-1))}<x-x_0'=x-\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{\varepsilon(n-1)^2}{n(n-\varepsilon(n-1))}.$$

因此, 对于 $x_0'=1-\frac{1}{n}$, 取

$$\delta'=\frac{\varepsilon(n-1)^2}{n(n+\varepsilon(n-1))}\sim\varepsilon$$

则当 $|x-x_0|<\delta'$, 时有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

显然, 在这个例子中, 对于同一个正数 $\varepsilon$, 当 $x_0$ 越靠近 0, 对 $\delta$ 的要求越严, 而当 $x_0$ 越靠近 1, $\delta$ 的选择余地越宽. 所以对于不同的连续点来说, 对应的 $\delta$ 是不一致的.

如果对于所有的点 $x_0$, 存在统一的正数 $\delta$, 只要 $|x-x_0|<\delta$ 时, 就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 则说这样的连续性是 “一致” 的.

**定义 2.13** *设 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义, 对任给的 $\varepsilon>0$, 如果存在 $\delta>0$, 使得任取一点 $x_0\in I$, 只要 $|x-x_0|<\delta$, 就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 则称函数 $f$ 在 $I$ 上是一致连续的.*

一个等价的说法是: 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $x_1,x_2\in I$ 及 $|x_1-x_2|<\delta$, 就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 上一致连续.

用 “增量” 的语言就是: 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 总存在一个 $\delta>0$, 使得不管是在 $I$ 中的哪一点 $x$, 只要在 $x$ 处添加的增量 $\Delta x$ 满足 $|\Delta x|<\delta$, 就使得函数的增量 $|\Delta y|=|f(x+\Delta x)-f(x)|<\varepsilon$.

**例 2.2.3** $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.

这是因为 $|\sin x_1-\sin x_2|=2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\cos\frac{x_1+x_2}{2}\right|\leqslant|x_1-x_2|$. 所以, 任给 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时就有 $|\sin x_1-\sin x_2|<\varepsilon$.

**例 2.2.4** $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 不是一致连续的.

这是因为对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 不管取什么样的正数 $\delta$, 总有自然数 $n$, 使得 $\frac{1}{n}<\delta$. 取 $x'=\frac{1}{n},x''=\frac{1}{n+1}$, 则

$$|x'-x''|=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n}<\delta,$$

但

$$\left|\frac{1}{x''}-\frac{1}{x'}\right|=1>\frac{1}{2}.$$

即对于这样一个的正数 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 函数在 $(0,1)$ 上不存在统一的 $\delta$.

在上面例子中, 如果限制函数定义的区域为 $[a,1),\ 1>a>0$, 则函数是一致连续的. 请读者自证. 所以连续函数的一致连续性与定义的区域有关. 特别如果 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上, 则有

**定理 2.14** *有限闭区间 $[a,b]$ 上定义的连续函数 $f(x)$, 一定在 $[a,b]$ 上一致连续.*

**证明** (反证) 假如 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不是一致连续的, 则存在某个正数 $\varepsilon_0$ 使得对任意自然数 $n$, 都存在 $x_n,y_n\in[a,b]$ 满足 $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$, 但是 $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$. 由 Bolzano-Weierestrass 定理, 数列 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 $x\in[a,b]$. 从 $|x_{n_k}-y_{n_k}|<\frac{1}{n_k}$ 知, $\{y_{n_k}\}$ 也收敛于 $x$. 由于 $f$ 连续, 有 $\lim\limits_{k\to\infty}\big(f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\big)=f(x)-f(x)=0$. 这与 $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0$ 是矛盾的. $\square$

## 习题 2.2

1. 证明, 函数 $x \cdot 2^x - 1$ 在 $[0,1]$ 内有零点.

2. 证明, 函数 $x - a\sin x - b$ (其中 $a, b$ 为正数) 在 $(0, +\infty)$ 上有零点, 且零点不超过 $a+b$.

3. 证明, 函数 $x - \sin(x+1)$ 有实零点.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且值域就是 $[a,b]$. 证明, $f(x)$ 在 $[a,b]$上必有不动点, 即有 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

5. 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$. 试证: 存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$. 证明: 在区间 $[0,a]$ 上存在某个 $x_0$, 使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

7. 试证: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为此区间中的任意值, 则在 $[a,b]$ 中有一点 $\xi$, 使得
$$f(\xi) = \frac{1}{n}\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big).$$
更一般地, 若 $q_1 > 0, q_2 > 0, \cdots, q_n > 0$, 且 $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$, 则在 $[a,b]$ 中有一点 $\xi$, 使得
$$f(\xi) = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_n f(x_n).$$

8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在. 证明 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

9. 证明函数 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

10. 是否有满足下面条件的连续函数, 并说明理由.
    (1) 定义域为 $[0,1]$, 值域为 $(0, +\infty)$;
    (2) 定义域为 $[0,1]$, 值域为 $(0,1)$;
    (3) 定义域为 $[0,1]$, 值域为 $[0,1] \cup [2,4]$;
    (4) 定义域为 $(0,1)$, 值域为 $(2, +\infty)$.

11. 举例说明, 若对任意正数 $\varepsilon$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ 上有界, 不能保证 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$上有界. (比较习题 2.1, 第 2 题.)

12. 设 $y = f(x)$ 在开区间 $I = (a,b)$ 上连续并严格单调, 证明: $y = f(x)$ 的值域 $f(I)$ 也是一个开区间.

13. 设函数 $f(x)$ 在有限区间 $(a,b)$ 上一致连续. 求证: $f(x)$ 在 $a$ 点的右极限和 $b$ 点的左极限都存在.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续, $\{a_n\}$ 是正收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛. 又问仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论是否还成立, 为什么?

15. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, $\{a_n\}$ 是收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛.

16. 给出一个在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界但不一致连续的函数.

## 第 2 章综合习题

1. 证明, 函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为有理数}\\ x, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$ 仅在点 $x=0$ 处连续.

2. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$, 记 $f(x)=\frac{|x-x_1|+\cdots+|x-x_n|}{n}$, 证明: 存在 $x_0\in[0,1]$, 使得 $f(x_0)=\frac{1}{2}$.

3. 证明: 函数 $\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$ (其中 $a_1,a_2,a_3>0$, 且 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$) 在 $(\lambda_1,\lambda_2)$ 与 $(\lambda_2,\lambda_3)$ 内各有一个零点.

4. 设 $f(x)$ 是一个多项式, 则必存在一点 $x_0$, 使得 $|f(x_0)|\leqslant|f(x)|$ 对任意实数 $x$ 成立.

5. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$. 证明: 对任意自然数 $n$, 在区间 $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ 中有一点 $\xi$, 使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)$.

6. 证明, 存在一个实数 $x$, 满足 $x^5+\frac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}=72$.

7. 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上或者有最大值, 或者有最小值.

8. 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上, 满足条件: $a\leqslant f(x)\leqslant b$ (对任意 $x\in[a,b]$), 且对 $[a,b]$ 中任意的 $x,y$ 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$, 这里 $k$ 是常数, $0<k<1$. 证明
(1) 存在唯一的 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=x_0$.
(2) 任取 $x_1\in[a,b]$, 并定义数列 $\{x_n\}:\ x_{n+1}=f(x_n)$, $n=1,2,\cdots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.
(3) 给出一个在实轴上的连续函数使得对任意 $x\neq y$ 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$, 但方程 $f(x)-x=0$ 无解.

9. 证明: 对任意自然数 $n$, 方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ 恰有一个正根 $x_n$; 进一步证明, 数列 $\{x_n\}(n\geqslant1)$ 收敛, 并求其极限.

10. 设 $a < b$. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且对任意 $x \in [a, b)$ 存在 $y \in (x, b)$ 使得 $f(y) > f(x)$. 求证: $f(b) > f(a)$.

# 第 3 章　单变量函数的微分学

本章主要介绍单变量函数导数、微分等概念，导函数的计算法则、中值定理，利用导数研究函数的性质，以及函数的Taylor 公式等内容。

## §3.1　导数

### 3.1.1　导数的定义

首先看两个来自几何和物理的例子.

1° **曲线的切线**

首先要明确什么是“曲线上一点的切线”. 在初等几何中, 通常将只与圆周有一个交点的直线定义为圆的切线. 然而, 对于一般曲线来说, 这种定义方式就不适合了. 例如对于抛物线（图 3.1）, 显然只交于抛物线一点 $A$ 的直线有多条, 其中有的明显就不是切线. 而对于图 3.2, 直线交图示曲线于两点, 显然在交点 $A$ 处, 直线应该是“切线”. 对于图 3.3 中的曲线在 $A$ 点有一个尖点. 在尖点处, 与曲线相交一点的”切线”却有两条.

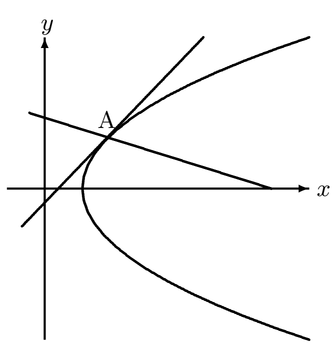


图 3.1

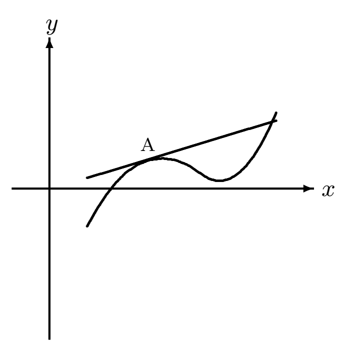


图 3.2

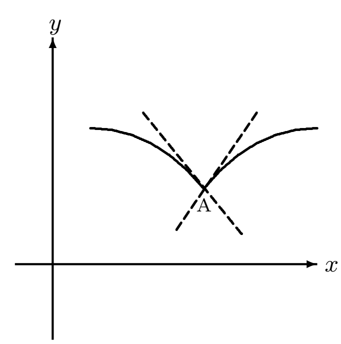


图 3.3

该如何定义一条曲线的切线呢? 一个可行的途径是从割线开始. 连接 $C$ 上两点 $M_0$ 和 $M$, 作一条割线 $L$（图 3.4）, 当点 $M$ 沿着曲线 $C$ 滑动到 $M_0$ 时, 如果 $L$ 有一个“极限位置”, 我们便将这个“极限位置”的直线, 定义为曲线在一点的 $M_0$ 的切线.

平面上过一点的直线可由直线与 $x$ 轴的正向的夹角 $\alpha$ 来表征. 这个夹角 $\alpha$ 是指正 $x$ 轴绕原点沿逆时针方向转动, 并在首次变得与该直线平行时所扫过的角度, 因此满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. 角度的正切 $\tan\alpha$ 称为直线的斜率.

设 $\alpha(M)$ 是割线 $M_0M$ 与 $x$ 轴的夹角, 如果

$$\lim_{M\to M_0}\alpha(M)=\alpha$$

则极限值 $\alpha$ 应该是 $M_0$ 点处切线与 $x$ 轴的夹角.

现在假设曲线 $C$ 由函数 $y=f(x)$ 表示（或者说曲线是函数 $f(x)$ 的图象）, 点 $M_0$ 的坐标是 $M_0(x_0,\ f(x_0))$, 动点 $M$ 的坐标是 $M(x,\ f(x))$, 所以割线的斜率是

$$\tan\alpha(M)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

故上述求极限的过程就是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\tan\alpha(M)=\tan\alpha$$

如果左边的极限存在, 该极限就是切线的斜率.

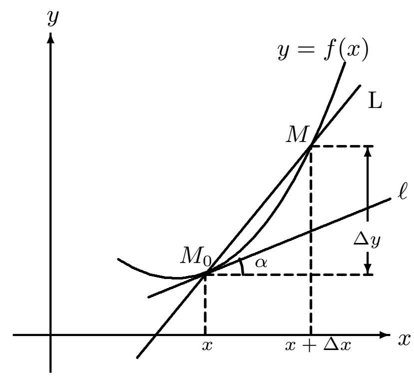


图 3.4

$2^\circ$ **直线运动质点的瞬间速度**

考察沿直线作变速运动的一个质点. 设质点所运动的距离与时间之间的关系为 $S=S(t)$. 因此在从 $t_0$ 到 $t$ 这段时间间隔内, 质点运动的平均速度是

$$\overline{v}=\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$$

显然, 这个平均速度并不能完全反映质点在 $t_0$ 到 $t$ 这段时间内更具体的运动规律. 如果要了解质点在某一时刻运动的变化规律（即速度）, 只要上述平均的时间间隔越来越短. 特别, 如果极限

$$\lim_{t\to t_0}\overline{v}=\lim_{t\to t_0}\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$$

存在, 则称为在时刻 $t_0$ 时, 质点运动的**瞬时速度**.

无论是几何上的从割线到切线, 还是物理中的从平均速度到瞬时速度, 取极限的对象都是差商的形式, 刻画的都是函数在一点的变化率. 或者说是在一点函数的因变量与自变量的变化量之间的比率. 我们将其抽象出来, 就有了关于导数的定义.

**定义 3.1** 设 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域中有定义, 若下列差商的极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

*存在, 则称它为 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的导数(或微商), 记成 $f'(x_0)$, $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$ 或 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$, 并称 $f(x)$ 在 $x_0$ 可导.*

显然, 函数的导数的几何意义和物理意义正是函数图像在一点切线的斜率,或动点在一个时刻的瞬时速度.因此, 导数是一个局部的概念.

用“增量”的语言, 上述定义就是, 对于函数 $f(x)$, 当给自变量 $x$ 在一点 $x_0$ 处一个增量 $\Delta x$ 时(这里 $\Delta x$ 可正可负, 但不为零), 则函数值就相应有一个增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数, 就是两个增量之比(即差商)的极限

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

如果函数在一点的导数不存在, 一般来说它的图像在该点无法定义切线. 一个特殊情形是在一点 $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\infty$ $(\Delta x\to 0)$, 即函数的图象在该点切线的斜率是无穷大, 也就是切线平行于 $y$ 轴. 今后我们一般不考虑这样的切线.

和讨论函数的连续性一样, 也需要讨论函数的单侧可导性. 它对研究函数在一点的导数, 会提供较有用的信息.

**定义 3.2** *设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的右边近旁有定义, 如果 $\Delta x>0$, 且*

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

*存在, 则称它为 $f(x)$ 在 $x_0$ 的右导数, 记成 $f'_+(x_0)$, 并称 $f(x)$ 在 $x_0$ 右可导. 类似可定义 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的左可导和它的左导数 $f'_-(x_0)$.*

显然, $f(x)$ 在 $x_0$ 可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $x_0$ 左、右可导, 并有

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

**定义 3.3** *如果 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 的每一点都可导, 则称 $f(x)$ 在 $I$ 上可导. 如果区间 $I$ 包含有端点, 则在该端点处, $f(x)$ 只需有相应的单侧可导性.*

如果 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 中每一点都可导, 则对于任意给定的 $x\in I$, 对应关系

$$x\longmapsto f'(x)$$

又确定了 $I$ 上的一个函数, 称为 $f(x)$ 的**导函数**, 记成 $f'(x)$, $y'$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ 等.

**例 3.1.1** 设 $y=c$ (常数), 求 $y'$.

**解** $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$

从直观上看, $y=c$ 是一条水平直线, 其上任意一点都有斜率为零的切线(也是水平的直线). 从物理上看, 一个运动质点的距离在任何时刻都是 $c$, 说明质点是静止的, 其瞬时速度当然时时刻刻为零. 后面我们还将证明导数处处为零的函数也只能是 $y=c$.

**例 3.1.2** 设 $y = x^n,\ \ x \in (-\infty, +\infty)$, 其中 $n$ 是自然数. 求 $y'$.

**解** 对于任意实数 $x$, 由二项式定理得

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n$$

故

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[ nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right] = nx^{n-1}.$$

即 $y = x^n$ 的导函数是 $y' = nx^{n-1}$, 导函数的定义域也是 $(-\infty, +\infty)$. 特别, 当 $n = 1$ 时, 函数 $y = x$ 的导函数为常值函数 $y = 1$, 即 $y = x$ 在每一点的切线的斜率都是 1.

**例 3.1.3** 求正弦函数和余弦函数的导函数.

**解** 记 $y = \sin x,\ \ x \in (-\infty, +\infty)$. 则对任意一点 $x$,

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

由 $\cos x$ 的连续性以及基本极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

得

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

即 $(\sin x)' = \cos x$, 类似可得 $(\cos x)' = -\sin x$.

**例 3.1.4** 求对数函数 $y = \log_a x,\ x \in (0,\ +\infty)$ 的导函数, 这里 $a > 0$, 且 $a \neq 1$.

**解** 对于任意的 $x > 0$, 有 $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, 且

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\ln a}\frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

利用极限 ( 见 §2.1 节例 2.1.6 )

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

得

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

特别当 $a = e$ 时, 上面的结果为

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ \ x \in (0, +\infty)$$

由此可见, 对于以 $e$ 为底的自然对数的导数特别简单.

**例 3.1.5** 求下列分段函数的导函数

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x \geqslant 0 \\ x^2, & x<0 \end{cases}$$

**解** 函数 $f(x)$ 由函数 $y=x^3$ $(x \geqslant 0)$ 以及 $y=x^2$ $(x<0)$ 在 $x=0$ 处拼接而成. 当 $x>0$ 时, $f'(x)=3x^2$, 当 $x<0$ 时, $f'(x)=2x$, 当 $x=0$ 时,

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = 0$$
$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ 2x, & x<0 \end{cases}$$

上面的例子中函数的导函数都存在, 而且函数在定义域内也连续. 这个现象不是偶然的.

**定理 3.4** 若 $f(x)$ 在 $x_0$ 可导, 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续. 换句话说, 若函数在一点 $x_0$ 不连续, 则在 $x_0$ 处不可导.

**证明** 由已知条件, 极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

存在. 所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} (x-x_0) \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x \to x_0} (x-x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

或者说, 在 $x_0$ 的附近, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 有界, 即有 $r>0$ 和 $M>0$, 使

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right| < M \quad (0<|x-x_0|<r).$$

即当 $0<|x-x_0|<r$ 时有

$$|f(x)-f(x_0)| < M|x-x_0|,$$

命 $x \to x_0$, 也可得证. □

定理 3.4 的逆命题并不成立, 即连续函数未必可导.

**例 3.1.6** 函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续, 但是在 $x=0$ 不可导.

**证明** 当 $x=0$时

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1,$$
$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1.$$

所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导. 注意, 从图3.5 可以看出, 函数在 $x=0$ 有一个尖点, 即在 $x=0$ 不光滑, 所以没有切线.

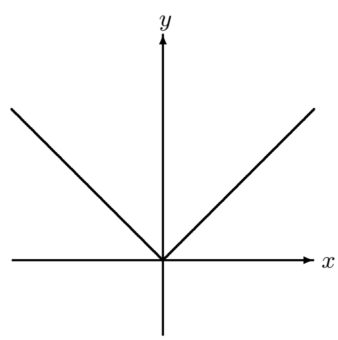


图 3.5

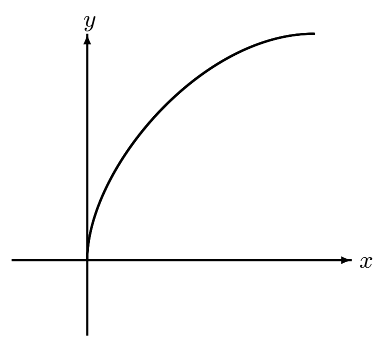


图 3.6

**例 3.1.7** 函数 $f(x)=x^{1/3}$ 在 $x=0$ 连续, 但不可导.

**证明** 在 $x=0$ 处

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^{2/3}}=+\infty.$$

这个例子说明函数的导数不存在的另一种形式, 即在一点有“斜率是无穷大”的切线. 此时 $f(x)=x^{1/3}$ 的图形在 $(0,0)$ 处的切线平行于 $y$ 轴(见图3.6).

以上两个例子中的连续函数只在一点不可导. 很容易举出连续函数在若干点不可导的例子. 更令人惊讶的是 Weierstrass 曾提出并构造了一个在实数轴上处处连续、但是处处不可导的函数! 这些例子说明, 函数的连续性和函数的可导性, 是有较大差别的. 对比连续和可导的定义, 我们也可以感到这种差别: 连续性只是定性地描述函数的一种局部性态, 即当自变量变化很小时, 函数对应的变化也很小. 而可导性则给出这种变化的一种定量的刻划, 即函数相应的变化与自变量的变化的比值的极限是存在有限的.

### 3.1.2 导数的四则运算

**定理 3.5** 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导, 则 $f(x)\pm g(x), f(x)g(x)$ 及 $\frac{f(x)}{g(x)}$ （当 $g(x)\neq 0$ 时）皆可导, 并有

1° $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$;

2° $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

3° $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

**证明** 关于 1°, 直接由导数的定义和极限的运算即可证得. 关于 2°, 利用下列恒等式

$$\begin{aligned}&f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)\\&= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)\end{aligned}$$

并根据可导函数的连续性, 得

$$\begin{aligned}&(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\end{aligned}$$

关于 3°, 首先注意到, 函数 $g(x)$ 在点 $x$ 处可导, 所以在这一点连续. 因此在 $x$ 处, 条件 $g(x)\neq 0$ 意味着在 $x$ 的附近 $g(x)$ 也不为零. 所以当自变量的增量 $\Delta x$ 非常小时, $g(x+\Delta x)\neq 0$, 这时有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}\right)\\&= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{g(x)g(x+\Delta x)}\\&= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\&= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

再由 2° 即得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'\\&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

□

**例 3.1.8** 设 $f(x)$ 可导, 则 $(cf(x))' = cf'(x)$, 其中 $c$ 是常数. 这个结论是显然的.

**例 3.1.9** 求 $f(x) = x^2(\sin x + \cos x)$ 的导数.

**解**

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2)'(\sin x+\cos x)+x^2(\sin x+\cos x)' \\
&= 2x(\sin x+\cos x)+x^2(\cos x-\sin x)
\end{aligned}
$$

**例 3.1.10**　求函数 $\tan x$ 和 $\cot x$的导数.

**解**

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x.
\end{aligned}
$$

类似可得

$$
(\cot x)' = -\csc^2 x.
$$

**例 3.1.11**　求函数 $\sec x$ 和 $\csc x$ 的导数.

**解**

$$
\begin{aligned}
(\sec x)' &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \\
&= \tan x\sec x.
\end{aligned}
$$

类似可得

$$
(\csc x)' = -\cot x\csc x.
$$

### 3.1.3　复合函数的求导法则

现在讨论复合函数的求导法则, 通常称为求导的**链式法则**.

**定理 3.6**　*设函数 $y=g(x)$ 定义在区间 $I$ 上, 函数 $z=f(y)$ 定义在区间 $J$ 上, 且 $g(I)\subset J$. 如果 $g(x)$ 在点 $x\in I$ 处可导, 而 $f(y)$ 在点 $y=g(x)$ 可导, 那么复合函数 $f\circ g$ 在点 $x$ 处可导, 且有:*

$$
(f\circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)
$$

**证明**　我们只考虑任意一点 $x_0$ 和 $g(x_0)$ 都不是所在区间的端点的情况（对于出现端点的情况, 只需在下面的证明中做一些简单修改）. 考察

$$
\begin{aligned}
\frac{f\circ g(x)-f\circ g(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} \\
&= \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.
\end{aligned}
$$

在上式中, 只有当 $g(x)-g(x_0)\neq 0$ 时才有意义. 但是当 $g(x)-g(x_0)=0$ 时, 上式右边的第一个分式的分子也是零 $f(g(x))-f(g(x_0))=0$, 所以我们约定这个分式为 $f'(g(x_0))$

不但是合理的, 而且上式的两端都等于零. 因此仍然成立. 根据这样的分析, 上式对任何情况都是成立的. 令 $x \to x_0$, 由于 $g(x)$ 连续, 所以 $g(x) \to g(x_0)$. 因此在上式中取极限, 就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f\circ g(x)-f\circ g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\ &= f'(g(x_0))g'(x_0)\end{aligned}$$

□

定理 3.6 也可以表示成:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

即, 如果 $z$ 是变量 $x$ 的复合函数, 中间变量为 $y$, 那么为了求 $z$ 对 $x$ 的微商 $\frac{dz}{dx}$, 可先求 $z$ 对中间变量 $y$ 的微商 $\frac{dz}{dy}$, 再求中间变量 $y$ 对 $x$ 的微商 $\frac{dy}{dx}$, 将所得结果相乘就得到 $\frac{dz}{dx}$.

对于多层复合函数, 由定理 3.6 也可得到类似的求导法则. 例如 $y=f(u)$ 对 $u$ 可导, $u=g(v)$ 对 $v$ 可导, $v=h(x)$ 对 $x$ 可导, 且后一个函数的值域包含在前一个函数的定义域中, 则复合函数 $y=f\circ g\circ h(x)$ 对 $x$ 也可导, 而且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}=f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x).$$

**例 3.1.12** 求 $\sin x^3$ 的导数.

**解** 记 $z=\sin x^3$, 中间变量 $y=x^3$, 则函数可以看成是 $z=\sin y$ 和 $y=x^3$ 的复合函数. 所以, 由求导的链式法则

$$(\sin x^3)'=(\sin y)'(x^3)'=\cos y\cdot 3x^2=3x^2\cos x^3.$$

从这个例子可以看出, 求复合函数的导数, 首先需要明确该函数是由哪些函数复合而成的, 也就是说, 要明确中间变量.

**例 3.1.13** 求 $z=\sin(\cos x^2)$ 的导数.

**解** 该函数是 $z=\sin u,\ \ u=\cos v,\ \ v=x^2$ 等三个函数复合而成的. 所以

$$(\sin(\cos x^2))'=(\sin u)'(\cos v)'(x^2)'=-2x\cos u\sin v=-2x\cos(\cos x^2)\sin x^2.$$

**例 3.1.14** 求 $z=(1-x)^9$ 的导数.

**解** 将 $(1-x)^9$ 用二项式定理展开, 应用 $(x^n)'=nx^{n-1}$ 以及导数的四则运算, 可以求出该函数的导数. 但是如果将该函数看成是 $z=y^9$ 和 $y=1-x$ 的复合, 则运算更为简单

$$((1-x)^9)'=(y^9)'(1-x)'=-9y^8=-9(1-x)^8.$$

**例 3.1.15** 求 $z=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$ 的导数.

**解** 该函数可以看成是 $z=y^3$ 和 $y=\frac{1+x}{1-x}$ 的复合函数. 所以

$$\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3\right]'=(y^3)'\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=3y^2\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$
$$=3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{6(1+x)^2}{(1-x)^4}.$$

**例 3.1.16** 设 $f(x)$ 在点 $x$ 处可导, 且 $f(x)\neq 0$, 则函数 $\ln|f|$ 在点 $x$ 可导, 且

$$(\ln|f|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

特别有

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x},\quad x\neq 0.$$

**解** 由于 $f(x)$ 在点 $x$ 可导, 所以连续, 因此存在一个含 $x$ 的区间 $(x-\delta,\ x+\delta)$, 使得函数 $f$ 在其上的取值保持同号. 当 $f$ 在 $(x-\delta,\ x+\delta)$ 上取正号时, $|f|=f$, 即 $\ln|f|=\ln f$, 它是函数 $z=\ln y,\ \ y=f(x)$ 的复合函数, 因此

$$(\ln|f|)'=(\ln y)'\cdot f'(x)=\frac{1}{y}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

当 $f$ 在 $(x-\delta,\ x+\delta)$ 上取负号时, $|f|=-f$, 所以 $\ln|f|=\ln(-f)$, 它是函数 $z=\ln y,\ \ y=-f(x)$ 的复合函数, 此时

$$(\ln|f|)'=(\ln y)'\cdot(-f'(x))=\frac{1}{y}\cdot(-f'(x))=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

纵上所述, 即有本例子的结果.

### 3.1.4 反函数的求导法则

我们知道, 如果函数 $f$ 在区间上连续, 且有反函数 $f^{-1}$, 则 $f$ 必须严格单调, 而且反函数 $f^{-1}$ 在其定义域上也连续. 如果函数 $f$ 可导, 自然要问, 其反函数是否也可导, 如果答案是肯定的, 那么如何计算反函数的导数?

**定理 3.7** 设 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上连续, 且有反函数 $f^{-1}$, 如果 $f$ 在点 $x_0$ 处可导, 且 $f'(x_0)\neq 0$. 则定义在区间 $J=f(I)$ 的反函数 $f^{-1}$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 也可导, 且

$$(f^{-1})'(y_0)f'(x_0)=1$$

或写成

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

**证明** 我们只对 $x_0$ 以及 $y_0$ 不是区间端点的情况进行证明. 对于端点, 只需将下列证明作一点修改即可.

从定义出发, 要证明反函数 $f^{-1}(y)$ 的可导性, 就看

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$$

的极限是否存在. 因为 $x=f^{-1}(y)$, $x_0=f^{-1}(y_0)$, 所以

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)^{-1}$$

因为反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也连续，所以当 $y\to y_0$ 时, $x\to x_0$, 在上式两边令 $y\to y_0$ 即得定理的结论. □

注记

1° 注意到, 在同一直角坐标系中, 函数 $y=f(x)$ 和反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像相同. 于是对于图像上一点 $(x,y)$ 处的切线 $L$, 从函数 $y=f(x)$ 的角度看, 其斜率就是 $L$ 与自变量所在的数轴 $x$ 轴正向的夹角$\alpha$ 的正切 $\tan\alpha$, 从 $x=f^{-1}(y)$ 的角度看 $L$ 的斜率就是 $L$ 与自变量 $y$ 所在的数轴 $y$ 轴正向的夹角$\beta$（$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$）的正切 $\tan\beta$ , 两者互为倒数.

2° 如果 $f'(x_0)=0$, 即曲线在这一点 $(x_0,y_0)$ $(y_0=f(x_0))$ 的切线平行于 $x$ 轴, 因此从 $x=f^{-1}(y)$ 的角度看, 切线与自变量所在的数轴 $y$ 轴的斜率是无穷大. 所以 $f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 不可导（或者说导数是无穷大）. 例如 $y=f(x)=x^3$, 这是一个严格单调增的连续函数, 其反函数是 $x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$. 因为 $f'(0)=0$, 所以 $f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 不可导.

3° 一般来说, 习惯上我们用 $x$ 表示一个函数的自变量, $y$ 表示因变量. 所以在不会造成混淆的情况下, 我们通常记 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$. 在这个记号下, 函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 图像在$Oxy$ 平面上关于直线 $x=y$ 对称.

**例 3.1.17** 求反三角函数的导函数.

**解** $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$, $|y|<\frac{\pi}{2}$ 的反函数, 而 $x=\sin y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内可导, 且 $(\sin y)'=\cos y\neq 0$, 所以在对应的区间 $(-1,1)$ 内, $y=\arcsin x$ 可导, 且

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同样可得

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(-1,1).$$

现在考虑函数 $y=\arctan x$, 它是 $x=\tan y$ 的反函数, 因为在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内,

$(\tan y)' = \sec^2 y \neq 0$, 所以

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2},\ |x| < +\infty.$$

类似有

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2},\quad |x| < +\infty.$$

**例 3.1.18**　指数函数 $y = a^x$ 的导函数. 这里 $a > 0$ 且 $a \neq 1$.

**解**　指数函数 $y = a^x$ 是对数函数 $x = \log_a y$ 的反函数, 而在区间 $(0,\ +\infty)$ 上, $(\log_a y)' = \frac{1}{y\ln a} \neq 0$, 所以反函数 $y = a^x$ 在对应的区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 内可导,

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = y\ln a = a^x \ln a,\quad x \in (-\infty,\ +\infty).$$

特别, 当 $a = e$ 时, 有

$$(e^x)' = e^x,\quad x \in (-\infty,\ +\infty),$$

即以 $e$ 为底的指数函数的导函数等于其自身. 事实上, 这是该指数函数的特征性质. 以后我们将看到, 满足这种性质的函数一定正比于以 $e$ 为底的指数函数, 即如果可导函数 $f$ 满足 $f' = f$, 则 $f(x) = Ce^x$, 其中 $C$ 是任意常数. 从这个角度看, 以 $e$ 为底的指数函数 $e^x$ 以及他的反函数（以 $e$ 为底的对数函数）$\ln x$ 具有一定的特殊地位是可以理解的.

**例 3.1.19**　设 $y = x^\alpha$, $(x > 0)$, 这里 $\alpha$ 是任意实数. 证明 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

**证明**　当 $\alpha$ 是自然数（包括 $\alpha = 0$）时, 我们已经根据函数导数的定义给予了证明. 当 $\alpha \neq 0$ 时（当然也包括正的自然数）, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, 它是函数 $y = e^u$ 和函数 $u = \alpha \ln x$ 的复合函数. 所以

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \frac{de^u}{du}\frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

从以上两个例子可知, 如果 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, 函数 $u = u(x)$ 在点 $x$ 处可导, 函数 $y = a^{u(x)}$ 是 $y = a^u$ 和 $u = u(x)$ 的复合函数, 所以在 $x$ 处可导, 且导函数是 $(a^u)' = a^{u(x)}u'(x)\ln a$.

如果 $\alpha$ 是任意常数, 函数 $v = v(x)$ 在 $x$ 处可导, 且 $v(x) > 0$, 则 $y = v^\alpha(x)$ 在 $x$ 处也可导, 且导数是 $(v^\alpha)' = \alpha v^{\alpha-1}v'(x)$. 综合这些结论, 我们有

**例 3.1.20**　设 $u(x), v(x)$ 可导, 且 $v(x) > 0$, 则函数 $y = v(x)^{u(x)}$ 可导, 其导数是

$$(v(x)^{u(x)})' = v(x)^{u(x)}\left(u'(x)\ln v(x) + \frac{u(x)v'(x)}{v(x)}\right).$$

**证明**　因为 $y = e^{u(x)\ln v(x)}$ 是函数 $y = e^w,\ w = u(x)\ln v(x)$ 的复合, 所以 $y$ 在 $x$ 处

的导数是

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{u(x)\ln v(x)}(u\ln v)'(x) \\ &= v(x)^{u(x)}\left(u'(x)\ln v(x) + \frac{u(x)v'(x)}{v(x)}\right). \end{aligned}$$

本题也可采用下面的方法: 在 $y = u^v$ 的两边取对数, 得

$$\ln y(x) = u(x)\ln v(x)$$

求该式两端对 $x$ 的导数, 有

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = u'(x)\ln v + u(x)\frac{v'(x)}{v(x)}.$$

由此也给出了结果.

**例 3.1.21**　求 $y = xe^x$ 的反函数的导数.

**解**　这里不必将反函数解出来, 而是直接将 $x$ 看做是 $y$ 的函数并对 $y$ 进行求导得

$$1 = x'e^x + xx'e^x$$

解得

$$x' = \frac{e^{-x}}{1+x}$$

注记

1°　两边取对数的方法具有一定的普适性. 因为对数的功效是将积化为和. 对于某些涉及乘积 ( 或幂 ) 的函数来说, 取对数再求导往往能带来便利.

2°　对于由方程 $\varphi(x,y) = 0$ 给出的反函数或隐函数,只要认准了一个变量是另一个变量的函数, 在方程两边直接对自变量求导即可. 有关详细内容将在第二册中介绍.

### 3.1.5　基本初等函数的导数

至此, 我们已经掌握了六类基本初等函数的导数公式, 汇总如下:

$(c)' = 0$ ($c$为常数);

$(\sin x)' = \cos x$;　　$(\cos x)' = -\sin x$;

$(\tan x)' = \sec^2 x$;　　$(\cot x)' = -\csc^2 x$;

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　　$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$;　　$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

$(e^x)' = e^x$;　　$(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

$(a^x)' = a^x \ln a$;　　$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$;

$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$;

我们看到基本初等函数的导函数都是初等函数.

由上面公式, 并运用求导的四则运算、复合函数求导(链式法则)以及反函数求导, 不但可以断定初等函数在其定义域内是可导的, 而且可以求出它们的导数.

### 3.1.6 高阶导数

设 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 可导, 它的导函数 $y'=f'(x)$ 也称为函数 $f$ 的一阶导数. 如果 $y'=f'(x)$ 作为 $x$ 的函数, 仍然可导, 则称之为函数的二阶导数, 并记为 $f''(x)=(f'(x))'$. 以此类推, 如果函数 $f(x)$ 的第 $n-1$ 阶导函数仍然可导, 则其导数称为 $f(x)$ 的 $n$ 阶导数, 并记为

$$y^{(n)}(x),\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^n y}{dx^n}(x),\quad \text{或}\quad \frac{d^n f}{dx^n}(x).$$

显然有

$$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))' \quad \text{或}\quad \frac{d^n f}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right).$$

高阶导数仍然有物理和几何上的意义, 例如设质点运动的位移作为时间 $t$ 函数为 $s=s(t)$, 则其一阶导数为速度 $v(t)=s'(t)$, 二阶导数为加速度 $a(t)=v'(t)=s''(t)$. 从几何上看，曲线的一阶导数为切线, 二阶导数用来刻画曲线的弯曲程度(见§3.5.2).

从导数的定义看, 一个函数的导函数不必可导, 甚至不必连续(见本节习题中的第 12 题). 因此对函数求导的阶要求越高, 对函数的限制越多. 以 $f(x)=|x|$ 这个例子看, 该函数在 $x=0$ 不可导, 函数的图象在此有一个尖点, 不光滑. 因此一个函数可导, 通常形象地称函数光滑. 函数具有越高的高阶导数, 则函数就越“光滑”. 因此, 一般而言, 函数的性态也就越好.

如果两个函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都具有 $n$ 阶导数, 那么显然有

$$(u(x)+v(x))^{(n)}=u^{(n)}(x)+v^{(n)}(x).$$

但是,对于它们乘积的高阶导数, 则有

**定理 3.8** (Leibniz 公式) *若 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都有 $n$ 阶导数, 则*

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

**证明** 对 $n$ 用归纳法. $n=1$ 时是显然的, 设当 $n\geqslant 1$ 时有

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

则

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}\right) \\ &= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} \\ &= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{(n+1-k)} v^{(k)} + uv^{(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)}.\end{aligned}$$

由归纳法可知, 定理成立. □

**例 3.1.22** 设 $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一个 $n$ 次多项式, 求它的各阶导数.

**解** 我们有

$$P_n'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

其结果是一个 $n-1$ 次多项式, 从而多项式的导函数比原多项式次数降低了一次. 继续求导, 当求到第 $k$ 次 ( $1 \leqslant k \leqslant n$ ) 时, 其结果是一个 $n-k$ 次多项式

$$P_n^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} + \cdots + k! a_k.$$

特别当 $k = n$ 次时, 其结果是一个常数

$$P_n^{(n)}(x) = n! a_n$$

而当求导的次数高于 $n$次 ( $k \geqslant n+1$ ) 时, 其结果即为零

$$P_n^{(k)}(x) = 0.$$

所以多项式经过多次求导, 越求次数越来越低, 直至为零.

对于多项式, 我们还可以证明这样一个结论:

如果 $x_0$ 是多项式 $P_n(x)$ 的 $r$ 次重根, 即 $P_n(x)$ 可以分解成

$$P_n(x) = (x - x_0)^r Q_{n-r}(x),$$

其中 $Q_{n-r}(x)$ 是一个 $n-r$ 次多项式, 且 $Q_{n-r}(x_0) \neq 0$. 则 $P_n(x)$ 满足条件

$$P_n(x_0) = 0, \quad P_n'(x_0) = 0, \quad \cdots, \quad P_n^{(r-1)}(x_0) = 0, \quad P_n^{(r)}(x_0) \neq 0.$$

读者可应用 Leibniz 公式和多项式求导的特点给予证明. 事实上, 上述条件和利用因式分解定义根的重数是等价的. 但该条件可以推广到定义任意一个可导函数的零点的重数. 即对于函数 $f(x)$, 如果

$$f(x_0)=0,\quad f'(x_0)=0,\quad \cdots,\quad f^{(r-1)}(x_0)=0,\quad f^{(r)}(x_0)\neq 0.$$

则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的 $r$ **重零点**.

**例 3.1.23** 求 $f(x)=e^{ax},\ x\in(-\infty,+\infty)$ 的各阶导数, 其中 $a$ 是常数.

**解** $(e^{ax})'=ae^{ax},\ (e^{ax})''=(ae^{ax})'=a^2e^{ax},\ \cdots$, 一般有

$$(e^{ax})^{(n)}=a^ne^{ax}$$

特别

$$(e^x)^{(n)}=e^x$$

**例 3.1.24** 求 $f(x)=\ln(1+x),\ x\in(-1,+\infty)$ 的 $n$ 阶导函数.

**解** 用归纳法可证

$$\frac{d^n\ln(1+x)}{dx^n}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\quad n=1,2,\cdots$$

特别

$$\left.\frac{d^n\ln(1+x)}{dx^n}\right|_{x=0}=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

**例 3.1.25** 求 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 $n$ 阶导函数, $x\in(-\infty,+\infty)$.

**解** 用数学归纳法易证

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad (\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad n=1,2,\cdots$$

特别, 在 $x=0$ 处,

$$(\sin x)^{(n)}|_{x=0}=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{如 } n \text{ 为偶数}\\ (-1)^{(n-1)/2}, & \text{如 } n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

$$(\cos x)^{(n)}|_{x=0}=\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^{n/2}, & \text{如 } n \text{ 为偶数}\\ 0, & \text{如 } n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

**例 3.1.26** 求 $(1+x)^\alpha,\quad x\in(-1,+\infty)$ 的 $n$ 阶导函数.

**解** 由幂函数求导法则易知

$$((1+x)^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\quad n=1,2,\cdots$$

特别

$$((1+x)^\alpha)^{(n)}\Big|_{x=0}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1),\quad n=1,2,\cdots$$

**例 3.1.27** 设 $y=\arctan x$, 求$y^{(n)}(0)$.

**解** 由 $y'=\frac{1}{1+x^2}$ 可知, 函数 $\arctan x$ 有任意阶导数, 且

$$(1+x^2)y'=1.$$

由 Leibniz 公式得到

$$(1+x^2)y^{(n)}+2(n-1)xy^{(n-1)}+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}=0.$$

将 $x=0$ 代入就得到递推公式

$$y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0).$$

由于 $y(0)=0,\ y'(0)=1$. 就得到

$$y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!,\quad y^{(2k)}(0)=0,\quad (k=0,1,2\cdots).$$

### 3.1.7 参数方程表示函数的导数

在直角坐标系下，设

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\qquad t\in[\alpha,\beta]$$

或者写成向量形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x(t),\ y(t)),\ t\in[\alpha,\beta]$$

对其连续和导数的定义, 与通常无异, 即 $x$ 和 $y$ 作为参变量 $t$ 的函数分别定义连续和可导. 如果从向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 角度考虑, 只是用向量的长度或者说平面上点与点之间的距离

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

代替绝对值（直线上点与点之间的距离）即可. 例如在定义连续性时，只要用$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}(t_0)|<\varepsilon$ 代替通常的 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 即可. 这样定义的连续性与分别对 $x(t)$ 和 $y(t)$ 定义的连续性是等价的. 而对于向量 $\boldsymbol{r}(t)$ 导数的直接定义如下

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{r}'(t)$$

注意到上式左右两边分别是向量, 因此, 极限存在等价于每个分量相应的极限存在. 因为 $\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$ 是曲线的割线向量, 因此, 当 $\Delta t\to 0$ 时, 其极限 $\boldsymbol{r}'(t)$ 就是曲线在一点 $(x(t),\ y(t))$ 的切向量 $\boldsymbol{r}'(t)=(x'(t),\ y'(t))$. 如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 表示的是质点在 $t$ 时刻所处的位置

向量, 则 $\boldsymbol{r}'(t)$ 就是质点运动的速度向量. 从这个角度看, 参数方程表示的函数, 无论是刻画曲线, 还是刻画质点的运动都更加直观, 当然, 并不是所有关于函数导数的性质都可以推广到向量值函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 上来, 例如下一节将证明的函数的微分中值定理, 对 $\boldsymbol{r}(t)$ 就不在成立.

对于平面上参数方程表示的函数, 如果在一个局部可以表示成 $y = y(x)$, 那么从 $x$, $y$ 对参变量 $t$ 的导数, 可以推导出 $y$ 对 $x$ 的导数, 具体过程如下：

设参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [\alpha, \beta]$$

表示的函数可导. 如果 $x'(t) \neq 0$, 且 $x = x(t)$ 存在可导的反函数 $t = t(x) = x^{-1}(x)$，代入 $y = y(t) = y(t(x))$, 直接对 $x$ 求导得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

利用 $x = x(t)$ 的反函数求导

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dx^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{x'(t)}, \quad t = x^{-1}(x)$$

得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad t = x^{-1}(x)$$

从几何上看, 曲线切线的斜率正是切向量两个分量之比. 如果继续求导, 得二阶导数

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{1}{x'(t)} \\ &= \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}. \end{aligned}$$

## 习题 3.1

1. 讨论下列函数在点 $x=0$ 处是否可导.

(1) $f(x)=|\sin x|$;

(2) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geqslant 0\\ 1, & x<0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0;\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x\geqslant 0\\ x+1, & x<0;\end{cases}$

(5) $f(x)=|x|e^x$;

(6) $f(x)=|x^3|$.

2. 求 $a$, $b$ 的值, 使下列函数处处可导.

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1\\ ax+b, & x>1;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x<0\\ ax+b, & x\geqslant 0.\end{cases}$

3. 设函数 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 记 $f(x)=(x-a)g(x)$. 证明 $f'(a)=g(a)$.

4. 若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=(\alpha+\beta)f'(x_0)\ (\alpha,\beta \text{ 为常数}).$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)\neq 0$, 证明, 函数 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 也可导. 若 $f(a)=0$, 结论是否仍成立?

6. 求下列函数的导数.

(1) $y=\frac{3x^2+9x-2}{5x+8}$;

(2) $y=\sin x\tan x+\cot x$;

(3) $y=x^2\log_3 x$;

(4) $y=\frac{x}{1-\cos x}$;

(5) $y=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$;

(6) $y=\frac{(1+x^2)\ln x}{\sin x+\cos x}$;

(7) $y=(x^2+1)(3x-1)(1-x^3)$;

(8) $y=x^3\cdot\tan x\cdot\ln x$.

7. 求下列函数的导数.

(1) $y = x\sqrt{1-x^2}$;

(2) $y = \sqrt[3]{1+\ln^2 x}$;

(3) $y = \arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

(4) $y = (\sin x + \cos x)^3$;

(5) $y = (\sin x^3)^3$;

(6) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(7) $y = \sin[\sin(\sin x)]$;

(8) $y = \sin[\cos^5(\arctan x^3)]$;

(9) $y = \left(\frac{x^3-1}{x^4+1}\right)^3$;

(10) $y = x\sqrt{1+x^2}\sin x$;

(11) $y = e^{\sqrt{x^2+1}}$;

(12) $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)]$;

(13) $y = x^{x^x} + x^x + x^{2^x}$;

(14) $y = (\ln x)^{e^x}$;

(15) $y = (\tan x)^{\cot x}$;

(16) $y = 10^x \cdot (\sin x)^{\cos x}$;

(17) $y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^5(x+4)^{1/2}}$;

(18) $y = \frac{x^2}{1-x}\sqrt{\frac{x+1}{1+x+x^2}}$.

8. 设 $f(x) = x^3$, 求 $f'(x^2)$ 与 $[f(x^2)]'$.

9. 设 $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $g(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$, 求 $f'[g(x)]$, $[f(g(x))]'$.

10. 设 $f(x)$ 处处可微, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(1) $y = f(x^3)$;

(2) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$;

(3) $y = f(e^x + x^e)$;

(4) $y = \sin[f(\sin f(x))]$;

(5) $y = f\{f[f(\sin x + \cos x)]\}$;

(6) $y = f(e^x)e^{f(x)}$.

11. 求下列函数的导数.

(1) $y = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

(2) $y = |1-2x|\sin x$.

12. 设 $n$ 为自然数, 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 证明

(1) 当 $n = 1$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处不可导;

(2) 当 $n = 2$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 但导函数在 $x = 0$ 处不连续 (事实上, 在这一点有第二类间断);

(3) 当 $n \geqslant 3$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且导函数在 $x = 0$ 处连续.

13. 证明, 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上处处可导, 但导函数在这个区间上无界.

14. 求下列函数的反函数的微商.

(1) $y = xe^x$; (2) $y = \arctan\frac{1}{x}$;

(3) $y = 2x^{-x} - e^{-2x}$; (4) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$.

15. 证明, 可微的偶函数的导数为奇函数; 而可微的奇函数的导数为偶函数.

16. 证明, 可微的周期函数的导数仍是周期函数.

17. 求下列各式的和.

(1) $P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$;

(2) $Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$;

(3) $R_n = \cos 1 + 2\cos 2 + \cdots + n\cos n$.

18. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y = e^{-x^2}$; (2) $y = x^2 2^x$;

(3) $y = (1+x^2)\arctan x$; (4) $y = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0 \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$

19. 设函数 $f(x)$ 处处有三阶导数, 求 $y'', y'''$.

(1) $y = f(x^2)$; (2) $y = f(e^x + x)$.

20. 设 $f(x) = x^n|x|$ ($n$为自然数), 证明 $f^{(n)}(0)$ 存在, 但$f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

21. 证明, 如果 $x_0$ 是多项式 $P_n(x)$ 的 $r$ 次重根, 即 $P_n(x)$ 可以分解成

$$P_n(x) = (x-x_0)^r Q_{n-r}(x),$$

其中 $Q_{n-r}(x)$ 是一个 $n-r$ 次多项式, 且 $Q_{n-r}(x_0) \neq 0$. 则 $P_n(x)$ 满足条件

$$P_n(x_0) = 0, \quad P_n'(x_0) = 0, \quad \cdots, \quad P_n^{(r-1)}(x_0) = 0, \quad P_n^{(r)}(x_0) \neq 0.$$

22. 求下列函数的高阶微商.

(1) $(x^2e^x)^{(n)}$; (2) $[(x^2+1)\sin x]^{(n)}$;

(3) $\left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)}$; (4) $(\sin x \cdot \cos x)^{(n)}$.

23. 求曲线 $y = \cos x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程与法线方程.

24. 证明: 双曲线 $xy = 1$ 上任一点处的切线, 与两坐标轴构成的三角形的面积为定值.

25. 有一底半径为 $r$ 厘米, 高为 $h$ 厘米的正圆锥容器. 现以 $a$ 厘米$^3$/秒的速度自顶部向其内注水, 求水面上升的速度.

26. 水自高为 18 厘米, 底半径为 6 厘米的圆锥形漏斗流入直径为 10 厘米的圆柱形筒中. 已知水在漏斗中深度为 12 厘米时水平面下降的速率为 1 厘米/分. 试求圆柱形筒中水平面上升的速度.

## §3.2 微分

### 3.2.1 微分的定义

设 $y=f(x)$ 在给定一点 $x$ 的附近有定义. 如果对自变量增加一个改变量 $\Delta x$, 则函数值 $y$ 相应的改变量就是 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$. 两个改变量 $\Delta x$ 和 $\Delta y$ 之间因函数 $f$ 和点 $x$ 而具有因果关系. 也就是说, 对于函数 $f$, 当给定一点$x$后, 在这点的改变量 $\Delta x$, 对应一个函数值的改变量 $\Delta y$. 如果这种因果关系在 $\Delta x=0$ 附近近似于线性关系,

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+o(\Delta x),\quad (\text{当 } \Delta x\to 0 \text{ 时})$$

其中 $A=A(x)$ 与 $x$ 有关(当然与 $\Delta x$ 无关), 则称 $f$ 在 $x$ **可微**, 线性部分 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在 $x$ 处的**微分**, 记为

$$dy=A\Delta x,\quad \text{或}\quad df(x)=A\Delta x.$$

这时

$$\Delta y=dy+o(\Delta x),$$

也就是说, $dy$ 是函数改变量 $\Delta y$ 在 $\Delta x\to 0$ 时的主要部分(另一部分是当 $\Delta x$ 的高阶无穷小量).

注意到, 如果函数 $f$ 在 $x$ 可微, 即 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$$

也就是, 函数在这一点可导. 反之, 如果 $f$ 在 $x$ 处可导, 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-f'(x)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))-f'(x)\Delta x}{\Delta x}=0.$$

这说明当 $\Delta x\to 0$ 时$\Delta y-f'(x)\Delta x$ 是比 $\Delta x$ 更高阶的无穷小量, 所以 $\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$, 其中 $A=f'(x)$. 因此函数在 $x$ 处可微. 据此分析, 我们有

**定理 3.9** *$y=f(x)$ 在 $x$ 可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在 $x$ 可导, 这时 $dy=f'(x)\Delta x$. 因此函数在一点可导有时也称为在一点可微.*

这里再次强调函数 $y=f(x)$ 在一点 $x$ 的微分是一个与 $x$ 相关的线性函数, 它将 $\Delta x$ 映到 $f'(x)\Delta x$, 而不是另一个 $x$ 的函数. 对于特别的函数 $y=f(x)=x$ , 则 $f'(x)=1$,

$$dy=dx=(x)'\Delta x=\Delta x.$$

即自变量的微分与改变量相等. 于是函数 $y=f(x)$ 在点 $x$ 的微分又可记成

$$dy=df(x)=f'(x)dx.$$

现在, $dx$ 与 $dy$ 都有完全确定的意义, 它们分别是自变量 $x$ 和因变量 $y$ 的微分, 并且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x).$$

即函数在一点的导数是其因变量的微分和自变量的微分的商. 以往我们把 $\frac{dy}{dx}$ 当作一个完整记号来表示微商, 而现在可以将它看成是“两个微分的商”. 这也是“微商”这个名词的来由.

如图 3.7, 过 $y=f(x)$ 的图象上一点 $(x,f(x))$ 作切线 $L$. 易知, 函数图象纵坐标的改变量(即函数的改变量)是 $\Delta y$, 而 $L$ 上点的纵坐标的改变量就是函数 $y=f(x)$ 在点 $x$ 处的微分 $dy=f'(x)\Delta x$. 由于 $|\Delta y-dy|=o(\Delta x)$, 故当 $|\Delta x|$ 很小时, 函数在点 $x$ 的改变量与切线的改变量的差, 相比自变量的改变量 $\Delta x$ 来说, 是高阶无穷小. 因此在点 $x$ 附近, 可以用过 $(x,f(x))$ 的切线代替函数描述的曲线. 这就是微积分中“以直代曲”的基本思路.

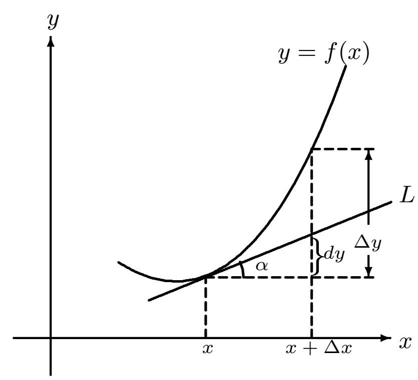


图 3.7

顺便指出, 过曲线上一点 $(x_0,y_0)$, $y_0=f(x_0)$ 的切线方程是

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

### 3.2.2 微分的运算与一阶微分形式的不变性

由微分的表达式 $dy=f'(x)dx$ 以及基本初等函数的求导公式, 可以对应地给出基本初等函数的微分公式:

$$\begin{array}{ll}
d(c)=0\ (c\text{为常数}); & \\
d\sin x=\cos x\,dx; & d\cos x=-\sin x\,dx; \\
d\tan x=\sec^2 x\,dx; & d\cot x=-\csc^2 x\,dx; \\
d\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx; & d\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx; \\
d\arctan x=\frac{1}{1+x^2}\,dx; & d\mathrm{arccot}\, x=-\frac{1}{1+x^2}\,dx; \\
de^x=e^x\,dx; & d\ln x=\frac{1}{x}\,dx; \\
da^x=a^x\ln a\,dx; & d\log_a x=\frac{1}{x\ln a}\,dx; \\
dx^\mu=\mu x^{\mu-1}\,dx; &
\end{array}$$

此外, 由于微分和导数的对应关系, 我们不难得到下列定理.

**定理 3.10** 设函数 $u$ 和 $v$ 在 $x$ 处可微, 则函数 $cu$, $u \pm v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$ 在 $x$ 处可微, 且有

$d(cu) = cdu$, 其中 $c$ 为常数;

$d(u \pm v) = du \pm dv$;

$d(uv) = vdu + udv$;

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$.

以上公式和法则都是微分定义和求导运算的直接结果.

**定理 3.11** 设 $y = \varphi(x)$ 定义在区间 $I$ 上, $z = f(y)$ 定义在一个包含 $\varphi(I)$ 的区间 $J$ 上. 如果 $y = \varphi(x)$ 在 $x$ 上可微, $z = f(y)$ 在 $y = \varphi(x)$ 处可微, 则复合函数 $z = f(\varphi(x))$ 在 $x$ 处也可微, 并有

$$dz = (f \circ \varphi)' dx = f'(y) dy,$$

其中 $dy = \varphi'(x)dx$ 是函数 $y = \varphi(x)$ 在 $x$ 处的微分.

**证明** 由微分表达式和复合函数求导的链式法则, 有

$$\begin{aligned} dz &= (f(\varphi(x)))' dx = f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx \\ &= f'(y)dy. \end{aligned}$$

定理 3.11 说明, 从形式上看无论 $y$ 是自变量还是中间变量, $z = f(y)$ 的微分具有相同的形式 $df(y) = f'(y)dy$. 这种性质称为**一阶微分形式不变性**.

**例 3.2.1** 求 $y = e^{-ax}\sin bx$ 的微分, 其中 $a$, $b$ 都是常数.

**解** 利用微分的乘法运算和一阶微分形式的不变性, 有

$$\begin{aligned} dy = d(e^{-ax}\sin bx) &= e^{-ax}d(\sin bx) + (\sin bx)de^{-ax} \\ &= e^{-ax}(\cos bx)d(bx) + (\sin bx)e^{-ax}d(-ax) \\ &= be^{-ax}(\cos bx)dx - a(\sin bx)e^{-ax}dx \\ &= e^{-ax}\big(b\cos bx - a\sin bx\big)dx. \end{aligned}$$

**例 3.2.2** 求函数 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ 的微分, 其中 $a$ 是常数.

**解**

$$\begin{aligned}
d\left(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right) &= \frac{d(x+\sqrt{x^2+a^2})}{x+\sqrt{x^2+a^2}} \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(dx+\frac{d(x^2+a^2)}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx.
\end{aligned}$$

由此还可以得到该函数的导数

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

**例 3.2.3** 设 $0<q<1$, 函数 $y=y(x)$ 满足下列方程

$$y-x-q\sin y=0.$$

求函数 $y=y(x)$ 的导数.

**解** 我们不能从方程中解出 $y$ 的显示表示, 因此为了求 $y'(x)$, 在上列等式的两端对 $x$ 求微分, 并利用一阶微分形式的不变性, 得

$$dy-dx-q\cos y dy=0.$$

故

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-q\cos y}.$$

## 习题 3.2

1. 设 $y = x^2 + x$, 计算在 $x = 1$ 处, 当 $\Delta x = 10, 1, 0.1, 0.01$ 时, 相应的函数的改变量 $\Delta y$ 和函数的微分 $dy$, 并观察差 $\Delta y - dy$ 随 $\Delta x$ 减小的变化情况.

2. 求下列函数的微分

(1) $y = \ln\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)$;　　(2) $\sin x - x\cos x$;

(3) $y = \arccos\frac{1}{|x|}$;　　(4) $y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$;

(5) $y = 5^{\sqrt{\arctan x^2}}$;　　(6) $y = \tan^2(1+2x^2)$;

(7) $y = e^{-x}\cos(3-x)$;　　(8) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. 对下列函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(1) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \varphi\cos\varphi, \\ y = \varphi\sin\varphi; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x = \cos^3\varphi, \\ y = \sin^3\varphi. \end{cases}$

4. 求下列曲线在已知点处的切线方程与法线方程.

(1) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处;　　(2) $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^2} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处.

## §3.3 微分中值定理

从本节开始到本章结束, 我们将通过函数 $f$ 的导数, 来进一步了解函数本身的基本性质. 我们注意到, 导数是函数的差商

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

的极限状态, 而不是差商在某个 $\Delta x$ 处的值. 差商是一个涉及函数在 $x$ 以及 $x$ 周边的值（从物理上看就是某段时间内的平均速度）, 反映的是一种“整体”性质, 而导数只是函数在一点 $x$ 的“局部”性质（物理上看就是在某时刻的瞬时速度）. 我们的目的就是要通过函数导数的局部性质, 推导出函数整体的性质. 但这个过程并不显然.

以一个极其简单的函数为例. 设函数 $f(x)=c$ 是一个常值函数, 则它在任何一点 $x$ 的导数 $f'(x)=0$. 反之, 如果已知一个函数 $f$ 在每一点的导数为零, 是否推出这个函数就一定是一个常数? 答案应当是肯定的. 因为从几何上看, 如果一个函数在每一点的切线都是水平的, 则这个函数的图象本身也应当是水平的. 从物理上看, 如果一个质点的运动速度始终为零, 则这个物体一定是静止的. 但是, 抽象地从极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

推断函数 $f$ 是一个常数, 却不是一件显然的事情.

### 3.3.1 Fermat 定理和 Rolle 定理

**定义 3.12** 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义, 如果对其中的任一点 $x$, 都有

$$f(x_0)\geqslant f(x), \quad 或 \quad f(x_0)\leqslant f(x),$$

那么称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的局部极大值（或极小值）, $x_0$ 称为 $f(x)$ 的一个极大值点（或极小值点）. 极大值和极小值统称为极值, 极大值点和极小值点统称为极值点.

注意, 极值或极值点的定义本身, 与函数是否连续, 是否可导无关.

**定理 3.13** (Fermat 定理) 设函数 $f(x)$ 在其定义区间 $I$ 的一个内点（即不是端点）$x_0$ 处取到局部极值, 若函数在这一点可导, 则必有 $f'(x_0)=0$.

**证明** 不妨设函数在 $x_0$ 取到极大值. 根据定义, 存在一个 $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset I$, 使得

$$f(x_0+h)-f(x_0)\leqslant 0$$

这里为了方便, 记 $h=\Delta x$ . 只要改变量 $h$ 满足 $|h|<\delta$. 于是差商

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geqslant 0, \quad 当\ h<0\ 时$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0, \quad 当\ h>0\ 时$$

又因为函数在 $x_0$ 可导, 所以在上列两式中分别令 $h \to 0^-$ 和 $h \to 0^+$, 有

$$f'_-(x_0) \geqslant 0, \quad f'_+(x_0) \leqslant 0$$

故 $f'(x_0)=0$. 当 $f$ 在 $x_0$ 取到极小值的情况, 可类似证明. □

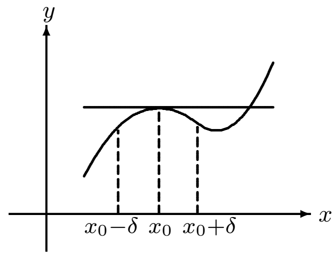


图 3.8

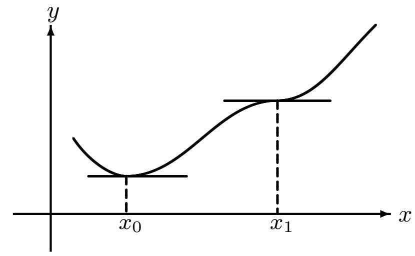


图 3.9

从几何上看, 函数 $f$ 在一点 $x_0$ 取到极大 (极小) 值, 如果函数在此点的切线存在, 那么在这点的切线是水平的 ( 平行于 $x$ 轴 ).

*注记　定理 3.13 的逆并不成立, 也就是说, 即使函数 $f$ 在一内点的导数为零, 未必这一点是极值点, 最简单的反例是 $f(x)=x^3$, $x \in [-1,1]$, 显然, $f'(0)=0$, 但是 $x=0$ 不是该函数的极值点. 即便如此, 定理 3.13 提供了这样的途径, 即由导数的信息, 推断函数的有关 (极大、极小) 值是否存在? 通常, 称导数为零的点为函数的* ***驻点****, 因此想了解函数的极值点, 只要在驻点中作进一步讨论即可 (我们随后将进行详细讨论).*

**定理 3.14** (Rolle 定理)　*设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 内可导, 而且 $f(a)=f(b)$, 则必有 $\xi \in (a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.*

**证明**　根据闭区间 $[a,b]$ 上连续函数一定有最大值和最小值的实事, 如果最大值和最小值中至少有一个在 $(a,b)$ 内部一点 $\xi$ 取得, $\xi$ 当然也是极值点. 由定理 3.13, $f'(\xi)=0$. 反之, 如果最大值和最小值只能在端点 $a$ 和 $b$ 处取得, 而 $f(a)=f(b)$, 即最大值和最小值相等, 函数只能是常值函数, 此时函数的导函数在任何一点都为零. □

读者可自行举例说明, Rolle 定理中的条件: 闭区间上连续、开区间上可导、端点等值, 三者缺一不可.

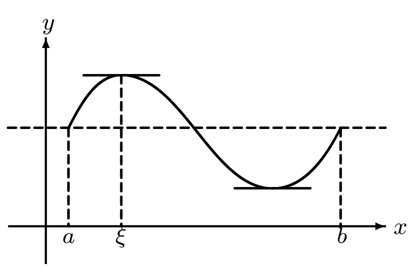


图 3.10

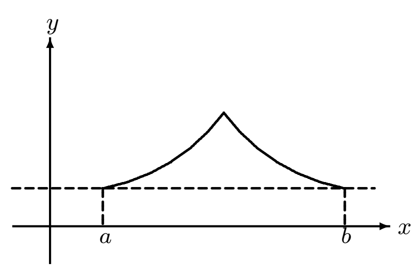


图 3.11

### 3.3.2 微分中值定理

**定理 3.15** (微分中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 $(a,b)$ 可微, 则必有 $\xi \in (a,b)$ 使

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

有时, 我们也称微分中值定理为 Lagrange **中值定理**. 注意, 如果 $f(a)=f(b)$, 则中值定理化为了 Rolle 定理, 因此它是比 Rolle 定理更一般性的定理.

从几何上看, 微分中值定理的结果是不难理解的. 考虑函数的差商

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

它是割线 $AB$ 的斜率. 设想一下, 如果我们平行移动这条割线, 则它至少有一次机会达到这样的位置, 即在曲线上与割线 $AB$ 距离最远的那一点 $M$, 成为曲线的切线（图3.12）. 也就是说, 存在介于 $a$ 和 $b$ 之间的一点 $\xi$, 使得定理 3.15 成立. 从物理上看, 一个沿直线运动的质点, 必然在某一个时刻的瞬时速度, 等于整个运动过程的平均速度.

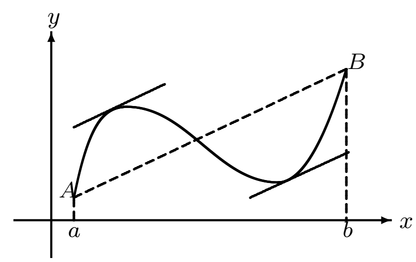

图 3.12

**定理 3.15 的证明** 证明的方法是将其化为特殊情形—— Rolle 定理来解决. 从图象上看（比较图3.10 和图3.12）, 只是把 Rolle 定理中的示意图斜一个角度而已. 因此我们将构造一个辅助函数 $F(x)$, 使得 $F(x)$ 满足 Rolle 定理.

因为连接 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 两点的弦的直线方程是

$$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

设

$$F(x) = f(x)-g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a).$$

则容易验证: $F(b)=F(a)=0$, 而且 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 内可导, 因此 $F(x)$ 满足 Rolle 定理的三个条件, 故存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

□

在微分中值定理的条件下, 可以考虑区间 $[a,b]$ 上任意两点 $x_1$, $x_2$ ( $x_1<x_2$ ) 之间的中值定理. 即一定存在介于 $x_1$, $x_2$ 之间的一点 $\xi$, $x_1<\xi<x_2$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

如果取

$$\theta=\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1},$$

容易验证 $0<\theta<1$, 因此上式经常表示成

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(x_1+\theta(x_2-x_1))(x_2-x_1).$$

或者用增量的语言, 表示成

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x.$$

在微分中值定理中, 除了 $\xi$ 位于两点 $x_1$, $x_2$ 之间外, 对于 $\xi$ 的位置并未作出任何明确的断言. 例如, 对于 $f(x)=x^2$,

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=x_1+x_2=f'(\xi)=2\xi$$

所以 $\xi=\frac{x_1+x_2}{2}$, 它是 $[x_1,x_2]$ 的中点, 而对于 $f(x)=x^3$来说, $f'(x)=3x^2$, 所以

$$\xi=\sqrt{\frac{x_2^2+x_1x_2+x_1^2}{3}}$$

情况就复杂的多. 尽管如此, 我们仍然能够通过微分中值定理, 得到函数自身的一些性质. 其中一个直接结果, 就是关于本节开始时所提到的问题, 即导数为零的函数是否是常值函数, 为此有

**推论 3.16** 如果函数 $f$ 在一个区间上连续, 且对区间内的每一个点 $x$, 都有 $f'(x)=0$, 那么函数 $f$ 在区间上一定是常值函数. 更一般的，对两个可导函数 $f$ 和 $g$, 如果它们的导数相等, 那么两个函数相差一个常数.

**证明** 任取区间上两点 $x_1<x_2$, 在 $[x_1,x_2]$ 上, 由中值定理知, 存在一点 $\xi$ 使得

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

但 $f'(x)$ 恒为零, 所以 $f'(\xi)=0$, 于是 $f(x_1)=f(x_2)$, 即函数在区间上任意两点的值相等, 所以是常值函数. □

另一方面, 我们知道, 可微函数一定连续. 但微分中值定理为连续性提供了更加定量化的结果, 即

**推论 3.17** 若函数 $f$ 在区间 $I$ 可微, 且 $|f'(x)|\leqslant M$ ( 即导数有界 ), 则

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|$$

满足上述公式的函数被称为满足 **Lipschitz 连续性条件**. 所以具有有界导数的函数一定是 Lipschitz 连续的. 反之, Lipschitz 连续未必可导. 详细情形在此不作讨论.

**例 3.3.1** 证明: 对任意常数 $c$, 方程 $x^3-3x+c=0$ 在 $[0,1]$ 中不可能有两个相异的实根.

**证明** 记 $f(x)=x^3-3x+c$. 若对某个 $c$, 方程在 $[0,1]$ 上有两个相异的实根 $x_1,x_2$ 不妨设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$ 则 $f(x_1)=f(x_2)=0$, 因此 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足 Rolle 定理的三个条件, 所以必有 $x_1<\xi<x_2$ 使得

$$f'(\xi)=3(\xi^2-1)=0.$$

即 $|\xi|=1$, 但 $0\leqslant x_1<\xi<x_2\leqslant 1$, 故矛盾. 这说明有两个相异实根的假设不成立.

**例 3.3.2** 设 $0<a<b$, 证明

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}.$$

**证明** 由于 $0<a<b$, 故在 $[a,b]$ 上, 函数 $\ln x$ 显然满足中值定理的条件, 所以存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\ln b-\ln a=(\ln x)'|_{x=\xi}(b-a)=\frac{1}{\xi}(b-a)$$

但

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$$

即有所证的结果.

**例 3.3.3** 证明恒等式

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\quad |x|\leqslant 1$$

**证明** 命 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$. 则 $f'(x)\equiv 0$. 所以

$$\arcsin x+\arccos x\equiv c\qquad(\text{常数}).$$

将 $x=0$ 代入, 即得 $c=\frac{\pi}{2}$.

作为微分中值定理的一个直接推广是下列 Cauchy 中值定理.

**定理 3.18** (Cauchy 中值定理) *若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可微. 而且对任一点 $x\in(a,b), g'(x)\neq 0$. 则在 $(a,b)$内, 必存在一点 $\xi$, 使得*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

*这里, 因为 $g'(x)\neq 0$, 由 Lagrange 中值定理知, $g(b)-g(a)\neq 0$, 所以上式的左边是有意义的.*

**证明** 注意到, 当 $g(x)=x$ 时, Cauchy 中值定理就是 Lagrange 中值定理, 因此前者是后者的推广, 因此证明方式也有类似性. 在 Lagrange 中值定理证明中所构造的辅助函数 $F(x)$ 中, 将 $x$ 换成 $g(x)$(从而对应地将 $a,\ b$ 换成 $g(a),\ g(b)$). 即设辅助函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

易知, $F(x)$ 满足 Rolle 定理的三个条件: 在闭区间上连续、开区间内可导, 且

$$F(b)-F(a)=0.$$

所以存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $F'(\xi)=0$, 即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0.$$

此即定理的结论. □

### 3.3.3 导函数的介值性质

一个在区间$I$ 内可导的函数 $f(x)$, 其导数给出了 $I$ 内的导函数 $f'(x)$. 下面将给出导函数的一个重要性质, 以加深对函数导数的理解.

首先研究导函数的极限问题

**定理 3.19** *设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0,\ x_0+\delta]$ 连续(这里 $\delta>0$), 在 $(x_0,\ x_0+\delta)$ 内可导. 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f'(x)=l$ (这里的 $l$ 可以是无穷大), 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的右导数存在, 且*

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}f'(x).$$

*将区间 $[x_0,x_0+\delta]$ 换为 $[x_0-\delta,x_0]$ 有类似的结论.*

**证明** 对 $x>x_0$, 由微分中值公式得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$$

这里 $x_0<\xi<x$, 当 $x\to x_0^+$ 时, $\xi\to x_0^+$, 即函数在$x_0$ 的右导数等于导函数 $f'(x)$ 的右极限. □

这个定理说明如果函数在区间内处处可导, 则在区间内每一点处, 导函数 $f'(x)$ 要么连续，要么是第二类间断点，不可能有第一类间断点. 由此推出具有第一类间断点的函数(如 Dirichlet 函数)不能作为某个函数的导函数.

**定理 3.20** (Darboux 定理) *设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上可导, 则对于介于 $f'(a),\ f'(b)$ 之间的任何值 $\lambda$, 一定存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f'(\xi)=\lambda$.*

**证明** 不妨设 $f'(a)<f'(b)$. 首先考虑特殊情形: $f'(a)<0<f'(b)$, 即

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)<0,\quad \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)>0,$$

所以存在$\delta_1 > 0$, 使得当 $x \in (a,\ a+\delta_1)$ 时有 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$, 即 $f(x) < f(a)$. 同理, 存在$\delta_2$, 使得当 $x \in (b-\delta_2,\ b)$ 时有$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} > 0$, 注意到此时 $x < b$, 所以当 $x \in (b-\delta_2,\ b)$ 时, $f(x) < f(b)$. 因此函数 $f(x)$ 的两个端点 $f(a)$, $f(b)$ 不是$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值.也就是说 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内部一点 $\xi$ 取到最小值, 根据 Fermat 定理有 $f'(\xi) = 0$.

对于一般情况, 任取 $f'(a) < \gamma < f'(b)$. 令 $g(x) = f(x) - \gamma x$, 则 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导, 且

$$g'(a) = f'(a) - \gamma < 0,\ g'(b) = f'(b) - \gamma > 0,$$

所以存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f'(\xi) = \gamma$. □

定理3.20 揭示了导函数另一个令人惊奇的性质, 即对区间 $I$ 上可导函数以及区间中任意两个不同点 $c, d \in I(c < d)$, 其导函数 $f'(x)$ 无论是否连续, 在 $[c,d] \subset I$ 上取到介于 $f'(c)$ 和 $f'(d)$ 之间的一切值. 由于导函数不一定是连续函数, 因此上述结果并不是连续函数介值定理的推广.

## 习题 3.3

1. 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 确定方程 $f'(x)=0$ 的实根的个数, 并指出根所在的区间.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上有二阶微商, 且 $f(1)=f(2)=0$. 记 $F(x)=(x-1)^2f(x)$, 则在区间 $(1,2)$ 内至少有一点 $\xi$, 使得 $F''(\xi)=0$.

3. 举例说明, 中值定理的下述意义下的逆不成立: 设 $\xi\in(a,b)$ 是指定的一点, 则存在 $c,d\in[a,b]$, 使得 $\frac{f(c)-f(d)}{c-d}=f'(\xi)$. (提示: 考虑函数 $f(x)=x^3,\ \xi=0$.)

4. 证明下列不等式.

   (1) 当 $a>b>0, n>1$时, 有 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$;

   (2) 当 $x>0$ 时, 有 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$;

   (3) 当 $0<a<b$ 时, 有 $(a+b)\ln\frac{a+b}{2}<a\ln a+b\ln b$.

   (4) 当 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$.

5. 证明下列恒等式.

   (1) $\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

   (2) $\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\frac{\pi}{4}, & x>-1\\ -\frac{3\pi}{4}, & x<-1\end{cases}$.

6. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的可微函数, 对任意 $x\in[0,1]$ 有$f(x)\in(0,1)$; 并且对每个 $x$, $f'(x)\neq1$. 证明, 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 $x$, 使 $f(x)=x$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可微, 且 $|f'(x)|<1$, 又 $f(0)=f(1)$. 证明: 对于 $[0,1]$ 上的任意两点 $x_1,x_2$, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$.

8. 若 $f(x)$ 处处可导, 且 $f'(x)=f(x)$. 证明 $f(x)=Ce^x$, $C$ 为任意常数.

9. 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 内可导, 且 $f(a)=f(b)$. 证明, 在 $(a,b)$ 内存在一点 $\xi$, 使得 $f'(\xi)>0$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 证明

    (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0$;

    (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

11. 证明: 若函数 $f(x)$ 在(有限)开区间 $(a,b)$ 内有有界的导函数, 则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内也有界. 如果有限区间 $(a,b)$ 改为无穷区间, 结论还成立吗? 命题的逆命题是否成立?

12. 设对所有的实数 $x,y$, 不等式 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^2$ ($M$ 为常数) 都成立. 证明:

$f(x)$ 恒为常数.

13. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0+\delta]$ 上连续 (这里 $\delta > 0$), 在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内可导. 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = l$ (这里的 $l$ 可以是无穷大), 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的右导数也为 $l$, 即

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} f'(x).$$

(将区间 $[x_0, x_0+\delta]$ 换为 $[x_0-\delta, x_0]$ 有类似的结论.)

14. 应用上一题的结论证明
  (1) 函数 $x^{\frac{1}{3}}$ 在 $x=0$ 处不可导;
  (2) 函数 $\arcsin x, \arccos x$ 在 $x=1$ 处没有左导数, 在 $x=-1$ 处没有右导数.

15. 证明, 若函数 $f(x)$ 在一个区间内处处可导, 则导函数 $f'(x)$ 不能有第一类间断点, 即在 (区间内) 每一点处, $f'(x)$ 或者连续, 或者有第二类间断. (由本题推出, 具有第一类间断点的函数, 如 $\operatorname{sgn} x$, 不能成为某个函数的导数.)

16. 设 $f(x)$ 在一个区间 $I$ 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外, $f(x)$ 在 $I$ 内部的导数为正(负), 则 $f(x)$ 在 $I$ 上严格单增(减). (注意, 在例外的点处, $f(x)$ 可能不可导.)

17. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在区间 $I$ 上连续, 且(至多)除了有限个点外, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $I$ 内部满足 $f'(x) > g'(x)$; 设 $a \in I$, 使得 $f(a) = g(a)$. 则当 $x \in I$ 且 $x > a$ 时, 有 $f(x) > g(x)$; 当 $x \in I$ 且 $x < a$ 时, 有 $f(x) < g(x)$.

18. 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 可微, $f(0) = 0$, $f'(x)$ 严格递增. 证明$\frac{f(x)}{x}$ 严格递增.

19. 设 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的一个可疑极值点, 且 $f(x)$ 在 $x_0$ 处二阶可微, 且 $f''(x_0) \neq 0$. 证明: 若 $f''(x_0) < 0$, 则 $x_0$是 $f(x)$ 的一个极大值点; 若 $f''(x_0) > 0$, 则 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点. (提示: 现在必有 $f'(x_0) = 0$.)
举例说明: 若 $f''(x_0) = 0$, 则 $x_0$ 可以是 $f(x)$ 的极大值点, 或极小值点, 也可以不是极值点.

20. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导函数, 且 $f(0) = f'(0), f(1) = f'(1)$. 求证: 存在 $\xi \in (0,1)$ 满足 $f(\xi) = f''(\xi)$.

21. 求下列函数的单调区间与极值.

| | |
|---|---|
| (1) $y = 2x^3 - 3x^2$; | (2) $y = x^{2/3}$; |
| (3) $y = x^2 e^{-x^2}$; | (4) $y = x^{1/x}$; |
| (5) $y = \frac{(\ln x)^2}{x}$; | (6) $y = \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. |

22. 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值.

(1) $y=x^4-2x^2+5,\ [-2,2]$; (2) $y=\sin 2x-x,\ \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$;

(3) $y=\arctan\frac{1-x}{1+x},\ [0,1]$; (4) $y=x\ln x,\ (0,+\infty)$.

23. 证明下列不等式.

(1) $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1,\ x\in[0,1],\ p>1$;

(2) $\tan x>x-\frac{x^3}{3},\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $\frac{\tan x_2}{\tan x_1}>\frac{x_2}{x_1},\quad 0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$;

(4) $\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x},\quad x>0$;

(5) $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$, $x$ 为任意实数;

(6) $\frac{x}{\sin x}>\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos x,\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$, 且右端的常数 $\frac{4}{3}$ 不能换为更大的数;

(7) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}<4,\ x\in(1,+\infty)$.

(8) $x^{a-1}+x^{a+1}\geqslant\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}}+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}},\ x\in(0,1),\ a\in(0,1)$.

24. 试确定下列函数实零点的个数及所在范围.

(1) $x^3-6x^2+9x-10$; (2) $ax-\ln x$ (其中 $a>0$).

25. 设 $a\in(0,1)$, $b_1=1-a$,

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{1-e^{-b_n}}-a,\quad n=1,2,\cdots.$$

问 $\{b_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则给予证明, 若收敛, 则求极限.

## §3.4 未定式的极限

本节的主要目的是求未定式的极限. 所谓“未定式的极限”是指当 $x$ 趋于某一个值（或无穷）时, 无穷小（大）量和无穷小（大）量的商或其他形式的极限问题（随后将罗列各种可能的未定式）. 在解决未定式的极限问题时, L'Hospital 法则是一个非常有效的方法, 而建立 L'Hospital 法则的基础是上节中的 Cauchy 中值定理.

### 3.4.1 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限

即当 $x \to x_0$（或无穷）时, 两个无穷小量之比的极限问题.

**定理 3.21** (L'Hospital 法则) *设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x_0$ 附近可导, $g'(x) \neq 0$, 且满足*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

*如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, 那么有 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, 这里 $l$ 可以是一个有限实数, 也可以是 $\infty$.*

**证明** 所谓“附近”, 即存在一个区间 $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, 使得对区间内任意一点（点 $x_0$ 可能除外）, $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 都存在, 而且 $g'(x) \neq 0$.

由于 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, 因此我们不妨假设 $f(x_0) = g(x_0) = 0$, 这样, 函数 $f$ 和 $g$ 在 $x_0$ 都连续.

设 $x$ 是区间 $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ 中的任意一点（$x \neq x_0$）, 在以 $x$ 和 $x_0$ 为端点的闭区间上, $f$ 和 $g$ 满足 Cauchy 中值定理的一切条件, 于是存在介于 $x$ 和 $x_0$ 之间的一点 $\xi$, 使得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

因为 $|\xi - x_0| < |x - x_0|$, 所以当 $x \to x_0$ 时, $\xi \to x_0$. 由定理的假设, 即得到

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = l.$$

$\square$

上述结果不是孤立的, 必须注意到以下两点

1° 从上面的证明不难看出, 定理中的极限过程可改为单测极限（即$x \to x_0^{\pm}$）, 结论同样成立. 另一方面对于 $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ 或 $x \to \infty$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限, 也有类似的 L'Hospital 法则. 这里以 $x \to \infty$ 时为例.

设 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$, 如果 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, 则 $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

证明的过程中只要设 $y = \frac{1}{x}$, 则 $x \to \infty$ 时, $y \to 0$, 而且

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

2° 在使用 L'Hospital 法则时, 如果 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 还是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 即不但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, 而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g'(x) = 0$, 则可以继续考虑二阶导数, 如果 $\lim\limits_{\xi\to x_0} \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)} = l$, 则 $\lim\limits_{\xi\to x_0} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = l$. 不管使用几次, 前提条件一是前者必须是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 二是后者的极限一定存在, 两者缺一不可.

**例 3.4.1** 求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)}$.

**解** 这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 但由于

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)'}{(\ln(1+x))'} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\frac{1}{1+x}} = 2$$

所以由 L'Hospital 法则知

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+x)} = 2.$$

**例 3.4.2** 求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$.

**解** 这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 但分子分母各自求导后的比式

$$\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(\sin^2 x)'} = \frac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$$

仍然是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 因此需要再次使用 L'Hospital法则, 即

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{2\cos 2x} = 1.$$

### 3.4.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限

无论是 $x$ 趋于固定的有限数, 还是趋于无穷, 还是取单测极限, 对于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限, L'Hospital 法则同样有效. 证明的方法也是基于 Cauchy 中值定理, 下面陈述并证明 $x\to x_0$ 极限过程的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 L'Hospital 法则, 其他极限过程的情况是类似的, 我们将不作讨论.

**定理 3.22** (L'Hospital 法则) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x_0$ 附近可微, $g'(x)\neq 0$, 且

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

如果

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

则有

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

这里 $l$ 可以是一个有限实数, 也可以是 $\infty$.

这里需要特别说明的是, 与 $\frac{0}{0}$ 型的 L'Hospital 法则相比, 本定理的条件中, 并不需要 $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 的条件. 但是为了记号上的统一, 习惯上仍然称为 "$\frac{\infty}{\infty}$ 型".

**定理 3.22 的证明** 只对 $l$ 为实数的情况证明, $l=+\infty$ 或 $l=-\infty$ 的情况类似. 由 $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$, 知, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 当 $x\in(x_0,x_0+\delta_1)$ 时, 有

$$l-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<l+\varepsilon.$$

由 Cauchy 中值定理, 对于 $[x,c]\subset(x_0,x_0+\delta_1)$, 存在 $\xi\in(x,c)$ 使得

$$\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

因此,

$$l-\varepsilon<\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}<l+\varepsilon.$$

由于 $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$, 对于固定的 $c$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, 有 $\left|\frac{g(c)}{g(x)}\right|<\varepsilon$, $\left|\frac{f(c)}{g(x)}\right|<\varepsilon$. 于是, 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}&=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}-\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}\cdot\frac{g(c)}{g(x)}+\frac{f(c)}{g(x)}\\&<l+\varepsilon+(|l|+\varepsilon)\varepsilon+\varepsilon;\end{aligned}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}>l-\varepsilon-(|l|+\varepsilon)\varepsilon-\varepsilon;$$

因此,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<(2+|l|+\varepsilon)\varepsilon.$$

由此证明了 $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. 同理, 有 $\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{f(x)}{g(x)}=l$. □

**例 3.4.3** 设 $\alpha>0$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$.

**解** 这是一个 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}\cdot x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$$

如果用 $\frac{1}{x}$ 代替 $x$, 则 $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=0$.

这个例子说明无论 $\alpha$ 是多小的正数, 当 $x\to+\infty$ 时, 幂函数 $x^\alpha$ 总是比对数函数更高阶的无穷大量.

**例 3.4.4** 设 $\mu>0$, $a>1$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x}$.

**解**　注意到, 只要 $\mu-k>0$, 当 $x\to+\infty$ 时, 本题的分子部分 $k$ 次导函数仍是无穷大量, 而分母部分的任意阶导函数都是无穷大量. 因此取正整数 $n>\mu$. 则当 $x>1$ 时有

$$0<\frac{x^\mu}{a^x}<\frac{x^n}{a^x}.$$

接连使用 $n$ 次 L'Hospital 法则就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}=\cdots\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{a^x(\ln a)^n}=0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\mu}{a^x}=0.$$

此例说明, 无论 $\mu$ 是多么大的正数, 只要常数 $a>1$, 当 $x\to+\infty$ 时, 指数函数 $a^x$ 总是比幂函数 $x^\mu$ 更高阶的无穷大量.

### 3.4.3　其他类型的未定式的极限

除了前面重点介绍的 $\frac{0}{0}$ 型未定式和 $\frac{\infty}{\infty}$ 未定式之外, 还有下列几种未定式

$$0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^\infty,\quad 0^0,\quad \infty^0$$

前两种均可以化成 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型；而后三种可通过对函数取对数的办法, 化为基本的 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 因此上述五类未定式, 都可以用 L'Hospital 法则处理.

我们用一些具体的例子来说明处理的方式.

**例 3.4.5**　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

**解**　这是一个 $0\cdot\infty$ 型未定式, 可将它化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式处理

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.\end{aligned}$$

**例 3.4.6**　求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{1-x}\right)$.

**解**　这是一个 $\infty-\infty$ 型未定式. 令 $y=x-1$, 则当 $x\to1$ 时有 $y\to0$. 原式可化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式. 在处理过程中, 可以用同阶的无穷小量进行替代, 如 $\ln(1+y)\sim y,\ y\to0$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{1-x}\right)&=\lim_{y\to0}\frac{y-\ln(1+y)}{y\ln(1+y)}=\lim_{y\to0}\frac{y-\ln(1+y)}{y^2}\\&=\lim_{y\to0}\frac{1-\frac{1}{1+y}}{2y}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**例 3.4.7** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

**解** 这是 $1^\infty$ 型未定式, 令

$$y = y(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

则

$$\ln y = \frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}$$

这是一个 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 利用L'Hospital法则可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{2x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2} = -\frac{1}{6},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln y(x)} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

**例 3.4.8** 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

**解** 这是 $0^0$ 型未定式, 由例 3.4.3 以及指数函数的连续性得

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

**例 3.4.9** 求 $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

**解** 这是 $\infty^0$ 型未定式, 记 $y = y(x) = x^{1/\sqrt{x}}$, 则 $\ln y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 由例 3.4.3 可知 $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, 所以

$$\lim_{x\to +\infty} x^{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to +\infty}\ln y} = e^0 = 1.$$

**例 3.4.10** 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\tan x}$.

**解** 这是 $0^0$ 型未定式

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0} e^{\tan x\ln(1-\cos x)}.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\tan x\ln(1-\cos x) &= \lim_{x\to 0} x\ln(1-\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^{-2}(\cos x - 1)} = 0.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)^{\tan x} = 1.$$

**例 3.4.11** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\arctan x-\frac{\pi}{2}}$.

**解** 这是 $\infty^0$ 型未定式, 由

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\arctan x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to+\infty} e^{(\arctan x-\frac{\pi}{2})\ln x},$$

以及

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)\ln x &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln x}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\end{aligned}$$

可得

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\arctan x-\frac{\pi}{2}} = 1.$$

**例 3.4.12** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$.

**解** 这是 $\infty-\infty$ 型未定式

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right) &= \lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x} = \lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{3x^2}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

在计算未定式的极限时, 使用无穷小 ( 大 ) 量的等价代换, 常能简化计算过程. 这里以$\frac{0}{0}$ 为例. 设 $f(x)$ 和 $h(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}=1$, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}\cdot\frac{h(x)}{g(x)}$$

如果对于$\frac{0}{0}$ 型的 $\frac{h(x)}{g(x)}$ 运用 L'Hospital 法则更容易计算出结果, 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}$$

在此将曾经求出过的一些当 $x\to0$ 时的等价无穷小量罗列于下, 以备查用.

$$\begin{gathered}\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim x,\\ 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\\ \tan x-\sin x\sim\frac{x^3}{2},\ x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}.\end{gathered}$$

## 习题 3.4

1. 试给出 Cauchy 中值公式的几何解释.

2. 试说明在闭区间 $[-1,1]$ 上 Cauchy 中值定理对函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x^3$ 为什么不正确?

3. 设 $b>a>0$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可微, 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(ab>0)$, 在 $(a,b)$ 上可微. 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使
$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ ($m,n$ 为自然数, $\alpha,\beta$ 为实数);

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ ($m,n$ 为自然数);

(3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{\sin x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ ($\alpha$ 为任意实数);

(7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$;

(9) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\tan x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\arctan^2x}-\frac{1}{x^2}\right)$;

(12) $\lim\limits_{x\to1-0}\ln x\ln(1-x)$;

(13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\tan x)^{2x-\pi}$;

(14) $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}$;

(15) $\lim\limits_{x\to1-0}\frac{\ln(1-x)+\tan\frac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}$;

(16) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\arcsin x^3)^2}{(1-\cos x)(e^{x^2}-1)\tan^2x}$;

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{1/x}$;

(18) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\arctan x^2)}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\cdot\left(2-\frac{x}{e^x-1}\right)$;

(19) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$ ($n$ 为自然数, $a>1,k>0$);

(20) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^k}$ ($n$ 为自然数, $k>0$).

6. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0)=1$, $f''(0)\neq0$, 且 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$. 令
$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_1\in(0,a).$$
(1) 求证 $\{x_n\}$ 收敛并求极限; (2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 则求其极限.

# §3.5 函数的单调性和凸性

本节我们将利用导数提供的信息研究函数的某些性质, 如函数的单调性和极值问题, 函数的凸凹性、拐点以及刻画函数凸凹(弯曲)程度的曲率等问题.

## 3.5.1 函数的单调性与极值

作为微分中值定理的直接应用, 我们有

**定理 3.23** 设 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续, 在 $I$ 的内部可微, 如果对 $I$ 内的每一点 $x$, 有 $f'(x) \geqslant 0$ ( $f'(x) > 0$ ), 那么 $f(x)$ 在 $I$ 上是(严格)单调增的; 如果对 $I$ 内的每一点 $x$, 有 $f'(x) \leqslant 0$ ( $f'(x) < 0$ ), 那么 $f(x)$ 在 $I$ 上是(严格)单调减的.

**证明** 考虑 $f'(x) \geqslant 0$ 的情形( $f'(x) \leqslant 0$ 的情形可类似证明). 设 $x_1$, $x_2$ 是 $I$ 中任意两点, 并且 $x_1 < x_2$. 定理的条件表明, 函数 $f$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 在 $(x_1, x_2)$ 内可微. 故由中值定理知, 存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

因为 $f'(\xi) \geqslant 0$; 而 $x_2 - x_1 > 0$, 推得 $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$. 从而 $f$ 是单调增的. $\square$

从几何上看 (图3.13), 作为 $f$ 的图象的曲线, 如果在曲线上每一点 $(x,\ f(x))$ 处切线的斜率都是正的(即切线与 $x$ 轴正向的夹角满足 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 则曲线呈上扬趋势. 而当曲线上每一点 $(x,\ f(x))$ 处切线的斜率都是负的时( $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ), 曲线呈下降趋势. 因此, 定理 3.23 给出了函数极值的一个简单实用的判别法.

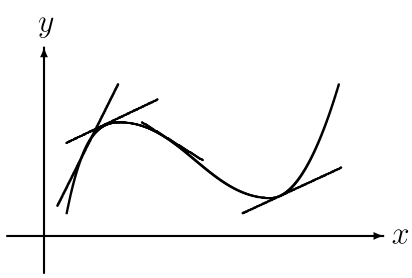


图 3.13

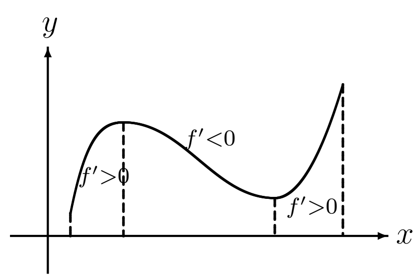


图 3.14

**定理 3.24** 设 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内的一点, 且 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续.

1° 如果 $f(x)$ 在 $x_0$ 左边的某个区间内(即对某个 $\delta > 0$, 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内), 有 $f'(x) > 0$, 而在 $x_0$ 的右边某个区间内(即对某个 $\delta' > 0$, 在 $(x_0, x_0 + \delta')$ 内), 有 $f'(x) < 0$, 那么 $x_0$ 为一个局部极大值点.

2° 如果 $f(x)$ 在 $x_0$ 左边的某个区间内(即对某个 $\delta > 0$, 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内), 有 $f'(x) < 0$, 而在 $x_0$ 的右边某个区间内(即对某个 $\delta' > 0$, 在 $(x_0, x_0 + \delta')$ 内), 有

$f'(x) > 0$, 那么 $x_0$ 为一个局部极小值点.

$3^\circ$ 如果 $f(x)$ 在 $x_0$ 左、右的某个区间内, $f'(x)$ 的符号相同, 那么 $x_0$ 不是极值点.

作为定理 3.24 的一个直接结果, 如果要求连续函数在一个闭区间上的最大值、最小值, 可先求出函数在区间内的极值点, 再比较函数在这些极值点的值和两个端点的值, 即得出结果 ( 连续函数有可能在闭区间的端点达到最大、最小值 ) ( 图3.14 ) .

至此, 我们知道了如何利用函数的 ( 一阶 ) 导数所提供的信息, 判断函数自身的单调区间和极值点, 同时也掌握了函数图象的一个基本轮廓. 但是要揭示函数图象的更细致的方面, 还需要求助于函数的二阶导数. 下面的定理 (证明留作习题) 说明如何用二阶导数从驻点中甄别极值点, 其他关于利用二阶导数研究函数的性质将随后讨论.

**定理 3.25** 设函数 $f(x)$在区间$I$内可导, $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个驻点, 即 $f'(x_0) = 0$. 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 有二阶导数, 若 $f''(x_0) < 0$, 则 $x_0$ 是函数的极大值点; 若 $f''(x_0) > 0$, 则 $x_0$ 是函数的极小值点.

**例 3.5.1** 证明: 当 $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$.

**证明** 设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 显然它是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的连续函数. 又因为在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内, 有

$$f'(x) = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$$

这是因为当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x > 0$, $\tan x > x$ ( 见引理 1.39 ) . 故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内严格单调递减, 所以对 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 有

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \geqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

**例 3.5.2** 求函数 $f(x) = e^{-x^2}$ $(x \in (-\infty, +\infty))$ 的单调区间与极值.

**解** $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, 所以驻点为 $x = 0$. 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, 即函数在此区间上严格单调增; 当 $x \in (0,\ +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 即函数在此区间上严格单调减, $x = 0$ 是函数的极大值点, 且极大值是 $f(0) = 1$.

**例 3.5.3** 求函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 在区间 $[-4, 4]$ 上的最大值与最小值.

**解** 显然, $f(x)$ 在区间 $(-4, 4)$ 内可导, 由

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3)$$

得, $f(x)$ 的驻点为 $x_1 = -1,\ x_2 = 3$. 因 $f(-1) = 10,\ \ f(3) = -22$, 而在区间的端点处, $f(-4) = -71,\ \ f(4) = -15$, 比较这些值的大小可知函数 $f(x)$ 在驻点 $x_1 = -1$ 处取到最大值 10, 在端点 $x = -4$ 处取到最小值 $-71$.

**例 3.5.4** 设 $0 < x \leqslant 1,\ \ 0 < \alpha < 1$, 证明 $x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha$.

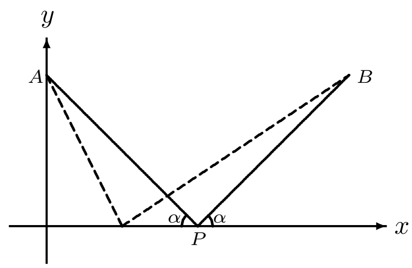


图 3.15

**证明**　记 $f(x) = x^{\alpha} - \alpha x,\ x > 0$, 则 $f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$, 所以函数只有唯一的驻点 $x = 1$. 因为 $0 < \alpha < 1$, 所以当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 而当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$. 故函数在 $x = 1$ 达到整个区间 $x > 0$ 上的最大值, 即 $f(x) \leqslant f(1) = 1 - \alpha$ 对所有 $x > 0$ 成立, 即是所要结果.

**例 3.5.5**　试在给定直线上求出一点 $P$, 使得这一点同两个已知的固定点 $A$ 和 $B$ 的距离之和为最小.

**解**　如果这两点分别在直线的两侧, 那么 $P$ 点显然就是直线与线段 $AB$ 的交点. 所以不妨设 $A$ 和 $B$ 在直线的同一侧.

取给定的直线为 $x$ 轴, $A$ 点在 $y$ 轴上（图3.15）, 坐标为 $A(0,h)$, $B$ 点的坐标为 $B(a,b)$, 所要求的点坐标是 $P(x,0)$. 根据题目要求, 即是要求

$$|AP| + |PB| = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(x-a)^2 + b^2} = f(x)$$

取最小值.因为

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} + \frac{x - a}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}}$$

$$f''(x) = \frac{h^2}{\sqrt{(x^2 + h^2)^3}} + \frac{b^2}{\sqrt{[(x-a)^2 + b^2]^3}}$$

方程 $f'(x) = 0$ 的解满足

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{a - x}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}},$$

即是条件

$$\cos\alpha = \cos\beta$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 分别是直线段 $AP$ 和 $BP$ 与 $x$ 轴的锐夹角. 也就是说当 $P$ 点满足上面条件时, 其横坐标 $x$ 满足 $f'(x) = 0$, 又因为 $f''(x) > 0$, 所以是唯一的极小值点. 因此是最小值点（函数在两个端点 $\pm\infty$趋于无穷）.

这个问题的解与光学中著名的 Fermat 最短时间原理有着密切联系. 即光线在镜面上的入射角等于反射角.

### 3.5.2 函数的凸性和拐点

通过前面讨论, 我们基本了解了根据函数的一阶导数所提供的信息, 可确定函数的增或减的区间以及极值点的范围. 因此, 从函数图象看, 就掌握了曲线上升、下降等大致的形象.

然而, 一阶导数所提供的信息, 仍然只是一个大概. 比如同样是曲线的上升(下降), 可方式不尽相同, 曲线的弯曲程度也有差异. 因此,我们还需要借助函数的二阶导数, 即函数“变化率的变化率”, 讨论的函数(曲线)的凸性、拐点和曲率等问题.

从几何上看, 设在直角坐标系 $Oxy$ 中, 有一条曲线 $L$, 在曲线的某一段范围内, 任取该曲线段上的两点, 如果连接这两点 $M_1$, $M_2$ 的直线线段(称之为割线,记为 $\overline{M_1M_2}$)总是位于曲线段的上方(下方), 则称曲线在该曲线段是凸的(凹的), 这里“上方”或“下方”是指与 $y$ 轴的正方向一致或相反(图3.16, 图3.17).

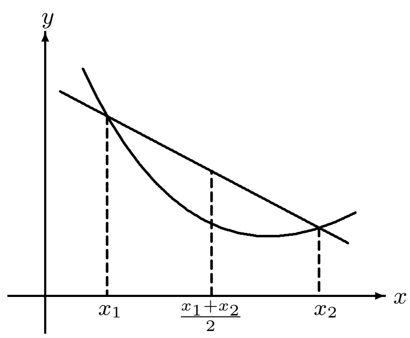


图 3.16

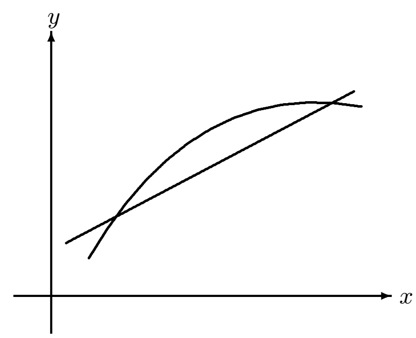


图 3.17

如果曲线 $L$ 是函数 $f(x)$ $(x \in I)$ 的图像, 则曲线是凸的(凹的), 就称函数 $f(x)$ 是是区间 $I$ 上的凸函数(凹函数). 注意, 如果函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上是凸的, 则 $-f(x)$ 在区间 $I$ 上是凹的. 因此, 我们只需讨论函数的凸性.

对于凸函数 $f(x)$ 以及它所表示的凸曲线 $L$, 任取 $L$ 上的两点 $M_1(x_1, f(x_1))$ 和 $M_2(x_2, f(x_2))$(不妨设 $x_1 < x_2$), 连接这两点的直线方程是

$$y = g(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),\ x \in [x_1, x_2].$$

根据上述凸性的几何描述, 该直线在曲线 $L$ 的上方, 即是下列不等式

$$f(x) \leqslant f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),\ x \in [x_1, x_2]$$

对 $I$ 中的任意两点 $x_1, x_2$ 成立. 由于 $x_1$ 与 $x_2$ 之间的任何数 $x$ 可表示为 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $\alpha \in (0,1)$. 将上式中的 $x$ 换为 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, 上述不等式等价于

$$f(x) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

因此我们给出如下定义.

**定义 3.26** 设 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的函数, 如果任给 $I$ 中两点 $x_1, x_2$, 以及任意 $\alpha \in (0,1)$ 有

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2),$$

那么称函数是区间 $I$ 上的凸函数, 当上式的不等号改为"$<$"时, 就称 $f(x)$ 为严格凸的

**例 3.5.6** 求证, 函数 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是凸函数

**证明** 对于任意的两点 $x_1, x_2$ 以及 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha \in (0,1)$, 有

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)^2 = \alpha^2 x_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)x_1x_2 + (1-\alpha)^2 x_2^2$$

所以

$$(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)^2 - (\alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2) = -\alpha(1-\alpha)(x_1 - x_2)^2 < 0$$

即 $f(x) = x^2$ 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的凸函数.

注记 如果存在两点 $x_1 < x_2$ 以及介于之间的 $x_0$, $(x_1 < x_0 < x_2)$ 使得定义中不等式的等号成立, 那么在区间 $[x_1, x_2]$ 上等号恒成立. 也就是说如果点 $M_0(x_0,\ f(x_0))$ 位于连接$M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$ 的割线 $\overline{M_1M_2}$上, 则函数 $f(x)$ 表示的曲线在区间 $[x_1, x_2]$ 上与割线 $\overline{M_1M_2}$ 完全重合 (因此是一段直线). 否则, 必存在 $x_0' \in (x_1, x_2)$, 使得 $M_0'(x_0',\ f(x_0'))$ 位于 $\overline{M_1M_2}$ 下方, 不妨设 $x_0' < x_0$, 所以割线 $\overline{M_0'M_2}$ 位于割线 $\overline{M_1M_2}$ 的下方, 这就导致 $M_0$ 位于割线 $\overline{M_0'M_2}$ 的上方. 这与函数是凸的相矛盾. 例如下列函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

是凸函数, 但在原点的左边是一条直线, 因此只需考虑右边的凸性即可. 因此, 对单变量函数而言, 今后将不再区分"凸"与"严格凸".

根据定义,有下列结果.

**定理 3.27** 函数 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的凸函数,当且仅当对任何 $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$, 以及任何 $x \in I,\ x_1 < x < x_2$ 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

**证明** 必要性 令

$$\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1},\ 1 - \alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

则

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2.$$

由 $f$ 的凸性, 可知

$$f(x) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

将 $f(x)$ 表示成 $f(x)=\alpha f(x)+(1-\alpha)f(x)$ 并代入上式整理得

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

利用不等式

$$\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+c}{b+d}\leqslant\frac{c}{d}$$

其中 $a,b,c,d$满足

$$\frac{a}{b}\leqslant\frac{c}{d},\quad b>0,\ d>0,$$

并取

$$\begin{aligned}&a=f(x)-f(x_1),\quad c=f(x_2)-f(x)\\&b=x-x_1,\quad d=x_2-x,\end{aligned}$$

即完成必要性证明.

充分性　若定理中不等时成立,则由不等式

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

推导出

$$f(x)\leqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2).$$

其中 $x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$, 由 $x$ 的任意性,得到 $\alpha$ 的任意性,且 $\alpha\in(0,1)$,所以函数 $f(x)$ 是凸的. □

定理 3.27的几何意义十分清楚,函数是凸的充要条件是对任意的 $x_1<x<x_2$,曲线的三条割线 $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ 以及 $\overline{MM_2}$的斜率依次增长.割线的极限形式就是切线,因此对任意两点 $x_1<x_2$ 处的切线的斜率（即函数的导数）应该单调递增, 而刻划导函数单调递增的条件是二阶导函数非负.因此有下列定理

**定理 3.28**　设 $f(x)$ 是区间 $I$ 上连续函数.

$1^\circ$　若函数在 $I$ 内部可微. 则 $f(x)$ 在 $I$ 上是（严格）凸函数,当且仅当其导函数 $f'(x)$ 在 $I$ 内（严格）单调递增.

$2^\circ$　若函数在 $I$ 内部二阶可导,则$f(x)$ 在 $I$ 上是凸函数,当且仅当在 $I$ 内部 $f''(x)\geqslant 0$.（而严格凸的充要条件是 $f''(x)\geqslant 0$ 且在任何子区间上不恒为零）.

**证明**　这里只证明 $1^\circ$, 其他证明留给读者.

必要性　任取 $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$,对 $x_1<x<x_2$, 应用定理 3.27中第一个不等式,有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

因为函数可微,令 $x \to x_1^+$ 得

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

同理,对 $x_1 < x' < x_2$, 应用定理 3.27中的第二个不等式,有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x')}{x_2-x'}$$

并令 $x' \to x_2^-$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2)$$

所以 $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. 根据 $x_1, x_2$的任意性,必要性证毕.

充分性 对任意的 $x_1 < x < x_2$, 由微分中值定理知,存在 $\xi \in (x_1, x)$, $\eta \in (x, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi), \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\eta)$$

因为 $f'(x)$ 单调增,且$\xi < x < \eta$,所以 $f'(\xi) \leqslant f'(\eta)$,即

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

根据定理 3.27, 可知函数 $f(x)$ 是凸函数.

下面将讨论函数的二阶导数对函数自身所提供的更精细的信息.

首先观察一个例子 $f(x)=x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 因为 $f''(x)=6x$, 不难看出在区间 $(-\infty, 0)$上, $f''(x) < 0$, 因此函数在 $(-\infty, 0]$ 上是凹的, 而在区间 $(0, +\infty)$ 上, $f''(x) > 0$, 因此函数在 $[0, +\infty)$ 上是凸的. 也就是说函数 $f(x)=x^3$ 在$x=0$ 的两侧的凸凹性相反.显然,$x=0$ 是曲线由凹向凸的拐点,也可以说是曲线增长速度由加快向放缓的转折点. 一般地, 我们定义

**定义 3.29** 设 $y=f(x)$ 在包含点 $x_0$ 的区间上连续, 如果点 $x_0$ 是 $f(x)$ 的凸、凹区间的一个分界点, 则称 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的一个拐点(或称扭转点). 有时也称函数图象上的点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点.

对于上面的例子 $f(x)=x^3$ 来说, $x=0$ 就是函数的一个拐点.

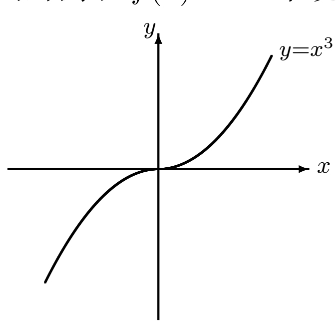


图 3.18

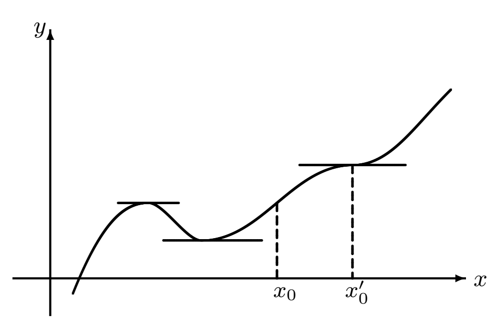


图 3.19

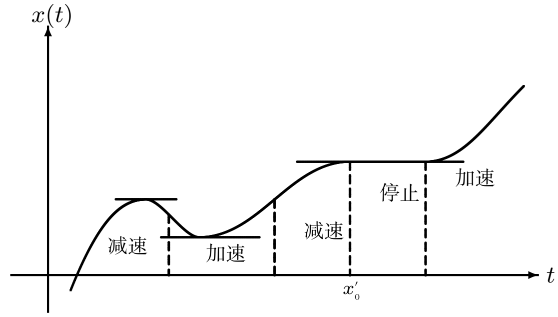


图 3.20

如何判别什么样的点是拐点是我们所关心的. 根据定理 3.28 和定理 3.23, 我们有

**定理 3.30**　设 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续, 在 $x_0$ 的一个邻域内(不包含 $x_0$)可导. 如果在 $x_0$ 的左侧某个区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 内 $f'(x)$ 严格单调增(或减), 而在 $x_0$ 的右侧某个区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 内 $f'(x)$ 严格单调减(或增), 那么 $x_0$ 是 $f(x)$ 的拐点.

**定理 3.31**　设 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续, 在 $x_0$ 的一个邻域内(不包含 $x_0$)二阶可导. 如果在 $x_0$ 的左侧某个区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 内 $f''(x)>0$ $(<0)$, 而在 $x_0$ 的右侧右侧某个区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 内 $f''(x)<0$ $(>0)$, 那么 $x_0$ 是 $f(x)$ 的拐点. 特别, 当 $f(x)$ 在 $x_0$ 处有二阶导数时, $x_0$ 是拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$.

这样, 我们通过函数的二阶导数,给出了函数拐点的一个有效判别法. 注意函数在一点的二阶导数为零, 只是判断拐点的必要条件, 即拐点处二阶导数必然为零, 但二阶导数为零的点未必是拐点. 例如对于函数 $f(x)=x^4$, 不难看出 $f''(0)=0$, 但显然 $x=0$ 不是函数的拐点.

函数的凸凹性对于较精确地掌握函数的性态有了进一步的帮助. 特别是对具有一阶和二阶导数的函数, 其导函数就提供了函数的上升和下降、极值点、凸凹性以及拐点的信息. 有助于我们更精确了解函数随自变量的变化而变化的规律. 例如, 考察一个质点在平面上沿直线运动, 其运动轨迹就是一条直线. 这条直线反映不出质点运动的具体规律. 如果考虑质点所走过的路程与时间的关系是一个函数 $x=x(t)$. 在 $Otx$ 时空平面上, 函数图象的上升、下降、凸和凹不但反映了质点运动过程中前进还是倒退, 也反映了运动的加速和减速(见图3.20).

因此, 不管函数的背景如何, 掌握函数图象较精确的形态, 是非常有意义的. 一般来说, 这个过程可分为下列步骤.

1°　确定函数的定义域, 找出函数的间断点.

2°　确定函数是否具有奇偶性或周期性.

3°　确定函数的单调区间范围与极值点.

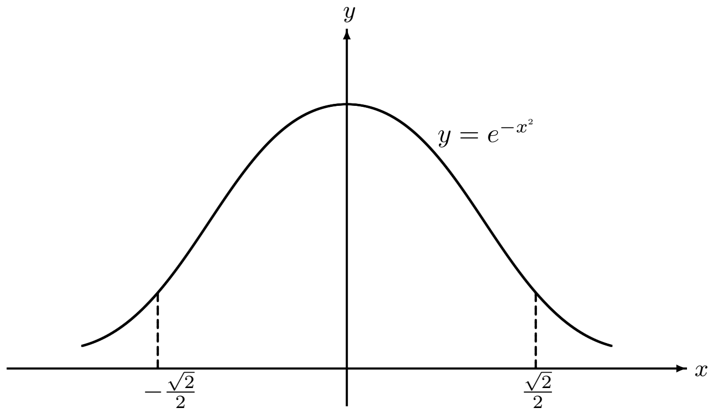


图 3.21

4° 确定函数的凸、凹区间和拐点.

5° 确定函数的渐近线（参考 §1.2 的习题）.

**例 3.5.7** 确定函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的形态.

**解** 首先注意到函数是一个偶函数（所以只要掌握半直线上的形态即可）. 因为

$$f'(x)=-2xe^{-x^2},\quad f''(x)=2(2x^2-1)e^{-x^2}$$

所以当 $x<0$ 时, $f'(x)>0$, 函数是单调递增的; 当 $x>0$ 时, $f'(x)<0$, 函数是单调递减的; 因此$x=0$（$f'(0)=0$）是极大值点. 而 $f''(x)=0$ 的解是 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, 它们是可能的拐点.

在区间 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 中, $f''(x)<0$, 故函数在其上是凹的；

在区间 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 以及在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 中, $f''(x)>0$, 故函数在这两个区间上是凸的; 于是, 上述二阶导函数的两个零点 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 都是函数的拐点. 从数轴的负方向看过来, 在拐点 $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处, 函数由凸变凹, 在拐点 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 处, 函数由凹变凸.

为清楚起见, 将上面的结果列成一个表如下:

| $x$ | $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ | $0$ | $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | 凸 | 拐点 | 凹 | 极大值点 | 凹 | 拐点 | 凸 |

又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$, 故 $x$ 轴是曲线的一条渐近线（除此之外没有其他的渐近线）.

根据上面的所有信息, 就可以在 $Oxy$ 平面上绘制函数的图象（图3.21）. 顺便指出, 函数 $f(x)=e^{-x^2}$ 在概率论和数理统计中是一个非常基本的函数, 是一种称之为“正态分布（或 Gauss分布）”的简单形式.

### 3.5.3 平面曲线的曲率

设 $Oxy$ 平面上的曲线 $L$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象.上节根据曲线的割线、函数的导数的增减,或二阶导数的正负,研究了曲线 $L$ 的凸凹性和拐点, 也就是曲线弯曲的方向.本节将讨论曲线的弯曲程度, 即曲线的曲率.

如图3.22 所示, 沿曲线 $L$ 从 $A$ 点弯曲到 $B$ 点, 切线的方向也随之转了一个角度(增量)$\Delta\varphi$, 如果记曲线上从 $A$ 点到 $B$ 点的弧长的增量为 $\Delta s$, 则曲线的弯曲程度可以由 $\Delta\varphi$ 和 $\Delta s$ 来刻划. 易于看出, 当两个弧长段的增量相等时, 切线转动角度大者弯曲程度较大(图3.23); 当两段弧的切线转动角度相等时, 弧长增量小者弯曲程度较大(图3.24)

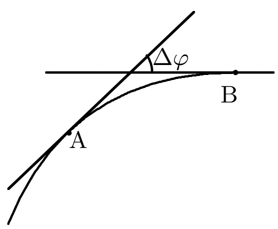

图 3.22

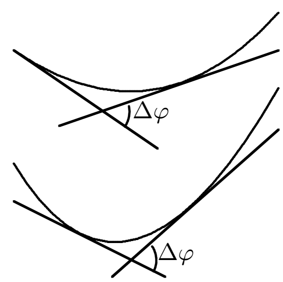

图 3.23

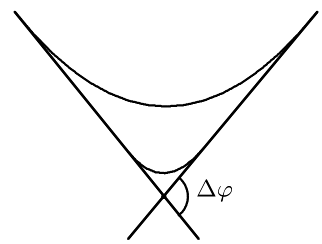

图 3.24

因此, 很自然地利用 $\Delta\varphi$ 和 $\Delta s$ 这两个量的比 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ 来表示该段弧 $AB$ 的平均弯曲程度. 为了定义曲线在一点 $A$ 处的弯曲程度, 让点 $B$ 沿着曲线 $L$ 接近 $A$ 点, 当 $B$ 越接近 $A$, 弧 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ 越能反映出曲线在 $A$ 点的弯曲程度. 如果 $\lim\limits_{B\to A}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ 或 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ 收敛, 就将这极限值定义为曲线在 $A$ 点的 **曲率**. 记为 $\kappa=\kappa(A)$.

定义了曲率之后, 接下来的问题是如何有效地计算它.

(1) 由函数 $y=f(x),\ x\in[a,b]$ 表示的曲线的曲率.

在此情形, 设曲线上点 $A$ 和 $B$ 的坐标分别是 $A(x,\ f(x))$ 和 $B(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x))$(图3.25).

如果从起点 $(a,f(a))$ 到任意动点 $(x,f(x))$ 的弧长记为 $s=s(x)$, 动点 $(x,f(x))$ 处切线正向与 $x$ 轴正向的夹角记为 $\alpha(x)$. 则对应于 $x$ 的增量为 $\Delta x$, 弧长的增量是 $\Delta s=s(x+\Delta x)-s(x)$, 夹角的增量为 $\Delta\alpha=\alpha(x+\Delta x)-\alpha(x)$. 不难看出弧长的增量可以近似于点 $B(x+\Delta x,\ f(x+\Delta x))$ 与点 $A(x,\ f(x))$之间的割线长度

$$\Delta s=s(x+\Delta x)-s(x)\approx\sqrt{\Delta x^2+(f(x+\Delta x)-f(x))^2}$$

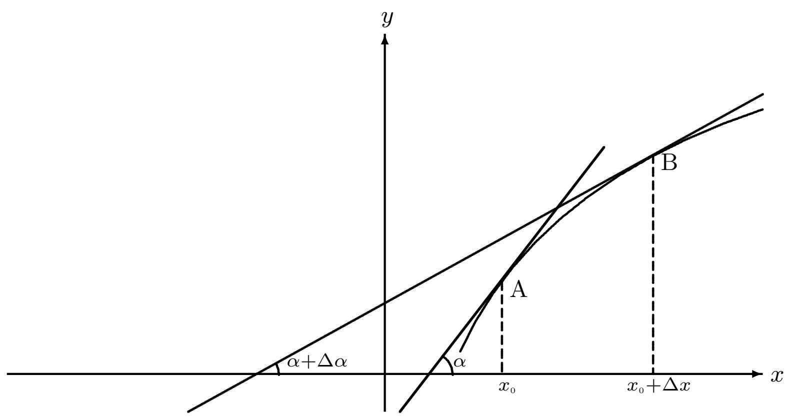


图 3.25

所以

$$s'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{s(x+\Delta x) - s(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + (f(x+\Delta x) - f(x))^2}}{\Delta x} = \sqrt{1+f'^2(x)}$$

而增量

$$\Delta\alpha = \arctan f'(x+\Delta x) - \arctan f'(x).$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{f''(x)}{1+f'^2(x)}$$

所以在 $A(x,\ f(x))$ 点处

$$\kappa = \kappa(A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta\alpha}{\Delta x} \Big/ \frac{\Delta s}{\Delta x}\right)$$
$$= \frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}}.$$

从而, 函数 $y = f(x)$ 所表示的曲线 $L$ 在一点 $(x, f(x))$ 处的曲率为

$$\kappa = \kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}}.$$

从上面的公式我们看出, 函数 $y = f(x)$ 的一阶和二阶导数, 刻划了函数所表示曲线的弯曲程度. 一个最简单的例子是直线 $f(x) = ax + b$, 这里 $a,\ b$ 是常数, 易知它在任何一点的曲率为零, 直线当然是 “没有弯曲的曲线” .

曲率不仅刻划了曲线的弯曲程度, 事实上, 它的符号也刻划了曲线弯曲的方向 ( 也就是凸凹性 ), 即当 $\kappa(x) > 0$ 时, $f''(x) > 0$, 因此曲线是凸的. 随着参数$x$的增加,曲线是往逆时针方向弯曲的 ( 逆时针方向通常视为平面的正向,这也是定义函数”凸”的由来 ). 当 $\kappa < 0$ 时, 曲线是凹的. 凸或凹的程度由 $|\kappa|$ 刻划.

(2) 由参数方程 $x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$ 表示曲线的曲率.

这里设 $(\phi'(t),\ \psi'(t)) \neq 0$ 且 $\phi'(t),\ \psi'(t)$ 连续（这样的曲线称为**正则曲线**），不妨设$\phi'(t) \neq 0$,因此曲线在局部可以表示成 $y = f(x)$,由

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}, \quad f''(x) = \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{(\phi'(t))^3}$$

不难得出曲线在任何一点的曲率是

$$\kappa(t) = \frac{\phi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{(\phi'^2(t) + \psi'^2(t))^{3/2}},$$

其中 $\phi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$.

**例 3.5.8**　计算抛物线 $y = \frac{1}{2}ax^2$ 的曲率.

**解**　因为 $y' = ax, \quad y'' = a$, 所以

$$\kappa = \frac{a}{(1 + a^2x^2)^{3/2}}.$$

当 $a > 0$ 时（抛物线开口向上）, 曲线是凹的. 当 $a < 0$ 时（开口向下）, 曲线是凸的. 在 $x = 0$ 处 $|\kappa|$ 达到最大值, 也就是抛物线在顶点弯曲的最厉害.

**例 3.5.9**　计算椭圆

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

上任何一点的曲率.

**解**　因为 $\phi'(t) = -a\sin t,\ \phi''(t) = -a\cos t,\ \psi'(t) = b\cos t,\ \psi''(t) = -b\sin t$, 代入公式即可得

$$\kappa = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}.$$

特别, 当$a = b = R$ 时, 方程退化成半径为 $R$ 的圆的参数方程表示. 而圆上任何一点的曲率为

$$\kappa = \frac{1}{R},$$

即圆的弯曲程度与半径成反比. 圆越大, 弯曲程度越小, 圆越小弯曲程度越大.

如果引进 $\rho = \frac{1}{|\kappa|}$, 称为曲线在一点的 **曲率半径**. 从上面的例子可知, 圆的曲率半径就是圆的半径.

## 习题 3.5

1. (Jensen 不等式) 若 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的凸函数, $x_1,\cdots,x_n$ 是 $I$ 中 $n$ 个点, 则对任意满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$ 的正数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 有

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n).$$

2. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都是正数, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$. 则有不等式

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n.$$

特别取 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n}$, 则有算术平均不等式

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

（提示：考虑区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=-\ln x$ 的凸凹性，并利用Jensen 不等式。）

3. 设 $a,b,c,d$ 满足 $\frac{a}{b}\leqslant\frac{c}{d}$, 其中 $b>0,\ d>0$, 证明不等式

$$\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+c}{b+d}\leqslant\frac{c}{d}$$

4. 设 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的凸函数, 那么 $f(x)$ 在 $I$ 的内点是连续的.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上处处可导, 且除了有限个点之外, 均有 $f''(x)>0$. 则 $f(x)$ 在 $I$ 上是凸的. 将本题用于 $-f$, 就得到关于凹函数的类似结论.

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内有连续的二阶导数. 若 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个扭转点, 则 $f''(x_0)=0$.

7. 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 及其附近二阶可导, 且 $f''(x_0)=0$. 若 $f'''(x_0)$ 存在但不为零, 则 $x_0$ 是 $f(x)$的拐点.

8. 求下列函数的凸凹区间和扭转点.

   (1) $y=2x^3-3x^2-36x+25$;　　(2) $y=x+\frac{1}{x}$;

   (3) $y=x^{5/3}$;　　(4) $y=(1+x^2)e^x$;

   (5) $y=x^4$;　　(6) $y=x+\sin x$.

9. 求 $a,b$ 值, 使点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点.

10. 描绘下列各曲线的图形.

   (1) $y=x^3+6x^2-15x-20$;　　(2) $y=\frac{x^3}{2(1+x)^2}$;

   (3) $y=x-2\arctan x$;　　(4) $y=xe^{-x}$.

11. 设函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线为 $C$. 记 $C$ 上一点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $k(k\neq 0)$, 过点 $M$ 引曲线的法线, 在此法线上曲线凸的一侧取点 $D$, 使 $|DM|=\frac{1}{k}=\rho$, 以 $D$ 为圆心, $\rho$ 为半径作圆; 这个圆称为曲线在点 $C$ 处的曲率圆, 其圆心 $D$ 称为曲线在点 $M$ 处的曲率中心, 半径 $\rho$ 称为曲线在点 $M$ 处的曲率半径.

    求下列曲线在指定点的曲率, 曲率中心及曲率半径.

    (1) $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处;　　(2) $y=e^{-x^2}$ 在点 $(0,1)$ 处.

12. 求下列曲线在指定点的曲率.

    (1) $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ 在 $t=1$ 处;　　(2) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处.

13. 对数曲线 $y=\ln x$ 上哪一点的曲率半径最小? 并求出该点的曲率半径.

14. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的凸函数且有上界. 求证: $f(x)$ 是常数.

## §3.6 Taylor 展开

设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 可微, 则

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x, x_0),$$

其中

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

因此, 在 $x_0$ 的附近, 可以用一个关于 $x - x_0$ 的一次多项式

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

近似 $f(x)$. 多项式 $T_1(x)$ 与 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 取相同的值并有相同的切线 $T_1(x_0) = f(x_0)$, $T_1'(x_0) = f'(x_0)$. 在 $x = x_0$ 的附近，与 $f(x)$ 的误差（或称为余项）$R(x, x_0) = f(x) - T_1(x)$ 当 $x \to x_0$ 时, 是比 $x - x_0$ 更高阶的无穷小量.

当假设 $f$ 在一个区间 $I$ 内有二阶导数时, 则对于 $I$ 内的任意两点 $x$ 和 $x_0$, 类似 Lagrange 中值定理的证明, 构造辅助函数

$$g(t) = f(t) - T_1(t) - \frac{f(x) - T_1(x)}{(x - x_0)^2}(t - x_0)^2$$

根据 $g(t)$ 的构造以及 $T_1(x)$ 满足的性质有,

$$g(x) = g(x_0) = 0, \quad g'(x_0) = 0$$

所以由 Lagrange 中值定理可知在 $x_0$ 和 $x$ 之间, 存在一点 $\xi_0$, 使得 $g'(\xi_0) = 0$, 在 $\xi_0$ 和 $x_0$ 之间, 存在一点 $\xi$, 使得 $g''(\xi) = 0$. 即

$$g''(\xi) = f''(\xi) - 2\frac{f(x) - T_1(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

所以

$$R(x, x_0) = f(x) - T_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

即余项 $R$ 至少是一个关于 $x - x_0$ 的二阶无穷小量. 通过这个余项, 我们可以了解函数 $f(x)$ 在整个区间 $I$ 上和一次多项式 $T_1(x)$ 之间的误差.

自然希望能够用更高阶的 $n$ 次多项式 $T_n(x)$ 在 $x = x_0$ 附近去近似 $f(x)$ 并能提高近似的精度，即对余项 $R_n(x, x_0)$ 作出估计。甚至希望余项 $R_n(x, x_0)$ 随着 $n$ 的增大而趋于零，这样一来函数就可以表示成一个“无穷次的多项式”（称之为幂级数），后者将在“无穷级数”一章中讨论。

### 3.6.1 Taylor 公式

首先要确定, 什么样的多项式能够在 $x \to x_0$ 时是函数 $f(x)$ 的高阶近似? 或者说如果有一个 $n$ 次的多项式 $T_n(x)$, 在 $x \to x_0$ 时是函数 $f(x)$ 的高阶近似, 如何确定它的系数 $a_0$, $a_1$, $\cdots$ , $a_n$?

**定理 3.32** 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内 $n$ 阶可导.

$1^\circ$ 对于任何一个 $x-x_0$ 的 $n$ 次多项式 $T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$, 如果 $f(x)$ 与 $T_n(x)$ 差当 $x \to x_0$ 时是比 $(x-x_0)^n$ 更高阶的无穷小量, 即

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

那么 $T_n(x)$ 的系数只能是

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \cdots, n,$$

也就是说这样的多项式只能是如下形式

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称上述多项式 $T_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的 $n$ 次 *Taylor* **多项式**.

$2^\circ$ 函数 $f(x)$ 与它的 *Taylor* 多项式 $T_n(x)$ 之间的差 $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是 $(x-x_0)^n$ 的高阶无穷小量, 即

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

或者说, 当 $x \to x_0$ 时, 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n),$$

上式称为函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的带 *Peano* 余项的 *Taylor* 公式.

**证明** 定理$1^\circ$中的条件等介于

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^k} = \lim_{x \to x_0} \frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^k} = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

这是定理证明的基本出发点. 利用归纳法, 当 $k=0$ 时,

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - T_n(x)) = 0$$

由此推得

$$a_0 = f(x_0), \text{ 或 } T_n(x_0) = f(x_0)$$

利用这个结果，当 $k=1$ 时，

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{x-x_0}\\&=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\big(a_1+a_2(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^{n-1}\big)\right)\end{aligned}$$

因此得

$$a_1=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0),\ \text{或}\ T_n'(x_0)=f'(x_0)$$

如果对于任意的 $1\leqslant k\leqslant n$, 有

$$a_0=f(x_0),\ a_1=f'(x_0),\ \cdots,\ a_{k-1}=\frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}$$

也就是

$$T_n(x_0)=f(x_0),\ T_n'(x_0)=f'(x_0),\ \cdots,\ T_n^{(k-1)}(x_0)=f^{(k-1)}(x_0)$$

所以当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)-T_n(x)$直至 $k-1$ 次导函数都是无穷小量，因此对于 $k$，多次使用 L'Hospital 法则，得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^k}=\lim_{x\to x_0}(f^{(k)}(x)-T_n^{(k)}(x))=0$$

所以

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ \text{或}\ T_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0),\ 1\leqslant k\leqslant n.$$

上述证明过程实际上是一个构造过程, 容易验证当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 与它的 Taylor 多项式 $T_n(x)$ 的差 $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$ 以及直至$n$ 阶导数都是无穷小量, 因此多次使用 L'Hospital 法则, 就有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=0.$$

□

特别, 如果函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域内有 $n$ 阶导数, 定理 3.32 中取 $x_0=0$, 则 Taylor 公式为

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),\quad x\to 0$$

并称之为函数 $f(x)$ 的 $n$ 阶具有 Peano 余项的 **Maclaurin 公式**（或展开式）.

### 3.6.2 余项的表示与估计

定理 3.32 有一定的局限性, 它只反映了当 $x\to x_0$ 时函数的性态. 我们进一步希望能够对余项有一个较为精确的估计, 而不仅仅是当 $x\to x_0$ 时的性态. 为此我们加强条件, 假设函数 $f(x)$ 在某个区间具有直至 $n+1$ 阶的导数. 事实上, 我们有

**定理 3.33** 设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内有 $n+1$ 阶导数, $x$ 和 $x_0$ 是 $I$ 中任意两点, $T_n(x)$ 是 $f$ 在 $x_0$ 处的 $n$ 阶 *Taylor* 多项式. 则在 $x$ 和 $x_0$ 之间存在一个数 $\xi$, 使得

$$f(x) = T_n(x) + R_n$$

中的余项 $R_n$ 具有下列形式

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

或者说 $f(x)$ 可以表示成

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

$R_n$ 称为 *Lagrange* 余项, 而上面这个公式称为具有 *Lagrange* 余项的 *Taylor* 公式.

**证明** 设辅助函数如下

$$g(t) = f(t) - T_n(t) - \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}(t-x_0)^{n+1},\ t \in I$$

显然，$g(t)$ 有 $n+1$ 阶导数，且满足

$$g(x_0) = g(x) = 0,\quad g^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - T_n^{(k)}(x_0) = 0,\ k = 1, 2, \cdots, n$$

根据微分中值定理，存在介于 $x$ 和 $x_0$ 之间的数 $\xi_1$ 使得 $g'(\xi_1) = 0$,结合已知条件 $g'(x_0) = 0$，继续对 $g'(t)$ 运用微分中值定理推出，存在介于 $x_0$ 和 $\xi_1$ 之间的数 $\xi_2$，使得 $g''(\xi_2) = 0$. 如此类推，在 $\xi_n$ 和 $x_0$ 之间 ( 当然也在 $x$ 和 $x_0$ 之间 )，存在一个数 $\xi$ 使得 $g^{(n+1)}(\xi) = 0$。注意到 $T_n^{(n+1)}(t) \equiv 0$，所以

$$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = 0$$

即

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

□

因为 $\xi$ 是介于 $x$ 和 $x_0$ 的一个数, 所以可表示成为

$$\xi = x_0 + \theta(x-x_0),\quad 0 < \theta < 1$$

因此 Lagrange 余项 $R_n$ 也表示成

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

事实上, 根据不同的需要, Taylor 公式的余项 $R_n(x)$ 有多种不同的表达形式. 在第 5 章中还将给出一个积分形式的表达式.

同时也注意到, 当 $n=0$ 时, 定理 3.33 就是熟知的 Lagrange 中值公式. 因此定理 3.33 的结果, 也可看成是 Lagrange 中值定理的推广.

对于 Taylor 展开的几何解释可以从下列两个方面来看. 首先注意到在一点 $x_0$ 附近, 函数 $f(x)$ 与它的 Taylor 多项式 $T_n(x)$ 之间的误差随着 $n$ 的增大越来越小, 而且 $f(x)-T_n(x)$ 在 $x_0$ 处直至 $n$ 导数都为零 $f(x_0)-T_n(x_0)=0$, $f'(x_0)-T_n'(x_0)=0, \cdots$, $f^{(n)}(x_0)-T_n^{(n)}(x_0)=0$, 我们称它们所定义的曲线有 $n$ 阶接触 ( 事实上完全类似地可以定义任意两个函数之间的 $n$ 阶接触 ), $T_n(x)$ 也称为 $f(x)$ 的 **密切 "抛物线"**, 虽然只有当 $n=2$ 时, $T_2(x)$ 才是真正的抛物线. 图3.26 是关于函数 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 处的最初三条密切抛物线, 从中读者可以体会 "密切" 的含义. 其中

$$T_1(x)=1+x,\ T_2(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2,\ T_3(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3.$$

另一方面, 在求极值过程中, 在一个驻点 $x_0$ 处( 即 $f'(x_0)=0$ ), 如果二阶导数 $f''(x_0)\neq 0$, 则根据二阶导数在 $x_0$的正或负, 推断函数在 $x_0$ 处取到极大或极小值. 但是当 $f''(x_0)=0$ 时, $x_0$ 是极值点或不是极值点的可能性都有 ( 例如对于 $f(x)=x^4$, 在驻点 $x=0$ 处, 虽然 $f''(0)=0$, 但是极小值点. 而对于 $f(x)=x^3$ 情况则完全不同, 虽然同样 $x=0$ 是驻点, 而且同样有 $f''(0)=0$, 但是 $x=0$ 不是极值点 ). 利用 Taylor 展开我们可以给出一般性的充分条件: 设 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的驻点即 $f'(x_0)=0$ ), 观察 $f(x)$ 在一个驻点处的 Taylor 展开式,

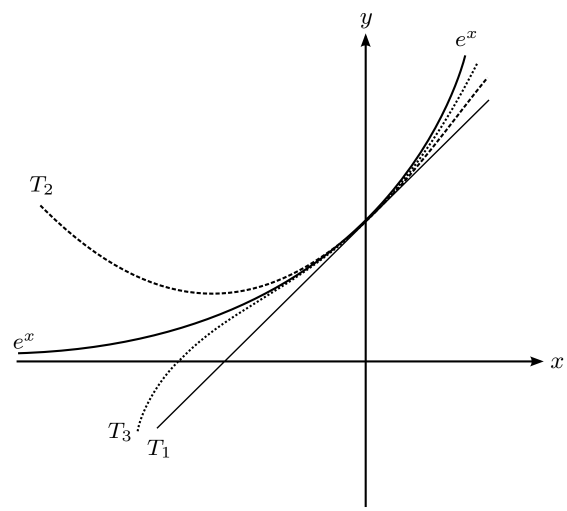


图 3.26

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

这时, 问题的关键是看上式右边的第一个非零项是 $x-x_0$ 的偶次幂还是奇次幂. 对于偶次幂, $x_0$ 是极值点, 在该点取到极大还是极小取决于这一项的系数是负还是正. 对于奇次幂, $x_0$ 不是极值点. 读者不妨给予严格的证明 ( 习题中的第11题 ).

**推论 3.34** 设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内有有界的 $n+1$ 阶导函数, 即 $|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M$,

则在区间 $I$ 上, $f(x)$ 与它的 *Taylor* 多项式之间的误差 ( 也就是余项 ) 是

$$|f(x)-T_n(x)|=|R_n|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

该公式使得误差更加清晰. 特别当 $n\to\infty$时, 有 $R_n\to 0$, 这是今后我们考虑把函数表示成“无穷次多项式”时的一个最简单的保证.

**推论 3.35** 设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内具有 $n+1$ 阶导数, 如果在一点 $x_0$ 处存在自然数 $r$, $r<n$ 使得

$$f(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\ \cdots,\ f^{(r-1)}(x_0)=0,\ f^{(r)}(x_0)\neq 0$$

那么称 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个 $r$ 重零点. 结论是 $x_0$ 是 $f(x)$ 的 $r$ 重零点的充分必要条件是存在一个函数 $g(x)$, 使得

$$f(x)=(x-x_0)^r g(x),\ g(x_0)\neq 0$$

**证明** 设 $x_0$ 是 $f(x)$ 的 $r$ 重零点, 利用 Taylor 公式, 将 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处展开得

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\\
&=(x-x_0)^r\left(\frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-r}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n-r+1}\right)\\
&=(x-x_0)^r g(x),
\end{aligned}$$

其中

$$g(x)=\frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-r}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n-r+1}$$

满足 $g(x_0)=\frac{1}{r!}f^{(r)}(x_0)\neq 0$。反之则只需要利用 Leibniz 求导法则可直接验证. 当然上述结果也可用 L'Hospital 法则来证明.

当 0 是区间 $I$ 内一点时, Taylor 公式的一个特殊形式值得单独提出. 在公式中取 $x_0=0$, 则 $\xi=\theta x,\ \ 0<\theta<1$, 因此

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

这个在 $x_0=0$ 的 $n$ 阶 Taylor 展开式也称为具有 Lagrange 余项的 Maclanrin 公式. 下面我们列出五种常见初等函数的 Maclanrin 公式.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x), \qquad (x > -1)$$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}. \qquad (0 < \theta < 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(x), \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

$$R_{2m}(x) = \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}\cos\theta x, \qquad (0 < \theta < 1).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + R_{2m-1}(x), \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$R_{2m-1}(x) = \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}\cos\theta x. \qquad (0 < \theta < 1)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}. \qquad (0 < \theta < 1).$$

对于最后一个展开式, 当 $\alpha$ 是自然数时, $(1+x)^\alpha$ 就自动化为 Newton 二项式公式.

为了求出函数 $f(x)$ 在一点 $x_0$ 的 Taylor 公式, 原则上应求出函数在 $x_0$ 点的导数值$f^{(k)}(x_0)$ , $k = 0, 1, 2, \cdots n$. 但有时候函数的高阶导数值并不容易计算. 因此可以采取其他间接方式. 这是基于对Taylor 公式基本含义的下述理解:

定理 3.32 的基本含义是, 如果函数 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 则无论用什么方法, 只要得到具体形式

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0$$

的展开式, 则它一定就是函数 $f$ 的 Taylor 公式. 作为副产品, 我们也顺便计算出函数在 $x_0$ 的各阶导数 $f^{(k)}(x_0) = k!a_k$. 下面对 Maclaurin 公式给出具体例子.

**例 3.6.1** 求函数 $e^{-x^4}$ 的 $4n$ 阶 Maclaurin 公式.

**解** 因为当 $x \to 0$时, $-x^4 \to 0$, 利用 $e^x$ 展开的结果, 直接将 $-x^4$ 替代 $e^x$ 展开式中的 $x$, 有

$$\begin{aligned} e^{-x^4} &= 1 + (-x^4) + \frac{(-x^4)^2}{2!} + \frac{(-x^4)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x^4)^n}{n!} + o((-x^4)^n), \ x \to 0 \\ &= 1 - x^4 + \frac{x^8}{2!} - \frac{x^{12}}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{4n}}{n!} + o(x^{4n}), \ x \to 0 \end{aligned}$$

这就是所要求的 Maclaurin 公式! 由此也得到了

$$(e^{-x^4})^{(4k)}\Big|_{x=0} = \frac{(-1)^k(4k)!}{k!},$$

而在 $x=0$ 处的其他各阶导数均为零. 这种方法, 要比直接计算函数 $e^{-x^4}$ 的各阶导数容易的多.

**例 3.6.2** 求 $\cos^2 x$ 的 $2n$ 阶的 Maclaurin 公式.

**解** 利用

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x,$$

以及 $\cos x$ 的 Maclaurin 公式, 注意到当 $x \to 0$ 时, $2x \to 0$, 所以

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n-2}}{(2n-2)!} + o((2x)^{2n})\right)\\ &= 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}2^{2n-3}x^{2n-2} + o(x^{2n}), \quad x \to 0\end{aligned}$$

下面一个例子是利用函数的展开式, 计算极限问题.

**例 3.6.3** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^4}-\cos^2 x - x^2}{x^4}$.

**解** 这是一个 $\frac{0}{0}$ 型的未定式. 如果用 L'Hospital 法则, 则会遇到复杂的求导过程. 如果利用函数的 Maclaurin 公式, 由前面的例子

$$\begin{aligned}e^{-x^4} - \cos^2 x - x^2 &= (1 - x^4 + o(x^4)) - (1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)) - x^2\\ &= -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0.\end{aligned}$$

所以所求的极限为:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^4} - \cos^2 x - x^2}{x^4} = -\frac{4}{3}.$$

注意, 由于分母在 $x \to 0$ 时, 是一个 4 阶无穷小量, 因此分子只要展开到 4 阶即可. 另一方面, 在本题的计算过程中, 不管是有限个无穷小量的和, 还是有限的数乘以无穷小量, 其结果还是无穷小量.

**例 3.6.4** 设 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f(x)$ 在 $x=2$ 的 Taylor 公式.

**解** 由 $\frac{1}{x} = \frac{1}{x-2+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}+1\right)^{-1}$. 在 $(1+x)^{-1}$ 的 Maclaurin 公式中, 用 $\frac{x-2}{2}$ 代替 $x$, 就得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x-2}{2} + \cdots + (-1)^n\left(\frac{x-2}{2}\right)^n + 2R\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{x-2}{2^2} + \cdots + (-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + R,\end{aligned}$$

这里

$$R=\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n+1}}{2^{n+2}}\left[1+\frac{\theta(x-2)}{2}\right]^{-n-2}, \qquad (0<\theta<1).$$

**例 3.6.5** 计算 $e$ 的值, 使误差不超过 $10^{-5}$.

**解** 在 $e^x$ 的展开式中, 取 $x=1$, 得

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad 0<\theta<1.$$

由于

$$0<\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$$

所以, 只要确定 $n$, 使得

$$\frac{3}{(n+1)!}<10^{-5}$$

即可, 易知, 要达到这样的精度, 只需取 $n=9$, 这时

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{9!}=2.718282$$

**例 3.6.6** 证明 $e$ 是无理数.

**证明** (反证法) 如果 $e$ 是有理数, 设 $e=\frac{q}{p}$, 其中 $p$, $q$ 是正整数. 取 $n>p$ 且 $n>3$, 则

$$e=\frac{q}{p}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!} \quad 0<\theta<1.$$

于是有

$$\frac{n!q}{p}=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{n!e^\theta}{(n+1)!}$$

由 $n$ 的选取可知, 上式除右边最后一项外, 其余各项都是整数. 因此 $\frac{n!e^\theta}{(n+1)!}$ 也必是整数. 但实际上

$$0<\frac{n!e^\theta}{(n+1)!}=\frac{e^\theta}{n+1}<\frac{3}{n+1}<\frac{3}{4}<1,$$

矛盾. 这说明 $e$ 不是有理数.

**例 3.6.7** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上二阶可导, 且对任意的 $x$, 有 $|f''(x)|\leqslant M$ ( $M$ 是一个常数 ), 以及 $f(0)=f(1)=0$. 证明: 在 $[0,1]$ 区间上有 $|f(x)|\leqslant\frac{M}{8}$.

**证明** 对任意的 $x\in(0,1)$, 由 Taylor 公式, 得

$$f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2, \quad \xi_1\in(0,x)$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2, \quad \xi_2\in(x,1)$$

将第一式乘以 $(1-x)$, 第二式乘以 $x$, 然后相加得

$$|f(x)|=\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}x(1-x)^2\right|\leqslant\frac{M}{2}x(1-x)\leqslant\frac{M}{8}.$$

## 习题 3.6

1. 写出下列函数的 (具有皮亚诺余项的) 马克劳林展开式.

(1) $y=\frac{x^3+2x+1}{x-1}$; (2) $\sin^2 x$.

2. 求出函数 $e^{\sin x}$ 的 (具有皮亚诺余项的) 三阶马克劳林展开.

3. 求出函数 $\ln\cos x$ 的 (具有皮亚诺余项的) 六阶马克劳林展开.

4. 已知 $f(x)$ 是一个四次多项式, 并且 $f(2)=-1,\ f'(2)=0,\ f''(2)=2,\ f'''(2)=-12,$ $f^{(4)}(2)=24$. 计算 $f(-1),\ f'(0),\ f''(1)$.

5. 求下列函数具有拉格朗日型余项的泰勒公式.

(1) $y=\tan x$ 在 $x=0$ 的二阶泰勒展开式;

(2) $y=\frac{1}{x}$ 在 $x=-1$ 的 $n$ 阶泰勒展开式.

6. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$; (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$.

7. 设函数 $f(x)$ 处处有 $n+1$ 阶导数, 证明: $f(x)$ 为次数不超过 $n$ 的多项式的充分必要条件是 $f^{(n+1)}(x)$ 恒为零.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导, 且对任意 $x\in[0,2]$, 有 $|f(x)|\leqslant1$ 及 $|f''(x)|\leqslant1$. 证明: $|f'(x)|\leqslant2, x\in[0,2]$.

9. 设 $n$ 为自然数, 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}x^{n+1}, & x\ \text{为有理数}\\ 0, & x\ \text{为无理数}\end{cases}$. 证明 $f'(0)=0$; 但 $f''(0)$ 不存在. (提示: 证明 $f(x)$ 仅在一点 $x=0$ 可导.)

注意, 我们显然有

$$f(x)=0+0\cdot x+0\cdot x^2+\cdots+0\cdot x^n+o(x^n),\quad x\to0.$$

但当 $n>1$ 时, 并不能断言 $f^{(k)}(0)=0(2\leqslant k\leqslant n)$. 因此, 定理 3.32 中的条件: 函数在点 $x_0$ 处有 $n$ 阶导数, 是至关重要的.

10. 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$, 它在 $x\neq0$ 处显然有任意阶导数. 证明, $f(x)$ 在 $x=0$ 处的任意阶导数都存在, 而且都等于零. (提示: 首先, 易用归纳法证明, 当 $x\neq0$ 时, 对 $n=1,2,\cdots$ 有 $f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$, 这里 $P_{3n}(t)$ 是 $t$ 的 $3n$ 次多项

式; 此外, 由导数定义及洛必达法则, 得出 (记 $y=\frac{1}{x}$))

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{2ye^{y^2}}=0,$$

即 $f'(0)=0$. 现在, 所说的结论易用归纳法及洛必达法则证明.)

本题意味着, 对任意的自然数 $n$, 函数 $f$ 在 $x=0$ 处的 $n$ 阶泰勒多项式是 0; 换句话说, 余项总是等于 $f(x)$. 因此, 即使是函数在一点附近的性态, 用 (在该点的) 足够高阶的导数也未必能将其揭示出来.

11. 设函数 $f(x)$ 在驻点 $x_0$ 处的 $n$ 阶微商存在, 并且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad 而\ f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

(1) 若 $n$ 为奇数, 则函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处无极值;

(2) 若 $n$ 为偶数, 则函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处取得极值. 当$f^{(n)}(x_0)>0$ 时, $f(x)$ 在点 $x_0$ 处取极小值; 当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时, $f(x)$ 在点 $x_0$ 处取极大值.

本题表明, 若函数 $f(x)$ 在驻点上存在如上所述的高阶导数, 则由此可确定驻点是否为极值点. 然而, 我们注意, 上一题中的函数 $f$ 在 $x=0$ 处显然有极小值, 但却不可能用这一判别法判别.

## 第 3 章综合习题

1. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 求 $f'(0)$.

2. 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数, 记函数

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

(1) 确定 $a$ 的值,使 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(2) 对 (1) 中确定的 $a$, 证明 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且导函数连续.

3. 设 $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$, 证明, 方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

4. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

5. 设 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续, 如果任给 $I$ 中两点 $x_1,x_2$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的凸函数.

6. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的两阶可微函数, $f(0)=f(1)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

7. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=0$, 及 $f'(a)f'(b)>0$. 证明, 在 $(a,b)$ 内存在一点 $\xi$, 使得 $f(\xi)=0$.

8. 设 $f$ 是 $[a,b]$ 上的可微函数, 则对介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任意值 $\lambda$, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $f'(\xi)=\lambda$. (提示: 无妨设 $f'(a)<f'(b)$. 先考虑特殊情形: $f'(a)<0, f'(b)>0$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$. 为了证明这一点, 注意 $f$ 在 $[a,b]$ 上必有最小值; 而由 $f'(a)<0$ 及 $f'(b)>0$ 可知, 最小值在 $(a,b)$ 内某点取得, 由此用费马定理即得结果. 为了将一般情形化为上述特殊情形, 只需考虑辅助函数 $g(x)=f(x)-\lambda x$.)

   注 本题的结果称为达布(Darboux)定理, 它揭示了导函数的一个令人惊奇的性质——具有介值性: 若函数在区间 $I$ 上可微, $c,d$ 是 $I$ 中任意两个不同点 $(c<d)$, 则 $f'(x)$ 在 $[c,d]$ 上取得 $f'(c)$ 与 $f'(d)$ 之间的一切值. 注意, 由于导函数不一定是连续函数, 因此, 上述结果不是连续函数介值定理的推论.

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=1, f(1)=\frac{1}{2}$. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得
$$f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上二阶可微, 且满足 $f(a)>0, f'(a)<0$, 以及当 $x>a$ 时, $f''(x)\leqslant 0$. 试证在区间 $(a,+\infty)$ 内, 函数 $f(x)$ 恰有一个零点.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, $f'(x)$ 严格单调增. 若 $f(a)=f(b)=\lambda$, 则对任意 $x\in(a,b)$, 有 $f(x)<\lambda$.

12. 函数 $\frac{\sin x^2}{x}\,(x>0)$ 表明, 若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 不能保证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在. 证明: 若已知这极限存在, 则其值必然为零.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时二阶可微, 且 $f''(x)<0, f(0)=0$. 证明: 对任意正数 $x_1,x_2$, 有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处存在二阶导数, 求
$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}.$$

15. 证明下列不等式.

   (1) 对任意实数 $x$, $e^x\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$;

   (2) 对 $x>0$, $x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$;

   (3) 对 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$;

   (4) 对任意实数 $x,y$, 有 $2e^{\frac{x+y}{2}}\leqslant e^x+e^y$.

16. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

17. 求 $\sqrt[n]{n}\ (n=1,2,\cdots)$ 的最大值.

18. 试给出函数 $x\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的一个尽可能小的上界.

19. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数,且 $f(-1)=0,\ f(1)=1,\ f'(0)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$.

20. 设 $a>1$, 函数 $f:\ (0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\ n=1,2,\cdots.$$

21. 利用凸函数的性质证明 Hölder 不等式: 设 $\{a_i\}$, $\{b_i\}$, $i=1,2,\cdots,n$ 是正数. $p,q$ 是大于 1 的正数, 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(提示: 考虑函数 $f(x)=x^p$.)

# 第 4 章　不定积分

## §4.1　不定积分及其基本计算方法

### 4.1.1　基本概念

微分学的一个基本问题是, 已知一个函数, 研究其函数值对自变量的变化率. 例如, 已知一个质点沿直线运动的规律 $s = s(t)$, 要确定质点运动的 ( 瞬时 ) 速度 $v = v(t)$, 或者加速度 $a = a(t)$; 另一方面, 有一个自然的反问题: 如果已知质点运动的速度 $v = v(t)$ ( 或加速度 $a = a(t)$ ) , 要确定其运动的规律 $s = s(t)$. 由于 $v(t) = s'(t)$ ( $a(t) = v'(t)$), 因此从数学上看, 类似这样的问题实际上是导数 (或微分) 的逆运算问题, 即求一个未知函数, 使得其导数等于一个已知的函数.

**定义 4.1**　设函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义. 若对每个 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x), \quad \text{或} \quad dF(x) = f(x)dx,$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $I$ 上的一个原函数.

容易看出, 一方面如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ ( 在区间 $I$ 上 ) 的一个原函数, 则 $F(x)$ 加上一个任意常数后仍然是 $f(x)$ 的一个原函数; 另一方面, 对于函数 $f$ 在区间 $I$ 上任两个原函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 它们的差 $F_1(x) - F_2(x)$ 一定满足 $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$, 所以是一个常数. 因此, $f$ (在区间 $I$ 上) 的原函数的全体可表示为

$$F(x) + C$$

的形式, 其中 $F(x)$ 为 $f$ (在区间 $I$ 上)的一个原函数, 而 $C$ 是任意的常数.

函数 $f$ 的原函数的全体也称为 $f(x)$ 的**不定积分**, 记作

$$\int f(x)\,dx,$$

其中 "$\int$" 称为积分号, $f(x)$ 称为**被积函数**, $f(x)dx$ 称为被积表达式.

注意, 在积分记号 $\int$ 下写的是所求原函数的微分, 而不是微商. 因此, 求函数 $f(x)$ 的不定积分, 应更确切地称为微分 $f(x)dx$ 的不定积分.

"不定积分" 这一名词以及其相应记号的由来, 我们将在 §5.1 节中作些解释. 读者很快能看到, 这一记号, 对于求不定积分 (原函数) 的运算, 将表现出许多便利.

由导数的几何意义,可以从几何上解释求函数 $f(x)$ 的原函数的问题: 在 $Oxy$ 直角坐标系中找出一条曲线 $y = F(x)$, 使其在 $x$ 处的切线斜率为 $f(x)$. 这样的一条曲线, 称为 $f(x)$ 的一条**积分曲线**, 将它沿着 $y$ 轴的方向作平移, 便得出所有符合上述要求的曲线. 因此, 在几何上, 不定积分 $\int f(x)dx$ 表示包含上述全部积分曲线的曲线族 (如图 4.1).

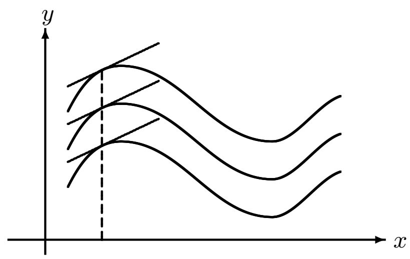


图 4.1

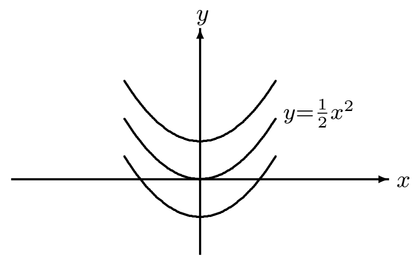


图 4.2

例如, 要求 $f(x)=x$ 的原函数, 就是要求 $Oxy$ 平面中这样的曲线 $y=F(x)$, 它在点 $(x,F(x))$ 处的切线的斜率随着 $x$ 的增长而线性增长. 这样的曲线的全体由 $y=F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$ 表示, 其中 $C$ 是任意常数（图 4.2）.

有些问题中, 要求出 $f(x)$ 的过给定一点 $(x_0,y_0)$ 的积分曲线. 这时, 可根据要求, 使得常数是一个确定的值. 以 $f(x)=x$ 为例, 如果要求求一条过 $(0,1)$ 的积分曲线, 则由 $1=F(0)$ 得 $C=1$, 所以这条特定的积分曲线是 $y=F(x)=\frac{1}{2}x^2+1$.

通常, 称确定常数 $C$ 的条件

$$y(x_0)=y_0, \quad \text{或 } y|_{x=x_0}=y_0,$$

为初始条件. 带有初始条件的求原函数问题, 称为初值问题.

我们需要讨论的问题是:

（1）什么样的函数有原函数（或者说什么样的被积函数有不定积分）?

（2）在第 3 章中, 我们注意到初等函数的导数仍然是初等函数, 那么作为导数的逆运算, 一个初等函数的原函数（或者说不定积分）是否一定还能够表示成初等函数?

（3）如果一个函数 $f(x)$ 有原函数, 那么如何具体算出 $f(x)$的原函数? 也就是如何求出函数的不定积分?

由第 3 章习题 3.3, 第 14 题可知, 符号函数 $y=\mathrm{sgn}x$ 是不能表示成一个函数的导数的, 因为作为其它函数的导函数, 是不可能有第一类间断点的函数. 这个例子说明, 不是所有的函数都有原函数. 我们将在下一章中证明一个重要事实: 对于给定区间上的连续函数, 在这区间上必有原函数.

关于第二个问题的回答是否定的. 确实有这样的初等函数, 例如它们的不定积分（原函数）存在, 却无法表示成初等函数. 例如, 可以证明下列积分

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \frac{1}{\ln x}\,dx, \quad \int \sin x^2\,dx$$

是不能表示成为初等函数的. 我们将在下一章中, 讨论这样的连续的被积函数和它们的不定积分.

注意, 今后我们说 “求出不定积分” , 是指可将不定积分表示为初等函数.

下面, 根据 §3.2 中微分公式表, 首先给出一些简单函数的不定积分 (其中 $C$ $C'$ 为任意常数).

(i) $\displaystyle\int 0\,dx = C;$

(ii) $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \tfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C,\quad (\alpha\neq -1);$

(iii) $\displaystyle\int a^x\,dx = \tfrac{1}{\ln a}a^x + C\ (a>0, a\neq 1);$

(iv) $\displaystyle\int \tfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C;$

(v) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C;\quad \int \cos x dx = \sin x + C;$

$\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C;\quad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C;$

(vi) $\displaystyle\int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C';$

$\displaystyle\int \tfrac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C = -\mathrm{arccot}\, x + C'.$

最后, 我们给出不定积分的基本性质

$1^\circ$　如果 $a$ 是常数 $(a\neq 0)$, 则 $\displaystyle\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx;$

$2^\circ$　$\displaystyle\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

上述性质是微分法则显然的推论, 但应该注意到, 关于不定积分的等式实际上是关于函数族的等式 (即一个集合等式). 性质 $1^\circ$ 的含义是, 当 $a\neq 0$ 时, $a\cdot f$ 的原函数可由 $a$ 乘 $f$ 的原函数得到; 而且 $a$ 乘 $f$ 的原函数也必是 $a\cdot f$ 的原函数. 性质 $2^\circ$ 具有类似的含义.

由上述性质, 可以将一个较复杂的不定积分化为若干个已知的不定积分的和, 进而得出结果.

**例 4.1.1**　求 $\int \frac{x^2-3x+1}{x+1}dx$.

**解**

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-3x+1}{x+1}dx &= \int\left(x-4+\frac{5}{x+1}\right)dx = \int xdx - 4\int dx + 5\int\frac{dx}{x+1}\\ &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5\ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

(注意, 上面第二个等式右端的每一个不定积分都含有一个任意常数, 最后合并记作 $C$; 关于这一点，以后不再申明.)

**例 4.1.2**　求 $\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$.

**解**

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx$$
$$= \tan x - \cot x + C.$$

**例 4.1.3** 求 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$.

**解**

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx$$
$$= -\frac{1}{x} - \arctan x + C.$$

然而, 依据上述性质求不定积分并不具有广泛性. 为了更好回答如何求不定积分的问题, 下面分别介绍两种办法—-换元法和分部积分法.

### 4.1.2 换元积分法

换元积分法是求不定积分的一种基本方法, 它与复合函数的微分法则相对应. 其原则, 大致地说, 是引入新的积分变量, 以改变被积函数的形式, 使不定积分易于求出.

**定理 4.2** 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数 (即 $F'(x) = f(x)$), 并设 $u = \varphi(x)$ 可微. 则我们有

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C.$$

即 $f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ 的一个原函数是 $F(\varphi(x))$.

**证明** 由一阶微分形式的不变性, 关系式

$$dF(u) = f(u) du$$

再以函数 $\varphi(x)$ 代替自变量 $u$ 时仍然成立, 由此导出所求等式.

在实践中, 假设待求的不定积分可以表达为形式 $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$, 或者写成 $\int f(\varphi(x)) d\varphi(x)$. 若不定积分 $\int f(u) du$ 易于求得, 则由定理 4.2 便求出想要求出的积分 $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$. 这一方法也称为“第一代换法”, 或“凑微分法”.

**定理 4.3** 设函数 $x = \varphi(t)$ 是严格单调的可微函数, 且 $\varphi'(t)$ 不取零值 (从而 $\varphi$ 有反函数 $\varphi^{-1}$). 若 $G(t)$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 的一个原函数, 即

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = G(t) + C,$$

则有

$$\int f(x) dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

即 $G(\varphi^{-1}(x))$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

**证明** 我们由复合函数求导法则, 反函数求导法则以及已知条件, 得出

$$\begin{aligned}\frac{dG(\varphi^{-1}(x))}{dx}&=\frac{dG}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\\&=G'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}\\&=f(\varphi(t))=f(x).\end{aligned}$$

由此导出所说的结果.

定理 4.3 提供了另一种方式的代换: 设待求的不定积分为 $\int f(x)dx$, 且不易直接积分. 我们可作一个适当的代换 $x=\varphi(t)$, (这里, $\varphi(t)$ 满足定理 4.3 中的要求), 将 $\int f(x)dx$ 化为

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

若右端的不定积分易于求得, 则只要在其结果中以 $t=\varphi^{-1}(x)$ 将变量 $t$ 换回变量 $x$, 就求出了 $\int f(x)dx$. 这一方法通常称为"第二代换法".

**例 4.1.4** 求 $\displaystyle\int\tan x\,dx$.

**解** 所求的不定积分 $\displaystyle=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{(d\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$.

**例 4.1.5** 求 $\displaystyle\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

**解** 记 $t=\ln x$, 所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx&=\int\frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}d(\ln x)=\int\frac{t}{\sqrt{1+t}}dt\\&=\int\frac{(1+t)-1}{\sqrt{1+t}}dt=\int\sqrt{1+t}d(1+t)-\int\frac{d(1+t)}{\sqrt{1+t}}\\&=\frac{2}{3}(1+t)^{3/2}-2\sqrt{1+t}+C\\&=\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}-2\sqrt{1+\ln x}+C.\end{aligned}$$

**例 4.1.6** 求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$.

**解** 设 $t=\sqrt{e^x+1}$, 则 $e^x+1=t^2$, 故 $e^xdx=2tdt$, 即 $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$. 所求的不定积分为

$$\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}\,dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\frac{t-1}{t+1}+C=2\ln\left(\sqrt{e^x+1}-1\right)-x+C.$$

**例 4.1.7** 求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

**解** 被积函数的定义域为 $x>0$. 我们令 $x=t^6\,(t>0)$ 以消除所有根号, 则

$\sqrt{x}=t^3, \sqrt[3]{x}=t^2, dx=6t^5dt$, 从而

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} &= 6\int \frac{t^2dt}{1+t^2} = 6\int dt - 6\int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 6(t-\arctan t)+C.\end{aligned}$$

最后, 由于 $t=\sqrt[6]{x}$, 故所求的不定积分为 $6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C$.

**例 4.1.8** 求 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$, 其中 $a$ 是一个常数, $a>0$.

**解** 为了去除二次根号,我们令 $x=a\sin t$, 这里 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. 则 $t=\arcsin\frac{x}{a}$, 且 $dx=a\cos tdt$. 故所求的不定积分为

$$\begin{aligned}\int a^2\cos^2 tdt &= \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C \\ &= \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C \\ &= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.\end{aligned}$$

**例 4.1.9** 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$, 这里 $a$ 是一个常数, $a>0$.

**解** 被积函数的定义域为 $x>a$ 或 $x<-a$. 我们先考虑 $x>a$ 的情形. 此时作三角代换 $x=a\sec t$ (其中 $0<t<\frac{\pi}{2}$), 可得出结果, 但本题采用双曲代换则更为方便.

令 $x=a\,\mathrm{ch}\,t$, 其中 $t>0$. (参考习题2.1, 第18题). 则 $dx=a\,\mathrm{sh}\,tdt$, $\sqrt{x^2-a^2}=a\,\mathrm{sh}\,t$, 故所求的积分化为 $\int dt=t+C$. 现在, 易由双曲余弦函数的反函数表达式得出 (对 $x>a$)

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right)+C=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C',$$

其中 $C'=C-\ln a$, 为任意常数.

当 $x<-a$ 时, 令 $x=-a\sec t\,(0<t<\frac{\pi}{2})$; 或者令 $x=-a\,\mathrm{ch}\,t$ $(t>0)$, 类似地可得出结果为 $\ln(-x-\sqrt{x^2-a^2})+C'$. (更简单的, 令 $x=-t$, 则将后一种情形, 化为了前一种情形.) 因此, 两种情形下的结果可合并为

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

**例 4.1.10** 求 $\int\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx$, 这里 $a$ 是常数, $a>0$.

**解** 被积函数的定义域为 $|x|<a$, 且 $x\neq 0$. 本题可以用三角代换求解, 这里介绍另一种有效的代换——倒数代换.

当 $0<x<a$ 时, 令 $x=\frac{a}{t}$, 则 $t>1$, 且 $dx=-\frac{a}{t^2}dt$. 由前例的结果, 易知所求的不

定积分为

$$-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}dt=-\frac{1}{a}\ln|t+\sqrt{t^2-1}|+C$$
$$=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C.$$

同样, 当$-a<x<0$ 时, 令 $x=\frac{a}{t}$ (其中 $t<-1$), 得出的结果与上面的相同. 综合起来, 得到

$$\int\frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C.$$

我们提醒读者, 若被积函数在定义域上连续, 则必须求出被积函数在整个定义域上的不定积分 (我们知道, 它必定存在), 而不是部分定义域上的不定积分. 我们举个例子, 以作说明.

**例 4.1.11** 求 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$.

**解** 当 $x\neq 0$时, 将被积函数的分子、分母同除以 $x^2$, 得出

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C.$$

为了求出 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$ 在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上的原函数 $F(x)$, 由已得的结果, 可设

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C_1, & x<0;\\ C, & x=0;\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C_2, & x>0.\end{cases}$$

由 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 得出

$$\lim_{x\to 0+0}F(x)=\lim_{x\to 0-0}F(x)=F(0),$$

即 $\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}+C_1=C=-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}+C_2$, 故 $C_1=C-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}$, $C_2=C+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}$. 由此 (应用习题3.3, 第13题) 易知

$$F'_+(0)=F'_-(0)=f(0).$$

从而 $F$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $F'(0)=f(0)$. 故

$$\int f(x)dx=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}-\frac{\pi}{2}\right)+C, & x<0;\\ C, & x=0;\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+\frac{\pi}{2}\right)+C, & x>0.\end{cases}$$

本题也可采用下面的方法 (避免了上面的麻烦):

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+x+1)+(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

(易于验证, 这一结果与前面的结果实质相同.)

### 4.1.3 分部积分法

不定积分中的分部积分法是处理积分问题时广泛采用的另一种方法, 它与函数乘积的微分法则

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

或

$$d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x)$$

相对应. 因此 $(u(x)v(x))'$ 的一个原函数就是 $u(x)v(x)$, 所以我们立即就有下面的定理.

**定理 4.4** (分部积分法) 设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 有连续的微商, 则

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\,dx;$$

这可简记为

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

定理中的任意常数进行了合并. 该定理最直接的应用是利用求 $u'v$ 和 $uv'$ 其中一个的不定积分, 给出另一个的不定积分.

**例 4.1.12** 求 $\displaystyle\int \ln x\,dx$.

**解** 取 $u(x)=\ln x, dv(x)=dx$, 则可取 $v(x)=x$, 得出

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x\ln x - \int xd(\ln x) = x\ln x - \int dx \\ &= x\ln x - x + C.\end{aligned}$$

**例 4.1.13** 求 $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx$ ($a,b$ 是不等于零的实数).

**解** 记所求的不定积分为 $I$, 则由分部积分公式, 得出

$$I = \frac{1}{a}\int \sin bx\cdot d(e^{ax}) = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

对右端第二个积分再用分部积分公式, 得

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx.$$

因此,我们有

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}I.$$

移项得到 (注意, $I$ 表示一个函数族)

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

**例 4.1.14** 记 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx \ (n=1,2,\cdots)$, 其中 $a$ 是非零实数. 证明下面的递推公式成立:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}I_n \ (n=1,2,\cdots).$$

(由此及 $I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$, 可递推地求得 $I_n$.)

**证** 分部积分 (即取 $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $v = x$, 则 $du = -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$, $dv = dx$), 得

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left(\int\frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx - a^2\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx\right) \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\left(I_n - a^2 I_{n+1}\right),
\end{aligned}$$

由此即得结果.

许多不定积分的计算, 需将分部积分法与换元法结合使用, 我们举一个这样的例子.

**例 4.1.15** 求 $\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}dx$.

**解** 我们先由分部积分得出

$$\begin{aligned}
\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}dx &= -\int 2xd\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\right) \\
&= -\frac{2x}{\sqrt{1+e^x}} + 2\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.
\end{aligned}$$

而上式中的不定积分可用代换法求得 (见例 4.1.6), 我们最后有

$$\int xe^x(1+e^x)^{-\frac{3}{2}}dx = 4\ln\left(\sqrt{e^x+1}-1\right) - 2x - \frac{2x}{\sqrt{e^x+1}} + C.$$

## 习题4.1

1. 用分项积分法求下列不定积分:

(1) $\int x(x-1)^3dx$; (2) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$;

(3) $\int (2^x+3^x)^2dx$; (4) $\int \tan^2 xdx$;

(5) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$; (6) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

2. 用第一代换法求下列不定积分:

(1) $\int (2x-1)^{100}dx$; (2) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$;

(3) $\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$; (4) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$;

(5) $\int x\sqrt{1-x^2}dx$; (6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;

(7) $\int \frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}dx$; (8) $\int \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}dx$;

(9) $\int \sin^2 xdx$; (10) $\int \sin^5 x\cos xdx$.

3. 用第二代换法求下列不定积分, 其中的 $a$ 均为正常数:

(1) $\int \sqrt{e^x-2}dx$; (2) $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$;

(3) $\int \frac{1}{(x^2-a^2)^{3/2}}dx$; (4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$;

(5) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx$; (6) $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$;

(7) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$; (8) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}dx$;

(9) $\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$; (10) $\int \frac{x^{1/7}+x^{1/2}}{x^{8/7}+x^{1/14}}dx$;

(11) $\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$; (12) $\int \frac{1}{x^8(1+x^2)}dx$.

4. 求下列的不定积分:

(1) $\int |x|dx$; (2) $\int \max(1,x^2)dx$.

5. 用分部积分法求下列不定积分:

(1) $\int x\sin x dx$;　　(2) $\int x^2\ln x dx$;

(3) $\int \cos\ln x dx$;　　(4) $\int x^2\cos 5x dx$;

(5) $\int \sec^3 x dx$;　　(6) $\int x^2 e^x dx$;

(7) $\int x\arcsin x dx$;　　(8) $\int x(\arctan x)^2 dx$;

(9) $\int (\arcsin x)^2 dx$;　　(10) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$.

6. 导出下列不定积分的递推公式:

(1) $\int \sin^n x dx \quad (n=1,2,\cdots)$;　　(2) $\int x^n e^x dx \quad (n=1,2,\cdots)$.

7. 求下列的不定积分:

(1) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$;　　(2) $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$;

(3) $\int \frac{1}{x^4+x^6}dx$;　　(4) $\int x\sqrt{x-2}dx$;

(5) $\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}dx$;　　(6) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}}dx$;

(7) $\int xe^x\sin x dx$;　　(8) $\int \frac{1}{(1+\tan x)\sin^2 x}dx$;

(9) $\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}dx$;　　(10) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x^2}dx$;

(11) $\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^3}dx$;　　(12) $\int \frac{x}{1+\sin x}dx$;

(13) $\int \arcsin\sqrt{x}dx$;　　(14) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$;

(15) $\int x\sin^2 x dx$;　　(16) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

(17) $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$;　　(18) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx$;

(19) $\int e^{2x}(1+\tan x)^2 dx$;　　(20) $\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$;

(21) $\int \cos x\cos 2x\cos 3x dx$;　　(22) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$;

(23) $\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}dx$;　　(24) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx$;

(25) $\int e^{-x^2/2}\frac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{\sin x}}dx$;　　(26) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$.

# §4.2　有理函数的不定积分

上一节已经介绍了求不定积分的一些基本方法和原则, 同时也指出了有许多初等函数的不定积分虽然存在, 却不是能用初等函数表示的. 然而, 在不定积分理论中有一个很有意义的一般结果: **一切有理函数的不定积分都是初等函数**. 因此对一些能够通过变换化为有理函数的函数类, 其积分也是初等函数.

## 4.2.1　有理函数的不定积分

所谓有理函数是指一个分子、分母都是 $x$ 的多项式的分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 其中

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0,\quad a_n\neq 0;$$
$$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0,\quad b_m\neq 0.$$

若 $n\geqslant m$, 称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理假分式; 若 $n<m$, 则称 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理真分式.

由多项式的除法易知, 任何有理假分式可表示为一个多项式与一个有理真分式之和. 由于多项式的原函数易于计算, 其结果仍是一个多项式. 因此, 求有理函数的不定积分, 只需考虑有理真分式的不定积分.

有理真分式的不定积分, 依靠下面两个属于代数学的事实, 这里不作证明.

**定理 4.5** (多项式因式分解)　*在实数范围内, 任何实系数的多项式 $Q(x)$ 可分解为*

$$Q(x)=b_m(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l},$$

*这里 $r_1+\cdots+r_k+2s_1+\cdots+2s_l=m$, 所有的 $\alpha_i,\beta_j,\gamma_j$ 都是实数, 且 $\beta_j^2-4\gamma_j<0$ $(j=1,2,\cdots,l)$.*

**定理 4.6** (部分分式分解)　*设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 分别是 $n$ 和 $m$ 次实系数多项式, 并且 $n<m$. 若 $Q(x)$ 已分解为定理4.5中的形式, 则存在实数 $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$, 使得*

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_{1,1}}{(x-\alpha_1)}+\cdots+\frac{A_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\cdots+\frac{A_{k,1}}{(x-\alpha_k)}+\cdots+\frac{A_{k,r_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}}\\&+\frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)}+\cdots+\frac{B_{1,s_1}x+C_{1,s_1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}}+\cdots\\&+\frac{B_{l,1}x+C_{l,1}}{(x^2+\beta_1x+\gamma_l)}+\cdots+\frac{B_{l,s_l}x+C_{l,s_l}}{(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l}}.\end{aligned}$$

简单地说, 若 $Q(x)$ 的分解中有因式 $(x-\alpha)^r$, 则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的部分分式分解中包含着项:

$$\frac{A_1}{x-\alpha}+\cdots+\frac{A_r}{(x-\alpha)^r};$$

若 $Q(x)$ 的分解中有因式 $(x^2+\beta x+\gamma)^s$ (其中 $\beta^2-4\gamma<0$), 则 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的部分分式分解中包含下列形式的项:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+\beta x+\gamma}+\cdots+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}.$$

如何对一个有理函数进行分解, 可先假设有理函数有上述分解表达式, 其中所有的常数 $A_i$, $B_i$, $C_i$ 待定. 然后进行通分, 比较通分后分子的各次幂的系数, 确定所有待定的常数. 这通常称为**待定系数法**. 定理 4.6 保证了待定系数是一定能够确定的.

定理 4.6 的主要作用是将一般的有理真分式分解为某些较简单的有理函数之和, 由此可将求 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的不定积分的问题, 化为求以下两种特殊类型的不定积分:

$$\text{(i)}\quad \int\frac{1}{(x-\alpha)^k}dx;\qquad \text{(ii)}\quad \int\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}dx.$$

其中 $k$ 为自然数, 而 $\beta^2-4\gamma<0$.

显然, 形如 (i) 的不定积分是初等函数 (注意, $k=1$ 及 $k>1$ 时的情形不同). 对于 (ii) 中的不定积分, 记 $t=x+\frac{\beta}{2}$, $a^2=\gamma-\frac{\beta^2}{4}$, 它可化为

$$\int\frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^k}dx=\frac{B}{2}\int\frac{2t}{(t^2+a^2)^k}dt+\left(C-\frac{B\beta}{2}\right)\int\frac{1}{(t^2+a^2)^k}dt.$$

当 $k=1$ 时, 上式右端的第一个不定积分是对数函数形式, 第二个是反正切函数形式, 所以是初等函数. 当 $k>1$ 时, 上式右端的第一个不定积分为

$$\frac{1}{(1-k)}\cdot\frac{1}{(x^2+\beta x+\gamma)^{k-1}}+C,$$

这是初等函数; 而由 §4.1 中例 4.1.14 的递推公式知, 上式右端的第二个不定积分也是一个初等函数. 这样, 我们就证明了有理真分式的原函数 (进而任意有理函数的原函数), 都是初等函数.

**例 4.2.1** 求 $\int\frac{1}{x^3+1}dx$.

**解** 被积函数的分母可分解为

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

由定理 4.6, 可设

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

其中, $A,B,C$ 均是待定的实数. 将上式去分母, 得到恒等式

$$A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=1.$$

比较等式两边同次幂的系数, 有

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -A+B+C=0, \\ A+C=1. \end{cases}$$

由此可解得 $A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=\frac{2}{3}$. (求 $A, B, C$ 也可采用"代值法". 例如, 在上述恒等式中取 $x=-1$, 可得 $A=\frac{1}{3}$; 取 $x=0$, 得 $C=\frac{2}{3}$; 再取 $x=1$, 得出 $B=-\frac{1}{3}$.) 现在

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx \\
&= \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} dx \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

求有理函数的不定积分, 原则上可先作出有理函数的部分分式分解. 为了做到这一点, 待定系数法是相当基本的方法. 然而, 针对问题的特点, 采用适当的恒等变形, 有时能更简单地作出所需要的分解. 另一方面, 有些问题中, 采用上述原则将产生冗长和复杂的计算, 我们宁愿采用其他的求解方法, 如下面的两个例子.

**例 4.2.2** 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} dx$.

**解** 我们有

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{(x^2+x+1)-(x+1)x}{x(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+x+1},$$

由此易知所求的不定积分为

$$\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

**例 4.2.3** 求 $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^8+1)} dx$.

**解** 我们有

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x(x^8+1)} dx = \int \frac{1+x^8-x^8}{x(x^8+1)} dx &= \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{8} \int \frac{d(x^8+1)}{x^8+1} \\
&= \ln|x| - \frac{1}{8} \ln(x^8+1) + C.
\end{aligned}$$

### 4.2.2 三角函数有理式的不定积分

由三角函数及常数经过有限次四则运算构成的表达式, 称为三角函数的有理式. 三角函数的有理式可记作 $R(\sin x, \cos x)$, 这里 $R(u, v)$ 是关于变量 $u, v$ 的有理函数, 即是两个关于 $u, v$ 的二元多项式之商.

三角函数有理式的不定积分

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

通过下列的**万能变换**

$$t = \tan\frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi),$$

可化为有理函数的积分, 因而其不定积分也是初等函数. 事实上, 通过“万能变换”, 有

$$\frac{1}{1+t^2} = \cos^2\frac{x}{2}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = \sin^2\frac{x}{2}.$$

由三角函数的倍角公式得

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

也就是 $\sin x$ 和 $\cos x$ (进而所有三角有理式) 都能经过“万能变换”表示成有理式. 而经过微分, 有

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

即 $x$ 对 $t$ 的导数也可表示成有理式. 由此可将 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 化为

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}dt,$$

这是关于 $t$ 的有理函数的不定积分, 故可表示为 $t$ 的初等函数; 从而 $\int R(\sin x, \cos x)dx$ 也是 $x$ 的初等函数.

**例 4.2.4** 求 $\int \frac{1}{5+4\sin x}dx$.

**解** 令 $t = \tan\frac{x}{2}$, 则

$$5 + 4\sin x = \frac{5t^2 + 8t + 5}{t^2 + 1}.$$

从而

$$\int \frac{1}{5+4\sin x}dx = 2\int \frac{dt}{5t^2+8t+5} = \frac{2}{3}\arctan\frac{5t+4}{3} + C$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3} + C.$$

对于双曲函数有理式的积分

$$\int R(\cosh x, \sinh x)dx$$

也可类似地引进一种万能变换

$$u = \tanh\frac{x}{2}$$

将积分化为有理函数的积分. 读者可充分利用双曲函数类似于三角函数的一系列性质进行讨论.

请读者注意, 原则上, 不管是三角有理函数还是双曲有理函数, 万能变换是处理它们不定积分的一般方法. 但针对具体问题, 适当地应用三角恒等变形（和双曲函数类似的恒等式）, 可采用更灵活、简便的方法.

**例 4.2.5** 求 $\int \sin^4 x dx$.

**解** 本题有多种解法; 用万能变换则较为繁琐. 我们两次用倍角公式, 得出

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.
\end{aligned}
$$

*注记* 上面引进的变换 $t = \tan\frac{x}{2}$ 的几何意义如下: 如图4.3, 在单位圆周上一点 $P$, 它的坐标为 $(u, v)$, $u = \cos x$, $v = \sin x$, 而 $t = \tan\frac{x}{2}$, 即是线段 $SP$ (或当 $|x| > \frac{\pi}{2}$ 时 $SP$ 的延长线) 与 $v$ 轴的交点 $R$ 的纵坐标. 因此, 单位圆周上的一般点 $P(u, v)$ 可通过参数 $t$ 的有理式

$$u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad v = \frac{2t}{1+t^2}$$

来表示. 它是圆周 (除 $S$ 点之外) 与整个实数轴（即 $v$ 轴）之间的一一对应: 当 $t$ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 时, 对应的点 $P(u, v)$ 则从 $S$ 点出发, 逆时针方向绕圆一周. 圆周这样的表示, 显然就是恒等式

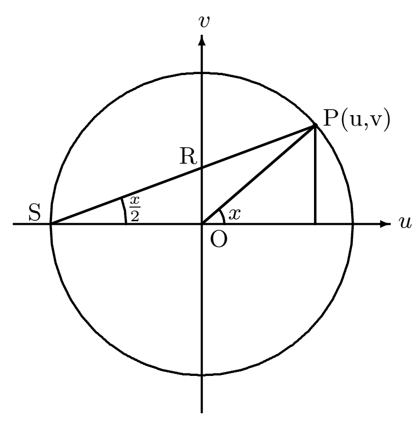

图 4.3

$$(t^2-1)^2 + (2t)^2 = (t^2+1)^2, \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

注意到, 当 $t$ 是整数时, 上式给出了 *Pythagoras* (毕达哥拉斯) 整数 $a = t^2 - 1$, $b = 2t$, $c = t^2 + 1$, 即满足方程 $a^2 + b^2 = c^2$ 的整数解 (勾股定理). 特别当 $t = 2$ 时, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

### 4.2.3 其他类型的初等函数的不定积分

如同前面的记号, 记 $R(u, v)$ 是关于变量 $u, v$ 的有理函数, 即 $R(u, v)$ 是两个关于 $u, v$ 的多项式所形成的分式.

**1° $R(x, \sqrt{1-x^2})$ 的不定积分**

积分

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$$

可通过下列代换

$$x = \cos u, \quad 则 \quad \sqrt{1-x^2} = \sin u, \quad dx = -\sin u du$$

化为三角函数的有理式的不定积分. 而后者通过万能代换 $t = \tan\frac{u}{2}$ 化为有理函数的积分, 所得到的结果是关于 $t$ 的初等函数. 因此, 只要利用两个代换的反函数, 就可以把本小节所讨论的函数的不定积分表示成初等函数.

如果将两次代换合起来

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

则

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

就可以直接将积分化为有理函数的积分问题.

**2° $R(x, \sqrt{x^2-1})$ 的不定积分**

在积分

$$\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$$

中, 我们利用双曲余弦函数作为代换

$$x = \cosh u, \quad 则 \quad \sqrt{x^2-1} = \sinh u, \quad dx = \sinh u$$

将积分化为双曲有理函数的积分. 再使用双曲有理函数的万能代换, 最终将积分化为有理函数的积分.

**3° $R(x, \sqrt{x^2+1})$ 的不定积分**

对于此类型的积分

$$\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx$$

可作代换 $x = \sinh u$ 将积分化为双曲有理函数的积分. 或者利用代换

$$u = x + \sqrt{x^2+1}$$

一步就可将积分化为有理函数的积分.

**4° $R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ 的不定积分**

对于这类不定积分, 其中 $a, b, c, d$ 是常数, 且 $ad \neq bc$, 可作变换

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \text{ 或 } x = \frac{dt^n - b}{-ct^n + a},$$

则 $\frac{dx}{dt}$ 是 $t$ 的有理式. 于是

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) = \int R\left(\frac{dt^n - b}{-ct^n + a}, t\right) \frac{dx}{dt}\, dt$$

化为有理函数的积分.

## 习题4.2

1. 求下列有理函数的不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-2}dx$; (2) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$;

(3) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x}dx$; (4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}dx$;

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$; (6) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

(7) $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{x^8+1}dx$; (8) $\displaystyle\int \frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}dx$.

2. 求下列三角函数有理式的不定积分, 其中 $a, b$ 是常数:

(1) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$; (2) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$;

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}dx$; (4) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

(5) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$; (6) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$;

(7) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$; (8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}dx$;

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin x+\sin 2x}dx$; (10) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx,\ a^2+b^2\neq 0$.

# 第 5 章　单变量函数积分学

## §5.1　积分

### 5.1.1　积分的定义

积分, 也称定积分, 是微积分中的另一个主要概念. 我们将通过两个分别取自几何与物理中的例子来引出积分的定义.

(i) 曲边梯形的面积

所谓"曲边梯形" 是指如图 5.1 所示的各种图形. 一般来说一个函数 $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ 所表示的图形覆盖下的面积可以剖分成下列图形的形式或曲边朝下的类似图形. 因此, 只要考虑每一个曲边梯形的面积就可以了.

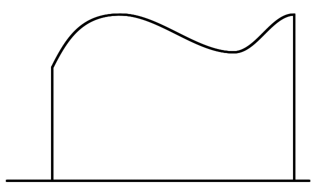

图 5.1

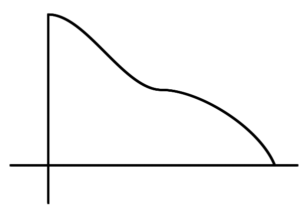

图 5.2

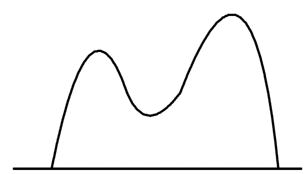

图 5.3

取定一个直角坐标系 $Oxy$, 使所考虑的曲边梯形由连续曲线 $y = f(x)$ $(f(x) \geqslant 0)$, 与 $x$ 轴, 两直线 $x = a$ 及 $x = b$ 所围成 (如图5.4).

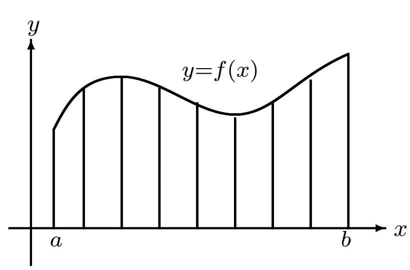


图 5.4

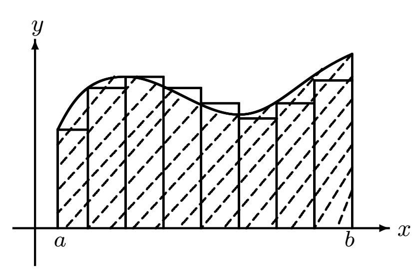


图 5.5

直观上看, 如果我们接受这样的假设: 这种图形的面积是一个有确定意义的数, 因而现在的工作就是求出这个数. 为此在 $a$ 与 $b$ 之间插入 $n-1$ 个分割点 $x_1$, $x_2$, $\cdots$ , $x_{n-1}$ 并记 $x_0 = a, x_n = b$, 这样 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} = x_n = b$, 称为区间 $[a, b]$的一个**分割**. 在每一个分割点上画出与 $x$ 轴垂直的直线, 于是所说的曲边梯形被分成 $n$ 个小 "长条"( 如图5.4 ).

但是求这些小长条面积的难度并未降低, 因此可以考虑用小的矩形来作近似 ( 如

图5.5). 更确切地说, 我们在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任意取一个点 $\xi_i$, 则每一小块矩形的高为 $f(\xi_i)$, 宽为 $x_i - x_{i-1}$, 因此面积是 $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, 它们的总和记为

$$\begin{aligned} S_n &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \end{aligned}$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 因此 $S_n$ 可视为曲边梯形面积的近似值. 如果当区间 $[a, b]$ 分割得越来越细, 即诸小区间的最大长度趋向于零时, "近似值" $S_n$ 趋于一个确定的极限, 那么这个极限值应该就可以定义为曲边梯形的面积.

(ii) 质点沿直线运动走过的路程

一个质点沿直线运动, 且在时间区间 $[a, b]$ 内任一时刻 $t$ 的速度为 $v = v(t)$, 我们考虑质点在这一段时间内走过的路程.

从物理意义上来看, 所说的路程当然存在. 为了求出这一路程, 我们用分割点 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, 将区间 $[a, b]$ 分为 $n$ 个小区间 $[t_{i-1}, t_i](i = 1, \cdots, n)$. 在每个区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一点 $\xi_i$, 将质点在时间区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的运动近似为以速度为 $v(\xi_i)$ 的匀速运动. 由此, 可得到质点从 $t = a$ 到 $t = b$ 走过的路程的近似值为

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i.$$

直观上看, 当 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta t_i \to 0(n \to \infty)$ 时, 近似值 $S_n$ 便趋于所求的路程.

无论是几何还是物理上的直观, 尽管令人信服, 但只能作为数学描述的导引. 下面我们给出严格的定义.

**定义 5.1** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义. 用分割

$$T: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

($x_i$, $i = 1, \cdots, n$ 称为分割点) 将区间 $[a, b]$ 分割成 $n$ 个小区间 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, \cdots, n)$. 在每一个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i$, 并记

$$\|T\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

那么

$$S_n(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上对应于分割 $T$ 的一个*Riemann* **(黎曼)和**, $\|T\|$ 称为分割的"模"或"宽度".

*如果有实数 $I$ 使得对任意一个正数 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 只要分割 $T$ 满足 $\|T\| < \delta$, 无论点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots$ 怎样选取, 都有*

$$|S_n(T) - I| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$$

*那么称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积; 并称$I$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分, 记为*

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

*有时也称当 $\|T\| \to 0$ 时, Riemann 和 $S_n(T)$ 的极限是$I$.*

注意到定义蕴含了两个“任意性”：一是分割的任意性, 二是点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \cdots$ 选取的任意性.

由定义我们立即看到, 函数可积以及它的积分, 反映的是函数在一个区间上的整体性质（这与函数的可微性完全相反）. 实际上, 如果记 $q_i = \frac{1}{b-a}\Delta x_i$, 则 $q_i > 0\,(i = 1, \cdots, n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 1$. 那么, $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 意味着函数在区间 $[a,b]$ 上 $n$ 个点的取值 $f(\xi_i)$ 的加权平均 $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i f(\xi_i)$ 具有一种好的性态: 在 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} q_i \to 0$ 时有极限.

积分的上述定义是十九世纪德国数学家 Riemann（黎曼）给出的, 因此如果在某个区间上的函数在这一意义下可积, 也称这函数在所说的区间上 Riemann **可积**, 相应的积分称为 Riemann **积分**.（使用这个名称, 也是为了区分上述积分与其它积分概念.）

记号 $\int_a^b f(x)dx$ 中, 积分号相应于求和号 $\sum$, 而作为一个整体, $f(x)dx$ 相应于 $f(\xi_i)\Delta x_i$, 称为被积表达式, $f(x)$ 称为被积函数, $x$ 称为积分变量, $a$ 与 $b$ 分别称为积分下限与积分上限.

容易看到, 用怎样的字母来表示积分变量, 是完全无关紧要的. 因此, 可以将 $\int_a^b f(x)dx$ 写成 $\int_a^b f(t)dt$, 或 $\int_a^b f(u)du$. 我们顺便提一下, 象 $\int_a^x f(x)dx$ 或 $\int_x^b f(x)dx$ 这样的表达式, 其中相同的字母既用来表示积分变量, 又用来表示积分的上 (下) 限, 这有时将引起误解, 因而应当避免使用.

积分是面积、路程这些具体问题的数学抽象, 它明确了这些直观概念的数学含义, 但问题还远远没有真正解决. 我们目前不知道哪些函数可积; 更不知道, 当一个函数在某个区间上可积时, 怎样求出相应的积分值.

### 5.1.2 可积函数类

什么样的函数可积, 是否能给出一个简明的准则判别一个函数在某个区间上可积, 这些问题不是一个简单问题. 首先指出函数可积的一个基本的必要条件, 它给出了可积函数的一个范围.

**定理 5.2** *若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.*

**证明**　根据定义, 可积函数的 Riemann 和 $S_n(T)$ 当 $\|T\| \to 0$ 时有极限 $A$, 所以对 $\varepsilon = 1$, 存在正数 $\delta$, 取定区间 $[a, b]$ 上满足 $\|T\| < \delta$ 的一个分割 $T$：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$,, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant |A| + 1$$

注意到上式对于任意一组点 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 都成立.

假如函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界, 则 $f(x)$ 必在某个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上无界. 现在再取定 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 这里 $i = 1, \cdots, n$, 但 $i \neq k$ , 保留 $\xi_k$ 的任意性, 此时

$$|f(\xi_k)|\Delta x_k \leqslant \left|\sum_{i \neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right| + |A| + 1$$

对任意 $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ 成立. 上式的右边是一个固定的数. 因此与 $f(x)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上无界矛盾. □

定理 5.2 能够用于判断某些函数在给定的区间上不可积, 但是定理 5.2 的逆并不正确. 例如, Dirichlet 函数 ( 见§2.1 ) 在任一区间 $[a, b]$ 上有界, 但是, 直接利用定义就可判断它在 $[a, b]$ 上是不可积的, 请读者自行完成证明.

现在, 我们罗列出几类重要且基本的可积函数类, 对于这些断言的一些证明将在§5.2 节讨论函数可积性后逐一完成.

**定理 5.3**　*闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数 ( 因而是有界的 ), 在 $[a, b]$ 上一定是可积的.*

**定理 5.4**　*若 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界, 且在这区间上至多只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.*

**定理 5.5**　*若 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的单调函数 ( 这蕴含了 $f$ 在 $[a, b]$ 上有界 ), 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.*

定理 5.3 是可积性理论中最为基本的结果. 特别地, 这一定理保证了 (曲边梯形) 面积的数学定义的合理性. 易于看到 ( 图5.6 ), 如果 $[a, b]$ 上的连续函数 $f$ 不恒为正, 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也有明了的几何含义.

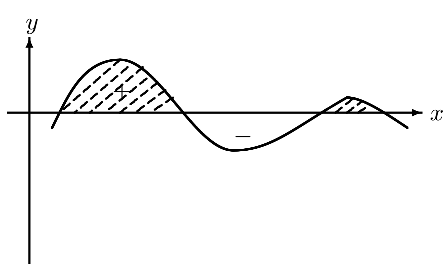

图 5.6

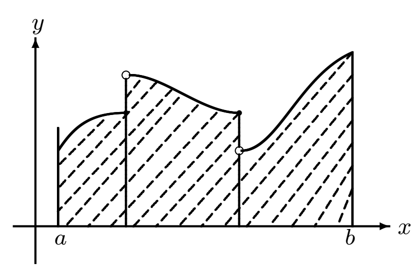

图 5.7

定理 5.4 是定理 5.3 的一个推广. 它表明可积函数类比连续函数类大. 因为连续函数是每一点都要求连续, 而积分是一个 “积累” 的极限, 所以对于在若干点有些问题尚可容忍. 图5.7 是一个具有有限个间断点的曲线所覆盖的面积的示意图.

定理 5.5 在理论上也甚为重要. 我们在此提及它, 主要是希望读者了解: 可积的函数也可以有无穷多个间断点. 例如, 函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)\\ 0, & x=0\end{cases},$$

在 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$ 这无穷多个点上间断; 但在区间 $[0,1]$上, $f$ 单调增且有界, 因此可积. 我们注意, 只有当函数在 $[a,b]$ 上有无穷多个间断点时, 定理 5.5 才显示出其意义.

*注记* 从上面的分析可以看出, 可积函数类包括了有有限个间断点的有界函数, 甚至包括了上述例子中有无限个间断点的单调有界函数. 但是 *Dirichlet* 函数说明虽然它是一个有界函数, 却是不可积的. 原因是 *Dirichlet* 函数处处间断. 自然会问, 是否可以通过精确刻划 “间断点的多少” 来区分函数的可积或不可积. 答案是肯定的, 这就是 *Lebesgue* 定理. 该定理的大致含义是函数可积的充分必要条件是在区间 $[a,b]$ 上函数的间断点构成的点集的 “总长度” 为 $0$ (详情见本教材第三册).

### 5.1.3 积分的初等例子

有一些基本且重要的函数, 能够通过定义来计算它们的积分. 为了叙述方便, 我们采用积分定义中的记号, 而不特别申明.

**例 5.1.1** 区间 $[a,b]$ 上的常值函数 $f(x)=c$ 的积分是 $\int_a^b c\,dx=c(b-a)$.

**证明** 因为常值函数在任何点的值都是一样的, 所以

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=c(b-a).$$

因此当 $\|T\|\to 0$ 时, $S_n$ 有极限, 且极限为 $c(b-a)$. 当 $c>0$ 时, 此例的几何意义为: 长、宽分别为 $c$ 与 $b-a$ 的矩形的面积是 $c(b-a)$, 这与初等几何中的定义一致.

**例 5.1.2** 设 $a<b$, 证明 $\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

**证明** 因为函数 $f(x)=x$ 连续, 所以可积. 即无论采取什么样的区间分割方式以及无论取什么样的点 $\xi_i$, 对应的 Riemann 和的极限一定存在. 在此前提下, 为了用定义计算积分, 我们可选择某种特殊的分割方式, 取特殊的点 $\xi$, 以便于处理相应的 Riemann 和. 这里我们将区间 $[a,b]$ 用分割点

$$a,a+h,a+2h,\cdots,a+(n-1)h,b=a+nh$$

划分为 $n$ 等份, 其中 $h = \frac{b-a}{n}$. 将每个小区间的右端点取作 $\xi_i$, 则相应的积分和为

$$\begin{aligned}S_n &= (a+h)h + (a+2h)h + \cdots + (a+nh)h \\ &= nah + \frac{1}{2}n(n+1)h^2 \\ &= a(b-a) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)(b-a)^2.\end{aligned}$$

故当 $n \to \infty$ 时, $S_n \to \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

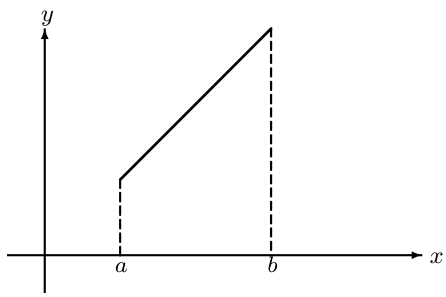


图 5.8

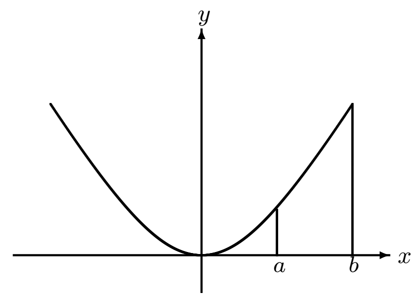


图 5.9

**例 5.1.3** 设 $a < b$, 证明 $\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$.

**证明** 因为被积函数 $f(x) = x^2$ 连续, 所以和第二个例子的理由一样, 并采用相同的分割点及点 $\xi$, 得出积分和

$$\begin{aligned}S_n &= (a+h)^2h + (a+2h)^2h + \cdots + (a+nh)^2h \\ &= na^2h + n(n+1)ah^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)h^3 \\ &= a^2(b-a) + \left(1+\frac{1}{n}\right)a(b-a)^2 + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)(b-a)^3.\end{aligned}$$

由此易知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$.

本题说明: 抛物线 $y = x^2$, 与 $x$ 轴, 以及两直线 $x = a$ 和 $x = b$ 围成的曲边梯形的面积为 $\frac{1}{3}(b^3 - a^3)$（图5.9）. 这个结果早在 Archimedes（阿基米德, 公元前287年—公元前212年）时代就已知道.

**例 5.1.4** 求 $f(x) = \sin x$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分.

**解** 首先, $f(x) = \sin x$ 是连续函数, 所以一定可积. 在此前提下, 取与第二个例子中一样的分割点, 并将每个小区间的右端点取作 $\xi_i$, 则 Riemann 和为

$$\begin{aligned}S_h &= h[\sin(a+h) + \sin(a+2h) + \cdots + \sin(a+nh)] \\ &= \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h\right)\right] \\ &= \frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(a+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(b+\frac{h}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

上式的推导过程中, 对

$$2\sin\frac{h}{2}[\sin(a+h)+\sin(a+2h)+\cdots+\sin(a+nh)]$$

中的每一项, 利用三角函数的积化和差公式就得到第一个等式, 只要 $h$ 不是 $2\pi$ 的倍数. 而第二个等式用到了 $b=a+nh$. 因此当 $h\to 0$ 时, 上式最左端的第一个因子

$$\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\to 1,$$

所以有

$$\int_a^b \sin x\,dx=-(\cos b-\cos a).$$

同理还可以得到

$$\int_a^b \cos x\,dx=\sin b-\sin a.$$

下面的例子, 涉及最简单的不连续函数的积分, 我们在后面的讨论中还将提到它.

**例 5.1.5** 设 $a<b$, 而 $c$ 满足 $a\leqslant c\leqslant b$. 考虑函数

$$J(x)=\begin{cases}0, & x\in[a,b], x\neq c,\\ 1, & x=c.\end{cases}$$

证明 $\int_a^b J(x)\,dx=0$.

**证明** $J(x)$ 仅在一点 $x=c$ 处间断; 由定理 5.4 知, $J(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 这一事实在下面的计算中同时也得到了证明.

对区间 $[a,b]$ 的任一划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 设包含点 $c$ 的区间是 $[x_{k-1},x_k]$, 则对任何点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 我们有

$$0\leqslant\sum_{i=1}^n J(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\Delta x_k\leqslant\|T\|$$

所以当 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i\to 0$时, 上面极限为零, 故 $J(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且积分是 0.

### 5.1.4 积分的基本性质

可以看出, 以上每一个例子都是用特殊的方法来处理的. 显然, 直接用定义计算积分, 不能使我们走得太远. 而微积分的一个基本点正是在于寻找和建立一种统一的思想方法得出这些结果. 而不是用这种或者那种特殊的方法. 在积分问题上, 我们将看到存在这样一个犀利的思想方法, 使得积分的计算问题——至少在很大程度上, 能以一种非凡的统一方式得以解决, 这就是著名的 Newton—Leibniz ( 牛顿—莱布尼兹 ) 公式.

在证明 Newton—Leibniz公式之前, 首先讨论积分的一些基本性质. 这些性质在直观上均是易于接受的.

我们要讲述的第一个性质, 称为积分的区间可加性, 几何上看就是面积的可加性.

**定理 5.6** 设 $a<c<b$. 如果函数 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f$ 在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上均可积. 反过来, 若 $f$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上可积, 则 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积. $f$ 在三个区间上的积分满足

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

详细证明见 §5.2节. 这里需要做一个重要说明: 至此我们仅对 $a<b$ 的情形定义了 $\int_a^b f(x)\,dx$. 为了今后的方便, 也需要在 $a=b$ 及 $a>b$ 的情形赋予符号 $\int_a^b f(x)\,dx$ 明确的意义: 定义的方式应使得定理 5.6 中积分的区间可加性公式保持成立. 因此, 当 $c=a$ 时

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^a f(x)dx+\int_a^b f(x)dx.$$

所以事先定义

$$\int_a^a f(x)\,dx=0$$

是合理的. 如果取 $b<a$, 则定义

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

这样, 积分的定义中上下限就没有了大小之分, 而且对与在可积区间范围内的任意三个数 $a$, $b$, $c$, 定理 5.6 中的可加性都成立（但要注意 $a$, $b$, $c$ 的顺序）.

**推论 5.7** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $f$ 在$[a,b]$ 的任何子区间 $[a',b']\subseteq[a,b]$ 上也可积.

这是因为由定理 5.6 , 首先得函数在区间 $[a,b']$ 上可积, 再次应用定理 5.6得在 $[a',b']$ 上也可积.

积分的第二个性质涉及可积函数的 (两类) 运算的可积性.

**定理 5.8** 设函数 $f$ 和 $g$ 在区间 $[a,b]$ 上可积. 则

1° 对任意常数 $\alpha,\beta$, 函数 $\alpha f+\beta g$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx;$$

2° 函数 $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 5.8 中的第一个结论的证明是显然的, 请读者自行完成. 称之为积分的线性性并易于推广到若干个可积函数情形: 即若干个可积函数的 “线性组合” 仍然可积, 并且积

分值就等于这若干个函数的积分的“线性组合”. 特别由 $f(x)$ 可积, 可推出 $\alpha f(x)$ 可积, 且

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$$

即被积表达式中的常数因子可提取至积分号之外.

由定理 5.8 中的 $1^\circ$, 还能推出可积函数的一个值得注意的基本性质: 考虑例 5.1.5 所定义的函数 $J(x)$, 它在可积且积分为 0 ; 进而, 对任意常数 $\alpha$, 函数 $\alpha J$ 在 $[a,b]$ 上可积且 $\int_a^b \alpha J(x)\,dx = 0$. 将 $\alpha J$ 加到一个 (在 $[a,b]$ 上) 可积的函数 $f$上, 所得的函数仍然可积, 并且

$$\int_a^b (f(x) + \alpha J(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

由此可见, 改变可积函数 $f(x)$在一点处(进而有限个点处)的值, 不会破坏其可积性, 也不改变其积分值.

定理 5.8 中第二个结论的证明留在 §5.2 节进行. 它表明两个可积函数的乘积仍然可积. 然而, 积分 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ 一般不能用 $\int_a^b f(x)\,dx$ 与 $\int_a^b g(x)\,dx$ 来表示, 一般而言,

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

**定理 5.9** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

$1^\circ$ 若对所有 $x \in [a,b]$ 有 $f(x) \geqslant 0$, 则

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0;$$

$2^\circ$ 若对所有 $x \in [a,b]$ 有 $f(x) \leqslant g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx;$$

$3^\circ$ 函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 且有

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

在定理 5.9 中, $1^\circ$ 称为积分的保号性, 可由积分的定义直接推出来. $2^\circ$ 称为积分的单调性, 它是 $1^\circ$ 及定理 5.8 中 $1^\circ$ 的显然推论.

值得注意的是, 当 $\int_a^b f(x)\,dx$ 不易计算时, $2^\circ$ 给出了估计这一积分的一个基本原则: 在 $[a,b]$ 上, 给出 $f(x)$ 的一个尽可能好的 (可积的) 上界函数 $g(x)$, 使得 $\int_a^b g(x)\,dx$ 易于计算, 这往往能得到 $\int_a^b f(x)dx$ 的较精确的上界. 同样的原则当然也适用于估计 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的下界.

3°中第一个断言表明, 绝对值运算保持可积性, 这是可积性理论中很基本的事实. 经过 §5.2 节的讨论之后, 将会很容易给出证明.

由定理 5.9 中的 2° 及例 5.1.1 可立即得出下列结论, 它也是积分的最为简明的估值.

**定理 5.10** 设函数 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, $M$ 及 $m$ 分别是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的一个上界及一个下界, 即对所有 $x\in[a,b]$, 有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,$$

则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M(b-a).$$

我们最后要讲述的一个基本性质, 称为积分学的中值定理, 它给出了连续函数的积分这一整体的量, 与其单个函数值的一种简明的联系, 这在理论上相当重要.

**定理 5.11** (积分中值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$上连续, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)(b-a).$$

**证明** 由 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 从而它在这个区间上有最大值 $M$ 与最小值 $m$, 于是由上述推论可知

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leqslant M.$$

根据连续函数的介值定理, 在区间 $[a,b]$ 上存在一点 $\xi$, 使得 $f(\xi)$ 恰好等于所谓的积分平均值 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$, 这就是要证明的结果. □

以上三个定理都有着鲜明的几何意义, 请读者自己绘图并给予解释.

我们顺便提几条关于积分中值定理的注释. 首先, 定理中的 $\xi$, 事实上可取在区间的内部, 即 $a<\xi<b$; 其次, 定理中连续性的条件是必不可少的; 最后, 中值定理还有一个有趣的“加权” 推广, 这也是积分学中值得注意的结果. 所有这些, 请读者参考习题5.1 中第 7 题和第 9 题.

### 5.1.5 微积分基本定理

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积. 由定理 5.6 的推论可知, 对任一区间 $[a',b']\subseteq[a,b]$, $f$ 在 $[a',b']$ 上也可积, 其积分依赖于积分限 $a'$ 和 $b'$, 即是两个积分限 $a'$ 和 $b'$ 的函数. 为了方便地讨论 (积分) 对于积分限的这种依赖关系, 我们将下限取为一个固定的数; 习惯上就取为 $a$, 而上限则用 $x$ 来表示, 以表明我们将上限看作变量. 于是, 我们记

$$\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

因为对每个 $x \in [a,b]$, 上式右端均唯一确定了一个数值与之对应, 因此 $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的一个新的函数, 称为**变上限的积分**.

注意, "变上限积分" 不是一个新的积分, 只不过是在区间 $[a,x]$ 上的定积分, 其中, 积分的上限有一个可活动的范围.

**定理 5.12** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 的变上限积分 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续.

**证明** 由于 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 所以 $f$ 在这区间上有界, 即存在 $M$ 使得 $|f(t)| \leqslant M$, $\forall t \in [a,\ b]$. 设 $x_0 \in [a,b]$, 则对任意的 $x \in [a,b]$, 有

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(x_0)| &= \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right| \\ &= \left|\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right| \\ &= \left|\int_{x_0}^x f(t)dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^x |f(t)|dt\right| \leqslant M|x-x_0|.\end{aligned}$$

注意, 根据定理 5.6的说明, 无需区分 $x > x_0$ 或 $x < x_0$. 因此, 任给一个正数 $\varepsilon > 0$, 只要取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, 则当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, 就有 $|\varphi(x)-\varphi(x_0)| < \varepsilon$, 这就证明了 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续. □

**定理 5.13** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $x_0 \in [a,b]$.

1° 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则 $f(x)$ 的变上限积分 $\varphi$ 在 $x = x_0$ 处可微, 且 $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.

2° 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 的变上限积分在 $[a,b]$ 上可微, 并且

$$\varphi'(x) = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad 或 \quad d\varphi(x) = d\int_a^x f(t)dt = f(x)dx,$$

即 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 所以我们也有这样的结论: 连续函数一定有原函数.

**证明** 首先考虑 $x_0$ 不是端点 $a$和 $b$ 的情形. 由于 $f$ 在 $x_0$ 处连续, 则对给定的 $\varepsilon > 0$, 有一个正数 $\delta$, 使得在 $|t-x_0| < \delta$ 且 $a \leqslant t \leqslant b$ 时,

$$|f(t)-f(x_0)| < \varepsilon.$$

因此, 若 $0 < |x-x_0| < \delta$ 而且 $a \leqslant x \leqslant b$, 则

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x [f(t)-f(x_0)]dt\right| < \varepsilon.$$

这就直接证得了 $\varphi'(x_0) = f(x_0)$.

若 $x_0$ 为 $a$ 或 $b$, 将上面的证明作显然的修改, 便能得出所说的结果. 定理中的 2° 是 1° 的直接推广. □

对于连续函数 $f(x)$ 来说, 因为 $\varphi(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 所以 $f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$, 都可以表示为 $F(x)=\varphi(x)+c$. 这样就有了下面的重要结果.

**定理 5.14** 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上连续函数, 则

1° $f(x)$ 的任意一个原函数 $F(x)$ ( 即 $dF(x)=f(x)dx$ ) 都可以表示成下列形式

$$F(x)=\varphi(x)+c=\int_a^x f(t)dt+c$$

2° 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

这一等式也常表示为

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b dF=F(x)\Big|_a^b$$

这就是 Newton—Leibniz **公式**, 也称为**微积分基本定理**. 它揭示了刻划局部性质的微分与反映整体性质的积分这两个概念之间的深刻的互逆关系.

值得一提的是: 从定义来看, 原函数 (即微分的逆运算) 和 (定) 积分原本是两件事情, 在揭示了它们之间的关系后, 我们才有理由使用“不定积分” 这一术语称呼原函数, 并且还将原函数的全体记为 $\int f(x)\,dx$.

从计算上看, 如果可以计算函数 $f$ 的变上限积分, 则可求出 $f$ 的一个原函数. 反之, 要计算一个函数 $f(x)$ 的积分, 如果我们知道它的一个原函数 $F(x)$, 则积分就是原函数在积分上、下限取值的差. 因此能否应用 Newton—Leibniz 公式计算积分, 关键在于能否有方法求出一个原函数 $F(x)$ 满足定理 5.14 的要求, 这正是第 4 章中工作的一个价值. 例如, 对于

$$F(x)=\frac{x^3}{3} \quad 和 \quad f(x)=x^2,$$

则在 $[a,b]$ 上有 $F'(x)=f(x)$, 由此就求出了前面例5.1.3 中的积分. (类似地可求得例5.1.1 和例5.1.2 中的积分.)

虽然 Newton—Leibniz 公式是微积分的基本定理, 但从计算积分角度看, 仍有例外发生. 这主要有两个方面的原因. 一是存在一些连续函数 ( 例如我们在第 4 章中已提到过的 $f(x)=e^{-x^2}$ ) , 虽然它们的原函数一定存在, 但原函数不能表示成为初等函数. 二是存在许多函数, 虽然在指定的区间上可积, 但却没有原函数, 因此, 计算这两类函数的积分时, 就无法应用 Newton—Leibniz 公式. 例如, 作为例5.1.1—例5.1.3 的对比, 例5.1.4 中的函数 $J(x)$, 在所说的区间上便没有原函数, 因此我们不能直接用 Newton—Leibniz 公式来计算例5.1.4 中的积分.

由于 Newton—Leibniz 公式的重要性, 我们因此提及下述结果, 它在较弱的条件下给出了相同的结论.

**定理 5.15** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可微, 且

$$F'(x)=f(x),\quad a<x<b.$$

则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

**证明** 设 $T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 是区间 $[a,b]$ 的任一个分割. 则

$$\sum_{i=1}^{n}(F(x_i)-F(x_{i-1}))=F(b)-F(a).$$

显然 $F(x)$ 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上满足微分中值定理的条件. 因此, 存在 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)\Delta x_i=f(\xi_i)\Delta x_i.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=F(b)-F(a).$$

上式左边是相应于分割 $T$ 的一个 Riemann 和. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 故当 $\|T\|\to 0$ 时, 这个积分和趋于 $\int_a^b f(x)dx$, 从而导出了所说的等式. □

### 5.1.6 积分的计算

应用 Newton—Leibniz 公式计算积分, 原则上只需求出被积函数的原函数（即不定积分）. 而计算不定积分的两个重要方法——换元法和分部积分法正是微分中复合函数求导法则与函数乘积求导的 Leibniz 法则的逆运算. 通过 Newton—Leibniz 公式, 可以直接将微分中两个重要的性质反映到积分中来, 即建立积分的换元法和分部积分法. 这两个方法, 是积分理论中非常基本和重要的结果, 读者可通过这两个法则的证明, 再次体会微分与积分的关系.

**定理 5.16** (积分的换元法则) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 而函数 $x=\varphi(t)$ 满足下面条件

1° $\varphi(\alpha)=a$ 及 $\varphi(\beta)=b$, 且当 $t$ 从 $\alpha$ 变到 $\beta$ 时, $x=\varphi(t)$ 所确定的值全部含于区间 $[a,b]$;

2° 函数 $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上有连续的微商 $\varphi'(t)$. 则有下面的换元公式

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**证明**　首先设 $\alpha < \beta$. 由定理中的条件可知, 上式两端的积分都存在, 且函数 $f(x)$ 和 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 分别在区间 $[a,b]$ 及 $[\alpha,\beta]$ 上有原函数. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ (在 $[a,b]$ 上) 的一个原函数, 则根据复合函数的求导法则可知, $F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的一个原函数. 由 Newton—Leibniz 公式, 我们有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

以及

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

这就证明了所说的等式.

当 $\alpha > \beta$ 时证明可类似地进行. □

*注记*　*与不定积分的换元法相比, 定积分的换元法要简单许多; 因前者最终应将新变量换回原来的积分变量, 而在定积分的换元法中则无需这样做; 因此, 定理 5.16 中不要求变量替换函数 $x = \varphi(t)$ 有反函数 (试比较§4.1, 定理 4.2). 此外, 请读者注意, 定理 5.16 中, 新的积分上、下限 (即 $\alpha$ 和 $\beta$) 的大小无关紧要; 这是因为, 定理的证明依靠了 Newton—Leibniz 公式, 而这在 (积分) 下限大于上限时仍然成立.*

**定理 5.17** (定积分的分部积分法)　设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的微商 $u'(x)$ 与 $v'(x)$. 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx;$$

或者

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

**证明**　由微分中的求导法则

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

及已知条件可知, 上式的两边都是连续的, 因此可积. 对上式两边进行积分, 并用 Newton—Leibniz公式, 得出

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx.$$

□

**例 5.1.6**　计算 $\displaystyle\int_0^2 |x^3 - 1|\,dx$.

**解**　首先应用积分的区间可加性再分别应用 Newton—Leibniz 公式, 得出

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^3-1|dx &= \int_0^1 |x^3-1|dx + \int_1^2 |x^3-1|dx\\ &= \int_0^1 -(x^3-1)dx + \int_1^2 (x^3-1)dx\\ &= -\int_0^1 x^3dx + \int_1^2 x^3dx\\ &= -\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 + \frac{1}{4}x^4\Big|_1^2 = 3\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**例 5.1.7**　计算 $\displaystyle\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x\, dx$.

**解**　函数 $\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 处有一个第一类间断, 因此它在 $[-1,1]$ 上没有原函数, 从而不能直接用 Newton—Leibniz 公式计算积分. 因此首先由积分的区间可加性, 得出

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x\, dx = \int_{-1}^0 \operatorname{sgn} x\, dx + \int_0^1 \operatorname{sgn} x\, dx.$$

在区间 $[-1,0]$ 上, 将 $\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 处的值, 改变为函数在 $x=0$ 处的左极限值 $-1$, 则被积函数在 $[-1,0]$ 上连续 (注意, 这一手续不改变函数的可积性及相应的积分值), 进而由 Newton—Leibniz 公式得

$$\int_{-1}^0 \operatorname{sgn} x\, dx = \int_{-1}^0 -1\, dx = -x\Big|_{-1}^0 = -1.$$

同样, 在区间 $[0,1]$ 上, 将 $\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 处的值, 改变为函数在 $x=0$ 处的右极限值1, 类似地得 $\int_0^1 \operatorname{sgn} x\, dx = 1$. 因此所求的积分为 0.

如果用加强的 Newton—Leibniz 公式 (定理 5.15 ), 则计算更为直接: $f(x)=-x$ 在区间 $[-1,0]$ 上连续, 在其内部可导, 且导数为 $-1=\operatorname{sgn} x,\ x\in(-1,0)$. 故由这定理得出 $\int_{-1}^0 \operatorname{sgn} x\, dx = -1$. 同样可求出 $\int_0^1 \operatorname{sgn} x\, dx = 1$.

**例 5.1.8**　计算 $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$.

**解**　可以先求被积函数的不定积分. 对 $x\neq 0$, 将被积函数的分子、分母同时除以 $x^2$, 得出

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx &= \int \frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right]+C.\end{aligned}$$

但这样求出的原函数限制了 $x\neq 0$, 不能直接用于计算问题中的积分.

为了用上面的结果计算积分, 我们采用下面的办法: 记

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{x}\right)\right],\quad -1\leqslant x<0.$$

由于 $F(0-0)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$, 我们定义 $F(0)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$, 则 $F(x)$ 在 $[-1,0]$ 上连续, 且在这区间上的导数正是 $\frac{x^2+1}{x^4+1}$ (参见§4.1, 例4.1.11). 因此, 由 Newton—Leibniz 公式,

$$\int_{-1}^{0}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=F(0)-F(-1)=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

另一种计算方法如下: 由于变上限积分 $\int_{-1}^{x}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt\,(-1\leqslant x\leqslant 0)$ 是 $x$ 的连续函数, 故 (在区间 $[-1,x]$ 上用 Newton—Leibniz 公式)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt&=\lim_{x\to 0-0}\int_{-1}^{x}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt=\lim_{x\to 0-0}[F(x)-F(-1)]\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.\end{aligned}$$

注意, 也可以避免上述那样除以 $x^2$, 而求得 $\frac{x^2+1}{x^4+1}$ (在其整个定义域上) 的一个原函数为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

用这一原函数及 Newton—Leibniz 公式可直接求得问题中的积分值.

**例 5.1.9** 求 $\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,(a>0)$.

**解** 令 $x=a\sin t\,(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$. 则当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=a$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$. 所以 (由积分的换元法)

$$\begin{aligned}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[1+\cos 2t]\,dt\\&=\frac{a^2}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}a^2.\end{aligned}$$

**例 5.1.10** 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ 及 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx\,(n=0,1,2,\cdots)$.

**解** 作替换 $x=\frac{\pi}{2}-t$. 则当 $x=0$ 时, $t=\frac{\pi}{2}$; 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时, $t=0$, 故由积分的换元法得出

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx.$$

因此我们只需求 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$. 显然 $I_0=\frac{\pi}{2}$, $I_1=1$. 对 $n\geqslant 2$, 由分部积分得到

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}xd(-\cos x)\\&=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 xdx\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx\\&=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\,dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx.\end{aligned}$$

即 $I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$, 所以

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(n\geqslant 2).$$

由这递推公式, 我们得出

$$\begin{aligned}I_{2n}&=\frac{(2n-1)}{2n}I_{2n-2}=\cdots=\frac{(2n-1)}{2n}\cdot\frac{(2n-3)}{(2n-2)}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0\\&=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

类似地得到

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{(2n+1)}\cdot\frac{(2n-2)}{(2n-1)}\cdots\frac{2}{3}\cdot I_1=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

综合起来, 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇数},\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

**例 5.1.11** 计算 $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{1+x}\,dx$.

**解** 分部积分得出

$$I=\arctan x\cdot\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx.$$

为计算后一积分, 令 $x=\tan\theta$, 这里 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则积分变为 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan\theta)\,d\theta$. 但

$$1+\tan\theta=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{\cos\theta},$$

故有

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\theta\,d\theta.$$

作替换 $\theta=\frac{\pi}{4}-\varphi$ (这里 $\varphi$ 从$\frac{\pi}{4}$ 变到 0), 可将右边第二个积分化为第一个积分, 从而

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8}\ln 2,$$

于是 $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

### 5.1.7 用积分定义函数

在第 4 章和本章中, 我们分别引进了两个概念, 一个是不定积分 ( 原函数 ), 一个是定积分. 通过 Newton—Leibniz 公式, 我们知道, 对于存在原函数的被积函数, 其在区间上的定积分, 就是原函数在区间的两个端点值的差. 反之, 一个函数的原函数, 也可以通过其变上限积分给出. 因此不管是求一个函数的原函数, 还是求这个函数的定积分, 我们通称为求函数的积分.

大量的例子说明, 初等函数的原函数仍是初等函数, 在第 4 章中, 我们都是尽可能详尽地列出可用初等函数来积分的函数 ( 即把函数的积分结果, 用初等函数来表示 ).

但是, 对于下列初等函数的不定积分

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \frac{1}{\ln x}dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \sin x^2 dx,$$

或

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}},\qquad \int \sqrt{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}dx$$

试图用初等函数表示积分的结果实际上是不可能的.

因此, 一味追求初等函数的积分能够表示成初等函数的要求, 本身就是不合理的. 突破这样的限制, 反而开拓了我们的视野.

对于一个连续函数来说, 其积分是一定存在的, 它的变上限积分不但连续, 而且可导. 当它的积分能够通过我们已经熟知的函数 ( 初等函数 ) 来表示时, 表明我们熟知的函数也可以用积分来定义 ( 虽然它们可能有原来的出处 ). 当积分不能用熟知的函数表示时, 我们不妨引入这个积分作为一个新产生的函数. 因此, 积分的过程乃是产生新函数的一个方法. 下面举两个例子.

$1^\circ$ **用积分定义对数函数**

虽然对数函数是一个熟知的初等函数, 我们将看到, 用一个有理函数 $\frac{1}{x}$ ( 显然是定义在 $x>0$ 上的连续函数 ) 的积分来定义它, 同样可以得到它的一系列性质.

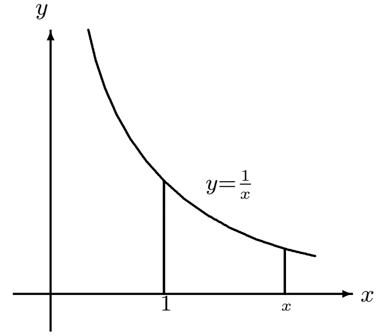


图 5.10

现在假设我们事先不知道什么是对数函数, 对于

$x > 0$, 通过积分定义

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{u}\, du$$

它是定义在 $x > 0$ 上一个连续而且可导的函数. 从几何上看, 它是曲线 $y = \frac{1}{u}$ 在区间 $[1, x]$ 或 $[x, 1]$, $x > 0$ 覆盖下的面积. 无论是几何直观, 还是根据积分的性质, 我们首先得到上式所定义的函数满足 $f(1) = 0$, $f(x)$ 严格单调递增, 因此当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$.

对于 $x > 0$, $y > 0$, 函数 $f(x)$ 具有下列性质:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

这是因为

$$f(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{u}\, du = \int_1^x \frac{1}{u}\, du + \int_x^{xy} \frac{1}{u}\, du$$

这里, 用到了积分对积分区间的可加性. 对上式右边的第二个积分进行换元 $u = xt$, 有

$$\int_x^{xy} \frac{1}{u}\, du = \int_1^y \frac{1}{xt} x\, dt = \int_1^y \frac{1}{t}\, dt$$

所以性质成立. 特别,

取 $y = x$, 得

$$f(x^2) = 2f(x)$$

取 $y = x^{-1}$, 则有

$$f(x) + f(x^{-1}) = f(1) = 0, \quad \text{即} \quad f(x^{-1}) = -f(x)$$

上面结果的自然推广是

$$f(x^n) = nf(x), \quad x > 0, \quad n \text{ 是任何（正或负）的整数}$$

对于任何正的有理数 $\alpha = \frac{m}{n}$, 记 $x^\alpha = y$, 因此 $x^m = y^n$, 则

$$f(x^m) = f(y^n) \quad \Longrightarrow \quad mf(x) = nf(y)$$

所以

$$f(x^\alpha) = \alpha f(x), \quad x > 0$$

下面证明

$$f(e) = 1$$

根据数列的极限, 我们知道

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

注意到函数 $f(x)$ 的连续性, 有

$$\begin{aligned} f(e) &= f\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} nf\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

利用积分中值定理, 可知存在一点 $\xi \in \left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$, 使得

$$f\left(1+\frac{1}{n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{\xi}\frac{1}{n}$$

因此, 当 $n\to\infty$ 时, $\xi\to 1$, 所以得 $f(e)=1$.

我们把上面定义的函数记做 $\log x$ 或 $\ln x$.

注记 类似于用积分定义对数函数的过程, 我们也可以积分过程和求反函数的过程来引入三角函数, 为此只需取

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

和

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

作为函数 $\arctan x$ 和 $\arcsin x$ 的定义, 然后通过求反函数得到三角函数. 用这种方式来定义三角函数, 没有涉及直观的几何, 也没有“角”的概念. 可以直接根据上述定义证明三角函数的基本性质.

$2^\circ$ **椭圆积分与椭圆函数**

如果说上面用积分定义的函数仍然是我们原先熟知的初等函数的话, 超出初等函数的第一个重要例子是椭圆积分以及它所定义的函数. **椭圆积分**是这样一些积分, 它的被积函数是三次或四次多项式的平方根的有理函数. 在这些积分中, 特别重要的又是下列椭圆积分所定义的函数 (称为椭圆函数) 和反函数

$$u(s) = \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

其中 $k$ 是一个参数, 当 $k=0$ 时, 上述积分就给出了 $\arcsin x$. 我们再次强调, 这样的积分是不能用初等函数表示的. 但是, 它已被人们充分研究过, 而且还象三角函数那样, 其值已经被编制成表.

在一些物理和几何问题的研究中 (如单摆问题的研究中以及椭圆弧长的计算中, 我们将在后续内容中讨论), 不少积分最终可化为椭圆积分. 例如

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$$

通过变换 $u=\sin x$ 可化为椭圆积分.

我们的目的只是想展示一下即使是通过对初等函数的的积分, 仍然能构造一些新的函数, 所以在此不讨论椭圆积分的种种性质.

### 5.1.8 Taylor 展开中余项的积分表示

利用积分, 我们再次讨论关于 Taylor 公式中余项的估计. 这种余项的积分表示, 从另一个侧面反映了微分与积分的关系.

首先还是从最简单的情况开始. 设 $f(x)$ 有连续的二阶导数, 记

$$R=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$$

是 Taylor 一阶展开的余项. 如果把 $a$ 看成变量（注意这时 $f(x)$ 和 $x$ 看成是常数）, 并对其求导, 得

$$R'(a)=-f'(a)-f''(a)(x-a)+f'(a)=-f''(a)(x-a)$$

此式对任何区间中的 $a$ 都成立. 从上式出发, 首先对 $a$ 积分, 并注意到当 $a=x$ 时, $R(x)=0$, 有

$$R(a)=\int_a^x f''(t)(x-t)dt$$

其次利用微分中值公式得

$$\frac{R(a)-R(x)}{x-a}=\frac{R(a)}{x-a}=-R'(\xi)=f''(\xi)(x-\xi)$$

所以

$$R(a)=(x-a)(x-\xi)f''(\xi)$$

其中 $\xi$ 是介于 $a$ 和 $x$ 之间的一个点.

将上述思想推广到更高阶的展开中去, 设函数 $f(x)$ 在区间中具有直到 $n+1$ 阶的连续导函数. 考虑函数在 $x=a$ 处的 Taylor 展开式

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n$$

这里, 余项 $R_n$ 可以表示成

$$R_n(a)=f(x)-f(a)-\frac{f'(a)}{1!}(x-a)-\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

现在, 将 $a$ 看成变量, 所以当 $a=x$ 时, $R_n(x)=0$. 如果等式的两边对 $a$ 求导, 则

$$\begin{aligned}R_n'(a)=&-f'(a)-\frac{f''(a)}{1!}(x-a)+\frac{f'(a)}{1!}-\frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f''(a)}{1!}(x-a)\\&-\cdots-\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}\end{aligned}$$

消去绝大部分项后, 有

$$R_n'(a) = -\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

对上式进行积分, 并注意到 $R_n(x)=0$, 有

$$R_n(a) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt.$$

这就是 Taylor 展开中余项的一个精确的积分表示式. 同样, 利用微分中值公式有

$$\frac{R(a)-R(x)}{x-a} = \frac{R(a)}{x-a} = -R'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n,$$

所以

$$R(a) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi),$$

其中 $\xi$ 是介于 $a$ 和 $x$ 之间的一个点.

利用上面的结果, 我们可以得到其他形式的余项表示式.

$1^\circ$ **余项的 Lagrange 表示式:** 在积分表示式中, 注意到被积函数部分的 $(x-t)^n$ 在 $a$ 和 $x$ 之间不变号! (不管是 $a<x$ 或 $a>x$), 因此根据积分中值定理 (习题 5.1: 9), 存在一点 $\xi$ 介于 $a$ 和 $x$ 之间, 使得

$$R_n = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x (x-t)^n dt = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

再次令 $\xi = a+\theta h,\ h=(x-a),\ 0\leqslant\theta\leqslant 1$, 就有

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

$2^\circ$ **余项的 Cauchy 表示式:** 将 $\xi = a+\theta h,\ h=(x-a),\ 0\leqslant\theta\leqslant 1$ 代入

$$R(a) = \frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)$$

中, 并注意到 $x-\xi=(x-a)(1-\theta)$, 就有

$$R(a) = \frac{h^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\xi).$$

*注记 Taylor 展开式以及它的余项, 也可以直接从*

$$f(x)-f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t)d(t-x)$$

*反复进行分部积分推导出来, 例如*

$$\begin{aligned} f(x)-f(a) &= \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t)d(t-x) \\ &= f'(t)(t-x)\Big|_a^x - \int_a^x f''(t)(t-x)dt \\ &= f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt \end{aligned}$$

*读者可以继续往下推导, 给出一般结果.*

## §5.2 函数的可积性

本节着重研究什么样的函数是可积的. 由于可积函数一定是有界的, 所以本节中我们总是假定在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 是有界的, 并设它的上下确界分别是 $M$ 和 $m$, 因此

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \quad x \in [a,b].$$

### 5.2.1 函数的可积性

在积分的定义中, 有两个关键点:

一是区间的分割

$$T: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

是任意的, 而且在每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中所取的点 $\xi_i$ 是任意的. 二是一个极限过程, 即当分割的最大宽度 $\|T\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \Delta x_i \to 0$ 时, Riemann 和的极限存在.

根据第一个关键点, 对于给定的分割 $T$, 设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上、下确界分别为

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

并记

$$\omega = M - m, \quad \omega_i = M_i - m_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

分别称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 和 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的**振幅**.

**定义 5.18**

$$\overline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

*分别称之为函数 $f(x)$ 的“Darboux 上和”与“Darboux 下和”.*

显然, 对于任意的点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 有

$$m \leqslant m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i \leqslant M, \quad i = 1, \cdots, n$$

因此函数 $f(x)$ 的任意一个 Riemann 和

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

一定介于它的 Darboux 上和与 Darboux 下和之间, 而且三种和都是有界的

$$m(b-a) \leqslant \underline{S}(T) \leqslant S(T) \leqslant \overline{S}(T) \leqslant M(b-a)$$

现在考虑分割. 注意到, 如果 $T'$ 是分割 $T$ 中增加一个分割点形成的分割, 即

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{k-1}<x_k<\cdots<x_n=b,$$

$$T':\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{k-1}<x_k'<x_k<\cdots<x_n=b.$$

则函数 $f(x)$ 分别在两个子区间 $[x_{k-1},x_k']$ 和 $[x_k',x_k]$ 的上确界不会超过它在区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的上确界（部分的上确界不会超过整体的上确界）

$$M_k\geqslant M_k'=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{k-1},x_k']\},\quad M_k\geqslant M_k''=\sup\{f(x)\mid x\in[x_k',x_k]\}$$

因此,

$$\begin{aligned}\overline{S}(T)-\overline{S}(T')&=M_k(x_k-x_{k-1})-M_k'(x_k'-x_{k-1})-M_k''(x_k-x_k')\\&\geqslant M_k(x_k-x_{k-1})-M_k(x_k'-x_{k-1})-M_k(x_k-x_k')=0.\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\overline{S}(T)-\overline{S}(T')&\leqslant M(x_k-x_{k-1})-m(x_k'-x_{k-1})-m(x_k-x_k')\\&=\omega(x_k-x_{k-1})\leqslant\omega\|T\|.\end{aligned}$$

即

$$\overline{S}(T)\geqslant\overline{S}(T')\geqslant\overline{S}(T)-\omega\|T\|.$$

对于 Darboux 下和也有对应的结果 $\underline{S}\,(T)\leqslant\underline{S}\,(T')\leqslant\underline{S}\,(T)+\omega\|T\|$.

如果 $T'$ 是分割 $T$ 通过增加任意有限个分割点所得到的新的分割, 并称 $T'$ 为分割 $T$ 的**加细分割**, 则也会有类似的结果, 即

**定理 5.19** 设 $T'$ 是分割 $T$ 添加 $l$ 个分割点所得到的加细分割, 则

$$\overline{S}(T)\geqslant\overline{S}(T')\geqslant\overline{S}(T)-l\omega\|T\|,$$

$$\underline{S}\,(T)\leqslant\underline{S}\,(T')\leqslant\underline{S}\,(T)+l\omega\|T\|$$

$$\overline{S}(T)-\underline{S}\,(T)\geqslant\overline{S}(T')-\underline{S}\,(T')-2l\omega\|T\|.$$

定理 5.19 说明, 在对分割加细（即分割点的密度增加）的过程中, 上和不增, 下和不减, 具有一种“单调性”.

下面分析 Darboux 上和与下和之间的进一步关系. 设 $T_1$ 和 $T_2$ 分别是两个任意的分割, 则将两个分割的分割点合起来形成一个新的分割 $T$, 则 $T$ 既是 $T_1$ 的加细分割, 也是 $T_2$ 的加细分割, 所以

**定理 5.20** 对于区间 $[a,b]$ 的任意两个分割 $T_1$ 和 $T_2$, 一个分割对应的下和, 总是不超过另一个分割对应的上和, 即

$$\underline{S}(T_1)\leqslant\underline{S}(T)\leqslant\overline{S}(T)\leqslant\overline{S}(T_2)$$

有了上面的分析, 我们希望观察 Darboux 上和与下和当 $\|T\| \to 0$ 时的极限. 因为上和与下和都是有界的, 而且具有某种单调性 ( 定理 5.19 ), 类比于“单调有界数列有极限, 而且极限就是数列的上确界或下确界”的事实, 所以对于函数 $f(x)$, 我们考虑所有上和 ( 下和 ) 组成的集合的下确界 ( 上确界 ), 记

$$\overline{I} = \inf_T \overline{S}(T), \quad \underline{I} = \sup_T \underline{S}(T)$$

称为函数 $f(x)$ 的**上积分**和**下积分**. 作为定理 5.20 的直接推论, 对于任意两个分割 $T_1$ 和 $T_2$, 有不等式

$$\underline{S}(T_1) \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}(T_2)$$

**定理 5.21** *对于区间 $[a,b]$ 上任意一个有界函数 $f(x)$, 当 $\|T\| \to 0$ 时, $f(x)$ 的 Darboux 上 ( 下 ) 和一定有极限, 而且极限就是上 ( 下 ) 积分*

$$\lim_{\|T\| \to 0} \overline{S}(T) = \overline{I}, \quad \lim_{\|T\| \to 0} \underline{S}(T) = \underline{I}.$$

**证明** 我们只证明第二个等式, 第一个等式的证明是类似的. 根据上确界的定义, 对于任意给定的正数 $\varepsilon$, 存在区间 $[a,b]$ 的一个分割

$$T_0: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = b$$

使得

$$\underline{I} \geqslant \underline{S}(T_0) > \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2}$$

取

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2l\omega + 1} > 0,$$

对于任意分割 $T$, 只要 $\|T\| < \delta$时, 将 $T$ 和 $T_0$ 的分割点合起来组成一个新的分割 $T'$, 这时 $T'$ 是在 $T$ 的分割点基础上, 至多增加了 $T_0$ 的 $l$ 个分割点 ( “至多”的含义是有可能分割点有重复 ). 因此, 由定理 5.19 可知,

$$\begin{aligned} \underline{S}(T) &\geqslant \underline{S}(T') - l\omega\|T\| \geqslant \underline{S}(T_0) - l\omega\|T\| \\ &> \underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} - l\omega\frac{\varepsilon}{2l\omega+1} > \underline{I} - \varepsilon \end{aligned}$$

这就证明了

$$\lim_{\|T\| \to 0} \underline{S}(T) = \underline{I}.$$

至此, 对于有界函数 $f(x)$, 当 $\|T\| \to 0$ 时, 虽然并不知道它的任意 Riemann 和 $S(T)$ 是否有极限, 但它的 Darboux 上和 $\overline{S}(T)$ 与下和 $\underline{S}(T)$ 的极限总是存在的. 但是由不等式

$$\underline{S}(T) \leqslant S(T) \leqslant \overline{S}(T)$$

我们立即可以看出, 当 $\|T\| \to 0$ 时, 如果有界函数 $f(x)$ 的 Darboux 上和与下和的极限相等, 则 $f(x)$ 在区间上的 Riemann 和 $S_n(T)$ 的极限一定存在而且与之相等.

反之, 如果函数 $f(x)$ 可积, 即 $\lim\limits_{\|T\|\to 0} S(T) = I$, 因此对于任意的正数 $\varepsilon$, 存在一个正数 $\delta$, 使得当分割 $T$ 满足 $\|T\| < \delta$ 时, 有

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

对一切点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$ 成立, 因而分别对每一个小区间中取上(下)确界, 有

$$I - \varepsilon < I - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{S}(T) \leqslant \overline{S}(T) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{2} < I + \varepsilon$$

即Darboux 上和与下和的极限相等. 这样我们就有了最终的结果

**定理 5.22**　*设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界. 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是当 $\|T\| \to 0$ 时, $f(x)$ 的 Darboux 上和与下和的极限相等*

$$\lim_{\|T\|\to 0} \left(\overline{S}(T) - \underline{S}(T)\right) = \lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$$

*其中 $\omega_i = M_i - m_i$ 是 $f(x)$ 在分割小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$ 上的振幅.*

定理5.22 中第二个等式表明, 验证函数可积的充分必要条件时, 不需要具体计算出函数 Darboux 上和与下和的极限（即不需要算出上积分和下积分）, 只需验证当 $\|T\| \to 0$ 时, $\sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$ 的极限是否等于 0 即可. 为了应用方便, 在结束本小节之前, 我们给出关于有界函数 $f(x)$在一个区间 $[a,b]$ 上的振幅的另一种描述.

**定理 5.23**　*有界函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的振幅也可以由下列方式表达*

$$\omega = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [a,b]\}.$$

*即振幅等于函数在区间上任意两点值差绝对值的上确界.*

**证明**　根据定义, 函数在一个区间 $[a,b]$上的振幅为其上确界和下确界的差

$$\omega = M - m, \quad M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}, \quad m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

显然, 对任意的 $x, y \in [a,b]$, 有

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M - m = \omega$$

即 $\omega$ 是集合 $\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [a,b]\}$ 的一个上界.

另一方面, 对任意的正数 $\varepsilon$（不妨取 $\varepsilon < M - m$）, 由于 $M$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上确界, 所以存在一点 $x_0$, 使得 $f(x_0) > M - \frac{\varepsilon}{2}$. 同理，对于下确界 $m$, 存在一点 $y_0$, 使

得 $f(y_0) < m + \frac{\varepsilon}{2}$. 因此

$$|f(x_0) - f(y_0)| = f(x_0) - f(y_0) > M - m - \varepsilon = \omega - \varepsilon$$

即 $\omega$ 是集合 $\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [a, b]\}$ 的上确界. $\square$

利用振幅的这种表达方式, 在具体计算时会带来一些便利.

### 5.2.2 可积函数类有关定理和性质的证明

现在我们利用函数可积性的有关结果,来完成上一节中给出的可积函数类有关定理和性质的证明. 通过这些证明, 我们发现, §5.2.1 节中所讨论的可积性理论是这些定理和性质坚实的基础.

**例 5.2.1** 关于定理5.3 的证明, 即闭区间 $[a, b]$ 上连续函数(因而有界)一定可积.

**证明** 因为闭区间上连续函数一定是一致连续的, 所以对任意给定的正数 $\varepsilon$, 一定存在一个正数 $\delta$, 使得, 当任意两点 $x, y \in [a, b]$ 满足 $|x - y| < \delta$ 时, 一定有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

对于 $[a, b]$ 的一个分割 $T$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 当 $\|T\| < \delta$ 时, 在每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 显然有$|x - y| \leqslant \|T\| < \delta$, $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, 因而根据定理 5.23 中对振幅的定义, 有

$$\omega_i = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [x_{i-1}, x_i]\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i < \varepsilon.$$

即函数 $f(x)$ 可积. $\square$

**例 5.2.2** 关于定理5.4 的证明, 即闭区间上至多只有有限个间断点的有界函数一定可积.

**证明** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界, 记 $\omega$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的振幅.

首先设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有一个间断点 $c \in [a, b]$, 不妨设 $a < c < b$($c$ 在端点的情形可类似处理), 对任意给定的正数 $\varepsilon$, 取正数 $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{4\omega}$ 同时 $\delta_1 < \min\{\frac{b-c}{2}, \frac{c-a}{2}\}$ 以保证以 $c$ 为中心的开区间 $(c - 2\delta_1, c + 2\delta_1)$ 落在 $[a, b]$ 的内部. 此时函数 $f(x)$ 在区间 $[a, c - \delta_1]$ 和 $[c + \delta_1, b]$ 上分别连续, 当然分别一致连续. 因此存在一个统一的正数 $\delta_2$, 使得当 $|x - y| < \delta_2$, $x, y \in [a, c - \delta_1]$ 或 $x, y \in [c + \delta_1, b]$ 时, 有$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. 因此对于 $[a, b]$ 的一个分割 $T$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 当 $\|T\| < \delta$ 时小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 或落在 $(c - 2\delta_1, c + 2\delta_1)$ 内, 或落在 $[a, c - \delta_1]$ 或 $[c + \delta_1, b]$

内, 将和式分成下列两部分

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{(1)}\omega_i\Delta x_i+\sum_{(2)}\omega_i\Delta x_i$$

其中$\sum\limits_{(1)}\omega_i\Delta x_i$ 表示对那些小区间落在 $(c-2\delta_1, c+2\delta_1)$ 内的求和, $\sum\limits_{(2)}\omega_i\Delta x_i$ 表示其余求和部分.显然

$$\sum_{(1)}\omega_i\Delta x_i\leqslant 4\omega\delta_1<\varepsilon,\quad \sum_{(2)}\omega_i\Delta x_i\leqslant\varepsilon$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<2\varepsilon$$

□

对于有限多个间断点的证明完全类似. 需要说明的是定理5.4 只是第三册将要介绍的 Lebesgue 定理一种特殊情况. 但两者的证明有相似之处. □

**例 5.2.3** 关于定理5.5 的证明, 即闭区间上单调函数一定可积.

**证明** 不妨设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上单调递增. 对于任意分割 $T$, 注意到单调递增函数在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅就是函数在两个端点的值差, 所以

$$\begin{aligned}0\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega\Delta x_i&=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\Delta x_i\leqslant\|T\|\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\\&=\|T\|(f(b)-f(a)).\end{aligned}$$

即

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0.$$

□

**例 5.2.4** 关于定理5.6 的证明, 即积分对区间的可加性性质.

**证明** 设 $a<c<b$, 对 $[a,c]$ 的任意分割 $T_1:\ a=x_0<\cdots<x_m=c$ 和 $[c,b]$ 的任意分割 $T_2:\ c=x_m<\cdots<x_n=b$, 将分点合并, 就给出 $[a,b]$ 的一个分割 $T$, 且

$$\|T\|=\max\{\|T_1\|,\ \|T_2\|\},$$

即当 $\|T_1\|\to 0,\ \|T_2\|\to 0$ 时有 $\|T\|\to 0$. 因此, 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积时, 由

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i,\quad \sum_{i=m+1}^{n}\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i,$$

并令 $\|T_1\| \to 0,\ \|T_2\| \to 0$, 即可推出 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上分别可积.

反之, 对$[a,b]$ 的任一分割 $T:\ a = x_0 < \cdots < x_n = b$, 增加 $c$ 作为分点, 得一加细的分割 $T'$. 这样 $T'$ 可分解成 $[a,c]$ 的分割 $T_1$ 和 $[c,b]$ 的分割 $T_2$, 且满足

$$\|T_1\|,\ \|T_2\| \leqslant \|T'\| \leqslant \|T\|$$

即当 $\|T\| \to 0$ 时, $\|T_1\| \to 0,\ \|T_2\| \to 0$ . 由定理5.19 中第三式得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i &= \overline{S}(T) - \underline{S}\,(T) \geqslant \overline{S}(T') - \underline{S}\,(T') - 2\omega\|T\| \\ &= \sum_{(1)} \omega_i \Delta x_i + \sum_{(2)} \omega_i \Delta x_i - 2\omega\|T\|.\end{aligned}$$

这里 $\sum\limits_{(1)},\ \sum\limits_{(2)}$ 分别表示对应分割 $T_1,\ T_2$ 小区间上振幅的求和. 因此令 $\|T\| \to 0$, 就可证得 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上也可积. □

顺便指出, 关于定理5.4 的证明也可借助上述结果. 具体做法如下: 首先采用 $2^\circ$ 中的方法证明, 当 $f(x)$ 只有一个间断点, 且间断点是区间的端点时函数可积, 然后对有限多个间断点的情形, 将积分区间 $[a,b]$ 以间断点分割成若干个小区间, 则函数在每个小区间上可积, 利用积分对区间的可加性推出函数在整个区间 $[a,b]$ 上可积. □

**例 5.2.5** 关于定理5.8 中 $2^\circ$ 的证明, 即可积函数的乘积仍然是可积的.

**证明** 设 $f(x),\ g(x)$ 是区间 $[a,b]$上可积函数, 因此都是有界函数. 不妨设 $|f(x)| \leqslant M,\ |g(x)| \leqslant M,\ x \in [a,b]$. 对 $[a,b]$ 的任一分割 $T:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 分别记 $\omega_i(f),\ \omega_i(g),\ \omega_i(fg)$, 为函数 $f, g, fg$ 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅, 则由

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leqslant M|f(x) - f(y)| + M|g(x) - g(y)|,\ x, y \in [x_{i-1}, x_i]\end{aligned}$$

可得

$$\omega_i(fg) \leqslant M(\omega_i(f) + \omega_i(g)),\ i = 1, \cdots, n$$

求和即可得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i(fg)\Delta x_i \leqslant M\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i(f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i(g)\Delta x_i\right)$$

即可完成证明. □

## 习题 5.2

1. 求区间 $[0,1]$ 上 Dirichlet 函数在区间 $[0,1]$ 上的上积分和下积分.

2. 试给出 Darboux 上和与下和的几何解释.

3. 证明, 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积, 而且有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

4. 证明, 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上都可积, 且 $f(x) \geqslant c > 0$. 求证: $\frac{1}{f(x)}$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积.

## §5.3 积分的应用

几何与物理学中有许多整体性质的量 (记为 $Q$) (如曲线的弧长, 非均匀物体的重心等等), 可以应用积分来确定. 这里所谓的整体性质的量, 是指这样的量与某个区域有关, 并且还具有区域可加性. 具体地说, 在一维情况下区间 $[a,b]$ 上量 $Q$ 的分部应满足

$$Q([a,c])+Q([c,b])=Q([a,b]),\quad a\leqslant c\leqslant b$$

(因此当 $c=a$ 时, 自然有 $Q(a)=0$)

用积分求某一个量, 在数学上看, 是说这个量的定义能够表示为一个积分. 依积分定义, 求值的过程有四个步骤: 分割——近似代替 ——求和——取极限, 而将所求的量化为一个积分计算. (读者可参考前面关于曲边梯形面积的讨论.) 实际上, 上面说的四个步骤, 往往简化为两步, 这就是所谓的**微元法**:

在一维情况下, 设所考虑的量 $Q$ 分布在区间 $[a,b]$ 上, 函数 $Q(x)$ 表示量 $Q$ 对应于区间 $[a,x]$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 的部分量.

第一步, 在区间 $[a,b]$ 上任取一个长度为 $dx$ 的小区间 $[x,x+dx]$, 求出局部量 $\Delta Q=Q(x+dx)-Q(x)$ 的一个近似值 $f(x)dx$, 其中 $f(x)$ 是某个函数, 使得 $\Delta Q-f(x)dx$ 是较 $dx$ 更高阶的无穷小:

$$\Delta Q=f(x)dx+o(dx),$$

即 $f(x)dx$ 是函数 $Q(x)$ 的微分. 我们也将 $f(x)dx$ 称为整体量 $Q$ 的微元.

第二步, 将所得的微元在区间 $[a,b]$ 上"无限累加"——积分, 则由 Newton–Leibniz 公式得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx=\int_a^b Q'(x)dx=Q(x)\Big|_a^b&=Q(b)-Q(a)\\&=Q(b)=Q.\end{aligned}$$

即量 $Q$ 可以表示为积分

$$Q=\int_a^b f(x)dx.$$

微元法的关键在于确定微元. 因为量 $Q$ 是待求的, 部分量 $Q(x)$ 是未知的. 因此, 一般而言, 求出 $Q(x)$ 的微分, 即 $\Delta Q$ 的线性主要部分, 是一件相当困难的事.

下面讲的几个例子, 以及用微元法得出的结果, 在数学上都能够严格地定义和证明; 这里的处理, 可视为一种"拟真推理", 无非说明了导出这些结果的基本精神. 在物理学中, 微元法则是一个较为广泛使用的方法, 因为所说的微元, 即 $\Delta Q$ 的正确近似, 不是从数学上, 而是从物理上看是有确定意义的.

### 5.3.1 平面曲线的弧长

在直角坐标系下，设一个曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为

$$y = f(x)(a \leqslant x \leqslant b).$$

$\overset{\frown}{AB}$ 长度的数学定义为: 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取分点 (如图5.13).

$$A = M_0,\ M_1,\ \cdots,\ M_{n-1},\ M_n = B,$$

顺次连结这些分点, 得出 $\overset{\frown}{AB}$ 的一条内接折线. 若当 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} M_{i-1}M_i \to 0$ 时, 折线的长度的极限存在, 就称 $\overset{\frown}{AB}$ 是可求长的, 并且这一极限就定义为 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度.

能够证明, 当 $f(x)$ 连续可微时 (即 $f'$ 存在且连续, 此时, 我们常说 $\overset{\frown}{AB}$ 是光滑的), $\overset{\frown}{AB}$ 一定是可求长的, 并且其长度可表示为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx,$$

这称为 (直角坐标系下的) 弧长公式.

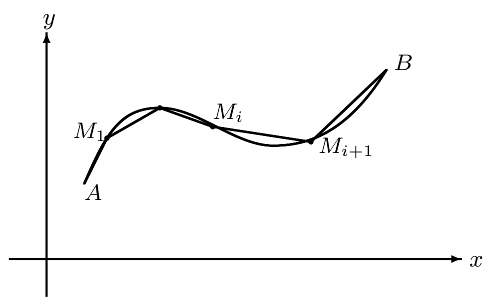


图 5.11

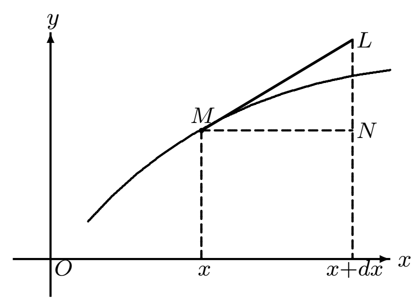


图 5.12

我们现在用微元法导出这一公式: 设 $dx > 0$, 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取两点 $M$ 和 $M'$, 其横坐标分别为 $x$ 与 $x + dx$. 则这两点的距离为

$$\sqrt{(dx)^2 + [f(x + dx) - f(x)]^2} = \sqrt{(dx)^2 + [f'(x)dx + o(dx)]^2}.$$

我们由此得到弧长的微元 (即弧长的微分)

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

将 $ds$ 在区间 $[a, b]$ 上积分, 即得上述弧长公式.

由于 $dy = f'(x)dx$, 故弧长的微分也可表达为

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

弧长的微分 $ds$ 有明显的几何意义. 如图5.12 所示, 在以切线 $ML$ 为斜边的三角形 (称为微分三角形) $LMN$中, $MN = dx$, $LN = dy$. 故

$$ML = \sqrt{MN^2 + LN^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

即 $ML = ds$. 因此, 几何上看, 弧长的微分就是微分三角形的斜边长.

许多问题中, 曲线弧的方程由参数方程或极坐标方程给出, 我们现在给出相应的弧长计算公式:

设曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

其中函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的微商, 且 $x'(t), y'(t)$ 不同时为零. 我们还假定, 当参数 $t$ 从 $\alpha$ 变到 $\beta$ 时, 弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上的点则从 $A$ 变到 $B$, 则当 $dt > 0$ 时, 有 $ds > 0$. 于是弧长的微分现在成为

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt,$$

从而得到参数方程下的弧长公式

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$$

若曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 由极坐标方程

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$$

给出, 其中 $r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的微商. 设 $\theta$ 从 $\alpha$ 变到 $\beta$ 时, 曲线上的点从 $A$ 变到 $B$. 我们可选用 $\theta$ 作为参数, 将 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程表示为参数方程

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

则易知 $[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 = r^2(\theta) + r'^2(\theta)$, 故有弧长公式

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}d\theta.$$

作为一个例子, 我们来求椭圆

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

的弧长, 其中 $a > b > 0$.

实际上, 由对称性, 只需考虑椭圆相应于 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ 弧段的长度, 由此易知椭圆的弧长为

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}dt,$$

其中 $e$ 为椭圆的离心率. 继续实行换元, 令 $u = \cos t$, 则上述积分化为

$$s = 4a\int_0^1 \frac{\sqrt{1-e^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}}du,$$

这是一个 $u$ 的二次多项式的平方根的有理式, 因此是一种椭圆型积分 (椭圆积分的名词也来源于此). 这样的被积函数的原函数是不能用初等函数表示的.

### 5.3.2 平面图形的面积

我们已讨论过平面曲线围成的面积的定义, 并且在直角坐标系下 (原则上) 能够求出图形的面积. 这里将用微元法导出极坐标下的一类图形的面积计算公式.

设曲线由极坐标方程

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$$

给出, 其中 $r(\theta)$ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 我们要确定这条曲线与射线 $\theta = \alpha$ 及 $\theta = \beta$ 所围成的曲边扇形的面积 (如图5.13).

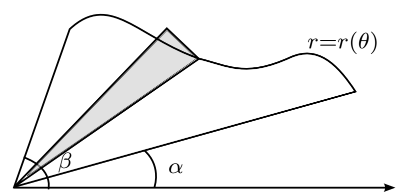


图 5.13

在区间 $[\alpha, \beta]$ 内任取一个长度为 $d\theta$ 的区间 $[\theta, \theta + d\theta]$. 在这个小区间上, 用圆弧 $r = r(\theta)$ 代替曲线弧, 得到面积微元 (图5.13 中阴影部分的面积)

$$dS = \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta.$$

因此, 所求的面积是

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta.$$

我们顺便提及, 由上面的公式可以导出某些由参数方程给出的闭曲线所围成的图形的面积.

设平面图形由封闭曲线

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

围成, 其中 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 具有连续的微商, 且 $\varphi(a)=\varphi(b)$, $\psi(a)=\psi(b)$. 因为

$$r^2=x^2+y^2,\quad \theta=\arctan\frac{y}{x},$$

由复合函数的微商法则, 得出

$$\theta'_t=\frac{d\theta}{dt}=\frac{xy'_t-x'_ty}{x^2+y^2}.$$

故 $\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{1}{2}(xy'_t-x'_ty)dt$. 若极角 $\theta$ (按逆时针方向) 从 $\alpha$ 变到 $\beta$, 对应于参数 $t$ 从 $a$ 变到 $b$, 则此图形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_a^b\left(\varphi(t)\psi'(t)-\varphi'(t)\psi(t)\right)dt.$$

例如, 我们易求出椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的面积为

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t+a\sin t\cdot b\sin t)dt=\pi ab.$$

### 5.3.3 旋转体的体积

关于空间立体的体积, 我们将在多元微积分中给出数学定义, 这里则完全依靠几何直观, 并用微元法导出几类立体的体积.

设空间中某个立体由一曲面与垂直于 $x$ 轴的两平面 $x=a$ 及 $x=b$ 围成 (如图5.14). 若过任意一点 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 且垂直于 $x$ 轴的平面截立体所得的截面面积 $S(x)$ 为已知的连续函数, 现在要确定该立体的体积 $V$.

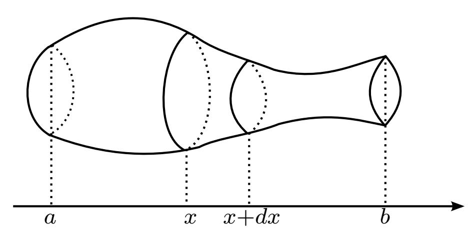

图 5.14

我们任取区间 $[a,b]$ 上一个长度为 $dx$ 的小区间 $[x,x+dx]$, 这一小区间上的立体可近似地看作上、下底的面积都是 $S(x)$, 而高为 $dx$ 的小的正柱体. 于是得出体积的微元为 $dV=S(x)dx$. 将 $dV$ 从 $a$ 到 $b$ 积分, 则有

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

根据上述原则可求出某些旋转体的体积. 以下均假设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续并满足 $f(x)\geqslant 0$ . 我们将考虑由 $y=f(x)$, 直线 $x=a,x=b$ 及 $x$ 轴围成的曲边梯形, 分别绕 $x$ 轴旋转一周和 $y$ 轴旋转一周的旋转体的体积.

1° 绕 $x$ 轴旋转一周的旋转体的体积.

对区间 $[a,b]$ 上任一点 $x$, 作垂直于 $x$ 轴的平面, 截旋转体所得截面的面积, 等于半径为 $y=f(x)$ 的圆的面积, 即$S(x)=\pi y^2=\pi f^2(x)$. 因此, 由上面的式子知, 旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

2° 绕 $y$ 轴旋转一周的旋转体的体积.

现在我们考虑上述的曲边梯形 (其中 $a>0$) 绕 $y$ 轴旋转一周所得旋转体的体积. 注意, 这里指的仍然是由 $y=f(x)$, 直线 $x=a, x=b$ 及 $x$ 轴围成的曲边梯形, 当它绕 $y$ 轴旋转时扫过的空间区域的体积.

在区间 $[a,b]$ 上任取一长度为 $dx$ 的区间 $[x,x+dx]$, 相应 (于这一小区间) 的小曲边梯形绕 $y$ 轴旋转一周的旋转体的体积, 可近似地看作高为 $f(x)$, 而底半径分别为 $x+dx$ 及 $x$ 的两圆柱的体积差, 即是

$$f(x)[\pi(x+dx)^2-\pi x^2]=2\pi xf(x)dx+\pi f(x)(dx)^2.$$

略去 $dx$ 的高阶无穷小 $\pi f(x)(dx)^2$, 得体积的微元为 $2\pi xf(x)dx$, 故所求的体积为

$$v=2\pi\int_a^b xf(x)dx.$$

### 5.3.4 旋转体的侧面积

空间曲面的面积, 也将在多元微积分中讨论. 这里我们依靠几何直观, 导出下面一类旋转曲面的侧面积.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的微商, 并且 $f(x)\geqslant 0$ ( $x\in[a,b]$). 将此曲线段绕 $x$ 轴旋转一周, 要确定所产生的旋转曲面的侧面积 $F$.

在区间 $[a,b]$ 上任取长度为 $dx$ 的小区间 $[x,x+dx]$, 考虑相应于这区间上的弧段 $MM'$ 绕 $x$ 轴旋转所得的侧面积 $\Delta F$ (参考图5.17). $MM'$ 可用切线段 $ML$ (长度为 $ds$) 近似代替, 因此 $\Delta F$ 可由 $ML$ 绕 $x$ 轴旋转所得的圆台的侧面积来近似代替(图5.17). 熟知, 所说的圆台侧面积为

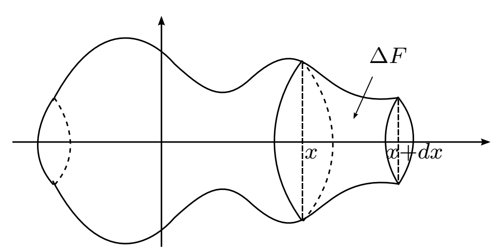


图 5.15

$$\pi\cdot(\text{上底半径}+\text{下底半径})\cdot\text{斜高}$$
$$=\pi[y+(y+dy))]\cdot ds=2\pi yds+\pi dy\cdot ds.$$

略去 $dx$ 的高阶无穷小 $\pi dy \cdot ds$, 得到侧面积微元

$$dS = 2\pi y ds = 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

于是所求的侧面积为

$$\begin{aligned}S &= 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx \\ &= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.\end{aligned}$$

我们提一下, 若问题中曲线段由参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

给出, 其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的微商, 则侧面积公式为

$$F = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

若曲线段由极坐标方程

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$$

给出, 则可选 $\theta$ 作为参数, 而由公式(12), 得出

$$F = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

### 5.3.5 变力作功和引力

一般而言, 确定变力对物体所作的功, 需应用本书第二册介绍的曲线积分. 但对于下面一种较为简单的情形, 可以用微元法处理.

设物体在(变)力 $F = F(x)$ 的作用下沿 $x$ 轴作直线运动 (力的方向与物体的运动方向一致), 若物体从 $a$ 点运动到 $b$ 点, 要确定变力对物体所作的功 $W$ (假定 $F(x)$ 是 $x$ 的连续函数).

在区间 $[a, b]$ 上任取一个长度为 $dx$ 的小区间 $[x, x+dx]$. 由于在这个小区间上, 由变力的连续性, 变力所作的功可近似地看作恒力 $F(x)$ 所作的功. 于是得到功的微元 $dW = F(x)dx$. 将 $dW$ 从 $a$ 到 $b$ 积分, 得出变力 $F(x)$ 所作的功为

$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

**例 5.3.1** 半径为 $R$ 米的半球形水池内注满了水, 求将全部的水抽干需作的功 (水的比重为 1 吨/米$^3$).

**解** 如图5.18, 在过球心的垂面上作 $Oxy$坐标系, 以垂面和半球所截的半圆的对称轴为 $y$ 轴, 水平切线为 $x$ 轴. 半圆的方程为 $x^2+(y-R)^2=R^2(0\leqslant x\leqslant R)$. 所求的功即是将池内的水全部提升至池沿高度所需的功. 使水位从 $y(0\leqslant y\leqslant R)$ 降到 $y-dy$ 所需的功近似地为 $\pi x^2dy\cdot(R-y)$, 其中 $x^2=2Ry-y^2$. 即功的微元

$$dW=\pi(2Ry-y^2)(R-y)dy.$$

故所需的功为

$$W=\int_0^R\pi(2Ry-y^2)(R-y)\,dy=\frac{\pi}{4}R^4\ (\text{吨}\cdot\text{米}).$$

关于引力的计算如下:由万有引力定律可知, 距离为 $r$ 的两个质点之间的引力为

$$F=k\frac{m_1m_2}{r^2},$$

其中 $m_1,m_2$ 分别是两个质点的质量, $k$ 为引力常数. 如果要确定一个物体对一个质点的引力, 或者两个物体之间的引力, 一般而言, 需要应用多重积分. 但在某些简单情况下, 可以用微元法来解决.

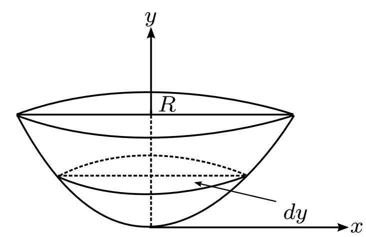

图 5.16

**例 5.3.2** 设有一个均匀细棒, 质量为 $m$, 长度为 $2l$. 在棒 (所在直线) 的延长线上有一单位质量的质点 $Q$, 距离棒的中心为 $a$ (这里 $a>l$). 求棒对质点 $Q$ 的引力 $F$.

**解** 以棒的中心为原点, 棒所在的直线为 $x$ 轴, 并使质点 $Q$ 在 $x$ 轴正方向上.

对区间 $[-l,l]$ 中任一长度为 $dx$ 的小区间 $[x,x+dx]$. 将这小段近似地视为一质点, 其质量为 $\frac{m}{2l}\cdot dx$, 而与质点 $Q$ 的距离为 $a-x$. 由万有引力定律, 这一小段对 $Q$ 的引力为 $k\frac{m}{2l(a-x)^2}dx$, 即

$$dF=k\cdot\frac{m}{2l(a-x)^2}\,dx,$$

于是棒对质点 $Q$ 的引力为

$$F=\frac{km}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{1}{(a-x)^2}dx=\frac{km}{a^2-l^2}.$$

## 习题 5.3

1. 求下列曲线弧的弧长.

(1) 抛物线 $y=x^2$ 在 $x=-a$ 到 $x=-a$ 到 $x=a$ 之间的弧;

(2) 星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(3) 阿基米德螺线 $r=a\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$.

2. 计算下面的曲线所围成的平面图形的面积.

(1) 双纽线 $r=a^2\cos 2\theta$ ($a$ 为常数, $a>0$);

(2) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, 及 $x$ 轴;

(3) $y=e^x, y=e^{-x}$, 及$x=1$.

3. 计算下列的旋转体的体积.

(1) $y=\sin x\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 与 $x$ 轴围成的图形绕 $x$ 轴及 $y$ 轴旋转;

(2) $y=e^{x^2}(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $x$ 轴围成的图形绕 $y$ 轴旋转;

(3) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 $x$ 轴围成的图形绕 $x$ 轴旋转.

4. 求证: 以 $R$ 为半径, 高为 $h$ 的球缺的体积为 $\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)$.

5. 求下列曲线段旋转后所得立体的侧面积.

(1) $x^2+y^2=r^2$ 绕 $x$ 轴, 其中常数 $r>0$;

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 $y$ 轴, 这里 $a>b>0$;

(3) $y=a\,\mathrm{ch}\,x\,(0\leqslant x\leqslant a)$ 绕 $x$ 轴;

(4) $r=a(1+\cos\theta)$ 绕极轴, $a>0$.

6. 半径为 $r$ 的球沉入水中, 与水面相切 (球的比重为 1). 现将球从水中捞出, 需作多少功?

7. 两条长为 $l$, 质量为 $m$ 的均匀细杆位于同一直线上, 两杆近端距离为 $l$, 求两杆之间的引力.

# §5.4 广义积分

Riemann 意义下的积分有两个限制, 其一是积分区间有限 (否则就不能保证当分割点越来越多时, 分割的宽度趋于零), 其二是被积函数有界. 如果要突破这两个限制, 必须借助最基本的极限方法, 考虑 Riemann 积分 (关于积分限) 的两类极限. 由此引出两类所谓的“广义积分”, 而 Riemann 积分有时则相应地称为常义积分.

## 5.4.1 无穷区间上的积分

首先考虑积分区间是无穷的情况. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义, 如果 $f(x)$ 在任何一个有限区间 $[a,A]$ 上可积, 而且当 $A\to\infty$ 时, 积分 $\int_a^A f(x)dx=\varphi(A)$ 作为 $A$ 的函数有极限, 则我们将这极限值定义为函数 $f(x)$ 在 (无穷) 区间 $[a,+\infty)$ 上的无穷积分, 记作 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, 即定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,dx=\lim_{A\to\infty}\varphi(A).$$

这时也称**无穷积分** $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 存在 (或收敛). 若上述的极限不存在, 则称此无穷积分不存在 (或发散).

类似地, 我们定义函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,a]$ 上的无穷积分为

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)dx.$$

而函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的无穷积分定义为

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx&=\int_{-\infty}^a f(x)\,dx+\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\\&=\lim_{c\to-\infty}\int_c^a f(x)\,dx+\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,\end{aligned}$$

其中 $a$ 为任一实数 (通常取 $a=0$). 换句话说, 当上面等式右边两个无穷积分都收敛时, 我们才称 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 (其值就定义为两者的和).

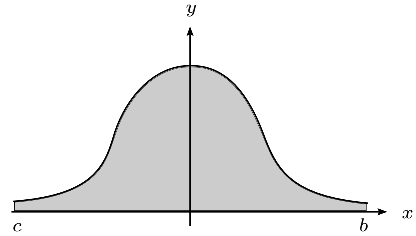


图 5.17

从几何上看, 无穷区间上的积分就是一个开口的曲边梯形的面积.

在现阶段, 判别无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是否收敛, 首先需对求出 $\int_a^A f(x)dx$; 再研究所得结果在 $A \to +\infty$ 时是否有极限 (按这一原则, 若判别了积分收敛, 通常也同时求出了无穷积分的值.) 为了做到这一点, 我们当然应用 Newton—Leibniz 公式: 若求得了 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的一个原函数 $F(x)$, 则问题就化为了求 $\lim_{A\to+\infty} F(A)$; 当这极限存在时, 其值就用 $F(+\infty)$ 表示, 我们的结果可以表述为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

对 $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ 及 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 可同样地处理.

例如, 对于函数 $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, 除去 $\alpha = 1$ 的情况, 有

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha} - 1)$$

显然, 若 $\alpha > 1$, 则当 $A \to \infty$ 时极限存在, 即

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

而当 $\alpha < 1$ 时, 极限不存在. 对于 $\alpha = 1$ 时, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的原函数是对数函数 $\log x$, 显然它在无穷远点发散.

然而, 我们知道, 即使被积函数是初等函数, 积分 $\int_a^A f(x)dx$ 的计算一般相当困难, 有时甚至无法用显式表达式来表示. 因此为了判别 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是否收敛, 上述的原则便不能走得太远. 我们将在后续课程中介绍一些有效的判别法则, 以判别无穷区间的积分是否收敛.这些方法只是根据被积函数自身的性质, 而不必先计算 $\int_a^b f(x)dx$.

然而, 最令人惊奇的是, 常义积分 $\int_a^A f(x)dx$ 无法 (显式) 计算的情况下, 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 却经常能计算. 例如（Poisson积分）, $\int_0^A e^{-x^2}dx$ 不可能表示为 $A$ 的初等函数, 但却能求出

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

我们将在后续课程中,从二维空间来看待 Poisson 积分,并给出具体的计算.

### 5.4.2 瑕积分

对于在有限区间上无界的函数, 我们的做法是将导致函数无界的点 (称为**瑕点**) 的近旁挖去, 使得函数在剩余的区间上有界. 积分后, 再让挖去的部分的长度趋于零, 如果极限存在, 就定义为无界函数的广义积分, 或称为**瑕积分**.

具体地说, 不妨设区间 $[a, b]$ 的右端点 $b$ 是 $f(x)$ 的唯一一个瑕点, 即函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上有定义, 在点 $b$ 的左近旁无界, 此时在常义之下 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积.

如果挖去 $b$ 点附近任意一个小区间 $(b-\varepsilon, b)$, 其中 $\varepsilon$是任意的正数, 而 $f(x)$ 在剩余部分区间 $[a, b-\varepsilon]$ 上可积 (从而 $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 有意义), 而且当 $\varepsilon \to 0^+$ 时, 积分 $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ 作为变上限函数有极限, 则称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的瑕积分存在 (或收敛), 并将这极限值定义为瑕积分的值, 记为 $\int_a^b f(x)dx$, 即定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

若上述极限不存在, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的瑕积分不存在 (或发散).

类似地, 如果区间的左端点 $a$ 是函数 $f(x)$ 的唯一一个瑕点, 则定义 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的瑕积分为

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx,$$

只要右端极限内的积分始终存在.

如果区间 $(a,b)$ 的两个端点都是 $f(x)$ 的瑕点, 则对任意 $c\in(a,b)$, 当两个瑕积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与 $\int_c^b f(x)dx$ 都收敛时, 就称瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 其值为这两个瑕积分之和, 即定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0^+}\int_{c}^{b-\eta} f(x)\,dx,$$

显然, 当瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛时, 其值显然与 $c$ 的选取无关.

如果瑕点产生在区间的内部, 不妨设 $c\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 的一个瑕点, 则根据积分可加性的基本原则, 分别考虑函数 $f(x)$ 在两个子区间 $(a,c)$ 和 $(c,b)$ 上的积分或瑕积分. 当两个积分都存在时, 则函数在原来的区间 $(a,b)$ 上广义可积.

如果函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上有数个瑕点, 根据积分的可加性, 可以将区间 $(a,b)$ 在瑕点处分开. 当 $f(x)$ 在每一小段上的积分或瑕积分都存在, 则它们的和就是函数在整个区间上的瑕积分.

与无穷区间上的广义积分类似, 在现阶段, 为了判别一个瑕积分是否收敛, 我们只能按照定义进行. 不妨设 $b$ 是 $f(x)$ 唯一的瑕点. 若求得了 $f(x)$ 在这区间上的一个原函数 $F(x)$, 则瑕积分是否收敛取决于极限 $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ 是否存在. 根据 Newton—Leibniz 公式有知

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a);$$

若 $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ 不存在, 则所说的瑕积分发散.

例如, 瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ 被积函数的原函数分别是 $F(x) = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}$ 当 $\alpha \neq 1$, 和 $F(x) = \log x$, 当 $\alpha = 1$. 因此很容易判断积分在 $\alpha < 1$ 时收敛, 在 $\alpha \geqslant 1$ 时发散.

一般情况下, 我们要根据被积函数自身的特点判断瑕积分的收敛性, 这将是我们今后的一个专门话题, 在此不表.

**注记**　顺便指出, 像下面这样的积分

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \text{ 与 } \int_0^1 x^\alpha \ln x\, dx \quad (\alpha \text{ 是常数}, \alpha > 0),$$

被积函数在 $x = 0$ 处虽然没有定义, 但因为函数 $\frac{\sin x}{x}$ 与 $x^\alpha \ln x$ 在 $(0,1]$ 上连续, 且当 $x \to 0^+$ 时都有极限 (从而有界). 因此, 无论怎样定义这两个函数在 $x = 0$ 处的值, 都不影响它们在 $[0,1]$ 上的 Riemann 可积性以及积分值. 通常, 我们对这样的积分不作特别的申明, 并且习惯上默认被积函数在 $x = 0$ 处的值, 定义为函数在这一点处的右极限值, 以使得被积函数在整个区间 $[0,1]$ 上连续.

另一方面, 无论是无穷区间上或无界的函数的广义积分, 都是常义积分的一种极限形态, 因此, 在极限的处理之下, 常义积分的基本性质和计算方法得以保留.下面我们特别讨论广义积分的换元和分部积分两种方法, 以便在计算广义积分时直接应用.

### 5.4.3　广义积分的换元和分部积分

我们首先讨论广义积分中的换元法. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续, 这里 $b$ 可以是 $+\infty$; 而 $x = \varphi(t)$ 是在区间 $[\alpha,\beta)$ 上严格单调递增的可微函数, $\varphi'(t)$ 连续且不取零值, 这里 $\beta$ 可以是 $+\infty$, 并且 $\varphi(\alpha) = a$ 及 $\varphi(\beta) = b$ (这应理解为 $\lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = b$).

由反函数定理, 在区间 $[a,b)$ 上有 $\varphi$ 的严格递增且连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$, 并且 $\lim\limits_{x\to b} \varphi^{-1}(x) = \beta$.

现在设 $x_0$ 与 $t_0 = \varphi^{-1}(x_0)$ 是区间 $(a,b)$ 与 $(\alpha,\beta)$ 中任意一对互相对应的数, 则由常义积分的换元公式, 得

$$\int_a^{x_0} f(x)\, dx = \int_\alpha^{t_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt,$$

显然, 当 $t_0 \to \beta$ 时有 $x_0 \to b$, 反之亦然. 因此, 若 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛, 则当 $t_0 \to \beta$ 时, (5) 式右端的积分必有极限, 即 $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ 收敛, 并且

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

类似地, 若上式右端的积分收敛, 则左边的积分也收敛, 且两者相等.

以上的讨论同样适用于 (变量代换) 函数 $\varphi$ 为严格递降且 $\alpha > \beta$ 的情形 (这里 $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$).

对 $(a,b]$ 上的(广义)积分, 变量代换方法可与上面类似地进行.

广义积分的变量代换法则, 其意义是: 等式中一边的积分收敛, 则另一边的积分也收敛, 且两者相等. 这一法则可用于计算 (已知收敛的) 广义积分, 也可用于证明广义积分收敛.

换元法可以将广义积分转化为常义积分 (在此情况下, 广义积分的收敛性便一目了然), 也可以将一种形式的广义积分转化为另一种形式的广义积分.

例如, 对于无穷区间上的广义积分 $\int_a^\infty f(x)dx$, $(a>0)$ 进行换元

$$x=\frac{1}{y},\quad \text{则}\quad dx=-\frac{dy}{y^2}.$$

因此

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\int_0^{1/a}\frac{1}{y^2}f\left(\frac{1}{y}\right)dy$$

上式的一端收敛就意味着另一端也收敛.

现在转向广义积分的分部积分. 设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续可微, 这里 $b$ 可以是 $+\infty$. 则对任意 $c\,(a<c<b)$, 在区间 $[a,c]$ 上由常义积分的分部积分公式, 有

$$\int_a^c u\,dv=u(x)v(x)\Big|_a^c-\int_a^c v\,du.$$

让 $c\to b$, 则我们看到, 上式中三个项中若有两个有极限, 则第三个也有极限, 并且有

$$\int_a^b u\,dv=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v\,du,$$

这里 $u(x)v(x)\Big|_a^b=\lim\limits_{x\to b}u(x)v(x)-u(a)v(a)$.

这就是广义积分的分部积分公式, 它既可用来计算 (已知收敛的) 广义积分, 也能用来证明广义积分收敛.

对于区间 $(a,b]$ 上的广义积分, 类似地可建立分部积分法则.

**例 5.4.1** 设 $\alpha$ 是任一正实数, 求证

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$$

收敛, 并求其值.

**解** 令 $x=\tan y$, 这里 $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则由换元法则得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^\alpha y}dy,$$

这是一个常义积分 (被积函数在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上连续, 且在 $y\to(\frac{\pi}{2})^-$ 时有极限), 从而问题中的广义积分收敛.

为了求出 $I$ 的值. 将积分区间分为 $[0,1]$ 及 $[1,+\infty)$, 并作代换 $x=\frac{1}{t}$, 得出

$$\begin{aligned}
I &= -\int_{+\infty}^{1}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt-\int_1^0\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}dt=-I+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt\\
&=-I+\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

故 $I=\frac{\pi}{4}$.

**例 5.4.2** 证明: 瑕积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$$

收敛, 并求其值.

**解** 分部积分, 我们得出

$$I=x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}dx.$$

(注意, 用 L'Hospital 法则可知 $\lim\limits_{x\to0+0}x\ln\sin x=0$.) 右边的积分是一个常义积分, 因而证明了瑕积分 $I$ 的收敛性.

为了计算 $I$, 令 $x=2t$, 则

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t\,dt=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt.$$

在上式最后一个 (常义) 积分中作代换 $t=\frac{\pi}{2}-y$, 则得 (见§5.1, 例5.1.10 的代换)

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin y\,dy\\
&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I,
\end{aligned}$$

故 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

## 习题 5.4

1. 判断下列广义积分是否收敛, 并求出收敛的广义积分的值.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\sin x d\,x$;

(3) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx$; (4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}dx$;

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$; (6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$;

(7) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$; (8) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$; (10) $\displaystyle\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x^2}dx$;

(11) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ ($n$ 为自然数); (12) $\displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n dx$ ($n$ 为自然数).

2. 广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 的柯西主值定义为

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} f(x)dx.$$

显然, 若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则其主值也收敛, 但反过来不一定成立. 研究下列广义积分主值的收敛性.

(1) $\displaystyle P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$; (2) $\displaystyle P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}dx$.

3. 若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续, 并且以 $a$ 为瑕点, 则广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 定义为

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx,$$

这是本节讲的两类广义积分的组合, 其中 $b>a$ 是任一个实数. 当上面两个广义积分都收敛时, 我们称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛; 否则称为发散.

(1) 证明 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$ 收敛, 并求其值;

(2) 证明, 对任意实数 $\alpha$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ 发散.

4. 设 $a<c<b$, 点 $c$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内唯一的瑕点, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 定义为两个瑕积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与 $\int_c^b f(x)dx$ 的和.

(1) 求 $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{1}{x^2+x-2}dx$;

(2) 求 $\int_{-1}^{1} x^{-\frac{1}{3}} dx$.

## 第 5 章综合习题

1. 设 $m, n$ 为正整数, 证明

   (1) $\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \cos nx \, dx = 0$;

   (2) $\int_0^{2\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi, & \text{如 } m = n \\ 0, & \text{如 } m \neq n \end{cases}$.

   (本题的结论, 在以后要讲的富里叶级数理论中具有基本的重要性.)

2. 设 $m, n$ 为正整数, 记
$$B(m,n) = \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx.$$
   证明: (1) $B(m,n) = B(n,m)$; (2) $B(m,n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

   $B(m,n)$ 是著名的 Beta 函数 (简称 $B$—函数) 的特例. 一般的 $B(m,n)$, 对 $m > -1$ 及 $n > -1$ 都有意义, 我们将在以后讨论. 习题5.1 中第6.(2)题, 给出了 $m > 0, n > 0$ 时, $B(m,n)$ 的一个上界估计.

3. 计算下列积分.

   (a) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$;

   (b) $\int_0^{n\pi} x|\sin x| dx$ ($n$ 为自然数);

   (c) 设 $f(x) = \int_x^{x+2\pi} (1 + e^{\sin t} - e^{-\sin t}) dt + \frac{1}{1+x} \int_0^1 f(t) dt$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$.

4. 证明 $\frac{1}{2n+2} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx < \frac{1}{2n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

5. 设函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\int_a^b f(x) dx > 0$, 证明: 必有一个区间 $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$, 使得对任意 $x \in [\alpha, \beta]$, 有 $f(x) > 0$. (比较习题5.1中第8题.)

   (提示: 假设结论不对, 则对 $[a,b]$ 的任一划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上都存在 $\xi_i$, 使 $f(\xi_i) \leqslant 0$. 由此产生一个非正的积分和, 过渡到极限, 产生矛盾.)

6. (1) 设 $f$ 是处处连续的偶函数, 则 $f$ 必有一个原函数为奇函数;

   (2) 设 $f$ 是处处连续的奇函数, 则 $f$ 的任一个原函数都是偶函数. (试比较习题3.1, 第15题.)

7. 举例说明, 存在一个连续的周期函数 $f$, 使得 $f$ 的原函数都不是周期函数. (试比较习题3.1, 第16题.) (提示: 选一个连续的周期函数 $f$, 使它能保证 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

不是周期函数. 注意, 不必考虑 $F(x)$ 的显式表示.)

8. 设 $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$. 证明: 多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点. (本题是第 3 章补充习题的第3题, 这里要求用积分的手法来论证. 可看习题5.1 中某个习题.)

9. 设函数 $f$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 且有 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx=\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0$. 试证在 $(0,\pi)$ 内存在两点 $x_1$ 和 $x_2$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$.
(提示:易知 $f$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个零点 $x_1$. 若这是唯一的零点, 则 $f$ 在 $(0,x_1)$ 与 $(x_1,\pi)$ 内异号. 于是 $\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_1)dx\neq 0$, 这将产生矛盾.)

10. 设 $f(x)$ 处处连续, $f(0)=0$, 且 $f'(0)$ 存在. 记 $F(x)=\int_0^1 f(xy)dy$. 证明 $F(x)$ 处处可导, 并求出 $F'(x)$.

11. (1) 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-x^2}, & |x|\leqslant 1 \\ 1, & |x|>1. \end{cases}$ 记 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. 试研究 $F(x)$ 在哪些点可导.
(提示: 与习题5.1 中第 16 题不同, 本题无法求出 $F(x)$ 的显式表示.)
(2) 设 $f(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,dt$, 求证 $f'_+(0)=0$.

12. 设函数 $f$ 处处连续.证明
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b [f(x+h)-f(x)]dx=f(b)-f(a).$$
(提醒: 本题容易做错.)

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微.证明
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0.$$
(提示: 分部积分.)

14. 证明: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|dt=\frac{2}{\pi}$.

15. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0$.　(提示: 直接用积分中值定理, 得出所说的积分为 $\frac{\pi}{2}\sin^n\xi_n$ (其中 $0<\xi_n<\frac{\pi}{2}$), 但这不能导出结果, 因不能排除 $\{\xi_n\}$ 中有一个子列趋于 $\frac{\pi}{2}$. 克服这一困难可采用如下的方法. 对任意正数 $\varepsilon<1$, 取一个参数 $\delta$ (与 $\varepsilon$ 有关), 将问题中的积分拆成两部分: 一部分用区间长度控制; 另一部分由 $n\to\infty$ 来控制, 以使得两者的和小于 $\varepsilon$. 我们有
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx \\ &< 2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right]^n+\delta=2\cos^n\delta+\delta.\end{aligned}$$

现在取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, 因 $0<\cos\frac{\varepsilon}{2}<1$, 且 $\cos\frac{\varepsilon}{2}$ 与 $n$ 无关, 故 $n$ 充分大时, 可使上式第一项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$.

解答本题的另一方法是应用 §5.1 中例9. 参考第 1 章综合习题中第 1 题中的 (1).)

16. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x)\geqslant 0$ (对 $x\in[a,b]$). 记 $f(x)$ 在这区间上的最大值为 $M$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)dx\right)^{\frac{1}{n}}=M.$$

17. (1) 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的递增、非负函数, 则对任意自然数 $n$, 有

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\leqslant f(n);$$

(2) 设 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的递减、非负函数, 则对任意自然数 $n$, 有

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\leqslant f(1).$$

此外, 极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx\right)=\alpha$$

存在, 且 $0\leqslant\alpha\leqslant f(1)$.

(提示: 对于 (1), 应用习题 5.1中第 5 题可知,

$$f(k)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)dx\leqslant f(k+1),$$

对 $k=1,2,\cdots,n-1$ 求和, 可得出结果. 类似地可证明 (2) 中的不等式.

为证明 (2) 中说的极限存在, 可证明

$$g(n)=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx,\quad n=1,2,\cdots$$

是单调递减的函数; 而上面已指出 $g(n)$ 以 0 为下界.)

某些 (不易直接处理的) 离散的量——数列的和, 可以通过 (易于处理的) 连续的量—— 积分作出估计, 本题给出了最简单的这样的结果 (这在后面的无穷级数理论中还将提及). 例如, 我们现在易于给出 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}$ 及 $n!$ 的相当精确的上、下界.我们特别提及, 对 $n\geqslant 1$, 有

$$\ln n\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\ln n+1,$$

从而 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 趋于无穷大, 并且与 $\ln n$ 同阶. 此外,

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

存在, 这称为欧拉常数.

18. (柯西积分不等式) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx,$$

等号成立的充分必要条件是: $f$ 和 $g$ 中有一个恒为零, 或 $f(x) = \lambda g(x)$ (对 $x \in [a,b]$), 这里 $\lambda$ 是一个常数.
(提示: 本题有好几种证法. 用对上限求导可得出一个证明, 参见习题5.1中第 28 题的提示. 最标准的方法如下: 无妨设 $\int_a^b g^2(x)dx \neq 0$, 否则易知函数 $g$ 恒为零, 结论显然成立 (习题5.1, 第 4(2) 题). 考虑关于 $t$ 的二次三项式 $\int_a^b (f(x)+tg(x))^2 dx$, 这总是非负的.)

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, 则对任意 $a \in [0,1]$, 有

$$|f(a)| \leqslant \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |f'(x)|dx.$$

20. 证明: $0.944 < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < 0.947$. (提示: 参看习题5.1中第 24 题的提示.)

21. 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $|f'(x)| \leqslant M$. 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}.$$

22. 设 $f: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ 是一个可微函数, 且对任意实数 $x, y$ 满足

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant |x-y|.$$

求证: 对任意实数 $x$, 有

$$(f'(x))^2 < 2f(x).$$

# 第 6 章　常微分方程初步

在掌握了微分和积分的基本内容后,可以考虑一个实际背景的问题–求解微分方程.从数学上看,所谓微分方程就是联系着一个自变量 $x$ 与 (未知) 函数 $y$ 及其微商 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 的关系式 (方程)

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

这里只讨论单个自变量的方程,因此也称之为**常微分方程**. 方程中所含未知函数微商的最高阶数 $n$, 称为这个方程的阶. 若方程关于 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 均是一次的, 则称其为 ($n$ 阶) **线性微分方程**.

一个函数 $y = y(x)$ 称为微分方程的解, 如果它能满足该方程. 因此当给定方程后, 最基本的事情当然是求出方程的解, 即求未知函数 $y = y(x)$.

微分方程在数学和其他自然科学、工程技术,乃至经济管理领域中扮演着非常基本和重要的角色. 在自然过程中, 有关的变量及其变化率之间, 按照制约该过程的一些基本的科学原理 (定律), 是彼此相联系的. 将这种联系用数学方式表达出来, 往往就产生一个 (或几个) 微分方程.

例如, 根据 Newton 基本定律, 质点的质量 $m$ 乘以运动的加速度等于质点所受的外力. 如果选定坐标, 设质点在时刻 $t$ 时距离 (或位置) 为 $x(t)$, 所受的外力为 $F(x(t))$, 则 $x(t)$ 满足 Newton 方程

$$F(x(t)) = m\ddot{x}(t)$$

通常, 在力学中用 $\dot{x}$, $\ddot{x}$ 等表示对时间 $t$ 的导数.

最简单的例子是自由落体的运动, 它满足

$$\ddot{x}(t) = -g \quad (g \text{ 是重力加速度})$$

以及质点沿 $x$ 轴被弹性力拉向原点的运动, 此时质点的位置函数 $x(t)$ 满足

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) \quad (k \text{ 是弹性系数})$$

上述刻划物理问题的方程本身不能完全决定质点的运动. 如果我们指定在某一时刻 (比如 $t_0 = 0$) 质点的初始位置 $x(0)$ 和初始速度 $\dot{x}(0)$, 则运动就完全确定了. 即质点从任意给定的位置, 以任意给定的速度出发, 而后的运动就完全由方程所决定.

用数学的语言说, 就是: 除非特别要求, 一般来说微分方程解的个数不唯一. 例如, 最简单的一阶方程

$$y' = f(x)$$

它的解一定是下列形式

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C,$$

其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 任一个确定的原函数, $C$ 是任意常数. 即对任意的常数, $F(x)+C$ 都是方程的解. 故称这样形式的解为方程的“通解”. 如果事先要求所求的解在一个特定的点 $x_0$ 满足 $y(x_0)=\alpha$, 则符合要求的解是唯一的

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + \alpha$$

称为方程的一个“特解”.

对于一般形式的一阶微分方程

$$F(x, y, y') = 0$$

如果没有任何要求, 它的解一般也含有一个任意常数 $C$, 通常表示为隐式 ( 参见§1.3 中“函数的其他表达方式”. )

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

如果能从中 $y = y(x, C)$ , 则称之为解的显表示.

对于一般形式的 $n$ 阶微分方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

它的解通常包含 $n$ 个独立的 ( 即彼此不能合并的 ) 任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$, 它的解无论是隐表示 $\Phi(x, y, C_1, \cdots, C_n) = 0$ 还是显表示 $y = y(x, C_1, \cdots, C_n)$, 称为方程的**通解**或称为方程的**通积分**, 常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 称为 **积分常数**. 而下列初始条件

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

一般来说决定了方程的一个特解.

例如对于自由落体的运动方程, 经过两次积分, 它的通解为

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

其中 $C_1,\ C_2$ 是任意常数. 如果给定在时刻 $t = 0$ 时的初始位置和初始速度 $x(0) = \alpha,\ \dot{x}(0) = \beta$, 则符合要求的特解是唯一确定的

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \beta t + \alpha.$$

从上面几个简单例子看出, 求解微分方程的过程就是一个积分的过程. 所以当微分方程的通解能够用初等函数及初等函数的不定积分来表示, 则称方程为**可积微分方程**, 而导出这种解的方法称为**初等积分法**.

然而, 能用初等积分法求解的方程事实上是非常少的, 对不少方程的求解过程也是十分复杂和困难的. 尽管如此, 这一基本方法在微分方程中仍很重要. 我们将简要介绍一些用初等积分法求解的一阶或高阶方程的解法. 而对于(常)微分方程的一般理论, 将在后续课程中介绍.

## §6.1　一阶微分方程

### 6.1.1　分离变量法

考虑形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

的一阶方程. 即便是这样简单的方程, 求解也是一个困难的事情. 当方程具有某种特殊类型时, 则易于用初等积分法解决.

如果 $f(x,y) = g(x)h(y)$, 这里 $g, h$ 分别是 $x$ 和 $y$ 的连续函数, 且 $h(y)$ 不恒为零. 则方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = g(x)h(y). \tag{2}$$

在 $h(y) \neq 0$ 时可化为

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx. \tag{3}$$

当 $y$ 作为 $x$ 的函数是方程 (2) 的解时, 根据一阶微分形式的不变性, 在 (3) 式两边分别求关于 $y$ 和 $x$ 的不定积分, 得

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx, \quad \text{即} \quad H(y) = G(x) + C, \tag{4}$$

其中 $H(y)$, $G(x)$ 分别是 $\frac{1}{h(y)}$, $g(x)$ 的一个原函数, $C$ 是任意常数 (上式左边也应包含一个任意常数, 但这可与 $\int g(x)\,dx$ 中的任意常数合并为 $C$). 因此方程 (2) 的通解由 (4) 给出. 因为 $H'(y) = \frac{1}{h(y)} \neq 0$, 所以存在反函数, 方程 (2) 的通解可以有显式表示 $y = H^{-1}(G(x)+C)$. 如果考虑初值问题 $y_0 = y(x_0)$, 代入通解并确定常数 $C$, 得 $C = H(y_0) - G(x_0)$. 也就是满足初值问题的特解的隐表示如下

$$H(y) - H(y_0) = G(x) - G(x_0)$$

注意, 对 $h(y)$ 的任一零点: $h(a) = 0$, 常值函数 $y = a$ 显然是方程 (2) 的解. 这些解往往在分离变量 (即 (2) 化为 (3)) 时丢失, 且有时不能包含在通积分 (4) 中, 故应将这样的解补上. 这个事实也说明通解未必是全部解, 或者说通解之外可能还有“例外解”.

我们看到, 方程 (2) 中, 可将其中 $x$ 的函数与 $dx$ 置于等式一边, 而将 $y$ 的函数与 $dy$ 置于等式的另一边, 从而两边可各自求不定积分. 这样的方程称为**可分离变量的方程**, 这一解法也称为**分离变量法**.

**例 6.1.1** 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

**解** 将方程分离变量后, 有

$$ydy = -xdx.$$

两端求 (不定) 积分, 得方程的通解

$$x^2 + y^2 = C \quad (C \text{ 为任意常数}),$$

这在 $Oxy$ 坐标系中, 表示以原点为圆心的同心圆族.

**例 6.1.2** 求解方程

$$(1 + x^2)ydy + \sqrt{1 - y^2}dx = 0.$$

**解** 当 $1 - y^2 \neq 0$ 时, 分离变量后, 方程可改写成为

$$-\frac{ydy}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

两边积分, 得方程的通解为

$$\sqrt{1 - y^2} = \arctan x + C \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

又 $y = \pm 1$ 都是原方程的解, 故应补上. 因此这个方程的全部解是

$$\sqrt{1 - y^2} - \arctan x = C \text{ 及 } y = \pm 1.$$

### 6.1.2 齐次方程

有些方程本身不能直接分离变量, 但作适当的代换后, 可用分离变量法求解. 所谓的齐次微分方程就是这样的一类方程.

一个函数 $f(x, y)$ 称为 $n$ 次**齐次函数**, 如果对某个范围内的 $x, y$ 与 $t$ 有

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

一阶微分方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

称为齐次的, 如果函数 $P$ 和 $Q$ 是同次的齐次函数. 现在 $\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 是 0 次齐次函数, 因此它可写为 $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 的形式. 于是上述的齐次微分方程可化为形式

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5}$$

为了解方程 (5). 我们引入新的未知函数

$$u=\frac{y}{x}.$$

则 $y=ux$, 从而

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}.$$

于是方程 (5) 变成

$$x\frac{du}{dx}=\varphi(u)-u. \tag{6}$$

方程 (6) 可分离变量, 成为

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

两边积分, 得到

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+C.$$

求出上式左边的不定积分后, 再用 $\frac{y}{x}$ 代换其中的 $u$, 即得方程 (5) 的通解. 注意, 若 $\varphi(u)-u$ 有一个实零点 $u_0$, 则 $y=u_0x$ 就是丢失的一个特解, 应当补上.

**例 6.1.3** 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

**解** 这是一个齐次方程, 在其中令 $y=ux$, 并分离变量, 得出

$$\frac{1-u}{1+u^2}du=\frac{dx}{x},$$

积分得

$$\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+C_1,$$

将$u=\frac{y}{x}$ 代入上式, 得出原方程的通解为

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\arctan\frac{y}{x}},\quad 其中\ C=e^{-C_1}.$$

若采用极坐标, 则上述通解可写成

$$r=Ce^{\theta},$$

这表示平面上一族以原点为心的对数螺线.

**例 6.1.4** 求解方程

$$xdy = (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx.$$

**解** 先考虑 $x > 0$ 的情形, 此时原方程可化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

这是一个齐次方程. 作代换 $y = ux$, 得

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2}, \quad 即 \ \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

积分后得

$$\ln(u + \sqrt{1 + u^2}) = \ln x + C_1,$$

其中 $C_1$ 是任意常数. 以 $u = \frac{y}{x}$ 代入上式, 可得

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2, \quad 其中\ C = e^{C_1} > 0.$$

由此可解出

$$y = \frac{1}{2}\left(Cx^2 - \frac{1}{C}\right).$$

当 $x < 0$ 时, 可求得与上面相同的结果. 故原方程的解为 $y = \frac{1}{2}\left(Cx^2 - \frac{1}{C}\right)$, 其中 $C > 0$ 是常数.

### 6.1.3 一阶线性方程

如果一阶微分方程中的未知函数 $y$ 及其导函数 $y'$ 都是一次的, 则称方程为一阶线性方程, 它可化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{7}$$

若右端的 $Q(x)$ 恒为零, 则方程称为 (一阶) **线性齐次方程**; 否则, 方程称为 (一阶) **线性非齐次方程**. 注意, 这里“齐次”的含义与前面说过的完全不同.

线性齐次方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{8}$$

的求解是相当容易的, 因为这是一个可分离变量方程: 当 $y \neq 0$ 时, 我们有

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

得出

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + C_1,$$

由此得

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \quad \text{其中 } C = \pm e^{C_1}\,(\neq 0).$$

显然 $y=0$ 是方程 (8) 的解, 在上面的通解中让 $C=0$ 就得到了这个解, 故线性齐次方程 (8) 的通解（也是全部解）为

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad (C \text{ 为任意常数}). \tag{9}$$

现在来解非齐次方程 (7), 由于不能直接用分离变量法, 这里采用下面的办法: 设 $\int P(x)dx$ 为 $P(x)$ 的任一个确定的原函数, 在 (7) 两边同乘上 $e^{\int P(x)dx}$, 则所得的结果可变形为

$$\frac{d\left(ye^{\int P(x)dx}\right)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

两边积分即得

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C,$$

即方程 (7) 的通解为 (其中 $C$ 为任意常数)

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}dx + C\right], \tag{10}$$

方程 (7) 的另一种求解方法为: 作代换

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{11}$$

其中 $C(x)$ 待定.代入方程 (7), 给出了 $C(x)$ 满足的方程,

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

两边直接积分得

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

这结合 (11) 也导出了方程 (7) 的通解 (10).

比较 (9) 与 (11) 可以看到, 解非齐次方程 (7) 所作的代换, 可视为在相应的齐次方程的通解中, 将任意常数 $C$ 变易为 $x$ 的函数 $C(x)$, 因此, 这一方法也称为**常数变易法**, 这是微分方程中非常重要的一个方法. 此外, 从通解公式 (10) 中还可看到: 线性非齐次方程的通解, 简单地说, 是相应的齐次方程的通解 $Ce^{-\int P(x)dx}$ 与线性非齐次方程的一个特解 $e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ 之和. 这件事情, 我们以后还将提及.

有些一阶方程, 并不是线性方程, 但可以通过适当的代换化为线性方程, 进而其解易于求得. 这里, 我们只提一类这样的方程, 就是所谓的 Bernoulli **（贝努利）方程**:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \text{ 为不等于 } 0,\ 1 \text{ 的实数}. \tag{12}$$

解方程 (12) 可采用下面的方法: 先以 $y^n$ 除方程的两边, 得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x),$$

再作代换 $u=y^{1-n}$, 则方程化为线性方程

$$\frac{du}{dx}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x).$$

由此就易求出方程 (12) 的通解.

**例 6.1.5** 求解方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=-1.$$

**解** 这是一个 (一阶) 线性非齐次方程, 可以用前述的方法求解, 也可直接应用通解公式 (17) (取 $P(x)=-\frac{1}{x}$, $Q(x)=-1$), 我们有

$$\begin{aligned}y=e^{\int\frac{dx}{x}}\left[C+\int -e^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right]&=e^{\ln|x|}\left[C-\int e^{-\ln|x|}dx\right]\\&=|x|\left[C-\int\frac{dx}{|x|}\right].\end{aligned}$$

上式右端在 $x>0$ 时是

$$x\left[C-\int\frac{dx}{x}\right]=x[C-\ln|x|];$$

在 $x<0$ 时是

$$-x\left[C-\int\frac{dx}{-x}\right]=x[-C-\ln|x|].$$

由于 $C$ 是任意常数, 故方程的解可统一表述为

$$y=x[-C-\ln|x|].$$

**例 6.1.6** 求解方程

$$(2y^2+y-x)dy-ydx=0.$$

**解** 当 $y\neq 0$时, 方程可变形为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y^2+y-x},$$

但这不是线性方程. 若将方程变形为

$$\frac{dx}{dy}=2y+1-\frac{x}{y},\quad 即\quad \frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=1+2y,$$

便是以 $y$ 为自变量, $x$ 为未知函数的线性方程; 其通解为

$$\begin{aligned}x &= e^{-\int\frac{dy}{y}}\left[\int(1+2y)e^{\int\frac{dy}{y}}dy+C\right]\\ &= \frac{1}{|y|}[\int(1+2y)|y|dy+C]\\ &= \frac{1}{y}\left[\frac{1}{2}y^2+\frac{2}{3}y^3+C\right]\\ &= \frac{1}{2}y+\frac{2}{3}y^2+\frac{C}{y},\ \text{其中 } C \text{ 为任意常数.}\end{aligned}$$

**例 6.1.7** 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=xy+x^3y^3.$$

**解** 这是Bernoulli方程, 作代换 $u=y^{-2}$, 将它化为线性方程

$$\frac{du}{dx}+2ux=-2x^3,$$

其通解易求出为 $u=1-x^2+Ce^{-x^2}$, 故原方程的通解是

$$\frac{1}{y^2}=1-x^2+Ce^{-x^2},$$

还有一个特解 $y=0$.

### 6.1.4 可降阶微分方程

一般的二阶微分方程的形式是

$$F(x,y,y',y'')=0.$$

这里要讲两种特殊类型的二阶方程, 通过代换, 它们能够化为一阶方程.

$1^\circ$ **不显含未知函数的二阶方程** 若二阶方程中不显含 $y$, 则这种方程可写成

$$f(x,y',y'')=0. \tag{13}$$

引入新的函数 $p=y'$, 则 $y''=\frac{dp}{dx}$. 这时 (13) 化为了一阶方程

$$f\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0. \tag{14}$$

如果能求出 (14) 的通解 $\Phi(x,p,C)=0$, 则将$p=y'$ 代入这个通解中, 这产生另一个一阶方程 $\Phi(x,y',C)=0$. 求出了这个一阶方程的解, 也就求出了 (13) 的解. 这一方法, 是将一个二阶方程, 化为两个一阶方程逐步来解决.

$2^\circ$ **不显含自变量的方程** 若二阶方程中不显含 $x$, 则方程可写为

$$g(y,y',y'')=0. \tag{15}$$

我们仍令 $p = y'$, 但现在需用对 $y$ 的导数来表示 $y''$:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

于是 (15) 可写为

$$g\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0. \tag{16}$$

这是一个关于未知函数 $p = p(y)$ 的一阶方程, 求出方程 (16) 的通解 $p = p(y, C)$ 后, 又将问题化为了另一个一阶方程 $y' = p(y, C)$ 的求解问题.

**例 6.1.8** 求解二阶方程

$$xy'' + y' = 4x \quad (x \neq 0).$$

**解** 这是不显含未知函数的方程. 令 $p = y'$, 则方程化为

$$xp' + p = 4x. \tag{17}$$

这是一阶线性非齐次方程, 可以用求解一阶非齐次方程的方法求解. 但更简单地, 是将 (17) 变形为

$$\frac{d(xp)}{dx} = 4x.$$

于是 $xp = 2x^2 + C_1$, 即

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{C_1}{x}.$$

积分后, 得方程的通解为

$$y = x^2 + C_1 \ln|x| + C_2,$$

其中 $C_1, C_2$ 是 (独立的) 常数. 注意, 我们前面提到过, 二阶方程的通解中, 包含着两个 (独立) 常数.这个例子也说明,求解微分方程可以采取更加灵活的方式,只要能够把通解,或根据题意所需要的解求出来就达到目的.

**例 6.1.9** 求方程

$$y'' - e^{2y} = 0$$

满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 的特解.

**解** 这是不显含 $x$ 的二阶方程. 令 $p = y'$, 则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$. 代入方程后, 得

$$p\frac{dp}{dy} - e^{2y} = 0.$$

分离变量, 并积分, 得出

$$\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1.$$

由 $y(0)=0,\ p(0)=y'(0)=1$, 得 $C_1=0$. 故 $p=p(y)=e^y$, 所以再解方程

$$\frac{dy}{dx}=p(y)=e^y.$$

分离变量, 并积分, 得出

$$-e^{-y}=x+C.$$

由 $y(0)=0$, 得 $C=-1$, 故所求特解为 $1-e^{-y}=x$.

## 习题 6.1

1. 求解下列可分离变量的微分方程.

(1) $(1+x^2)dy = ydx$;　　(2) $y' = e^{x-y}$;

(3) $xy' + y = y^2$;　　(4) $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.

2. 求解下列的微分方程.

(1) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$;　　(2) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$;

(3) $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$;　　(4) $(x^2 + 3y^2)dx - 2xydy = 0$.

3. 证明, 形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

的方程, 可通过代换化为齐次方程. (提示: 若方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

有非零解 $x_0, y_0$ (即 $x_0, y_0$ 不全为零), 则可令 $u = x - x_0, v = y - y_0$; 其它情形更易于处理.)

求解下面的方程

(1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+3}{x-y+1}$;　　(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+4y+3}{x+2y+1}$.

4. 求下列线性方程和贝努利方程的解.

(1) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$;　　(2) $y' + \dfrac{1-2x}{x} = 1$;

(3) $y' = \dfrac{y}{x+y^3}$;　　(4) $y' + \dfrac{y}{x} = y^2 \ln x$;

(5) $y' = y\tan x + y^2\cos x$;　　(6) $y - y'\cos x = y^2(1-\sin x)\cos x$.

5. 求下列方程满足初始条件的特解.

(1) $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$,　$y(1) = 1$;

(2) $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}$,　$y(\pi) = 1$.

6. 求解下列微分方程.

(1) $y' + x = \sqrt{x^2 + y}$;　　(2) $y' = \cos(x-y)$;

(3) $y' - e^{x-y} + e^x = 0$;　　(4) $y'\sin y + x\cos y + x = 0$.

7. 试用常数变易法导出贝努利方程的通解.

8. 一条曲线过点 $(2,3)$, 其在坐标轴间的任意切线段被切点平分, 求这曲线.

9. 设函数 $f(x)$ 处处连续, 且 $f(x)=\int_0^x f(t)dt$ (对 $x\in R$), 求 $f(x)$.

10. 已知镭的衰变速率与镭的现存量成正比 (比例常数为 $k$). 设开始时镭的量为 $a$. 问 $t$ 时刻镭的量 $x(t)$ 为多少?

11. 一汽艇以速度 $v$ 等于 10 公里/小时在静水上运动, 它的发动机在开足马力后关掉, 经过 20 秒后, 汽艇的速度降低为 $v_1=6$ 公里/小时. 设水对汽艇运动的阻力和汽艇速度成正比, 试求:
    (1) 发动机停止 2 分钟后汽艇的速度;
    (2) 发动机停止 1 分钟后汽艇所走的路程.

12. 求解下列二阶方程的解.

    (1) $xy''=y'$; (2) $y''=\dfrac{y'}{x}+x$;
    (3) $y''=y'+x$; (4) $y''+(y')^2=2e^{-y}$.

13. 求下列二阶方程满足初始条件的特解.
    (1) $y''=\frac{y'}{x}+\frac{x^2}{y'},\ y(1)=1,\ y'(1)=0$;
    (2) $y^3y''=-1,\ y(1)=1,\ y'(1)=0$.

## §6.2 二阶线性微分方程

首先考察一个质量为$m$的质点在弹性力作用下的振动问题.设质点的平衡位置为原点,质点延$x$轴运动.如果时刻$t$质点的位置是$x(t)$, 由于它所受的弹性力$F_1$与位移成正比,方向指向平衡位置,所以$F_1=-\kappa x(t)$,其中$b>0$是弹性系数.由Newton第二定律,运动满足方程$m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\kappa x(t)$, 或者令$\omega_0=\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$将方程改写为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0,$$

称为自由简谐振动方程.

除弹性力外,如果质点还受到阻力 $F_2$ 作用,阻力大小与运动速度成正比,方向与运动方向相反,即 $F_2=-\nu\frac{dx}{dt}$,其中 $\nu$ 是阻尼系数. 取 $\beta=\frac{\nu}{2m}$, 则质点的运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0.$$

如果在弹性力、阻力之外,质点还受到一个周期外力$F_3=a\cos\omega t$（称为策动力,其中$a$, $\omega$是常数）的作用,则运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=a\cos\omega t.$$

数学上,称关于未知函数$y(x)$的方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \tag{1}$$

为$n$阶线性微分方程,当 $f=0$ 时称为 $n$ 阶齐次线性微分方程.如果方程中的系数 $a_(x),a_2(x),\cdots,a_n(x)$ 都是常值函数,方程(1)又称为$n$阶常系数微分方程.

在实际问题中最常见的线性微分方程是二阶的, 它的一般形式是

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{2}$$

相应的齐次方程是

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{3}$$

其中 $p(x),q(x)$ 及 $f(x)$ 都是给定的函数. 在前两节中我们已经看到这两个方程的解一般不是惟一的, 其通解中一般包含两个独立的常数. 但是如果我们要求解 $y(x)$ 满足初始条件 $y(x_0)=\alpha,\ y'(x_0)=\beta$, 那么这样的解就是惟一的.以下我们总假定函数 $p(x),q(x),f(x)$ 在某区间 $I=(a,b)$ 或在整个数轴上是连续的.

**定理 6.1** (初值问题解的存在唯一性) *若函数 $p(x),q(x),f(x)$ 在区间 $I$ 上连续, $x_0\in I$, 则对任何初值 $\alpha,\beta$, 下列初值问题*

$$\begin{cases}y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\\ y(x_0)=\alpha,\ y'(x_0)=\beta\end{cases}$$

在 $x_0$ 的邻域内存在惟一的解 $y(x)$. 特别, 满足初值 $y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0$ 的解一定恒为零 $y(x)=0$

这里略去定理的证明,它超出了本书范围.

### 6.2.1　二阶线性方程解的结构

对于齐次方程 (3) 很容易验证下面的结论.

**定理 6.2**　若 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 (3) 的解, 其中 $c_1, c_2$ 是任意常数, 则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的线性组合

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

也是方程 (3) 的解.

定理6.2表明,齐次方程的解集,具有线性结构,这也是线性方程称谓的由来.对于非齐次方程(2),容易验证如下定理

**定理 6.3**　若 $y_1(x),\ y_2(x)$是非齐次方程(2) 的两个解,则$y_1(x)-y_2(x)$是齐次方程(3) 的解. 换句话说, 如果 $y(x)$ 是齐次方程(3) 的解, $y_0(x)$ 是非齐次方程(2) 的解, 则$\tilde{y}(x)=y_0(x)+y(x)$ 仍是非齐次方程(2) 的解.

从以上两个定理可以发现,如果我们能求出求出齐次方程(3)的通解,以及非齐次方程(2)的一个解（称之为特解）,就可以得到非齐次方程(2)的通解. 为了寻求齐次线性方程的解, 我们引入函数组线性无关、线性相关以及 Wronski 行列式的概念.

**定义 6.4**　设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 是区间 $I$ 上的函数. 如果存在不全为零的常数 $c_1, c_2$, 使得对于区间 $I$ 内的一切 $x$, 有

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=0,$$

那么称这两个函数在区间 $I$ 上是线性相关的, 否则就称它们在区间 $I$ 上是线性无关的.

**定义 6.5**　设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 是区间 $I$ 上的两个可导函数. 称

$$W(x)=\begin{vmatrix}\varphi_1(x) & \varphi_2(x)\\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x)\end{vmatrix}$$

为 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 的 *Wronski*（朗斯基）行列式.

容易验证,如果函数组 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ 线性相关, 即存在不全为零的常数 $c_1,\ c_2$ 满足 $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=0$, 求导得 $c_1\varphi_1'(x)+c_2\varphi_2'(x)=0$, 也就是两个线性方程联立有非零解, 因此系数行列式, 即它们的 Wronski 行列式等于0,但反之并不成立（见习题）.

然而,当两个函数是齐次方程(3)的解时, 结论就不同了, 即

**定理 6.6** 设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程 (3) 的两个解, 则它们在区间 $I$ 上线性相关的充分必要条件是这两个解的 *Wronski* 行列式在区间 $I$ 上恒为零.

**证明** 必要性: 正如上面的验证结果, 当 $y_1(x), y_2(x)$ 线性相关时, 线性方程组 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0,\ c_1y'(x)+c_2y_2'(x)=0$ 有非零解, 所以系数行列式, 即 $y_1(x),\ y_2(x)$ 的 Wronski 行列式等于零.

充分性: 在 $I$ 内任取一点 $x_0$ , 根据条件有

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}=0.$$

由此知存在不全为零的常数 $c_1, c_2$ 满足

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=0,$$
$$c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=0.$$

设 $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$. 根据定理6.2 知 $y(x)$ 是齐次方程 (3) 的解, 且满足初始条件

$$y(x_0)=0,\ y'(x_0)=0.$$

因此一定是零解, 即 $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\equiv 0$. □

在“充分性” 的证明中,只用到了Wronski 行列式在一点为零. 事实上, 只要函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程 (3) 的解, 那么从 $y_1(x), y_2(x)$ 的 $W(x)$ 在区间内某一点为零, 推出线性相关. 再根据定理的必要性,推出 $W(x)$ 在该区间内恒为零. 也就是作为方程的解 $y_1(x),\ y_2(x)$ , 它们的 Wronski 行列式一点为零 , 则处处为零. 更进一步的结论是

**定理 6.7** 齐次方程 (3) 两个解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的 *Wronski* 行列式可表示为下列 *Liouville* ( 刘维尔 ) 公式

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\,dt},$$

其中 $x_0$ 是区间 $I$ 内一点.

**证明** 因为 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (3) 的解, 所以有

$$y_1''(x)=-p(x)y_1'(x)-q(x)y_1(x)$$
$$y_2''(x)=-p(x)y_2'(x)-q(x)y_2(x).$$

由此得

$$\begin{aligned}\frac{dW(x)}{dx}&=y_1(x)y_2''(x)-y_1''(x)y_2(x)\\&=-p(x)\big(y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x)\big)\\&=-p(x)W(x).\end{aligned}$$

两端乘以 $e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}$ 可得

$$\frac{d}{dx}\left(W(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}\right)=0.$$

这说明

$$W(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}=C$$

是常数. 令 $x=x_0$ 得 $W(x_0)=C$. □

结合上面两个定理容易推出如下结论.

**定理 6.8** 若函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是齐次方程 (3) 的一对线性无关解, 则它们的 *Wronski* 行列式处处不为零.

下面的定理给出了二阶齐次线性微分方程通解的形式.

**定理 6.9** 设函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是齐次方程 (3) 的一对线性无关解, 则该方程的任何一个解可以表示为

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x),$$

其中 $c_1, c_2$ 为常数.

**证明** 在 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 的定义域内任取一点 $x_0$. 由这两个函数的线性无关性, 知

$$W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}\neq 0.$$

设 $y(x)$ 是方程 (3) 的任一非零解, 则以$W(x_0)$ 中元素为系数的下列线性方程组

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)&=y(x_0)\\ c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)&=y'(x_0). \end{aligned}$$

存在唯一的一组非零解 $c_1$, $c_2$. 令 $\tilde{y}(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ , 则 $\tilde{y}(x)$ 也是方程 (3) 的解, 且 $\tilde{y}(x_0)=y(x_0)$, $\tilde{y}'(x_0)=y'(x_0)$. 根据初值问题解的唯一性可知 $\tilde{y}(x)\equiv y(x)$. 即, $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$. □

方程 (3) 的一对线性无关解称为一个**基本解组**.

**定理 6.10** 齐次方程 (3) 的基本解组一定存在.

**证明** 取两组数 $\alpha_1,\beta_1$ 和 $\alpha_2,\beta_2$ 使得 $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\neq 0$, 则下面两个初值问题

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0, \\ y(x_0)=\alpha_1,\ y'(x_0)=\beta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0, \\ y(x_0)=\alpha_2,\ y'(x_0)=\beta_2 \end{cases}$$

均存在唯一, 而且分别所得的解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 在 $x_0$ 处的 Wronski 行列式 $W(x_0) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$, 因而 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 线性无关. 即 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 构成了 (3) 的一个基本解组. □

**注记:** 用线性代数的语言来讲,设$V$是齐次方程(3)全体解的集合,定理(6.2)表明 $V$ 是一个线性空间,基本解组是$V$ 的一组基. 对$n$阶齐次线性微分方程也有同样的结论.

虽然定理6.10 给出了齐次方程(3)基本解组的存在性, 但并没有给出求解基本解组的通用方法. 一个常用的方法是：如果已知方程(3) 的一个非零解$y_1(x)$ , 则可用 Liouville 公式来求另一个与 $y_1(x)$ 线性无关的解 $y_2(x)$. 从而得到方程(3)的基本解组.

设已知一个非零解 $y_1(x)$, 因为

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt},$$

不妨设 $W(x_0) = 1$. 从上式得

$$\frac{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}{y_1^2(x)} = \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt},$$

即,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right) = \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}.$$

积分可得

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}dx.$$

显然, $y_2(x)$ 与 $y_1(x)$ 的 Wronski 行列式不等于零, 因此两者构成方程(3) 的基本解组.

**例 6.2.1** 求方程 $xy'' - y' = 0$ 的通解.

**解** 易知 $y_1 = 1$ 是该方程的一个特解. 方程可表为 $y'' - \frac{1}{x}y' = 0$. 记 $p(x) = -\frac{1}{x}$.

$$\int_{x_0}^{x} p(t)dt = -\ln\frac{x}{x_0}.$$

因此 $y_2(x) = \frac{1}{2}cx^2$. 所以 $x^2$ 是一个与 1 线性无关的特解. 所求通解为 $y(x) = c_1 + c_2x^2$.

### 6.2.2 常数变易法

上节我们讨论了齐次方程(3) 解的结构, 在此基础上我们将探讨非齐次方程 (2) 解的结构问题. 根据定理6.3和定理6.9,如果 $y_0(x)$ 是非齐次方程 (2) 的一个特解, $y_1(x), y_2(x)$ 是相应齐次方程 (3) 的基本解组, 那么非齐次方程 (2) 的通解是

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_0(x).$$

因此,在已知齐次方程(3)通解的前提下, 问题的关键是要求出非齐次方程(2)的一个特解. 求特解的方法就是下述**常数变易法**.

设 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程 (3) 的基本解组. 假设非齐次方程 (2) 也有形如

$$y_0(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

的特解, 但是其中 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$不再是常数, 而是待定函数. 对上式求导得

$$y_0'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x) + c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x).$$

为了避免以后出现 $c_1(x)$ 和 $c_2(x)$ 的高阶导数, 令

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{4}$$

因而 $y_0'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$. 继续求导, 得

$$y_0''(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x).$$

将 $y_0(x), y_0'(x)$ 和 $y_0''(x)$ 的表达式代入非齐次方程 (2) 得

$$\begin{aligned} &c_1(x)\big(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\big) + c_2(x)\big(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\big) \\ &\quad + c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x). \end{aligned}$$

由于 $y_1, y_2$ 是齐次方程 (3) 的解, 从上式可得

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{5}$$

因为 $y_1(x), y_2(x)$ 的 Wronski 行列式 $W(x) \neq 0$, 联立 (4) 和 (5) 可解得

$$c_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad c_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}.$$

积分后可得

$$c_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}\,dt, \quad c_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}\,dt.$$

于是我们得到非齐次方程 (2) 的一个特解

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{W(t)} f(t)\,dt. \tag{6}$$

这里我们的目的是求出一个特解, 因此通过添加条件, 舍去积分常数, 只要求出一组非平凡的待定函数 $c_1(x)$, $c_2(x)$ 即可.

### 6.2.3 二阶常系数齐次线性微分方程

从上节讨论可以看出, 只要得到齐次方程的基本解组, 通过常数变易法就可得到非齐次方程的特解, 进而得到齐次和非齐次方程的通解. 唯一遗留的问题是如何计算齐次方程的基本解组问题. 虽然上节给出了一种方法, 但前提是必须事先已知一个解, 才能构

造另一个解使两者构成基本解组. 为此, 我们针对二阶常系数齐次线性微分方程, 讨论如何求解基本解组问题. 这种方程可写成

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{7}$$

其中 $p, q$ 是实常数. 假设方程 (7) 有形如 $y(x) = e^{\lambda x}$ ($\lambda$ 是待定常数) 的解, 则有

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda p e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0.$$

因而

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{8}$$

此式称为方程 (7) 的特征方程. 因此, 只要 $\lambda$ 是特征方程的一个根, 就对应二阶常系数线性方程 (7) 一个解 $y(x) = e^{\lambda x}$. 根据特征方程求根问题的特性, 分以下三种情形讨论:

1° 若特征方程 (8) 有两个不同的实根 $\lambda_1, \lambda_2$, 则 $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ 是方程 (7) 的解, 它们的 Wronski 行列式 $W(x) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq 0$, 因此是基本解组. 于是 (7) 的通解为

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2° 若特征方程 (8) 有一对复根 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, 则 $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ 仍然是解, 只不过是一对复函数解. 为了得到实函数的解, 令

$$e^{\lambda_1 x} = (\cos\beta x + i\sin\beta x)e^{\alpha x}, \quad e^{\lambda_2 x} = (\cos\beta x - i\sin\beta x)e^{\alpha x}$$

根据方程解满足线性性可知

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \frac{e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}}{2}, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{2i}$$

是 (7) 的两个实函数解而且线性无关, 因此构成方程实函数的基本解组. 于是 (7) 的通解为

$$y(x) = (c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)e^{\alpha x}.$$

3° 若特征方程 (8) 有一个实重根 $\lambda$, 则 $y_1(x) = e^{\lambda x}$ 是方程 (7) 的解. 此时 $\lambda = -\frac{p}{2}$, $q = \frac{p^2}{4}$. 容易验证 $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ 也是 (7) 的解, 它与 $e^{\lambda x}$ 线性无关. 于是 (7) 的通解为

$$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}.$$

**例 6.2.2** 求解方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$.

**解** 特征方程是 $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. 它有两个实根 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. 因此所求通解为 $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$.

**例 6.2.3** 求解方程 $y'' + y' + y = 0$.

**解** 特征方程是 $\lambda^2+\lambda+1=0$. 它有一对复根 $\lambda_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 因此所求方程的通解为 $y(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

通过以上分析, 我们发现求解二阶常系数齐次线性微分方程 (7) 的问题转化为其特征方程 (8) 求根问题. 下面我们将利用微分算子和特征方程的因式分解再次推导出方程 (7) 的通解, 但是本质上与上述方法是一样的.

引进微分算子记号 $D=\frac{d}{dx}$, 它作用在函数上即为对函数的求导 $Dy=\frac{dy}{dx}$, 当然, $D^2y=\frac{d^2y}{dx^2},\cdots,D^ky=\frac{d^ky}{dx^k}$, 这样方程 (7) 就改写为

$$(D^2+pD+q)y=0$$

当对应的特征方程分解成如下形式（这里不妨设 $\lambda_1\neq\lambda_2$）

$$\lambda^2+p\lambda+q=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2).$$

则方程也有如下分解形式

$$(D^2+pD+q)y=(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)y=0,$$

这里注意到对任何常数 $\lambda$ 有 $D\lambda y=\lambda Dy$, 同时注意到

$$e^{-\lambda x}(D-\lambda)y=D(e^{-\lambda x}y).$$

记 $\tilde{y}=(D-\lambda_2)y$, 则

$$(D-\lambda_1)\tilde{y}=0,$$

$$e^{-\lambda_1x}(D-\lambda_1)\tilde{y}=D(e^{-\lambda_1x}\tilde{y})=0.$$

积分得

$$\tilde{y}=ce^{\lambda_1x},$$

因此

$$e^{-\lambda_2x}\tilde{y}=e^{-\lambda_2x}(D-\lambda_2)y=D(e^{-\lambda_2x}y)=ce^{(\lambda_1-\lambda_2)x}.$$

积分得

$$e^{-\lambda_2x}y=c\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}}{\lambda_1-\lambda_2}+c',$$

这样就得到二阶常系数齐次线性微分方程 (7) 的通解

$$y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}.$$

注意, 这里对特征方程具有两个互为共轭的复根时, 上述结果也是成立的, 只不过通解的形式也是复的. 要得到实的通解,只需根据解的线性性, 经适当线性组合即可.

当特征方程有重根时, 记$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, 这是方程为 $(D-\lambda)^2y=0$

$$\begin{aligned}0&=e^{-\lambda x}(D-\lambda)^2y=e^{-\lambda x}(D-\lambda)\{(D-\lambda)y\}\\&=D\{e^{-\lambda x}(D-\lambda)y\}=D\{D(e^{-\lambda x}y)\}\\&=D^2(e^{-\lambda x}y),\end{aligned}$$

两次积分后就得到 $e^{-\lambda x}y=c_1x+c_2$, 所以原方程的通解为

$$y=e^{-\lambda x}(c_1x+c_2)$$

注记 关于二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法不难推广到求解 $n$ 阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

只要把对应的特征方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

按实根、复数根、重根进行分类, 并按照二阶情形同样处理即可. 读者不妨通过习题, 求解一些高于二阶的方程熟练掌握方法.

对于下列形式的非齐次方程

$$y''+py'+qy=f(x)$$

可以先对齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 按所介绍方法求出通解, 再按照§*6.2.2* 中介绍的方法求出非齐次的特解, 进而就得到非齐次情形的通解.

### 6.2.4 振动方程的解*

作为本章的结束, 我们讨论振动方程的求解问题.

1° **简谐振动方程**

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0,$$

其中$\omega_0=\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$ 表示简谐振动的固有频率, $\kappa$ 表示弹性系数, $m$ 表示质点的质量.

简谐振动方程的特征方程为$\lambda^2+\omega_0^2=0$,解为$\lambda=\pm i\omega_0$. 因此方程实函数的基本解组为 $\cos\omega_0t,\ \sin\omega_0t$, 通解为

$$x(t)=c_1\cos\omega_0t+c_2\sin\omega_0t.$$

令

$$A=\sqrt{c_1^2+c_2^2},\ \cos\varphi=\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\ \sin\varphi=-\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}$$

则振动方程的解可以表示成下列形式

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

这里 $A$, $\varphi$ 分别表示振幅和相位, 它们是由振动的初值所决定的（正如 $c_1$, $c_2$ 是由初值决定一样）.振动的周期 $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, 它与振动的振幅无关.

2° **阻尼振动方程**

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

这里 $\beta = \frac{\nu}{2m}$ 与阻尼系数 $\nu$ 成正比. 上述方程的特征方程是 $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$.

1. $0 < \beta < \omega_0$, 此时特征方程的根是一对共轭复数$\lambda = -\beta \pm i\omega$,其中$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$,从而阻尼振动方程的通解是

$$x(t) = e^{-\beta t}(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t).$$

与简谐振动情形类似, 上述通解可以表示成

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi)$$

其中振幅 $A(t) = Ae^{-\beta t}$ 按指数衰减. 振动频率为 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

2. $\beta = \omega_0$, 这种情形称为“临界阻尼”. 此时特征方程有重根$\lambda = -\beta < 0$,对应阻尼振动方程的通解是

$$x(t) = e^{-\beta t}(c_1 + c_2 t);$$

3. $\beta > \omega_0$, 这种情形称为“过阻尼”. 此时特征方程的根$\lambda_1$, $\lambda_2$是相异的负实数,阻尼振动方程的通解是

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

称为“衰减解”.

3° **受迫振动方程** 考虑以下较为简单的受迫振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = a\cos\omega t$$

这里 $F(t) = a\cos\omega t$ 称为“受迫力”, $\omega$ 为受迫力的频率. 上述方程是一个二阶常系数非齐次线性方程, 由 1° 知, 对应的齐次方程的基本解组为 $\cos\omega_0 t$, $\sin\omega_0 t$. 根据§6.2.2 “常数变易法”给出的公式, 可以计算出受迫振动方程的一个特解, 进而得到该方程的通解.

然而, 求特解的方法可以具体问题具体对待. 这里我们撇开 §6.2.2 程式化繁琐计算直接给出受迫振动的特解.注意到受迫力的频率为 $\omega$, 因此受迫振动应该是以固有频率 $\omega_0$ 的简谐振动与以受迫力频率 $\omega$ 的振动的叠加, 即通解应具有下列形式

$$x(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t + C\cos\omega t + D\sin\omega t,$$

这里 $C$, $D$ 待定. 这样受迫振动方程的特解应该为

$$x_0(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t.$$

代入方程得

$$-\omega^2 C + \omega_0^2 C = a, \quad -\omega^2 D + \omega_0^2 D = 0,$$

解得

$$C = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad D = 0$$

因此受迫振动方程的通解为

$$x(t) = c_1\cos\omega_0 t + c_2\sin\omega_0 t + \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t.$$

如果考虑初值: $x(0) = x'(0) = 0$, 则对应的解为

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t).$$

注意到当受迫力的频率趋于振动的固有频率 $\omega \to \omega_0$ 时

$$x(t) \to \tilde{x}(t) = \frac{at}{2\omega_0}\sin\omega_0 t$$

这时就产生了共振, 共振时的振幅随时间线性增长.

## 习题 6.2

1. 在下列方程中, 已知方程的一个特解 $y_1$, 试求它们的通解.
   (1) $y''+\frac{2}{x}y'+y=0,\ \ y_1=\frac{\sin x}{x}$;
   (2) $y''\sin^2 x=2y,\ \ y_1=\cot x$;
   (3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0,\ \ y_1=x$.

2. 先用观察法求下列齐次方程的一个非零特解, 然后求方程的通解.
   (1) $x^2y''-2xy'+2y=0$, $x\neq 0$;
   (2) $xy''-(1+x)y'+y=0$, $x\neq 0$.

3. 已知方程 $(1+x^2)y''+2xy'-6x^2-2=0$ 的一个特解 $y_1=x^2$, 试求该方程满足初始条件 $y(-1)=0$, $y'(-1)=0$ 的特解.

4. 求下列常系数齐次方程的通解.
   (1) $y''-2y'-y=0$;
   (2) $y''+2y'+2y=0$;
   (3) $y''+y'-6y=0$.

5. 求下列常系数非齐次方程的一个特解.
   (1) $y''+y=2\sin\frac{x}{2}$;
   (2) $y''-6y'+9y=(x+1)e^{2x}$.

6. 验证函数组$1,x,x^2,\cdots,x^n$ 在实轴上线性无关，函数组 $1,\cos^2 x,\sin^2 x$ 在实轴上线性相关.

7. 证明在区间 $I$ 上任何线性相关的两个函数 $y_1(x),\ y_2(x)$，它们的Wronski 行列式一定恒为零。

8. 证明下列函数在区间 $(0,2)$ 上是线性无关的, 但是它们的 Wronski 行列式却恒为零

$$y_1(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & 1<x\leqslant 2\end{cases}\qquad y_2(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ (x-1)^2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

9. 求下列方程的通解。
   (1) $x'''+3x''+3x'+x=0$;
   (2) $x'''-2x''+x'-2x=0$;
   (3) $x^{(4)}-8x''+18x=0$;
   (4) $x^{(4)}+2x''+x=0$.

# 第 7 章　无穷级数

## §7.1　数项级数

### 7.1.1　基本概念与性质

所谓无穷级数, 就是无穷多个数 $\{a_n, n=1,2,3,\cdots\}$ 依次相加的一个形式上的求和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

其中 $a_n$ 叫级数的通项. 这里我们用求和号 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 表示求和是从第一项一直求到无穷, 而 $\sum_{k=1}^{n}$ 则表示求和是从第一项一直求到第 $n$ 项并称 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = a_1 + \cdots + a_n$ 为级数的**前 $n$ 项部分和** 或简称为**部分和** . 首先看看几个例子

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots ,$$

$$a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots ,$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots ,$$

第一个级数称为几何级数或等比级数, 不难发现, 它的前 $n$ 项部分和是

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad |q| \neq 1$$

因此随着项数越加越多, 总的趋势是 $(1-q)^{-1}$ (当 $|q|<1$), 或 $\infty$ (当 $|q| \geqslant 1$). 第二个级数称为算术级数 (等差级数), 它的前 $n$ 项部分和是

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2} d$$

因此当项数越加越多时, 趋势是无穷. 对于第三个级数,

$$S_n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1. \end{cases}$$

因此无法判断最终的求和是多少.

为此, 我们必须首先明确无穷项求和的确切意义. 达到此目的一个合理的方案是从有限过渡到无穷, 即首先考虑前 $n$ 项部分和, 然后观察随着项越加越多的极限.

**定义 7.1**　对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 如果其前 $n$ 项部分和 $S_n$ 所构成的数列 $\{S_n\}$ 收敛于 $S$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, 则称级数收敛, $S$ 称为级数的和, 并记

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

如果 $\{S_n\}$ 没有极限, 则称级数为发散的.

由此可见讨论无穷级数的敛散性就是讨论它的部分和构成的数列 $\{S_n\}$ 的敛散性.

反之, 如果有一个数列 (不妨仍记为 $\{S_n\}$), 则它对应一个以 $a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n > 1)$, $a_1 = S_1$ 为通项的级数, 级数的前 $n$ 项的部分和就是 $S_n$.

根据上述级数收敛性的定义以及与数列的关系, 关于级数的研究似乎是多余的. 然而, 很多数列的极限天然地以无穷级数来表示. 例如一个十进制的正实数 $\alpha$ 就可以表示为一个无穷级数

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

其中, $a_0$ 是它的整数部分, $a_n$ $(n \geqslant 1)$ 是一个介于 0 和 9 之间的整数. 如果当 $a_n$ 中只有有限项不为零, 或者 $a_n$ 满足某种循环性, 即存在一个自然数 $k$, 使得 $a_{n+k} = a_n$ $(n \geqslant 1)$, 则上述表达式一定可以写成分数形式. 这样的数就是有理数, 即是有限的或无限循环小数. 而对于无限不循环小数就是无理数, 其表达方式是一个无穷级数.

另一方面, 并不是每一个级数, 都可以得到其前 $n$ 项部分和的显式表达式, 因此讨论级数的敛散性, 还得从级数自身的性质入手.

**定理 7.2** (Cauchy收敛准则) *级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是: 对任给的正数 $\varepsilon$, 存在正整数 $N$, 使当 $n > N$ 时, 不等式*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

*对任何正整数 $p$ 成立.*

**定理 7.3** *若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim a_n = 0$.*

该定理说明, 要想无穷多项相加是收敛的, 参加求和的项应该越来越小 (趋于 0). 所以通项不趋于 0 的级数根本没有必要考虑收敛性, 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$ 发散, 因为 $\lim n \sin \frac{1}{n} = 1 \neq 0$. 但是, 通项趋于 0 并不能保证级数一定收敛, 还有一个趋于 0 的快和慢的问题. 例如 $\lim \ln \frac{n+1}{n} = 0$, 但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 中, 部分和 $S_n = \ln(n+1) \to \infty$, 所以是发散的.

**定理 7.4** *若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, ($\alpha$ 是一个常数) 和 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 也收敛, 并有*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

**定理 7.5** *在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中, 改变任何有限项的值不影响级数的敛散性.*

以上定理的证明可以直接根据定义得到, 其中定理7.5 可以应用定理7.2 得到. 请读者自行完成.

### 7.1.2 正项级数的收敛性及其判别法

为了进一步深入了解级数的敛散性, 我们首先选择一类较为简单的级数, 即当通项 $a_n \geqslant 0$ 时, 称级数为**正项级数**. 对于正项级数的一个直接观察就是它的部分和 $\{S_n\}$ 是单调增加的: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geqslant S_n$, 故由数列极限的收敛性质可得

**定理 7.6** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数, $\{S_n\}$ 记为它的部分和.

1° 正项级数收敛的充分必要条件是它的部分和是有界数列.

2° 正项级数如果发散, 一定发散到正无穷.

3° 对于收敛的正项级数, 任意调换求和顺序后得到的级数也收敛, 并且和不变.

第三个结论是需要证明的. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 经过调换求和顺序所得到的级数. 它的部分和记为

$$S'_n = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n$$

注意到 $a'_n$ 不是新的项, 而是原来级数中求和的项, 无非顺序变了, 从新排队了（标明位置的下标变了）, 所以一定存在 $m$, 使得 $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$ 在原级数的前 $m$ 项出现, 所以 $S'_n \leqslant S_m$, 所以原级数收敛, 得出新级数收敛, 而且收敛值不会超过原来级数的收敛值.

反之, 我们可以把 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 看成是 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 经过调换顺序所得到的级数. 这样我们就得出上述结论.

注意,加法交换顺序在有限求和时, 是自然的. 对于无穷求和问题应谨慎. 虽然结论 3° 说明正项级数是可以随意调换顺序的, 但后面我们将看到, 这种性质对于某些级数并不成立.

**例 7.1.1** 证明 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 收敛.

**证明** 这是一个正项级数, 所以只须证明它的部分和有界. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 3 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

因此, 级数是收敛的. 后面将证明其收敛的值是 $e$.

现在我们面临的是对于一个给定的正项级数, 如何判别它是否收敛, 为此我们有

**定理 7.7** (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个正项级数, 如果从某项开始有 $a_n \leqslant b_n$, 那么

1° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

$2^\circ$ 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

**证明** 因为改变有限项的值不改变级数的敛散性, 故可以假定 $a_n \leqslant b_n$ 对所有的 $n$ 都成立. 于是

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

这表明当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, 其部分和 $\sum_{k=1}^{n} b_k$ 有界, 因而 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 也有界, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 则其部分和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ 无界, 因而 $\sum_{k=1}^{n} b_k$ 无界, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. □

**例 7.1.2** 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

**证明** 当 $x > 0$ 时, 有

$$x > \ln(1+x),$$

故对任意的 $n$, 有

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散, 所以由比较判别法可知调和级数发散.

**例 7.1.3** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 称为 $p$ 级数, 讨论它的敛散性.

**解** 当 $p \leqslant 1$时, 因为

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n},$$

故在此情况下, $p$ 级数发散.

当 $p > 1$时, 命 $p = 1+\alpha\,(\alpha > 0)$. 由微分中值定理可得

$$\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} = \frac{\alpha}{(n-\theta)^{\alpha+1}} > \frac{\alpha}{n^p},$$

其中 $0 < \theta < 1$, 由于

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right) = 1,$$

故由比较判别法可知, 当 $p > 1$ 时, $p$ 级数收敛.

**例 7.1.4** 证明 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散.

**证明** 当 $n \geqslant 2$ 时, 总有

$$\ln n < n,$$

故

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n},$$

所以原级数发散.

比较判别法主要是比较通项的大小, 更确切地说是比较从某项开始之后的通项的大小. 注意到收敛的级数的通项必须趋于零, 通项趋于零的速度决定了它们之间的大小. 因此, 我们可以考虑比较判别法的极限形式.

**推论 7.8** (比较判别法的极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是正项级数, $\lim \frac{a_n}{b_n} = A$. 则

1° 若 $0 < A < +\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;

2° 若 $A = 0$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛;

3° 若 $A = +\infty$, 则当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散.

这个推论的含义是: 对于两个无穷小量 $a_n$, $b_n$ $(n \to \infty)$, 如果 $a_n$ 和 $b_n$ 趋于 0 的速度是一样的, 则对应的级数同敛散; 如果一个比另一个趋于 0 的速度要快, 则慢的都收敛了, 快的也就收敛; 或者快的发散, 慢的更应发散.

**证明** 对于第一种情况, 取 $\varepsilon = \frac{A}{2}$, 则存在 $N$, 使当 $n > N$ 时有

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \frac{A}{2},$$

即有

$$\frac{A}{2} b_n < a_n < \frac{3A}{2} b_n.$$

所以分别对两个不等式利用比较判别法, 就就得到结果.

同样, 当 $\lim \frac{a_n}{b_n} = A = 0$ 时, 存在 $N$, 使当 $n > N$ 时有

$$0 \leqslant \frac{a_n}{b_n} < 1,$$

即有

$$a_n < b_n,$$

而当 $\lim \frac{a_n}{b_n} = A = +\infty$ 时, 存在 $N$, 使当 $n > N$ 时有

$$\frac{a_n}{b_n} > 1,$$

即有

$$a_n > b_n,$$

无论哪种情况, 直接应用比较判别法即可完成证明.

比较定理提示我们, 可以通过与一个我们熟知的级数 (例如几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$) 进行比较, 讨论级数的敛散性.

**例 7.1.5** 求证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}}$ 收敛.

**证明**　由

$$\frac{n+3}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+2)}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

的收敛性, 可知原级数收敛.

**例 7.1.6**　求证 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$发散.

**证明**　由

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

及调和级数的发散, 可知原级数发散.

**定理 7.9** (Cauchy 判别法)　设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数.

$1^\circ$　若从某项起有 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, 则级数收敛;

$2^\circ$　若有无穷多个 $n$, 使 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, 则级数发散;

$3^\circ$　若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 则当 $q < 1$ 时, 级数收敛; 当 $q > 1$ 时, 级数发散; 当 $q = 1$ 时, 还无法判断级数收敛还是发散.

**证明**　不妨设对所有的 $n$ 都有 $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, 也就是有 $a_n \leqslant q^n$. 故由 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 的收敛性及比较判别法, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

如果有无穷多个 $n$ 使 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, 故 $\{a_n\}$ 不以零为极限, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

对于极限形式, 只要注意到一定存在一个正数 $\varepsilon$, 使得对于充分大的 $n$, 有 $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$ 或者 $\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon > 1$. 读者可自行完成证明.

几何级数的后一项和前一项的比等于一个固定的数 (公比), 几何级数的敛散性由公比的大小所确定. 对于一般正项级数而言, 虽然没有这样的性质, 但是也可以根据级数的前后项之比, 讨论敛散性.

**定理 7.10** (D'Alembert 判别法)　设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数.

$1^\circ$　若从某项起有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, 则级数收敛;

$2^\circ$　若从某项起有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, 则级数发散;

$3^\circ$　若前后项之比具有极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

则当 $q < 1$ 时, 级数收敛; 而当 $q > 1$ 时, 级数发散; 当 $q = 1$ 时, 还不能判断.

**证明**　不妨设对所有的 $n$ 都有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, 故有

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant q,\ \frac{a_3}{a_2} \leqslant q,\ \cdots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant q,$$

把这些不等式两端相乘, 就得到

$$a_n \leqslant \frac{a_1}{q} q^n.$$

由于$\frac{a_1}{q}$ 是一个常数, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

如果 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, 则 $a_{n+1} \geqslant a_n$, 即 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$, 此时级数的通项 $a_n$ 不会趋于零, 因此级数发散. □

**例 7.1.7** 求证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散.

**证明** $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{e}{2} > 1$. 故级数发散.

**例 7.1.8** 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$ $(x \geqslant 0)$ 的敛散性.

**解** 因为

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)! \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n! \left(\frac{x}{n}\right)^n} = \lim \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{e},$$

故当 $x > e$ 时级数发散, 当 $0 \leqslant x < e$ 时级数收敛. 当 $x = e$ 的情形留着习题, 请读者自我分析.

级数是无穷多个数相加, 或者看成是有限和的极限形式, 而积分也是一种有限和的极限形式, 只是最终的结果不是“无穷求和”, 而是“连续求和”. 但是两者之间是有可比性的. 在此我们先讨论一种联系.

**定理 7.11** (Cauchy 积分判别法) 如果 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上有定义的非负且单调减少函数, 那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 同敛散.

**证明** 由 $f(x)$ 的单调性可知, 当 $k \leqslant x \leqslant k+1$ 时有

$$f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k),$$

于是

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x) dx \leqslant f(k).$$

将上述不等式对 $k = 1, 2, \cdots, n$ 相加, 就得知, 对任何 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int_1^{n+1} f(x) dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

若 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则由上式左半可知 $\sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ 有界, 因而 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛. 若 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 发散, 则由上式右半可知 $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ 无界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散. □

**例 7.1.9** 证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \ln^{\alpha} n$ 当 $\alpha > 1$ 时收敛, 当 $\alpha \leqslant 1$ 时发散.

**证明** 级数与积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^\alpha x}$ 同敛散. 而

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^\alpha x}=\begin{cases}\frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \alpha>1;\\ +\infty, & \alpha\leqslant 1.\end{cases}$$

故原级数当 $\alpha>1$ 时收敛, 而当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.

无论是 Cauchy 判别法, 还是 D'Alembert 判别法, 都是和几何级数进行比较. 我们自然会问以下两个问题.

1° 这两种判别法哪一个更强?

2° 在收敛级数的典型例子中,

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n,\ (0<q<1);\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},\ \alpha>1;\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\beta},\ \beta>1$$

他们的通项趋于 0 的速度一个比一个慢. 因此, 是否可建立与其它两个收敛速度较慢的级数进行比较, 并产生新的判别法?

关于第一个问题的回答需要采用§1.2.6 中的上极限和下极限（第三册中还将详细讨论）的方法, 得到下面的结论

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

因此, 凡是 D'Alembert 判别法能判别的, Cauchy 判别法一定也能判别, 但反之不然 (具体例子见习题).

关于第二个问题, 先考虑两个正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 之间各自通项的前后项之比如果满足

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

则后者收敛就意味着前者也收敛 (见习题7.1 中第13题). 现在把一个正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha>0$ 进行上述比较, 如果

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{\frac{1}{(n+1)^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$$

则

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1}{\frac{1}{n}}$$

当 $n\to\infty$ 时, 极限值是 $\alpha$, 所以有下面结论

**定理 7.12** (Raabe 判别法) 如果

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha$$

那么当 $\alpha>1$ 时, 正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛; 当 $0<\alpha<1$ 时, 级数发散.

**例 7.1.10** 设 $\alpha, \beta, \gamma, x$ 都是正数. 级数

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

称为**超几何级数**. 我们来讨论这个级数的敛散性. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}=x$$

所以由D'Alembert 判别法, 当 $x<1$ 时收敛, 当 $x>1$时发散. 当 $x=1$ 时无法判别. 但是当 $x=1$ 时

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+\gamma-\beta-\alpha)+(\gamma-\alpha\beta)n}{(\alpha+n)(\beta+n)}=1+\gamma-\beta-\alpha,$$

所以当 $\gamma>\alpha+\beta$ 时收敛, 当 $\gamma<\alpha+\beta$ 时发散.

如果将级数和收敛得更慢的级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$, $\beta>1$ 进行比较, 还也可以得到所谓 Gauss 判别法, 这里就不再讨论了.

### 7.1.3 一般级数的收敛性及其判别法

**(1) 交错级数**

所谓交错级数就是级数的项正负交错, 可以表示成 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, 其中 $a_n\geqslant 0$. 因为交错级数的部分和满足

$$S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})$$

所以, 当 $a_n$ 单调减趋于 0 时, $S_{2n+2}-S_{2n}=a_{2n+1}-a_{2n+2}\geqslant 0$, 而且

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}\leqslant a_1$$

即, $S_{2n}$ 单调增有上界. 所以收敛: $S_{2n}\to S$. 且 $S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}\to S+0=S$. 另一方面,

$$0\leqslant S-S_{2n-1}=a_{2n}-(a_{2n+1}-a_{2n+2})-\cdots\leqslant a_{2n},$$
$$0\geqslant S-S_{2n}=-a_{2n+1}+(a_{2n+2}-a_{2n+3})+\cdots\geqslant -a_{2n+1}$$

给出了部分和与级数的和之间的误差. 总之, 有下面结论:

**定理 7.13** (Leibniz 判别法) *设 $\{a_n\}$ 单调趋于零, 则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 且前 $n$ 项部分和 $S_n$ 与级数的和 $S$ 的误差不超过 $a_{n+1}$.*

收敛交错级数的典型例子是: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ ( 比较一下 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的发散性, 可以体会交错项之间的相互抵消的结果 ). 稍后, 我们将知道它的和是 $\ln 2$.

**(2) 绝对收敛性和条件收敛**

对于一般级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 来说 (即对通项的正负没有限制), 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **绝对收敛**.

**定理 7.14** 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则级数本身一定收敛.

**证明** 显然有

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}|,$$

故由级数的Cauchy 收敛准则就可证得结果. □

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 那么称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为**条件收敛**. 例如, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 都收敛, 但是通项取绝对值后, 结果是发散的, 所以是条件收敛的.

**定理 7.15** 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则任意改变求和顺序后所得的新级数仍收敛, 并且其和不变.

**证明** 设

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

即

$$a_n^+ = \begin{cases} 0, & a_n \leqslant 0, \\ a_n, & a_n \geqslant 0; \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n \leqslant 0, \\ 0, & a_n \geqslant 0. \end{cases}$$

因此由 $a_n^{\pm}$ 构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ 都是正项级数, 而且满足

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^- \geqslant a_n^{\pm},$$
$$a_n = a_n^+ - a_n^-,$$

根据比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ 都收敛, 而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的求和顺序改变后, 相应的 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ 的求和顺序作对应的改变. 而后者是正项级数, 改变顺序后收敛性和收敛的值不变. 因此前者的收敛性和收敛值也不会变. □

**推论 7.16** 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛. 但如果级数是条件收敛的, 则两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都发散到 $+\infty$.

**证明** 第一个结论是显然的. 对于第二个结论, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 不能都收敛, 但是

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$$

上式中三个级数不可能有两个收敛. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\pm}$ 只能都发散. □

绝对收敛级数的收敛是由于通项趋于零的速度足够快, 而条件收敛的级数的通项趋于零的速度有可能不够快, 但通过正负项相抵消使得级数收敛.

作为对比, 我们证明下面关于条件收敛级数重排的 Riemann 定理.

**定理 7.17** (Riemann 重排定理) *设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 则适当改变求和的顺序可以使新级数收敛于给定的任意实数, 也可使新级数发散到 $+\infty$ 或 $-\infty$.*

**证明** 设 $A$ 是任意 (有限) 实数, 不妨设 $A>0$. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 是级数的非负项构成的级数, 它发散到 $+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 是级数的负项构成的级数, 它发散到 $-\infty$. 我们这样确定重排: 先放置

$$p_1+p_2+\cdots+p_{m_1}$$

使得此和刚超过 $A$, 再放置

$$q_1+q_2+\cdots+q_{n_1}$$

直至整个部分和刚小于 $A$. 然后再接着放置

$$p_{m_1+1}+\cdots+p_{m_2}$$

使整个部分和又刚超过 $A$, 接着再放置

$$q_{n_1+1}+\cdots+q_{n_2}$$

直至整个部分和又刚小于 $A$, 如此继续下去. 上述每一步都是可行的, 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 都是发散的, 增加若干项 $p_n$ 总会使和式刚好大于 $A$. 增加若干项负的 $q_n$ 总会使和式刚好小于 $A$.

又因为 $a_n\to 0$, 所以 $p_n\to 0$, $q_n\to 0$, 而重排后的级数的部分和与 $A$ 的差的绝对值始终小于数列 $\{p_n\}$ 的某一项, 或小于数列 $\{q_n\}$ 的某一项, 故这样得到的重排级数收敛于 $A$.

为了使重排后的级数发散的 $+\infty$, 我们这样安排: 先放置

$$p_1+p_2+\cdots+p_{m_1}$$

使其和大于 1, 接着放一项 $q_1$, 然后接在后面放置

$$p_{m_1+1}+\cdots+p_{m_2}$$

使整个部分和大于 2, 接着放一项 $q_2$, 继续下去, 第 $n$ 次放置正项和一个负项后, 整个部分和大于 $n-q_n$. 于是重排后的级数发散到 $+\infty$. 类似地, 也可重排的级数发散到 $-\infty$.

**(3) 一般级数收敛的判别法**

对于一个一般级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 来说, 最一般的判别法当然是 Cauchy 收敛准则. 但仅是一个一般准则. 而利用正项级数的判别法, 只能判别级数是否绝对收敛。

为了获得更直接的判别法, 我们先介绍两个引理. 该引理实际上是分部积分法的离散形式, 被称为 Abel 分部求和法.

**引理 7.18** (Abel 分部求和公式) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个实数列. 则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}),$$

其中 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$.

**证明** 约定 $A_0 = 0$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).\end{aligned}$$

利用这个公式可以证明如下 Abel 引理.

**引理 7.19** (Abel 引理) 设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ 或者 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$, 记 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. 如果 $|A_k| \leqslant M$, $k = 1, 2, \cdots, n$, 那么有

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant M(|b_1| + 2|b_n|).$$

**证明** 由分部求和公式

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n \right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |A_k| |b_k - b_{k+1}| + |A_n| |b_n| \\ &\leqslant M \left( \sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| + |b_n| \right) \\ &= M(|b_1 - b_n| + |b_n|) \\ &\leqslant M(|b_1| + 2|b_n|).\end{aligned}$$

现在我们可以证明针对一般级数较为直接的两个判别法.其基本思想是将级数的通项分解成两个部分，根据两个部分的性质判别级数的收敛性。

**定理 7.20** (Dirichlet 判别法) 若 $\{b_n\}$ 是单调递减趋于零的数列, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有界: $|A_n| = |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leqslant M$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

**证明** 因为 $|A_k| \leqslant M$, 所以对于 $m \geqslant n+1$, 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = |A_m - A_n| \leqslant 2M.$$

因为 $\{b_n\}$ 趋于零, 所以对于任意正数 $\varepsilon$, 存在自然数 $N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时, 有 $|b_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{6M}$. 由于 $\{b_n\}$ 是单调递减的, 从 Abel 引理知, 不等式

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant 2M(|b_{n+1}| + 2|b_{n+p}|) \leqslant 2M\left(\frac{\varepsilon}{6M} + \frac{2\varepsilon}{6M}\right) = \varepsilon$$

对 $n \geqslant N$ 及一切自然数 $p$ 成立. 根据 Cauchy 准则, $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. □

**定理 7.21** (Abel 判别法) 若 $\{b_n\}$ 是单调有界的数列, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

**证明** 因为 $\{b_n\}$ 是单调有界的数列, 所以收敛, 设收敛于 $b$. 不妨设 $\{b_n\}$ 单调递减, 则 $\{b_n - b\}$ 递减趋于零. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $A_k = a_1 + \cdots + a_k$ 有界. 根据 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ 收敛. 而 $a_n b_n = a_n(b_n - b) + b a_n$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收敛. □

应用上述两个判别法的关键, 是如何把级数的通项分解成两个部分, 一部分单调递减趋于零, 另一部分部分和有界; 或一部分单调有界, 另一部分构成的级数收敛.

**例 7.1.11** 考察下列形式的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 0,$$

因为 $\frac{1}{n^{\alpha}}$ 单调减趋于零, 所以如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是部分和有界的级数, 那么级数收敛.

**例 7.1.12** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 的敛散性.

**解** 当 $x = 2k\pi$ 时, 该级数就是调和级数, 故发散. 若 $x \neq 2k\pi$, 记

$$A_n = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

于是 $A_n$ 有界

$$|A_n| < \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

而 $\frac{1}{n} \to 0$, 故级数收敛. 类似可讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 的收敛性.

**例 7.1.13** 求证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ 条件收敛.

**证明** 上面的例子可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 收敛, 如果它绝对收敛, 则由 $\cos^2 n \leqslant |\cos n|$ 推出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$$

也收敛. 但是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}.$$

上式右端第一个级数发散, 第二个级数收敛, 故左端级数不能收敛, 此矛盾说明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}$ 发散.

**例 7.1.14** 对于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}b_n$, 可以把它看成是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 的形式, 其中 $a_n=(-1)^{n+1}$, 显然, $|A_n|=|a_1+\cdots+a_n|\leqslant 1$, 所以, 当 $b_n$ 单调减且 $b_n\to 0$ 时, 级数收敛. 这就是Leibniz 判别法得到的结果.

### 7.1.4 级数的乘积

大家知道, 根据乘法分配律, 对于两个有限和相乘

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots b_m)$$

其结果是把所有可能的乘积 $a_ib_j,\ i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m$ 相加. 现在考虑两个收敛的无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=B$ 之间的乘积问题. 我们将所有可能的乘积 $a_ib_j,\ i=1,\cdots,\ j=1,\cdots$, 列成下列形式

$$\begin{array}{l}a_1b_1,\ a_1b_2,\ a_1b_3,\ \cdots,\\ a_2b_1,\ a_2b_2,\ a_2b_3,\ \cdots,\\ a_3b_1,\ a_3b_2,\ a_3b_3,\ \cdots,\\ \ \ \vdots\qquad\ \vdots\qquad\ \vdots\end{array}$$

由于每一行, 每一列都是无穷多项, 因此加法有下列常用的两种方法: 一种方法是从左上角开始按方块相加

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1)+\cdots$$

另一种方法是从左上角开始, 按斜对角线相加

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots,$$

注意到每个斜对角线上的项数(即每个括号里的项数)是有限的, 下标的和是相等的, 因此可以写出通项

$$c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\cdots+a_nb_1=\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n+1-i},$$

并得到一个新的无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, 称之为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 Cauchy **乘积**. 本节将重点考虑Cauchy 乘积的敛散性问题. 我们自然希望在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛（记它们分别收敛于 $A$ 和 $B$ ）的情况下, 它们的 Cauchy乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛并且收敛于它们的乘积 $AB$. 然而, 下面的反例说明这种希望并不能自然成立.

**例 7.1.15** 考察下列收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}},$$

其自己与自己做Cauchy 乘积的结果是

$$c_n=(-1)^{n-1}\sum_{i+j=n+1}\frac{1}{\sqrt{ij}}$$

因此

$$|c_n|=\sum_{i+j=n+1}\frac{1}{\sqrt{ij}}\geqslant\sum_{i+j=n+1}\frac{2}{i+j}=\frac{2n}{n+1}\geqslant 1$$

所以Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 是发散的.

上述例子是一个条件收敛的级数. 如果加强条件, 那么

**定理 7.22** (Mertens) *设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 并分别收敛于 $A$ 和 $B$. 若其中至少有一个是绝对收敛的, 则它们的 Cauchy 乘积收敛, 且*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n=AB$$

**证明** 不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 分别记 $A_n=\sum_{n=1}^{n} a_n$, $B_n=\sum_{n=1}^{n} b_n$, $C_n=\sum_{n=1}^{n} c_n$ 为三个级数的部分和. 则 Cauchy 乘积的部分和可以表示如下:

$$\begin{aligned}
C_n&=\sum_{k=1}^{n} c_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_i b_{k+1-i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} a_i b_{k+1-i}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n+1-i} a_i b_l=\sum_{i=1}^{n} a_i\sum_{l=1}^{n+1-i} b_l=\sum_{i=1}^{n} a_i B_{n+1-i}\\
&=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1
\end{aligned}$$

若 $B=0$, 即 $B_n\to 0(n\to\infty)$, 则对于任意一个正数 $\varepsilon$, 一定存在一个自然数 $N_1$, 使得当 $n>N_1$ 时, 有 $|B_n|<\varepsilon$, 且 $\{B_n\}$ 有界 $|B_n|\leqslant M_1, n=1,2,\cdots$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛可知, 存在 $N_2$, 使得当 $n>N_2$ 时, $|a_{N_2+1}|+\cdots+|a_n|<\varepsilon$ , 且 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\leqslant M_2$ .

取 $N=N_1+N_2-1$, 则当 $n>N$ 时, 有 $n-N_2+1>N_1,\ n>N_2$, 所以

$$
\begin{aligned}
|C_n| &= |a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1| \\
&\leqslant (|a_1||B_n|+\cdots+|a_{N_2}||B_{n-N_2+1}|)+M_1(|a_{N_2+1}|+\cdots+|a_n|) \\
&\leqslant M_2\varepsilon+M_1\varepsilon=(M_1+M_2)\varepsilon
\end{aligned}
$$

所以 $C_n\to 0(n\to\infty)$.

若 $B\neq 0$, 则 $\beta_n=B_n-B\to 0(n\to\infty)$, 此时

$$C_n=A_nB+(a_1\beta_n+a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_n\beta_1),$$

根据上述证明,上式右边第二项当 $n\to\infty$ 时极限为零, 所以 $C_n\to AB$ □

**定理 7.23** (Abel) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=B$ 是两个收敛级数. 如果它们的 *Cauchy* 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=C$ 收敛, 那么 $C=AB$.

**证明** 因为

$$C_n=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1,$$

所以

$$\frac{C_1+C_2+\cdots+C_n}{n}=\frac{A_nB_1+A_{n-1}B_2+\cdots+A_1B_n}{n}$$

根据第一章例1.2.19 和例 1.2.20 即可征得

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=C=AB$$

□

注记 这里只讨论了两个级数的 *Cauchy* 乘积的敛散性问题. 事实上*Cauchy* 给出了另一个较强的定理, 即如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都是绝对收敛, 并分别收敛于 $A$ 和 $B$, 那么把$a_ib_j,\ i,j=1,2,\cdots$, 按任何方式相加所得到的的级数 (记为 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{i_k}b_{j_k}$ ) 都是绝对收敛的, 且收敛于 $AB$. 证明的思路是: 首先考察级数各项绝对值的部分和

$$\sum_{k=1}^{n}|a_{i_k}b_{j_k}|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{N}|a_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{N}|b_n|\right)\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\right)$$

这里 $N$ 是下标 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 和 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 中最大值, 因此有界. 这样就证明了级数的绝对收敛性. 再利用 *Riemann* 重排定理*7.17*, 对绝对收敛级数任意调整求和顺序不改变收敛值. 因此按方块相加的方式重排, 就有

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{i_k}b_{j_k}=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{N}b_n\right)=AB.$$

读者可自行完成证明全过程.

### 7.1.5　无穷乘积*

作为本节的结束, 我们讨论一个有趣问题, 即无穷多个数相乘的敛散性.

**定义 7.24**　设有无穷多个数 $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$, 称

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots$$

为***无穷乘积***. 如果它的前 $n$ 项构成的部分乘积

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = p_1 p_2 \cdots p_n,\ n = 1, 2, \cdots$$

构成的数列 $\{P_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时, 有有限非零的极限 $P$, 那么称无穷乘积收敛, 否则称为发散.

由于我们要求极限值 $P \neq 0$ , 所以不妨设无穷乘积的通项 $p_n \neq 0, n = 1, 2, \cdots$. 根据定义, 可以直接得到无穷乘积收敛的必要条件

**定理 7.25**　无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

这是因为

$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1\ (n \to \infty).$$

因此, 对充分大的 $n$ 有 $p_n > 0$, 或者说通项为负值的项只有有限项, 所以不妨假设所有项都是正的, 并记

$$p_n = 1 + a_n,\ -1 < a_n < +\infty,\ (n = 1, 2, \cdots),$$

这样, 无穷乘积就表示为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$, 其收敛的必要条件为 $a_n \to 0(n \to \infty)$ .

**定理 7.26**　无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 收敛的充分必要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$$

收敛. 在收敛的情况下, 若记 $S$ 为级数的和, 那么

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n) = e^S.$$

这是因为对无穷乘积的部分乘积和级数的部分和满足

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a_k) = S_n$$

## 习题 7.1

1. 证明下列等式:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$;　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}=\ln 2$;　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$.

2. 研究下列级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$;　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n-1}}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$;　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$;　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$;

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\pi}{4n}$;　(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$;

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;　(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$;

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$;　(14) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^k}$;

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$;　(16) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n\quad(a>0)$.

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 也收敛; 试举例说明逆命题不成立; 但若 $a_n>0$, 则逆命题成立.

4. 证明回答下面的论断:

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a\neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 是否有 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$;

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=a$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

5. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛; 试问反之是否成立.

6. 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个非负数列满足 $a_{n+1}<a_n+b_n$, 而且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛. 求证

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

7. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$, 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

8. 求下列极限 (其中 $p>1$)

   (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right]$;

   (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)$.

9. 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散, 试问 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛? 并说明理由.

10. 设 $a_n>0, a_n>a_{n+1}\,(n=1,2,\cdots)$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

是收敛的.

11. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 求证 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 绝对收敛.

12. 研究下列级数的条件收敛性与绝对收敛性:

   (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$;

   (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}$; (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$;

   (5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$; (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$;

   (7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{n}}-1)$; (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$;

   (9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{p}{n}\right)$; (10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^p$.

13. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $\frac{S_n^+}{S_n^-}$ 当 $n\to\infty$ 时有极限且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n^+}{S_n^-}=1$ 这里, $S_n^{\pm}$ 是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ 的部分和, $a_n^+$, $a_n^-$ 的定义由 §7.3 给出.

14. 证明如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 并且从某项之后有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{b_{n+1}}{b_n},$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

15. 研究下列级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$.

## §7.2 函数项级数

### 7.2.1 收敛性

设 $u_1(x),\ u_2(x),\cdots,u_n(x),\ \cdots$ 是定义在 $E$ 上的一列函数. 若有限个函数相加, 则结果还是定义在同一个定义域中的函数, 现在考虑无穷多个函数相加问题.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots.$$

称为 $E$ 上的函数项级数. 对 $x_0\in E$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 就是一个数项级数. 如果收敛, 则称 $x_0$ 为收敛点, 如果发散, 则称为发散点. 不妨设函数项级数的收敛点集全体为区间 $I$, 并称函数项级数在 $I$ 上收敛（有时也称**逐点收敛**）. 此时

$$x\in I,\quad x\longrightarrow S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

定义了 $I$ 上的一个函数, 称为函数项级数的**和函数**.

或者说, 如果存在一个函数 $S(x)$ 使得函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的前 $n$ 项的部分和

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x),$$

所构成的函数列 $\{S_n(x)\}$ 对区间 $I$ 中每一点 $x\in I$, 都收敛到 $S(x)$, 则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $I$ 上(逐点)收敛于函数 $S(x)$, 并记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x\in I$.

从定义中看出, 函数项级数的收敛问题, 就是部分和所构成的函数列的收敛问题. 今后, 如果我们独立地讨论函数列 $\{f_n(x)\}$ 的收敛问题, 其定义与关于 $\{S_n(x)\}$ 一样.

**例 7.2.1** 讨论 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛性.

**解** 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的通项在 $(-\infty,+\infty)$ 上都有定义 (对于固定的 $x$, 就是一个几何级数), 但只在 $(-1,1)$ 上收敛并有

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}.$$

而当 $|x|\geqslant 1$ 时, 级数发散.

在有限求和中, 函数的连续性, 可导、可积等解析性质都得到保持. 对于无限求和, 和函数是否也能继承这些性质, 即对于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$,

1° 如果级数的通项 $u_n(x)$ 连续, 和函数 $S(x)$ 是否也连续?

2° 如果级数的通项 $u_n(x)$ 可导, 和函数 $S(x)$ 也可导? 如果可导, 是否有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)?$$

3° 如果级数的通项 $u_n(x)$ 可积, 和函数 $S(x)$ 是否可积? 如果可积, 是否有

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx?$$

请看下面例子.

**例 7.2.2** 考察级数 $x + x(x-1) + x^2(x-1) + \cdots x^{n-1}(x-1) + \cdots$ . 它的前 $n$ 项部分和为 $S_n = x + x^2 - x + x^3 - x^2 + \cdots + x^n - x^{n-1} = x^n$, 所以

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

在收敛区域 $[0,1]$ 中, 和函数有间断点, 尽管求和的每一项在 $[0,1]$ 中都连续.

**例 7.2.3** 设 $\{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$ 是 $[0,1]$ 上有理数的全体, 在 $[0,1]$ 上定义

$$S_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1, r_2, \cdots r_n, \\ 0, & x = \text{ 其他值} \end{cases}$$

显然

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) = \begin{cases} 1, & x = \text{ 有理数}, \\ 0, & x = \text{ 无理数} \end{cases}$$

对于每一个 $S_n(x)$, 它在 $[0,1]$ 上只有有限个间断点, 因此在 $[0,1]$ 上可积, 但 $S(x)$ 却不是可积的.

**例 7.2.4** 设

$$S_n(x) = 2n^2 x e^{-n^2x^2}, \quad n = 1, 2, \cdots; \quad x \in [0,1]$$

显然 $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 0$. 因而 $\int_0^1 S(x)dx = 0$, 但

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^1 S_n(x)dx = \lim_{x\to\infty} (1 - e^{-n^2}) = 1$$

**例 7.2.5**

$$S_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

但是 $S'{}_n(x) = \sqrt{n}\cos nx \nrightarrow 0$.

从这些例子可以看出上述问题并非是平凡的. 为了解决在什么条件下上述问题可以得到解决, 我们需要引进一种称之为一致收敛的概念.

### 7.2.2　一致收敛性

函数列和函数项级数在收敛域上的收敛性, 本质上是“点态”的收敛. 在各个收敛点有不同的收敛速度. 当收敛速度有某种整体的一致性时, 称其为一致收敛, 准确地说就有下面的定义.

**定义 7.27**　设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $I$ 上收敛于 $f(x)$, 如果对任意正数 $\varepsilon$, 都存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时, 对所有 $x\in I$ 都有

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon,$$

那么称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f(x)$（或一致趋于 $f(x)$）.

当函数列是函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和 $f_n(x)=S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ 时, 上面的定义也就给出了函数项级数的一致收敛性的定义.

显然 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$ 等价于 $\{f(x)-f_n(x)\}$ 一致趋于零. 因此我们有等价的命题

**定理 7.28**　函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=0,\quad \text{其中, }\beta_n=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|.$$

此命题的证明留给读者完成.

**例 7.2.6**　讨论函数列 $f_n(x)=\frac{1}{x+n}$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性.

**解**　任给 $\varepsilon>0$, 取 $N>\frac{1}{\varepsilon}$, 当 $n>N$ 时,

$$|f_n(x)-0|=\frac{1}{x+n}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$$

对所有 $x\in[0,1]$ 都成立. 所以该函数列在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0. 也可以从

$$\beta_n=\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|=\frac{1}{n}\to 0$$

得到这个结论.

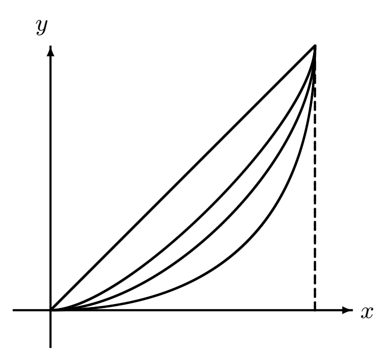

图 7.1

**例 7.2.7**　考察例7.2.2 中的级数, 其部分和为 $S_n(x)=x^n,\ x\in[0,1]$; 显然 $S_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上逐点收敛于

$$S(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

因为

$$\beta_n = \sup_{x\in[0,1]} |S_n(x) - S(x)| = 1$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 不一致收敛于 $S(x)$. (见图7.1), 也就是级数不是一致收敛的.

**定理 7.29** (Cauchy 收敛准则)　*函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $I$ 上一致收敛的充分必要条件是: 对任给的正数 $\varepsilon$, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, 对任何正整数 $p$ 和 $x\in I$ 都有*

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

*对于函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛的充分必要条件是：对任给的正数 $\varepsilon$, 存在 $N>0$, 使得当 $n>N$ 时, 对任何正整数 $p$ 和 $x\in I$ 都有*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right| = |u_{n+1}(x) + \cdots u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

**证明**　必要性是显然的. 下面证明充分性. 由条件知对每个 $x\in I$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 都是一个基本列, 因而存在一个数 $f(x)$ 使得 $f_n(x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$. 于是 $f(x)$ 是定义在 $I$ 上的一个函数, 且 $\{f_n\}$ 在 $E$ 上逐点收敛于 $f$. 因为对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$ 使得当 $n>N$ 时

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

对一切自然数 $p$ 及一切 $x\in I$ 成立. 令 $p\to\infty$, 从上式得到

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$$

对一切 $x\in I$ 成立. 于是 $\{f_n(x)\}$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f(x)$. □

**推论 7.30**　*函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛的必要条件是级数的通项构成的函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 $I$ 上一致趋于零, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|u_n(x)| = 0$.*

如同级数收敛的必要条件一样, 当函数项级数的通项在区间上不一致趋于零时, 该级数一定不是一致收敛的.

**例 7.2.8**　讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

**解**　因为 $ne^{-nx}>0$, 且对 $x>0$, 有

$$ne^{-nx} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

所以级数是收敛的. 但是

$$\sup_{x\in(0,+\infty)} |u_n(x)| \geqslant |u_n(\frac{1}{n})| = ne^{-1}$$

所以级数在区间 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

**定理 7.31** (Weierstrass) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；又在 $I$ 上恒有

$$|u_n(x)| \leqslant a_n,$$

则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $E$ 上一致收敛.

该定理的证明只要应用级数的 Cauchy 收敛准则即可完成. 这里, 称正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $I$ 上的控制级数. Weierstrass 定理的条件比较强, 满足这个条件的函数项级数不但收敛而且绝对收敛, 但是, 它却是判别一致收敛的一个简洁实用的判别法.

由Weierstrass 定理, 不难看出 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 虽然在 $(0,+\infty)$ 上不是一致收敛的,但在 $(0,+\infty)$ 的局部区间 $[\delta,+\infty)$, $\delta > 0$ 上满足 $|ne^{-nx}| \leqslant ne^{-n\delta}$, 所以是一致收敛的.

**例 7.2.9** 若 $\alpha > 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

**证明** 因为

$$\left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 在 $\alpha > 1$ 时收敛, 所以原级数一致收敛.

若对定义域中每个固定的 $x$ 函数列 $\{u_n(x)\}$ 作为数列是有界的, 则称此函数列**逐点有界**. 若存在一个正数 $M$ 使得 $|u_n(x)| < M$ 对所有 $n$ 及定义域中的所有 $x$ 成立, 则称此函数列**一致有界**. 仿照数项级数中 Dirichlet 和 Abel 的判别法, 我们有

**定理 7.32** (Dirichlet 判别法) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 $E$ 上有定义, 若对每个固定的 $x \in E$, $\{v_n(x)\}$ 是单调减数列, 且在 $E$ 上一致趋于 0, 而且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和在 $E$ 上一致有界, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 $E$ 上一致收敛.

**定理 7.33** (Abel 判别法) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 $E$ 上有定义, 若对每个固定的 $x \in E$, $\{v_n(x)\}$ 是单调数列, 且在 $E$ 上一致有界, 而且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $E$ 上一致收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 $E$ 上一致收敛.

读者可以自己完成 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法的证明, 但是应注意每一步的一致性体现在何处.

**例 7.2.10** 设 $a_n$ 单调减趋于 0, 对任何满足 $\pi > \delta > 0$ 的 $\delta$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 上一致收敛.

**证明** 因为

$$A_k(x) = \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos kx = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

所以

$$|A_k(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

这说明 $\{A_n(x)\}$ 在所给区间上一致有界. 又 $\{a_n\}$ 显然单调减一致趋于 0. 所以原级数在定义的区间上是一致收敛的.

**例 7.2.11** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 求证: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

**证明** 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一致收敛（它与 $x$ 根本毫无关系）, 而 $\{\frac{1}{n^x}\}$ 对固定的 $x \geqslant 0$ 单调递减, 而且 $|\frac{1}{n^x}| \leqslant 1$ 一致有界. 所以原级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

### 7.2.3 一致收敛级数的性质

我们将看到, 正是一致收敛的概念, 使我们可以讨论函数项级数和函数的性质. 关于函数列的极限函数的性质可类似进行, 因此不再单独讨论.

**定理 7.34** *如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $I$ 上一致收敛于 $S(x)$, 且求和项 $u_n(x)$ 在区间 $I$ 上连续, 则 $S(x)$ 在 $I$ 上也连续.*

**证明** 对任意 $x_0 \in I$, 只要证明 $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$ 即可. 根据连续的定义, 就要估计不等式 $|S(x)-S(x_0)|$. 为此, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 由一致收敛性可知, 存在 $N$, 使对任何 $x \in I$ 都有

$$|S_N(x) - S(x)| < \varepsilon/3.$$

再由 $S_N(x)$ 在 $x_0$ 的连续性（它是有限个连续函数的和）可知, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x-x_0| < \delta$ 时

$$|S_N(x) - S_N(x_0)| < \varepsilon/3.$$

所以, 当 $|x-x_0| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} |S(x)-S(x_0)| &\leqslant |S(x)-S_N(x)| + |S_N(x)-S_N(x_0)| \\ &\quad + |S_N(x_0)-S(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

即 $S(x)$ 在 $x_0$ 连续. 因此 $S(x)$ 在 $I$ 上连续. □

注意, 该定理有一个很常用的推广, 即, 设求和项 $u_n(x)$ 在区间 $I$ 上连续, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $I$ 的任一个闭子区间上一致收敛. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $I$ 收敛, 并且和函数在 $I$ 上也连续. 连续是一个局部性质, 一致收敛是一个整体性质. 要证明“局部”的连续, 只需要在“局部”附近的“整体”上的一致收敛性即可. 而每一点的连续, 就是整体的连续.

一个典型的例子仍然是级数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx},\ \ x \in (0,+\infty)$. 它在区间 $(0,+\infty)$ 上不是一致收敛的,但在任何闭子区间上一致收敛. 对任意的 $x_0 \in (0,+\infty)$,存在一个 $\delta$ 满足 $0 < \delta < x_0$, 级数在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛, 所以和函数 $S(x)$ 在 $x_0$ 处连续. 由于 $x_0 \in (0,+\infty)$ 的任意性, 因此和函数 $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

**定理 7.35**　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 通项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 且

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

**证明**　我们的主要目的是为了证明积分和无限求和的交换性. 所以不妨设 $\{u_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 根据定理7.34 , 和函数 $S(x)$ 也连续, 所以可积.

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 对所有的 $x \in [a,b]$ 有

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

故当 $n > N$ 时有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right| &= \left|\int_a^b (S(x) - S_n(x))dx\right| \\ &\leqslant \int_a^b |S(x) - S_n(x)|dx \\ &< (b-a)\varepsilon.\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} u_n(x)\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$ 收敛, 而且收敛于 $\int_a^b S(x)dx$. □

**例 7.2.12**　设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, 求 $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

**解**　由级数的一致收敛性, 可知有

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} \cos nx dx = 0.$$

**定理 7.36**　设级数的求和项 $u_n(x)$ 在 $I = [a,b]$ 有连续导数, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $I$ 收敛于 $S(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $I$ 一致收敛, 则和函数 $S(x)$ 在 $I$ 可微, 并有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

**证明**　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 一致收敛于 $g(x)$, 所以由定理7.35 知

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)dt &= \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n'(t)dt \\ &= S(x) - S(a).\end{aligned}$$

所以 $S'(x) = g(x)$, 即和函数可微, 且求导和求和运算可交换. □

## 习题 7.2

1. 证明两个在共同区间 $I$ 上一致收敛的级数的和, 也在 $I$ 上也一致收敛.

2. 确定下列函数项级数的收敛域.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$;
(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$;
(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}\sin\frac{\pi}{2^n}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n-3^n}$;
(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$;
(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

3. 在区间 $[0,1]$ 上, 定义

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{1}{n} \\ 0, & x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$$

证明级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 但是它没有 Weierstrass 判别法中的控制级数.

4. 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2},\ -\infty < x < +\infty$;
(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\left(1+(nx)^2\right)},\ -\infty < x < +\infty$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^n,\quad -1 < x < 1$;
(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx},\ 0 \leqslant x < +\infty$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n},\ 0 \leqslant x < +\infty$;
(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},\ 1 < x < +\infty$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n},\ 0 < \delta \leqslant x \leqslant 2\pi - \delta$;
(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(ne^n)^x},\ 0 \leqslant x < +\infty$.

5. 证明: 若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{nx}}$ 在 $0 \leqslant x < +\infty$ 中一致收敛.

6. 证明函数 $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续, 且有连续的各阶导数.

7. 证明: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ 当 $|x|<+\infty$ 时, 具有连续的二阶微商.

8. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

9. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$, 求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}f(x)dx$.

10. 递归定义 $[0,1)$ 上的连续可微函数序列 $\{f_n\}$ 如下: $f_1=1$, 在 $(0,1)$ 上有

$$f'_{n+1}(x)=f_n(x)f_{n+1}(x),\quad f_{n+1}(0)=1.$$

求证: 对每个 $x\in[0,1)$ $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在, 并求出其极限函数.

11. 证明Dini定理：

(1)设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数列, 且在此区间上逐点收敛到零. 若对任意固定的 $x\in[a,b]$ 数列 $\{u_n(x)\}$ 是单调递减的, 则 $\{u_n(x)\}$ 在 $x\in[a,b]$ 上一致收敛到零.

(2) 如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上逐点收敛到 $S(x)$, 且通项 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续且非负的, 那么和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 连续的充分必要条件是此级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

## §7.3 幂级数和 Taylor 展式

本节我们将讨论一种简单的函数项级数"幂级数"：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

并称 $a_n, n = 0, 1, \cdots$ 为幂级数的系数. 别看它简单, 我们会发现, 幂级数和后面要讨论的三角级数是应用最广泛的两类重要函数项级数. 这也许应证了这样一句话："简单的即是重要的". 我们首先要研究它的和函数的性质：定义域、连续性、可微性和可积性.

### 7.3.1 幂级数的收敛区域

设幂级数的收敛区域为 $I$. 显然, $x = 0$ 是一个收敛点, 即 $0 \in I$ (所以收敛区域并非空集). 下面的例子给出两种极端情况.

**例 7.3.1** 考察下列两个幂级数的收敛区域

$$1 + 2^2 x^2 + 3^3 x^3 + \cdots + n^n x^n + \cdots$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

第一个级数只在 $x = 0$ 处收敛, 这是因为对于任意 $x \neq 0$, 总能找到这样的 $N$, 使得 $|x| > \frac{1}{N}$, 所以当 $n > N$ 时, 所有的项 $n^n x^n$ 的绝对值都大于 1. 而第二个级数对任何的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是绝对收敛的.

对一般幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 如果在 $x_0 \neq 0$ 收敛, 则对于任意满足 $|x| < |x_0|$ 的 $x$, 有

$$a_n x^n = a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ (这是因为幂级数在 $x_0$ 收敛), 所以 $|a_n x_0^n| < M$ (有界), 即 $|a_n x^n| \leqslant M|\frac{x}{x_0}|^n$, 而 $|\frac{x}{x_0}| < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{x}{x_0}|^n$ 收敛；因此 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛. 总之, 有

**定理 7.37** *若幂级数在 $x_0\ (\neq 0)$ 处收敛, 则在所有 $|x| < |x_0|$ 处绝对收敛. 如果幂级数在 $x_0$ 处发散, 则当 $|x| > |x_0|$ 时发散.*

根据上述分析, 收敛情况有三种可能：

1° 仅在 $x = 0$ 处收敛：$I = \{0\}$;

2° 在 $I = (-\infty, +\infty)$ 上处处收敛;

3° 有不为零的收敛点和发散点, 所以 $I$ 是一个有界点集.

**定理 7.38** *若幂级数有非零的收敛点和发散点, 则存在正数 $R$, 使的幂级数在 $(-R, R)$ 中绝对收敛, 而当 $|x| > R$ 时, 幂级数发散.*

**证明** 由于有发散点, 所以 $I$ 是非空有界集, 故 $I$ 有上确界, 记为 $R$. 又由于有非零的收敛点, 所以 $R>0$, 根据前面的分析就得到本定理的结论. □

定理 7.38 中的 $R$ 称为幂级数的**收敛半径**; $(-R,R)$ 称为**收敛区间**. 现在基本清楚, 幂级数的收敛区域 $I$ 如果不是 $\{0\}$ 或者整个实轴, 基本上是一个以原点为中心的区间, 在这个区间内部, 幂级数不但收敛而且绝对收敛. 只是区间的端点需要具体考虑.

### 7.3.2 收敛半径的计算

从例 7.3.1 所举的两个级数可以看出, 幂级数的收敛区域与它的系数密切相关. 当 $n\to\infty$ 时, 第一个例子中 $a_n=n^n$ 是一个趋于无穷非常快的无穷大量, 而第二个例子则相反 $a_n=\frac{1}{n!}$ 是趋于零速度非常快的无穷小量. 因此, 如何利用幂级数系数提供的信息, 计算它的收敛半径是本节所要考虑的问题.

**定理 7.39** 若 $\lim|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=L$; 或 $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=L$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为

$$R=\frac{1}{L}=\begin{cases}0, & L=+\infty;\\ \frac{1}{L}, & L\ \text{有限};\\ +\infty, & L=0.\end{cases}$$

**证明** 因为幂级数在收敛区间内绝对收敛, 因此由 D'Alembert 判别法可知

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=L|x|.$$

故当 $L|x|<1$, 即 $|x|<R=\frac{1}{L}$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 收敛; 而当 $|x|L>1$, 即 $|x|>R$ 时发散. 所以, 级数的收敛半径为 $R$. 关于第二种情况的证明类似, 只是要利用正项级数 Cauchy 判别法即可. □

**例 7.3.2** 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}x^n$ 的收敛半径 $R$ 和收敛区域 $I$.

**解** 因为 $\lim\frac{n^{\alpha}}{(n+1)^{\alpha}}=\lim\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha}=1$, 故 $R=1$; 特别

当 $\alpha=0$ 时, $\sum x^n$ 在 $x=\pm1$ 发散, 所以 $I=(-1,1)$ (不含端点).

当 $\alpha=-1$ 时, $\sum\frac{1}{n}x^n$ 在 $x=1$ 发散, 在 $x=-1$ 收敛. 所以 $I=[-1,1)$ (含左端点, 不含右端点).

当 $\alpha=-2$ 时, $\sum\frac{1}{n^2}x^n$ 在 $x=\pm1$ 都收敛. 所以 $I=[-1,1]$ (含左右端点).

这个例子说明: 一是在收敛区间的端点要具体验证. 二是与例7.3.1中的级数相比, 当 $n\to\infty$ 时, $n^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ 是比 $n^n$ 低阶的无穷大量. $n^{\alpha}(\alpha<0)$ 是比 $\frac{1}{n!}$ 低阶无穷小量.

**例 7.3.3** 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)x^{2n}$ 的收敛半径 $R$.

**解** 直接对通项$a_n = \left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right) x^{2n}$ 用判别式得

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 4|x|^2$$

所以当 $4|x|^2 < 1$ 时, 级数收敛; 当 $4|x|^2 > 1$ 时, 级数发散, 所以 $R = \frac{1}{2}$.

也可以把级数看成是 $y = x^2$ 的幂级数并求出收敛半径, 最终给出 $x$ 的收敛半径.

**例 7.3.4** 求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 其中

$$a_n = \begin{cases} 2^k, & n = 2k; \\ k, & n = 2k+1. \end{cases}$$

**解** 因为幂级数在收敛区间内绝对收敛, 因此可以把幂级数写成两个级数的和

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n+1}$$

（后面将导论幂级数在公共的收敛区域内的可加性）. 利用 D'Alembert 判别法可知, 对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$: $2|x|^2 < 1$ 时收敛, $2|x|^2 > 1$ 时发散; 对于级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n+1}$: $|x|^2 < 1$ 时收敛, $|x|^2 > 1$ 时发散. 所以, 原级数的收敛半径是: $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

### 7.3.3 幂级数的性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 中收敛于 $S(x)$, 其中 $R$ 是收敛半径.

**定理 7.40** *幂级数在 $(-R, R)$ 内任何闭子区间 $[-r, r]$, $0 < r < R$ 上一致收敛, 因而, 和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内连续.*

**证明** 任给 $0 < r < R$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$收敛, 而当 $|x| \leqslant r$时

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n r^n|,$$

由Weierstrass 判别法, 幂级数在 $[-r, r]$ 上一致收敛. 对任意的 $x_0 \in (-R, R)$, 一定存在 $r$ 使得 $x_0 \in [-r, r] \subset (-R, R)$, 由幂级数在 $[-r, r]$ 上的一致性得和函数 $S(x)$ 在 $[-r, r]$ 上连续, 因此在 $x_0$ 连续. □

进一步, 如果幂级数在端点收敛, 那么有下列结果.

**定理 7.41** *如果级数在区间 $(-R, R)$ 的右（左）端点收敛, 则和函数 $S(x)$ 在端点处右（左）连续.*

**证明** 不妨设幂级数在右端点 $x = R$ 收敛, 只需证明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0, R]$ 一致收敛. 因为在 $[0, R]$ 上,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n,$$

由 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛及 $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 单调减少且在 $[0,R]$ 上一致有界, 故级数在 $[0,R]$ 中一致收敛. 另一端的证明类似. □

**定理 7.42** 幂级数的和函数 $S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 中可导, 并有

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

且求导后的幂级数的收敛半径仍为 $R$.

**证明** 先求 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径. 任取 $x_0 \in (-R,R)$, 存在 $r:\ |x_0| < r < R$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n r^n$ 收敛, 因此 $|a_n r^n| < M$ 有界, 所以

$$|n a_n x_0^{n-1}| = |a_n r^n| \frac{n}{r} \left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1} \leqslant M \frac{n}{r} \left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}.$$

因为 $\sum \frac{n}{r} \left|\frac{x_0}{r}\right|^{n-1}$ 当 $|x_0| < r$ 时收敛, 所以幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 $x_0$ 绝对收敛. 也就是说 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径 $R' \geqslant R$.

如果 $R' > R$, 则存在 $x_0$: $R' > x_0 > R$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n x_0^{n-1}|$ 收敛. 因为

$$x_0 |n a_n x_0^{n-1}| = |n a_n x_0^n| \geqslant |a_n x_0^n|$$

所以 $\sum |a_n x_0^n|$ 收敛, 这是不可能的, 所以 $R' = R$.

作为幂级数, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 $(-R,R)$ 的任意闭子区间上一致收敛, 所以定理的结论在任意闭子区间上成立, 所以在 $(-R,R)$ 内每一点成立. □

从上述定理可以看出, 幂级数的导数还是有同样收敛半径的幂级数, 所以可以继续求导, 即

**推论 7.43** 幂级数的和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 中有任意阶导数, 而且

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k},$$

其收敛半径也是 $R$.

关于幂级数的积分我们有如下定理:

**定理 7.44** 幂级数的和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可积, 且有

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad x \in (-R,R)$$

并且积分后得到的幂级数的收敛半径仍为 $R$.

**例 7.3.5** 已知幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 在整个数轴上收敛, 则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = S(x) \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

解此微分方程得
$$S(x) = Ae^x.$$
由于 $S(0) = 1$, 故 $S(x) = e^x$, 即
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

**例 7.3.6** 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ 的和.

**解** 容易知道该幂级数的收敛半径为 1, 在 $x = \pm 1$ 发散, 故收敛区间为 $(-1, 1)$. 记和函数为 $S(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 令 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, 在区间 $[0, x]$ 上逐项积分, 得
$$\int_0^x f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x},$$
等式两端对 $x$ 求导, 得 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, 所以和函数是
$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$
由此又可求出一些数项级数的和. 例如分别令 $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$, 得
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$$
.

### 7.3.4 幂级数的运算

对于两个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. 如果它们的收敛半径分别为 $R_1$ 和 $R_2$, 记 $R = \min\{R_1, R_2\}$, 那么这两个幂级数在共同的收敛区域 $(-R, R)$ 中可以相加, 且
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n \pm b_n x^n)$$

两个幂级数可以相乘, 其结果还是一个幂级数. 为了将同次幂的系数合并, 这里我们采用 Cauchy 乘积的方法, 这样:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
其中 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. 因为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. 在它们的公共收敛区间 $(-R, R)$ 中绝对收敛, 所以相乘后所得幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 也在 $(-R, R)$ 中绝对收敛.

幂级数更一般的形式是在 $x_0$ 展开的幂级数
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

相当于前面讨论的幂级数在所定义的数轴上做了一个平移. 收敛区间也就平移到以 $x_0$ 为中心的一个区间上：$(x_0-R, x_0+R)$ 以及可能的端点 $x_0-R$ (或 $x_0+R$) .

注记　综上所述, 除了幂级数的收敛区域是一个区间外, 其他的解析性质和多项式函数没有什么区别. 求导可以逐项求导, 积分也可以逐项积分, 只不过幂级数求导或积分后, 它的“次数”不会像多项式那样降低或提高 ( 幂级数的“次数”是无穷的 ) .

### 7.3.5　函数的 Taylor 展开式

至此, 我们研究了幂级数的收敛区域以及和函数的各种性质. 但在实际应用中, 经常要问, 一个给定的函数 $f(x)$ 在什么情况下和什么范围内可以展开成一个幂级数?

如果 $f(x)$ 可以表示成幂级数, 即它可以表示成 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, 所以, $f(x)$ 必有任意阶微商. 两边求导后令 $x=x_0$, 有 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. 因此, 如果 $f(x)$ 能够表示成幂级数, 那么这个幂级数是唯一确定的, 它就是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

反之, 对在点 $x_0$ 有任意阶微商的函数 $f(x)$, 总能构造幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

称它为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的 **Taylor 级数**, 记作

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

特别当 $x_0=0$时, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也称为 $f(x)$ 的 **Maclaurin 级数**. 自然要问, 这样构造的幂级数是否收敛于函数 $f(x)$ 自身? 如果收敛, 在什么范围内收敛?

由 Taylor 定理知, 若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某一邻域内具有任意阶微商, 则

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_0)&+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\\&+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),\end{aligned}$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

而 $\xi$ 是 $x_0$ 与 $x$ 之间的一点. 由此可见

**定理 7.45** 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-R,x_0+R)$ 上有任意阶微商, 则 $f(x)$ 在 $(x_0-R,x_0+R)$ 上可以展成 *Taylor* 级数的充分必要条件是对这区间内的任意点 $x$, 都有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0,$$

特别, 当 $f(x)$ 的各阶微商在区间 $(x_0-R,x_0+R)$ 内任何闭区间上一致有界, 则 $f(x)$ 在这区间上可以展成 *Taylor* 级数

各阶导数一致有界即是存在一个正数 $M$, 使得 $|f^{(n)}(x)|<M \quad (n=1,2,\cdots)$. 于是, 对任意 $x\in(x_0-R,x_0+R)$, 取 $r:\ |x-x_0|<r<R$, 有

$$\begin{aligned}|R_n(x)|&=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|<M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\\&\leqslant M\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

对于初等函数, 其 Taylor 展开中的余项 $R_n$ 已经在第三章中列出, 因此只要检验当 $n\to\infty$ 时, 余项的极限是否为零即可.

1. 指数函数 $f(x)=e^x$:

当 $|x|<M$ 时, $|f^{(n)}(x)|=|(e^x)^{(n)}|=|e^x|\leqslant e^{|x|}\leqslant e^M \quad (n=1,2,\cdots)$, 且 $f^{(n)}(0)=1$, 所以

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

又因为 $M$ 是任意的, 所以上面的展开式对所有实数成立. 特别取 $x=1$, 有

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

2. 三角函数函数 $\sin x$ 和 $\cos x$:

因为, 对任意的实数 $x$ 都有

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\sin x\right|=\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqslant 1 \qquad (n=1,2,\cdots),$$

故正弦函数 $\sin x$ (同样还有 $\cos x$) 可在整个数轴上展成幂级数.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+\cdots. \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\cdots. \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

3. 二项式函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ （$\alpha$ 为任意实数）:

用类似上述方法也可以得到二项式 $(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 展开式. 为避免估计余项的困难, 可用下述方法.

因为

$$f^{(n)}(0)=\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha\bigg|_{x=0}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),$$

所以二项式 $(1+x)^\alpha$ 的 Maclaurin 级数为

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

由于

$$\lim\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}\right|=\lim\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1,$$

故这个级数的收敛半径为 1. 为了证明它在收敛区间 $(-1,1)$ 上的和函数就是 $(1+x)^\alpha$, 设

$$F(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

逐项求导得

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1},$$

以 $1+x$ 乘此等式的两端, 并合并右端 $x$ 的同次幂系数就得到关系式

$$(1+x)F'(x)=\alpha F(x),$$

解此微分方程并注意到 $F(0)=1$, 即算得

$$F(x)=(1+x)^\alpha.$$

当 $\alpha$ 是自然数时 $(1+x)^\alpha$ 的展开式就是熟知的二项式定理.

如果令 $\alpha=-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$, 就得到几个常见的二项式级数.

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (-1<x<1);$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1);$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \qquad (-1<x\leqslant 1).$$

有时对某些函数的 Taylor 展式逐项求导或逐项积分也能得到另一些函数的 Taylor 展式. 例如, 若将展开式

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad (-1<x<1)$$

的两端从 0 到 $x$ 积分就得到对数函数 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 展式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\qquad(-1<x<1).$$

由于展式右端的幂级数在 $x=1$ 收敛, 所以展式的成立区间为 $-1<x\leqslant 1$, 且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln 2.$$

同样从展开式

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\qquad(-1<x<1)$$

逐项积分可得反正切函数的 Taylor 展式

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad(-1\leqslant x\leqslant 1).$$

取 $x=1$, 就得到数 $\frac{\pi}{4}$ 的级数表示

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots.$$

**例 7.3.7** 将函数 $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 展成 Maclaurin 级数.

**解** 由于

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}.$$

又

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\qquad(-1<x<1)$$

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n.\qquad(-2<x<2)$$

所以, 当 $-1<x<1$ 时有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

**例 7.3.8** 在 $x=3$ 处, 把 $\ln x$ 展成 Taylor 级数.

**解** $\ln x=\ln(x-3+3)=\ln 3+\ln\left(1+\frac{x-3}{3}\right)$, 所以

$$\begin{aligned}\ln x&=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x-3}{3}\right)^n\\&=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{n3^n},\end{aligned}$$

展开式在 $-1 < \frac{x-3}{3} \leqslant 1$, 即 $-3 < x-3 \leqslant 3$ 中成立.

注记 在 $e^x$ 的展开式中, 可以用复数代替 $x$. 特别对于 $x = i\phi$ 是纯虚数时 (其中 $i$ 是虚数单位)

$$e^{i\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^n}{n!} = \left(1 - \frac{\phi^2}{2!} + \frac{\phi^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{\phi^{2m}}{(2m)!} + \cdots\right) + i\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \frac{\phi^5}{5!} - \cdots + (-1)^m \frac{\phi^{2m+1}}{(2m+1)!} + \cdots\right).$$

不难发现, 上式的实部和虚部正是三角函数 $\sin\phi$ 和 $\cos\phi$ 的 *Taylor* 展开式, 因此有

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

这就是著名的 *Euler* 公式.

对于一般的复数 $a+ib$, 设 $r$ 是它的模长, $\phi$ 是幅角, 则复数可以表示成

$$a + ib = r(\cos\phi + i\sin\phi) = re^{i\phi}$$

注意到 $e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$, 所以我们得到三角函数的指数表示

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对比一下双曲函数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

的定义, 不难发现两者的类似性.

比上面的例子更为广泛的是, 如果我们把幂级数的理论拓展到复系数和复变量的幂级数, 则是复变量的解析函数的出发点. 这些内容, 读者在关于“复变函数”的课程中将会详细了解到.

## 习题 7.3

1. 求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$;　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^{2n}$;　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}\ (a>0,b>0)$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$;　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;　(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

2. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|<R$ 时收敛, 若 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 也收敛, 则

$$\int_0^R f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$$

(注意: 这里不管 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=R$ 是否收敛). 应用这个结果证明

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

3. 求下列幂级数的收敛区域及其和函数.

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$;　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}$.

4. 求下列级数的和.

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$;　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$;　(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$.

5. 求下列函数在指定点处的Taylor展开式, 并给出收敛区域.

(1) $x^3-2x^2+5x-7,\quad x=1$;　　(2) $e^{\frac{x}{a}},\quad x=a$;

(3) $\ln x,\quad x=1$;　　(4) $\dfrac{1}{x^2+3x+2},\quad x=-4$;

(5) $\ln(1+x-2x^2),\quad x=0$;　　(6) $\cos x,\quad x=\dfrac{\pi}{4}$.

6. 求下列函数的 Maclaurin 展开式, 并给出收敛区域.

(1) $\sin^2 x$;　　(2) $\arcsin x$;

(3) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;　　(4) $(1+x)\ln(1+x)$;

(5) $\displaystyle\int_0^x \cos x^2\,dx$;　　(6) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$;

(7) $\displaystyle\int_0^x e^{-x^2}\,dx$.

7. 方程 $y+\lambda\sin y=x$ $(\lambda\neq -1)$ 在 $x=0$ 附近确定了一个隐函数 $y(x)$, 试求它的幂级数展开式中的前四项.

## §7.4　级数的应用

级数在数学和其他学科的应用范围非常广泛, 本节将主要介绍三个方面的应用.

### 7.4.1　用级数方法计算积分

我们知道,即使被积函数是初等函数,一些积分的原函数是无法显式地由初等函数表示的,因而无法使用 Newton—Leibniz 公式. 这使得积分会产生很大困难. 但是如果将被积函数展开成幂级数, 根据幂级数的理论, 我们可以逐项积分, 为此给我们提供了计算积分的一条可能的途径.

**例 7.4.1**　计算积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

**解**　注意到展开式 $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$的收敛半径是 1, 但是在收敛区间的右端点也是收敛的. 因此

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}\right)dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}
\end{aligned}
$$

最后的结果是一个收敛的数项级数(当然也是一个实数).

**例 7.4.2**　计算椭圆积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$, 　$k^2<1$.

**解**　作变换 $u=\sin x$, 则

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)}}$$

将被积函数按照

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \quad (-1<x\leqslant 1)$$

展开

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}x$$

注意到 $k^2\sin^2 x<1$, 所以上式对所有的 $x$ 都成立. 利用

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!}, & m\ \text{为奇数}, \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & m\ \text{为偶数}. \end{cases}$$

并逐项积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-k^2\sin^2 x)}} = \frac{\pi}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\right).$$

因此, 椭圆积分的任意近似值可以从上式中得到.

### 7.4.2 近似计算

函数展开成幂级数后, 就意味着在一定的范围内函数近似成为一个多项式, 误差（即余项）随 $n$ 增大趋于零. 例如对数函数 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 展式

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (-1 < x \leqslant 1).$$

因此在 $x=1$ 处的函数值为

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}.$$

这是一个交错级数, 根据 Leibniz 判别法（定理7.13）, 如果要计算近似值并使误差小于0.01, 只要计算级数的前 100 项即可.

而要计算在 $x=\frac{1}{2}$ 的值

$$\ln\frac{3}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$$

并保持同样的精度, 只要计算前 4 项即可.

同理, 由 $e^x$, $\arctan x$ 的展开式, 我们有

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$
$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\cdots$$

这样就可以计算出 $e$ 和 $\pi$ 的近似值, 尽管它们都是无理数.

注记 在进行近似计算时, 不但要追求精度高, 还要考虑计算量小, 或结合实际问题给出具体方法. 这些专门的计算方法研究已超出了本教材的范围, 感兴趣的读者可以参考计算方法方面的参考书.

用多项式近似（或称为“逼近”）一个函数不但在近似计算中, 甚至在一些理论和应用研究中具有较强的作用. 虽然目前我们掌握的仅是根据 *Taylor* 的思想, 对具有高阶导数, 甚至具有无穷次导数且能展开成幂级数的函数可以由多项式逼近, 但 *Weierstrass* 给出一个惊人的结果, 即任何闭区间上连续函数（并不要求有任何阶导数）可以由多项式逼近. 有关内容将在后续课程中介绍.

### 7.4.3 微分方程的幂级数解

设在二阶微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

中, $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $x_0$ 的邻域可以展成幂级数, 则可以假定方程在 $x_0$ 的邻域有幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

如果已经给出初始条件 $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$, 则显然应有 $a_0 = y_0,\ a_1 = y_0'$. 代入方程后, 左端按 $x - x_0$ 的同次幂合并后, 各项的系数都是零, 就可以解出 $a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$, 从而得到方程在 $x_0$ 邻域内的幂级数解.

**例 7.4.3** 求 Airy 方程

$$y'' - xy = 0$$

的幂级数解.

**解** 设

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

代入原方程, 就得到

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}\right) x^n = 0.$$

即有

$$a_2 = 0, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \qquad (n \geqslant 1)$$

在上面的递推关系式中, 不难发现, $a_{3k+2} = 0$, 但 $a_0$ 和 $a_1$ 可以是任意的, 不妨设 $a_0 = C_1$ 和 $a_1 = C_2$, 则

$$a_{3k} = \frac{C_1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3k-1) \cdot 3k} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} C_1$$

$$a_{3k+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} C_2$$

故方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

其中

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)}{(3k)!} x^{3k}$$

$$y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}$$

**例 7.4.4**　设 $\nu \geqslant 0$, 求解方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0.$$

**解**　$p(x) = \frac{1}{x},\ q(x) = \frac{x^2-\nu^2}{x^2}$. 可假定方程的解为

$$y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_0 \neq 0.$$

其中 $\lambda$ 为待定常数。计算可得

$$\begin{aligned} x^2y'' &= \sum_{n=0^\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda}, \\ xy' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda}, \\ x^2y &= \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+\lambda}, \\ -\nu^2 y &= \sum_{n=0}^{\infty} -\nu^2 a_n x^{n+\lambda}. \end{aligned}$$

将上列各式代入方程的左端, 得到

$$(\lambda^2-\nu^2)a_0x^\lambda + ((\lambda+1)^2-\nu^2)a_1x^{\lambda+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\left((\lambda+n)^2-\nu^2\right)a_n + a_{n-2}\right)x^{n+\lambda} = 0.$$

比较 $x$ 各阶的系数, 首先必有 $\lambda = \pm\nu$. 先设 $\lambda = \nu \geqslant 0$.这时应有 $a_1 = 0$及

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(\nu+n)^2-\nu^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\nu)}.$$

于是有

$$a_{2k+1} = a_1 = 0, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

及

$$a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{2^2k(k+\nu)} = \cdots = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!(\nu+1)\cdots(\nu+k)}.$$

取 $a_0 = 2^{-\nu}$, 则

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!(\nu+1)\cdots(\nu+k)}\frac{1}{2^{2k+\nu}},$$

就得到方程的一个特解

$$y_1 = J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

如果 $\nu$ 不是整数, 取 $\lambda = -\nu$, 类似可得 (11.4.7) 的另一个解

$$y_2 = J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(-\nu+1)(-\nu+2)\cdots(-\nu+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

由于方程是线性的, 所以方程的通解就是

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

方程 (11.4.7) 叫 $\nu$ 阶 Bessel方程, $J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 叫第一类 Bessel 函数.

当 $\nu$ 是整数时, $J_{-\nu}(x)$ 无意义, 要求方程的另一个解, 就需要引进第二类 Bessel 函数, 已超出本书的范围.

### 7.4.4 Stirling 公式

最后, 我们要讨论一个很有趣的问题. 大家知道, 当我们比较无穷大量的阶时, 有一个体会: $n^\alpha$ $(\alpha > 0)$, $a^n$ $(|a| > 1)$, $n!$, $n^n$ 发散到 $+\infty$ 的速度一个比一个快. Stirling 公式, 就是给出 $n!$ 和 $n^n$ 之间的一种关系. 为了给出这个关系, 我们先证明下面的引理.

**引理 7.46** (Wallis) 记 $2n!!$ 与 $(2n-1)!!$ 分别表示前 $n$ 个偶数和前 $n$ 个奇数的连续乘积, 则

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

**证明** 因为当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时成立

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx,$$

所以

$$\frac{2n!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

即

$$\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}.$$

若令

$$a_n = \left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}, \quad b_n = \left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}.$$

则容易得出 $\{a_n\}$ 是递增数列, $\{b_n\}$ 是递减数列, 且

$$b_n - a_n = \frac{1}{2n(2n+1)}\left[\frac{2n!!}{(2n-1)!!}\right]^2 < \frac{\pi}{2}\frac{1}{2n}.$$

当 $n \to \infty$ 时, 这个差值趋于零, 由此得 Wallis 公式.

下面给出 Stirling 公式.

**定理 7.47** (Stirling)

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}} \qquad (0 < \theta_n < 1).$$

**证明** 在展开式

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \cdots + \frac{1}{2m+1}x^{2m} + \cdots\right)$$

中令 $x = \frac{1}{2n+1}$, 就得到

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right]$$

或写成

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots$$

这个级数的和显然大于 1, 而小于把各项分母上的数 $5, 7, \cdots$ 代之以 3 后所得的级数之和

$$1 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right] = 1 + \frac{1}{12n(n+1)},$$

所以有不等式

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}$$

即

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < \exp\left(1 + \frac{1}{12n(n+1)}\right).$$

再考察数列 $\{a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\}$, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

故得

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < \exp\left(\frac{1}{12n(n+1)}\right).$$

从上面左边不等式推知 $a_n$ 是递减数列, 并以 0 为其下界, 所以必存在有限极限 $a$; 从右边不等式推知

$$a_n \exp(-\frac{1}{12n}) < a_{n+1}\exp(-\frac{1}{12(n+1)})$$

即 $\{a_n \exp(-\frac{1}{12n})\}$ 是递增数列, 且仍以 $a$ 为其极限. 如此上面两个单调数列的共同极限 $a$ 必介于这两个数列的通项 $\{a_n \exp(-\frac{1}{12n})\}$ 与 $a_n$ 之间,

$$\{a_n \exp(-\frac{1}{12n})\} < a < a_n.$$

若取 $\theta_n = 12n\ln\frac{a_n}{a}$, 则 $0<\theta_n<1$, 并且将

$$a_n = a\exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right)$$

代入 $a_n$ 的表达式就得到

$$n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\exp\left(\frac{\theta_n}{12n}\right).$$

于是余下的问题就是要确定常数 $a$. 由于

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{(2n!!)^2}{2n!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{2n!},$$

但

$$n! = \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n a_n,\quad 2n! = \sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} a_{2n},$$

代入上式的右边, 得

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{2n!} = \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{a_n^2}{a_{2n}},$$

令 $n\to\infty$, 得

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a^2}{4}$$

从而 $a=\sqrt{2\pi}$. 这样就得到 Stirling 公式.

## 习题7.4

1. 求下列积分: (1) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$
2. 求方程 $y''-xy'+y=0$ 的幂级数解.
3. 求方程 $y''+y\sin x=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$ 的幂级数解至 $x^5$ 项.
4. 利用 Stirling 公式求极限.

   (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$ (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
5. 研究下列级数的敛散性.

   (1) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$
6. 证明: 当 $n\to\infty$ 时, $\ln(n!)\sim\ln n^n$.

## 第 7 章综合习题

1. 计算级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ 的和.
2. 证明 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=1$.
3. 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.
4. 设 $\alpha>0$, $\{a_n\}$ 是递增正数列. 求证级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$ 收敛.
5. 设 $\Phi(x)$ 是 $(0,\infty)$ 上正的严格增函数, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 是三个非负数列满足

$$a_{n+1}\leqslant a_n-b_n\Phi(a_n)+c_na_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=\infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty.$$

   求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.
6. 设 $\{a_n\}$ 是正数列使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛. 求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n},\tag{1}$$

   而且上式右端的系数 2 是最佳的.
7. 设 $\{a_n\}$ 是一个严格单调递增实数列,且对任意正整数 $n$ 有 $a_n\leqslant n^2\ln n$. 求证: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n}$$ 发散.

8. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ 收敛, 就称数列 $\{a_n\}$ 是有有界变差的.

   (1) 证明具有有界变差的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛.

   (2) 构造一个发散的无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 使得其通项 $\{a_n\}$ 是一个具有有界变差的数列.

9. 设函数列 $\{f_n(x)\}$, $n = 1, 2, \cdots$ 在区间 $[0,1]$ 上由等式

$$f_0(x) = 1, \quad f_n(x) = \sqrt{x f_{n-1}(x)}$$

   定义, 证明当 $n \to \infty$ 时, 函数列在 $[0,1]$ 上一致收敛到一个连续函数.

10. 递归定义连续可微函数序列 $f_1, f_2, \cdots : [0,1) \to \mathbb{R}$, 如下: $f_1 = 1$, 在 $(0,1)$ 上有

$$f'_{n+1} = f_n f_{n+1},$$

   且 $f_{n+1}(0) = 1$. 求证: 对每一个 $x \in (0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在, 并求出其极限函数.

11. 设 $f_0(x)$ 是区间 $[0,a]$ 上连续函数, 证明按照下列公式

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(u)du$$

   定义的函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,a]$ 上一致收敛于 0.

12. 利用二项式级数, 计算 $\sqrt{2}$ 到四位小数.