MATH 3011 运筹学	秋季 2023

Lecture 3: 线性规划基本理论

Lecturer: 陈士祥 *Scribes:* 陈士祥

1 线性规划基本理论

对于线性规划基本理论，我们考虑一般形式，记 $P = \{x \mid Ax \geq b\}$.

结论 1：在线性规划中，约束条件均为线性等式及线性不等式，所以可行域 P 是凸集。

由线性规划图解中的例子，其最优解在某个顶点取得。这促使我们去研究如下几个定义。

1.1 顶点、极点、基解和可行基解

我们记 $P = \{x \mid Ax \geq b\}$ 为一个凸多面集，不等式约束下标集 $\mathcal{I} = \{i : a_i^\top x \geq 0\}$.

- **极点 (extreme point)：** $\mathbf{x} \in P$ 被称作 P 的极点，若 $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}^{(2)}$，$\lambda \in (0,1)$，$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in \mathcal{S}$, 必有 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(2)}$, 则称 $\mathbf{x}$ 是凸集 $\mathcal{S}$ 的极点。

- **顶点 (vertex)：** $\mathbf{x}$ 被称作 P 的顶点，如果存在某个 $c \in \mathbb{R}^n$，使得 $c^\top \mathbf{x} < c^\top y$，$\forall y \in P, y \neq x$.

- **基解 (basic solution) 和可行基解 (basic feasible solution):**

  Definition 3.1 *考虑约束 $P = \{x \mid Ax \geq b\} = \{x \mid a_i^T \geq b_i, i = 1, 2, \ldots, m\}$，我们称约束 $a_i^T x \geq b_i$ 是积极约束（active set），如果 $a_i^T x = b_i$.*

  基解: $\mathbf{x}$ 被称为一个基解，如果 (a). 所有的等式约束 (若有) 都成立；(b). 等式约束下标集合 $\mathcal{E}$ 加上不等式中的积极约束约束下标集 $\mathcal{I}_e := \{i \in \mathcal{I} \mid a_i^\top x = b_i\}$ 中，存在 n 个下标 i, 使得 a_i 线性无关。
  一个基解如果也是可行解，我们称其为一个可行基解（BFS）。

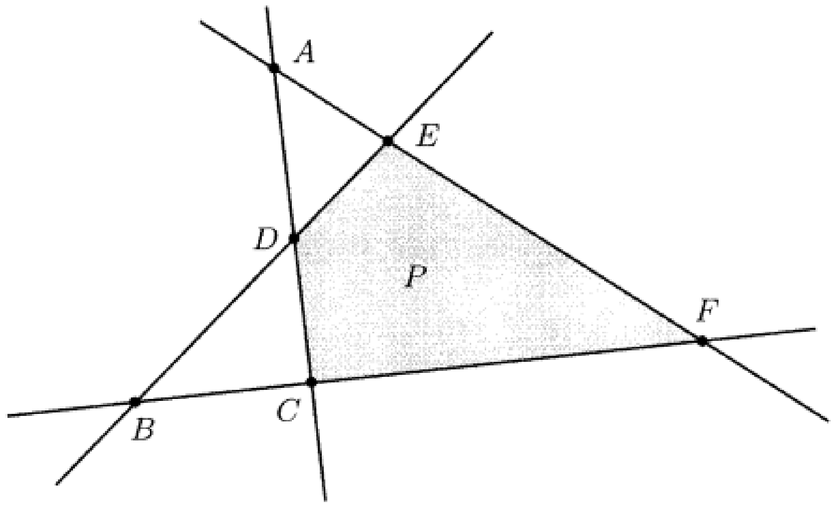


图 3.1: $\mathbb{R}^2$ 中，区域 P 是由四个半平面 $\{x : a_i^\top x \le b_i\}, i = 1,2,3,4$ 围成的多面集，A, B, C, D, E, F 均为基解，C, D, E, F 为可行基解。

注：极点和顶点是几何层面的定义，基解是代数层面的定义。

Theorem 3.1 如果 $P = \{x \mid Ax \ge b\}$ 是一个非空多面集，$x \in P$, 那么下述三种情况等价

1. x 是顶点；
2. x 是极点；
3. x 是可行基解。

Proof: 顶点 $\to$ 极点:
假设 x 是一个顶点, 根据定义, 可以找到 c 使得 $c^\top x < c^\top y, y \in P, y \neq x$. 假设 $x = ty + (1-t)z, t \in [0,1]$, $x \neq y \neq z$, 那么 $c^\top x < c^\top (ty + (1-t)z)$. 这与假设矛盾，因此 x 不能被表示为其余两个可行点的凸组合。所以 x 是一个极点。

极点 $\to$ 可行基解:
我们证明：如果 x 不是可行基解，那么 x 也不是极点。
如果 x 非可行基解，记 $I = \{i : a_i^\top x = b_i\}$, 那么 $|I| < n$. 所以 $a_i, i \in I$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的一个严格子空间中。可以找到 d, 使得 $d^\top a_i = 0, i \in I$. 我们令 $y = x + \epsilon d, z = x - \epsilon d$, ϵ 为一个很小的正数。

我们有 $a_i^\top y = b_i = a_i^\top z, i \in I$. 对于 $i \notin I$, 可以令 ϵ 充分小，使得 $a_i^\top y = a_i^\top x + \epsilon a_i^\top d > b_i$ 且 $a_i^\top z = a_i^\top x - \epsilon a_i^\top d > b_i$. 故 $y, z \in P$, $x = (y+z)/2$ 不是极点。 ■

作业 3.1 证明**可行基解 $\rightarrow$ 顶点:**
提示：构造 $c = \sum_{i\in I} a_i$. I 是积极集。

1.2 线性规划标准形式的可行基解

Theorem 3.2 *考虑约束 $Ax = b$ 和 $x \geq 0$，并假设 $m \times n$ 矩阵 A 的所有行向量是线性无关的。向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 是基解当且仅当我们有 $Ax = b$，并且存在下标 $B(1), \ldots, B(m)$ 使得:*

1. *列 $A_{B(1)}, \ldots, A_{B(m)}$ 是线性无关的；*
2. *如果 $i \neq B(1), \ldots, B(m)$，那么 $x_i = 0$。*

设线性规划标准形式

$$
\text{(LP)} \qquad \begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.} & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{3.1}
$$

假设 $A = (B, N)$, 其中 B 是 m 阶可逆矩阵（不失一般性）。同时记 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B^T, \mathbf{x}_N^T)^T$, 其中 $\mathbf{x}_B$ 的分量与 B 中的列对应，$\mathbf{x}_N$ 的分量与 N 中的列对应。这样 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 即可写成

$$
(B, N)\begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \mathbf{b},
$$

即 $B\mathbf{x}_B + N\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \Longrightarrow \mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{x}_N$.

基解/基矩阵:

在上式中，$\mathbf{x}_N$ 的分量就是线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的自由变量。特别地令 $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, 则得到解

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}
$$

为方程组的一个基解，对应的 B 称为基矩阵。

$\mathbf{x}_B$ 的各分量称为基变量，$\mathbf{x}_N$ 的各分量称为非基变量。若 $B^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ 为 (LP) 的可行基解，相应的称 B 为可行基矩阵，$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{B_1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{B_m} \end{pmatrix}$ 为一组可行基变量。

作业 3.2 给出下面线性规划问题的极点和基解：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 8 \\
& x_2 \le 2 \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

1.3 可行基解的存在性和最优性

Definition 3.2 对于一个多面集 $P = \{x \mid Ax \ge b\} \subset \mathbb{R}^n$, 如果存在 $x \in P$ 和一个非零向量 $d \in \mathbb{R}^n$, 使得对任意实数 λ, 有 $x + \lambda d \in P$, 那么称 P 包含一条直线.

Theorem 3.3 (极点存在性定理) *假设 $P = \{x \mid Ax \ge b\} \subset \mathbb{R}^n$ 非空，下列 2 种情况等价：*

1. *P 中存在至少一个极点。*
2. *P 不包含直线。*

推论：对于非空有界的多面集，或者非空的标准形式多面集, 它们不包含直线，故必有可行基解。

Theorem 3.4 (可行基解最优性) *考虑线性规划问题，在多面集 $P = \{x \mid Ax \ge b\}$ 上，最小化 $c^\top x$。假设 P 中存在至少一个极点。那么，要么最优值是 $-\infty$，要么必定有某个极点是最优解。*

Theorem 3.5 (线性规划标准形式最优性结论) *考虑线性规划问题，在标准形式的多面集 $P = \{x \mid Ax = b, x \ge 0\}$ 上，最小化 $c^\top x$。那么，要么最优值是 $-\infty$，要么必定有某个极点是最优解。*

由上述定理，我们有如下**最优解的分类约定:**

可行域为空 $\Longrightarrow$ 无解

可行域有界 $\Longrightarrow$ 唯一解 或者 不唯一解

可行域无界 $\Longrightarrow$ (1) 唯一解 或者 (2) 无穷多解,P 中可能不存在极点 或者 (3) 最优值为 $-\infty$

我们把“唯一解”和“无穷多解”称为模型存在最优解，而把“无界解 $-\infty$”归入不存在最优解的情形。

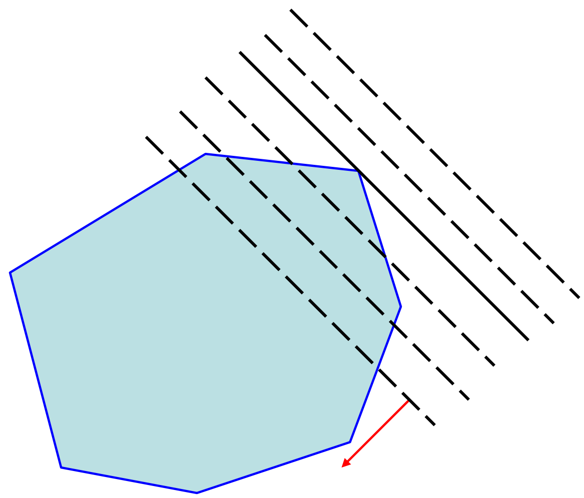


图 3.2: 线性规划的直观图解–有界区域唯一解：有界可行域，不包含直线，故存在可行基解，某个极点为最优解

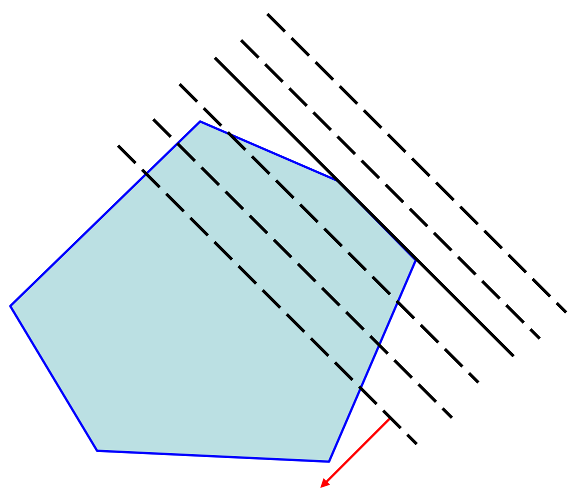
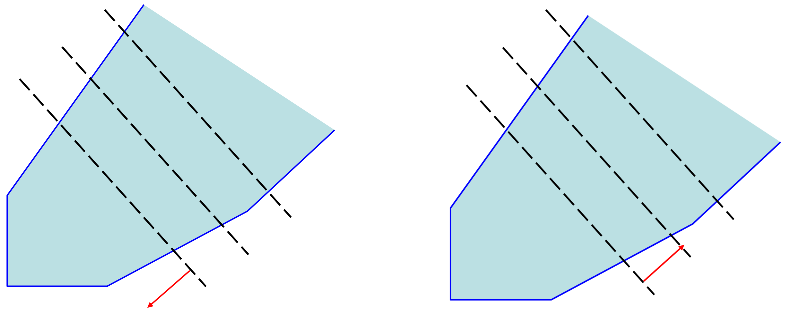


图 3.3: 线性规划的直观图解–有界区域不唯一解：有界可行域，不包含直线，故存在可行基解，某个极点为最优解，图中，最优解为边界线段上的所有点。



(a) 最优值 $-\infty$ (b) 最优解唯一

图 3.4: 无界可行域，最优解可能为 $-\infty$，也可能唯一存在。

2 总结

当线性规划标准形式存在最优解时，目标函数的最优值一定能在可行域的某个极点处达到，即 (LP) 存在最优解时，则一定存在一个可行基解是最优解。

这样，线性规划模型的求解（最优解）归结为求最优可行基解。这一思想正是单纯形方法的基本出发点。但可行基解的个数往往很多（上界为 $\frac{n!}{m!(n-m)!}$），不宜一一枚举。该采取何种策略？而这正是单纯形算法的实质.