9.27 作业

作业 1

Assignment 2: Let $X_1, \ldots, X_n \sim Exp(\theta)$, $i.i.d.$. Prove that $T(\mathbf{X}) = X_{(1)}$ is not a sufficient statistic for θ.

$$\because \quad f(x) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,+\infty)}(x) \text{ is the } p.d.f \text{ of } X_1 \sim Exp(\theta),$$

$$\therefore \quad f_{\mathbf{X},T}(\mathbf{x}, t) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i} \delta_t(x_{(1)}) \prod_{i=1}^n I_{(0,+\infty)}(x_i).$$

$$\because \quad P(T > t) = P(X_i > t, \forall i) = e^{-n\theta t}, \forall t \geq 0.$$

$$\therefore \quad f_T(t) = n\theta e^{-n\theta t} I_{(0,+\infty)}(t).$$

$$\therefore \quad f_{\mathbf{X}|T}(\mathbf{x}|t) = \frac{f_{\mathbf{X},T}(\mathbf{x}, t)}{f_T(t)} = \frac{\theta^{n-1}}{n} e^{\theta(nt - \sum_{i=1}^n x_i)} \delta_t(x_{(1)}) \prod_{i=1}^n I_{(0,+\infty)}(x_i).$$

The conditional distribution is not constant as a function of θ unless $n = 1$. Therefore we conclude that T is not a sufficient statistic. □

作业 2

Assignment 3: Let $X_1, \ldots, X_n$ $i.i.d.$ with density $f(x; \theta = (a, b)) = c(a, b)\phi(x) I_{(a,b)}(x)$, where $-\infty < a < b < +\infty$ unknown and $\int_a^b \phi(x)dx < +\infty$. Prove that $T = (X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ is a sufficient statistic for θ.

Hint: Factorization Theorem

42

2.42 解: (1) $X_1, \cdots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} P(\lambda)$, 则 $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i \sim P(n\lambda)$

$$f(\vec{x} | t) = \frac{f(\vec{x}, t)}{f_T(t)} = \frac{e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n (x_i!)^{-1} 1(x_i \in N, 1 \le i \le n)}{e^{-n\lambda} (n\lambda)^{\sum_{i=1}^n x_i} [(\sum_{i=1}^n x_i)!]^{-1}} = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)!}{n^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n (x_i!)} 1(x_i \in N, 1 \le i \le n)$$

与λ无关，由定义知 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 是充分统计量.

(2)

样本联合 p.m.f. 为

$$f(\vec{x}; \lambda) = e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n (x_i!)^{-1} 1(x_i \in N, 1 \le i \le n)$$

$$g(t, \lambda) = e^{-n\lambda} \lambda^{t(\vec{x})} \qquad h(\vec{x}) = \prod_{i=1}^n (x_i!)^{-1} 1(x_i \in N, 1 \le i \le n)$$

由因子分解定理知, $T(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n X_i$ 是λ的充分统计量. □

43

2.43 解: (1) $X_1, \cdots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} Nb(1,p)$, $P(X=x;p)=p(1-p)^{x-1}$, $x\in \mathbb{Z}_+$, $0<p<1$

则 $T=\sum_{i=1}^n X_i \sim Nb(n,p)$ (负二项分布), $P(T=t;n,p)=\binom{t-1}{n-1}p^n(1-p)^{t-n}$, $t=n,n+1,\cdots$

则 $$f(\vec{x}|t)=\frac{p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i-n}\,\mathbb{1}(x_i\in\mathbb{Z}_+,\ \forall i)\,\mathbb{1}(\sum_{i=1}^n x_i=t)}{\binom{t-1}{n-1}p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i-n}}$$

$$=\frac{1}{\binom{t-1}{n-1}}\mathbb{1}(x_i\in\mathbb{Z}_+,\ \forall i)\mathbb{1}(\sum_{i=1}^n x_i=t)$$

与 p 无关, 由定义知 T 是 p 的充分统计量.

(2) 样本联合 p.m.f.:

$$f(\vec{x};p)=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i-n}\,\mathbb{1}(x_i\in\mathbb{Z}_+,\ \forall i)$$

则 $g(t(\vec{x});p)=p^n(1-p)^{t(\vec{x})-n}$, $h(\vec{x})=\mathbb{1}(x_i\in\mathbb{Z}_+,\ \forall i)$

由因子分解定理知, $T(\vec{x})=\sum_{i=1}^n X_i$ 是 p 的充分统计量. □

46

2.46 解: 不是, 证明如下:

样本联合 p.d.f.

$$f(\vec{x};\theta)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi\theta^2})^n}e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n(x_i-\theta)^2}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi\theta^2})^n}e^{-\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2+\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i}\cdot e^{-\frac{n}{2}}$$

取 $T=(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2):=(T_1,T_2)$, 由因子分解定理可见 T 是 θ 的充分统计量

又 $\forall$ 两样本点 $\vec{x},\vec{y}$

$$\frac{f(\vec{x};\theta)}{f(\vec{y};\theta)}=e^{-\frac{1}{2\theta^2}(T_2(\vec{x})-T_2(\vec{y}))}e^{\frac{1}{\theta}(T_1(\vec{x})-T_1(\vec{y}))}\equiv const \ (与\theta无关)$$

当且仅当 $T(\vec{x})=T(\vec{y})$

故 $T(\vec{x})$ 是 θ 的极小充分统计量

若 $\bar{X}$ 是充分统计量, 因 $\bar{X}=\frac{1}{n}T_1$, 则 $\bar{X}$ 极小充分

但不存在 $\bar{X}$ 到 T 的 1-1 映射, 矛盾.

故 $\bar{X}$ 不是充分统计量.

□

10.8 作业

5

Assignment:. X_1, X_2 独立同分布于 $N(0, \sigma^2)$, 用 Basu 定理证明统计量 $\frac{X_1}{X_2}$ 和 $\sqrt{X_1^2+X_2^2}$ 独立。

令 $Y_i = X_i/\sigma$, 则 Y_1, Y_2 同分布于 $N(0,1)$.$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}$，其分布与 σ^2 无关，故 $\frac{X_1}{X_2}$ 是辅助统计量。

(X_1, X_2) 的联合 p.d.f. 为

$$f(x_1, x_2|\sigma^2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\sqrt{x_1^2+x_2^2})^2\}$$

它是指数族，且由因子分解定理知 $\sqrt{X_1^2+X_2^2}$ 是充分统计量。令 $\eta = -\frac{1}{2\sigma^2}$, 则自然参数空间 $\Theta^* = (-\infty, 0)$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子集有内点，故 $X_1^2+X_2^2$ 是完全统计量，从而 $\sqrt{X_1^2+X_2^2}$ 也是完全统计量。

由 Basu 定理，$\sqrt{X_1^2+X_2^2}$ 和 $\frac{X_1}{X_2}$ 独立。 □

48

[Wei] 2.48.

$$f(\mathbf{x};\theta) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n |x_i|}{\theta}\right\}.$$

令 $\eta := -\frac{1}{\theta} \in \Theta^*$, 自然参数空间 $\Theta^* = \mathbf{R}_-$ 在 $\mathbf{R}$ 中有内点. 由因子分解定理及定理 2.8.1 知 $T = \sum_{i=1}^n |X_i|$ 是充分完全统计量. □

49

[Wei] 2.49.

$$f(\mathbf{x};\theta) = \exp\left\{n\theta - \sum_{i=1}^n x_i\right\} I_{(\theta,+\infty)}(x_{(1)}).$$

由因子分解定理, $T = X_{(1)}$ 是充分统计量.

$$\because \quad f_T(t) = ne^{-n(t-\theta)} I_{(\theta,+\infty)}(t)$$

$$\therefore \quad E_\theta(\phi(T)) = \int_\theta^{+\infty} \phi(t) ne^{-n(t-\theta)} dt,$$

$$\therefore \quad \int_\theta^{+\infty} \phi(t) e^{-nt} dt = 0$$

对上式关于 θ 求导，得 $\phi(\theta)e^{-n\theta} = 0$, 故 $\phi \overset{a.s.}{=} 0$. 由定义知 T 是完全统计量. □

51

[Wei] 2.51.

$$f(\mathbf{x};\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n I\left(\theta < x_{(1)} \le x_{(n)} < 2\theta\right).$$

由因子分解定理知 $T = (X_{(1)}, X_{(n)})$ 是充分统计量.。由于 $Y_i := \frac{X_i}{\theta} \overset{i.i.d.}{\sim} U(1,2)$, 故 $\frac{X_{(n)}}{X_{(1)}} = \frac{Y_{(n)}}{Y_{(1)}}$ 是辅助统计量. 故 T 不是完全统计量. □

[Wei] 2.54. Hint:

From the **factorization** and that the **natural parameter space** is

$$\left\{\left(\frac{na}{\sigma_1^2}, \frac{nb}{\sigma_2^2}, -\frac{1}{2\sigma_1^2}, -\frac{1}{2\sigma_2^2}\right)\right\} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-^2$$

(which has inner point in $\mathbb{R}^4$), $T(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ is **sufficient complete** for $(a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2)$. Rescaling $\tilde{X}_i = \frac{X_i - a}{\sigma_1} \sim N(0,1)$, $\tilde{Y}_i = \frac{Y_i - b}{\sigma_2} \sim N(0,1)$ to find that r is **auxiliary**. Derive independence from **Basu** theorem.