中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

问题1.

(1) Lagrange 函数 $L(x,\mu) = \frac{1}{2}\|x-c\|^2 - \mu\cdot(a^Tx-b)$

KKT 条件: $\begin{cases} \nabla_x L(x,\mu) = x-c-\mu a = 0 \\ a^Tx = b \end{cases}$

解得 KKT 点: $x = c + \frac{b-a^Tc}{a^Ta}\cdot a$

验证 slater 条件成立: ① 目标函数凸; ② 等式约束仿射; ③ 不等式约束凸且存在可行点 x, s.t. 不等式约束严格成立

得最优解 $x = c + \frac{b-a^Tc}{a^Ta}\cdot a$.

(2) Lagrange 函数 $L(x,\lambda) = \frac{1}{2}\|x-c\|^2 - \lambda(b-a^Tx)$

KKT 条件: $\begin{cases} \nabla_x L(x,\lambda) = x-c+\lambda a = 0 \\ a^Tx \le b \\ \lambda \ge 0 \\ \lambda\cdot(a^Tx-b) = 0 \end{cases}$

解得 KKT 点: ① $a^Tc \le b$ 时, $x = c$

② $a^Tc > b$ 时, $x = c + \frac{b-a^Tc}{a^Ta}\cdot a$

同 (1) 验证 slater 条件成立

得最优解 $x = \begin{cases} c & \text{if } a^Tc \le b \\ c + \frac{b-a^Tc}{a^Ta}\cdot a & \text{else} \end{cases}$

问题2.

(1) 标准形式:
$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 - x_2 \\ \text{s.t. } & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ & x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

初始可行基解: $x = (0,0,2,6)^T$

(2) 单纯形表

	x_1	x_2	x_3	x_4
0	-2	-1	0	0
$x_3=2$	1	-1	1	0
$x_4=6$	1	1	0	1

① x_1 入基，x_3 出基.

	x_1	x_2	x_3	x_4
4	0	-3	2	0
$x_1=2$	1	-1	1	0
$x_4=4$	0	2	-1	1

② x_2 入基，x_4 出基.

	x_1	x_2	x_3	x_4
10	0	0	0.5	1.5
$x_1=4$	1	0	0.5	0.5
$x_2=2$	0	1	-0.5	0.5

∴ 最优解 $x=(4,2,0,0)^T$，最优值 -10.

(3) 标准形式的对偶问题为：
$$\max \ b^T\lambda \quad \text{s.t.} \ A^T\lambda \le c$$

代入有：
$$\max \ 2\lambda_1+6\lambda_2$$
$$\text{s.t.} \quad \lambda_1+\lambda_2 \le -2$$
$$-\lambda_1+\lambda_2 \le -1$$
$$\lambda_1,\lambda_2 \le 0$$

由互补松弛定理：$b^T\lambda = c^T x$ & $\lambda_i(a_i^T x - b_i)=0$

∴ 最优解为 $\cancel{-10,\ \lambda=(-2,-1)}$

$\lambda=(-0.5,-1.5)$，最优值 -10.

中国科学技术大学
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA
地址:中国安徽省合肥市 电话:0551-63602184 传真:0551-63631760 网址:http://www.ustc.edu.cn

问题3.

(1) 记图 $G=(V,E)$，始点 $s=A$，终点 $t=E$

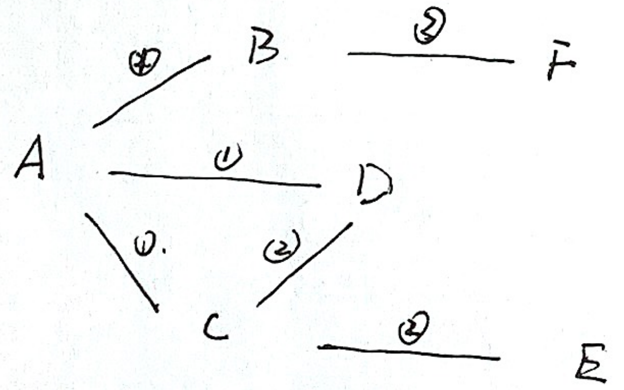
∴ 线性规划问题： $\min \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{(s,j)\in E} x_{sj} = 1$$
$$\sum_{(k,j)\in E} x_{kj} - \sum_{(i,k)\in E} x_{ik} = 0 \quad \forall k\in V\setminus\{s,t\}$$
$$\sum_{(i,t)\in E} x_{it} = 1$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j)\in E.$$

(2) Dijkstra 算法

	A	B	C	D	E	F
A.		4	$\boxed{2}$	5	∞	∞
C		$\boxed{4}$		4	7	∞
B				$\boxed{4}$	7	5
D					7	$\boxed{5}$
F					$\boxed{7}$	

i.e.



①、②、③ 表示在第1, 2, 3次更新时产生的边

∴ A-E 的最短路为 $A \to C \to E$.