线性代数 (B1)

童伟华　管理科研楼 1205 室 [1]
E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

[1] 数学科学学院　中国科学技术大学

2021-2022 学年第二学期　MATH1009.08

§4.1 数组空间及其子空间

点、直线、平面、空间 $\Rightarrow$ 一般的 n 维线性空间！

平面上的二维向量可通过 (x, y) 表示，空间中的三维向量可通过 (x, y, z) 表示，那么一般的 n 维线性空间中的向量是否可以通过 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 来表示？

n 维线性空间的典型代表：n 维数组空间

§4.1 数组空间及其子空间

数域 F 上的一个有序的 n 元数组 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 称为 n **维数组向量**。对向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 及 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 定义加法与数乘运算:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$
$$\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

定义 4.1

设 F 是数域。定义了加法与数乘运算的 n 维数组向量的全体

$$\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in F\}$$

称为 n **维数组空间**，记为 F^n。

F^n + 加法 + 数乘 + 八条运算规律 $\Rightarrow$ 构成数域 F 上的n 维线性空间!

§4.1 数组空间及其子空间

行向量：n 维数组写成行的形式，如 $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$

列向量：n 维数组写成列的形式，如 $\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$

定义 4.2

给定一组向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\in F^n$ 及一组数 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in F$，称和式 $\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{a}_n$ 为向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ 的**线性组合**，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 称为**组合系数**。如果向量 $\mathbf{a}$ 可以写成 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ 的线性组合，则称 $\mathbf{a}$ 可以被 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ **线性表示**。

§4.2 数组空间及其子空间

共线、共面（不共线、不共面）概念 $\Rightarrow$ 如何在一般的n维线性空间进行推广?

定义 4.3

设 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \in F^n$，若存在不全为零的常数$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$使得

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0},$$

则称 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ **线性相关**；否则，称 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ **线性无关**。

§4.2 数组空间及其子空间

线性相关的解释：如果其中某个向量能被其它向量线性表示，即存在 $\mathbf{a}_i$ 及 $\lambda_j \in F\ (j \neq i)$ 使得 $\mathbf{a}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{a}_j$。特别地，一个非零向量 $\mathbf{a}_1$ 是线性无关的。

例 4.1

含有零向量的任何向量组一定线性相关。特别地，仅有一个零向量的向量组是线性相关的。

§4.2 数组空间及其子空间

定理 4.1

设向量组 $S_1 = \{\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}\}$ 是向量组 $S = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ 的一个子集。那么，如果 S_1 线性相关，则 S 也线性相关；如果 S 线性无关，则 S_1 也线性无关。

$\Rightarrow$ 如果 S_1 中有多余的向量，那么 S 中必有多余的向量。

§4.2 数组空间及其子空间

定理 4.2

设 $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in F^n$, $i = 1, \ldots, m$，用 A 表示以 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 为行构成的 $m \times n$ 阶矩阵，则 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 关于 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 的齐次线性方程组 $A^T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A) < m$。

推论 4.1

设 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m \in F^n$ 是一组数组向量，则

(1) 若 $m > n$，则 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 必然线性相关；
(2) 若 $m = n$，则 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow \det(A) = 0$；
(3) 若 $m < n$，则 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 矩阵 A 的所有 m 阶子式为零。

§4.2 数组空间及其子空间

定理 4.3

设 $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ir}) \in F^r$，$i = 1, 2, \ldots, m$，它们的加长向量组为 $\mathbf{b}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ir}, \ldots, a_{in}) \in F^n$ $(n > r)$，$i = 1, 2, \ldots, m$，则有

(1) 若 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性无关，则 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ 也线性无关；

(2) 若 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ 线性相关，则 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 也线性相关。

§4.3 极大无关组与秩

给定一个线性方程组，如何确定它的独立方程的个数?

独立：该方程不能由其它方程通过线性组合得到

$\Rightarrow$ 所有独立的方程构成极大无关组，个数为方程组的秩!

定义 4.4

设 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in F^n$，若 $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 线性无关，且任加一个其它向量 $\mathbf{a}_{i_{r+1}}$ 后 $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}, \mathbf{a}_{i_{r+1}}$ 线性相关，则称 $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 为 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 的*极大无关组*。

§4.3 极大无关组与秩

定理 4.4

设 S 是某一向量空间中的向量组，$M = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ 是 S 的线性无关子集，则 M 是 S 的极大线性无关组 $\Leftrightarrow$ S 中所有的向量都是 M 中元素的线性组合。

S 可以是有限集，也可以是无限集。

§4.3 极大无关组与秩

定理 4.5

设 $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m\in F^n$ 为一组列向量，$A=(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m)$ 是以 $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m$ 为列构成的 $n\times m$ 阶矩阵。若 A 经一系列的初等行变换变为矩阵 $B=(\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_m)$，则

(1) $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m$ 线性相关（无关）$\Leftrightarrow$ $\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_m$ 线性相关（无关）；

(2) $\mathbf{a}_{i_1},\cdots,\mathbf{a}_{i_r}$ 为 $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_m$ 的极大无关组 $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b}_{i_1},\ldots,\mathbf{b}_{i_r}$ 为 $\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_m$ 的极大无关组。

$\Rightarrow$ 算法：通过初等行变换，将 A 化为阶梯形矩阵 B，便很容易找出极大无关组。

§4.3 极大无关组与秩

向量组与其极大线性无关组之间的关系?

向量组 $\supset$ 极大线性无关组;

向量组的任一向量都可以由极大线性无关组线性表示。

定义 4.5

如果向量组 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 中的每一个向量都可以用向量组 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$ 线性表示，则称向量组 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 可以由向量组 $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_l$ 线性表示。如果两个向量组 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 与 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$ 可以相互线性表示，则称 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 与 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$ 等价，记为 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \sim \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l\}$。

不难验证：向量组等价是等价关系！（自反性、对称性、传递性）

§4.3 极大无关组与秩

定理 4.6

一组向量组与它的任何一组极大无关组等价。

推论 4.2

向量组的任何两个极大无关组彼此等价。

$\Rightarrow$ 向量组的极大无关组不唯一，彼此之间相互等价，但是所含向量的个数是否相等呢?

§4.3 极大无关组与秩

定理 4.7

两个线性无关向量组 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ 和 $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s\}$ 等价，则 $r = s$。

推论 4.3

设 $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 和 $\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_s}$ 分别为 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 的两个极大无关组，则 $r = s$。

$\Rightarrow$ 向量组的极大无关组元素的个数是等价关系下的不变量！

定义 4.6

向量组 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 的极大无关组元素的个数称为向量组的秩，记为 $\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$，或 $r(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$。

§4.3 极大无关组与秩

定理 4.8

设向量 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in F^n$，则有

(1) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) = m$；

(2) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) < m$；

(3) $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s\}$ 可以用 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ 线性表示 $\Rightarrow$ $\operatorname{rank}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s) \le \operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r)$；

(4) $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s\}$ 与 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ 等价 $\Rightarrow$ $\operatorname{rank}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s) = \operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r)$；

(5) $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s\}$ 可以用 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ 线性表示，且 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$ 线性无关 $\Rightarrow s \le r$；

(6) 向量 $\mathbf{b}$ 可以表示成 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 的线性组合 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) = \operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b})$。

性质 (6) $\Rightarrow$ 线性方程组有解的充分必要条件！

§4.3 极大无关组与秩

向量组的秩与矩阵的秩之间有什么关系?

$$
\begin{array}{cc}
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \mathbf{a}_1 \\ \leftarrow \mathbf{a}_2 \\ \quad \vdots \\ \leftarrow \mathbf{a}_m \end{array} \\
\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{array} &
\end{array}
$$

矩阵的行秩 — $\mathrm{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m)$

矩阵的列秩 — $\mathrm{rank}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$

矩阵的秩 — $\mathrm{rank}(A)$

定理 4.9

任何矩阵的行秩 = 矩阵的列秩 = 矩阵的秩。

例 4.2

设 $A \in F^{m\times n}$，$B \in F^{n\times l}$。证明:

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - n \le \operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)).$$

§4.4 子空间、基与维数

三维空间中的子集：直线、平面，自身也构成线性空间！

定义 4.7

设 $V \subset F^n$ 为非空向量集合，它满足

(1) $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \;\Rightarrow\; \mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$;

(2) $\forall \mathbf{a} \in V, \lambda \in F \;\Rightarrow\; \lambda \mathbf{a} \in V$,

则称 V 为 F^n 的*子空间*。

$\Rightarrow$ 对任意 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in V, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in F$，都有 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i \in V$ 成立

$\Rightarrow$ 集合 V 对线性运算（加法与数乘）运算封闭！

F^n 的平凡子空间：F^n, $\{\mathbf{0}\}$。

§4.4 子空间、基与维数

定义 4.8

设 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in F^n$ 是一组向量，称集合

$$\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i \mid \lambda_i \in F, i = 1, \ldots, m \right\}$$

为向量组 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ **生成的子空间**，$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 称为生成子空间的**生成元**。

给定一个矩阵 $A \in F^{m \times n}$，由 A 的行向量生成的子空间称为**行空间**；由 A 的列向量生成的子空间称为**列空间**。

容易验证：生成子空间 $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle$ 是 F^n 的子空间！

§4.4 子空间、基与维数

定理 4.10

设 $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j, \mathbf{b} \in F^n$，则下列结论成立：

(1) 向量 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l \in \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l \rangle \subset \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle$；

(2) 向量组 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 与 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$ 等价 $\Leftrightarrow$ $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle = \langle \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l \rangle$；

(3) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 存在 i 使得 $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle$；

(4) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 对任意 i 都有 $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle \neq \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle$;

(5) $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 是 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ 的极大无关组 $\Leftrightarrow$ $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \rangle = \langle \mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r} \rangle$ 且 $\mathbf{a}_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ 线性无关；

F^n 的生成子空间是子空间，问题：除生成子空间外，F^n 是否存在其它子空间?

定理 4.11

设 V 是 F^n 的子空间，则存在线性无关的向量组 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ 使得 $V = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle$。

$\Rightarrow$ F^n 的子空间必为生成子空间!

§4.4 子空间、基与维数

设 $V \subset F^n$ 的子空间，则 $\forall \mathbf{a} \in V = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r \rangle \Rightarrow \mathbf{a}$ 都可以表示成 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ 的线性组合。

定义 4.9

设 $V \subset F^n$ 是子空间，V 中一组向量 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ 称为 V 的一组**基**，如果它满足

(1) 对任意向量 $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{a}$ 可唯一表示成 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ 的线性组合 $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_r\mathbf{a}_r$;

(2) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ 线性无关，

则称 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ 为向量 $\mathbf{a}$ 在基 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\}$ 下的**坐标**。

§4.4 子空间、基与维数

基：子空间的极大线性无关组（不唯一！）

维数：基的秩，子空间的维数（唯一！）

定义 4.10

设 $V \subset F^n$ 为子空间，称 V 的一组基的向量个数为 V 的**维数**，记为 $\dim V = \operatorname{rank}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r)$。

§4.4 子空间、基与维数

定理 4.12

在 F^n 空间下列结论成立：

(1) 设 $V \subset F^n$ 为 r 维子空间 $\Rightarrow V$ 中任意 $r+1$ 个向量线性相关；

(2) 设 $V \subset F^n$ 为 r 维子空间 $\Rightarrow V$ 中任意 r 个线性无关向量为 V 的一组基；

(3) 设 U 与 V 为 F^n 的子空间，且 $U \subseteq V \Rightarrow \dim U \leq \dim V$；

(4) 设 U 与 V 为 F^n 的子空间，且 $U \subseteq V$，$\dim U = \dim V$ $\Leftrightarrow U = V$。

§4.4 子空间、基与维数

定理 4.13

设 $V \subset F^n$ 为 r 维子空间，$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s \in V$ 是 s $(s < r)$ 个线性无关的向量，则存在 V 中的向量 $\mathbf{a}_{s+1}, \ldots, \mathbf{a}_r$ 使得 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ 构成 V 的一组基。

$\Rightarrow$ 称 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ 为线性无关组 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ 的一组*扩充基*

§4.4 子空间、基与维数

坐标变换：子空间的基不唯一，同一向量在不同基下坐标之间的关系如何?

设线性空间 V 有两组基：$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r\}$，$\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r\}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_r \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{r1} & \cdots & t_{rr} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{array} \end{array}$$

记 $T = (t_{ij})_{r \times r}$，称矩阵 T 为从基 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ 到基 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r$ 的**过渡矩阵**。

含义：T 的第 j 列是向量 $\mathbf{b}_j$ 在基 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ 下的坐标

§4.4 子空间、基与维数

$$\forall\ \mathbf{v} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_r\mathbf{a}_r = y_1\mathbf{b}_1 + \cdots + y_r\mathbf{b}_r$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_r \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$$ （坐标变换公式）

§4.5.1 线性方程组解的存在与唯一性

利用线性空间的语言来描述线性方程组解的存在性、唯一性条件以及确定线性方程组解集的几何结构。

定理 4.14

设 $A \in F^{m\times n}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$\mathbf{b} \in F^m$ 为 m 维列向量，则线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A,\mathbf{b})$。线性方程组有唯一解 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A,\mathbf{b})=n$。

推论 4.4

齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 一定有解。齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)<n$。特别地，若 A 为 n 阶方阵，齐次线性方程组有非零解 $\Leftrightarrow \det(A)=0$。

§4.5.2 齐次线性方程组解集的结构

记齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解集的全体

$$V := \{\mathbf{x}\in F^n \mid A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$$

定理 4.15

齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解集 V 是 F^n 的子空间，并且 $\dim V = n-\operatorname{rank}(A)$。

定义 4.11

齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解集 V 称为*解空间*，解空间的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$ 称为齐次线性方程组的一个*基础解系*。

齐次线性方程组的通解为：$\mathbf{x}=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+\ldots+t_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$

§4.5.2 齐次线性方程组解集的结构

例 4.3

设 A 是 n 阶奇异方阵，且 A 的 (i,j) 元素的代数余子式 $A_{ij} \neq 0$。证明：$\boldsymbol{\alpha} = (A_{i1}, \ldots, A_{in})^T$ 是齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系。

例 4.4

求下列齐次线性方程组的一组基础解系，并求它的通解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 19x_4 + 8x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 24x_4 + 9x_5 = 0 \end{cases}$$

例 4.5

设 $A \in F^{n\times n}$ 且满足

$$|a_{ii}| > \sum_{1\leqslant j\neq i\leqslant n} |a_{ij}|,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

证明：齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解。

§4.5.3 非齐次线性方程组解集的结构

例 4.6

设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 = A$。证明:

$$\text{rank}(A) + \text{rank}(I - A) = n。$$

例 4.7

设 A 是任意矩阵，证明: $\text{rank}(A^{\mathrm{T}}A) = \text{rank}(AA^{\mathrm{T}}) = \text{rank}(A)$。

§4.5.3 非齐次线性方程组解集的结构

$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases} A\mathbf{y}=\mathbf{0} \\ A\mathbf{x}_0=\mathbf{b} \end{cases} \Rightarrow A(\mathbf{y}+\mathbf{x}_0)=\mathbf{b}$，即齐次线性方程组任意一个解 $\mathbf{y}$ + 非齐次线性方程组的特解 $\mathbf{x}_0 \Rightarrow$ 非齐次线性方程组的一个解；

反之，$\begin{cases} A\mathbf{x}=\mathbf{b} \\ A\mathbf{x}_0=\mathbf{b} \end{cases} \Rightarrow A(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{x}_0$, 即非齐次线性方程组任意一个解 $\mathbf{x}$ 一定可以分解为齐次线性方程组任意一个解 $\mathbf{y}$ + 非齐次线性方程组的特解 $\mathbf{x}_0$。

§4.5.3 非齐次线性方程组解集的结构

记非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \boldsymbol{b}$ 的解集的全体

$$W := \{\mathbf{x} \in F^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$$

容易验证，W 具有性质

(1) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in W \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} \in V$;

(2) $\boldsymbol{\alpha} \in W, \ \boldsymbol{\gamma} \in V \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\gamma} \in W$。

定理 4.16

设 $V = \{\mathbf{x} \in F^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}, W = \{\mathbf{x} \in F^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$，则有

$$W = \mathbf{x}_0 + V := \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in V\},$$

其中 $\mathbf{x}_0$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个特解。

非齐次线性方程组的通解为：$\mathbf{x} = t_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \ldots + t_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r} + \mathbf{x}_0$

§4.5.3 非齐次线性方程组解集的结构

例 4.8

求非齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \\ 2 & 4 & -3 & -19 \\ 3 & 6 & -3 & -24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

的通解。

§4.6.1 一般线性空间的定义

n 维数组空间 F^n $\Rightarrow$ 一般的集合 + 加法 + 数乘 + 八条运算规律

例 4.9

用 $\mathbb{P}_n[x]$ 表示数域 F 上次数不超过 n 的多项式全体

$$\mathbb{P}_n[x] := \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, a_1, \cdots, a_n \in F\}.$$

定义多项式的加法与数乘:

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n;$$

$$\lambda(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \cdots + \lambda a_nx^n.$$

容易验证：集合 $\mathbb{P}_n[x]$ 上的加法与数乘运算满足八条运算规律!

$\Rightarrow$ 多项式的线性相关（无关），极大无关组，秩，基等概念

§4.6.1 一般线性空间的定义

例 4.10

对所有 $m \times n$ 阶矩阵的全体 $F^{m\times n}$，按照矩阵的加法与数乘，也可以定义一组矩阵的线性相关（无关）、极大无关组、秩、基等。例如，矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

线性无关，且构成 $F^{2\times 2}$ 的一组基。

§4.6.1 一般线性空间的定义

定义 4.12

设 V 是一个非空集合，F 是一个数域。对 V 中的元素定义两种运算

(1) **加法**：对 V 中的任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 组成的有序对 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，存在 V 中唯一的一个元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与之对应，简记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$；

(2) **数乘**：对任意常数 $\lambda\in F$ 及向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，存在 V 中唯一的一个元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与之对应，简记为 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\gamma}$。

加法与数乘运算满足下列运算规律

(A1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$ 对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 成立；

(A2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$ 对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$ 成立；

(A3) 存在元素 $\boldsymbol{\theta}\in V$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 成立。$\boldsymbol{\theta}$ 称为零元素。在不致混淆的情况下，一般线性空间中的零元素也常简记为 $\mathbf{0}$；

(A4) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，存在 $\boldsymbol{\beta}\in V$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$。$\boldsymbol{\beta}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素，简记为 $-\boldsymbol{\alpha}$，并且定义 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}a=\boldsymbol{\beta}+(-\boldsymbol{\alpha})$；

(D1) $\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$ 对任意 $\lambda\in F$ 及 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$ 成立；

(D2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}+\mu\boldsymbol{\alpha}$ 对任意 $\lambda,\mu\in F$ 及 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 成立；

(M1) $\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$ 对任意 $\lambda,\mu\in F$ 及 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 成立；

(M2) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$ 对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 成立，

则称 V 是数域 F 上的**线性空间**，简记为 $V(F)$ 或 V。线性空间 V 中的元素称为**向量**。

§4.6.1 一般线性空间的定义

映射的观点

$$+: V \times V \mapsto V, \quad \cdot : F \times V \mapsto V$$

问题：一般的线性空间为什么需要这八条运算规律?

例 4.11

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为线性空间 V 中的向量，若存在不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$，则存在 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(1 \le i \le m)$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\boldsymbol{\alpha}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\boldsymbol{\alpha}_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda_i}\boldsymbol{\alpha}_m.$$

思考：八条运算规律是否独立?

§4.6.1 一般线性空间的定义

基本性质

(1) 零向量唯一；

(2) 负向量唯一；

(3) $0\boldsymbol{\alpha} = \theta$; $(-1)\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$; $\lambda\theta = \theta$;

(4) $\lambda\boldsymbol{\alpha} = \theta \Leftrightarrow \lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{\alpha} = \theta$。

§4.6.1 一般线性空间的定义

例 4.12

下面是一些线性空间的例子，其中 F 为数域。

(1) 数组空间 F^n 按数组向量的加法与数乘构成线性空间;

(2) $m\times n$ 阶矩阵全体 $F^{m\times n}$ 按矩阵的加法与数乘构成线性空间;

(3) $F=\mathbf{R}$，所有复数全体 $\mathbf{C}$ 按复数的加法、实数与复数的乘法为数乘构成线性空间;

(4) 所有次数不超过 n 的多项式全体 $\mathbb{P}_n[x]$ 按多项式的加法，及数与多项式的乘法为数乘构成线性空间;

(5) 用 C_n 表示如下三角多项式全体

$$C_n=\{a_0+a_1\cos\theta+b_1\sin\theta+\cdots+a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\,|\,a_i,b_i\in F\},$$

则在函数通常的加法、数与函数的乘法下构成线性空间。

(6) 用 $C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上连续函数的全体，则 $C[a,b]$ 在函数通常的加法，及数与函数乘法运算下构成线性空间。

§4.6.2 一般线性空间的理论

数组空间中 F^n 的线性组合、线性相关、线性无关、极大无关组与秩、子空间、基、维数等概念、性质与定理 $\Rightarrow$ 是否可以推广到一般的线性空间？答案是肯定的！

定义 4.13

设 V 是数域 F 上的线性空间，S 是 V 中一组线性无关向量。如果 V 中任何向量都能表示成 S 的线性组合，则称 S 为 V 的一组**基**。若 S 是有限的，则称 V 为**有限维线性空间**，S 中元素的个数称为线性空间 V 的**维数**，记为 $\dim V$。若 S 是无限的，则称 V 为**无限维线性空间**，其维数为无穷大。设基 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是有限的，则任意向量 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 可以唯一地表示成 S 的线性组合

$$\boldsymbol{\alpha} = \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n,$$

称 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 S 下的**坐标**。

例 4.13

设 C_n 是由三角多项式构成的线性空间，求向量组

$$S=\{1,\sin x,\cos x,\sin^2 x,\cos^2 x,\sin 2x,\cos 2x\}$$

的一个极大无关组。

例 4.14

设 F 是数域，集合

$$V:=\{a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x \mid a_0,a_1,a_2,a_3\in F\},$$

容易验证 V 在函数的加法、数与函数的乘法为数乘下构成线性空间。证明向量组 $S_1=\{1,\cos x,\cos 2x,\cos 3x\}$ 及 $S_2=\{1,\cos x,\cos^2 x,\cos^3 x\}$ 分别构成 V 的基，并给出基变换公式。

§4.6.3 线性空间的同构

一般的线性空间与数组空间 F^n 有完全类似的结构与性质，例如 $\mathbb{P}_n[x] := \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in F\}$，若取 $\mathbb{P}_n[x]$ 的一组基 $\{1, x, \ldots, x^n\}$，则对任意的多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，$p(x)$ 可以用 $(a_0, a_1, \ldots a_n) \in F^{n+1}$ 来表示。

设 V 为 n 维线性空间，若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一组基，则 $\forall \boldsymbol{x} \in V$，$\boldsymbol{x}$ 可唯一的表示为:

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n,$$

从而 V 与 $F^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in F\}$ 建立了以一一映射 $\sigma : V \mapsto F^n$, $\sigma(\boldsymbol{x}) = (x_1, \ldots, x_n)$.

容易验证：映射 σ 是空间 V 到 F^n 的线性映射，即

(1) $\sigma(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sigma(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V,$

(2) $\sigma(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \sigma(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V, \lambda \in F.$

§4.6.3 线性空间的同构

定义 4.14

设 V_1, V_2 是数域 F 上两个线性空间，如果存在一一映射 $\sigma: V_1 \to V_2$ 满足

(1) $\sigma(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \sigma(\boldsymbol{x}) + \sigma(\boldsymbol{y}), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_1$;

(2) $\sigma(\lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\sigma(\boldsymbol{x}), \quad \forall \lambda \in F, \boldsymbol{x} \in V_1$,

则称线性空间 V_1 与 V_2 **同构**，记为 $V_1 \sim V_2$，σ 称为**同构映射**。当 $V_1 = V_2$ 时，称 σ 为**自同构**。

§4.6.3 线性空间的同构

定理 4.17

设 V_1, V_2, V_3 是数域 F 上的线性空间，则有

(1) 若 $\dim V_1 = n \Rightarrow V_1$ 与 n 维数组空间 F^n 同构；

(2) 设 σ 是 $V_1 \to V_2$ 的同构映射 $\Rightarrow \sigma^{-1}$ 是 $V_2 \to V_1$ 的同构映射；

(3) 若 $V_1 \sim V_2$，$V_2 \sim V_3$ 同构 $\Rightarrow V_1 \sim V_3$ 同构。

容易验证：同构是等价关系。

§4.6.3 线性空间的同构

定理 4.18

设 V_1, V_2 是数域 F 上的线性空间，$\sigma: V_1 \to V_2$ 是同构映射，则

(1) $\sigma(\mathbf{0}_1) = \mathbf{0}_2$，这里 $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2$ 分别是 V_1, V_2 的零元素；

(2) $\sigma(-\boldsymbol{\alpha}) = -\sigma(\boldsymbol{\alpha})$；

(3) $\sigma(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)$；

(4) V_1 中向量组 S 线性无关（相关）$\Leftrightarrow \sigma(S)$ 在 V_2 中线性无关（相关）；

(5) M 是 V_1 的基 $\Leftrightarrow \sigma(M)$ 是 V_2 的基；

(6) $\dim V_1 = \dim V_2$。

同构映射保持线性关系不变，譬如向量组之间的线性相关（无关）性保持不变，极大无关组、秩、基、维数等均保持不变！

§4.6.3 线性空间的同构

在数域 F 上，线性空间同构 $\Rightarrow$ 维数相等，反之是否成立?

定理 4.19

数域 F 上的线性空间 V_1 与 V_2 同构 $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$。

$\Rightarrow$ 维数是同构等价关系下的全系不变量!

例 4.15

给定三阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

令 V 是与 A 乘法可交换的三阶实方阵的全体。证明 V 在矩阵加法与数乘下构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，并求 V 的一组基与维数。

§4.7 应用：差分方程

在科学与工程领域中，譬如数字信号处理、经济学、人口统计学、物理学等，经常会遇到如下形式的差分方程。

定义 4.15

设给定常数 $c_0, c_1, \cdots, c_n$ 及数列 $\{b_k\}$，其中 $c_n \neq 0$。方程

$$c_n x_{n+k} + c_{n-1} x_{n-1+k} + \cdots + c_0 x_k = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

称为一个*n 阶线性差分方程*或*线性递归关系*。若 $b_k \equiv 0$，则称方程是*齐次的*；否则称方程是*非齐次的*。

差分方程被广泛应用于需要在离散时间测量或采样过程的建模以及求解微分方程的差分方法中。

$\Rightarrow$ 从线性代数的观点出发，给出线性差分方程的求解方法。

§4.7.1 离散信号空间

在实际问题中，受限于数据采集设备或计算设备，人们处理的数据往往离散的。为此，引入

定义 4.16

设 F 是一个数域，F 上的集合

$$\mathbb{S}(F) \triangleq \{(x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots) \,|\, x_k \in F,\ k = 0, 1, 2, \ldots\},$$

称为数域 F 上的**离散信号空间**，记 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots)$，$[\mathbf{x}]_k = x_k$。在集合 $\mathbb{S}(F)$ 上引入加法与数乘运算：

(1) **加法**：$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k, \ldots)$, $\quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}(F)$;

(2) **数乘**：$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_k, \ldots)$, $\quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}(F), \lambda \in F$。

容易验证：上述加法与数乘运算满足线性空间所要求的八条运算规律 $\Rightarrow$ $\mathbb{S}(F)$ 构成数域 F 上的一个线性空间。

§4.7.1 离散信号空间

零向量 $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$

负向量 $-\mathbf{x} = (-x_0, -x_1, \ldots, -x_k, \ldots)$

$\mathbb{S}(F)$ 是无穷维线性空间，有一组自然基:

$$\{\mathbf{e}_k = (0, 0, \ldots, 0, \overset{\overset{k}{\downarrow}}{1}, 0, \ldots)\}_{k=0}^{+\infty}$$

对于任意的函数 $f(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, 通过离散时间采样, 譬如取 $t_k = t_0 + hk$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, 数列 $\{f_k = f(t_k)\}_{k=1}^{+\infty}$ 构成的向量 $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \ldots, f_k, \ldots) \in \mathbb{S}(F)$

$\Rightarrow$ 在线性空间 $\mathbb{S}(F)$ 中研究关于向量 $\mathbf{f}$ 的差分方程

§4.7.2 差分算子与差分方程

定义 4.17

设映射 $E:\mathbb{S}(F)\to\mathbb{S}(F)$ 为

$$E(\mathbf{x})=(x_1,x_2,\ldots,x_{k+1},\ldots),\quad \forall\mathbf{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_k,\ldots),$$

即 $[E(\mathbf{x})]_k=x_{k+1}$，则称 E 为**移位算子**。

定义 4.18

设映射 $L:\mathbb{S}(F)\to\mathbb{S}(F)$ 为

$$L=\sum_{i=0}^{n}a_i\Delta^i=\sum_{i=0}^{n}a_i(E-I)^i=\sum_{i=0}^{n}c_iE^i,\quad E^0=I,$$

其中 $c_i\in F\,(i=0,1,2,\ldots,n)$ 且 $c_0c_n\neq 0$，则称 L 为**线性差分算子**。若记 $p(\lambda)=\sum_{i=0}^{n}c_i\lambda^i$，则有 $L=p(E)$，称 $p(\lambda)$ 为线性差分算子 L 的**特征多项式**。

§4.7.2 差分算子与差分方程

$\Rightarrow$ 线性差分方程 (??) 可以简写成 $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$，其中 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots)$，$\mathbf{b} = (b_0, b_1, \cdots, b_k, \ldots)$。

例 4.16

设 2 阶线性差分方程

$$x_{k+2} - 3x_{k+1} + 2x_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

求方程满足 $x_0 = 2, x_1 = 1$ 的解。

思考：一般的线性差分方程如何求解?

§4.7.3 差分方程的求解

考虑 n 阶齐次线性差分方程 $L(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ 解的全体

$$V \triangleq \{\mathbf{x}\in\mathbb{S}(F)\,|\,L(\mathbf{x})=\mathbf{0}\}\,. \tag{2}$$

容易验证：V 包含零解，即 $\mathbf{0}\in V\neq\emptyset$，且有

(1) $\forall\,\mathbf{x},\mathbf{y}\in V\Rightarrow\mathbf{x}+\mathbf{y}\in V$;

(2) $\forall\,\mathbf{x}\in V,\lambda\in F\Rightarrow\lambda\mathbf{x}\in V$。

$\Rightarrow$ V 是线性空间 $\mathbb{S}(F)$ 的子空间，如何找出 V 的一组基?

§4.7.3 差分方程的求解

假设 $p(\lambda)$ 有 n 个互不相同的根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的情形:

在 $\mathbb{S}(F)$ 中构造如下向量组 $\left\{\mathbf{u}_j = (1, \lambda_j, \lambda_j^2, \cdots, \lambda_j^k, \cdots)\right\}_{j=1}^{n}$

定理 4.20

设 $p(\lambda)$ 是线性差分算子 L 的特征多项式，λ_j 是 $p(\lambda)$ 的一个根，则 $\mathbf{u}_j$ 是差分方程 $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 的一个解。

定理 4.21

向量组 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$ 构成差分方程解空间 V 的一组基。

§4.7.3 差分方程的求解

定理 4.22

n 阶齐次线性差分方程 $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 的通解为

$$x_k = \mu_1\lambda_1^k + \mu_2\lambda_2^k + \cdots + \mu_n\lambda_n^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

其中系数 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ 由初始值 $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ 唯一确定。

例 4.17

(Fibonacci 数列) 设 $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$，并且 $f_0 = 0, f_1 = 1$。求数列 f_n 的通项公式。

§4.7.3 差分方程的求解

一般的情形：设 $p(\lambda)$ 有 s 个不同的根 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$，重数分别为 $n_1, n_2, \ldots, n_s$，即 $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$。

设 $\mathbf{u}_j = (1, \lambda_j, \lambda_j^2, \ldots, \lambda_j^k, \ldots)$，引入记号

$$\mathbf{u}_j^{(l)} = \frac{d^{(l)}}{d\lambda_j^l}\mathbf{u}_j = \left(\frac{d^{(l)}}{d\lambda_j^l}1, \frac{d^{(l)}}{d\lambda_j^l}\lambda_j, \ldots, \frac{d^{(l)}}{d\lambda_j^l}\lambda_j^k, \ldots\right),\ l = 1, 2, \ldots, n_j - 1.$$

$$\Rightarrow E^i(\mathbf{u}_j^{(l)}) = E^i\left(\frac{d^{(l)}}{d\lambda_j^l}\mathbf{u}_j\right) = \frac{d^{(l)}}{d\lambda_j^l}E^i(\mathbf{u}_j)$$

$$\Rightarrow L(\mathbf{u}_j^{(l)}) = \frac{d^{(l)}}{d\lambda_j^l}L(\mathbf{u}_j) = \frac{d^{(l)}}{d\lambda_j^l}[p(\lambda_j)\mathbf{u}_j]$$

$$\Rightarrow L(\mathbf{u}_j^{(l)}) = \frac{d^{(l)}}{d\lambda_j^l}[p(\lambda_j)\mathbf{u}_j] = \sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}p^{(l-k)}(\lambda_j)\mathbf{u}_j^{(k)} = 0$$

定理 4.23

设 $p(\lambda)$ 是线性差分算子 L 的特征多项式，λ_j 是 $p(\lambda)$ 的一个 n_j 重根，则 $\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j', \ldots, \mathbf{u}_j^{(n_j-1)}$ 均为差分方程 $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 的解。

§4.7.3 差分方程的求解

定理 4.24

向量组 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1^{'}, \ldots, \mathbf{u}_1^{(n_1-1)}, \ldots, \mathbf{u}_s, \mathbf{u}_s^{'}, \ldots, \mathbf{u}_s^{(n_s-1)}\}$ 构成差分方程解空间 V 的一组基。

定理 4.25

n 阶齐次线性差分方程 $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 的通解为

$$x_k = \sum_{j=1}^{s} \left[\mu_{j1} + \mu_{j2} n + \cdots + \mu_{jn_j} \frac{n!}{(n-n_j+1)!}\right] \lambda_j^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

其中系数 $\{\mu_{j1}, \mu_{j2}, \ldots, \mu_{jn_j}\}_{j=1}^{s}$ 由初始值 $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ 唯一确定。

§4.7.3 差分方程的求解

例 4.18

设 $f_{n+4} = f_{n+3} + 3f_{n+2} - 5f_{n+1} + 2f_n$，并且 $f_0 = 1, f_1 = -1, f_2 = 0,$ $f_3 = 1$。求数列 f_n 的通项公式。

§4.7.3 差分方程的求解

考虑 n 阶非齐次线性差分方程 $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ 解的全体

$$W \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}(F) \mid L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\}. \tag{3}$$

与线性代数中非齐次线性方程组解集的讨论类似，有

定理 4.26

设 V, W 分别由 (??), (??) 定义，则有

$$W = \mathbf{x}_0 + V \triangleq \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V\},$$

其中 $\mathbf{x}_0$ 是差分方程 $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ 的一个特解.

§4.7.3 差分方程的求解

求解差分方程 $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ 的特解 $\mathbf{x}_0$ 没有一般性的方法，但有一些技巧，如待定系数法、化零多项式方法等。

例 4.19

设非齐次差分方程为 $f_{n+2} + f_{n+1} - 12f_n = n2^n$。求该方程的通解公式。

Thanks for your attention!