# 近轴光学成像

# 内容提要

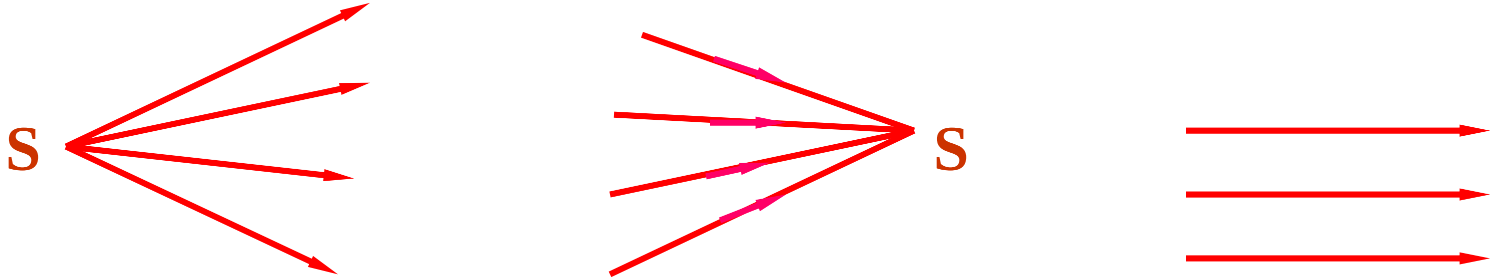
1. 光束
2. 光学系统
3. 物像的定义
4. 物空间和像空间
5. 近轴条件
6. 符号规则

# 1. 光束

**光线**：几何光学中，用有向直线表示光能量的传播方向

**光束**：有一定关系的光线的集合，称为光束。

若光束中各光线本身（或其延长线）相交于一点（物点、像点），这样的光束称为同心光束。

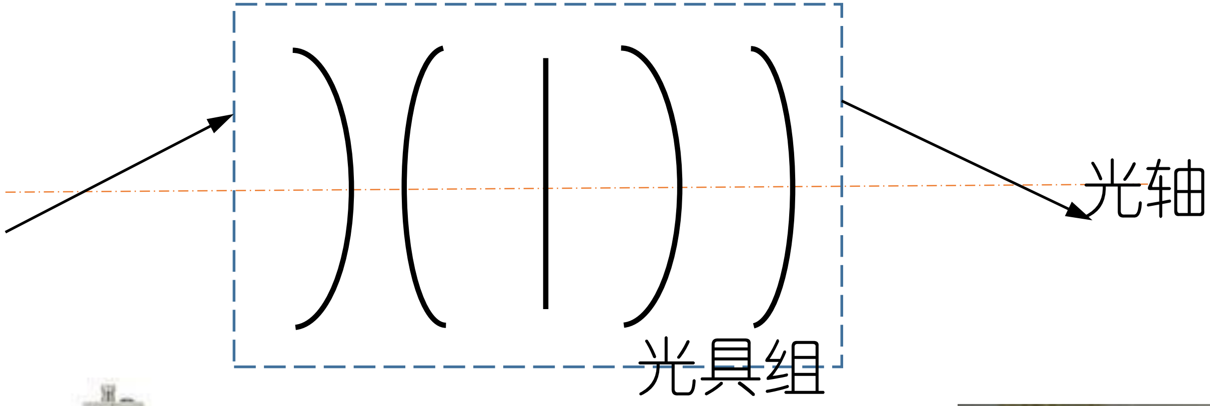



发散的同心光束　　会聚的同心光束　　光束的心在无穷远

在各向同性均匀介质中，同心光束与球面波(kr)相对应；发光点在无穷远的同心光束，与平面波相对应。

# 2. 光学系统

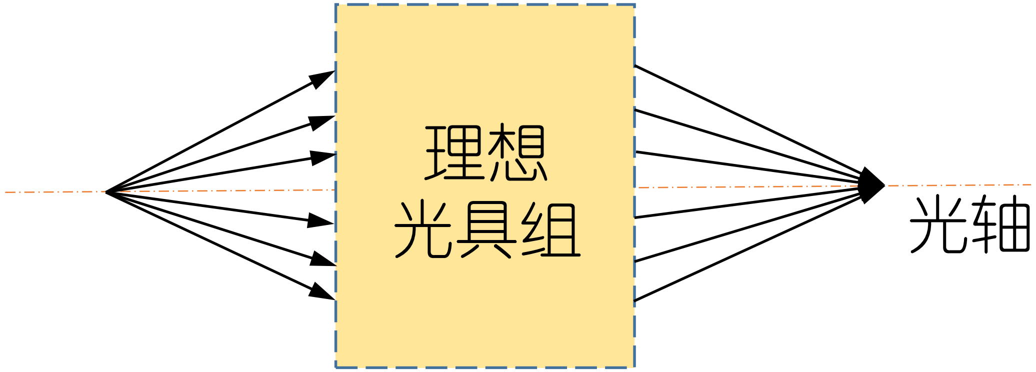
光学系统是指光在传播过程中遇到的折射或反射平面、球面以及由这样的界面组成的系统。（光具组）






# 理想光学系统

**表述一：能严格地保持光束同心性的光学系统**




**表述二：理想光学系统的物像等光程性：从物点到像点的各光线的光程相等。**

Fermat principle： MAX？ MIN？ CON.

**表述三：物点↔ 像点一 一互相对应（点物对点像)**

光的可逆性原理→ 共轭点。

物与像 的一一对应关系称为共轭.

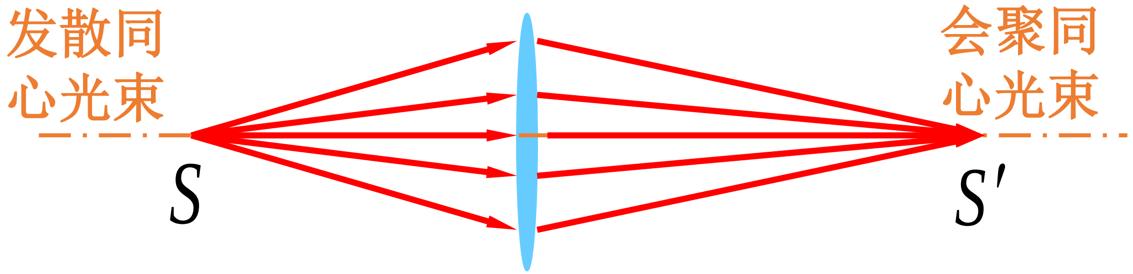
# 3. “物” “像”的定义

**实物** **未经**光学系统变换的发散同心光束的心，称为实物.

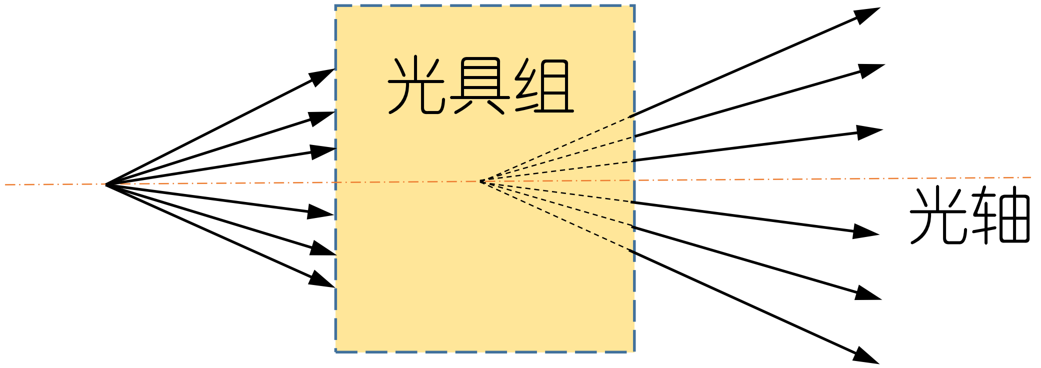
**虚物** **未经**光学系统变换的会聚同心光束的心，称为虚物.

**实像** **经**光学系统变换后的会聚同心光束的心，称为实像.

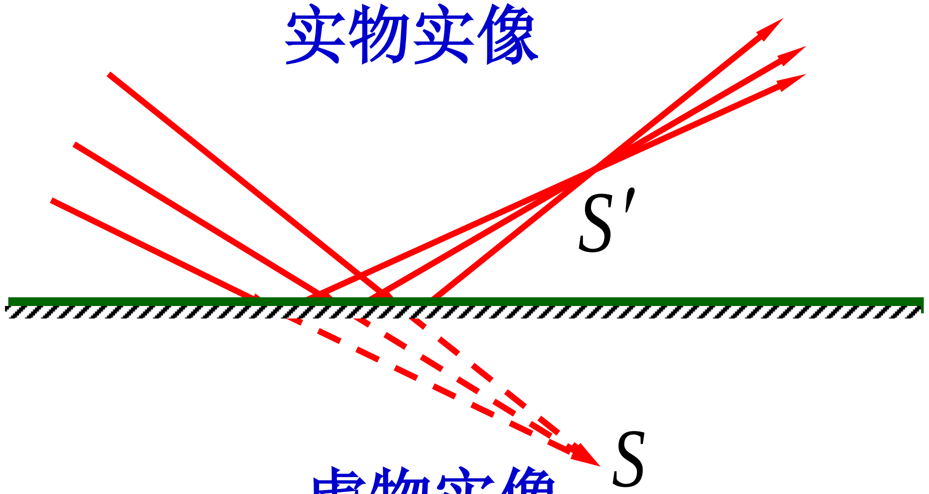
**虚像** **经**光学系统变换后的发散同心光束的心，称为虚像.



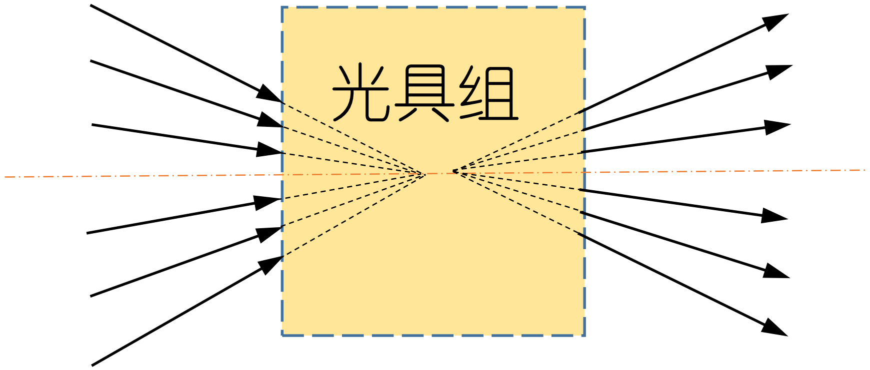

实物实像




实物虚像



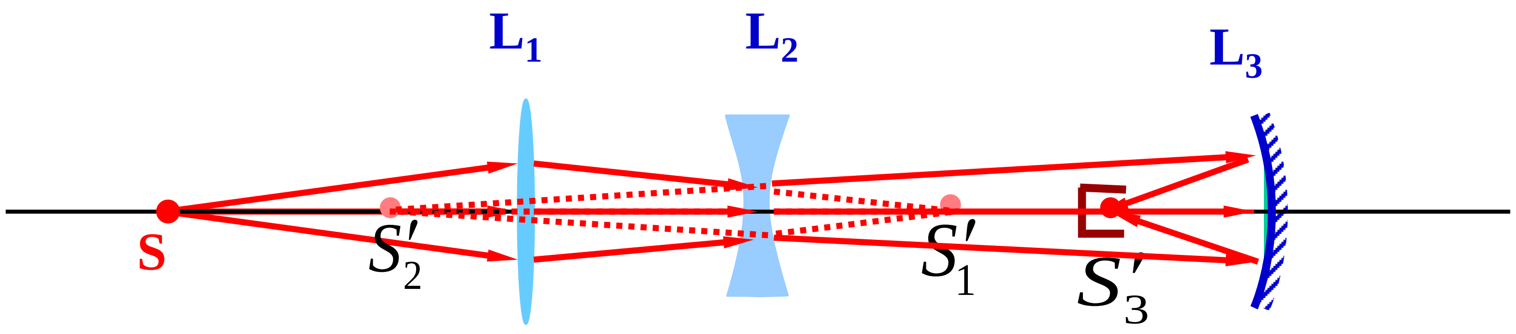

虚物实像




虚物虚像

# 物像的相对性

光学系统中，要确定某光束的心是像还是物，首先要确定成像单元。




S′$_1$是透镜L$_1$的实像，是透镜L$_2$的虚物；

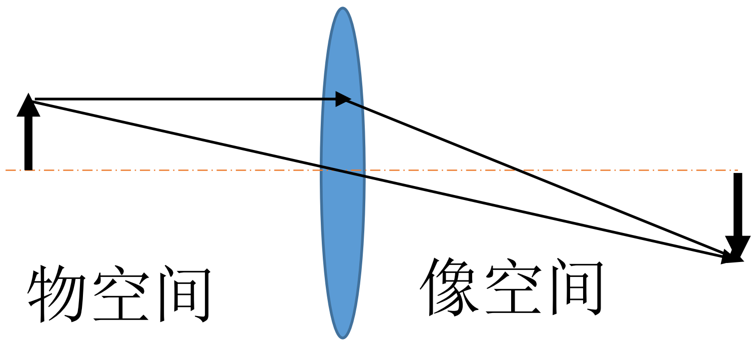
S′$_2$是透镜L$_2$的虚像，是凹面镜L$_3$的实物.

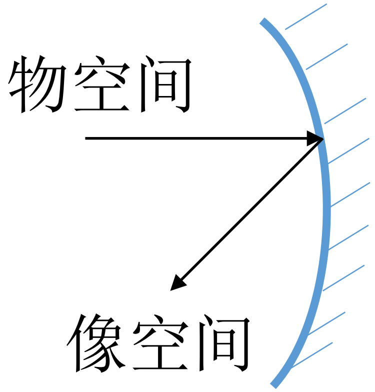
S′$_3$是最后实象像点.

## 4．物空间和像空间

物空间：未经光学系统变换的光束所在的几何空间称为物空间．它包括所有的实物点．虚物点所在的几何空间也属于物空间，或称为延拓物空间。

像空间：经光学系统变换后的光束所在的几何空间称为像空间，它包括所有的实像点．虚像所在的几何空间也属于像空间，或称为延拓像空间。



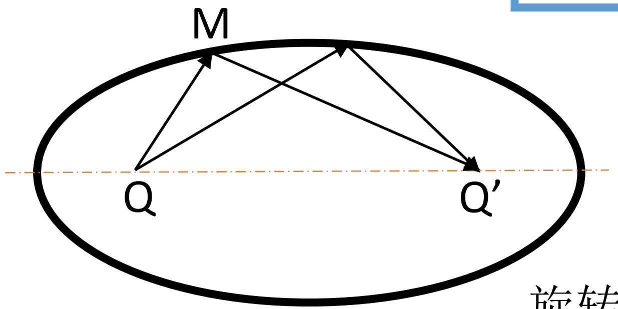

物空间和像空间实际上是重叠的!!

# 理想成像与等光程面

**等光程面**：对于给定的两点Q和Q′，凡是从Q点发出的光线经过某一曲面反射或者折射后到达Q′点的光程都相等，那么该曲面被称为Q和Q′点的*等光程面*。显然， Q和Q′是关于该等光程面的一对*物像共轭点*。

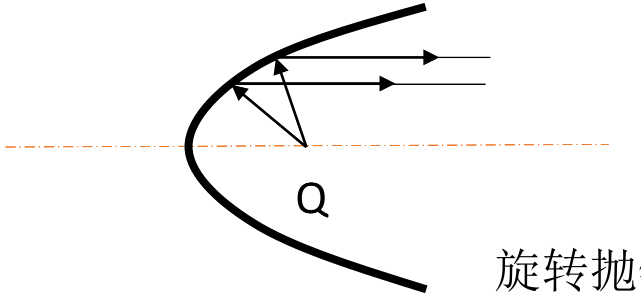
## 反射等光程面

**Problem：椭球反射镜面、旋转抛物反射镜面、旋转双曲反射镜面的共轭点？**

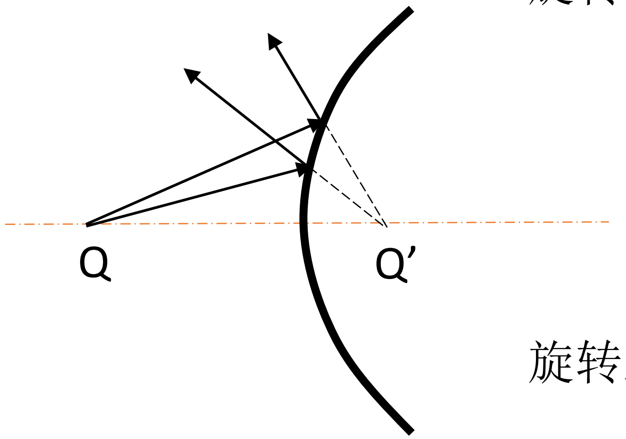



旋转椭球面

$$\overline{QM}+\overline{Q'M}=const$$

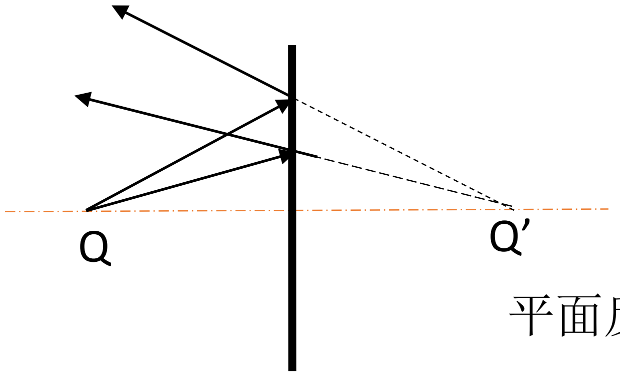



旋转抛物面



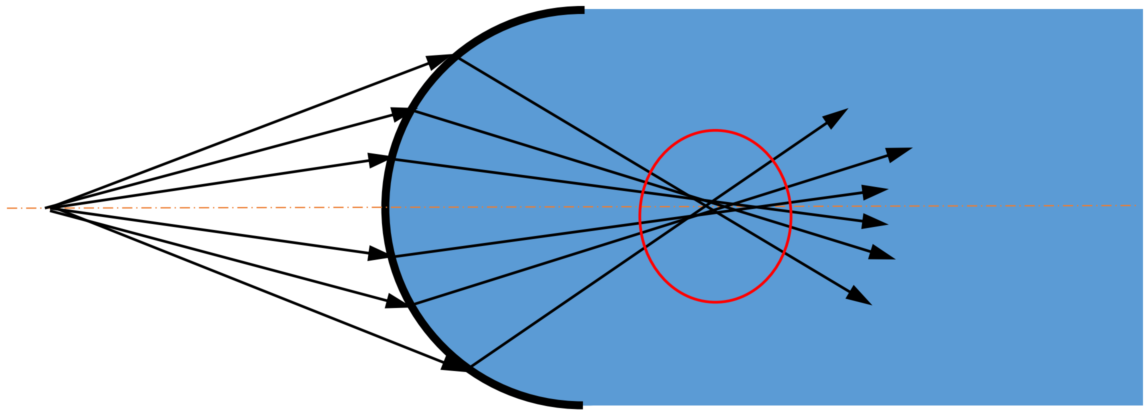

$$\overline{QM}-\overline{Q'M}=const$$

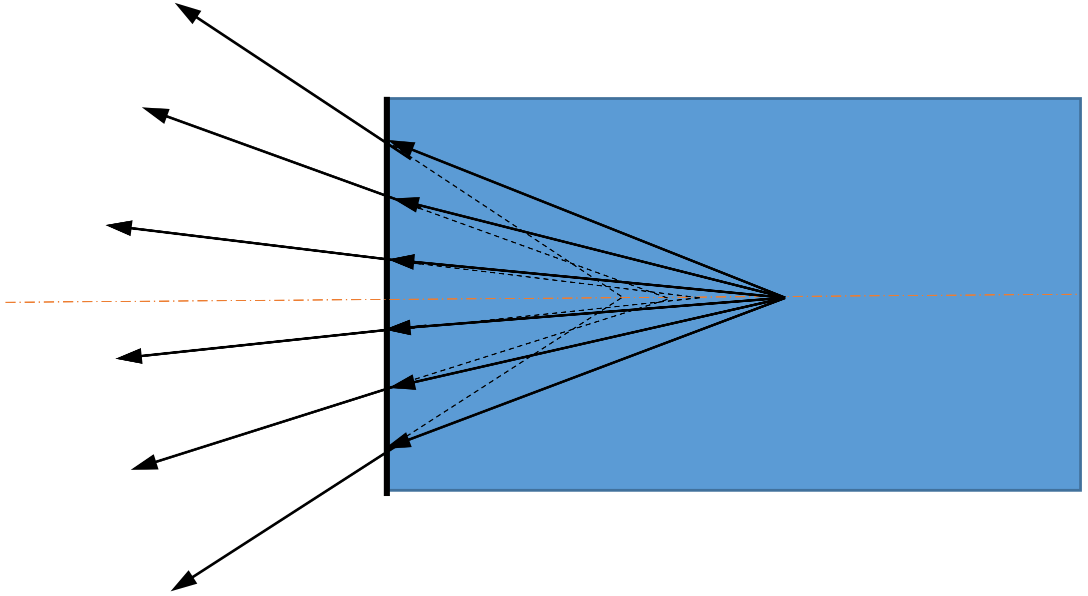
旋转双曲面




平面反射镜

# 光经过球面和平面的折射

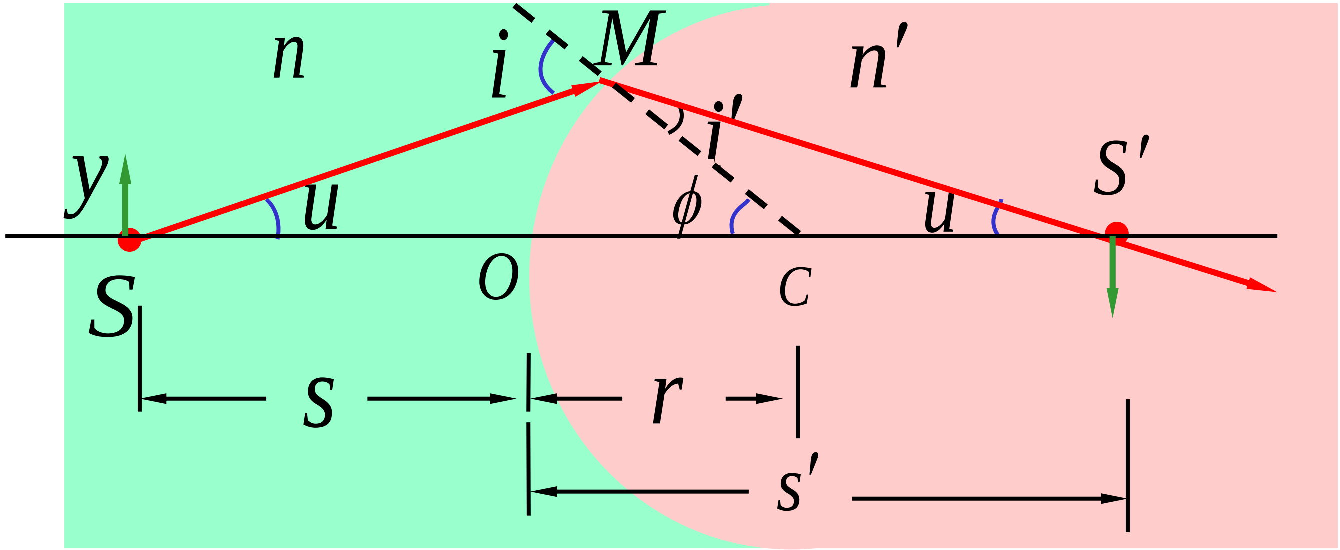




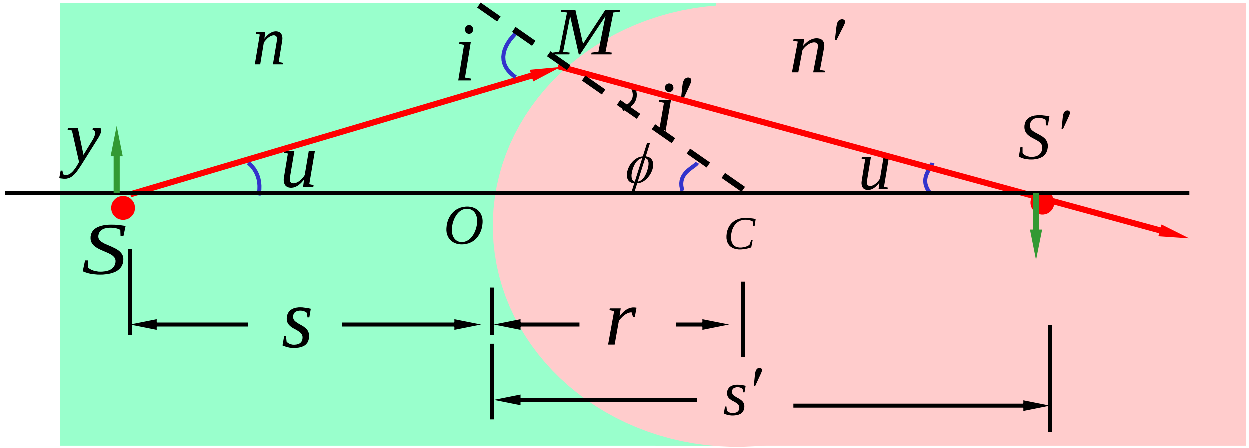
# 5. 近（傍）轴条件   Why   What？

许多光学系统并不能保持光束的单心性，除了几对个别的共轭点外，一般说来，由同一点发出的光线，经球面折射后，不再相交于一点，点物不能成点像。

理想成像，点物对应点像，即s’是与ϕ无关。



# SS’光程




$$[L] = n\overline{SM} + n'\overline{MS'}$$

$$= n\sqrt{r^2 + (s+r)^2 - 2r(s+r)\cos\phi}$$

$$+ n'\sqrt{r^2 + (s'-r)^2 + 2r(s'-r)\cos\phi}$$

**根据费马原理，光程应取极值** $\dfrac{d[L]}{d\phi} = 0$

$$n\frac{2r(s+r)\sin\phi}{\sqrt{r^2+(s+r)^2-2r(s+r)\cos\phi}}=n'\frac{2r(s'-r)\sin\phi}{\sqrt{r^2+(s'-r)^2+2r(s'-r)\cos\phi}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}-\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}=\\&-2r(1-\cos\phi)\left[\frac{1}{n^2(s+r)}+\frac{1}{n'^2(s'-r)}\right]\end{aligned}}$$

可见： S’与ϕ有关，即由物点发出的不同倾角的光线，折射后不再与光轴交于同一点，光束丧失了它的同心性。从成像的角度，在什么条件下S’与ϕ无关，即物点成像于像点

## 1、左右同时为零 （要求宽光束成像 :⇒）

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{s^2}{n^2(s+r)^2}-\dfrac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}=0 \\[2ex] \dfrac{1}{n^2(s+r)}+\dfrac{1}{n'^2(s'-r)}=0\end{array}\right. \rightarrow \begin{cases} s=-\dfrac{n'+n}{n}r \\[2ex] s'=\dfrac{n'+n}{n'}r \end{cases} \xrightarrow[\text{为参考点}]{\text{以球心}C} \begin{cases} s_0=-\dfrac{n'}{n}r \\[2ex] s_0'=\dfrac{n}{n'}r \end{cases}$$

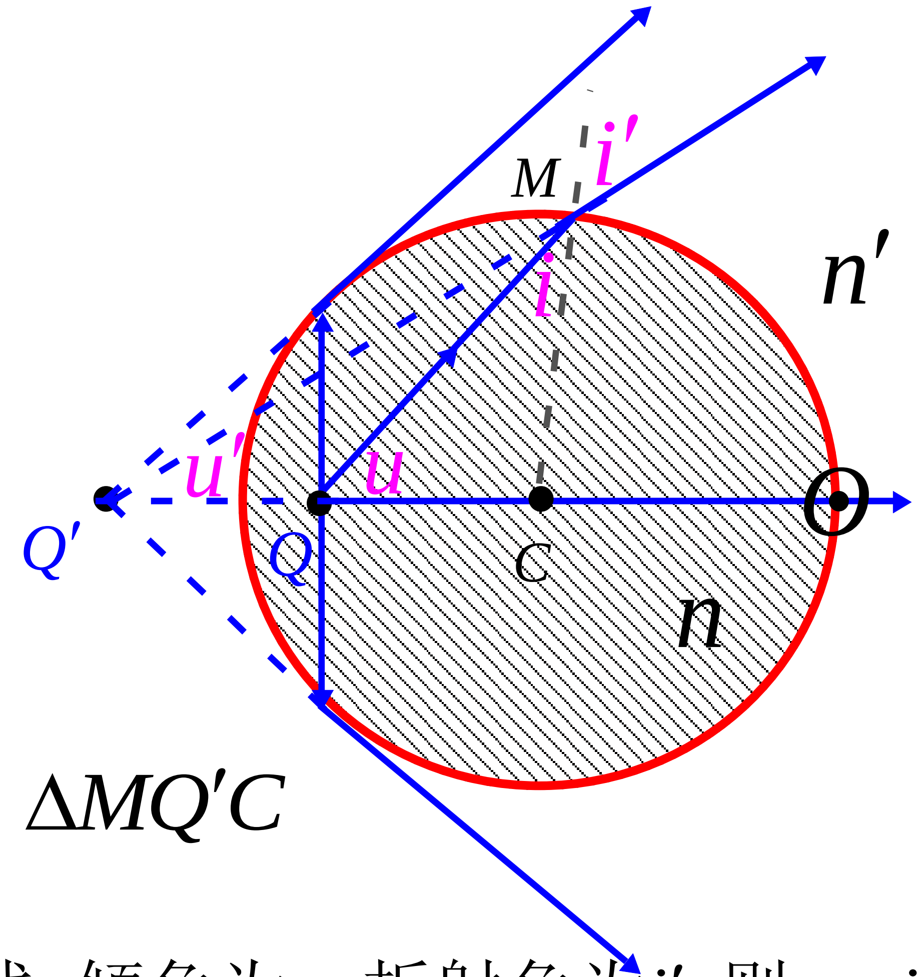
- 可见S、S’同时确定，与ϕ无关。**宽光束**成像只能在个别的**共轭点**上实现。这对特殊的共轭点↔齐明点 aplanatic points（不晕点）。
- 对单球面**折射**，一般而言只能实现傍轴成像，但是**齐明点**（一对特殊共轭点）可以宽光束严格成像。
- 这里的长度量均含有正负号，其约定见后**符号规则**。

$$s_0 = -\frac{n'}{n} r; \quad s_0' = \frac{n}{n'} r$$

$$\frac{QC}{MC} = \frac{n'}{n} r \Big/ r = \frac{n'}{n}$$

$$\frac{MC}{Q'C} = r \Big/ \frac{n}{n'} r = \frac{n'}{n}$$

$$\Rightarrow \angle QMC = \angle MQ'C \Rightarrow \Delta QMC \sim \Delta MQ'C$$




$Q$和$Q'$是一对共轭点，从$Q$发出一入射光线，倾角为$u$，折射角为$i'$，则$u = i'$；此时出射光线倾角$u' = i$；当$u = \pi/2 \rightarrow i' = \pi/2$，折射光线恰好和球面相切

**显微镜**就是工作于齐明点----调节镜头与样品的工作距离，以使样品台上的小物处于**齐明点**上。

2、 $\cos\phi \approx 1$，<u>对于任一个S，有一个S'</u>，它与$\phi$无关，物<u>点</u>成像于像点，即<u>光束限制在傍轴区域内（傍轴条件）</u>

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}-\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}=0$$

光线与光轴的夹角小于5°时，有$\sin\phi \approx \tan\phi \approx \phi$，光学系统满足这样条件的区域，轴上发出的同心光束，经系统变换后，仍为同心光束，即点物可成点像。近轴条件限制了光线与光轴的夹角。

## 6.符号规则

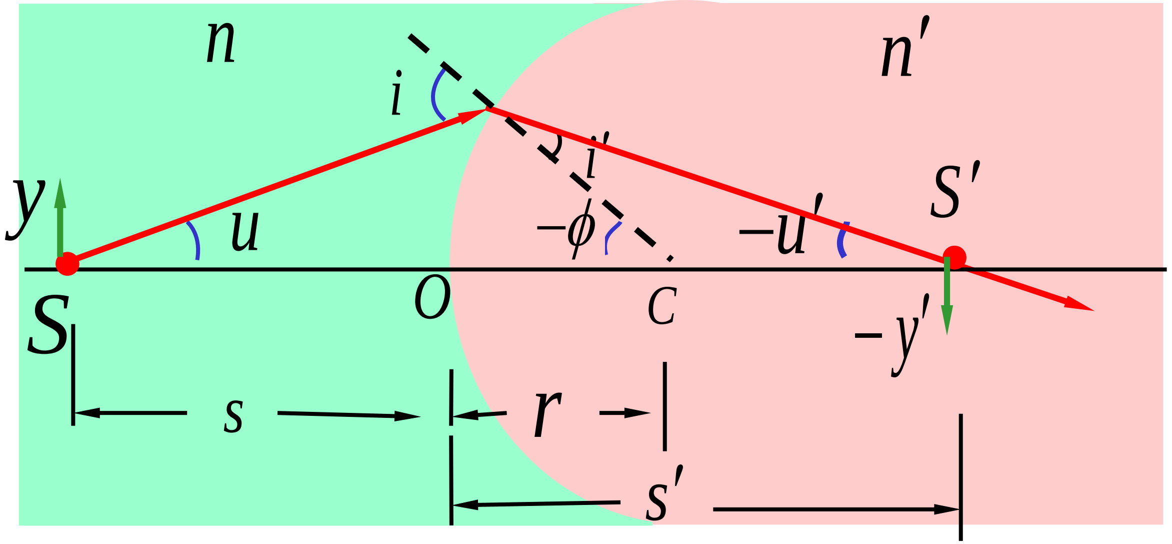
（1）线段

*纵向线段：*以球面顶点O为基准点，主轴作为基准线。若S在O左方即实物，物距s为正；右 负。若S’在O右方即实像，像距s’为正； 左 负。

折射球面的球心C在顶点O的右侧，曲率半径为正；左侧为 负

以单球面折射系统为例

光路主体方向自左向右→




**图示已用绝对值标示*

*横向线段：*以光轴为起点，向上为正向下为负

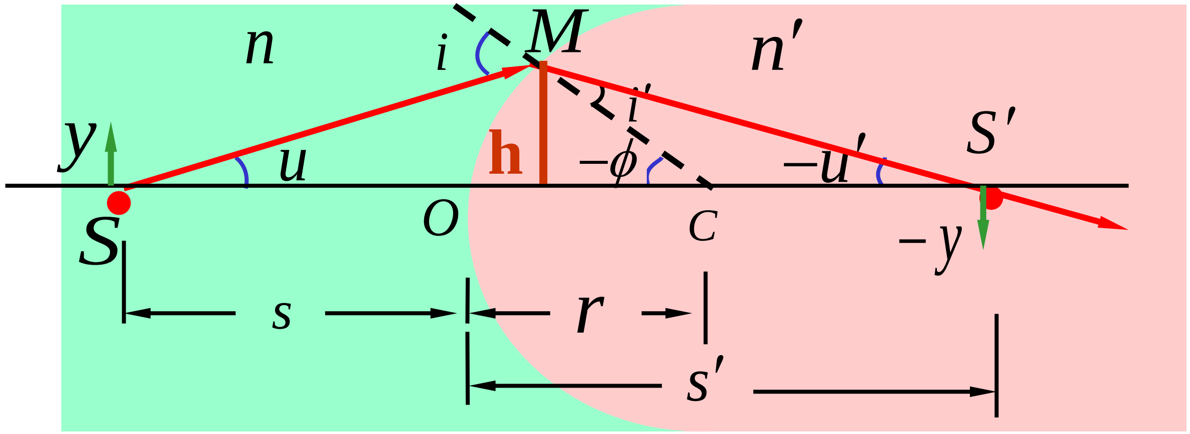
（2） 角度

以光轴或法线为始边，逆时针所成锐角为正，顺时针所成锐角为负.

# 单球面折射系统近轴成像

1. 单球面折射系统的近轴成像公式
2. 单球面折射系统的焦点
3. 高斯公式
4. 单球面折射系统的放大率

## 1.单球面折射系统的近轴成像公式

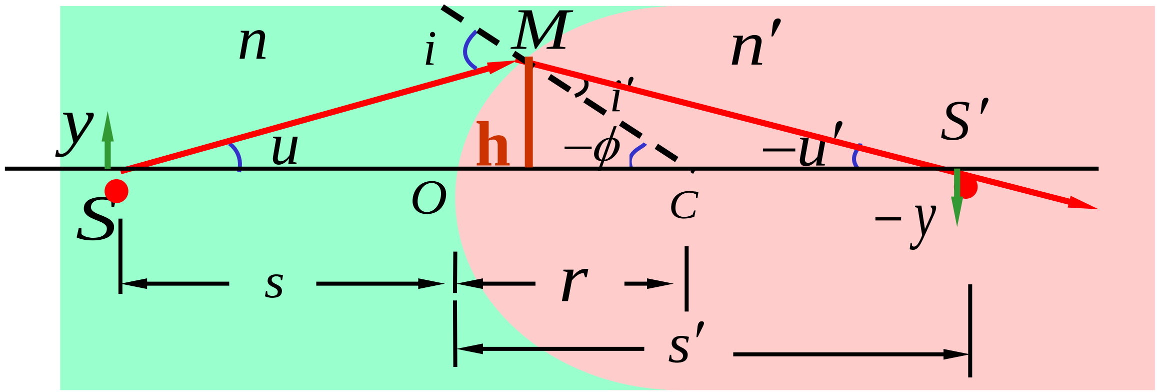



在近轴条件下，单球面折射系统可视为理想光学系统，同心光束经其变换后，仍具有单心性。自S发出的光线SM是一条近轴光线，**M为入射点**，由折射定律，且入射角和折射角都很小：

$$n\sin(i)=n'\sin(i') \quad \Rightarrow ni=n'i'$$

由符号约定和几何关系

$$i=u-\phi \qquad i'=-\phi+u'$$




$$\Rightarrow n(u-\phi)=n'(u'-\phi)$$

$$n'(-u')+n(u)=(n'-n)(-\phi)$$

在近轴条件下 $u=\dfrac{h}{s},\quad -u'=\dfrac{h}{s'},\quad -\phi=\dfrac{h}{r}$

整理得单球面折射系统的近轴成像公式:

$$\boxed{\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}}$$

## 根据费马原理也可得到成像公式

$$[L]=n\overline{SM}+n'\overline{MS'}$$

$$=n\sqrt{r^2+(s+r)^2-2r(s+r)\cos\phi}$$

$$+n'\sqrt{r^2+(s'-r)^2+2r(s'-r)\cos\phi}$$

## 光程应取极值

$$\frac{d[L]}{d\phi}=0$$

得：

$$\frac{s^2}{n^2(s+r)^2}-\frac{s'^2}{n'^2(s'-r)^2}=$$

$$-2r(1-\cos\phi)\left[\frac{1}{n^2(s+r)}+\frac{1}{n'^2(s'-r)}\right]$$

傍轴条件，$\cos\phi\approx1$ $\Rightarrow n+\frac{nr}{s}=n'-\frac{n'r}{s'}$

$$\boxed{\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}}$$

令 $\boxed{P=\dfrac{n'-n}{r}}$ P定义为折射球面的光焦度，它表征系统对光线的曲折本领.

光焦度（通常表示透镜焦距的倒数$n/f$，有个折射率的系数）的单位为屈光度(diopter，记为D, 1D=1m$^{-1}$)。例：对于n=1, n′=1.5，r=0.1m的球面，其P=5D。通常眼镜的度数是屈光度的100倍，焦距为50.0cm的眼镜，度数是200。

由于球面的曲率半径可正、可负也可以为无穷大，物方折射率可以大于也可以小于像方折射率，因此光焦度可正、可负，也可以为零。

P > 0 为会聚系统， P< 0 为发散系统， P = 0 为无焦系统。

## 2. 单球面折射系统的焦点

### （1）物方焦点

轴上无穷远像点的共轭点称为物方焦点

将S′=−∞ 代入 $\boxed{\dfrac{n'}{s'}+\dfrac{n}{s}=\dfrac{n'-n}{r}}$ 得物方焦距

$$\boxed{f=\frac{n}{n'-n}r} \qquad \boxed{f=\frac{n}{P}}$$

物距为 $f$ 的点为物方焦点 F，它与无穷远处的像点关于系统共轭. 过 F 点垂直于光轴的平面，叫物方焦平面.

## （2） 像方焦点

轴上无穷远物点的共轭像点称为像方焦点

将 $s=\infty$代入得像方焦距

$$\boxed{f'=\frac{n'}{n'-n}r}\qquad\boxed{f'=\frac{n'}{P}}$$

$f'>0$ 为会聚系统，　　　$f'<0$ 为发散系统.

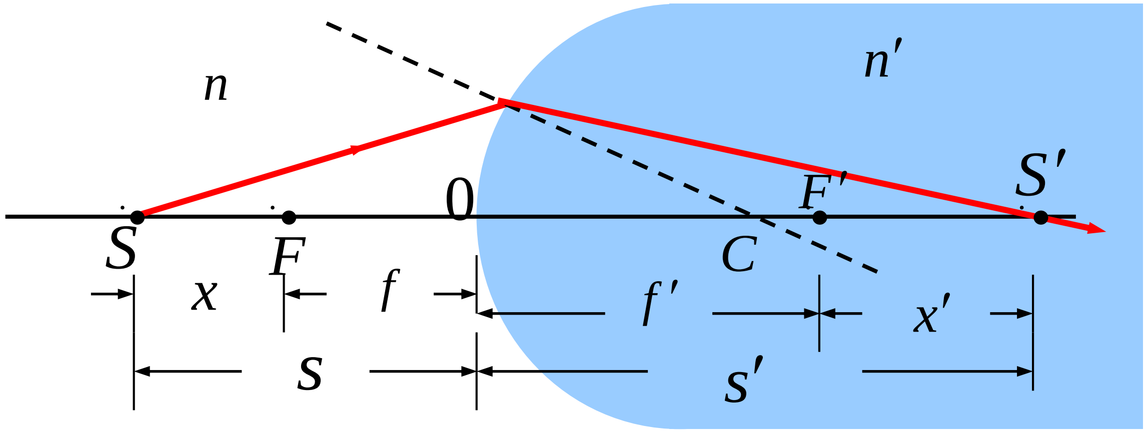
物距为 $f'$的点为像方焦点 F′ , 它与无穷远处的物点关于系统共轭. 过 F 点垂直于光轴的平面，叫像方焦平面.

## 3. 高斯公式

将 $\dfrac{n'}{s'}+\dfrac{n}{s}=\dfrac{n'-n}{r}$ 两边除以P，

得高斯公式

$$\boxed{\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1}$$




## 牛顿公式

若物距和像距的计算分别以**物方焦点F和像方焦点F′为原点**，并以x 、x′表示物距和像距。则x 、 x′与s、s′的关系：

$$x=s-f \qquad x'=s'-f'$$

将上两式代入高斯公式 $\dfrac{f'}{s'}+\dfrac{f}{s}=1$ ，

得牛顿公式

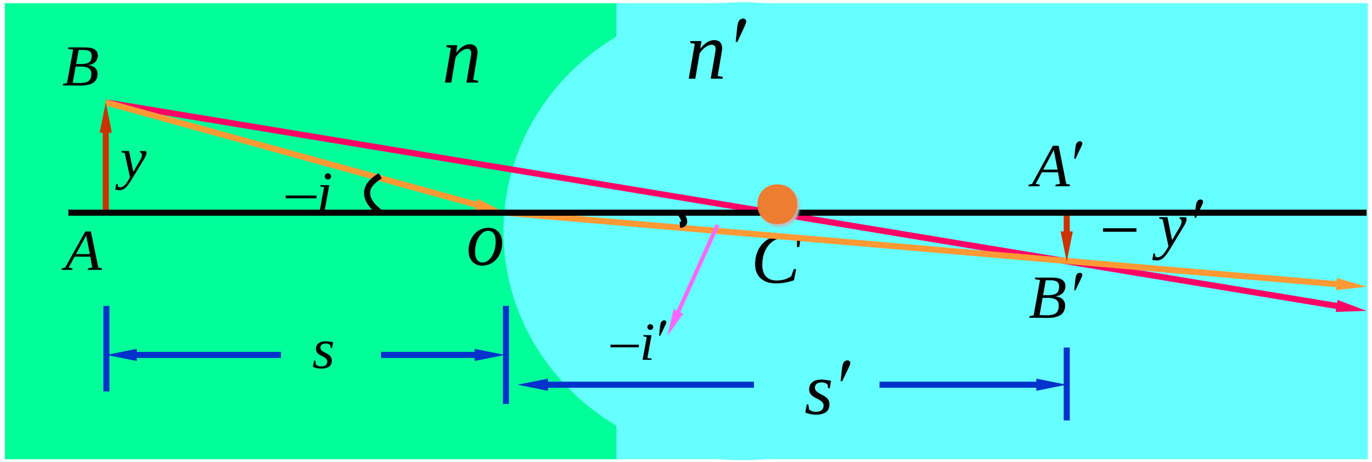
$$\boxed{xx'=ff'}$$

符号约定：物点在F之左， x 正；右 负

像点在F′之左，x′ 负；右 正

# 4. 单球面**折射**系统的放大率

## 1) 垂轴放大率




由**傍轴几何**关系, 得: $A'B'$ 是 $AB$ 的像?

$$-i = y/s\,;\, -i' = -y'/s'$$

近轴条件下，在入射点O处，由折射定律

$$n(-i) = n'(-i') \quad \Rightarrow \frac{ny}{s} = -\frac{n'y'}{s'}$$

定义垂轴放大率律为

$$\boxed{V=\frac{y'}{y}} \qquad \boxed{\Rightarrow V=-\frac{ns'}{n's}}$$

与**y无关**这就保证了<u>一对共轭面内</u>几何图形的相似性

可以用垂轴放大率V的值辨别物像性质：

**(1) 物和像的虚实**

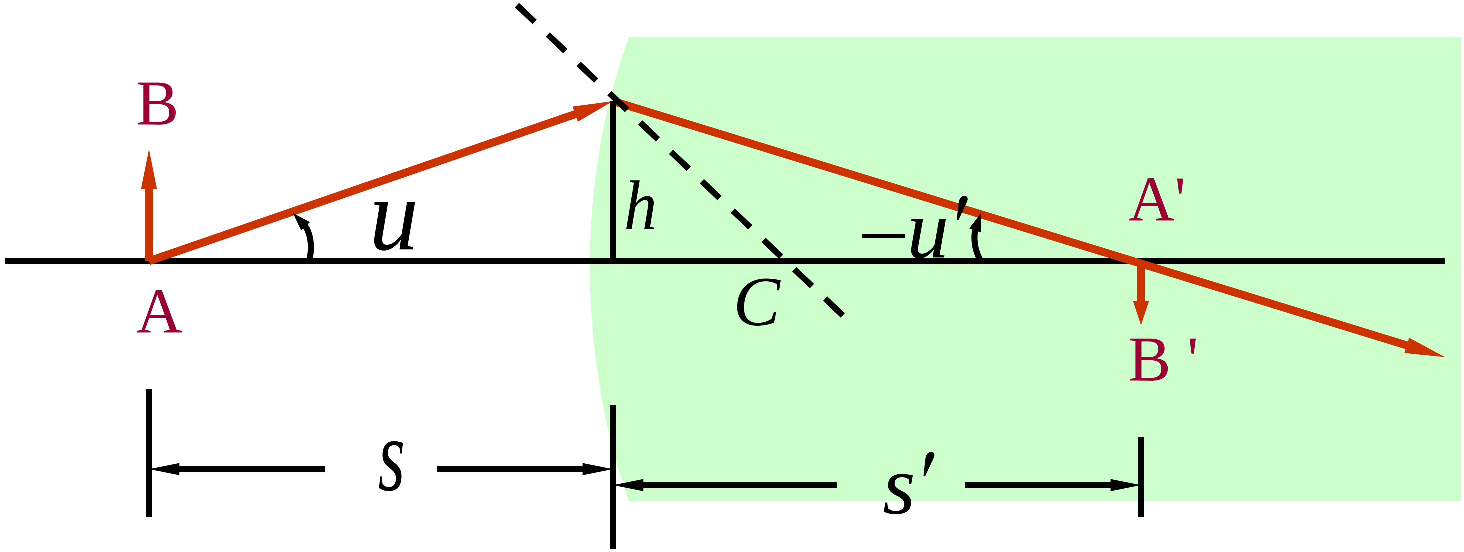
**V< 0 物像互为倒立实物实像或虚物虚像,**

**V> 0物像互为正立, 实物虚像或虚物实像.**

**(2) 像的放大和缩小**

**|V|> 1, 像放大； |V| <1， 像缩小 ； |V| = 1 , 物像等大.**

## 2) 角放大率




在上图折射系统中，傍轴条件下AB和A′B ′是一对共轭物像

$u$、$-u'$ 是一对共轭角。 定义角放大率为

$$\gamma = \frac{-u'}{u}$$

$$u=\frac{h}{s},-u'=\frac{h}{s'} \qquad \therefore \gamma=\frac{-u'}{u}=\frac{s}{s'}$$

$$\because V=\frac{y'}{y}=-\frac{ns'}{n's}$$

因此有 $\boxed{nuy=n'u'y'}$

称为拉格朗日-亥姆霍兹定理

它表明 $nuy$ 这个乘积经过每次折射都不变，该定理很容易推广到多个共轴球面上

$$\boxed{nuy=n'u'y'=n''u''y''=\cdots}$$

## 亥姆霍兹公式：

$$yn\tan u = y'n'\tan u'$$

该公式是折射球面能使空间所有点以任意宽光束成像的必要条件。

## 阿贝正弦条件（E.Abbe,1879)：

$$yn\sin u = y'n'\sin u'$$

该公式是傍轴小物以大孔径的光束成像的充要条件。

满足阿贝正弦条件的这对特定的共轭点，即为齐明点。工作于齐明点位置的傍轴小物可大孔径严格成像，既消除了一般轴上物点产生的球差，也消除了轴外物点产生的慧差

**在傍轴区域，三者同时满足**

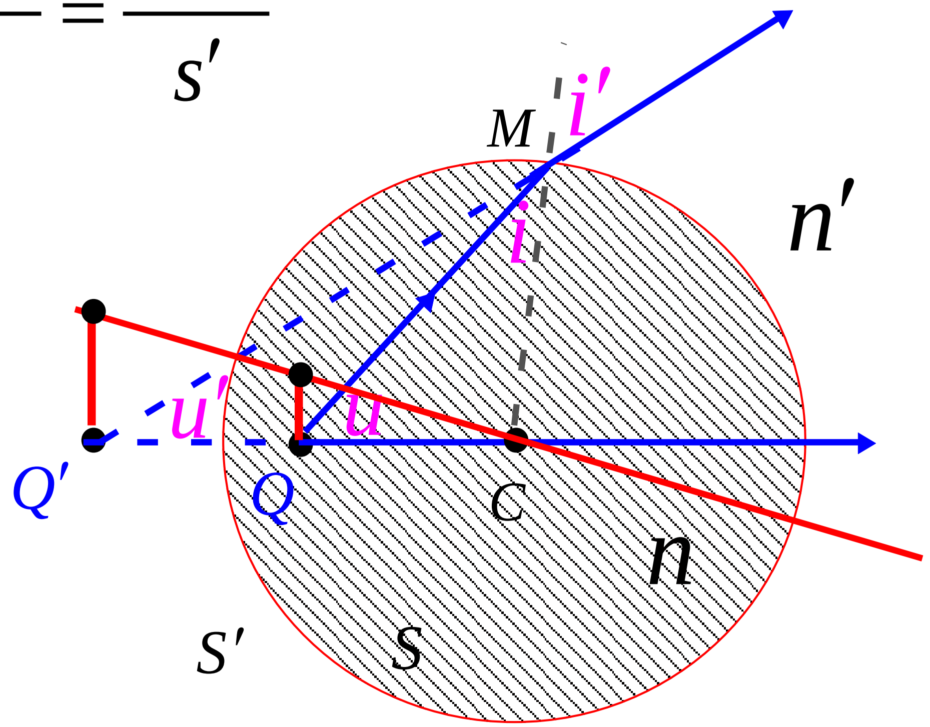
# 齐明点与阿贝正弦条件

$$\xrightarrow{\angle QCM} \frac{\sin u}{r} = \frac{\sin i}{s}; \frac{\sin u'}{r} = \frac{\sin i'}{s'}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{\sin i}{\sin i'} \cdot \frac{s'}{s}$$

$$\xrightarrow{\sin i/\sin i' = n'/n; s'/s = y'/y}$$

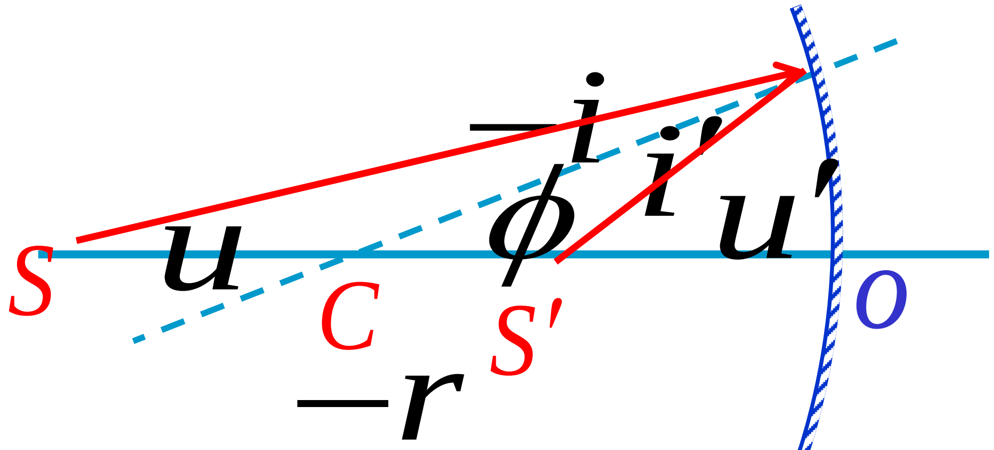
$$\frac{\sin u}{\sin u'} = \frac{n'y'}{ny}$$

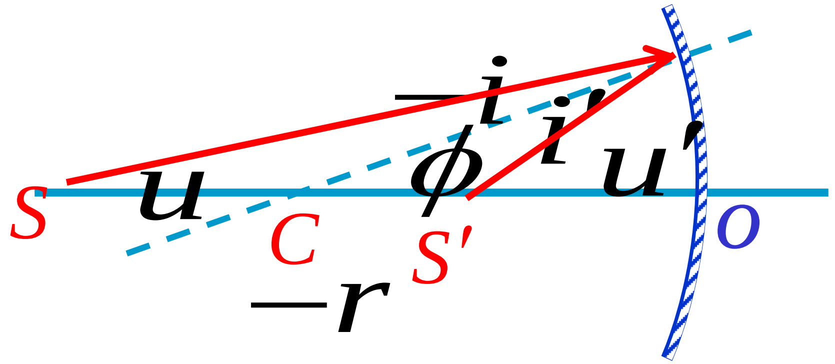



**Abbe sine condition is fulfilled for aplanatic points!!**

# 球面反射系统

对于反射情形，反射光线的方向转为从右到左，需将前面像距的规定改变如下：
若S’在顶点0之左方（实像），像距s’为正；
若S’在顶点0之右方（虚像），像距s’为负。






$$-i = \phi - u$$

$$i' = u' - \phi$$

$$-i = i'$$

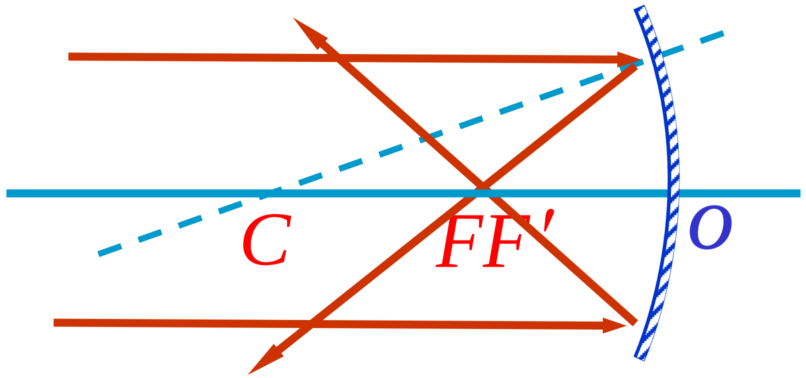
$$u \approx \frac{h}{s};\phi = \frac{h}{-r};u' = \frac{h}{s'}$$

反射定律 *-i=i'*:
$$\frac{h}{-r} - \frac{h}{s} = \frac{h}{s'} - \frac{h}{-r}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{r}}$$

令 $s=-\infty,\quad \Rightarrow f'=-\dfrac{r}{2}$

令 $s'=\infty,\quad \Rightarrow f=-\dfrac{r}{2}$




$$f=f'=-\frac{r}{2}$$

球面镜物方焦点与像方焦点重合．

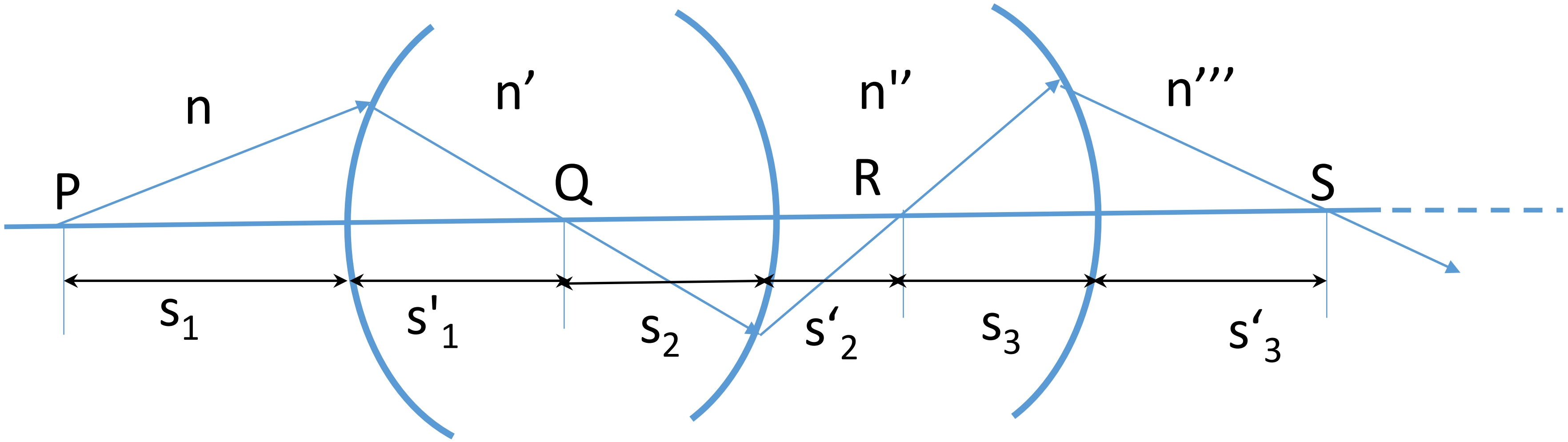
凹面镜 $r<0,\quad f=f'>0$

凸面镜 $r>0,\quad f=f'<0$

高斯公式仍成立：

$$\boxed{\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1}$$

# 逐次成像



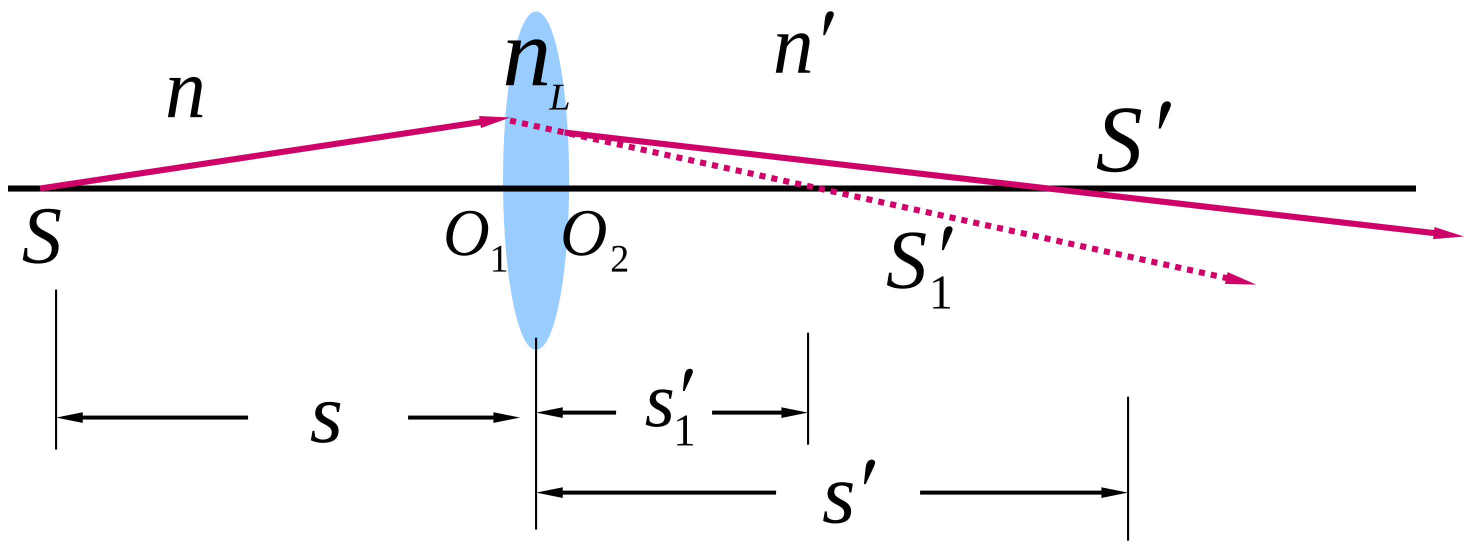

$$\frac{n'}{s_1'}+\frac{n}{s_1}=\frac{n'-n}{r_1} \qquad \frac{n''}{s_2'}+\frac{n'}{s_2}=\frac{n''-n'}{r_2} \qquad \frac{n'''}{s_3'}+\frac{n''}{s_3}=\frac{n'''-n''}{r_3} \qquad \cdots$$

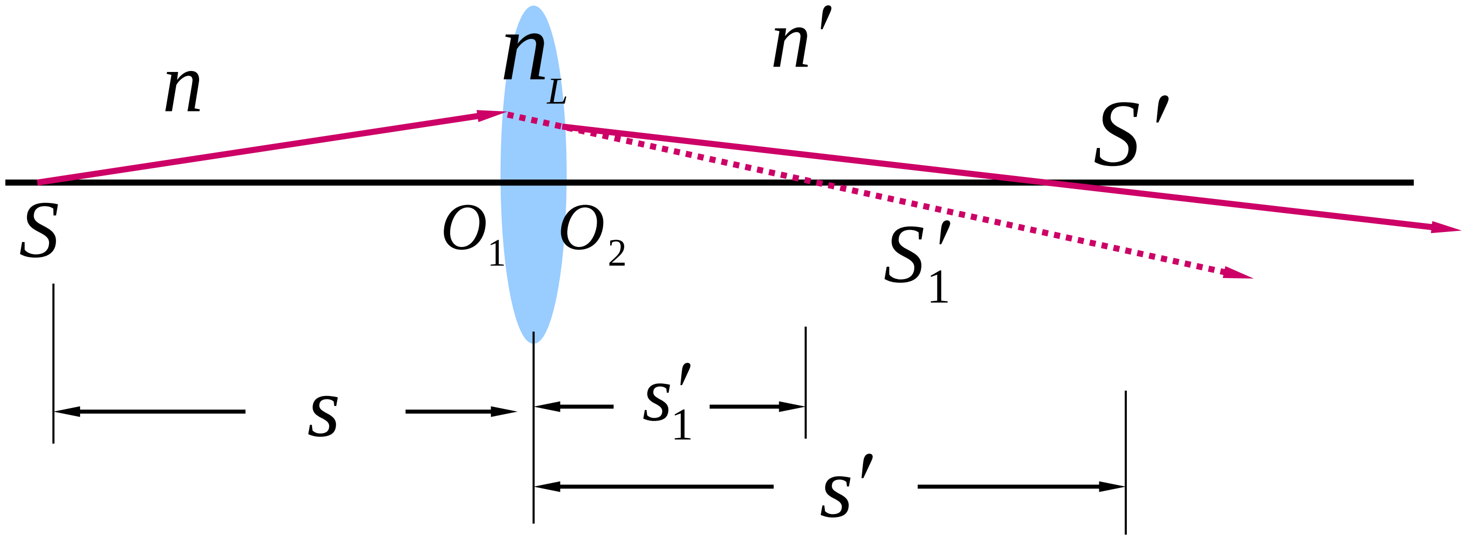
# 薄透镜

薄透镜是由两个折射球面组成的，两折射球面共轴，两顶点间距与透镜焦距比起来可忽略不计.

## 1. 薄透镜的成像公式

设 物空间 折射率为$n$ ，像空间折射率为$n'$，透镜折射率为 $n_L$ 两球面半经分别为$r_1$ 和 $r_2$ .






透镜两次经球面折射成像。第一次成像，以$O_1$为基准点；第二次成像，以$O_2$为基准点。由单球面折射成像公式分别得：

$$\frac{n}{s}+\frac{n_L}{s_1'}=\frac{n_L-n}{r_1} \qquad \frac{n_L}{-s_1'}+\frac{n'}{s'}=\frac{n'-n_L}{r_2}$$

将上两式相加，得**薄透镜傍轴成像的物象距公式**

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2}$$

焦距公式:

$$s=-\infty, s'=f' \qquad \therefore f'=\frac{n'}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}$$

$$s'=\infty, s=f \qquad \therefore f=\frac{n}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}$$

两焦距取决薄透镜的几何形状(r)、材料($n_L$) 、两侧介质的折射率(n,n’)有关

$$\frac{f'}{f}=\frac{n'}{n}$$

空气中的薄透镜焦距为（磨镜者公式）

$$\boxed{f'=f=\frac{1}{(n_L-1)(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})}}$$

**思考题：**

根据摩镜公式分析正透镜、负透镜的可能情形？

$f'$、$f>0$ 时（实焦点）为正透镜；$f'$、$f<0$ 时（虚焦点）为负透镜。r可正负。正透镜中心总是比边缘厚，又称为凸透镜；负透镜中心总是比边缘薄，又称为凹透镜。

薄透镜的光焦度可表示为:

$$\boxed{P=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2}}$$

两折射面的光焦度分别为:

$$P_1=\frac{n_L-n}{r_1};P_2=\frac{n'-n_L}{r_2}$$

薄透镜的光焦度为两折射面的光焦度的代数和

$$P=P_1+P_2$$

$$f' = \frac{n'}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}} \qquad f = \frac{n}{\frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}}$$

$$P = \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$$

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n_L - n}{r_1} + \frac{n' - n_L}{r_2}$$

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = P$$

薄透镜成像高斯公式仍成立

$$\boxed{\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1}$$

空气中的薄透镜成像公式:

$$\boxed{\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}}$$

# 薄透镜的牛顿公式

约定：物点在F之左， x 正；右 负
像点在F'之左，x' 负；右 正

则x 、x'（从焦点算起的物距、像距）与s、s'的关系：

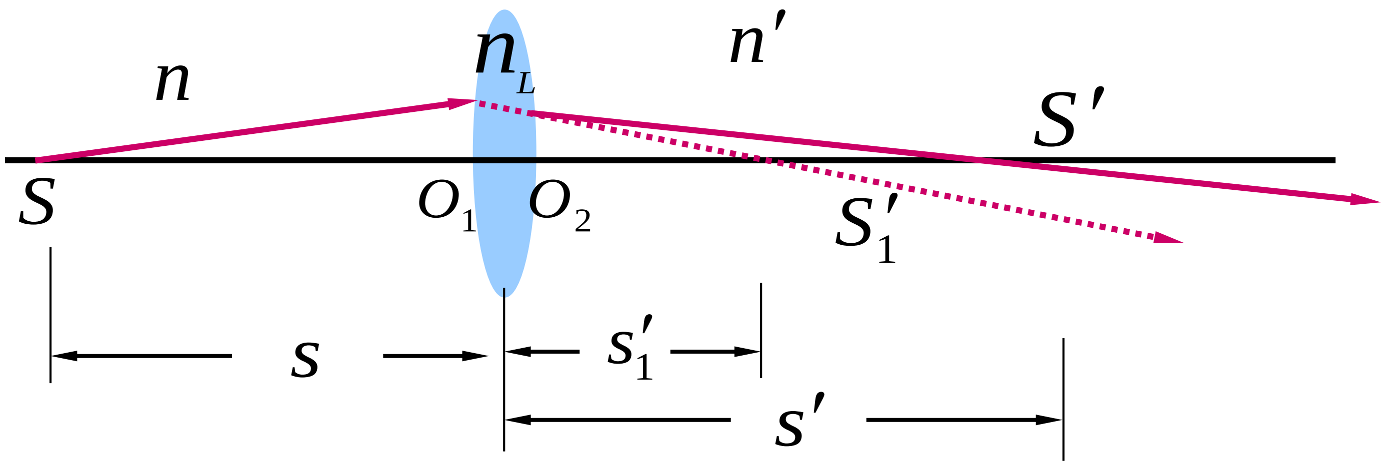
$$x = s - f \qquad x' = s' - f'$$

将上两式代入高斯公式 $\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1$，得**牛顿公式**

$$\boxed{xx' = ff'}$$

已知折射球面的$V=-\dfrac{ns'}{n's}$

? 薄透镜的横向（垂轴）放大率




$$V_1=-\frac{ns_1'}{n_L s} \qquad V_2=-\frac{n_L s'}{n'(-s_1')}$$

所以薄透镜的横向（垂轴）放大率

$$V = V_1 V_2 = -\frac{ns'}{n's}$$

$$\boxed{\because \frac{f'}{f} = \frac{n'}{n} \Rightarrow V = -\frac{fs'}{f's} = -\frac{ns'}{n's}}$$

$V$若用$x, x', f, f'$表示？

$$xx' = ff' \Rightarrow -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$$

$$-\frac{f+x}{x} = -\frac{x'+f'}{f'}$$

$$-\frac{s}{x}=-\frac{s'}{f'} \qquad -\frac{s'}{s}=-\frac{f'}{x}$$

$$-\frac{ns'}{n's}=-\frac{nf'}{n'x}=V$$

$$\therefore V=-\frac{nf'}{n'x}=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'}$$

物、像方折射率相等时（如空气中），薄透镜垂轴放大率

$$\boxed{V=-\frac{s'}{s}} \qquad \boxed{V=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f}}$$

# 薄透镜成像性质

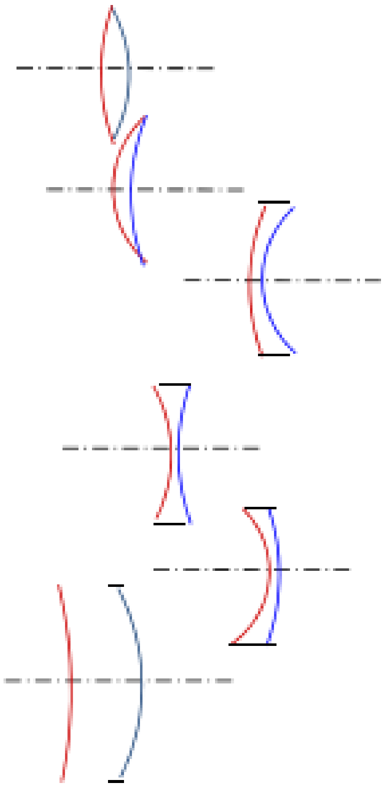
## 正透镜与负透镜

$$f=f'=\frac{1}{(n_L-1)(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2})}$$

正透镜 $\frac{1}{r_1}>\frac{1}{r_2}$　　负透镜 $\frac{1}{r_1}<\frac{1}{r_2}$

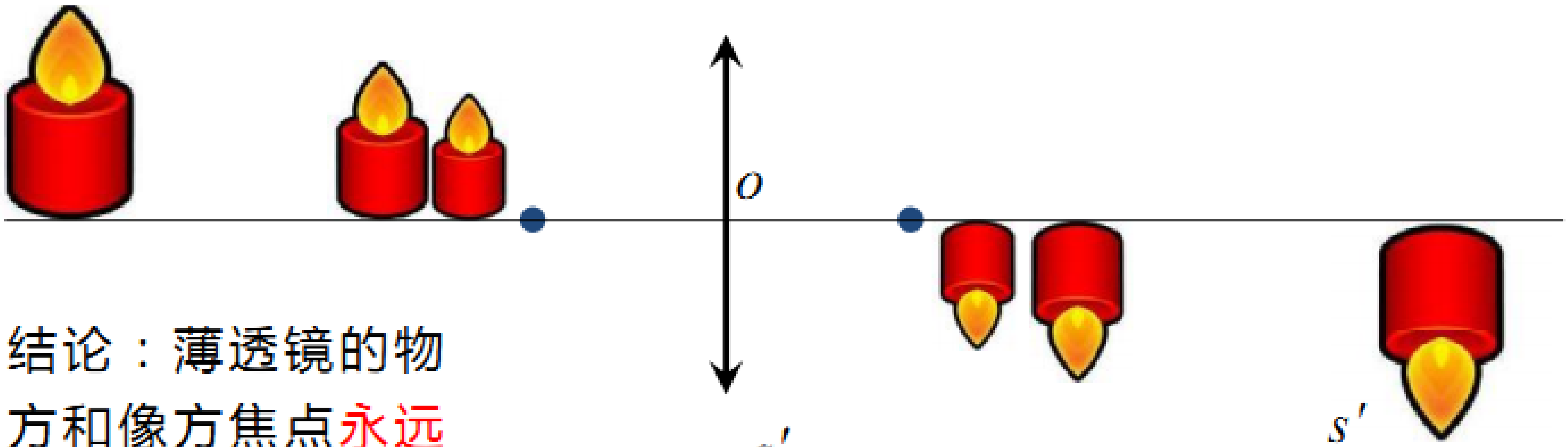
$$r_1>0\quad\begin{cases}\left.\begin{cases}r_2<0\\ r_2>0\ \&\ r_2>r_1\end{cases}\right\}\Rightarrow \boxed{f=f'>0}\\ r_2>0\ \&\ r_2<r_1\Rightarrow \boxed{f=f'<0}\end{cases}$$

$$r_1<0\quad\begin{cases}\left.\begin{cases}r_2>0\\ r_2<0\ \&\ |r_2|>|r_1|\end{cases}\right\}\Rightarrow \boxed{f=f'<0}\\ r_2<0\ \&\ |r_2|<|r_1|\Rightarrow \boxed{f=f'>0}\end{cases}$$

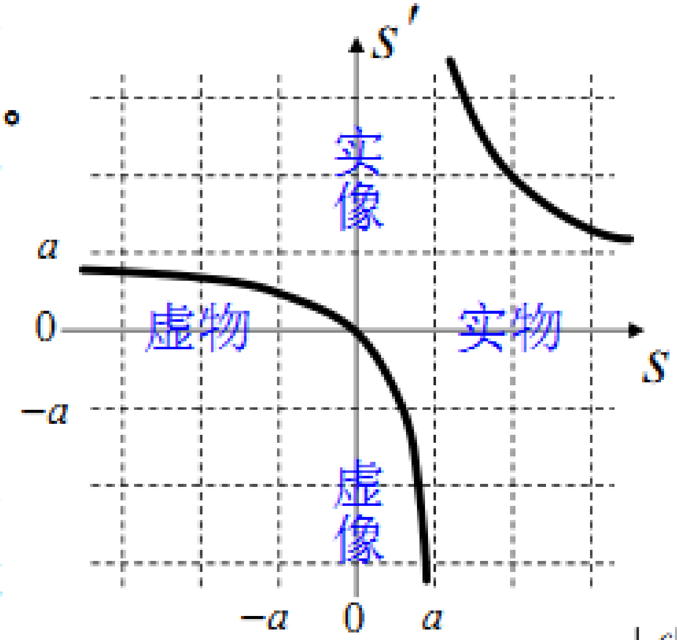


$f=f'>0\Rightarrow$ 正透镜　　$f=f'<0\Rightarrow$ 正透镜

从Fermat原理看，这也是很自然的结果。

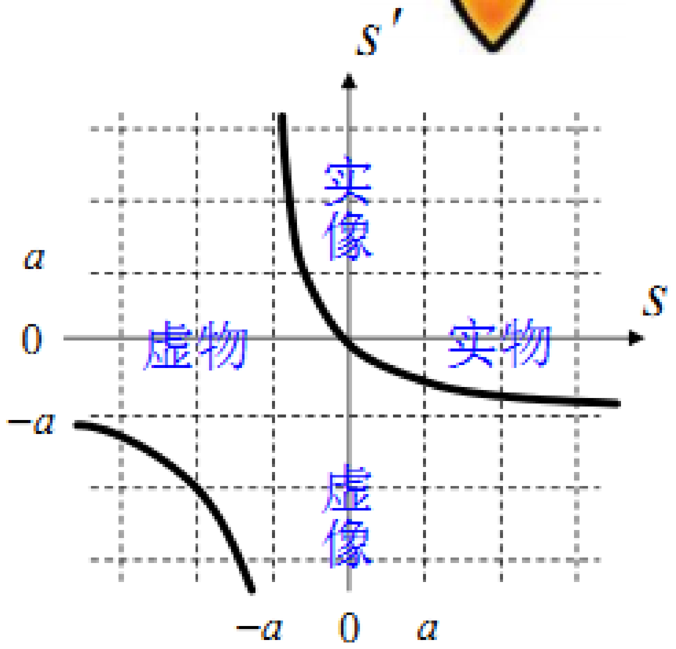



结论：薄透镜的物方和像方焦点永远分处于透镜的两侧。并且一般情况下两个焦点不对称，即焦距大小不相等。只有当物像方介质折射率相等时，透镜的物像方焦距大小才相等。




正透镜

$|f| = a$




负透镜

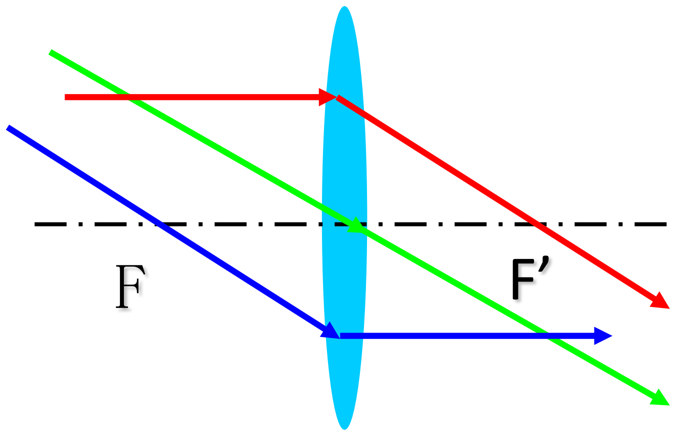
# 薄透镜成像的作图法

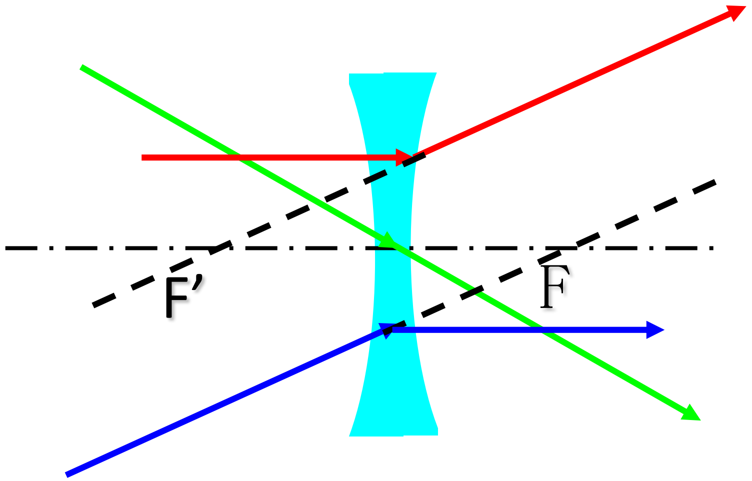
三条特殊光线：

（1）平行于光轴的物方入射光线⇔经过像方焦点的光线

（2）经过物方焦点的光线⇔平行于光轴的像方光线

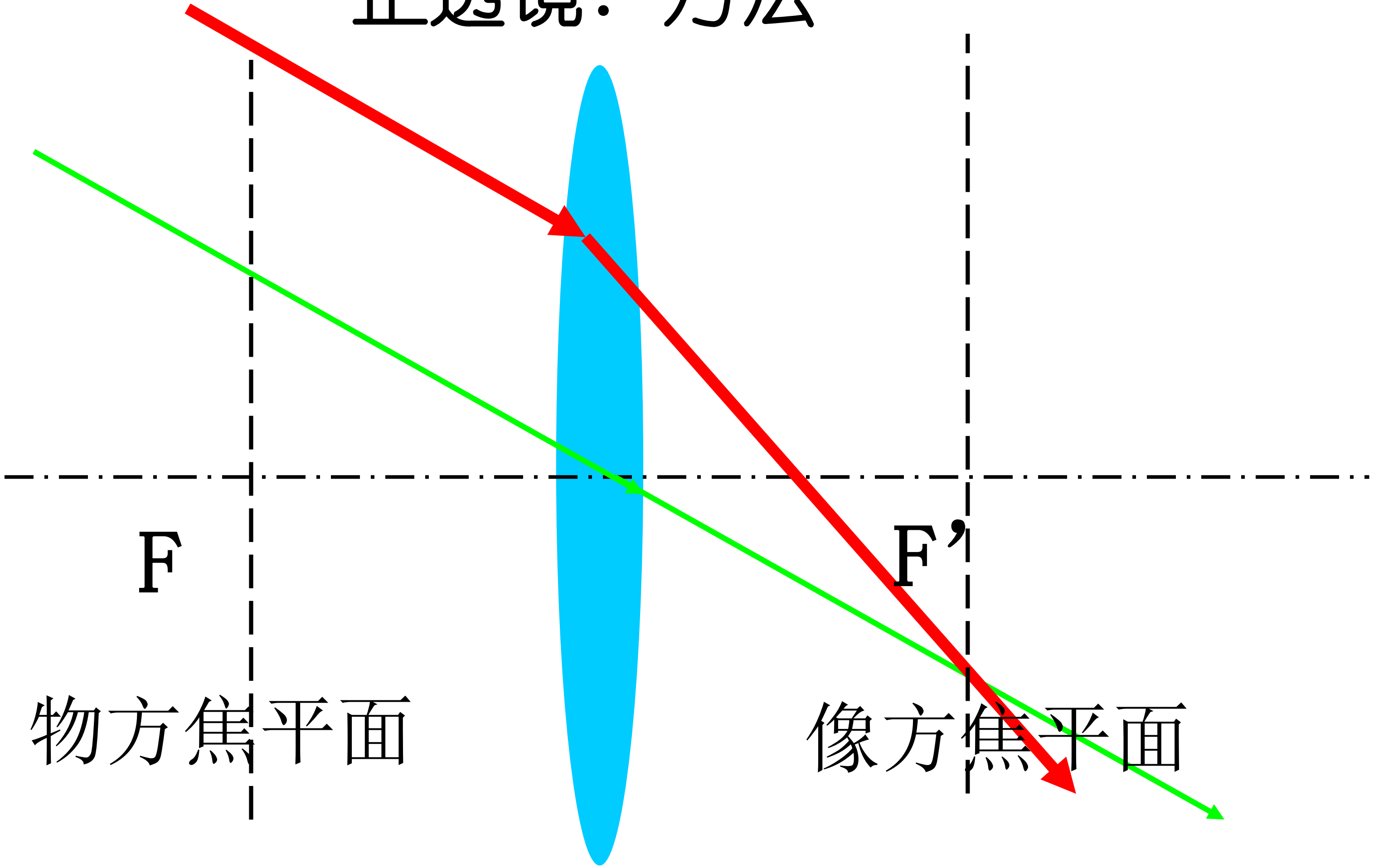
（3）经过光心的物方入射光线⇔经过光心并与入射光线方向平行的像方光线



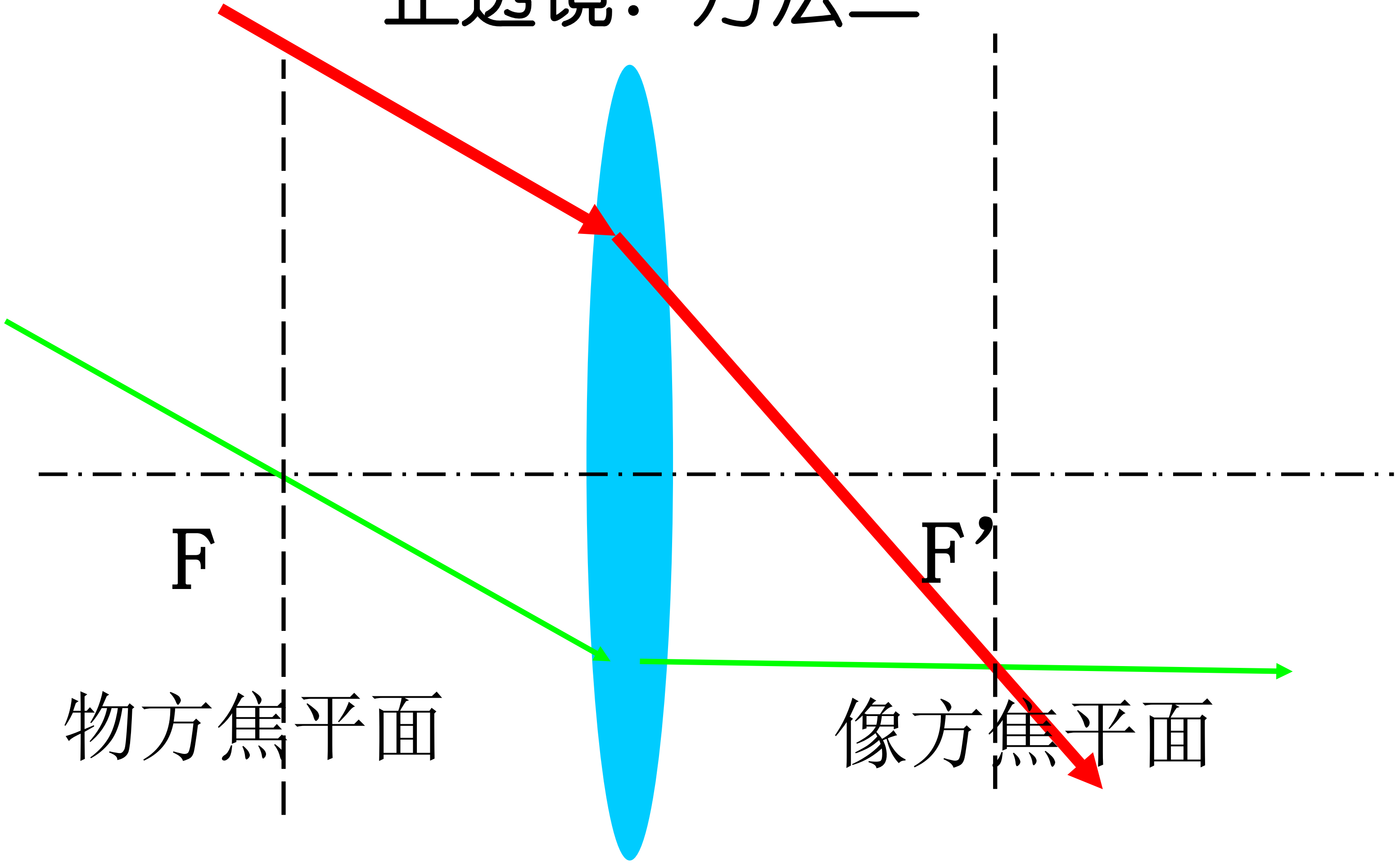



# 任意光线经过透镜的共轭光线作图

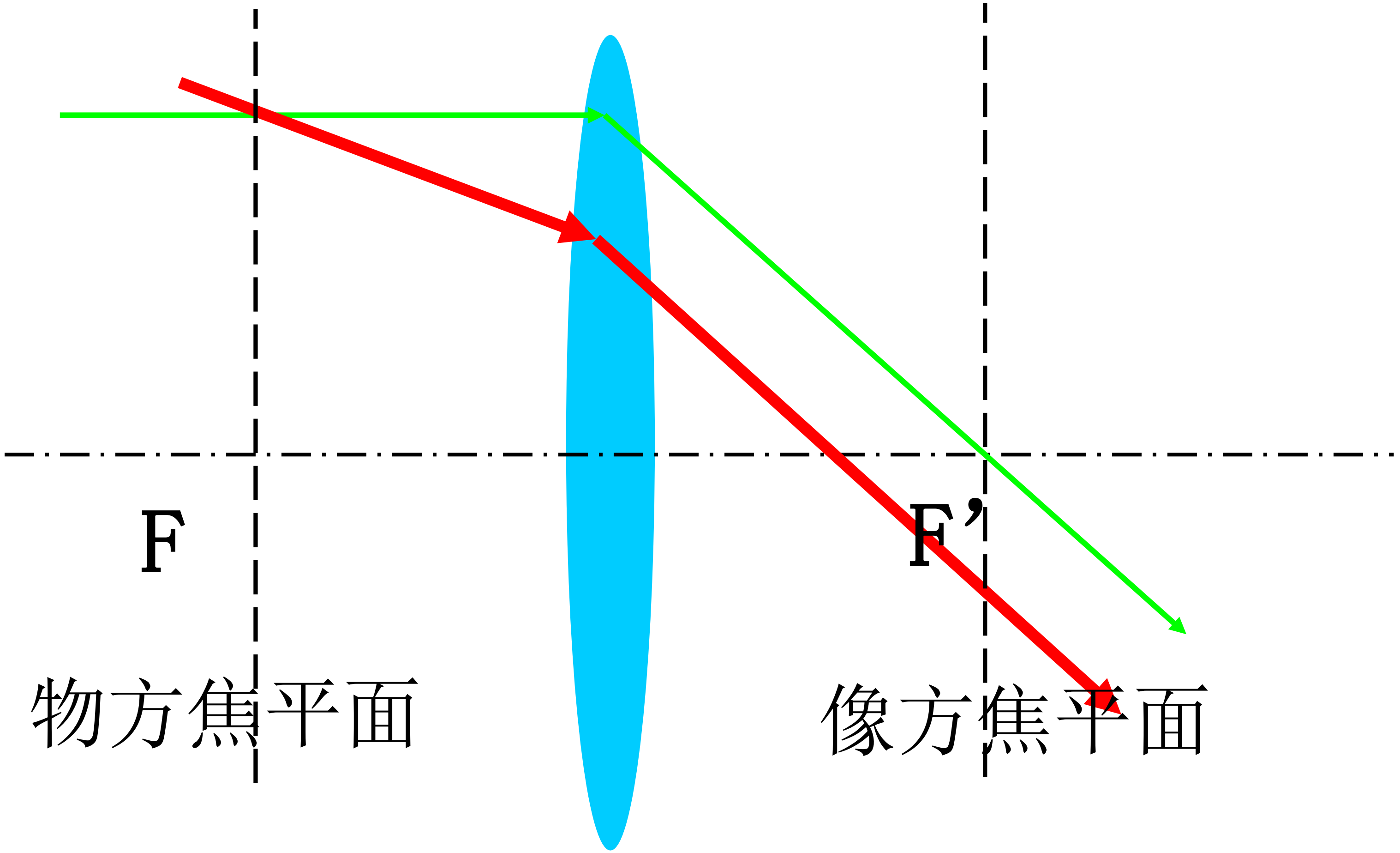
## 正透镜：方法一



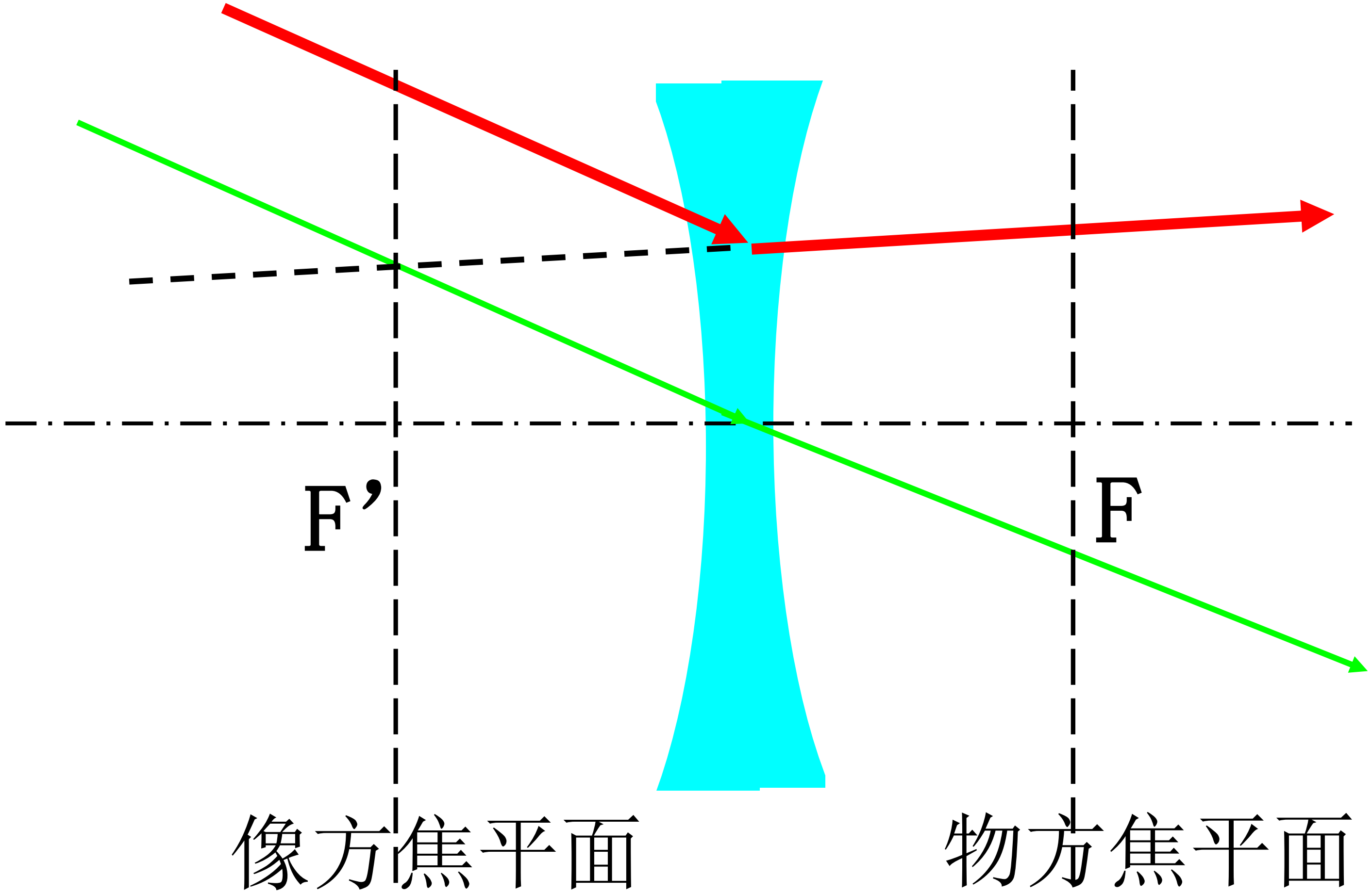
# 正透镜：方法二



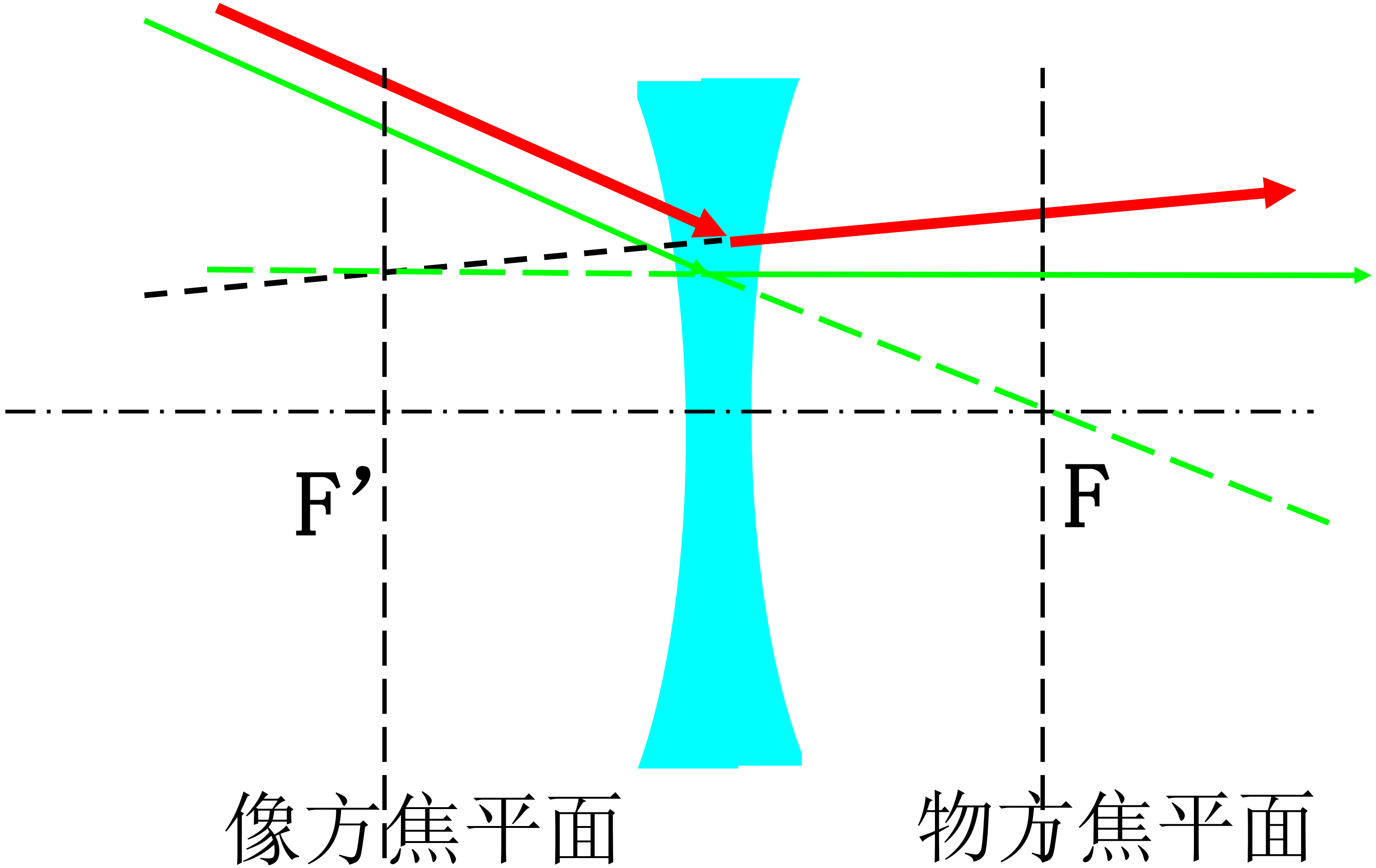
# 正透镜：方法三



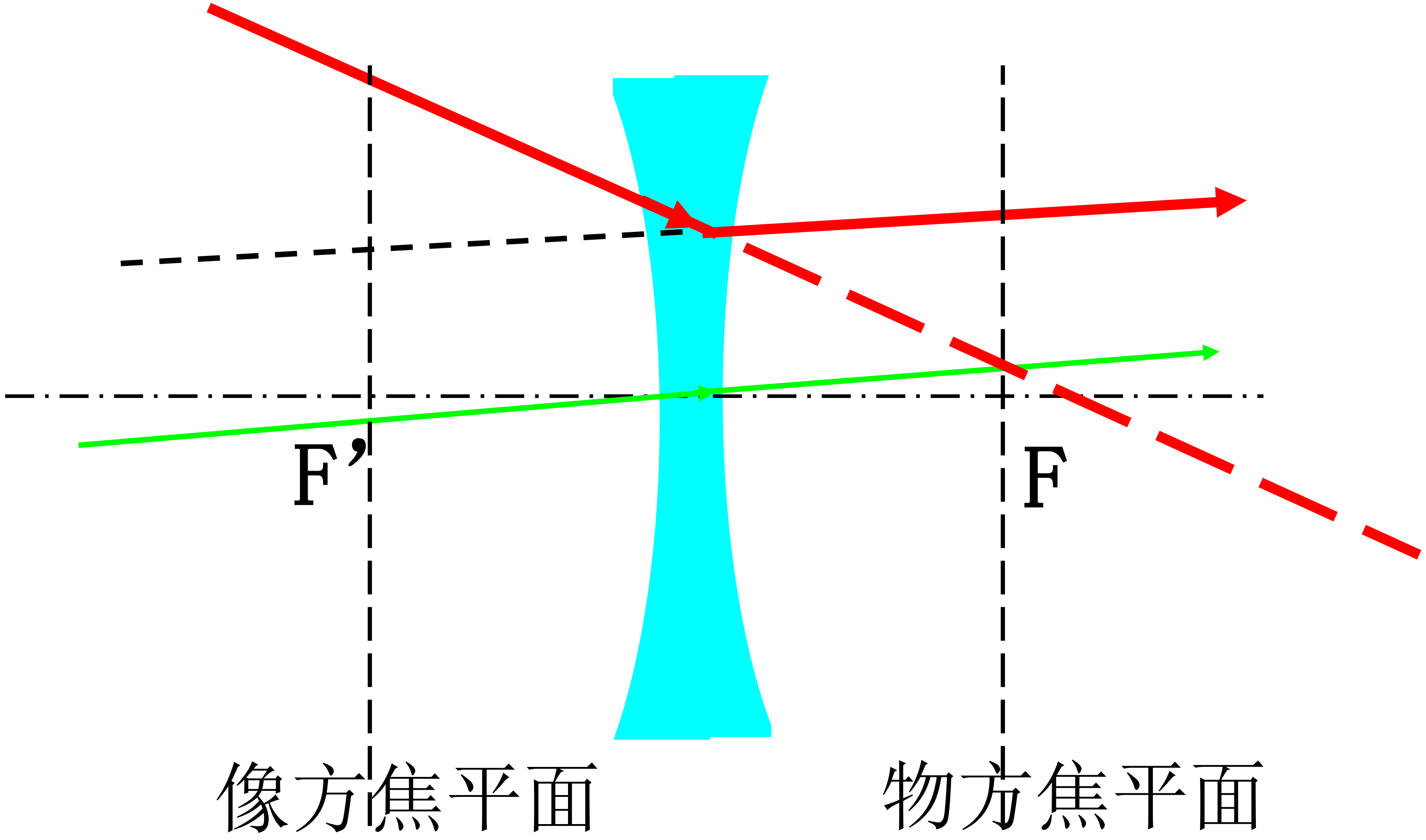
# 负透镜：方法一



# 负透镜：方法二



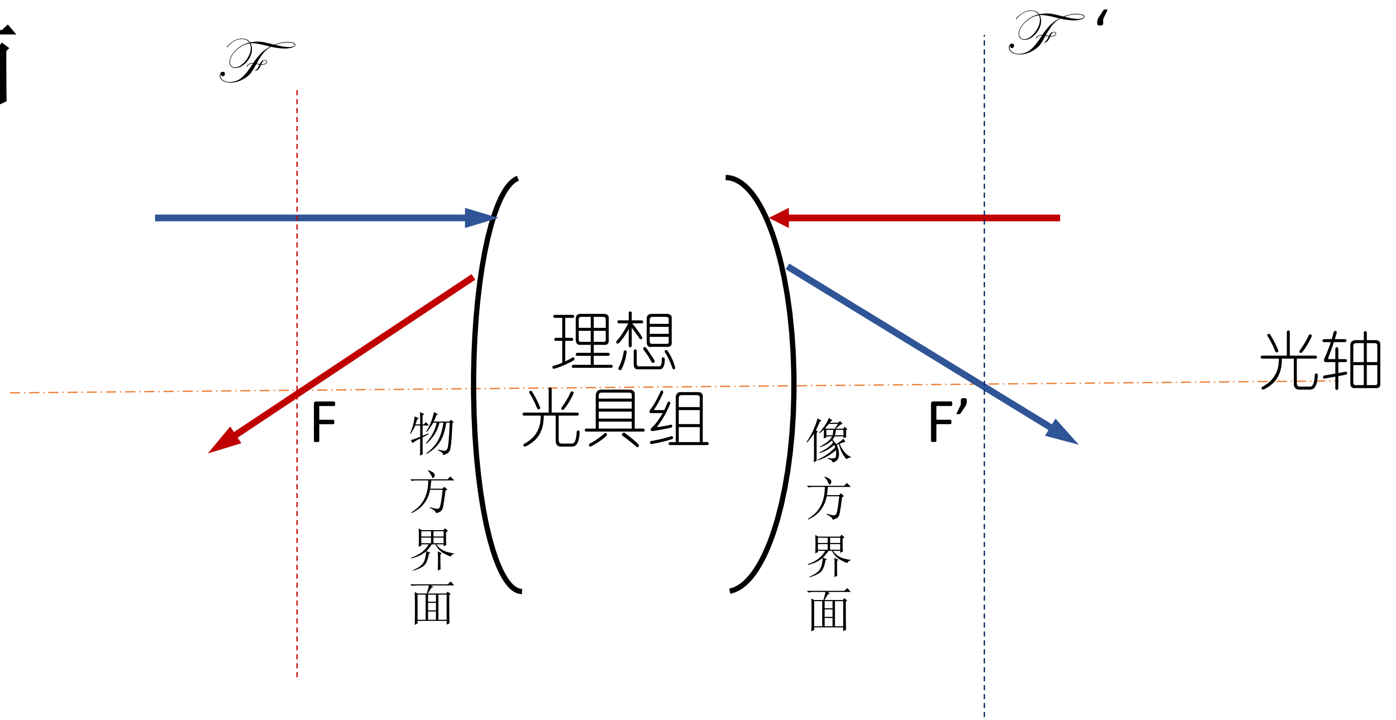
# 负透镜：方法三



# 理想光具组(共轴球面系统)

理想共轴球面系统的基点和基面包括焦点（焦平面）、主点（主平面）以及节点（节平面）。在确定了理想光具组的基点和基面以后就可以完全确定物像关系了。

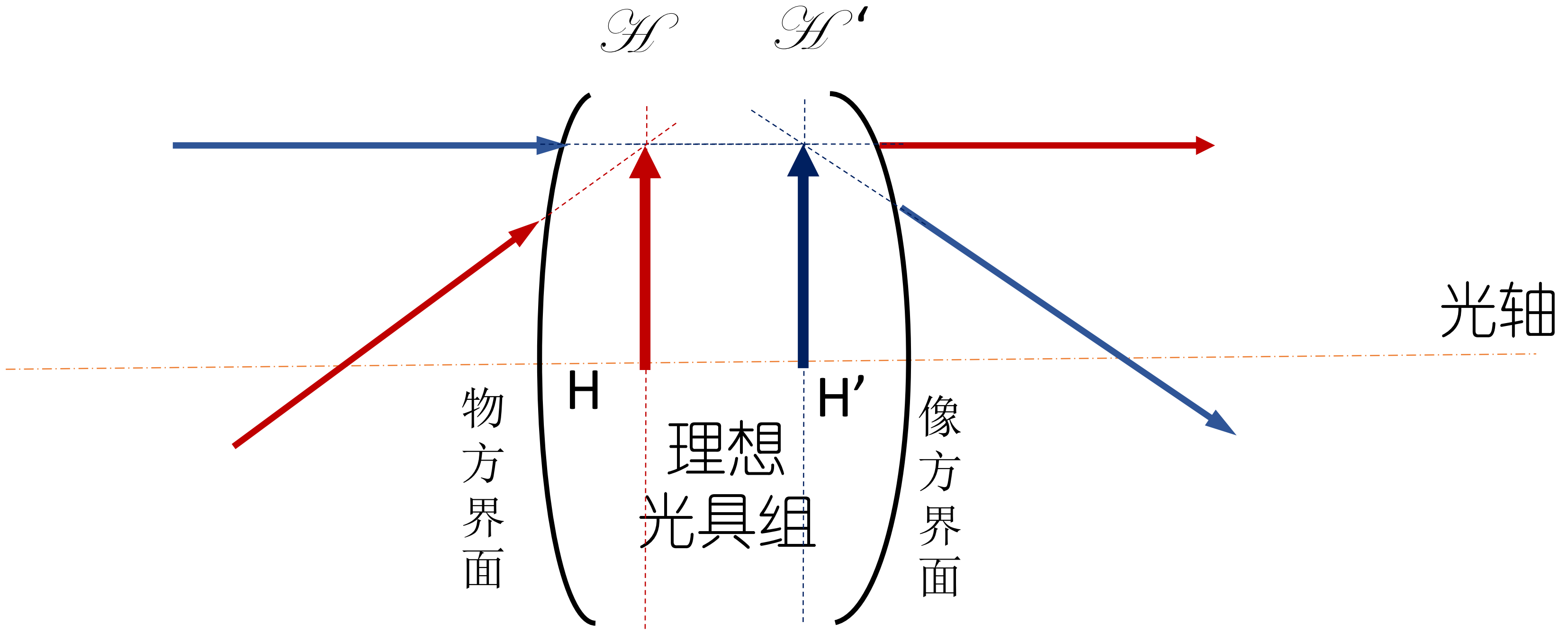
## 焦点和焦平面



## 主点和主平面

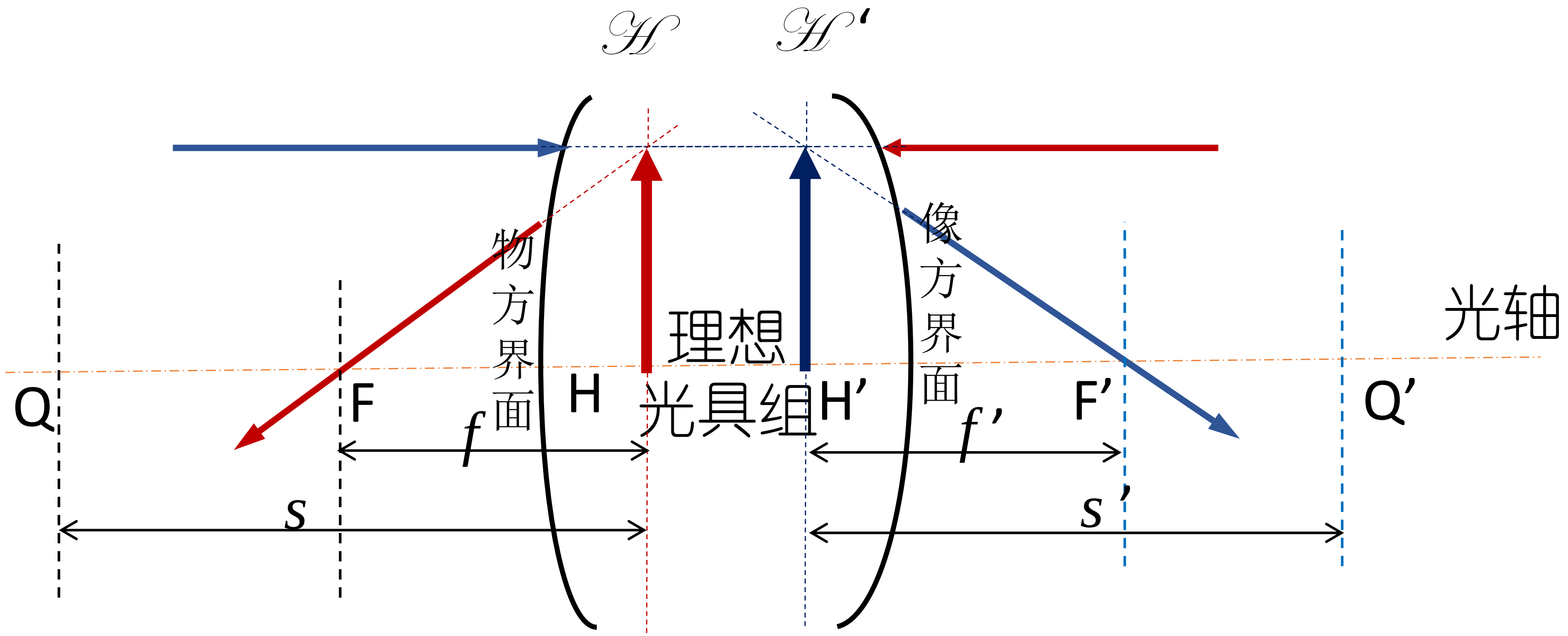
横向（垂轴）放大率等于+1的一对共轭平面为**主平面**。物方主平面$\mathscr{H}$，像方主平面$\mathscr{H}'$。

主平面与主光轴的交点为**主点**。物方主点$H$，像方主点$H'$。




- 出射光线在像方主平面上的投射高度与入射光线在物方主平面上的投射高度相等

# 理想共轴光具组物距、像距、焦距的标定




① 物距s是物方主点H到轴上物点Q的距离； 像距s'是像方主点H'到轴上像点Q'的距离。

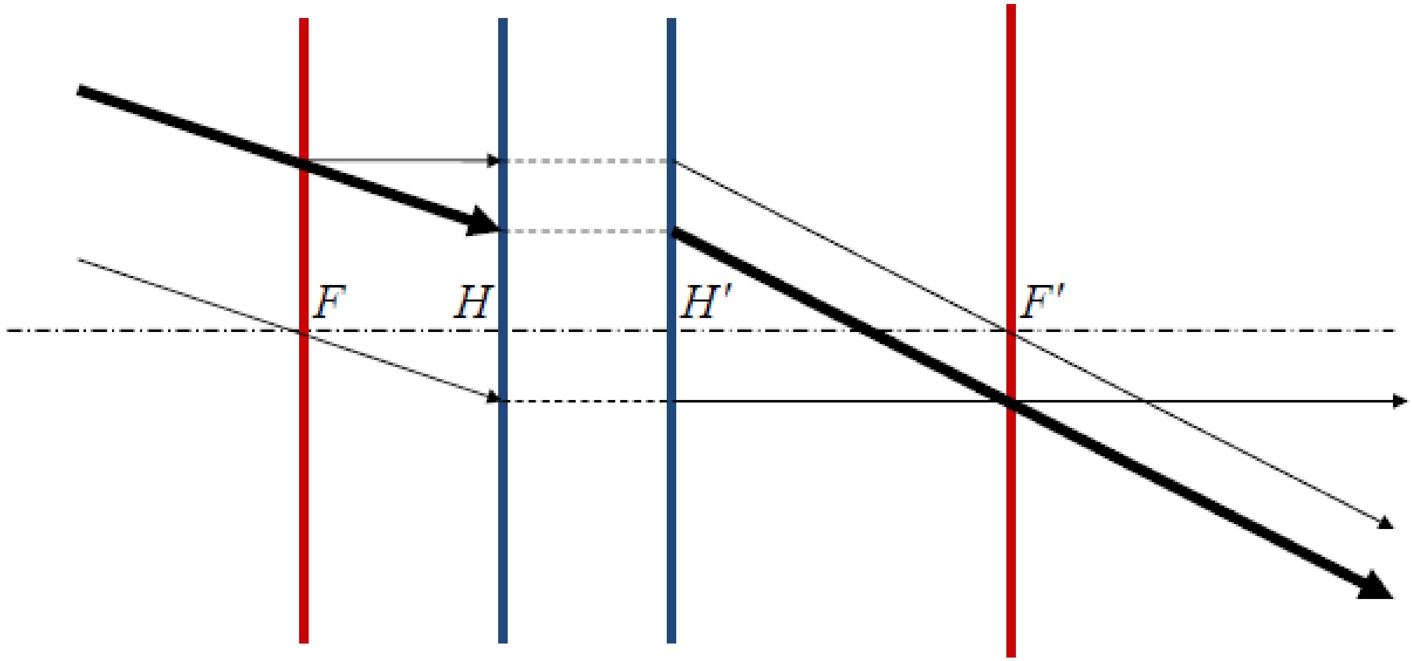
② 物方焦距*f*是是物方焦点F到主点H的距离；像方焦距*f'*是是像方焦点F'到主点H'的距离。

③ 符号法则(光线从左向右入射)：物方若Q(或者F)在H的左侧，则s(或*f*)>0;反之， s(或*f*)<0. 像方若Q'(或者F')在H'的右侧，则s'(或*f '*)>0;反之， s'(或*f '*)<0

④ 薄透镜是理想光具组的一个特例：两个主平面（主点）的间距趋于0

# 理想共轴光具组的作图

任意方向光线的共轭光线求解



# 成像公式总结

**球面折射系统**

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$$

$$V=\frac{y'}{y}=-\frac{ns'}{n's}$$

$$f'=\frac{n'}{n'-n}r$$

$$f=\frac{n}{n'-n}r$$

$$\frac{f'}{f}=\frac{n'}{n}$$

**反射系统**

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r}$$

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$$

$$V=-\frac{s'}{s}$$

$$f'=f=-\frac{r}{2}$$

**空气中薄透镜**

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}$$

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$$

$$V=-\frac{s'}{s}$$

$$f'=f$$

**共轴球面系统**

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$$

$$V=\frac{y'}{y}=-\frac{ns'}{n's}$$

$$\frac{f'}{f}=\frac{n'}{n}$$

# 小结：

- 光线
- 理想成像与齐明点
- 傍轴条件与单球面的成像公式
- 透镜成像

## Comments on geometric optical imaging:

Physics of optical imaging is only Snell’s law at serial interfaces

the Physics is simple but the calculation is complicated!

Computer can help the calculations!

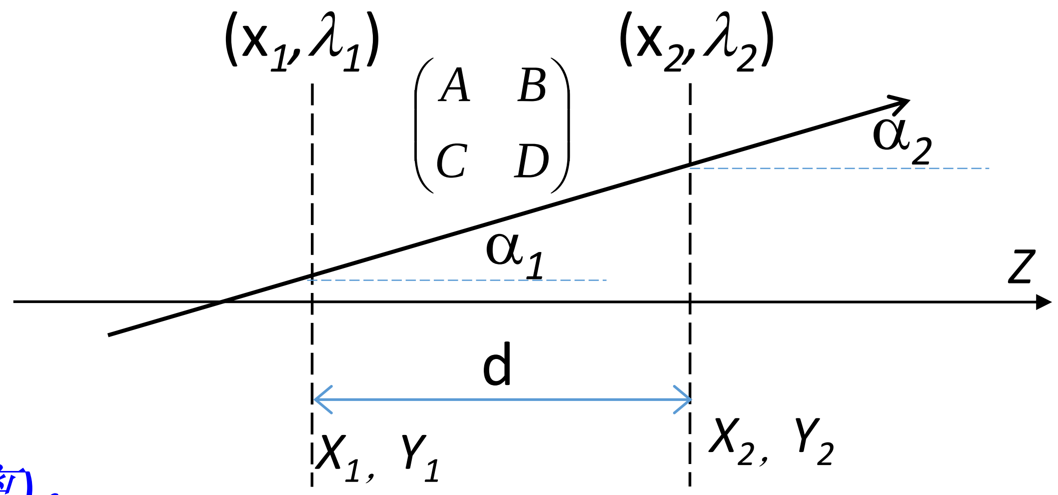
# 矩阵与矩阵乘法

$$M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

# 线形方程组得矩阵表示

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + bx_2 \\ y_2 = cx_1 + cx_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = MX$$

# 光线矩阵简介




◆"光线"描述 $\begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}$

***x**, 光线在XY平面内的位置(离开Z轴的距离)；*

***$\lambda$=dx/dz=tg$\alpha$**, 光线在该位置的斜率*

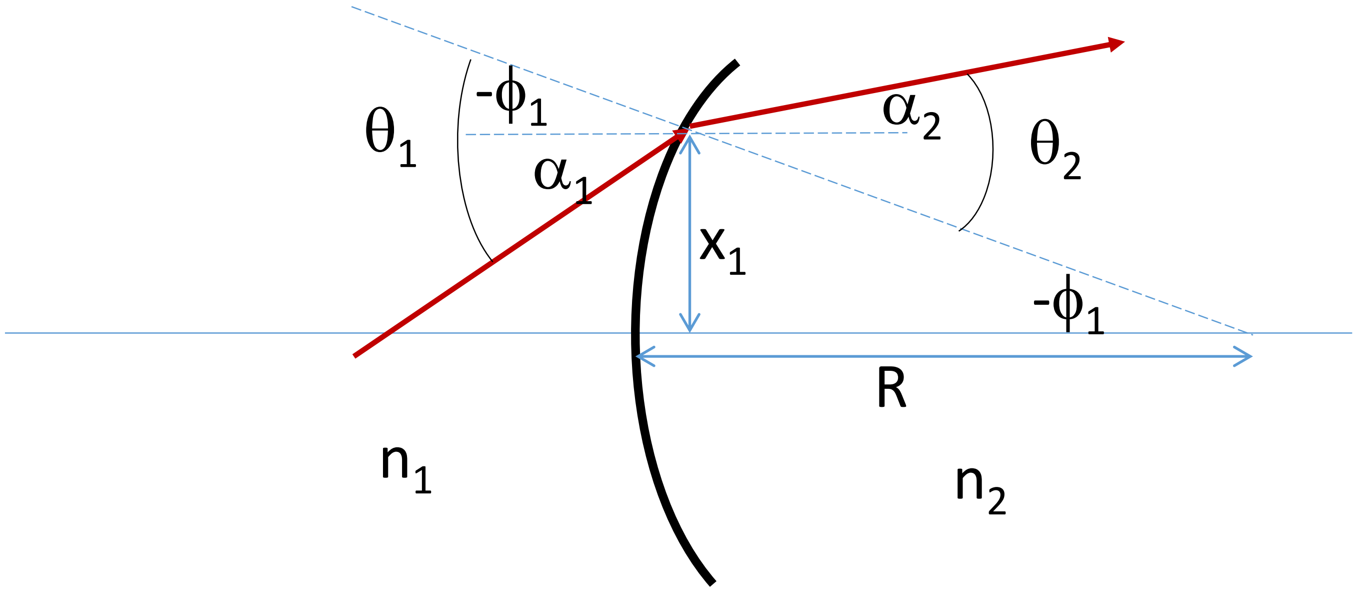
$$\begin{cases} x_2 = x_1 + d\tan\alpha_1 \\ \alpha_2 = \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + d\lambda_1 \\ \lambda_2 = \lambda_1 \end{cases}$$

◆光线在介质或一定光学元件中传播、透射(或反射)的行为可以用一个2×2的矩阵来描述，该矩阵被称为"光线矩阵"

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 单球面折射的光线矩阵




$$n_2\theta_2 \approx n_1\theta_1$$

$$\theta_2 = -\phi_1 + \alpha_2 \quad \theta_1 = -\phi_1 + \alpha_1 \quad -\phi_1 = \frac{x_1}{R}$$

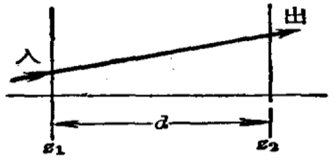
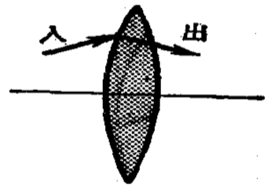
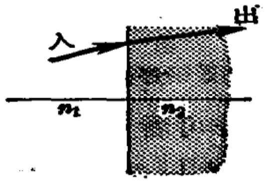
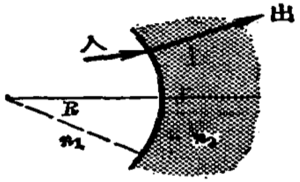
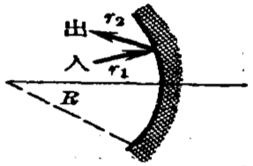
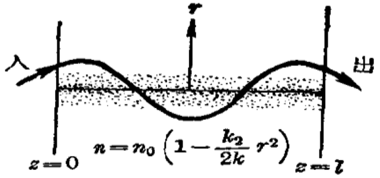
$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ n_2\alpha_2 \approx n_1\alpha_1 + \dfrac{n_2 - n_1}{-R}x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ \lambda_2 = \dfrac{n_2 - n_1}{n_2}\dfrac{1}{-R}x_1 + \dfrac{n_1}{n_2}\lambda_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_2 - n_1}{n_2}\dfrac{1}{-R} & \dfrac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}}$$

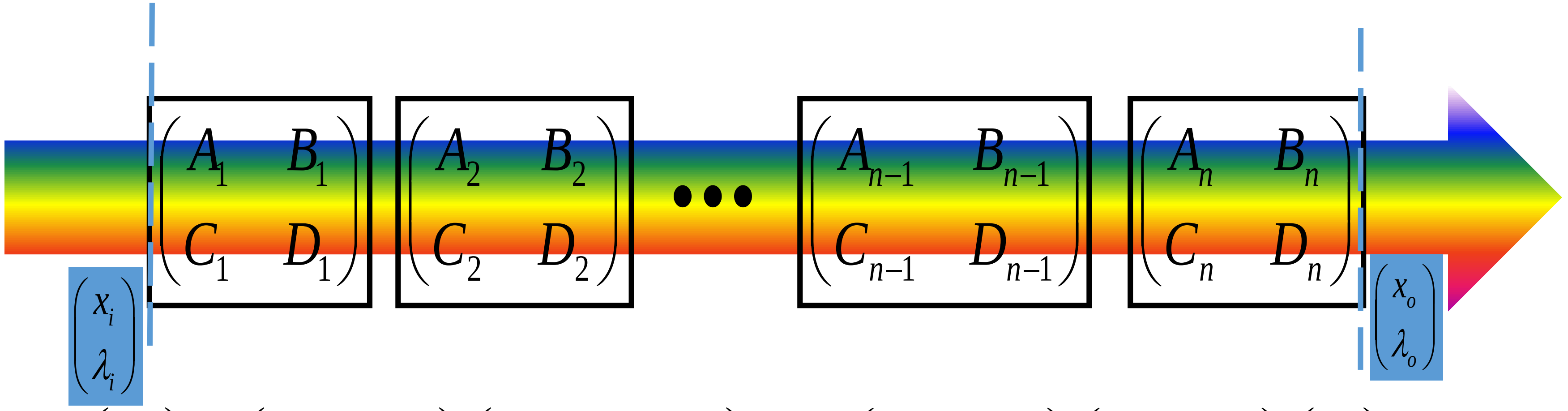
# 典型的几个光线矩阵

| | | |
|---|---|---|
| (1) 长度为 $d$ 的直线段 |  | $\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| (2) 薄透镜：焦距 $f$ （$f>0$，会聚；$f<0$，发散） |  | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix}$ |
| (3) 电介质界面：折射率 $n_1$, $n_2$ |  | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$ |
| (4) 球面电介质界面：半径 $R$ |  | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{n_2}\frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$ |
| (5) 球面反射镜：曲率半径 $R$ |  | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R} & 1 \end{bmatrix}$ |
| (6) 有二次型折射率变化曲线的介质 |  | $\begin{bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,l\right) & \sqrt{\frac{k}{k_2}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,l\right) \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,l\right) & \cos\left(\sqrt{\frac{k_2}{k}}\,l\right) \end{bmatrix}$ |

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{n_1}{n_2}$$

两者等价

# 复杂光学系统(多个元件)的光线矩阵

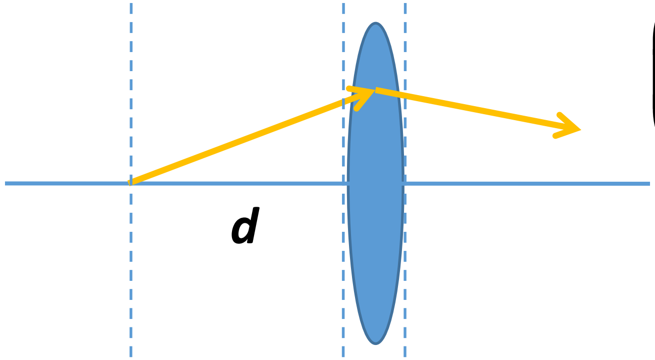



$$\begin{pmatrix} x_o \\ \lambda_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ \lambda_i \end{pmatrix}$$

！!注意矩阵相乘的次序：从出射面开始到入射面结束

**简单举例:**

*光线在均匀介质空间传播距离d后通过焦距为f的透镜*

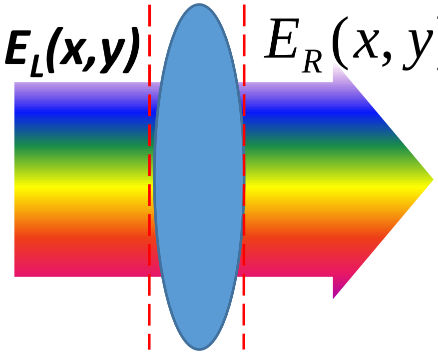



$$\begin{pmatrix} \lambda_o \\ x_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i \\ x_i \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & d \\ -1/f & 1-d/f \end{pmatrix}}$$

# 梯度折射率光纤中的光传播

透镜的物理性质：*对透过的波面产生二次位相弯曲* **(聚焦或发散作用)**




$$E_R(x,y)=E_L(x,y)e^{ik\frac{x^2+y^2}{2f}}$$

$$\boxed{n(x,y)=n_0[1-\frac{k_2}{2k}(x^2+y^2)]}$$

*$k_2>0$ 会聚*

*$k_2<0$ 发散*

**梯度折射率光纤：**通过二次型折射率分布实现类似透镜的功能

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\sqrt{\frac{k_2}{k}}z & \sqrt{\frac{k}{k_2}}\sin\sqrt{\frac{k_2}{k}}z \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}}\sin\sqrt{\frac{k_2}{k}}z & \cos\sqrt{\frac{k_2}{k}}z \end{pmatrix}}$$

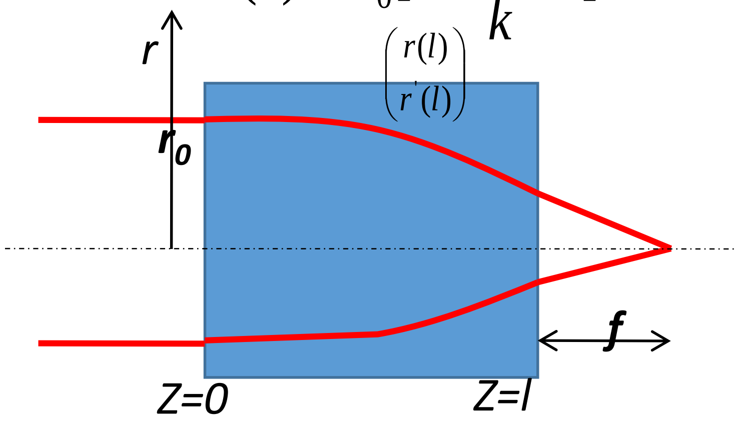
二次型折射率分布的物理原因：

- ☐热效应
- ☐离子交换掺杂：梯度折射率光纤、波导
- ☐光Kerr效应

# 自聚焦棒，梯度折射率光纤

平行光垂直入射到长度为$l$的自聚焦棒的端面，则z=0处的光线参数为 $\begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$n(r) = n_0[1 - \frac{k_2}{k} r^2]$




$$\begin{pmatrix} r(l) \\ r'(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ar_0 \\ Cr_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{\frac{k_2}{k}}l \\ -\sqrt{\frac{k_2}{k}} \sin\sqrt{\frac{k_2}{k}}l \end{pmatrix} r_0$$

如果焦点在介质内，则焦距为

$$f = \left|\frac{r}{r'}\right| = \sqrt{\frac{k}{k_2 k}} ctg \sqrt{\frac{k_2}{k}} l$$

如果焦点空气中，$r'_{(l)外} = \mathrm{n}_0 r'_{(l)内}$

$$h = \left|\frac{r}{r'_{外}}\right| = \frac{1}{\mathrm{n}_0} \sqrt{\frac{k}{k_2 k}} ctg \sqrt{\frac{k_2}{k}} l$$