3\17 习题课讲义

一、作业

1.(1) 显然 $R \supset \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in R: |f(x)|\le k\}$，反过来 $\forall x_0 \in R$ $|f(x_0)| \le [f(x_0)]+1$，即 $\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in R: |f(x)|\le k\} \subseteq R$

结合左右包含关系 $\bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\in R: |f(x)|\le k\} = R$

(2) 显然 $RHS \subset LHS$，反过来 $x\in RHS$，若 $|f(x)| = \varepsilon > 0$，则 $|f(x)| > \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}]+1} \Rightarrow \varepsilon = 0$，即 $LHS \subseteq RHS$

2.(1) $\forall x\in LHS \Leftrightarrow x\notin \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \Leftrightarrow \forall \alpha\in I,\ x\notin A_\alpha \Leftrightarrow x\in A_\alpha^c\ \ \forall \alpha\in I \Leftrightarrow x\in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha^c$

(2) $\forall x\in LHS \Leftrightarrow x\notin \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha\in I,\ x\notin A_\alpha \Leftrightarrow \exists \alpha\in I,\ x\in A_\alpha^c \Leftrightarrow x\in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha^c$

3.(1) $x\in LHS \Leftrightarrow \forall j\in N^+,\ x\in \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \Leftrightarrow \forall n\in N^+, \exists N>n$ 使得 $x\in A_n \Leftrightarrow \exists$ 无穷多个 k_j s.t $x\in A_{k_j} = RHS$

(2) $x\in LHS \Leftrightarrow \exists j_0>0,$ s.t $x\in \bigcap_{k=j_0}^{\infty} A_{k_0} \Leftrightarrow x\in A_n,\ \forall n\ge j_0 \Leftrightarrow x\in A_k\ \ \forall k>j_0 = RHS$

4. $RHS = \bigcap_{m=1}^{\infty}\{\forall N\in N^*, \forall n>N$，使得 $|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{m}\}$

$LHS \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon>0, \exists N\in N^*, \forall n>N^*, |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}$，由于 $\forall\varepsilon>0, \exists m\in N^*$ s.t $\frac{1}{m}<\varepsilon<\frac{1}{m-1}$

$\Leftrightarrow \{\forall m>0, \exists N\in N^*, \forall n>N^*, |f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{m}\}$

$= RHS$

5.(1) 显然 ϕ 与 R^n 是开集

(2) $\forall x\in A\cap B$，有 $B_{r_1}(x)\subset A$ $B_{r_2}(x)\subset B \Rightarrow B_{\min(r_1,r_2)}(x)\subset A\cap B \Rightarrow A\cap B$ 开

(3) $\forall x\in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \Rightarrow x\in A_\alpha$，对某个 $\alpha\in I \Rightarrow \exists r_0$, s.t $B_{r_0}(x)\subset A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$，故 $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ 开

6. 只用证 $a_x\notin G$，假设 $a_x\in G \Rightarrow \exists r_0>0$, s.t $(a_x-r_0, a_x+r_0)\subset G$

$\Rightarrow a_x-\frac{r_0}{2}\in G$，但 $a_x-\frac{r_0}{2}<a_x$，与 a_x 定义矛盾，故 $a_x\notin G$

二、补充习题

1. $A_{2k-1}=(0,\frac{1}{k})$ $A_{2k}=(0,k)$ 求 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ 和 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$

2. 有函数列 f_n s.t $f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots f_{n+1}(x) \le \cdots$ $\forall x \in E$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

证明 $\{x \mid f(x) \le c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{f_n(x) \le c\}$

3. $\{f_n\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实函数列，$E \subset [a,b]$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[a,b]-E}(x) = \begin{cases} 1 & x \in E^c \\ 0 & x \in E \end{cases}$

$E_n = \{x \in [a,b] \mid f_n(x) \ge \frac{1}{2}\}$，证明 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} E_n$，并求出这个集合

4. 设 $a_n \to a$，证明 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=N}^{\infty} (a_n - \frac{1}{k}, a_n + \frac{1}{k}) = a$

5. $A_n = \{\frac{m}{n} \mid m \in Z\}$，求 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 及 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$

6 (1) 证明 Cantor 集是完全不连通的 ($\forall x, y \in C$，$\exists z \in (x,y)$，$z \notin C$)

(2) 证明 C 中元素可以写为 $\sum \frac{a_k}{3^k}$ $(a_k = 0, 2)$ 形式

从 $C \to [0,1]$

(3) 对于 $\sum \frac{a_k}{3^k} \in C$, 定义 $F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^{k+1}}$，证明 F 是连续的满射

(4) F 可以扩张成 $[0,1]\to[0,1]$ 上的函数.

7(0) 证明闭集是 G_δ 集且开集是 F_σ 集

(1) 给出 F_σ 集但不是 G_δ 集的例子

(3) 给出一个Borel集不是 F_σ 也不是 G_δ 集

8. (1) 若 A, B 开, 则 $A+B$ 开

(2) 若 A, B 闭, 则 $A+B$ 是 F_σ 集

(3) 举出 A, B 闭但 $A+B$ 不闭的例子

9. 是否存在$\mathbb{Q}$的一个重排$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，使$\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n-\frac{1}{n}, x_n+\frac{1}{n}) \neq \mathbb{R}$