

中国科学技术大学

2021-2022 秋季学期微分方程 I 期中试卷

姓名: _____ 学号: _____

注意: 计算题只写结果不写过程, 不给分. 所有题目中使用的定理或者命题需要注明.

请从第 1 题 - 第 6 题中选择五题作答. 如果全做, 取分数最高的五题计入总分. 第 7-11 题为必答题.

1. (15 分) 求方程 $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$ 的通解.

2. (15 分) 求方程 $y^2(1 + (\frac{dy}{dx})^2) = 1$ 的通解.

3. (15 分) 求线性方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2x - y - z \\ \frac{dx}{dt} = 2x - y - 2z \\ \frac{dz}{dt} = 2z - x + y \end{cases}$$

的通解.

4. (15 分) 求微分方程 $x^2y'' - xy' + 2y = x \ln x$ 的通解.

5. (15 分) 考虑线性方程 $y'' + \alpha(t)y = 0$, 其中 $\alpha(t)$ 在 \mathbb{R} 上连续. 令 $\phi_1(t), \phi_2(t)$ 是两个线性无关的解, 且

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|\phi_1(t)| + |\phi_1'(t)|) = 0.$$

证明:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|\phi_2(t)| + |\phi_2'(t)|) = \infty.$$

6. (15 分) 用 (广义) 幂级数方法求解方程

$$2xy'' + (1 - 2x)y' - y = 0.$$

以下为必答题:

7. (15 分) 考虑自治系统

$$\begin{cases} x' = y - 2x^2 \\ y' = x - 1 \end{cases}$$

(a) 画出该系统在平衡点附近的相图.(要有计算过程)

(b) 做出 Nullcline 图, 并画出该系统在整个相平面上的相图. (在全平面相图中用虚线画出 nullcline.)

8. (15 分) 分析系统

$$\begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = x - y^3 \end{cases}$$

的零解的稳定性.

9. (15 分) 设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域 $0 \leq x \leq a, |y| < b$ 上连续, 且当 $y_1 \leq y_2$ 时, $f(x, y_1) \leq f(x, y_2)$. 对于所有的 $x, f(x, 0) \geq 0$. 通过构造皮卡序列证明: 初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = 0$$

在区间 $0 \leq x \leq h$ 上存在解, 其中

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|.$$

(注意: 直接使用 Peano 定理不给分.)

10. (15 分) 证明: 存在 $\lambda = \lambda_0$ 使得下面的方程

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \lambda(1 + \sin^2 x + \sin^2 y) + x \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

存在至少一个解.

11. (15 分) 设 n 阶常数矩阵 A 的所有特征值都有负的实部, n 阶矩阵 $B(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上连续, 且满足

$$\int_0^\infty \|B(t) - A\| dt < \infty.$$

证明: 方程组

$$\frac{dx}{dt} = B(t)x$$

的零解是渐近稳定的.

(提示: 把方程改写为 $\frac{dx}{dt} = Ax + (B(t) - A)x$.)