§7.1 几种收敛

定理1 $(X_n \xrightarrow{a.s.} X) \Rightarrow (X_n \xrightarrow{P.} X) \Rightarrow (X_n \xrightarrow{D.} X)$

$(X_n \xrightarrow{r.} X) \Rightarrow (X_n \xrightarrow{P.} X)$

引理2 $X_n \xrightarrow{P.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{D.} X$

引理3 $X_n \xrightarrow{r.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P.} X \quad (r \geq 1)$

引理4 下列结论等价

(1) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

(2) $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \frac{1}{k}\}) = 0$

(3) $\forall \varepsilon > 0.\ P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}) = 0$

(4) $\forall \varepsilon > 0.\ \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}) = 0$

证: (1) $\Leftrightarrow$ (2)

$$P(\{W \mid \lim_{n\to\infty} X_n(W) \neq X(W)\}) = 0$$

$\lim_{n\to\infty} X_n(W) \neq X(W) \quad \exists k, \forall n, \exists n_0 > n .\ s.t.\ |X_{n_0}(W) - X(W)| > \frac{1}{k}.$

$\{W \mid \lim_{n\to\infty} X_n(W) \neq X(W)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \frac{1}{k}\}$

(2) $\Rightarrow$ (3) $\forall \varepsilon > 0.\ \exists k\ s.t.\ \varepsilon > \frac{1}{k}.$

若 $W \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}$ 则 $W \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \frac{1}{k}\}$

$\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \frac{1}{k}\}$

$\therefore P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| > \varepsilon\}) = 0$

(3) $\Rightarrow$ (2) 取 $\varepsilon = \frac{1}{k}$ 显然成立.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) $B_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} |X_m - X| > \varepsilon \quad B_n \supset B_{n+1} \supset \cdots$

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\lim_{n\to\infty} B_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_n - X| > \varepsilon\})$$

引理5 $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P.} X$.

证：$\forall \varepsilon > 0$. $P(|X_n - X| > \varepsilon) \le P(\bigcup_{m=n}^{\infty} |X_n - X| > \varepsilon) \to 0$

反之不成立：$\Omega = (0,1)$

$X_1 = 1$. $X_2 = \begin{cases} 1, & 0 < w \le \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < w < 1 \end{cases}$ $X_3 = \begin{cases} 0, & 0 < w \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < w < 1. \end{cases}$ $X_4 = I_{\{(0,\frac{1}{3}]\}}$ $X_5 = I_{\{(\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\}}$ $X_6 = I_{\{(\frac{2}{3},1)\}}$

$n = \frac{k(k-1)}{2} + i$，则 $X_n = I_{\{(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]\}}$ $E[|X_{\frac{k(k-1)}{2}+i} - 0|^r] = 1 \cdot \frac{1}{k} \to 0$.

$P(|X_n - 0| > \varepsilon) = \frac{1}{k} \to 0$ 故 $X_n \xrightarrow{P.} 0$ 但 $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$ 不成立.

$X_n \xrightarrow{r} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{a.s.} X$ ， $X_n \xrightarrow{a.s.} X \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{r} X$.

定理6

(1) $X_n \xrightarrow{D.} c$ (常数). 则 $X_n \xrightarrow{P.} c$

(2) $X_n \xrightarrow{P.} X$ 且 $\exists$ 常数 k. s.t. $P(|X_n| \le k) = 1$, $\forall n$. 则 $X_n \xrightarrow{r} X$. $r \ge 1$

(3) 若对 $\forall \varepsilon \ge 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < \infty$. 则 $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

证：(1) 记 $X = c$ $F(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \ge c \end{cases}$

$\forall \varepsilon > 0$. $P(|X_n - c| > \varepsilon) = P(\{X_n < c-\varepsilon\} \cup \{X_n > c+\varepsilon\}) = P(X_n < c-\varepsilon) + P(X_n > c+\varepsilon)$

$= 1 - F_n(c+\varepsilon) + P(X_n < c-\varepsilon) \to 1 - F_n(c+\varepsilon) = 0$

(2) 验证：$P(|X| \le k) = 1$

$\forall \varepsilon > 0$. $P(|X| \le k+\varepsilon) = P(|X| \le k+\varepsilon, |X_n| \le k) \ge P(|X_n - X| \le \varepsilon, |X_n| \le k) \to 1$

令 $\varepsilon \to 0^+$. 故 $P(|X| \le k) = 1$.

$E(|X_n - X|^r) = E(|X_n - X|^r 1_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}}) + E(|X_n - X|^r 1_{\{|X_n - X| < \varepsilon\}})$

$\le (2k)^r \cdot P(|X_n - X| > \varepsilon) + \varepsilon^r \to \varepsilon^r$ 令 $\varepsilon \to 0^+$. 有 $X_n \xrightarrow{r} X$.

(3) $P(\bigcup_{m=n}^{\infty} |X_n - X| > \varepsilon) \le \sum_{m=n}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$. (当 $n \to \infty$ 时) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

引理7 $X_n \xrightarrow{P.} X \Leftrightarrow \{X_n\}$ 的任意子列 $\{X_{n(m)}\}$ 可以找到几乎处处收敛的子列 $\{X_{n(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$

证："$\Rightarrow$" 任取子列 $\{X_{n(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. $\lim_{m \to \infty} P(|X_{n(m)} - X| > \varepsilon) = 0$.

$\{\varepsilon_k\}$ $k \to \infty$ 时. $\varepsilon_k \to 0$. $P(|X_{n(m)} - X| > \varepsilon_k) \to 0$ 当 $m \to \infty$ 时

$\exists n(m_k)$. $P(|X_{n(m_k)} - X| > \varepsilon_k) < \frac{1}{k^2}$. 选取 $n(m_k)$ 递增

$\sum P(|X_{n(m_k)} - X| > \varepsilon_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ 故 $X_{n(m_k)} \xrightarrow{a.s.} X$.

"⇐" 反证. 假设" $X_n \xrightarrow{P} X$ " 不成立.

$\exists \varepsilon_0$. $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon_0) \neq 0$. 从而对 ε_0, $\exists \delta_0 > 0$, $\forall n$, $\exists m > n$

$P(|X_m - X| > \varepsilon_0) > \delta_0$ 即有无穷多个 m. s.t. $P(|X_m - X| > \varepsilon_0) > \delta_0$

可以构成一个子列. 此子列无几乎处处收敛于 X 的子列. 矛盾!

定理 8 (Skorokhod 表示定理)

$\{X_n\}$, X 在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 定义分布函数分别为 $\{F_n(x)\}$, $F(x)$.

$X_n \xrightarrow{D} X$, 则

(1) $\exists (\Omega', \mathcal{F}', P')$ 以及在此空间上定义的 r.v. Y_n, Y, 其中 Y_n 的分布函数为 $F_n(x)$, Y 的分布函数为 $F(x)$. (2). $Y_n \xrightarrow{a.s.} Y$

证: $F(x)$ 是分布函数. $F^{-1}(y) = \sup\{x \mid F(x) < y\}$

可验证 $(F(x) < y \Leftrightarrow x < F^{-1}(y))$ or $(F(x) \geq y \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(y))$

"⇒" $\lim\limits_{u\to x^+} F(u) = F(x) < y$, $\exists \delta$, s.t. $F(x+\delta) < y$, $x < x+\delta \leq F^{-1}(y)$

"⇐" $x < F^{-1}(y) = \sup\{x \mid F(x) < y\}$ $\exists x^* = \dfrac{x + F^{-1}(y)}{2} > x$.

s.t. $F(x) \leq F(x^*) < y$.

$\Omega' = (0, 1)$ $\mathcal{F}' = \mathcal{B}((0,1))$ P' Lebesgue 测度 $U \sim (0,1)$ 上均匀分布

令 $Y_n = F_n^{-1}(U)$ $Y = F^{-1}(U)$ $Y_n = F_n^{-1}(U) \leq x \Leftrightarrow U \leq F_n(x)$

$P'(Y_n \leq x) = P'(U \leq F_n(x)) = F_n(x)$, $P'(Y \leq x) = P'(U \leq F(x)) = F(x)$

hw: 7.3.3, 7.3.7, 7.3.8, 7.3.10