· 相抵标准型：$A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. $\exists\ P\in GL_m(\mathbb{F}),\ Q\in GL_n(\mathbb{F})$

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix} Q.$$

· Smith 标准型：设 $R=\mathbb{Z}, \mathbb{F}[X], \cdots$ (ED).

$A\in R^{m\times n}$. 则 $\exists\ P\in GL_m(R),\ Q\in GL_n(R)$.

及 $d_1,\cdots,d_r\in M$. $d_i \mid d_{i+1}$.

s.t. $A = P\begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ & & & 0\end{pmatrix} Q.$

Rk：$R=\mathbb{F}[X]$, $D_k := d_1\cdots d_k$. 行列式因子

d_i 不变因子.

$\{d_i$ 的初等因子组$\}_{i=1\cdots r}$：$A(\lambda)$ 的初等因子组

小测：1. (1) $\begin{pmatrix} \lambda^2(\lambda+1)^2 & & \\ & \lambda^3(\lambda-1)^2 & \\ & & (\lambda+1)^3(\lambda-1)\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}$

· 正交相抵 $\Leftrightarrow$ 奇异值分解

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. $\exists\,(P,Q)\in O_m(\mathbb{R})\times O_n(\mathbb{R})$, $A = P\begin{pmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0\end{pmatrix}Q$.

$\sigma_i > \sigma_{i+1}$

• 相似：　$A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

A, B 相似 $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{F})$, s.t. $A = P^{-1}BP$

Rq: $P \Leftrightarrow$ 基变换.

• 相合：　A 实对称矩阵.

• A, B 相合 $\Leftrightarrow \exists P$, $A = P^T B P$.

· Thm. 相合对角化：　$A = P\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix} P^T$.

$p, (q)$：正(负)惯性指数.

· Thm：A 实对称方阵，$\exists P \in O_n(\mathbb{R})$.

s.t $P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. 其中，$\lambda_1 \cdots \lambda_n$ 特征值.

正定，半正定.

命题：设 A, B 实对称方阵. 半正定，则 A, B 可同时相合于对角阵.

证明：

① A, B 中有一个正定. WLOG $A>0$.

则 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, st $PAP^T = I_n$.

对于 PBP^T，$\exists Q \in O_n(\mathbb{R})$, s.t. $Q(PBP^T)Q^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

则 取 $P_0 = QP$. 则 $P_0 A P_0^T = I_n$. $P_0 B P_0^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

② A, B 均半正定. 以上做法不对, 也无法使用摄动法.

$C := A+B \geq 0$. $\exists\, Q \in GL_n(\mathbb{R})$, $Q^T C Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

设 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & A_3 \end{pmatrix}$. 则 $Q^T B Q = \begin{pmatrix} I_r - A_1 & -A_2 \\ -A_2^T & -A_3 \end{pmatrix}$

- 由于 A, B 正定. 知 $A_3 \geq 0$, $-A_3 \geq 0 \Rightarrow A_3 = 0$.
- 若 $A_2 \neq 0$. 则 $\exists\, u \in \mathbb{R}^r$, s.t $v = A_2^T u \neq 0$.

  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

  $$(u^T, \lambda v^T) \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda v \end{pmatrix} = u^T A_1 u + 2\lambda\, v^T . v \xrightarrow[\lambda \to -\infty]{} -\infty$$

  取 $\lambda \to -\infty$. 与半正定矛盾.
- 取 $U \in O_r(\mathbb{R})$, s.t $U^T A_1 U = D$ 对角阵.

  则 设 $P' = Q \begin{pmatrix} U & \\ & I \end{pmatrix}$.

  则 $(P')^T A P' = \begin{pmatrix} D & \\ & 0 \end{pmatrix}$, $(P')^T B P' = \begin{pmatrix} I-D & \\ & 0 \end{pmatrix}$ □

Rk: $\mathbb{C}$ 的情形, 类比.

推论: 设 $A \geq B \geq 0$. 求证: $\sqrt{A} \geq \sqrt{B} \geq 0$.

证明: 见小测答案.

$\square$.

Rk: $\sqrt{AB} \neq \sqrt{A}\cdot\sqrt{B}$

Rk: 法二: step 1: $A \geqslant B > 0$

step 2: $\lambda I + A \geqslant \lambda I + B > 0$.

step 3: 此处可用摄动法.

$$x^T\left(\sqrt{\lambda I + A} - \sqrt{\lambda I + B}\right)x \geqslant 0$$

$$\downarrow$$

$$x^T\left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right)x \geqslant 0$$

小测12: 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A 的前 $n-1$ 阶顺序主子式均为正.
且 $\det A \geqslant 0$. 证明: A 半正定.

2021 秋线性代数(B2)期中

授课教师：陈发来 欧阳毅 时间：2 小时

一(10') 求三次有理系数多项式$f(x)$使得$f(x)+1$被$(x-1)^2$整除，且$f(x)-1$被$(x+1)^2$整除。$x^2-1 \mid f'(x)$.

$f(x) = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)m + n$

$\Rightarrow n=0, m=\frac{3}{2}$.

二(10') 设复系数多项式$f(x)=x^2+ax+1, g(x)=x^3+x^2+b$，其中$a,b$是常数。给出$f(x)$与$g(x)$有公因子（不互素）的充要条件（用$a,b$表示）。

$\Leftrightarrow \mathrm{Res}(f,g) = \begin{pmatrix}1&a&1&&\\&1&a&1&\\&&1&a&1\\1&1&0&b&\\&1&1&0&b\end{pmatrix} = 0$.

三(10')设A为n阶方阵，且$rank(A)=n-1$.证明：$rank(A^k)\geq n-k$（k为正整数）。

$rank(A) + rank(B) \leq rank(AB) + n$

四(20')给定矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}a&b&&\\c&d&&\\&&e&f\\&&&e\end{pmatrix}$

1. 求出所有满足条件$AB=BA$的实矩阵B.
2. 用W记由 1 求得的所有矩阵全体。证明：W是$\mathbb{R}^{4\times4}$的子空间，并求其维数与一组基。
3. 求$\mathbb{R}^{4\times4}$的子空间W'使得$\mathbb{R}^{4\times4}=W\oplus W'$。

五(15')设矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，其中$a_{ij}=\delta_{ij}+i+j$，$\delta_{ij}$为 Kronecker 记号。求矩阵$A$的行列式。

$A = I_n + \begin{pmatrix}1&1\\ \vdots&\vdots\\1&n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\1&\cdots&1\end{pmatrix}$.

六(15')试求多项式矩阵A的 Smith 标准型、不变因子和初等因子组，这里

$$A=\begin{bmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix}$$

七(20')设$A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，称矩阵$X\in\mathbb{F}^{n\times m}$为矩阵$A$的广义逆，如果$AXA=A, XAX=X$.

$$X=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ X_3 & X_3X_2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

1. 若$A=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$，其中$P,Q$分别为$m,n$阶可逆方阵，试求$A$的广义逆。
2. 证明：对矩阵$A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，其每一个广义逆都可以表示为$X=\tilde{Q}^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\tilde{P}^{-1}$，这里$\tilde{P},\tilde{Q}$是满足$A=\tilde{P}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\tilde{Q}$的可逆方阵。

$$X=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ X_3 & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ & I_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\tilde{Q}^{-1}=Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \\ X_3 & I_{n-r} \end{pmatrix} \qquad \tilde{P}^{-1}=\begin{pmatrix} I_r & X_2 \\ & I_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}$$

则 $$\tilde{P}\begin{pmatrix} I_r & \\ & \end{pmatrix}\tilde{Q}=P\begin{pmatrix} I_r & -X_2 \\ & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & \\ -X_3 & I_{n-r} \end{pmatrix}Q$$

$$=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}Q=A.$$