§0.1 曲面的存在唯一性定理

本节通过曲面自然标架的运动方程和曲面的结构方程(Gauss-Codazzi方程)，讨论曲面基本定理。即预定第一、第二基本形式，讨论曲面的存在唯一性。

曲面的存在唯一性定理基于一阶偏微分方程组解的存在唯一性。特别，与平面或空间曲线的基本定理类似，在曲面基本定理中所讨论的一阶偏微分方程组为曲面自然标架的运动方程(未知函数为曲面的自然标架)，曲面的结构方程为自然标架运动方程解存在的相容性条件。需要满足相容性条件是一阶偏微分方程解的存在性定理与常微分方程有区别之处。

考虑一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} = f^i_\alpha(x^1, \cdots, x^m; y^1, \cdots, y^n), \quad 1 \le \alpha \le m, 1 \le i \le n.$$

其中$x = (x^1, \cdots, x^m) \in D$，$D \subset \mathbb{R}^m$为区域，$y^i(x)$为$n$个未知函数，$f^i_\alpha(x; y)$为$D \times \mathbb{R}^n$上给定可微函数。下列存在唯一性定理可参考[微分几何初步附录，陈维桓]。它也有不同形式的几何版本，称为Frobenius定理。

定理0.1. *设$D \subset \mathbb{R}^2$为单连通区域。对任意给定初值$(x^\alpha_0; y^i_0) \in D \times \mathbb{R}^n$，初值问题*

$$\begin{cases} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} = f^i_\alpha(x^1, \cdots, x^m; y^1, \cdots, y^n), \quad 1 \le \alpha \le m, 1 \le i \le n \\ y^i(x_0) = y^i_0, \quad i = 1, \cdots, n \end{cases}$$

在D上存在唯一解$y^i = y^i(x^\alpha)$当且仅当f^i_α在$D \times \mathbb{R}^n$上满足相容性条件

$$\frac{\partial f^i_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial f^i_\alpha}{\partial y^j} f^j_\beta = \frac{\partial f^i_\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial f^i_\beta}{\partial y^j} f^j_\alpha,$$

即

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}.$$

将应用此存在唯一性结论来讨论如下问题：设D为平面区域，给定D上两个对称二次微分形式：

$$\varphi(u^1, u^2) = g_{\alpha\beta}(u^1, u^2) du^\alpha \cdot du^\beta > 0,$$

$$\psi(u^1, u^2) = b_{\alpha\beta}(u^1, u^2) du^\alpha \cdot du^\beta,$$

是否存在曲面$r : D \to \mathbb{R}^3$使得

$$I = \varphi, \quad II = \psi?$$

与曲线基本定理类似，考虑自然标架$\{r(u^1,u^2);r_1,r_2,N\}$的运动方程。即一阶线性偏微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial u^\alpha}=r_\alpha, & \alpha=1,2; \quad (M_1) \\ \frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma^\gamma_{\beta\alpha}r_\gamma+b_{\alpha\beta}N, & \alpha,\beta=1,2; \quad (M_2) \\ \frac{\partial N}{\partial u^\alpha}=-b^\beta_\alpha r_\beta, & \alpha=1,2 \quad (M_3) \end{cases}$$

其中Γ,b由给定φ,ψ以曲面情形同样的方式确定。自然标架运动方程所对应的相容性条件即φ,ψ的Gauss-Codazzi方程

$$\frac{\partial\Gamma^\xi_{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial\Gamma^\xi_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta}+\Gamma^\xi_{\gamma\eta}\Gamma^\eta_{\beta\alpha}-\Gamma^\xi_{\beta\eta}\Gamma^\eta_{\gamma\alpha}=b^\xi_\gamma b_{\beta\alpha}-b^\xi_\beta b_{\gamma\alpha}, \quad (Gauss)$$

$$\frac{\partial b_{\beta\alpha}}{\partial u^\gamma}-\Gamma^\xi_{\gamma\alpha}b_{\xi\beta}=\frac{\partial b_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta}-\Gamma^\xi_{\beta\alpha}b_{\xi\gamma}. \quad \text{(Codazzi)}$$

定理0.2. *(唯一性)* 设$S,\widetilde{S}$为参数域D上的两个曲面，参数表示分别为$r(u^1,u^2),\widetilde{r}(u^1,u^2)$。如果它们的第一、第二基本形式满足

$$I(u^1,u^2)=\widetilde{I}(u^1,u^2)=\varphi, \quad II(u^1,u^2)=\widetilde{II}(u^1,u^2)=\psi.$$

则存在$\mathbb{R}^3$的一个刚体运动T使得

$$\widetilde{r}=T\circ r.$$

证明：任取$u_0=(u_0^1,u_0^2)\in D$。由S_1,S_2在u_0点第一基本形式相等，

$$|r_\alpha(u_0)|=|\widetilde{r}_\alpha(u_0)|, \quad \alpha=1,2; \quad \langle r_1(u_0),r_2(u_0)\rangle=\langle\widetilde{r}_1(u_0),\widetilde{r}_2(u_0)\rangle.$$

因此存在唯一一个刚体运动T使得

$$T\{r(u_0),r_1,r_2,N\}=\{\widetilde{r}(u_0),\widetilde{r}_1,\widetilde{r}_2,\widetilde{N}\}.$$

由于刚体运动不改变曲面的第一、第二基本形式，从而曲面$T\circ r$与$\widetilde{r}$的自然标架满足同一组运动方程，并且它们在u_0处初值相同。由一阶偏微分方程组初值问题解的唯一性，

$$T\circ r=\widetilde{r}.$$

□

接下来讨论曲面的存在性问题。

定理0.3. 给定D上两个对称二次微分形式$\varphi > 0, \psi$，设它们对应的$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, b^{\alpha}_{\beta}$满足*Gauss-Codazzi*方程。则对任意$u_0 \in D$存在$u_0$的一个邻域$U \subset D$以及曲面$r : U \to \mathbb{R}^3$使得该曲面的第一、基本基本形式

$$I = \varphi > 0, \quad II = \psi.$$

证明：任取一点$u_0 = (u_0^1, u_0^2)$，任取满足如下条件（1）的$(r^0; r_1^0, r_2^0, N^0)$

$$\langle r^0_\alpha, r^0_\beta \rangle = g_{\alpha\beta}(u_0), \quad \langle r^0_\alpha, N^0 \rangle = 0, \quad \langle N^0, N^0 \rangle = 1, \quad (r_1^0, r_2^0, N^0) > 0. \quad (1)$$

由自然标架运动方程，相容性条件(Gauss-Codazzi方程)，以及一阶偏微分方程组存在性定理可知：存在u_0的一个邻域$U \subset D$以及U上的函数

$$\{r(u^1, u^2); r_1(u^1, u^2), r_2(u^1, u^2), N(u^1, u^2)\}$$

满足上述初值，即

$$\{r(u_0) = r^0; r_1(u_0) = r_1^0, r_2(u_0) = r_2^0, N(u_0) = N^0\},$$

并满足自然标架运动方程，特别$r_\alpha = \frac{\partial r}{\partial u^\alpha}$。注意所得到的方程组的解中$r$是否构成正则参数曲面、$N$是否为单位法向等都需要验证。

接下来验证$r : U \to \mathbb{R}^3$为参数曲面、$\{r(u^1, u^2); r_1, r_2, N\}$为其自然标架且满足$I = \varphi, \quad II = \psi$。事实上$II = \psi$可由$\{r; r_1, r_2, N\}$满足运动方程$(M_2)$直接得到。

考虑

$$\langle r_\alpha, r_\beta \rangle, \quad \langle r_\alpha, N \rangle, \quad \langle N, N \rangle$$

所满足的一阶偏微分方程。由运动方程可得

$$\begin{cases} \frac{\partial \langle r_\alpha, r_\beta \rangle}{\partial u^\gamma} = \Gamma^\xi_{\gamma\alpha} \langle r_\xi, r_\beta \rangle + b_{\gamma\alpha} \langle N, r_\beta \rangle + \Gamma^\xi_{\gamma\beta} \langle r_\alpha, r_\xi \rangle + b_{\gamma\beta} \langle r_\alpha, N \rangle, \\ \frac{\partial \langle r_\alpha, N \rangle}{\partial u^\beta} = \Gamma^\xi_{\beta\alpha} \langle r_\xi, N \rangle + b_{\beta\alpha} \langle N, N \rangle - b^\gamma_\beta \langle r_\alpha, r_\gamma \rangle, \quad (2) \\ \frac{\partial \langle N, N \rangle}{\partial u^\alpha} = -2 b^\beta_\alpha \langle r_\beta, N \rangle. \end{cases}$$

容易验证

$$\langle r_\alpha, r_\beta \rangle = g_{\alpha\beta}, \quad \langle r_\alpha, N \rangle = 0, \quad \langle N, N \rangle = 1$$

是满足方程组(2)和初值条件(1)的解，例如

$$\frac{\partial \langle r_\alpha, r_\beta \rangle}{\partial u^\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} = \Gamma_{\beta\gamma\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma\beta}.$$

因此由一阶偏微分方程组(2)初值问题解的唯一性可知$\langle r_\alpha, r_\beta\rangle, \langle r_\alpha, N\rangle, \langle N, N\rangle$ 只能是上述特解，即它们满足

$$\langle r_\alpha, r_\beta\rangle \equiv g_{\alpha\beta}, \quad \langle r_\alpha, N\rangle \equiv 0, \quad \langle N, N\rangle \equiv 1.$$

这说明$r : U \to \mathbb{R}^3$为正则参数曲面，$\{r; r_1, r_2, N\}$为其自然标架并且曲面第一基本形式$I = \varphi$。再由曲面运动方程(M_2)可知，曲面第二基本形式满足

$$\langle r_{\alpha\beta}, N\rangle = b_{\alpha\beta},$$

即

$$II = b_{\alpha\beta} du^\alpha \cdot du^\beta = \psi.$$

□

作业：9, 12