§1 事件与概率

§1.1 概念

1.随机实验
- 可重复
- 所有可能结果可知
- 每次实验结果在实验前不可知

2.样本空间 $\Omega=\{w \mid$ 在相同条件下随机实验的结果$\}$

3.事件 $A\subseteq\Omega$

例 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$　　$A=\{1,2,3\}$

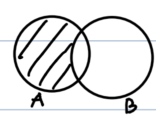
某一次实验结果为1称事件发生.

事件关系　$A.B$是两个事件.　$A\subseteq B$　$A=B$

事件运算　1° A^c　A的对立事件　2° $A\cup B$　A发生或B发生时. $A\cup B$都发生.

3° $A\cap B$　若$A\cap B=\varnothing$, $A.B$称不相容事件.

4° $A\setminus B$



$B\subseteq A$时, $A\setminus B \triangleq A-B$

5° $A\triangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$

6° $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k\right)$　在事件列$\{A_n\}$中出现无穷多次的结果全体.

$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}A_k\right)$　只有有限个集合中不出现的结果全体.

$\liminf\limits_{n\to\infty} A_n\subseteq\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$

事件域　Ω的某些子集构成的集合类F满足:

可列并

1° $\Omega\in F$　2° 若$A\in F$, 则$A^c\in F$　3° $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$是一列事件　$A_n\in F$. 则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in F$

称F为Ω的事件域(σ-代数)

例 $F_1=\{\varnothing,\Omega\}$ 最小的σ-代数

$F_2=\{\varnothing,A,A^c,\Omega\}$

$F_3 = 2^{\Omega}$ Ω 有限集

若 $A, B \in F$, $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in F$. $A \cup B \in F$.

若 $A_1, \cdots, A_n, \cdots \in F$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

(Ω, F)

§1.2 概率.

1. 事件发生频率

n次重复实验　A发生的次数为n(A).　$\frac{n(A)}{n}$ 稳定于某个数p. $(n \to +\infty)$

2. 古典概型　Ω 有限集　每个结果可能出现.

3. 几何概型.　Ω 可看作线段,平面有界图形或空间有界立体.　$P(A) = \frac{A测度}{\Omega测度}$

4. P是事件域 F上定义的函数满足

1° $P(\Omega) = 1$ (规范性)　2° $A \in F$, $P(A) \geq 0$ (非负性)

3° $A_n \in F$, $n = 1, 2 \cdots$ 两两不相容, 即 $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

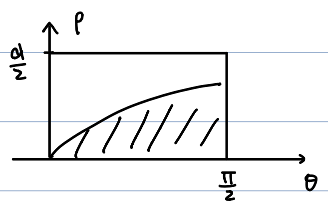
称P是 (Ω, F) 上定义的概率测度.

例　$\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$　$0 \leq p_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

定义 $P(\{w_i\}) = p_i$　古典概型中 $P(\{w_i\}) = \frac{1}{n}$

若 $p(A) = 0$, A称为 null event. 若 $P(A) = 1$, A称为几乎必然事件.

$\Omega = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \frac{d}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$



$$P(A) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \sin\theta \, d\theta}{\frac{\pi}{4} d} = \frac{2L}{\pi d} \Rightarrow 估计\pi$$

↑ 模拟

针与平行线相交　$\frac{l}{2} \sin\theta \geq \rho$

5. 概率测度性质

1° $P(\phi)=0$ $\quad P(\Omega\cup(\bigcup_{k=2}^{\infty}\phi))=P(\Omega)+\sum_{k=2}^{\infty}P(\phi)=1$.

2° $P(A^c)=1-P(A)$

3° $A_1, A_2, \cdots, A_n \in F$. $A_i\cap A_j=\phi$. $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

4° $A\subseteq B$，则 $P(A)\le P(B)$.

5° $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

证：$A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$

$P(A\cup B)=P(A\setminus B)+P(B\setminus A)+P(A\cap B)$

代入

$P((A\setminus B)\cup(A\cap B))=P(A) \Rightarrow P(A\setminus B)=P(A)-P(B\cap A)$

次可加性：$P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$

(hw) $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1\cap\cdots\cap A_n)$

6° $A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_n\subseteq\cdots$

$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$

hw: P_4 4.5 ; P_8 4.6