第 7 章　无穷级数

§7.1　数项级数

7.1.1　数项级数的基本概念

无穷级数就是排成一列的无穷多个数 $\boldsymbol{a_1, a_2, \cdots}$ 依次相加的一个形式上的求和表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{7.1}$$

其中 a_n 叫做级数的通项，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 表示求和是从第一项一直加到无穷。

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为级数的前 n 项的和。

‖◄　►‖　◄　►　返回　全屏　关闭　退出

例如

$$1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots \quad \text{等比级数(几何级数)}$$

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+nd)+\cdots \quad \text{等差级数}$$

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

上面三个级数中，第一个级数前 n 项的和为

$$S_n=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

当 $|q|<1$ 时，S_n 趋于 $\frac{1}{1-q}$，当 $q\geqslant 1$ 时，S_n 发散到 $+\infty$.

第二个级数前 n 项的和为

$$S_n=na+\frac{n(n-1)}{2}d$$

当 a 和 d 不同时为 0 时，S_n 发散到 ∞.

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

第三个级数前 n 项的和为

$$S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$ 没有确定的趋势

再例如无限循环小数都可以表示无穷级数, 如

$$0.\dot{1} = 0.111\cdots = 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots.$$

$$0.1\dot{2} = 0.121212\cdots = \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \cdots$$

级数是数吗？能不能当成数一样进行运算？

考虑下面的推导是否合法。设

$$H = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots.$$

则

$$H - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots.$$

由此，得

$$\begin{aligned}
1 &= H - (H-1) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \\
&= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.
\end{aligned}$$

若这种推导可行，则令

$$\boldsymbol{A = 1 + 2 + 3 + \cdots},$$

有

$$\boldsymbol{A - 1 = 2 + 3 + 4 + \cdots},$$

因而

$$\begin{aligned} \boldsymbol{1} &= \boldsymbol{A - (A - 1)} \\ &= \boldsymbol{(1 - 2) + (2 - 3) + (3 - 4) + \cdots} \\ &= \boldsymbol{-1 + (-1) + (-1) + \cdots} \end{aligned}$$

这个结论显然不成立.

可见这种推导不合法，为什么?

再例如, 设

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

则

$$\begin{aligned} 2A &= 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots \\ &= 2 + A, \end{aligned}$$

因此 $A = 2$.

如果上面的推导是可行的, 那么下面的推导是否也合理? 设

$$A = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + \cdots$$

则

$$\begin{aligned} 2A &= 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n + \cdots \\ &= A - 2 \end{aligned}$$

因此 $A = -2$. 这个结果显然不合理.

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

(1) **收敛性**

定义 1 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一个级数，$S_n = a_1 + \cdots + a_n$ 称为此级数的前 n 项部分和。如果数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S, 则称此级数收敛，S 称为级数的和，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

如果数列 $\{S_n\}$ 没有极限，就称此级数是发散的。

从定义可知，级数是否收敛可用其部分和数列 $\{S_n\}$ 来讨论。

反之，给定一个数列 $\{S_n\}$，令

$$a_1 = S_1,\ a_n = S_n - S_{n-1}, (n > 1).$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和就是 S_n. 因此，也可用级数来研究数列。

(2) 基本性质

性质 1 (Cauchy **收敛准则**) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切 $p \in \mathbb{N}$ 成立。

证明 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

对一切 $p \in \mathbb{N}$ 成立. 即,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切 $p \in \mathbb{N}$ 成立。

例 1 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是收敛的。

证明: 对于任意正数 ε, 取自然数 $N>\frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \\
&=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right| \\
&=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}-\frac{1}{(n+4)(n+5)}-\cdots-\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right| \\
&\leqslant\frac{1}{n+1} \\
&<\frac{1}{n} \\
&<\frac{1}{N}<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

例 2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的。

证明： 该级数发散, 这是因为

$$
\begin{aligned}
S_{2^n} &= 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}) \\
&\geqslant 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}) \\
&= 1+\frac{n}{2}\ \to \infty,\ (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

因为 S_n 有一个子列发散, 所以 S_n 发散. 故, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的.

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

性质 2 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 可设其和为 S, 即, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. 因而,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

注意: 这只是必要条件. 如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 发散.

性质 3 级数 $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的第 n 个余项. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件是其余项收敛于零.

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

性质 4 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ 也都收敛, 其中 c 是常数, 而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

这个性质说明级数的求和运算是线性运算.

性质 5 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 中改变任意有限项的值不影响级数的敛散性.

性质 6 在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 中去掉前面有限项或者加上有限项所得的新级数与原级数有相同的敛散性.

性质 7 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么以不改变先后顺序的方式将级数的项任意归组, 所得到的新级数

$$(a_1+\cdots+a_{k_1})+(a_{k_1+1}+\cdots+a_{k_2})+\cdots+(a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n})+\cdots \tag{7.2}$$

也收敛, 且与原级数有相同的和, 这里 k_j 是正整数且 $k_1<k_2<\cdots$.

证明: 记 $b_n=a_{k_{n-1}+1}+\cdots+a_{k_n}$, $k_0=1$, $n=1,2,\cdots$. 则新级数就是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 其前 n 项部分和为

$$B_n=\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{k_n} a_k=S_{k_n},$$

这里 S_{k_n} 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 k_n 项部分和. 因为原级数收敛, 而 $\{B_n\}$ 是原级数部分和 $\{S_n\}$ 的子列, 因此, $\{B_n\}$ 收敛, 即, 新级数收敛, 而且和也不变.

注意: (i) 此性质的逆命题不对. 例如, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 不收敛, 但

$$(1-1)+(1-1)+\cdots$$

收敛.

(ii) 条件中不改变项的顺序很重要.

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

性质 8 若在级数 (7.2) 中同一括号中的项都有相同的符号, 则从级数 (7.2) 收敛可推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明 设加括号后的级数 (7.2) 是收敛的, 其部分和记为 A_j. 因为 $k_1 < k_2 < \cdots$, 所以对任意自然数 n, 存在自然数 j_n 使得

$$k_{j_n-1}+1 \leqslant n \leqslant k_{j_n}.$$

因为级数 (7.2) 中同一括号中的项符号相同, 所以

$$a_{k_{j_n-1}+1}, \cdots, a_{k_{j_n}} \text{ 有相同的符号.}$$

因此

$$S_{k_{j_n-1}} \leqslant S_n \leqslant S_{k_{j_n}} \quad \text{或者} \quad S_{k_{j_n-1}} \geqslant S_n \geqslant S_{k_{j_n}}$$

即,

$$A_{j_n-1} \leqslant S_n \leqslant A_{j_n} \quad \text{或者} \quad A_{j_n-1} \geqslant S_n \geqslant A_{j_n}.$$

因为 A_j 收敛, 所以 S_n 与 A_j 收敛到相同的极限.

例 3 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(sn-p)(sn+q)}$$

的和, 其中 $p \geqslant 0, q > 0, s = p + q$.

解: 此级数前 m 项部分和为

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(sn-p)(sn+q)} = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{sn-p} - \frac{1}{sn+q} \right) \\ &= \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1}{sn-p} - \frac{1}{s(n+1)-p} \right) = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s-p} - \frac{1}{s(m+1)-p} \right). \end{aligned}$$

由此, 得

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \frac{1}{s(s-p)}.$$

即, 所求级数的和为 $\frac{1}{sq}$.

例 4 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^{n+2}}$$

的和.

解:

$$\because \frac{(-1)^n+2^n}{3^{n+2}}=\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-(-1/3)}=-\frac{1}{4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-(2/3)}=2,$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^{n+2}}=\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{2}{9}=\frac{7}{36}.$$