1.
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & & \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & & \\ & & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ & & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ & & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$
以 1,2,3 行展开

$$= \sum_{1\le i_1<i_2\le i_3\le 6} \det A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{bmatrix} \det A\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix} (-1)^{1+2+3+i_1+i_2+i_3}$$

j_1, j_2, j_3 为 $\{1,2,3,4,5,6\} \setminus \{i_1, i_2, i_3\}$ 的升序排列

注意到 当 i_1, i_2, i_3 中含有 5, 6 时
$$\det A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{bmatrix} = 0$$
当 i_1, i_2, i_3 无 1.2 时（即 j_1, j_2, j_3 中有 1 或 2）
$$\det A\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \text{原式} = (-1)^{1+2+3+1+2+3} \det A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \det A\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
$$+ (-1)^{1+2+3+1+2+4} \det A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & b & c \\ a_2 & & \\ a_3 & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b & c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & c & d \end{vmatrix}$$

2. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 用 Binet-Cauchy 公式证明

$$\operatorname{rank}(AA^T) = \operatorname{rank}(A)$$

Pf.

注意到 $(AA^T)\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix} = \sum\limits_{1\le t_1<\cdots<t_s\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ t_1 & \cdots & t_s \end{pmatrix} A^T\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_s \\ j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$

$$= \sum_{1\le t_1<\cdots<t_s\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_s \\ t_1 & \cdots & t_s \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_s \\ t_1 & \cdots & t_s \end{pmatrix}$$

故 设 $\operatorname{rank} A = r$

则 $\forall$ $r+1$ 阶子式 $=0$

$\Rightarrow AA^T\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_{r+1} \\ j_1 & \cdots & j_{r+1} \end{pmatrix} = \sum 0\cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(AA^T) \le r$

又 由 $\operatorname{rank} A = r$

$\Rightarrow \exists\ A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \ne 0$

$\Rightarrow AA^T\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ i_1 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \sum\limits_{1\le t_1<\cdots<t_r\le n} \left(A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ t_1 & \cdots & t_r \end{pmatrix} \right)^2$

>0 □

3) $A = (a_{ij})_{n\times n}$.

求证 $\det(\lambda I - A) = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^{n-k}\cdot(-1)^k \cdot \sum\limits_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$

法一. (由定义展开).

记 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\ne j \end{cases}$

则 $\lambda I - A = (\lambda\delta_{ij} - a_{ij})$

$$(☆) \Rightarrow \det(\lambda I - A) = \sum_{(j_1,\cdots,j_n)\in S_n} (-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)} (\lambda\delta_{1,j_1} - a_{1,j_1})\cdots(\lambda\delta_{n,j_n} - a_{n,j_n})$$

考虑 $(\lambda\delta_{1,j_1} - a_{1,j_1})\cdots(\lambda\delta_{n,j_n} - a_{n,j_n})$ 的 λ^{n-k} 的系数

为 $$(-1)^k \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} a_{i_1,j_{i_1}}\cdots a_{i_k,j_{i_k}}\cdot\delta_{i_{k+1},j_{i_{k+1}}}\cdots\delta_{i_n,j_{i_n}}$$

$i_{k+1},\cdots,i_n$ 为去掉上面k个数后的升序排列

考虑其中不为0的项，即 $i_{k+1} = j_{i_{k+1}}, \cdots, i_n = j_{i_n}$

故 ☆式的 λ^{n-k} 系数为

$$(-1)^k \sum_{(j_1,\cdots,j_n)\in S_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} a_{i_1,j_{i_1}}\cdots a_{i_k,j_{i_k}}$$

$$= (-1)^k \sum_{(j_1,\cdots,j_n)\in S_n} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} (-1)^{\tau(\,)} a_{i_1,j_{i_1}}\cdots a_{i_k,j_{i_k}}$$

$$= (-1)^k \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \sum_{\substack{(j_1,\cdots,j_n)\in S_n \\ \left(\begin{smallmatrix} j_{i_{k+1}} = i_{k+1} \\ \vdots \\ j_{i_n} = i_n \end{smallmatrix}\right)}} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{i_1,j_{i_1}}\cdots a_{i_k,j_{i_k}}$$

注意到 作为置换

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_{i_1} & \cdots & j_{i_k} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} i_{k+1} & \cdots & i_n \\ j_{i_{k+1}} & \cdots & j_{i_n} \end{pmatrix}$$

而 $\begin{matrix} i_{k+1} = j_{i_{k+1}} \\ \vdots \\ i_n = j_{i_n} \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i_{k+1} & \cdots & i_n \\ j_{i_{k+1}} & \cdots & j_{i_n} \end{pmatrix} = \mathrm{id}.$

故 $\tau\begin{pmatrix}1 & \cdots & n\\ j_1 & \cdots & j_n\end{pmatrix} = \tau\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_k\\ j_{i_1} & \cdots & j_{i_k}\end{pmatrix}$

故 中的 λ^{n-k} 系数为

$$= (-1)^k \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \ \sum_{(j_{i_1},\cdots,j_{i_k})\in\{i_1,\cdots,i_k\}} (-1)^{\tau\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_k\\ j_{i_1} & \cdots & j_{i_k}\end{pmatrix}} a_{i_1,j_{i_1}}\cdots a_{i_k,j_{i_k}}$$

$$= (-1)^k \sum A\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_k\\ i_1 & \cdots & i_k\end{pmatrix}$$

$\square$

法二.（参见 王新茂 线性代数 A. 讲义. P78）

设 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ $\qquad e_i = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow$ 第 i 处

则 $\lambda I - A = (\lambda e_1-\alpha_1, \lambda e_2-\alpha_2, \cdots, \lambda e_n-\alpha_n)$

$$\det(\lambda I - A) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \det(n-k\text{个}\ \lambda e_i,\ k\text{个}\ -\alpha_i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} (-1)^k \det A\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_k\\ i_1 & \cdots & i_k\end{pmatrix}.$$

法三. 关键引理.（王新茂 线代. P53 练习 5）.

设 $A=(a_{ij}(x))$，$a_{ij}(x)$ 为关于 x 的函数

则 $\frac{d}{dx}\det A = \sum_{i,j} \frac{d}{dx}a_{ij}(x)\cdot A_{ij}$

（A_{ij} 为代数余子式）

Pf. Ex.

回到原题 $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & & -a_{ij}\\ & \ddots & \\ & & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}_{n\times n}$

归纳证明

$n=1$ 显然

设 $n-1$ 时成立.

n 时 记 $B = \lambda I - A$

则 $\frac{d}{d\lambda}\det B \xlongequal{\text{引理}} \sum_{i=1}^{n} B_{ii}$ ← 代数余子式

$$= \sum_{i=1}^{n} B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \hat{i} & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & \hat{i} & \cdots & n \end{pmatrix} \quad (*)$$

$\hat{i}$ 为删去的行列.

$$B\begin{pmatrix} 2 & \cdots & n \\ 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} & \cdots \\ & \lambda - a_{33} & \\ & & \ddots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{n-1\text{ 情形}} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} (-1)^k \sum_{2 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ (*) 式 $$\frac{d}{d\lambda}\det B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-1-k} (-1)^k \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \\ i_j \ne i}} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$ 时 $\det B = (-1)^n \det A$

故 $$\det B = (-1)^n \det A + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda^{n-k}}{n-k} (-1)^k \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \\ i_j \ne i \ \forall 1 \le j \le k}} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

故只需验证 $$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-k} \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n \\ i_j \ne i \ \forall 1 \le j \le k}} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix},$$

只需比较两边相同指标 $(i_1 \cdots i_k)$ 的个数

均为 1

□