7.1.3 一般级数的收敛性

(1) 交错级数

所谓交错级数就是级数的项一项正、一项负, 可以写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n,$$

其中 $a_n \geqslant 0$. 因为当 a_n 单调减趋于 0 时, 交错级数的部分和满足

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \leqslant S_{2n+2}$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - a_{2n} \leqslant a_1$$

所以, S_{2n} 单调增有上界, 因而收敛: $S_{2n} \to S$. 且

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \to S + 0 = S.$$

误差估计:

因为

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leqslant S_{2n-1}.$$

所以 S_{2n-1} 单调递减趋于 S. 从不等式

$$S_{2n} \leqslant S_{2n+2} \leqslant S \leqslant S_{2n+1} \leqslant S_{2n-1},$$

可知

$$|S - S_n| \leqslant |S_n - S_{n+1}| = a_{n+1}.$$

即, 前 n 项和与级数和的误差不超过第 $n+1$ 个通项的绝对值. 于是有

定理 1 (Leibniz **判别法**) 设 $\{a_n\}$ 单调趋于零, 则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 且前 n 项部分和 S_n 与级数的和 S 的误差不超过 a_{n+1}.

一个典型例子是: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. 以后, 我们将知道它的和是 $\ln 2$.

(2) 绝对收敛性和条件收敛

对于一般级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 来说 (即对通项的正负没有限制), 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **绝对收敛**.

定理 2 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则级数本身一定收敛.

证明 显然有

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}|,$$

故由 Cauchy 准则就可证得结果.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 就称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为 **条件收敛**.

例如, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 都收敛, 但是通项取绝对值后, 级数是发散的, 所以这两个级数是条件收敛的.

将通项分为正部和负部, 令

$$a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

即

$$a_n^+ = \begin{cases} 0, & a_n \leqslant 0, \\ a_n, & a_n \geqslant 0; \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n \leqslant 0, \\ 0, & a_n \geqslant 0. \end{cases}$$

因此由 a_n^+ 和 a_n^- 构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都是正项级数, 而且满足

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^-, \quad a_n = a_n^+ - a_n^-,$$

所以当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛, 而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

定理 3 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则任意改变求和次序后所得的新级数仍收敛, 并且其和不变.

证明 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的求和次序改变后, 相应的 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ 的求和次序作对应的改变. 而后者是正项级数, 改变次序后收敛性和收敛的值不变. 因此前者的收敛性和收敛值也不会变. 证毕.

问题 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 敛散性如何?

当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-}$ 都发散到 $+\infty$, 因而可以证明下面的 Riemann 重排定理.

定理 4 (Riemann **重排定理**) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则适当改变求和的次序可以使新级数收敛于给定的任意实数, 也可使新级数发散到 $+\infty$ 或发散到 $-\infty$.

(3) 一般级数收敛的判别法

引理 1 (Abel **分部求和公式**) 设有两串数: $a_1, a_2, \cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$. 记 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, 则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

证明 记 $A_0 = 0$, 则 $a_k = A_k - A_{k-1}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.\end{aligned}$$

引理 2 (Abel **引理**) 设 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$ 或者 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$. 记 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. 如果 $|A_k| \leqslant M$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$. 那么

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant M(|b_1| + 2|b_n|).$$

证明 由 Abel 分部求和公式

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) + A_n b_n\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |A_k|\,|b_k - b_{k+1}| + |A_n|\,|b_n| \\
&\leqslant M\left(\sum_{k=1}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| + |b_n|\right) \\
&= M\left(\left|\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1})\right| + |b_n|\right) \\
&= M(|b_1 - b_n| + |b_n|) \leqslant M(|b_1| + 2|b_n|).
\end{aligned}$$

定理 5 (Dirichlet **判别法**) 若 $\{b_n\}$ 是单调递减趋于零的数列, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有界: $|A_n| = |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leqslant M$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明 因为

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = |A_m - A_n| \leqslant 2M,$$

所以对任意 $\varepsilon > 0$, 由 $b_k \to 0$ $(k \to \infty)$, 存在自然数 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时, 有 $|b_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{6M}$. 因为 $\{b_k\}$ 单调, 所以根据 Abel 引理, 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| &\leqslant 2M(|b_{n+1}| + 2|b_{n+p}|) \\ &\leqslant 2M\left(\frac{\varepsilon}{6M} + 2\frac{\varepsilon}{6M}\right) = \varepsilon,\end{aligned}$$

对一切 $n \geqslant N$ 记一切自然数 p 成立. 根据 Cauchy 准则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

定理 6 (Abel **判别法**) 若 $\{b_n\}$ 是单调有界的数列, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明 因为 $\{b_k\}$ 单调有界, 所以 $\{b_k\}$ 有极限, 设 $b = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$, 则 $\{b_k - b\}$ 单调趋于 0. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $A_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 有界. 于是根据 Dirichlet 判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ 收敛. 从

$$a_k b_k = a_k(b_k - b) + b a_k$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例 1 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$ 的敛散性.

解 当 $x=2k\pi$ 时, 该级数就是调和级数, 故发散.

若 $x\neq 2k\pi$, 记

$$A_n=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

于是

$$|A_n|<\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

故根据 Dirichlet 判别法知级数收敛. 类似可讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的收敛性.

例 2 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}\cos 3n$ 的敛散性.

解 由上例, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}$ 收敛. 又 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 单调有界, 因此根据 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{n}\cos 3n$ 收敛.

例 3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 的敛散性.

解 因为

$$(-1)^n\cos 2n=\cos n\pi\cos 2n=\cos n(\pi+2),$$

所以

$$\begin{aligned}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}&=(-1)^n\frac{1-\cos 2n}{2n}=\frac{(-1)^n}{2n}-\frac{(-1)^n\cos 2n}{2n}\\&=\frac{(-1)^n}{2n}-\frac{\cos n(\pi+2)}{2n}\end{aligned}$$

由 Leibniz 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ 收敛, 由前面的例子知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(\pi+2)}{4n}$$

也收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛.

例 4 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 的敛散性.

解 因为

$$\begin{aligned}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi+n\pi)\\ &= \cos n\pi\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)\\ &= (-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},\end{aligned}$$

而数列 $\left\{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}$ 单调递减趋于零, 所以根据 Leibniz 判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 收敛.

例 5 试作一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 是发散的.

解 设

$$a_n = \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{n^{1/3}}.$$

则由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 利用恒等式

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

可得

$$a_n^3 = \frac{1}{n}\left(\cos \frac{2n\pi}{3}\right)^3 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + 3\cos \frac{2n\pi}{3}}{4}$$
$$= \frac{1}{4n} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{n}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{n}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 发散.

级数的乘积

由于级数是有限和的推广, 有限和相乘所得乘积是一个数, 因此, 很自然地要考虑两个收敛的级数是否可以相乘.

设 $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个收敛级数, 并设 $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $B_m = \sum_{k=1}^{m} b_k$. 于是 $A_nB_m = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_ib_j$ 它是把所有可能的乘积

$$a_ib_j \quad (i = 1, \cdots, n,\ j = 1, \cdots, m)$$

相加. 对于所给的两个级数, 把所有可能的乘积写出来:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

这是一个无穷矩阵. 通常考虑两种顺序的加法.

1° 按方块形式相加

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_2) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \cdots$$

此级数的部分和是

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k = A_n B_n.$$

2° 按对角线形式相加

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots$$

此级数的通项是

$$c_n = \sum_{i+j=n+1} a_i b_j = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

此时称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 Cauchy **乘积**.

例 6 设 $a_n = b_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$. 则

$$c_n = \sum_{i+j=n+1} (-1)^{i-1}\frac{1}{\sqrt{i}}(-1)^{j-1}\frac{1}{\sqrt{j}} = (-1)^{n-1}\sum_{i+j=n+1}\frac{1}{\sqrt{ij}}.$$

所以

$$|c_n| \geqslant \sum_{i+j=n+1}\frac{2}{i+j} = \frac{2n}{n+1} \geqslant 1.$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

此例说明, 两个收敛的级数的 Cauchy 乘积可能是发散的.

例 7 设 $a_0 = b_0 = 1$, $a_n = -(\frac{3}{2})^n$, $b_n = (\frac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}})$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 的 Cauchy 乘积为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, 其中

$$
\begin{aligned}
c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_n b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \\
&= (\tfrac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}) - (\tfrac{3}{2})^n - \sum_{k=1}^{n-1} (\tfrac{3}{2})^k (\tfrac{3}{2})^{n-k-1}(2^{n-k} + \frac{1}{2^{n-k+1}}) \\
&= (\tfrac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}) - (\tfrac{3}{2})^n - (\tfrac{3}{2})^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (2^{n-k} + \frac{1}{2^{n-k+1}}) \\
&= (\tfrac{3}{2})^{n-1}(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}) - (\tfrac{3}{2})^n - (\tfrac{3}{2})^{n-1}(2^n - 2 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2^n}) \\
&= (\tfrac{3}{4})^n.
\end{aligned}
$$

因此 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ 都发散.

定理 7 (Cauchy) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都绝对收敛, 其和分别为 A 和 B, 则把 $a_ib_j \quad (i=1,2,\cdots,\infty,\ j=1,2,\cdots,\infty)$ 按任意方式相加所得的级数都绝对收敛, 其和等于 AB.

证明 设 $a_{i_l}b_{j_l}\,(l=1,2,\cdots)$ 是 $a_ib_j\,(i=1,2,\cdots,\infty,\ j=1,2,\cdots,\infty)$ 的任意一种排列, 并设 $\{i_1,\cdots,i_n,j_1,\cdots,j_n\}$ 中最大指标为 N, 则

$$\sum_{l=1}^{n}|a_{i_l}b_{j_l}| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{N}|b_j|\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|\right),$$

所以 $\sum\limits_{l=1}^{\infty} a_{i_l}b_{j_l}$ 绝对收敛. 因为对于绝对收敛的级数交换无穷多项的次序不改变收敛性且和也不变, 所以

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{i_l}b_{j_l} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}b_j\right) = AB.$$

引理 3 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 并且 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1) = 0.$$

证明 因为 $\{b_n\}$ 收敛, 所以有界, 设 $|b_n| < M$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 m, 当 $n > m$ 时, 有

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

由 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 知存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$|b_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(|a_1| + \cdots + |a_m| + 1)}.$$

因此当 $n > N + m - 1$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&|a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1| \\
\leqslant\ & |a_1 b_n + \cdots + a_m b_{n+1-m}| + |a_{m+1} b_{n-m} + \cdots + a_n b_1| \\
\leqslant\ & (|a_1| + \cdots + |a_m|) \frac{\varepsilon}{2(|a_1| + \cdots + |a_m| + 1)} + (|a_{m+1}| + \cdots + |a_1|) M \\
<\ & \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

于是引理得证.

定理 8 (Mertens) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 其和分别为 A 和 B. 如果两个级数中至少有一个是绝对收敛的, 那么它们的 Cauchy 乘积收敛, 且和等于 AB.

证明 不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 记

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i+j=k+1} a_i b_j \right).$$

只需证明 $\lim_{n\to\infty} C_n = AB$. 这由下面的推导和引理即知.

$$\begin{aligned} C_n &= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \cdots \\ &\quad + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1) \\ &= a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1 \\ &= a_1(B_n - B) + a_2(B_{n-1} - B) + \cdots + a_n(B_1 - B) + A_nB. \end{aligned}$$

定理 9 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 其和分别为 A 和 B. 如果它们的 Cauchy 乘积收敛, 则 Cauchy 乘积的和等于 AB.

例 8 由 D'Alembert 判别法知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 对一切实数 x 都绝对收敛, 设其和为 $E(x)$. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ 的 Cauchy 乘积为 $E(x)E(y)$. 因为

$$\sum_{n=0}^{m}\left(\sum_{i+j=n}\frac{x^i}{i!}\cdot\frac{y^j}{j!}\right)=\sum_{n-0}^{m}\frac{1}{n!}\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!j!}x^iy^j$$

$$=\sum_{n-0}^{m}\frac{(x+y)^n}{n!}\to E(x+y)\quad(m\to\infty),$$

所以 $E(x)E(y)=E(x+y)$.

问题 1 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个非负数列满足 $a_{n+1} < a_n + b_n$, 而且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 求证 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在.

证明 记 $B_0 = 0$, $B_n = b_1 + \cdots + b_n$, $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. 由条件, 有

$$a_{n+1} - B_n < a_n - B_{n-1}.$$

这说明数列 $\{a_n - B_{n-1}\}$ 单调递减有下界 $-B$, 因此, 这个数列收敛. 又 $\{B_{n-1}\}$ 收敛, 所以 $\{a_n\}$ 收敛.

问题 2 设 $\Phi(x)$ 是 $(0,\infty)$ 上正的严格增函数, 且 $\Phi(0)=0$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 是三个非负数列使得 $\sum_{n=1}^\infty b_n$ 发散, $\sum_{n=1}^\infty c_n$ 收敛, 且

$$a_{n+1}\leqslant a_n-b_n\Phi(a_n)+c_na_n, \tag{1}$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

证明 由 (1) 知, 若 $a_k=0$, 则其后的 a_n 都为零. 因此, 不妨设 $a_n>0$. 若 $a_{n+1}\leqslant a_n$, 则 $\ln a_{n+1}-\ln a_n\leqslant c_n$. 若 $a_{n+1}>a_n$, 则

$$\ln a_{n+1}-\ln a_n=\ln\Big(1+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\Big)<\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\leqslant c_n.$$

因此, 总有

$$\ln a_{n+1}-\ln a_n\leqslant c_n. \tag{2}$$

由于 $\sum_{n=1}^\infty c_n$ 收敛, 对上式求和可知 $\{\ln a_n\}$ 有界, 因而 $\{a_n\}$ 有界. 再从 $\sum_{n=1}^\infty c_n$ 收敛, 知 $\sum_{k=1}^\infty c_ka_k$ 收敛. 从 (1) 可得

$$a_{n+1}\leqslant a_n+c_na_n,$$

根据问题1的结论知 $\{a_n\}$ 收敛.

若 $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$, 则存在正数 δ 使得 $a_n > \delta$ 对一切 n 成立, 此时 $\Phi(a_n) > \Phi(\delta)$. 由 (1) 得

$$a_{n+1} + \Phi(\delta) b_n \leqslant a_n + c_n a_n.$$

此式蕴含 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 这与条件不符. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

问题 3 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 若数列 $\{a_n - a_{n+1}\}$ 严格递减, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right) = +\infty$$

证明 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 所以 $a_n \to 0$, 因而 $a_n - a_{n+1} \to 0$, 又因为 $\{a_n - a_{n+1}\}$ 严格递减, 所以 $a_n - a_{n+1} > 0$.

$$\begin{aligned}0 < \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right)^{-1} &= \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} < \frac{a_n^2}{a_n - a_{n+1}} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k^2 - a_{k+1}^2}{a_n - a_{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty}(a_k + a_{k+1})\frac{a_k - a_{k+1}}{a_n - a_{n+1}} \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{\infty}(a_k + a_{k+1}) \to 0,\ n \to +\infty.\end{aligned}$$

所以结论成立.

问题 4 设 $\{a_n\}$ 是正数列, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 记 $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$. 则对于 $0 < p < 1$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p}$ 收敛, 而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n^p} < \frac{1}{1-p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)^{1-p},$$

其中右端的系数 $\frac{1}{1-p}$ 是最佳的.

证明 显然 $r_n > 0$ 且 $\{r_n\}$ 单调递减趋于 0. 在 $[r_{n+1}, r_n]$ 上对函数 $f(x) = x^{1-p}$ 用中值定理, 得

$$r_n^{1-p} - r_{n+1}^{1-p} = (1-p)\frac{r_n - r_{n+1}}{\xi^p} = (1-p)\frac{a_n}{\xi^p},$$

其中 $\xi \in (r_{n+1}, r_n)$. 因此, 有

$$\frac{a_n}{r_n^p} < \frac{1}{1-p}(r_n^{1-p} - r_{n+1}^{1-p}).$$

由此得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n^p} < \frac{1}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}(r_n^{1-p} - r_{n+1}^{1-p})$$
$$= \frac{1}{1-p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\right)^{1-p}.$$

取 $a_n = \frac{1}{a^n}$ $(a > 1)$. 则 $r_n = \frac{1}{(a-1)a^{n-1}}$. 因而

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a-1)^p}{a^{n-(n-1)p}} = \left(\frac{a-1}{a}\right)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(a^{1-p})^n}$$
$$= \left(\frac{a-1}{a}\right)^p \frac{\frac{1}{a^{1-p}}}{1-\frac{1}{a^{1-p}}} = \left(\frac{a-1}{a}\right)^p \frac{1}{a^{1-p}-1}$$
$$= \frac{(a-1)^p}{a-a^p}.$$

又

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^{1-p} = \frac{1}{(a-1)^{1-p}},$$

因此

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^p} \Bigg/ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^{1-p} = \frac{a-1}{a-a^p} \to \frac{1}{1-p}, \quad (a \to 1^+).$$

这说明系数 $\frac{1}{1-p}$ 是最佳的.

问题 5 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

证明 (充分性) 若 $\{a_n\}$ 有界, 则收敛于 $a>0$. 令 $A_n=a_{n+1}-a_n$, $B_n=\frac{1}{a_n}$. 则 $\{B_n\}$ 单调递减趋于 $\frac{1}{a}$, 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛, 所以根据 Abel 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nB_n$ 收敛, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛.

(必要性) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛于 S. 则有

$$
\begin{aligned}
S&>\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{a_n}\,dx\\
&\geqslant\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x}\,dx=\int_{a_1}^{a_{m+1}}\frac{1}{x}\,dx=\ln a_{m+1}-\ln a_1.
\end{aligned}
$$

由此知 $\{a_n\}$ 有界.

问题 6 设 $\alpha > 0$, $\{a_n\}$ 是递增正数列. 求证级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$ 收敛.

证明 因为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}^{\alpha+1}} = \sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{dx}{a_{k+1}^{\alpha+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\frac{dx}{x^{\alpha+1}} = \int_{a_1}^{a_{n+1}}\frac{dx}{x^{\alpha+1}}$$
$$= \frac{1}{\alpha}(a_1^{-\alpha} - a_{n+1}^{-\alpha}) < \frac{1}{\alpha}a_1^{-\alpha}.$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}^{\alpha+1}}$ 收敛. 显然级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_k^{\alpha}}-\frac{1}{a_{k+1}^{\alpha}}\right)$ 收敛, 因而级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}}\left(\frac{1}{a_k^{\alpha}}-\frac{1}{a_{k+1}^{\alpha}}\right)$$

收敛. 由

$$\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}a_k^{\alpha}} = \frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}^{\alpha+1}} + \frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}}\left(\frac{1}{a_k^{\alpha}}-\frac{1}{a_{k+1}^{\alpha}}\right)$$

知所给的级数收敛.