第七次习题课

- 商空间
  - 构造方式 / 定义

$$V/W = \{ \alpha + W : \alpha \in V \}$$

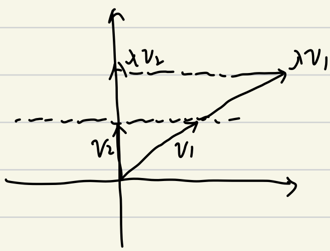
$$\bar{\alpha} = \alpha + W = \{ \alpha + \gamma \mid \gamma \in W \}$$

$$\begin{cases} \bar{\alpha} + \bar{\beta} = \overline{\alpha+\beta} \\ \lambda \bar{\alpha} = \overline{\lambda\alpha} \end{cases}$$

（这个定义"合理"吗？
验证：$\overline{\alpha_1} = \overline{\alpha_2} \Rightarrow \begin{cases} \overline{\alpha_1+\beta} = \overline{\alpha_2+\beta} \\ \overline{\lambda\alpha_1} = \overline{\lambda\alpha_2} \end{cases}$）

$\bar{\alpha} = \alpha + W$ 中的 α 被称作代表元（并不唯一！）

- 例：$W = \mathbb{R}x_1$. $V = \mathbb{R}x_1 \oplus \mathbb{R}x_2$



$v_1 \sim v_2$ （$v_1 - v_2 \in W$）

$\overline{v_1} = \overline{v_2}$

$\overline{\lambda v_1} = \overline{\lambda v_2}$

$$V/W = \{ \overline{(0, a)} \mid a \in \mathbb{R} \}$$

- 商空间$\boxed{\text{不是}}$原空间的子空间

（元素都不一样！）

· 商空间可以$\boxed{\text{同构}}$到原空间的一个子空间.（并不唯一）.

如何定义商空间的映射？

我们有哪些"自然"的映射？

· ☆ $\pi: V \to V/W$

$\alpha \mapsto \alpha + W = \bar{\alpha}$

Ex π 满射. 且 $\ker \pi = W$

· ✗ $i: V/W \to V$

$\alpha + W \mapsto \alpha$

$\boxed{\text{不是线性映射！}}$

不是$\boxed{\text{良好定义}}$的映射

$\boxed{\text{1、是一个"映射"　2. 在"范畴"意义下合法.}}$

（取 $\gamma \in W$ 则 $\bar{\alpha} = \overline{\alpha+\gamma}$

但 $i(\bar{\alpha}) = \alpha$, $i(\overline{\alpha+\gamma}) = \alpha+\gamma$）

· 泛性质 (universal property)

目标是通过 $V \to T$ 线性映射

诱导 $V/W \to T$ 的线性映射

命题1 设 $f: V \to T$ 线性映射

若 $W \subseteq \ker f$

则存在唯一映射 $\tilde{f}: V/W \to T$

使得

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & T \\ & V/W \arrow[u, dotted, "\tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

图表交换

即 $f = \tilde{f} \circ \pi$.

Pf. 存在性，唯一性均由以下论证得到.

$\forall\ \overline{v_1} \in V/W \quad \exists\ v_2 \in V. \quad \pi(v_2) = \overline{v_1}$

$v_2 = v_1 + \gamma. \quad \gamma \in W$

$$\tilde{f}(\overline{v_1}) := \tilde{f}\pi(v_2) = f(v_2)$$

$$= f(v_1 + \gamma) = f(v_1) \qquad (W \subseteq \ker f)$$

故 $\tilde{f}$ 在 $\overline{v_1}$ 的取值仅依赖于 $f(v_1)$

故 $\tilde{f}$ 唯一 □

推论1（同态基本定理）

$f: V \to T$ 线性映射

则 $\tilde{f}: V/\ker f \cong \operatorname{Im} f$

证明留作 EX.

推论.（第二同态…定理）

若 $V_1 \subseteq V_2 \subseteq V$

则 $$\frac{V/V_1}{V_2/V_1} \cong V/V_2$$

Pf. $\pi: V \longrightarrow V/V_2$.

由于 $V_1 \subseteq \ker \pi$

$\Longrightarrow \pi$ 诱导 $\tilde{\pi}: V/V_1 \longrightarrow V/V_2$

泛性质

由于 $\ker\tilde{\pi} = V_2/V_1$

故 $\dfrac{V/V_1}{V_2/V_1} \cong V/V_2$ □

推论.（第三同态定理）

V_1, V_2 为 V 的子空间

则 $V_1+V_2/V_1 \cong V_2/V_1\cap V_2$

下证 V/W 可同构到 V 的子空间.

<u>证明</u>. 设 W 的基 $\{e_i\}_{i\in I}$

V 的基 $\{e_i\}_{i\in I} \sqcup \{v_j\}_{j\in J}$

设 W' 由 $\{v_j\}_{j\in J}$ 生成，V 的子空间.

$$f: V \longrightarrow W'$$
$$\sum a_ie_i + \sum b_jv_j \longmapsto \sum b_jv_j$$

$\ker f = W$. f 满射

则 $V/W \cong W'$. □

注. 同构并不唯一.（如 $\mathbb{R}^2$. $W = \mathbb{R}e_1$, W' 可为 $\mathbb{R}e_2$ 或 $\mathbb{R}(e_1+e_2)$）

推论 $V \cong W \times V/W$

（不能写成直和！）

证明留作习题

对偶空间. V^* （为简化讨论，$\dim V < \infty$）

· 定义: $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F})$ 线性映射全体. 构成线性空间.

· 由基 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 对应的对偶基 $\{e^j\}_{j=1}^n$

$$e^j(e_i) = \delta_{ij}$$

· $\{e^j\}_{j=1}^n$ 构成 V^* 的一组基

· V 有两组基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{v_i\}_{i=1}^n$

其中 $(v_1 \cdots v_n) = (e_1 \cdots e_n) A$

问题: e_i , v_i 分别对应对偶基 e^i , v^i

如何给出 e^i 与 v^i 关系？

Prop. $(v^1, \cdots, v^n)^T = A^{-1}(e^1 \cdots e^n)^T$

Pf. 设 $(v^1, \cdots, v^n)^T = B\,(e^1 \cdots e^n)^T$

由于 $v^i(v_j) = \delta_{ij}$

考虑
$$\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} (v_1 \cdots v_n) = \left(v^i(v_j) \right) = I_n$$

故
$$B \underbrace{\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix} (e_1 \cdots e_n)}_{= I_n} A = I_n \quad \Rightarrow B = A^{-1}$$

□

· V 有限维时

$\Phi: V \cong (V^*)^*$

$a \longmapsto \Phi_a: V^* \to \mathbb{F}$

$e^i \mapsto a(e^i) = e^i(a)$

Φ 单 + $\dim V = n = \dim (V^*)^*$

$\Rightarrow \Phi$ 同构

· V 无限维时 $V \cong (V^*)^*$ 不一定对

但 $\iota: V \to (V^*)^*$ 总为单射

例 $l^1 = \{ (a_n)_n \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,\ a_n \in \mathbb{R} \}$

$l^\infty = \{ (a_n)_n \mid \sup_n |a_n| < \infty,\ a_n \in \mathbb{R} \}$

命题：(1) $(l^1)^* = l^\infty$

(2) $l^1 \hookrightarrow (l^\infty)^*$

Pf 实分析内容. 详见实分析课本. $\square$

$\rho: V\times V\to \mathbb{R}$或$\mathbb{C}$

$\rho(x,x)\geq 0$ (" = " $\Leftrightarrow x=0$)

$\rho(x,y)=\overline{\rho(y,x)}$

$\rho(\lambda x_1+\mu x_2, y)$

$=\lambda\rho(x_1,y)+\mu\rho(x_2,y)$

观点：利用内积诱导对偶

(由于内积实际诱导了V上的范数(度量)

故实质上可以定义无限维

为简化讨论，$\dim V<\infty$)

$\rho: V\times V\to K$ 为内积 (此处K为$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$ V为K-线性空间)

则$\forall$固定y

$$\rho_y: V\to K,\quad x\mapsto \rho(x,y)$$ 易证$\rho_y\in V^*$

Riesz表示定理 (部分陈述)：$\forall f: V\to K$线性函数，存在唯一$y\in V$ $f=\rho_y$.

唯一性. 若 $\rho_{y_1}=\rho_{y_2}$

则 $\rho_{y_1}(y_1-y_2)=\rho_{y_2}(y_1-y_2)$

即 $(y_1-y_2, y_1)=(y_1-y_2, y_2)$

$\Rightarrow (y_1-y_2, y_1-y_2)=0 \Rightarrow y_1=y_2$

存在性：$\forall f: V\to K$

设V有标准正交基$\{e_i\}_{i=1}^n$

则令 $y=\sum_{i=1}^n \overline{f(e_i)}\,e_i$ (需要取个复共轭)

则 $\forall x=\sum_{i=1}^n a_ie_i$

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^n a_i f(e_i)$$

$$f(x)=f\Big(\sum_{i=1}^n a_ie_i\Big)=\sum a_i f(e_i)$$

故 $f=\rho_y$ $\square$

注：· 若 ρ 为 $\mathbb{R}$ 上的内积

则 $\Phi: V \to V^*$

$y \mapsto \rho_y$ 是个 $\mathbb{R}$-线性同构

· 一般的，对 V, W 有限维

若 $f: V \times W \to \mathbb{F}$，$f$ 为非退化的(non-degenerate)双重线性映射(bilinear-map)

(1) $f(\lambda v + \mu v', w) = \lambda f(v, w) + \mu f(v', w)$

(2) $f(v, \lambda w + \mu w') = \lambda f(v, w) + \mu f(v, w')$

(3) $\forall$ 固定 $v \in V$，若 $\forall w \in W$

$f(v, w) = 0$. 则 $v = 0$

(4) $\forall$ 固定 $w \in W$ 若 $\forall v \in V$

$f(v, w) = 0$ 则 $w = 0$

则 $L: V \to W^*$

$v \mapsto f_v : w \mapsto f(v, w)$

$R: W \to V^*$ 为线性同构

$w \mapsto f_w : v \mapsto f(v, w)$

Pf. 由 (1), (2). L、R 是良好定义的 $\mathbb{F}$ 线性映射

由 (3) (4) L 单 R 单

即 $\begin{cases} \dim V \le \dim W^* = \dim W \\ \dim W \le \dim V^* = \dim V \end{cases}$

$\Rightarrow \dim V = \dim W$. 而 L, R 单 $\Rightarrow$ 为同构

$\square$

部分作业答案

此题需加入条件 char $F=0$ 或 char $F \nmid n$

3. 设 W_1，W_2 分别是数域 F 上齐次线性方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间．求证：$F^n=W_1\oplus W_2$．

证明：即证 ① $F^n = W_1 + W_2$

② $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$

①："$\supseteq$" 显然

"$\subseteq$" $\forall\ v=(v_1,\cdots,v_n)\in F^n$ $\quad v_i\in F$

记 $s=\dfrac{v_1+\cdots+v_n}{n}$

则 $v=(v_1-s,\cdots,v_n-s)+(s,\cdots,s)$

其中 $(v_1-s,\cdots,v_n-s)\in W_1$

$(s,\cdots,s)\in W_2$

② 若 $v=(v_1,\cdots,v_n)\in W_1\cap W_2$

则 $\begin{cases}\sum v_i=0\\ v_1=\cdots=v_n\end{cases} \Rightarrow v_1=\cdots=v_n=0$

□

1 在 $V=F^{2\times 2}$ 中，令 V_1 是形如 $\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$ 的矩阵构成的集合．证明：V_1 为 $F^{2\times 2}$ 的子空间．并求商空间 V/V_1．

解．$\forall\ \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \in V/V_1$

由于 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & d \end{pmatrix} \in V_1$

故 $\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 0 & a+b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \in V/V_1$

故 $V/V_1 = \left\{ \overline{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} : a\in F \right\}$

2 设V_1, V_2是V的子空间，且V_1, V_2的余维数有限．则

$$codim(V_1+V_2)+codim(V_1\cap V_2) = codim(V_1)+codim(V_2).$$

证明．解法一．按以下步骤证明

① 引理：设 $V \subseteq W$ 子空间

V 的基为 $\{e_i\}_{i\in I}$

W 的基为 $\{e_i\}_{i\in I} \sqcup \{f_j\}_{j\in J}$

则 $\operatorname{codim} V < \infty \iff |J| < \infty$ 且此时有 $|J| = \operatorname{codim} V$

② 依次设出以下空间的基．再考虑余维数．

$V_1 \cap V_2$ $\{e_i\}_{i\in I}$

V_1 $\{e_i\}_{i\in I} \sqcup \{f_j\}_{j\in J}$

V_2 $\{e_i\}_{i\in I} \sqcup \{h_k\}_{k\in K}$

V_1+V_2 $\{e_i\}_{i\in I} \sqcup \{f_j\}_{j\in J} \sqcup \{h_k\}_{k\in K}$

V $\{e_i\}_{i\in I} \sqcup \{f_j\}_{j\in J} \sqcup \{h_k\}_{k\in K} \sqcup \{v_t\}_{t\in T}$

①：$\operatorname{codim} V = \dim W/V$，记 $\tilde{V} = \{\sum_{j\in J} a_j f_j \mid a_j \in \mathbb{F}\}$ 有限求和

下证 $\sigma: W/V \to \tilde{V}$ 线性空间同构

$\forall\ \bar{w} \in W/V$

设 $w = \sum_{i\in I} a_i e_i + \sum_{j\in J} b_j f_j$ 有限求和

则 $w - \sum b_j f_j = \sum a_i e_i \in V$

$\Rightarrow \bar{w} = \overline{\sum b_j f_j}$

定义 $\sigma(\bar{w}) = \sigma(\overline{\sum b_j f_j}) = \sum b_j f_j$

即 $\sigma(\overline{\sum a_i e_i + \sum b_j f_j}) = \sum b_j f_j$

线性映射 显然

单：若 $\sum b_j f_j = 0 \Rightarrow \bar{w} = \overline{\sum a_i e_i} = \bar{0}$

满：$\forall \tilde{v}=\sum b_j f_j \in \tilde{V}$

$\overline{\tilde{v}} \in W/V$ 满足 $\sigma(\overline{\tilde{v}})=\tilde{v}$

故为同构

$\Rightarrow \dim \tilde{V} = \dim W/V = \operatorname{codim} V$

左边 $=|J|$（因 $\tilde{V}$ 由 $\{f_j\}$ 生成））

故命题 ① 成立.

② 由于

$V_1 \cap V_2$ $\{e_i\}_{i\in I}$ 可分别扩充为 V_1, V_2 的基

V_1 $\{e_i\}_{i\in I} \sqcup \{f_j\}_{j\in J}$ $f_j \in V_1 \setminus V_2$（即 $\in V_1, \notin V_2$）

V_2 $\{e_i\}_{i\in I} \sqcup \{h_k\}_{k\in K}$ $h_k \in V_2 \setminus V_1$

下证 V_1+V_2 的基为

$\{e_i\}_{i\in I} \sqcup \{f_j\}_{j\in J} \sqcup \{h_k\}_{k\in K}$

线性无关：

若 $\sum a_i e_i + \sum b_j f_j + \sum c_k h_k = 0$

则 $-\sum c_k h_k = \sum a_i e_i + \sum b_j f_j \in V_2 \cap V_1$

$\Rightarrow \sum a_i e_i + \sum b_j f_j = \sum d_i e_i \Rightarrow a_i = b_j = d_i = 0 \Rightarrow c_k = 0$

基：$\forall \alpha+\beta \in V_1+V_2$. $\alpha = \sum a_i e_i + \sum b_j f_j$, $\beta = \sum \tilde{a}_i e_i + \sum c_k h_k$

$\Rightarrow \alpha+\beta$ 为 e_i, f_j, h_k 线性组合

再扩充为 V 的基 $\{e_i\}_{i\in I} \sqcup \{f_j\}_{j\in J} \sqcup \{h_k\}_{k\in K} \sqcup \{v_t\}_{t\in T}$

故 $\operatorname{codim} V_1 = |K| + |T| < \infty$

$\operatorname{codim} V_2 = |J| + |T| < \infty$

$\operatorname{codim}(V_1+V_2) = |T|$

由 $|K| + |J| + |T| < \infty$

由 ① $\Rightarrow \operatorname{codim}(V_1 \cap V_2) = |J| + |K| + |T|$

故 $\operatorname{codim}(V_1+V_2) + \operatorname{codim} V_1 \cap V_2 = |J| + |K| + 2|T|$

$= \operatorname{codim} V_1 + \operatorname{codim} V_2$ □

解法二:　使用同态基本定理

记号

单射 $\longrightarrow$

满射 $\twoheadrightarrow$

有

1. $V_1+V_2/V_1 \cong V_2/V_1\cap V_2$

2. $V_1+V_2/V_1 = \ker(V/V_1 \twoheadrightarrow V/V_1+V_2)$

3. $V_2/V_1\cap V_2 = \ker(V/V_1\cap V_2 \twoheadrightarrow V/V_2)$

由 2. $\dim V_1+V_2/V_1 = \dim V/V_1 - \dim V/V_1+V_2$

由 3 $\dim V_2/V_1\cap V_1 = \dim V/V_1\cap V_2 - \dim V/V_2$

由 1. $\dim V_2/V_1\cap V_2 = \dim V_1+V_2/V_1$

$\square$

有限维证明,　左 $= \dim V - \dim(V_1+V_2) + \dim V - \dim V_1\cap V_2$

$= 2\dim V - (\dim V_1+V_2 + \dim V_1\cap V_2)$

$= 2\dim V - (\dim V_1 + \dim V_2)$

$= \operatorname{codim} V_1 + \operatorname{codim} V_2$ = 右 $\square$

1. 令 $V=F_3[x]$, $B_i(x)=t^i(1-t)^{3-i}$, $i=0,1,2,3$.
   1. 证明: $B_0(x), B_1(x), B_2(x), B_3(x)$ 构成 V 的一组基.
   2. 求 $B_0(x), B_1(x), B_2(x), B_3(x)$ 的一组对偶基.

证明. (1) 设 $\sum_{i=0}^{3} a_i B_i(x) = 0$　$a_i \in F$

取 $x=0 \Rightarrow a_3=0$　(为什么可以取?)

取 $x=1 \Rightarrow a_0=0$

则 $a_1B_1(x) + a_2B_2(x) = 0$

$\Rightarrow t(1-t)\big(a_1(1-t) + a_2 t\big) = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = 0$

故线性无关

(2) 由于 $\begin{pmatrix} B_0(x) \\ B_1(x) \\ B_2(x) \\ B_3(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$

令 e_i 为 $B_i(x)$ 的对偶基

则 $e_i(B_j) = \delta_{ij}$

$\forall \ p(x) = \sum_{n=0}^{3} a_n x^n = \sum_{n=0}^{3} \tilde{a}_n B_n(x)$

$$(a_0, \cdots, a_3) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = (\tilde{a}_0 \cdots \tilde{a}_3) \begin{pmatrix} B_0(x) \\ B_1(x) \\ B_2(x) \\ B_3(x) \end{pmatrix}$$

$$= (\tilde{a}_0 \cdots \tilde{a}_3) \ A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (e_0(p), \cdots, e_3(p)) = (\tilde{a}_0, \cdots, \tilde{a}_3) = (a_0, \cdots, a_3) A^{-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_0(p) = p(0) \\ e_1(p) = 3p(0) + p'(0) \\ e_2(p) = 3p(0) + 2p'(0) + \frac{1}{2} p''(0) \\ e_3(p) = p(0) + p'(0) + \frac{1}{2} p''(0) + \frac{1}{6} p'''(0) \end{cases}$$

2. 设线性空间V中向量$v_1, \ldots, v_m$线性相关，则对任意$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in V^*$, $\det(\alpha_i(v_j)) = 0$.

证明. 由 $\{v_i\}_{i=1}^{m}$ 线性相关

$\Rightarrow \exists \ x_i$ 不全为 0 $\sum_{j=1}^{m} x_j v_j = 0$

故 $\forall \alpha_i$. $0 = \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{m} x_j v_j \right) = \sum_{j=1}^{m} x_j \alpha_i(v_j)$

即 $\begin{pmatrix} & & \\ & \alpha_i(v_j) & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \vec{0}$ $\Rightarrow \det = 0$

齐次方程有非0解. □

3. 证明：如果一个向量空间上的两个线性函数的化零子相同，则这两个线性函数只差一个非零常数倍.

(仅适用于有限维)

证：解法一. 设 f, g 为两线性函数

$V^* = \{\delta^i\}_{i=1}^n$ $\quad \delta^i$ 为 e_i 对偶基

则 $f = \sum_{i \in F} f_i \delta^i$, $g = \sum_{i \in G} g_i \delta^i$

若 $\exists\, i$. $f_i = 0$, $g_i \neq 0$

则 $f(e_i) = f_i = 0$, $g(e_i) = g_i \neq 0$

$\Rightarrow$ $e_i \in \ker f$, $e_i \notin \ker g$ 矛盾

同理 $\nexists\, i$ $\quad f_i \neq 0 \quad g_i = 0$

故不妨假设 $f = \sum_{i=1}^n f_i \delta^i$ $\quad g = \sum_{i=1}^n g_i \delta^i$

其中 $\forall\, i$ $\quad f_i, g_i \neq 0$

取 $v_i = e_1 - \frac{f_1}{f_i} e_i$

则 $f(v_i) = f(e_1) - \frac{f_1}{f_i} f(e_i) = f_1 - \frac{f_1}{f_i} \cdot f_i = 0$

故 $v_i \in \ker f = \ker g$

$\Rightarrow$ $g(v_i) = 0$ 即 $g_1 - \frac{f_1}{f_i} g_i = 0$

$\Rightarrow$ $\frac{g_1}{f_1} = \frac{g_i}{f_i}$ $\quad \forall\, i$

$\Rightarrow$ $f = \frac{f_1}{g_1} g$ $\quad \square$

解法二.(与一实质相同)

设 $W=\ker f=\ker g=\langle\{e_i\}_{i=1}^n\rangle$

全空间 $V=\langle\{e_i\}_{i=1}^n \sqcup \{v_j\}_{j=1}^m\rangle$

记 e_i 对偶基 δ^i v_j 对偶基 μ^j

则 $f=\sum_{I_1} f_i\delta^i+\sum_{J_1} f_j\mu^j$

$g=\sum_{I_2} g_i\delta^i+\sum_{J_2} g_j\mu^j$

由 $e_i\in\ker f \Rightarrow f(e_i)=f_i=0 \quad \forall i\in I_1$

$\Rightarrow f=\sum_{J_1} f_j\mu^j$ 同理. $g=\sum_{J_2} g_j\mu^j$

若 $\exists\ j_1\neq j_2$ $f_{j_1}, f_{j_2}\neq 0$

则 $f(v_{j_1}-\frac{f_{j_1}}{f_{j_2}}v_{j_2})=0$

$\Rightarrow v_{j_1}-\frac{f_{j_1}}{f_{j_2}}v_{j_2}\in W=\langle\{e_i\}_i\rangle$

矛盾.

故 $f=f_j\mu^j$. 同理 $g=g_{j'}\mu^{j'}$

j 只能等于 j' (否则 $v_j\in\ker g$, $v_j\notin\ker f$)

$\Rightarrow f=\frac{f_j}{g_j}g$

□

解法三: 考虑 $\Phi:\ V\to \mathbb{F}\times\mathbb{F}$

$v\mapsto (f(v), g(v))$

Φ 不满: 否则 $\exists\ v.\ \Phi(v)=(0,1)$

$\Rightarrow v\in\ker f,\ v\notin\ker g$

则 $\dim \operatorname{Im} \Phi = 0$ 或 1

若 $\dim \operatorname{Im} \Phi = 0 \Rightarrow \Phi(v) = 0 \quad \forall v$

$\Rightarrow f, g \equiv 0$

若 $\dim \operatorname{Im} \Phi = 1 \overset{\exists a,b \in F}{\Longrightarrow} \operatorname{Im} \Phi = \langle (a,b) \rangle$

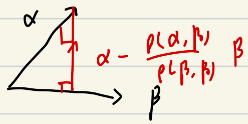
即 $\forall v \quad (f(v), g(v)) = \lambda (a,b) \quad \exists \lambda \in F$

$= (\lambda a, \lambda b)$

由 $a, b \neq 0 \Rightarrow b f(v) = a g(v) \quad \forall v$

$\Rightarrow f = \frac{a}{b} g$ $\square$

解法四. (需要假设 V 上可以定义内积)



设 V 上有内积 $\rho: V \times V \to \mathbb{R}$

则由 Riesz 表示定理

$\exists \alpha, \beta \in V$

$f(x) = \rho(x, \alpha)$

$g(x) = \rho(x, \beta)$

注意到 $\alpha = \frac{\rho(\alpha,\beta)}{\rho(\beta,\beta)} \beta + \left[\alpha - \frac{\rho(\alpha,\beta)}{\rho(\beta,\beta)} \beta \right]$

且 $\rho\left(\alpha - \frac{\rho(\alpha,\beta)}{\rho(\beta,\beta)} \beta, \beta \right) = 0$ ①

即 $g\left(\alpha - \frac{\rho(\alpha,\beta)}{\rho(\beta,\beta)} \beta \right) = 0$

$\Rightarrow \alpha - \frac{\rho(\alpha,\beta)}{\rho(\beta,\beta)} \beta \in \ker f$

$\Rightarrow \rho\left(\alpha - \frac{\rho(\alpha,\beta)}{\rho(\beta,\beta)} \beta, \alpha \right) = 0$ ②

由 ①, ② $\Rightarrow \rho\left(\alpha - \frac{\rho(\alpha,\beta)}{\rho(\beta,\beta)}, \alpha - \frac{\rho(\alpha,\beta)}{\rho(\beta,\beta)} \right) = 0$

$$\Rightarrow \alpha - \frac{\rho(\alpha,\beta)}{\rho(\beta,\beta)}\beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\rho(\alpha,\beta)}{\rho(\beta,\beta)}\beta \Rightarrow f = cg \qquad \square$$

仅适用有限维

解法五. 若 f, g 线性无关

取 V^{**} 中 f, g 对应的对偶基 α, β

即 $\alpha(f) = 1, \quad \alpha(g) = 0$

$\beta(f) = 0 \quad \beta(g) = 1$

而 $V \cong V^{**}$

$\Rightarrow \alpha, \beta \in V$

$g(\alpha) = \alpha(g) = 0 \Rightarrow \alpha \in \ker g = \ker f$

但 $f(\alpha) = \alpha(f) = 1$ 矛盾.

仅适用有限维

解法六 记 $W = \ker f = \ker g$

记 $\langle f \rangle = \{ \lambda f : \lambda \in \mathbb{F} \}$

则 $\langle f \rangle = W^0 = \langle g \rangle$

而 $\dim = 1 \Rightarrow f = \lambda g \quad (\exists \lambda \in \mathbb{F})$

(与四类似. 但无任何条件限制)

解法七. 取 $x_0 \notin \ker f$. 设 $f(x_0) = \lambda_0 g(x_0)$

$\forall x \in V. \quad f(x) = \alpha f(x_0) \Rightarrow x - \alpha x_0 \in \ker f = \ker g$

$$\Rightarrow g(x) = g(x - \alpha x_0) + g(\alpha x_0) = \alpha g(x_0) = \frac{\alpha}{\lambda_0}\lambda g(x_0) = \frac{\alpha}{\lambda_0} f(x_0) = \frac{1}{\lambda_0} f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \lambda_0 g(x) \qquad \square$$

期中复习.

一、多项式

- 欧几里德辗转相除，矩除法.
- Bezout（裴蜀）等式
- 不可约多项式
  - 判别法（待定系数、Eisenstein，直接求根，模 p 约化，……）
    - $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Z}$ 系数不可约多项式的转化.
    - $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 上不可约多项式次数
  - 多项式的不可约分解、公因式的等式
- 结式 $(f(x), g(x)) = 1 \iff R(f, g) \neq 0$
- 多元多项式
  - 排序方法.
  - σ_i 的定义，对称多项式写成 σ_i 的多项式
  - 牛顿恒等式

例 8（Newton 公式） 对 $x_1, \cdots, x_n$ 和正整数 k，记 $s_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$. 并且约定 $s_0 = n$. 求证：当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时有

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} - \cdots + (-1)^{k-1} \sigma_{k-1} s_1 + (-1)^k k \sigma_k = 0 \quad (5.7.14)$$

当 $k > n$ 时有

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0 \quad (5.7.15)$$

二 矩阵

- 秩 (rank)
  - 标准型. 初等变换
  - 秩不等式 及 求秩方法

例 4.9. 对于任意 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，$B \in \mathbb{F}^{n\times p}$，$C \in \mathbb{F}^{p\times q}$，有 **Frobenius**[5]**秩不等式**

$$\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) \leqslant \operatorname{rank}(ABC) + \operatorname{rank}(B).$$

特别，当 $B = I_n$ 时，上式成为 **Sylvester 秩不等式**

$$\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C) \leqslant \operatorname{rank}(AC) + n.$$

- ☆ Frobenius 不等式 及其证明技巧.
- 初等变换，利用行列式，分块矩阵.
- (利用 Jordan、相合、正交相似标准型)
- 线性空间理论

  (解空间 维数，基，…)

- 行列式
  - 几种等价定义式
  - 展开方法 及 det 的求法

定理 3.6 (Binet[6]-Cauchy 公式). 设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times m$ 矩阵.

$$\det(AB) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n} \det\left(A\left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{smallmatrix}\right]\right)\det\left(B\left[\begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{smallmatrix}\right]\right), & m \leqslant n; \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

- Binet-Cauchy
- Laplace
- 按多重线性函数展开
- 按定义展开

定理 3.10 (Laplace 展开定理). 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵，正整数 $k < n$，$(i_1, i_2, \cdots, i_n) \in S_n$ 满足 $i_1 < \cdots < i_k$，$i_{k+1} < \cdots < i_n$.

$$\det(A) = \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant n} (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\det\left(A\left[\begin{smallmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{smallmatrix}\right]\right)\det\left(A\left[\begin{smallmatrix} i_{k+1} & \cdots & i_n \\ j_{k+1} & \cdots & j_n \end{smallmatrix}\right]\right)$$

其中 $(j_{k+1}, \cdots, j_n)$ 是 $\{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{j_1, \cdots, j_k\}$ 的升序排列.

- 作初等变换
- 加边 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & y & x_{i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i^n & y^n & \vdots \end{pmatrix}$
- 归纳，摄动法.
- $\det(I_n - AB) = \det(I_n - BA)$.

- 逆.
  - $AA^* = \det A \cdot I_n$ $A^* = (A_{ji})$
  - 写成收敛的幂级数
  - 利用恒等式

  $(e^A \cdot e^{-A} = e^0 = I_n)$

10. (Sherman-Morrison-Woodbury 公式) 设 A 是 m 阶可逆方阵，B 是 $m \times n$ 矩阵，C 是 $n \times m$ 矩阵. 证明：$A + BC$ 是可逆方阵当且仅当 $I + CA^{-1}B$ 是可逆方阵，并且

$$(A+BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}.$$

特别，$I_m - BC$ 是可逆方阵当且仅当 $I_n - CB$ 是可逆方阵，并且

$$(I_m - BC)^{-1} = I_m + B(I_n - CB)^{-1}C.$$

· 分块矩阵.

例 2.18. 设分块矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{pmatrix}$，其中 A_1,A_4 都是方阵.

- 当 A_1 是可逆方阵时，有矩阵乘积分解

$$A=\begin{pmatrix}I & O\\ A_3A_1^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_4-A_3A_1^{-1}A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & A_1^{-1}A_2\\ O & I\end{pmatrix}.$$

上式称为 **Schur**[11]**公式**，$S=A_4-A_3A_1^{-1}A_2$ 称为 A_1 的 **Schur 补**. A 是可逆方阵当且仅当 S 是可逆方阵. 此时，

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}I & -A_1^{-1}A_2\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & S^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & O\\ -A_3A_1^{-1} & I\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}A_1^{-1}+A_1^{-1}A_2S^{-1}A_3A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2S^{-1}\\ -S^{-1}A_3A_1^{-1} & S^{-1}\end{pmatrix}.$$

· Schur 分解. , 初等变换

(注意行列变换对矩阵是左乘还是右乘)

· Smith 标准型 (k[x] 系数).

定义 4.9. 设 $A\in\mathbb{F}[x]^{m\times n}$. A 的所有 k 阶子式的最大公因式 D_k (规定是**首一多项式**[8]) 称为 A 的第 k 个**行列式因子**. 特别规定，$D_0=1$；当 $k>\mathrm{rank}(A)$ 时，$D_k=0$.

定理 4.14. 对于任意多项式矩阵 $A\in\mathbb{F}[x]^{m\times n}$，存在 $\mathbb{F}[x]$ 上的模方阵 P,Q 使得

$$PAQ=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_r,O)$$

其中 $d_1,d_2,\cdots,d_r\in\mathbb{F}[x]$ 是首一多项式，并且每个 d_k 整除 d_{k+1}，$1\leqslant k\leqslant r-1$. 特别，$d_k=\dfrac{D_k}{D_{k-1}}$ 由 A 唯一确定，$1\leqslant k\leqslant r$.

定义 4.10. 设 $A\in\mathbb{F}[x]^{m\times n}$. 定理 4.14 中的 $m\times n$ 矩阵 $\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_r,O)$ 称为 A 的**模相抵标准形**或 **Smith 标准形**，d_k 称为 A 的第 k 个**不变因子**，$1\leqslant k\leqslant r=\mathrm{rank}(A)$.

· 标准型为 diag ($d_1(x)$, —, $d_r(x)$, 0)
· 利用 D_i 求 d_i
· 行列式因子. 不变因子. 初等因子.
· 初等变换

· 相似 考不了太多

定义 5.3.

- n 阶方阵 $J_n(a)=\begin{pmatrix}a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & a\end{pmatrix}$ 称为 **Jordan**[5]**块**，其中空白处元素都是 0.

- 形如 $\mathrm{diag}\Big(J_{n_1}(a_1),J_{n_2}(a_2),\cdots,J_{n_k}(a_k)\Big)$ 的准对角方阵称为 **Jordan 方阵**.

定理 5.10. 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 的所有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{F}$，则 A 可以在 $\mathbb{F}$ 上相似成 *Jordan* 方阵.

可以用 Jordan 标准型.

三、 线性空间.

- 线性相关、无关 .
  极大线性无关组.
  (转化到 矩阵 的 秩、)

- 基. 维数
  两组基下的坐标 转换 公式

- 交空间. 补空间 (不唯一), 和空间

  - 维数 公式
  - 求基.

- 直和 、直积 、商空间, 对偶空间.

  - 定义、例子. 基. 维数.
  - 同构的证明.