定义：r.v. X 有 p.d.f. $f(x)$ 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)|x|dx$ 收敛.

记 $E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$ 称为 X 的数学期望

定理：若 X. $g(X)$ 都是连续型 r.v. X p.d.f. 为 $f(x)$. $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|f(x)dx<+\infty$.

则 $E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

引理：X 为非负连续型 r.v. $E(X)$ 存在. $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(X>x)dx=\int_{0}^{+\infty}(1-F(x))dx$.

一般. $E(X)=\int_{0}^{+\infty}(1-F(x))dx-\int_{0}^{+\infty}F(-x)dx$

证: X 的 p.d.f. 记为 $f(x)$.

$$\int_0^{+\infty}P(X>x)dx=\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}f(t)dt\,dx=\int_0^{+\infty}dt\int_0^t f(t)dx=\int_0^{+\infty}tf(t)dt$$

一般. $\int_0^{+\infty}F(-x)dx=\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{-x}f(t)dt\right)dx=\int_{-\infty}^{0}dt\int_0^{-t}f(t)dx=\int_{-\infty}^{0}-tf(t)dt$

$$\int_0^{+\infty}(1-F(x))dx-\int_0^{+\infty}F(-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)dt=E[X]$$

证: $E(g(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$

$$E(g(x))=\int_0^{+\infty}P(g(X)>y)dy-\int_0^{+\infty}P(g(X)<-y)dy$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_{\{x:g(x)>y\}}f(x)dx\,dy-\int_0^{+\infty}\int_{\{x:g(x)<-y\}}f(x)dx\,dy$$

$$=\int_{\{g(x)>0\}}dx\int_0^{g(x)}f(x)dy-\int_{\{g(x)<0\}}dx\int_0^{-g(x)}f(x)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$$

hw: 4.1.1(c), 4.1.4, 4.2.2, 4.2.3, 4.3.3, 4.3.5

定义: $E(X^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x)dx$ (绝对收敛时) X 的 k 阶矩

$E((X-E(X))^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(x))^k f(x)dx$ (绝对收敛时) X 的 k 阶中心矩

$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$, $Var(X)=E[(X-EX)^2]=E(X^2-2XE(X)+(E(X))^2)=E(X^2)-(E(X))^2$

§4.3 常用连续型分布

一. [a,b] 上均匀分布 $X \sim U([a,b])$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$E[X] = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$var(X) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

二. 指数分布 $X \sim Exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

电子元件寿命独立发生的事件的间隔.

$N(t)$ $[0,t]$ 时段内的粒子数.

$N(t)$、$N(t+s)-N(t)$ 独立. $P(N(h)=1) \approx \lambda h$, $N(t) \sim P(\lambda t)$

X 表示第1个粒子观测到的时刻: $P(X \le t) = P(N(t) \ge 1) = 1 - P(N(t)=0) = 1 - e^{-\lambda t} \Rightarrow f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$P(X \le x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$E[X] = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} (\lambda x) e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[X^2] = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} (\lambda x)^2 e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \frac{1}{\lambda^2} \Gamma(3) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

无记忆性

定理: X 取非负实数值的连续型 r.v. 则 X 指从指数分布 $\Leftrightarrow P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s)$ $t, s > 0$

$\Rightarrow$: 设 p.d.f. $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ $(\lambda > 0)$

$$P(X > s) = \int_s^{+\infty} f(x) dx = e^{-\lambda s}$$

$$P(X > s+t \mid X > t) = \frac{P(X > s+t, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

$\Leftarrow$: 记 $G(s) = P(X > s)$ 则 $G(s+t) = G(s)G(t)$

$$G(s+\Delta s) = G(s)G(\Delta s)$$

$$\frac{G(s+\Delta s) - G(s)}{\Delta s} = \frac{G(s)(G(\Delta s) - 1)}{\Delta s}$$

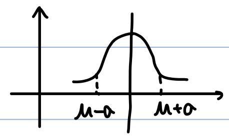
令 $\Delta s \to 0$ $G'(s) = G(s)G'(0) \Rightarrow G(s) = e^{G'(0)s} \Rightarrow F(s) = 1 - e^{G'(0)s}$ 为指数分布.

三. 正态分布 Normal distribution

1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ 当 $\mu=0, \sigma=1$ 时，$N(0,1)$ 标准正态分布 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$



钟形曲线

$\max f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

$\mu \pm \sigma$ 曲线拐点 $= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \mu f(x) dx = 0 + \mu = \mu$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}} d(\sigma t + \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma+\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2\sigma^2 + 2\mu\sigma t + \mu^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} d\frac{t^2}{2} + \mu^2$

$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} (-t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2$

$Var(X) = \sigma^2$

$N(0,1)$: $\Phi(a) + \Phi(-a) = 1$

$P(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma) = 0.6826$，$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = 0.9544$，$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = 0.9974$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $aX+b$ 也服从正态分布.

$a>0$ 时，$P(aX+b \le y) = P(X \le \frac{y-b}{a}) = F_X(\frac{y-b}{a})$ $a<0$ 时同理.

$\Rightarrow f_{aX+b}(y) = f_X(\frac{y-b}{a}) \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma a} e^{-\frac{(\frac{y-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma|a|} e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2(\sigma a)^2}}$ 则 $aX+b \sim N(a\mu+b, (\sigma a)^2)$

特别 $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ $P(X \le x) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma})$

四. Γ分布

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$，$\alpha, \lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x>0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$\int_{0}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1} d(\lambda x) = 1$

背景：第n个独立事件发生时间 $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ $N(x) \sim P(\lambda x)$

$$P(T_n \le x) = P(\overset{\text{发生数}}{N(x)} \ge n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P(N(x)=k) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \cdot \frac{(\lambda x)^k}{k!}$$

密度：上式求导得 $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda x} \cdot \frac{\lambda(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!}$

$$= \frac{(\lambda x)^{n-1}\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda x} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

$X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\lambda \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} (\lambda x)^{\alpha} e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$E(X^2) = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}$ $Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

注：$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, $x>0$ 收敛 分部积分得 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

五. Beta分布 $X \sim B(a,b)$ $a,b>0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-1} = \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} = \frac{a}{a+b}$$

$$E(X^2) = \frac{B(a+2,b)}{B(a,b)} = \frac{(a+1)a}{(a+b+1)(a+b)}$$

六. Cauchy分布

$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in R$ $f(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx$ 发散 $\Rightarrow$ $E(X)$ 不存在.

$\theta \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $F(x) = P(X \le x) = P(\theta \le \arctan x) = \frac{\arctan x + \frac{\pi}{2}}{\pi}$

§4.4 连续型随机向量.

(X,Y) 分布 $F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$

$f(u,v) \ge 0$ $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du\,dv = 1$ 称 (X,Y) 为连续型随机向量. $f(u,v)$ 联合概率密度.

$P(a \le X \le b, c \le X \le d) = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$, $P((X,Y) \in D) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

边缘分布 $P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)dv \right) du$

X概率密度 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

Y概率密度 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

例 (X,Y)在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$上均匀分布.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi R^2}, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

(1) 求边缘分布的概率密度 (2) $\rho=\sqrt{X^2+Y^2}$ 求$E(\rho)$.

解:(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}\,dy=\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-x^2}\quad -R\le x\le R.$

$f_Y(y)=\frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2-y^2}\quad -R\le y\le R$

(2) $P(\rho\le x)=\frac{\pi x^2}{\pi R^2}=\frac{x^2}{R^2}$ ρ密度 $f_\rho(x)=\frac{2x}{R^2}$

$E(\rho)=\int_0^R x\cdot\frac{2x}{R^2}\,dx=\frac{2}{3}R$

二. 期望, 协方差

定理: $g: R^2\to R$ Borel可测函数. (X,Y)连续型随机变量.

$g(X,Y)$是连续型r.v. 期望存在. 则 $E(g(X,Y))=\iint_{R^2} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy$.

$f(x,y)$为(X,Y)的联合概率函数.

特别地, $g(X,Y)=aX+bY$.

$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$

hw: 4.4.3, 4.4.5, 4.5.4, 4.5.6, 4.5.7, 4.5.9