1. (1) 设三维空间中向量 $\vec{a}$. $\vec{b}$ $\vec{c}$，模长相同，两两所成夹角相同，已知在空间直角坐标中 $a=(1,1,0)$ $b=(0.1,1)$，$C=$ ______.

Sol: $(1,0,1)$ & $\frac{1}{3}(-1,4,-1)$ (不要漏!)

(2). $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，$A^*$ 为 A 的伴随方阵. $A^*=$ ______.

Sol: $A^*=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

(3). $A=\begin{pmatrix}1&0&1&-4\\1&3&4&2\\2&1&4&4\\2&3&-3&2\end{pmatrix}$ M_{ij} 为余子式，求 $M_{31}-M_{32}+M_{33}=$ ______

Sol: 36.

(4). 向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)$ $\alpha_2=(2.3.4.5)$, $\alpha_3=(3.4.5,6)$.

$\alpha_4=(4,5,6,k)$. 且 $\operatorname{rank}\{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\}=2$，$k=$ ______.

Sol: $k=7$.

(5). 设 $P_3[x]$ 为实数域 R 上次数不超过 3 的多项式全体，按多项式的加法和数乘构成线性空间则基 $\{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ 到自然基 $\{1, x, x^2, x^3\}$ 的过度矩阵 $T=$ ______.

Sol: $S=\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$ $T=\{\beta_1 \cdots \beta_n\}$ V 的两组基.

$\therefore$ S 到 T 的过渡矩阵 P, $(\beta_1 \cdots \beta_n)=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)P$.

$(1, x, x^2\ x^3)=(1\ \ x\ \ x^2-x,\ x^3-3x^2+2x)P$

$=(1\ x\ x^2\ x^3)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&2\\0&0&1&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}P$. $\Rightarrow P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

判断题

2. (1) $A=\begin{pmatrix}2&4&-3\\-1&3&2\\7&-1&-12\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&0&0\\2&-4&3\end{pmatrix}$，则 A 与 B 不相抵.

X. $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B=2$. 相抵.

(2) 设 A. B n阶方阵. $\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}=|A+B||A-B|$.

√. $\begin{pmatrix}I&I\\&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&-I\\0&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+B&\\&A-B\end{pmatrix}$.

(3) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性相关的充分必要条件是向量组中的任意一个向量 α_i 都可以由剩余的 $n-1$ 个向量线性表示.

×. $\alpha_1=(1,0)$ $\alpha_2=(0,1)$ $\alpha_3=(2,0)$. α_2 不能由 α_1 α_3 线性表示.

(4). 设 A·B·满足 $AB=0$. A、B为非零矩阵，则必有A的列向量线性相关. B的行向量线性相关.

✓. B非零 $\Rightarrow$ $Ax=0$. 有非零解 $\Rightarrow$ A列向量线性相关.

$B^TA^T=0 \Rightarrow B^Ty=0$ 有 $\cdots \Rightarrow B^T$ 列 $\cdots \Rightarrow$ B行 $\cdots$

(5). A为n阶非零方阵，A^*为A的伴随方阵，若 $A^T=A^*$，则A可逆.

✓. $AA^T=AA^*=\det(A)I_n$.

反证，$\det A=0$. $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ · $AA^T=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}(\alpha_1 \cdots \alpha_n^T)=(\alpha_i\alpha_j^T)_{ij}=0$

$\Rightarrow \alpha_i\alpha_i^T=0 \Rightarrow \alpha_i=0\ (1\le i\le n) \Rightarrow A=0$. 矛盾!

3. 当λ取何值时，下列线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+x_4=1.\\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=2.\\ x_1+7x_2-4x_3+11x_4=\lambda.\end{cases}$$

有解，并求出它的通解.

Sol. $\lambda=5$ 有解.

特解 $\beta=(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0,0)^T$

基础解系：$\alpha_1=(-\frac{1}{5},\frac{3}{5},1,0)^T$ $\alpha_2=(-\frac{6}{5}\ -\frac{7}{5}\ 0,1)^T$

通解：$t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\beta$, $t_i\in\mathbb{F}$.

4. 设n阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a & & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a\end{pmatrix}$ 其中 $a>0$，求 $\det(A)$ 及 A^{-1}

Sol: $\left(\begin{array}{cccc|ccc}1+a & 1 & \cdots & 1 & 1 & & \\ 1 & 1+a & & & & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 1 & & \cdots & 1+a & & & 1\end{array}\right) \xrightarrow[k=2\cdots n]{r_k+r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc}n+a & n+a & \cdots & n+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a & & \vdots & 1 & \ddots & & 0\\ \vdots & & \ddots & & & & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a & 0 & & & 1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[k=2\cdots n]{r_k-\frac{1}{n+a}r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} n+a & n+a & \cdots & n+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a & & & -\frac{1}{n+a} & 1-\frac{1}{n+a} & \cdots & -\frac{1}{n+a} \\ & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a & -\frac{1}{n+a} & \cdots & & 1-\frac{1}{n+a} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[k=2\cdots n]{-\frac{n+a}{a}r_k+r_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} n+a & 0 & \cdots & 0 & 1+\frac{n-1}{a} & -\frac{1}{a} & \cdots & -\frac{1}{a} \\ & a & & & -\frac{1}{n+a} & 1-\frac{1}{n+a} & \cdots & -\frac{1}{n+a} \\ & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ & & & a & -\frac{1}{n+a} & \cdots & & 1-\frac{1}{n+a} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{a}r_k]{\frac{1}{n+a}r_1}\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & & & \frac{a+n-1}{a(n+a)} & -\frac{1}{a(n+a)} & \cdots & -\frac{1}{a(n+a)} \\ & \ddots & & -\frac{1}{a(n+a)} & \frac{n+a-1}{a(n+a)} & & \vdots \\ & & 1 & \vdots & & \ddots & \frac{n+a-1}{a(n+a)} \\ & & & -\frac{1}{a(n+a)} & \cdots & & \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{} = A^{-1}$$

$$\det(A) = a^{n-1}(n+a)$$

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$，令V是所有与A可交换的三阶实对称方阵全体，

(1) 证明：V按矩阵加法与乘法运算构成实数域IR上的线性空间.

(2) 求V的维数与一组基.

(1) Pf：验证

(2) Sol：设 $B=\begin{pmatrix}a&x&y\\x&b&z\\y&z&c\end{pmatrix}$.

$$AB=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&x&y\\x&b&z\\y&z&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&b&z\\a-y&x-z&y-c\\-x&-b&-z\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}x&a-y&-x\\b&x-z&-b\\z&y-c&-z\end{pmatrix}$$

$$AB=BA \iff \begin{cases}a-y=b\\-x=z\\y-c=-b\end{cases} \iff \begin{cases}a=b+y\\-x=z\\c=b+y.\end{cases}$$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix}b+y&x&y\\x&b&-x\\y&-x&b+y\end{pmatrix}$$

$\dim V=3$.

一组基.

$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&&1\\&0&\\1&&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}&1&\\1&&-1\\&-1&\end{pmatrix}$$

6. 证明：$A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，$B\in\mathbb{F}^{n\times p}$，等式 $\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$ 成立的充要条件是方程 $ABx=0$ 的解均为方程组 $Bx=0$ 的解.

证：$(\Rightarrow)$ $V_1\triangleq\{x\in\mathbb{F}^p \mid ABx=0\}$ $V_2\triangleq\{x\in\mathbb{F}^p \mid Bx=0\}$.

$\operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$. $\dim(V_1)=p-\operatorname{rank}(AB)$

$\dim(V_2)=p-\operatorname{rank}(B)$ ①.

$\Rightarrow \dim(V_1)=\dim(V_2)$ ②.

又 $V_2\subseteq V_1 \Rightarrow V_1=V_2 \therefore \Rightarrow V_1\subseteq V_2$.

$(\Leftarrow)$ $V_1\subseteq V_2$ 又 $V_2\subseteq V_1 \Rightarrow V_1=V_2 \Rightarrow \dim V_1=\dim V_2$.

$\dim V_1=p-\operatorname{rank}(AB)=\dim V_2=p-\operatorname{rank}(B)$.

$\Rightarrow \operatorname{rank}(AB)=\operatorname{rank}(B)$.