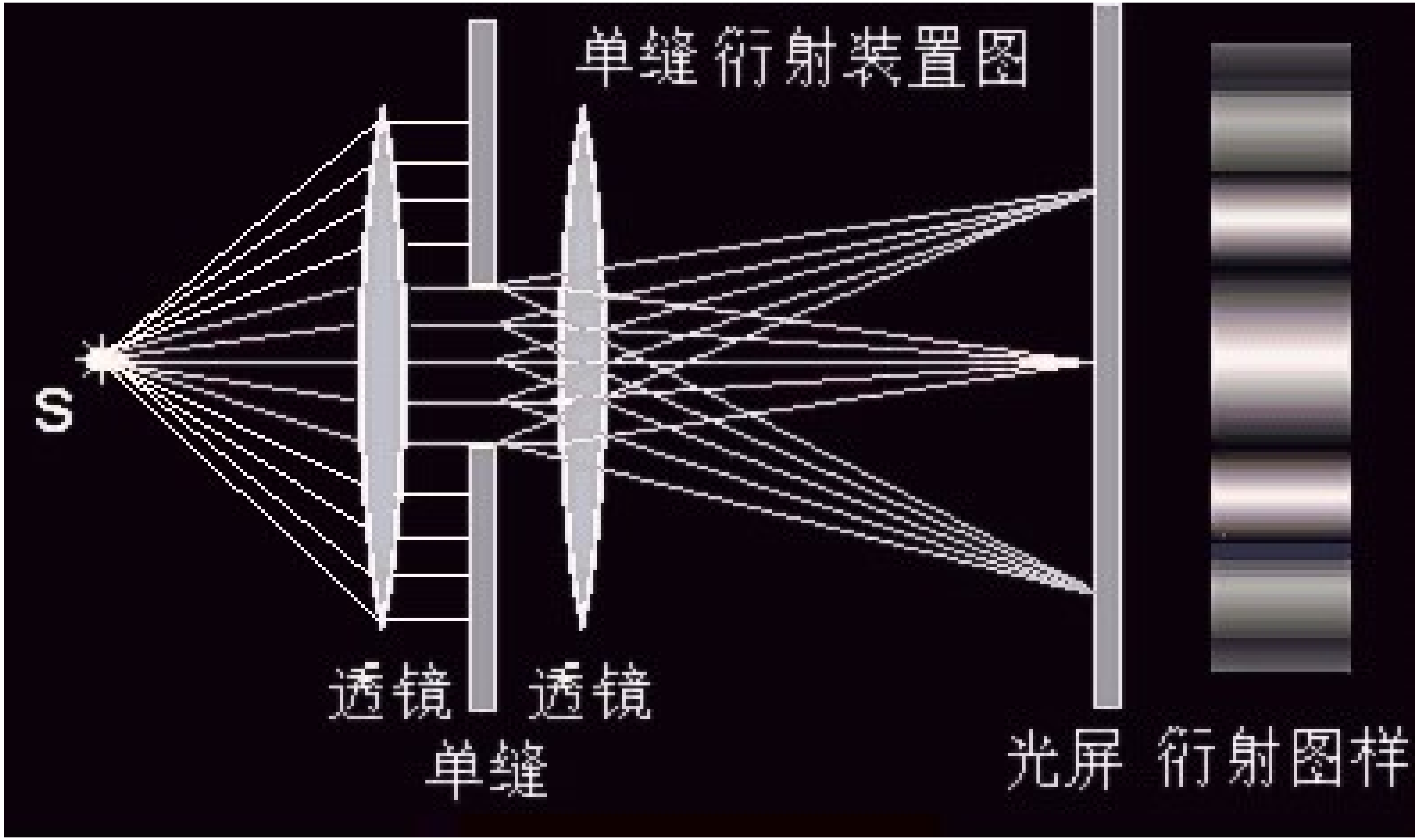
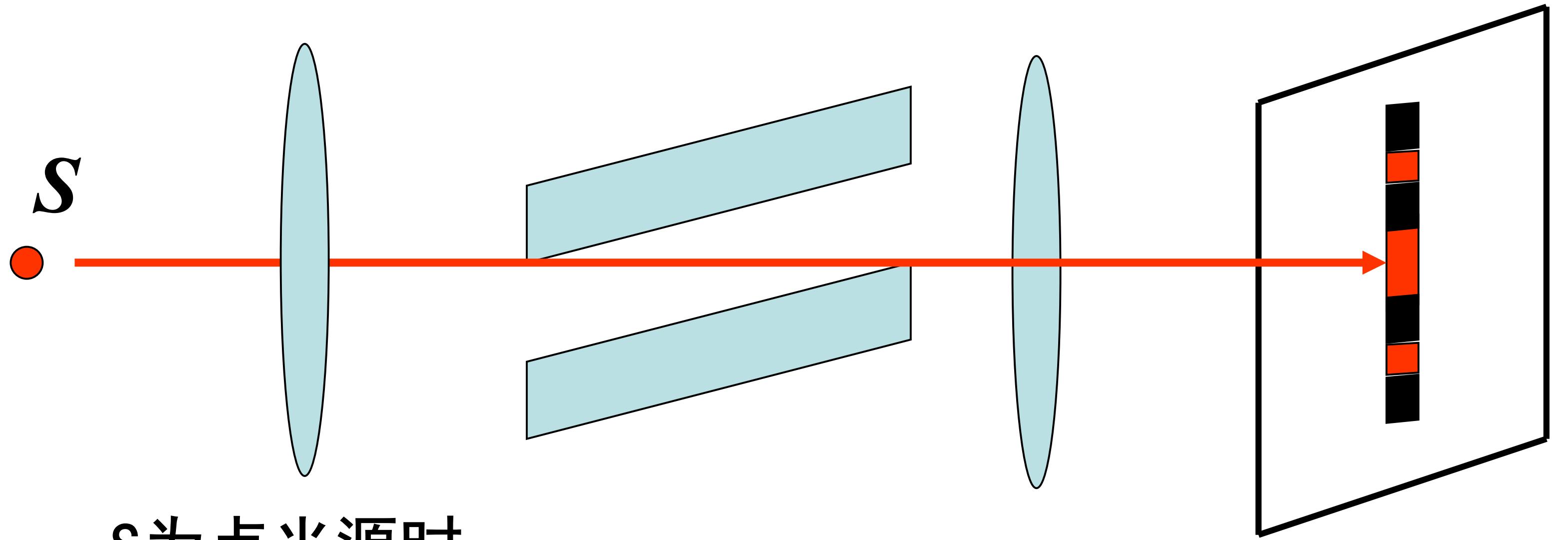
单缝夫琅和费衍射

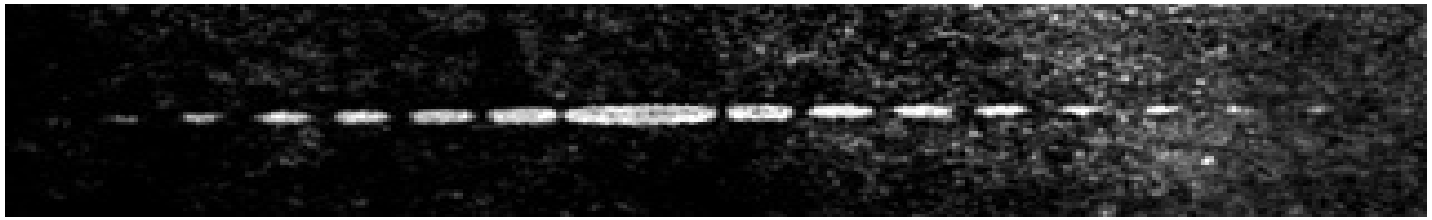
一、衍射装置



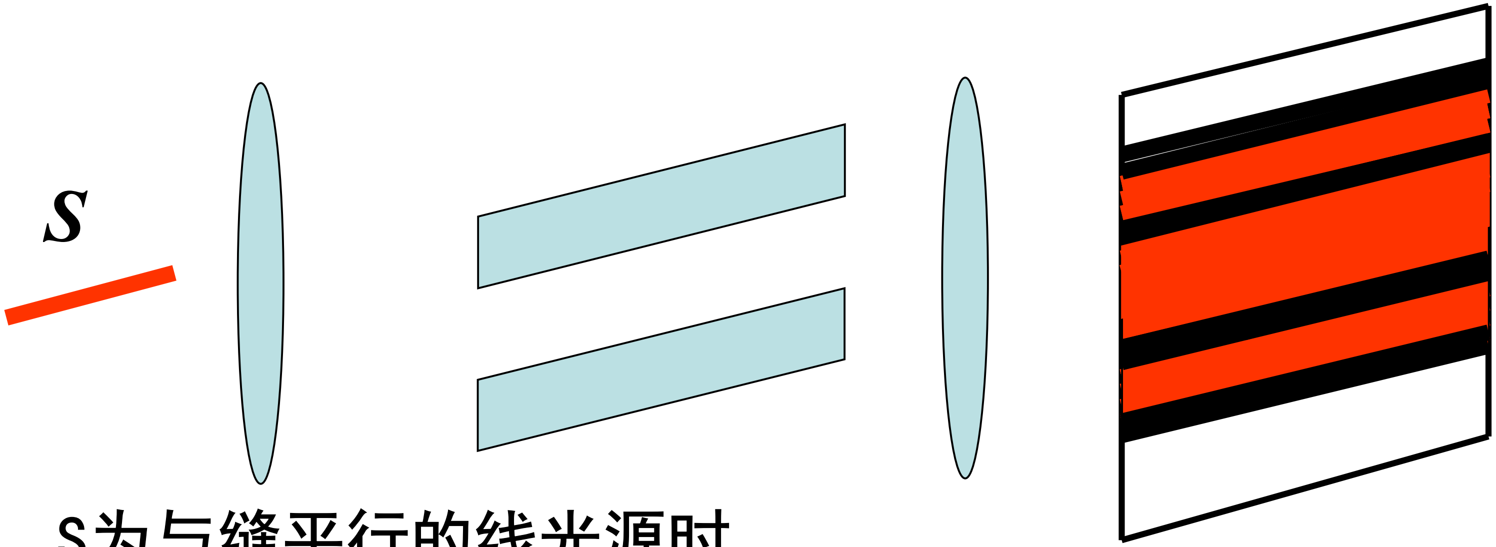
二、衍射图样



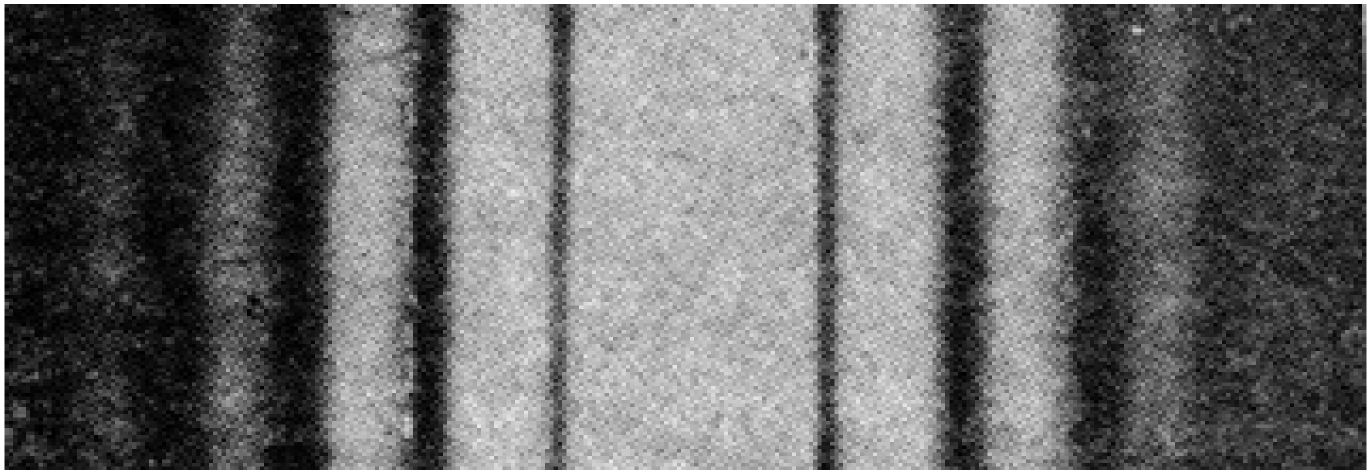
S为点光源时



S为点光源时的衍射图样



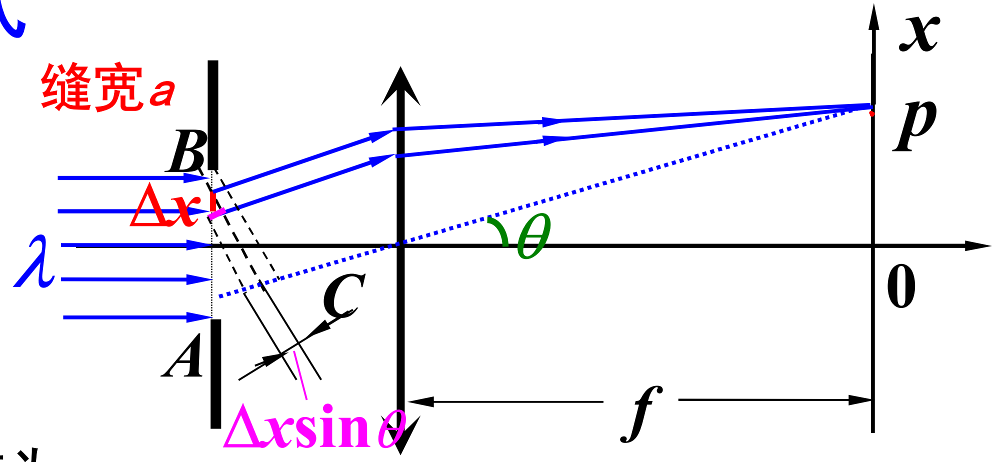
S为与缝平行的线光源时



S为线光源时的衍射图样

三、衍射图样分析

1. 矢量图解法→光强公式



将缝等分成*N*个窄带，各窄带发的子波在*p*点（傍轴）振幅近似相等ΔE_0

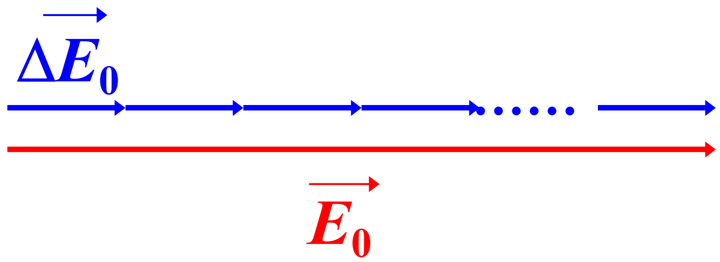
相邻窄带发的子波到*p*点的相位差为：

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta x\sin\theta \quad = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{a\cdot\sin\theta}{N}$$

*P*点即为**N**同频率、同振幅、相差依次为△φ的子波的叠加（矢量合成）

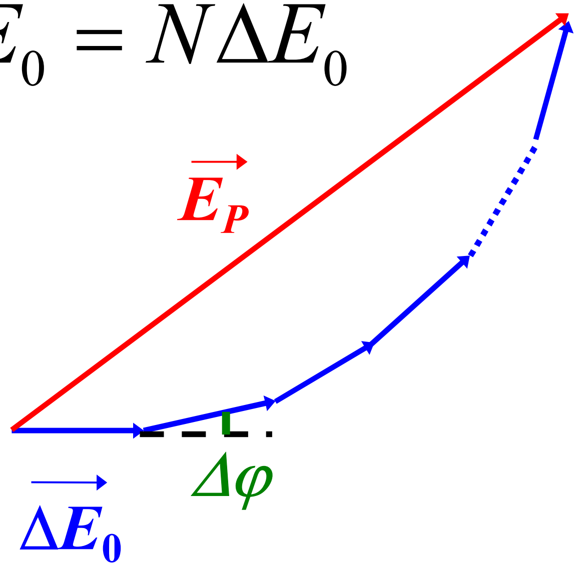
P点的合振幅E_p 就是各子波的振幅矢量和的模；相邻矢量间的夹角为各子波间振动的相位差

对于O点：$\theta = 0$，$\Delta\varphi = 0$



$$\vec{E}_0 = N\Delta\vec{E}_0$$

对于其它点P：θ，$\Delta\varphi$



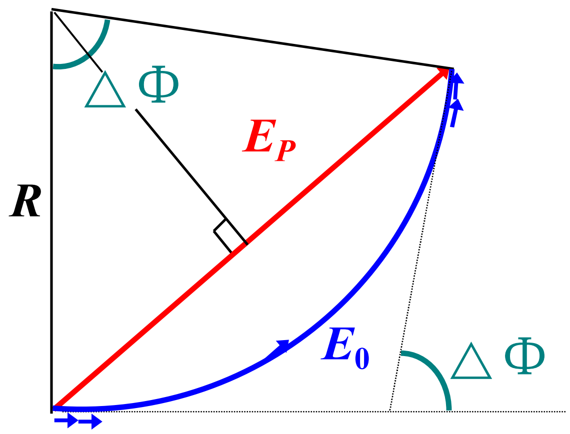
$$E_p < E_0(\text{弧长})$$

$N\to\infty$时，$\Delta E_0\to 0$，N个相接的折线将变为一个圆弧

$$E_p = 2R\sin\frac{\Delta\Phi}{2} \qquad E_0 = R\Delta\Phi \qquad (\text{弧长})$$

$$E_p = 2\frac{E_0}{\Delta\Phi}\sin\frac{\Delta\Phi}{2} = \frac{E_0}{\Delta\Phi/2}\sin\frac{\Delta\Phi}{2}$$

$$\Delta\Phi = (N-1)\Delta\varphi = \frac{a\sin\theta}{\lambda}2\pi$$



$$\text{令：}\quad \alpha = \frac{\Delta\Phi}{2} = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x\sin\theta}{\lambda}\cdot 2\pi = \frac{a\sin\theta}{N}\cdot\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad E_p = E_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

P点的光强（单缝夫琅和费衍射的强度分布公式）

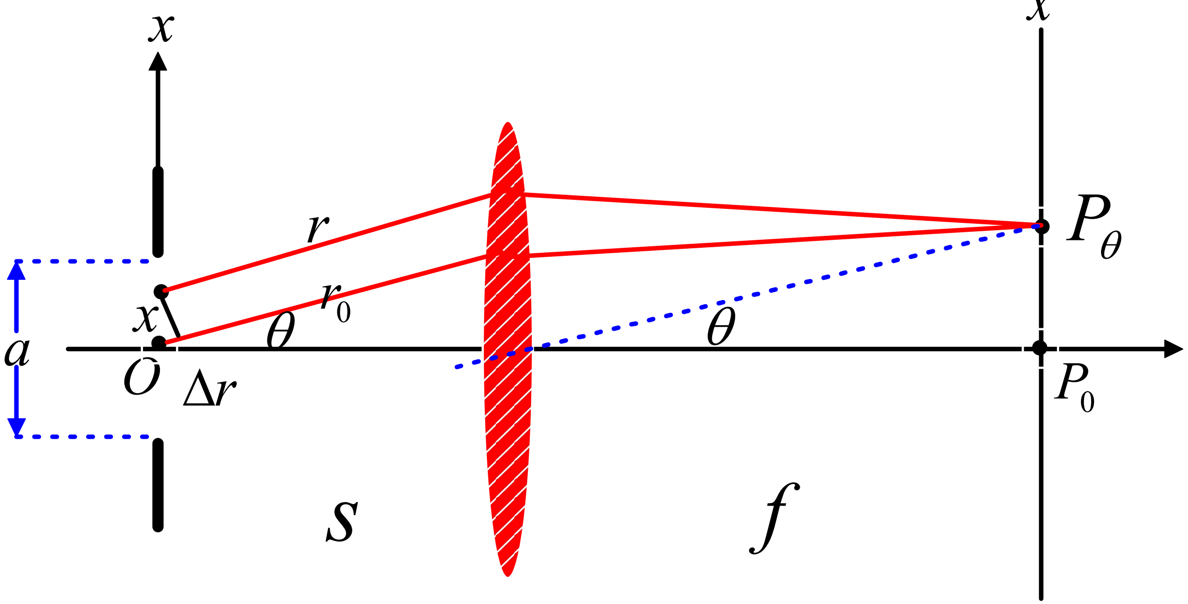
$$\boxed{I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$$

单缝衍射因子

2. 菲涅耳—基尔霍夫衍射公式

$$E(p)=\frac{-i}{\lambda r_0}\iint_{\Sigma_0} E(Q)e^{ikr}d\Sigma_0$$

傍轴条件



$$E(p_\theta)=\frac{-i}{\lambda f}E(Q)\iint e^{ikr}dxdy \qquad *$$

$$\Delta r=r-r_0=-x\sin\theta$$

$$E(p_\theta)=C\int_{-a/2}^{a/2} e^{ik\Delta r}dx \quad = C\int_{-a/2}^{a/2} \exp(-ikx\sin\theta)dx$$

$$= C\left.\frac{\exp(-ikx\sin\theta)}{-ik\sin\theta}\right|_{x=-a/2}^{x=a/2} \quad = 2C\frac{\sin(ka\sin\theta/2)}{k\sin\theta}$$

令 $\alpha=\dfrac{ka\sin\theta}{2}=\dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$

$$= aC\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

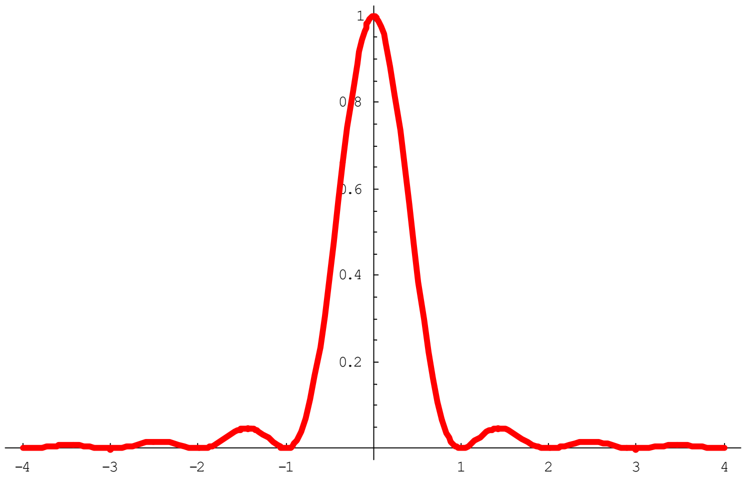
$\theta=0\to\alpha=0\to\sin\alpha/\alpha=1$

$E_0(p_0)=aC$

$$\Rightarrow \boxed{I_\theta = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2}$$

I_0衍射场中心点光强

单缝衍射的特征



$$\frac{a\sin\theta}{\lambda}$$

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

（1）主极大（中央明纹中心）位置（零级衍射斑或主极强）

$$\theta = 0,\quad \alpha = 0 \rightarrow \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \rightarrow I = I_0 = I_{max}$$

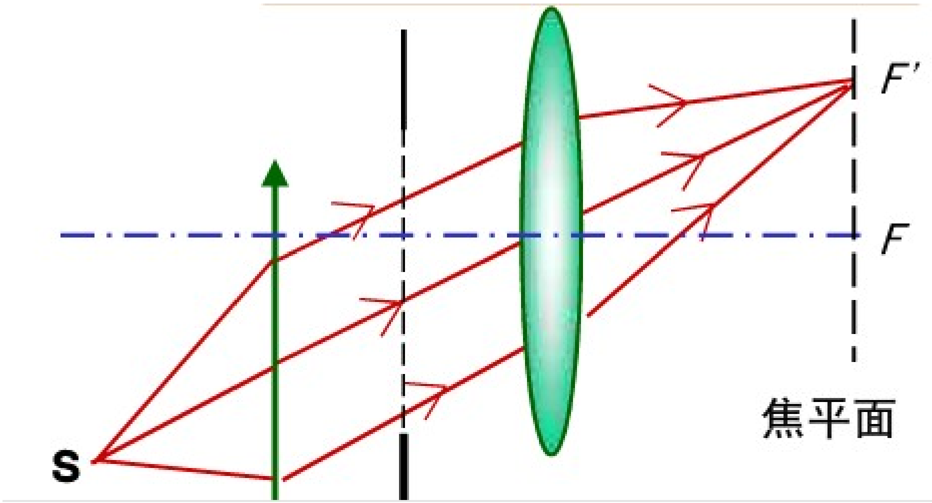
零级衍射斑即为几何光学的像点

θ=0，所有光线等光程　　　　费马原理

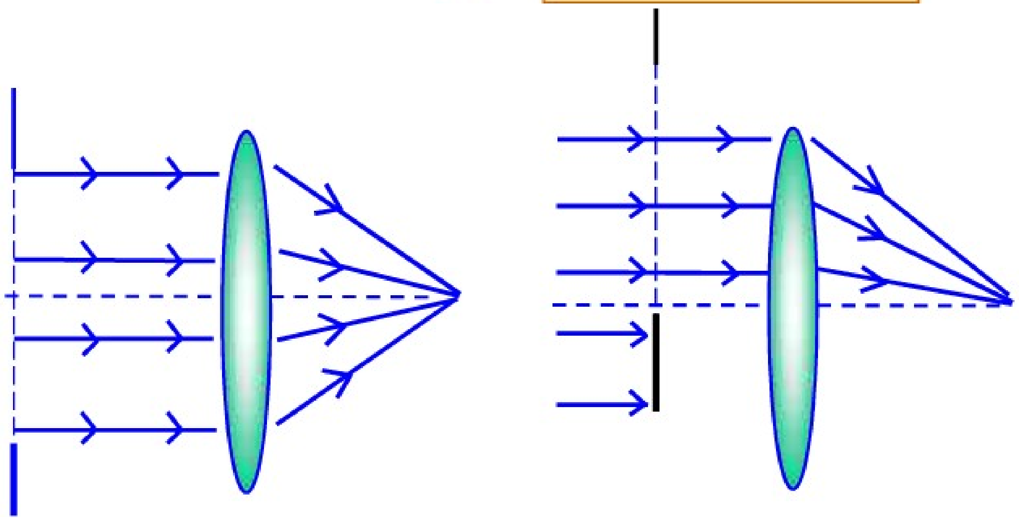
？ 点光源上下移动　　　　？ 缝上下移动

令光源上（下）移动

衍射图样将下（上）平移



令单缝上、下移动 衍射图样不变



(2) 极小（暗斑）位置：

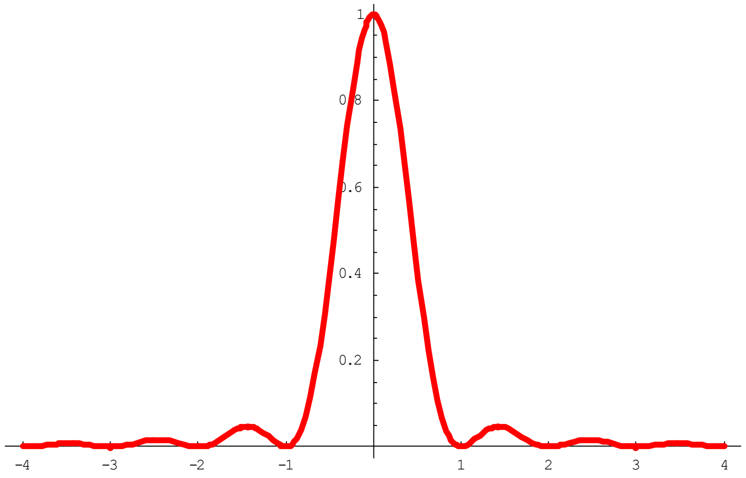
$$\alpha = \pm m\pi,\ \ m = 1, 2, 3\cdots \text{时}, \sin\alpha = 0 \rightarrow I = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi\, a\sin\theta}{\lambda} = \pm m\pi$$

$$I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

$$\alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta\Phi}{2} = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}$$

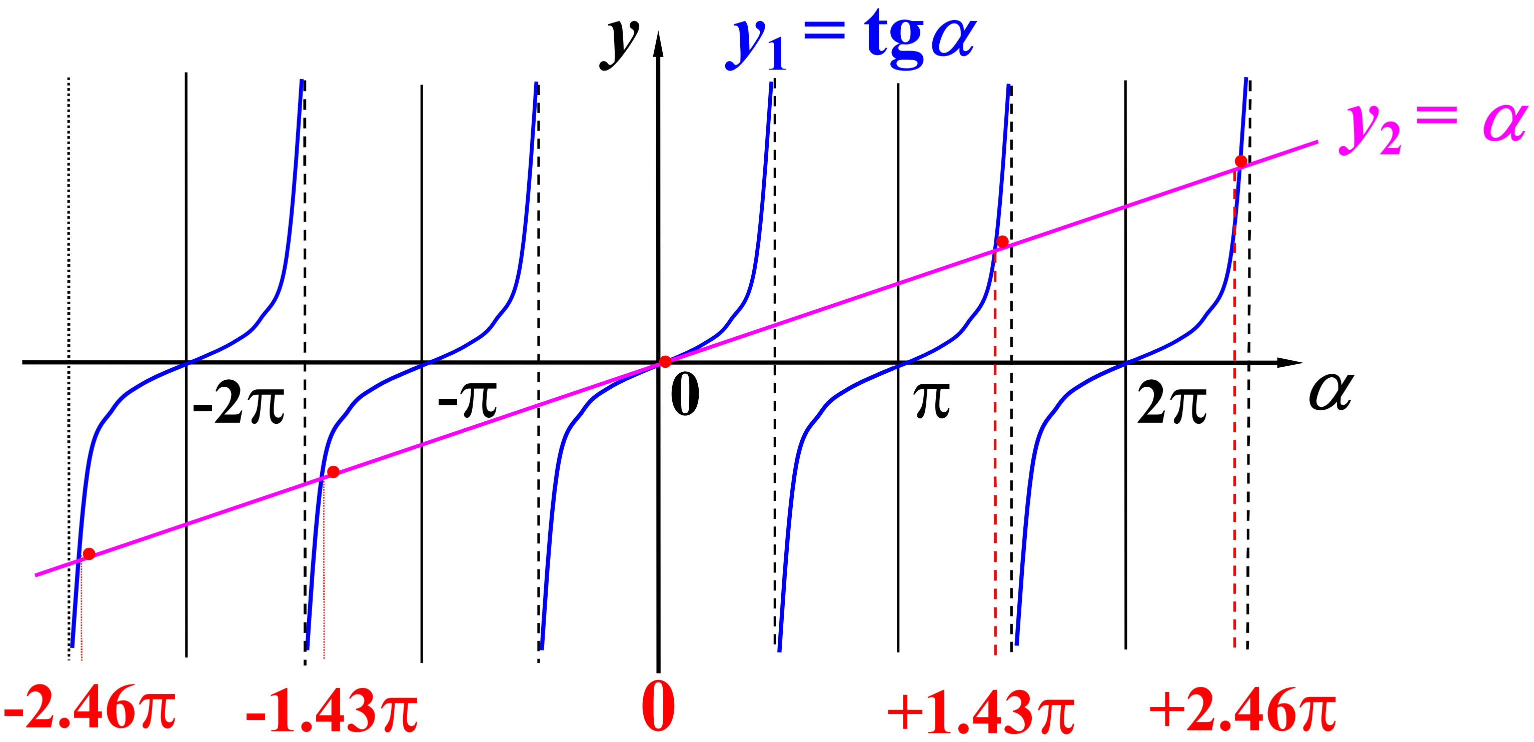


$$\frac{a\sin\theta}{\lambda}$$

(3) 次极大位置：（高级衍射斑）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)=0$$

$$\rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha=\alpha$$



$$\alpha=\pm1.43\pi,\pm2.46\pi,\pm3.47\pi,\ \cdots$$

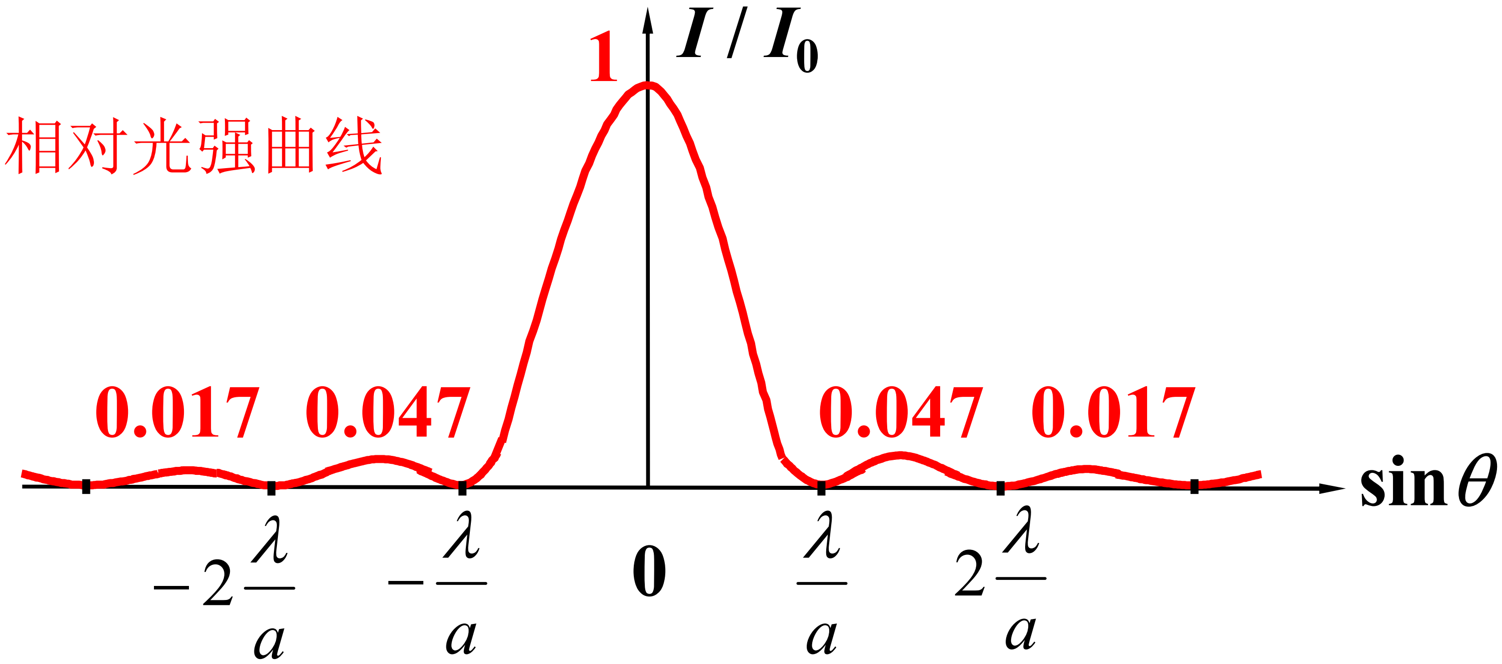
$$a\sin\theta=\pm1.43\lambda,\ \pm2.46\lambda,\ \pm3.47\lambda,\cdots$$

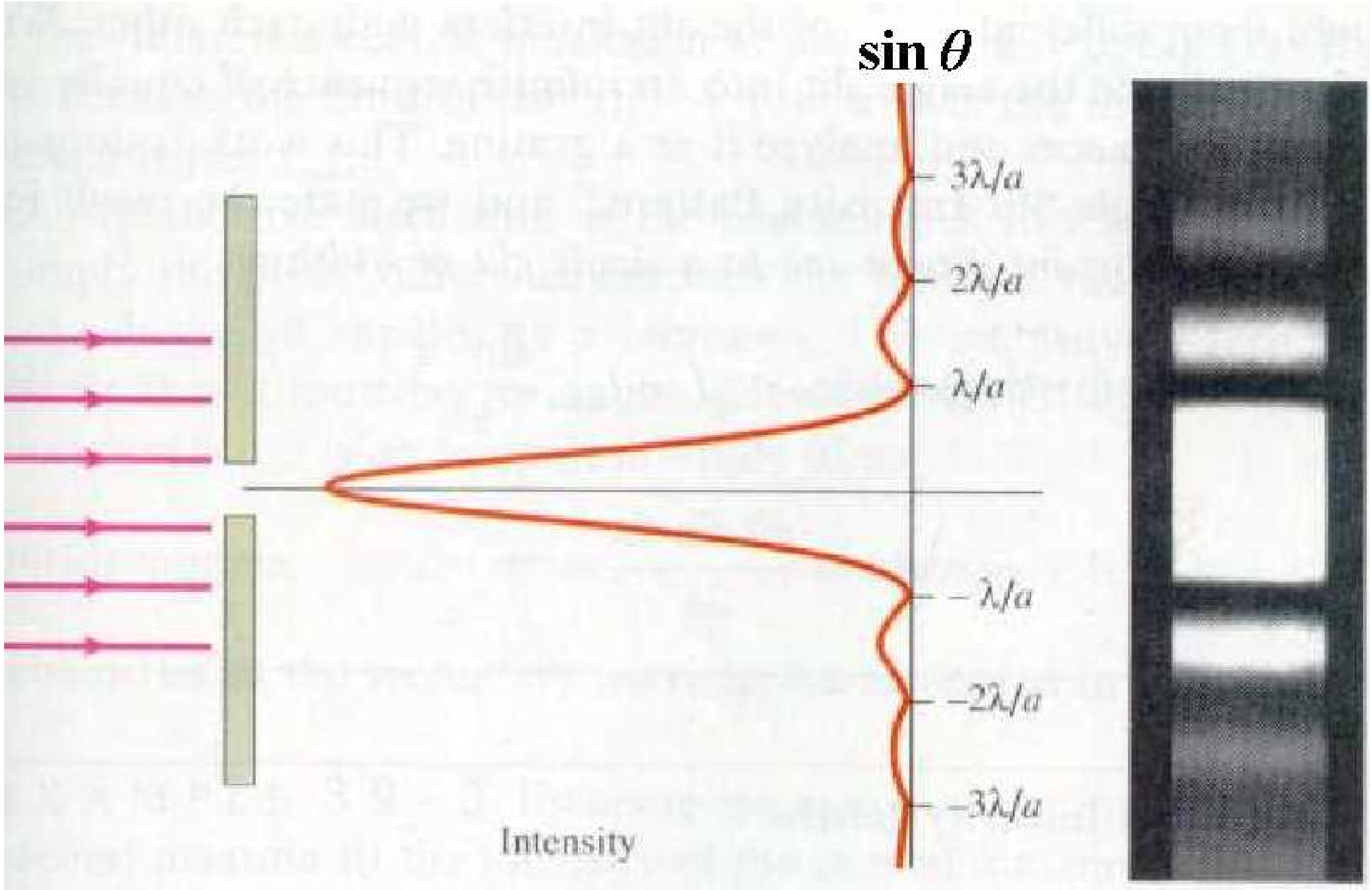
(4) 光强：

$$\alpha = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \ \cdots \rightarrow I = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2$$

从中央往外各次极大的光强依次为 $0.0472I_0$，$0.0165I_0$，$0.0083I_0$ ⋯

$$\therefore \quad I_{次极大} \ll I_{主极大}$$

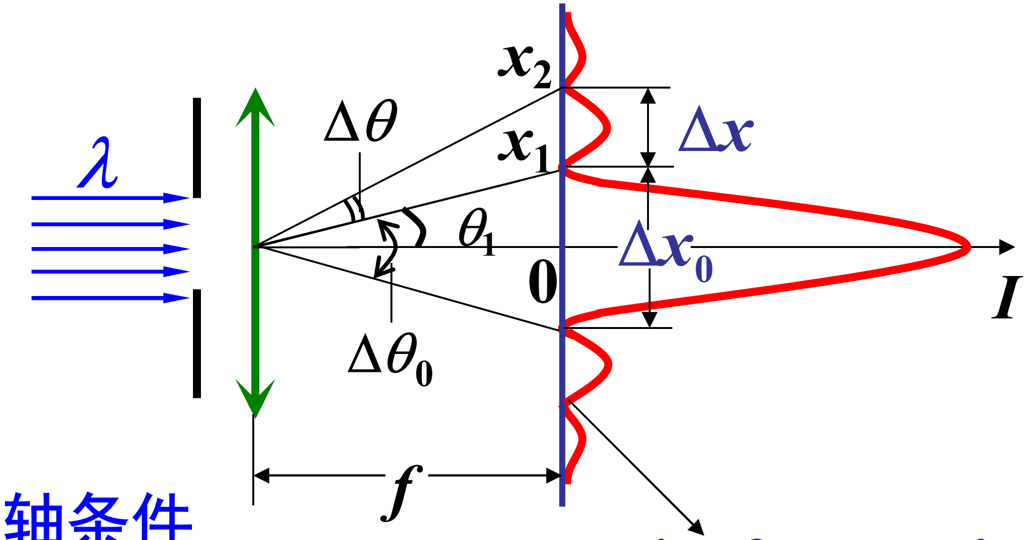




单缝衍射图样

条纹宽度

1. 中央明纹宽度

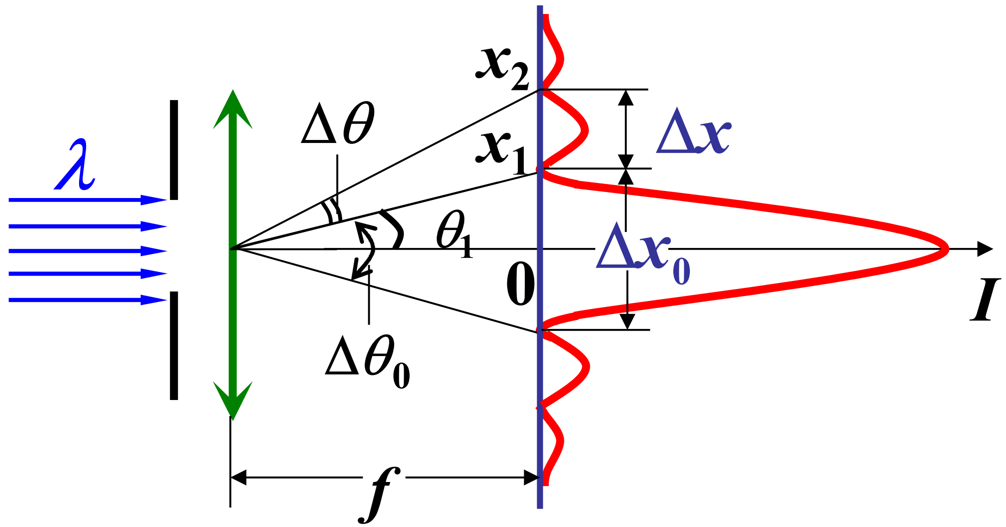


$a\sin\theta = \pm m\lambda$

角宽度 $\Delta\theta_0 = 2\dfrac{\lambda}{a}$ 傍轴条件

半角宽度 λ / a $\theta \approx \sin\theta = \pm m\lambda / a$

线宽度 $\Delta x_0 = 2f \cdot \mathrm{tg}\,\theta_1 = 2f\theta_1 = 2f\dfrac{\lambda}{a}$



2. 其他明纹（次极大）宽度

次极大角宽度：$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \approx \lambda / a$

次极大线宽度：$\Delta x = f\dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{1}{2}\Delta x_0$ —衍射明纹宽度的特征

零级亮斑的宽度比其余的大一倍

3. 缝宽变化对条纹的影响

$$\Delta x \propto \frac{\lambda}{a}$$ — 缝宽越小，明纹宽度越宽。

当 $a\uparrow \Rightarrow \quad \theta_k = \pm k\frac{\lambda}{a} \to 0$

只显出单一的明条纹 ——缝（？）的几何光学像

直线传播

∴几何光学是波动光学在 $a >> \lambda$ 时的极限情形。

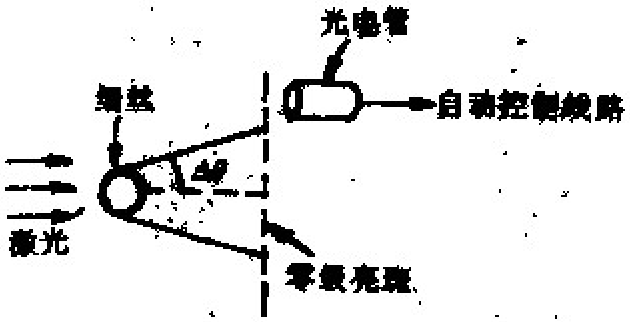
波长越短，衍射效应越可忽略→几何光学是短波（λ→0）的极限

细丝衍射

巴俾涅原理　　$$\tilde{E}_a(p)+\tilde{E}_b(p)=\tilde{E}_0(p)$$

除接收屏上中心点，其余地方细丝衍射与单缝衍射场强度分布相同

角宽度：　　$$a\Delta\theta=\lambda$$



例题：

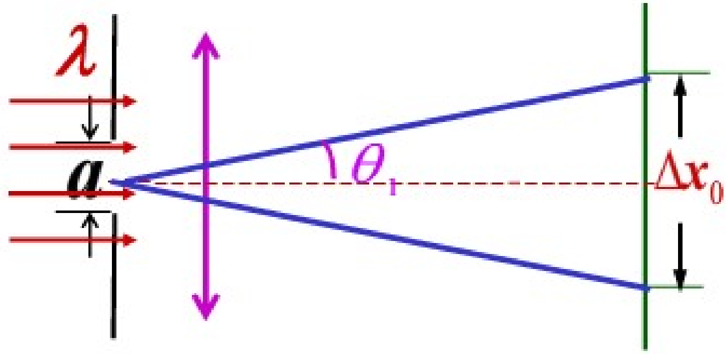
例1. 一单缝宽a=0.10mm，在缝后放一焦距为 50cm的透镜。用平行绿光（λ=546nm)垂直照射单缝，求位于透镜焦平面处的屏上中央明纹的宽度.

解：暗纹条件 $\boxed{a\sin\theta = \pm k\lambda}$

$\because \theta$ 很小 $\quad \therefore tg\theta_1 \approx \sin\theta_1 = \dfrac{\lambda}{a}$

$$\Delta x_0 = 2ftg\theta_1$$

$$= 2f\frac{\lambda}{a} = 5.5mm$$



例2. 钠黄光($\lambda = 589.3\,nm$)垂直入射到宽 $a = 0.20\,mm$ 的单缝上, 透镜的焦距 $f = 40\,cm$

求: (1) 中央明纹的宽度;

(2) 第一级暗纹和第二级暗纹之间的距离;

(3) 到中心 $3.54\,mm$ 处是明纹还是暗纹? 相应单缝处的波振面分成几个半波带?

例**2.** 钠黄光($\lambda = 589.3\,nm$)垂直入射到宽 $a = 0.20\,mm$ 的单缝上, 透镜的焦距 $f = 40\,cm$.

求: **(1)** 中央明纹的宽度;

(2) 第一级暗纹和第二级暗纹之间的距离;

(3) 到中心 $3.54\,mm$ 处是明纹还是暗纹? 相应单缝处的波振面分成几个半波带?

解: **(1)** 中央明纹的宽度

$$\Delta x_0 = 2f \cdot \frac{\lambda}{a} = 2 \times 400 \times \frac{5893 \times 10^{-7}}{0.20} = 2.4\,mm$$

(2) 第一级和第二级暗纹间的距离:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\Delta x_0}{2} = 1.2\,mm$$

(3)

$$\frac{a\sin\theta}{\lambda/2} = \frac{2ax}{\lambda f} = 6.007 \approx 2 \times 3$$

波振面分成 6 个半波带, 是第三级暗纹.