§0.1 曲面的结构方程(外微分法)

回顾：曲面S上取定正交标架$\{r; e_1, e_2, e_3\}$后有它的运动方程

$$\begin{aligned} dr &= \omega^\alpha e_\alpha, \\ de_i &= \omega_i^j e_j, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \end{aligned}$$

其中

$$\omega^\alpha = \langle dr, e_\alpha \rangle, \quad \omega_i^j = \langle de_i, e_j \rangle.$$

特别$\{\omega^1, \omega^2\}$为$\{X_1, X_2\}$的对偶基，$\omega_2^1 = \langle \nabla e_2, e_1 \rangle$对应曲面的协变微分，

$$\omega_3^\alpha = \langle dN, e_\alpha \rangle = \langle dr(X_\alpha), dN \rangle = -h_{\alpha\beta}\omega^\beta.$$

曲面的第一、第二基本形式分别为

$$I = \langle dr, dr \rangle = \langle \omega^\alpha e_\alpha, \omega^\beta e_\beta \rangle = \omega^\alpha \otimes \omega^\alpha,$$

$$II = -\langle dr, dN \rangle = -\langle \omega^\alpha e_\alpha, \omega_3^\beta e_\beta \rangle = \omega^\alpha \otimes \omega_\alpha^3.$$

对正交标架运动方程求外微分得

$$d\omega^\beta - \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^\beta = 0, \quad \beta = 1, 2; \quad (1)$$

$$\omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^3 = 0; \quad (2)$$

其中(1)等价于协变导数∇的挠率为零，(2)等价于$h_{12} = h_{21}$；以及

$$d\omega_\alpha^k - \omega_\alpha^j \wedge \omega_j^k = 0. \quad (GC)$$

其中Gauss方程为

$$d\omega_2^1 = K\omega^1 \wedge \omega^2 = R(e_1, e_2, e_1, e_2)\omega^1 \wedge \omega^2.$$

一般维数曲面的曲率(二次外微分)形式为

$$\Omega_\alpha^\beta := d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta.$$

给定曲面的参数坐标，可通过Schmidt正交化确定一个局部正交标架。反过来给定正交标架，存在局部正交参数系(u, v)使得r_u, r_v分别与e_1, e_2平行。因此可以考察两种形式(自然标架与正交标架)下曲面结构方程之间的转换。利用自然标架计算Gauss方程与Codazzi方程(即使是正交坐标)相当复杂。接下来利用正交标架下曲面结构方程得到正交参数系下的曲面结构方程。

例：设(u,v)为曲面的正交参数系，此时曲面的第一基本形式为

$$I = Edudu + Gdvdv.$$

利用正交标架形式的Gauss-Codazzi方程得到正交参数形式的Gauss-Codazzi方程。

取

$$e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}}, \quad e_2 = \frac{r_v}{\sqrt{G}},$$
$$\omega^1 = \sqrt{E}du, \quad \omega^2 = \sqrt{G}dv.$$

可以直接计算

$$\omega_1^2 = \langle de_1, e_2\rangle = \langle d(\frac{r_u}{\sqrt{E}}), \frac{r_v}{\sqrt{G}}\rangle = \cdots,$$

或者由

$$d\omega^1 = -\omega_2^1 \wedge \omega^2 = (\sqrt{E})_v dv \wedge du = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du \wedge \omega^2,$$

$$d\omega^2 = -\omega_1^2 \wedge \omega^1 = (\sqrt{G})_u du \wedge dv = -\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv \wedge \omega^1,$$

因此

$$\omega_2^1 = -\omega_1^2 = \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du - \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv.$$

直接计算

$$\begin{aligned}
\omega_1^3 &= \langle de_1, e_3\rangle = \langle d(\frac{r_u}{\sqrt{E}}), N\rangle \\
&= \langle \partial_u(\frac{r_u}{\sqrt{E}}), N\rangle du + \langle \partial_v(\frac{r_u}{\sqrt{E}}), N\rangle dv = \frac{L}{\sqrt{E}} du + \frac{M}{\sqrt{E}} dv,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_2^3 &= \langle de_2, e_3\rangle = \langle d(\frac{r_v}{\sqrt{G}}), N\rangle \\
&= \langle \partial_u(\frac{r_v}{\sqrt{G}}), N\rangle du + \langle \partial_v(\frac{r_v}{\sqrt{G}}), N\rangle dv = \frac{M}{\sqrt{G}} du + \frac{N}{\sqrt{G}} dv.
\end{aligned}$$

Gauss方程(G)

$$d\omega_2^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = 0 \quad (G)$$

中

$$d\omega_2^1 = -[(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}})_v + (\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}})_u] du \wedge dv,$$

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = \frac{LN - M^2}{\sqrt{EG}} du \wedge dv.$$

因此由正交标架Gauss方程(G)得到正交参数下的Gauss方程

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}[(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}})_v+(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}})_u]=\frac{LN-M^2}{EG}=K.$$

代入

$$d\omega_1^3-\omega_1^2\wedge\omega_2^3=0,\quad (C1)$$

可得

$$\begin{aligned}0 &= d(\frac{L}{\sqrt{E}}du+\frac{M}{\sqrt{E}}dv)+(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du-\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv)\wedge(\frac{M}{\sqrt{G}}du+\frac{N}{\sqrt{G}}dv)\\ &= [(\frac{L}{\sqrt{E}})_v-(\frac{M}{\sqrt{E}})_u-N\frac{(\sqrt{E})_v}{G}-M\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}]dv\wedge du\end{aligned}$$

即由正交标架的Codazzi方程(C1)得到了正交参数下的Codazzi方程

$$(\frac{L}{\sqrt{E}})_v-(\frac{M}{\sqrt{E}})_u-N\frac{(\sqrt{E})_v}{G}-M\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}}=0.$$

如果r_u,r_v还是曲面的主方向，则$M=0$，从而可以继续化简得

$$L_v=\frac{1}{2}(\frac{L}{E}+\frac{N}{G})V_v=HE_v.$$

类似的，代入(C2)

$$d\omega_2^3-\omega_2^1\wedge\omega_1^3=0,\quad (C2)$$

可得

$$\begin{aligned}0 &= d(\frac{M}{\sqrt{G}}du+\frac{N}{\sqrt{G}}dv)-(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}du-\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}}dv)\wedge(\frac{L}{\sqrt{E}}du+\frac{M}{\sqrt{E}}dv)\\ &= [(\frac{N}{\sqrt{G}})_u-(\frac{M}{\sqrt{G}})_v-L\frac{(\sqrt{G})_u}{E}-M\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}]du\wedge dv\end{aligned}$$

即正交参数下的Codazzi方程

$$(\frac{N}{\sqrt{G}})_u-(\frac{M}{\sqrt{G}})_v-L\frac{(\sqrt{G})_u}{E}-M\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}}=0.$$

如果r_u,r_v还是曲面的主方向，则$M=0$，从而可以继续化简得

$$N_u=\frac{1}{2}(\frac{L}{E}+\frac{N}{G})G_u=HG_u.$$

§0.1.1 $\mathbb{R}^3$的正交标架与曲面的部分标架

$\mathbb{R}^3$的一个正交标架为

$$\{x; e_1, e_2, e_3\},$$

其中$x \in \mathbb{R}^3, e_1, e_2, e_3 \in T_x\mathbb{R}^3$满足$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$。$\mathbb{R}^3$的全体正交标架$\mathcal{F}$由6个参数确定：3个参数确定$x \in \mathbb{R}^3$，两个参数确定$\{e_1 \in T_x\mathbb{R}^3 : |e_1| = 1\} \cong S^2$，再由一个参数确定$\{e_2 \in T_x\mathbb{R}^3, \langle e_2, e_1\rangle = 0, |e_2| = 1\} \cong S^1$，则$e_3$在相差一个符号意义下唯一确定。

正交标架场$\{x; e_1, e_2, e_3\}$的运动方程：

$$\begin{cases} dx = \omega^i e_i, & (1) \\ de_i = \omega_i^j e_j, & (2) \end{cases}$$

其中

$$\omega^i = \langle dx, e_i\rangle, \quad \omega_i^j = \langle de_i, e_j\rangle$$

为一次微分形式。可计算

$$dx(e_j) = (dx^i \frac{\partial}{\partial x^i})(e_j^k \frac{\partial}{\partial x^k}) = e_j^k \delta_k^i \frac{\partial}{\partial x^i} = e_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} = e_j,$$

即恒同映射$x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$的微分$dx$ 恒同映射$Id : T_x\mathbb{R}^3 \to T_x\mathbb{R}^3$。因此

$$dx(e_j) = e_j = \omega^i(e_j)e_i,$$

从而

$$\omega^i(e_j) = \delta_j^i,$$

即$\{\omega^i\} \in T_x^*\mathbb{R}^3$为$\{e_i\} \in T_x\mathbb{R}^3$的对偶基。由$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$，

$$\omega_i^j = \langle de_i, e_j\rangle = -\langle e_i, de_j\rangle = -\omega_j^i.$$

对运动方程第一式求外微分

$$\begin{aligned} 0 &= d(dx) = d(\omega^i e_i) = d\omega^i e_i - \omega^j \wedge de_j \\ &= d\omega^i e_i - \omega^j \wedge \omega_j^i e_i = (d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i)e_i, \end{aligned}$$

对运动方程第二式求外微分

$$\begin{aligned} 0 &= d(de_i) = d(\omega_i^j e_j) = d\omega_i^j e_j - \omega_i^k \wedge de_k \\ &= d\omega_i^j e_j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j e_j \\ &= (d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j)e_j, \end{aligned}$$

因此有$\mathbb{R}^3$正交活动标架的结构方程

$$\begin{cases} \tau^i := d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i = 0, & (3) \\ \Omega_i^j := d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = 0. & (4) \end{cases}$$

(3)表明协变微分$\nabla e_i = de_i$的挠率形式为零：

$$\tau^i(e_k, e_l) \;=\; \langle \nabla_{e_k} e_l - \nabla_{e_l} e_k - [e_k, e_l], e_i \rangle := \langle T(e_k, e_l), e_i \rangle.$$

(4)表明协变微分$\nabla e_i = de_i$的曲率形式为零：

$$\Omega_i^j(e_k, e_l) = \langle \nabla_{e_k} \nabla_{e_l} e_i - \nabla_{e_l} \nabla_{e_k} e_i - \nabla_{[e_k, e_l]} e_i, e_j \rangle = R(e_k, e_l, e_j, e_i).$$

可以利用$\mathbb{R}^3$中正交标架研究$\mathbb{R}^3$中的简单曲面S(即$r : D \to \mathbb{R}^3$为单射)。首先选取的沿曲面S的右手系正交标架$\{r(u,v) \in S; e_1, e_2, e_3\}$，其中$e_1, e_2 \in TS$，局部延拓曲面正交标架为$\mathbb{R}^3$中的正交标架$\{x; e_1, e_2, e_3\}$。延拓得到的$\mathbb{R}^3$正交标架$\{x; e_1, e_2, e_3\}$满足运动方程和结构方程，考察它们限制于曲面。$\mathbb{R}^3$上的微分形式$\omega^i, \omega_j^i$的限制于$TS$得到相应的一次微分形式，记作$\bar\omega^i, \bar\omega_j^i$。则有

$$\bar\omega^3 = \langle d(x \circ r), e_3 \rangle = \langle dr, e_3 \rangle = 0,$$

$$\bar\omega^\alpha = \langle d(x \circ r), e_\alpha \rangle = \langle dr, e_\alpha \rangle,$$

$$\bar\omega_j^i = \omega_j^i(e_k)\bar\omega^k = \omega_j^i(e_\alpha)\bar\omega^\alpha = \langle e_\alpha e_j, e_i \rangle \bar\omega^\alpha.$$

参数空间D上的外微分记为$\bar d$。因此

$$\begin{cases} dx = \omega^i e_i, & (1) \\ de_i = \omega_i^j e_j, & (2) \end{cases}$$

限制于曲面得

$$\begin{cases} \bar d(x \circ r) = \bar d r = \bar\omega^\alpha e_\alpha, \\ \bar d e_i = \bar\omega_i^j e_j. \end{cases}$$

结构方程

$$d\omega^i - \omega^j \wedge \omega_j^i = 0 \quad (3)$$

限制于曲面得$(i = \alpha = 1, 2)$

$$\bar d \bar\omega^\alpha - \bar\omega^\beta \wedge \bar\omega_\beta^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

以及$(i = 3)$

$$\bar\omega^\alpha \wedge \bar\omega_\alpha^3 = 0.$$

结构方程

$$d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = 0 \quad (4)$$

限制于曲面得

$$\bar{d}\bar{\omega}_i^j - \bar{\omega}_i^k \wedge \bar{\omega}_k^j = 0.$$

例：一些由二次微分形式定义的曲面几何量，它们与正交标架选取无关。

(1)第一基本形式

$$I = \omega^\alpha \otimes \omega^\alpha.$$

(2)曲面面积元

$$dA = \omega^1 \wedge \omega^2.$$

(3)第二基本形式：

$$II = \omega^\alpha \otimes \omega_\alpha^3.$$

(4)曲面地第三基本形式

$$III \quad := \quad \langle dN, dN \rangle = \omega_3^\alpha \omega_3^\alpha = \omega_1^3\omega_1^3 + \omega_2^3\omega_2^3 = 2H\mathrm{II} - K\mathrm{I}.$$

(5)曲面Gauss映射的面积元(相应于S^2的由$N = e_3$确定的定向)

$$\begin{aligned} d\sigma \quad &:= \quad \langle N_u \wedge N_v, N \rangle du \wedge dv \\ &= \quad \langle dN(X_1) \wedge dN(X_2), N \rangle \omega^1 \wedge \omega^2 \quad \text{设}(r_u, r_v)^T = A(e_1, e_2)^T\text{来验证} \\ &= \quad \langle (-h_{11}e_1 - h_{12}e_2) \wedge (-h_{21}e_1 - h_{22}e_2), N \rangle dA \\ &= \quad K dA = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = d\omega_2^1. \end{aligned}$$

(6)曲面的Hopf不变式

$$\begin{aligned} \psi \quad &:= \quad \omega^1\omega_2^3 - \omega^2\omega_1^3 = \omega^1 \otimes (h_{21}\omega^1 + h_{22}\omega^2) - \omega^2 \otimes (h_{11}\omega^1 + h_{12}\omega^2) \\ &= \quad h_{21}\omega^1\omega^1 + h_{22}\omega^1\omega^2 - h_{11}\omega^2\omega^1 - h_{12}\omega^2\omega^2 \\ &= \quad \langle i(\bar{\partial}N - \partial N), dr \rangle \\ &:= \quad \frac{i}{2}\langle (\omega^1 - i\omega^2)(X_1 + iX_2)N - (\omega^1 + i\omega^2)(X_1 - iX_2)N, \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 \rangle. \end{aligned}$$

例：两个主曲率均为常数的曲面分类。

(1)当曲面S的两个主曲率k_1, k_2为相等常数，则S为全脐曲面，S为平面或球面。

(2)如果曲面S的两个常值主曲率$k_1 \neq k_2$，则S没有脐点。取e_1, e_2 分别对应主曲率k_1, k_2的主方向，因此由

$$\omega_\alpha^3 = \langle de_\alpha, N \rangle = -\langle e_\alpha, dN \rangle = -\langle dr(X_\alpha), dN(X_\beta)\omega^\beta \rangle = h_{\alpha\beta}\omega^\beta$$

可得

$$\omega_1^3 = k_1\omega^1, \quad \omega_2^3 = k_2\omega^2.$$

外微分并利用结构方程得

$$d\omega_1^3 = k_1 d\omega^1 = k_1\omega^2 \wedge \omega_2^1,$$

另一方面有Codazzi方程

$$d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 = k_2\omega_1^2 \wedge \omega^2 = k_2\omega^2 \wedge \omega_2^1,$$

因此由$k_1 \neq k_2$可得

$$\omega^2 \wedge \omega_2^1 = 0.$$

同样可得

$$\omega^1 \wedge \omega_2^1 = 0.$$

因此

$$\omega_2^1 = 0.$$

由Gauss方程

$$d\omega_2^1 = K\omega^1 \wedge \omega^2$$

可得

$$K = k_1k_2 = 0.$$

不妨设$k_1 \neq 0, k_2 = 0$。从而$\omega_2^3 = 0$，正交标架的运动方程为

$$de_1 = \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 = k_1\omega^1 e_3,$$

$$de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3 = 0,$$

$$de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 = -k_1\omega^1 e_1.$$

因此e_2为常向量，积分得平行直线，因此曲面为柱面。以e_1为单位切向量的弧长参数为曲率线(与e_2方向的直线处处正交)，由上述第一式、第三式及Frenet标架运动方程可知其曲率为常数$|k_1|$，法向为$sgn(k_1)e_3$，挠率为零，因此它是半径为$\frac{1}{|k_1|}$的平面圆周，曲面为圆柱面。 □

下面的例子已经用自然标架证明过。比较而言，利用正交标架的证明更简明直接。

例：设曲面S无脐点，Gauss曲率为零。证明S为可展曲面。

证明：因为曲面没有脐点，取正交标架使得e_1, e_2为主方向。由$K=0$以及无脐点，设e_1, e_2对应的主曲率$k_1 \neq 0, k_2 = 0$。因此

$$\omega_1^3 = k_1\omega^1, \quad \omega_2^3 = k_2\omega^2 = 0.$$

由Codazzi方程

$$0 = d\omega_2^3 - \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = -k_1\omega_2^1 \wedge \omega^1$$

可知存在曲面上函数f使得

$$\omega_2^1 = f\omega^1.$$

只需证明e_2的积分曲线为直线，从而Gauss曲率为零的直纹面即可展曲面。记e_2的任一条弧长参数积分曲线为$\gamma(s)$，也是曲率线。利用$\omega_2^3 = 0, \omega_2^1 = f\omega^1$可得

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}(s) &= \frac{de_2}{ds} = de_2(X_2) \\ &= \omega_2^j(X_2)e_j = \omega_2^1(X_2)e_1 + \omega_2^3(X_2)e_3 \\ &= \omega_2^1(X_2)e_1 = f\omega^1(X_2)e_1 = 0. \end{aligned}$$

因此$\gamma(s)$为直线。从而曲面为直纹面。 $\square$

作业：19, 20