第六次习题课

王沛林

Question 1. 设 G 为有限群，对 $g \in G$，令 C_g 为 g 所在的共轭类，若 $C_g = C_{g^{-1}}$，称 C_g 为一个实共轭类。证 G 只有一个实共轭类当且仅当 G 的阶为奇数。

Proof. ($\Rightarrow$). 设 G 的阶为偶数，则 $2||G|$，存在二阶元 $1 \neq g \in G$，使得 $g^2 = 1$，即 $g = g^{-1}$，有 $C_g = C_{g^{-1}}$，而 1 所在的共轭类也为实共轭类，与只有一个实共轭类矛盾，从而 G 的阶为奇数。

($\Leftarrow$). 设 $C \neq \{1\}$ 为一个实共轭类。设有 $g, g^{-1} \in C$，存在 $h \in G$ 使得 $hgh^{-1} = g$。

$$
\begin{aligned}
h^2gh^{-2} &= h(hgh^{-1})h^{-1} \\
&= hg^{-1}h^{-1} \\
&= (hgh^{-1})^{-1} \\
&= (g^{-1})^{-1} \\
&= g
\end{aligned}
$$

若 h 的阶为偶数，有 $h^{2n} = 1$，从而 $2n||G|$，矛盾。若 h 的阶为奇数，设 $h^n = 1$，有 $h = h^{1-n}$，从而 $hg = g^{1-n}g = gh^{1-n} = gh$，从而 $g = g^{-1}$，g 为二阶元，矛盾。从而 G 只有一个实共轭类。 $\square$

Lemma 0.1. $|GL_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = |\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n| = \prod_{i=0}^{n-1}(p^n - p^i) = p^{\frac{n(n-1)}{2}}(p^n - 1)(p^{n-1} - 1)\cdots(p-1)$。

Proof. 见 4.8 第三次习题课问题 3。 $\square$

Question 2. 给出 $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 的一个 Sylow p-子群，并计算 $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 的 Sylow p-子群的个数。

Proof. 令 $G = GL_n(\mathbb{Z}_p)$。由引理 0.1，$|G| = p^{\frac{n(n-1)}{2}}(p^n - 1)(p^{n-1} - 1)\cdots(p - 1)$，则 G 的 Sylow p-子群的阶为 $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$。令 A 为 G 中所有对角元为 1 的上三角矩阵集合，$|A| = p^{\frac{n(n-1)}{2}}(p^n - 1)(p^{n-1} - 1)\cdots(p-1)$，从而可验证 A 为 G 的一个 Sylow p-子群。

Date: 2023 年 4 月 28 日.

考虑 $N_G(A)$, 易验证它由 G 中所有上三角矩阵给出，从而 $|N_G(A)| = p^{\frac{n(n-1)}{2}}(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p-1)$。由 Sylow 定理，$G$ 的所有 Sylow p-子群由 A 在 G 中共轭给出，从而 $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ 的 Sylow p-子群的个数为 $[G:N_G(A)]$。

$$[G:N_G(A)] = |G|/|N_G(A)| = \frac{\prod_{i=1}^n (p^i-1)}{(p-1)^n}$$

. □

Question 3. 若有限群 G 的每一个 Sylow 子群都是正规子群，则 G 是它 Sylow 子群的直积。

Proof. 设群 G 的阶有素因子分解如下 $|G| = p_1^{n_1}\cdots p_s^{n_s}$，$p_i$ 为互不相同的素数。由 G 的每一 Sylow 子群都是正规子群，对每个 p_i，G 有唯一的 Sylow p_i-子群，记为 P_i，其对应的阶为 $p_i^{n_i}$。

对任意 $P_i, P_j, i \neq j$，由 $p_i^{n_i} \nmid p_j^{n_j}$，$p_j^{n_j} \nmid p_i^{n_i}$，$P_i \cap P_j = e$。从而 $\forall x \in P_i, y \in P_j$，有 $xy = yx$。(见第四次作业习题 2(3)(ii))

(1) 验证 $(P_1P_2\cdots P_i) \cap P_{i+1} = e$。

$\forall x \in (P_1P_2\cdots P_i) \cap P_{i+1}$。由 $x \in P_{i+1}$，有 $P_i \cap P_j = e$，$x^{p_{i+1}^{n_{i+1}}} = e$，且 $x^{p_1^{n_1}\cdots p_i^{n_i}} = e$。由 $(p_{i+1}^{n_{i+1}}, p_1^{n_1}\cdots p_i^{n_i}) = 1$，$x = e$。

(2) 由于 $|P_1P_2\cdots P_s| = \frac{|P_1\cdots P_{s-1}||P_s|}{|P_1\cdots P_{s-1}\cap P_s|} = |P_1\cdots P_{s-1}||P_s|$，同理

$$|P_1P_2\cdots P_s| = |P_1\cdots P_{s-2}||P_{s-1}||P_s| = \cdots = |P_1|\cdots|P_s| = p_1^{n_1}\cdots p_s^{n_s} = |G|.$$

故 $G = P_1P_2\cdots P_s$，由 (1),(2)，G 为 $P_1,\cdots,P_s$ 的直积。 □