微分方程

一般的一阶偏微分方程

内容：

1. 一阶偏微分方程

2. 全积分，包络与奇积分

3. 特征方程与Cauchy问题

4. 作业

1. 一阶偏微分方程

$$F(x,u,Du)=0 \quad (F)$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n, n\geq 2,$

$u=u(x)$为未知函数, Du为u的梯度.

为记号方便，令

$$F=F(x,z,p)=F(x_1,\cdots,x_n,z,p_1,\cdots,p_n),$$

$$z=u(x), p=Du(x)=(u_{x_1},\cdots,u_{x_n})=(p_1,\cdots,p_n),$$

$$D_xF=(F_{x_1},\cdots,F_{x_n}), D_zF=F_z, D_pF=(F_{p_1},\cdots,F_{p_n}).$$

2. 全积分，包络与奇积分

定义：称 $u = u(x;a)$ **为(*F*)的全积分，若**

(i) $u(x;a)$满足(*F*), $\forall a = (a_1, \cdots, a_n) \in A \subset \mathbb{R}^n$,
其中A为参数集合;

(ii) $rank(D_a u, D_{xa}^2 u) = n$, 其中

$$(D_a u, D_{xa}^2 u) = \begin{pmatrix} u_{a_1} & u_{x_1 a_1} & \cdots & u_{x_n a_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{a_n} & u_{x_1 a_n} & \cdots & u_{x_n a_n} \end{pmatrix}_{n\times(n+1)} .$$

➢ **第二个条件保证了**$u(x;a)$ **依赖*n*个独立参数**$a_1, \cdots, a_n$.

见 Evans “Partial Differential Equations” P93.

例. （几何光学方程）$|Du|=1, i.e., \sum_{j=1}^{n} u_{x_j}^2 = 1.$

全积分为 $u(x;a,b)=a\cdot x+b, a\in S^1$(单位球面)$, b\in\mathbb{R}.$

定义：若可微函数族 $u=u(x;a)$ 满足的向量方程

$D_a u(x;a)=0, a\in A\subset\mathbb{R}^n$ 有可微解 $a=\phi(x)$，则称

$v(x)=u(x;\phi(x))$ 为 $\{u(x;a)\}_{a\in A}$ 的包络。

定理. 设 $u=u(x;a)(a\in A)$ 为(F)的解，$v(x)$ 为

$\{u(x;a)\}_{a\in A}$ 的包络，则 $v(x)$ 满足(F)（也称奇积分）.

证：$1\le j\le n, v_{x_j} = u_{x_j}(x;\phi(x))+\sum_{k=1}^{n} u_{a_k}(x;\phi(x))\phi_{x_j}^k(x)$

$$= u_{x_j}(x;\phi(x)), \quad \phi=(\phi^1,\cdots,\phi^n)\Rightarrow$$

$$F(x,v(x),Dv(x)) = F(x,u(x;\phi(x)),Du(x;\phi(x)))=0.$$

例. $u^2(1+|Du|^2)=1, x\in\mathbb{R}^n.$

全积分 $u(x;a)=\pm\sqrt{1-|x-a|^2}, |x-a|<1.$

$$D_a u(x;a)=\mp(x-a)\Big/\sqrt{1-|x-a|^2}=0\Rightarrow a=x=\phi(x)$$

$\Rightarrow v(x)=u(x;x)=\pm 1$ (包络，奇积分).

定义：若任意可微函数 $\omega: A'\to\mathbb{R}(A'\subset\mathbb{R}^{n-1})$ 满足

$$(a',\omega(a'))\in A\subset\mathbb{R}^n,$$ 其中

$$a=(a_1,\cdots,a_n)=(a',a_n)\in A, a'\in A', a_n=\omega(a'),$$

则称 $\{u(x;a',\omega(a'))\}_{a'\in A'}$ 的包络 $v'(x)$ 为(F)的通积分

- 实际上此包络包含任意函数的.

例.（几何光学方程） $|Du|=1, n=2.$

全积分为 $u(x;a)=x_1\cos a_1+x_2\sin a_1+a_2, x, a\in\mathbb{R}^2.$

令 $a_2=\omega(a_1)\equiv 0, \forall a_1\in\mathbb{R}.$ **则**

$$u(x;a_1,0)=x_1\cos a_1+x_2\sin a_1,$$

$$D_{a_1}u(x;a_1,0)=-x_1\sin a_1+x_2\cos a_1=0$$

$$\Rightarrow a_1=\arctan\frac{x_2}{x_1}$$

$$\Rightarrow \text{通积分} v'(x)=u(x;\arctan\frac{x_2}{x_1},0)$$

$$=x_1\cos(\arctan\frac{x_2}{x_1})+x_2\sin(\arctan\frac{x_2}{x_1})=\pm|x|$$

满足 $|Dv'(x)|=1, x\neq 0.$

3. 特征方程与Cauchy问题

与一阶线性和拟线性偏微分方程类似，为了在某曲线上计算未知函数，记 $z(t)=u(x(t)),\ p(t)=Du(x(t)),$

令 $\dfrac{dx_j(t)}{dt}=F_{p_j}(x(t),z(t),p(t)),1\le j\le n,$

则

$$\frac{dz(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}u_{x_j}(x(t))\frac{dx_j(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}p_j(t)F_{p_j}(x(t),z(t),p(t))$$

$$=D_pF(x(t),z(t),p(t))\cdot p(t),$$

$$\frac{dp_j(t)}{dt}=\sum_{k=1}^{n}u_{x_jx_k}(x(t))\frac{dx_k(t)}{dt}=\sum_{k=1}^{n}u_{x_jx_k}(x(t))F_{p_k}(x(t),z(t),p(t))$$

$$=-F_{x_j}(x(t),z(t),p(t))-F_z(x(t),z(t),p(t))p_j(t),$$

上页最后的等式来自对方程(F)关于x_j的微分.

从而得如下特征方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = \mathrm{D}_p F(x(t), z(t), p(t)) \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = D_p F(x(t), z(t), p(t)) \cdot p(t) \\ \dfrac{dp(t)}{dt} = -D_x F(x(t), z(t), p(t)) - D_z F(x(t), z(t), p(t)) p(t) \end{cases}$$

- 包含$2n+1$个常微分方程.

例. (Hamilton-Jacobi方程)

$$F(x,t,u,D_x u,u_t)=u_t+H(x,D_x u)=0, x\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}.$$

令 $y=(x,t), z=u(x,t), p=D_x u, p_{n+1}=u_t, q=(p,p_{n+1}),$

则 $F(y,z,q)=p_{n+1}+H(x,p), D_y F=(D_x H(x,p),0),$

$$D_z F=0, D_q F=(D_p H(x,p),1).$$

从而得到特征方程((*a*)(*b*)称为Hamilton方程)

$$\begin{cases} \dfrac{dx(s)}{ds}=\mathrm{D}_p H(x(s),p(s)) & (a) \\ \dfrac{dz(s)}{ds}=D_p H(x(s),p(s))\cdot p(s)-H(x(s),p(s)) & \\ \dfrac{dp(s)}{ds}=-D_x H(x(s),p(s)) & (b) \end{cases}$$

例. Cauchy问题 $\begin{cases} u_x u_y = u, x > 0 \\ u|_{x=0} = y^2 \end{cases}$

令 $z = u(x, y), p_1 = u_x, p_2 = u_y, p = (p_1, p_2),$

则 $F(x, y, z, p) = p_1 p_2 - z = 0,$

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = p_2, \dfrac{dy(t)}{dt} = p_1 \\ \dfrac{dz(t)}{dt} = 2p_1 p_2 \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = p_1, \dfrac{dp_2(t)}{dt} = p_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_1(t) = C_1 e^t, p_2(t) = C_2 e^t,$$

$$x(t) = C_2(e^t - 1), y(t) = y_0 + C_1(e^t - 1),$$

$$z(t) = z_0 + C_1 C_2 (e^{2t} - 1) = y_0^2 + C_1 C_2 (e^{2t} - 1)$$

而 $$C_2 = p_2 |_{t=0} = u_y |_{t=0} = 2y |_{t=0} = 2y_0,$$

$$C_1C_2 = p_1p_2 |_{t=0} = u |_{t=0} = z_0 = y_0^2$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}y_0,$$

$$x(t) = 2y_0(e^t - 1), y(t) = \frac{1}{2}y_0(e^t + 1), z(t) = y_0^2 e^{2t}$$

$$\Rightarrow y_0 = y - \frac{1}{4}x, e^t = \frac{x+4y}{4y-x}$$

故解

$$u(x, y) = z = (y - \frac{1}{4}x)^2 (\frac{x+4y}{4y-x})^2.$$

例. 初值问题 $\begin{cases} u_t + u_x^2 = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$

显然有零解 $u_1(x,t) = 0.$

而函数

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0, & |x| > t \\ x - t, & 0 \le x \le t \\ -x - t, & -t \le x \le 0 \end{cases}$$

是Lipschitz连续的且几乎处处满足方程，除了在三条线 $x = 0, \pm t.$

4. 作业

P319. 4, 7

附加作业：1. 说明Burgers方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, x, t \in \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = x^2 \end{cases}$$

在何处有唯一解并给出此唯一解。

2. 求解Burgers方程的Cauchy问题

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = e^{-x^2} \end{cases}$$

并给出爆破时间(即满足u无穷大的t)。