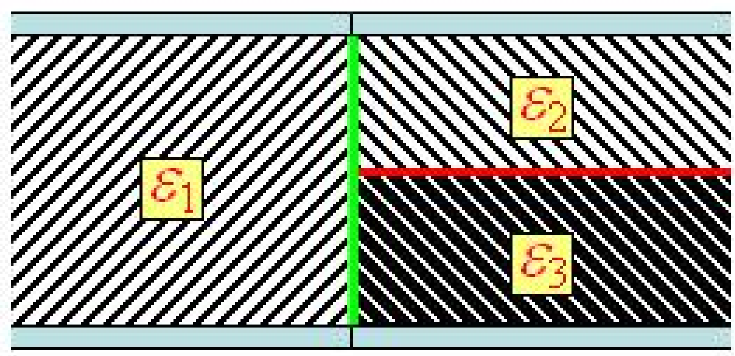
思考题讨论

- 思考题2.8 一个平板电容器内按图示填充三类电介质，能否解出各介质中的电场？



- 思考题2.9 像电荷能否位于待求电场空间？

第十一讲 2022-03-29

第3章 静电能

§2.8 电像法

§3.1 真空中点电荷间的相互作用能

§3.2 连续电荷分布的静电能

§3.3 电荷体系在外电场中的静电能

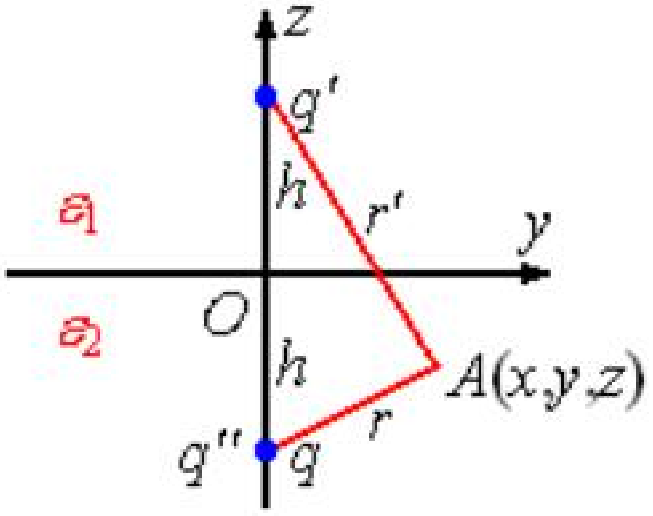
§3.4 电场的能量和能量密度

§3.5 非线性介质及电滞损耗

§3.6 利用静电能求静电力

[例2.11] 如图所示，介电常量分别为ε_1和ε_2的半无限介质，界面为一无限平面，介质2中置入点电荷q，它与界面的垂直距离为h，求界面极化电荷的分布。

[解] 我们尝试用电像法求解，即用像电荷来代表界面上极化电荷对电场的贡献。



对ε_2区($z<0$)，这一贡献可用像电荷q'代表，在上半区；

而对ε_1区($z\geq 0$)，可用像电荷q''代表，在下半区。

求得两区域电势的表达式为：

$$U_1 = \frac{1}{4\pi r}\left(\frac{q}{\varepsilon_2} + \frac{q''}{\varepsilon_0}\right), \quad (z \geq 0)$$

$$U_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{q}{\varepsilon_2 r} + \frac{q'}{\varepsilon_0 r'}\right), \quad (z \leq 0)$$

注意上述表达式中，

- 源电荷的贡献应被所在介质中的介电常量除，这相当于计入了源电荷周围的极化电荷的贡献；
- 而像电荷作为极化电荷的等效，已经考虑了极化效应，只需采用真空中的电势计算公式。

上述电场应满足如下边值关系：

$$U_1\big|_{z=0}=U_2\big|_{z=0},\quad \varepsilon_1\frac{\partial U_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\varepsilon_2\frac{\partial U_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}$$

将U_1和U_2的表达式代入上面两式分别求得：

$$q''=q',\quad \varepsilon_1\left(\frac{q}{\varepsilon_2}+\frac{q''}{\varepsilon_0}\right)=\varepsilon_2\left(\frac{q}{\varepsilon_2}-\frac{q'}{\varepsilon_0}\right)$$

可解出

$$q'=q''=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}q$$

极化面电荷密度：

$$\sigma_e' = (P_{2z} - P_{1z})_{z=0} = [(D_{2z} - \varepsilon_0 E_{2z}) - (D_{1z} - \varepsilon_0 E_{1z})]_{z=0}$$

$$= [\cancel{(D_{2z} - D_{1z})} - \varepsilon_0 (E_{2z} - E_{1z})]_{z=0} (D_n \text{连续})$$

$$= \frac{q'h}{2\pi r^3} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)hq}{2\pi\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)r^3}.$$

当取$\varepsilon_1 \to \infty$, $\varepsilon_2 \to \varepsilon_0$时，可得

$$q' = q'' = -q, \quad U_1 = 0, \quad U_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$$

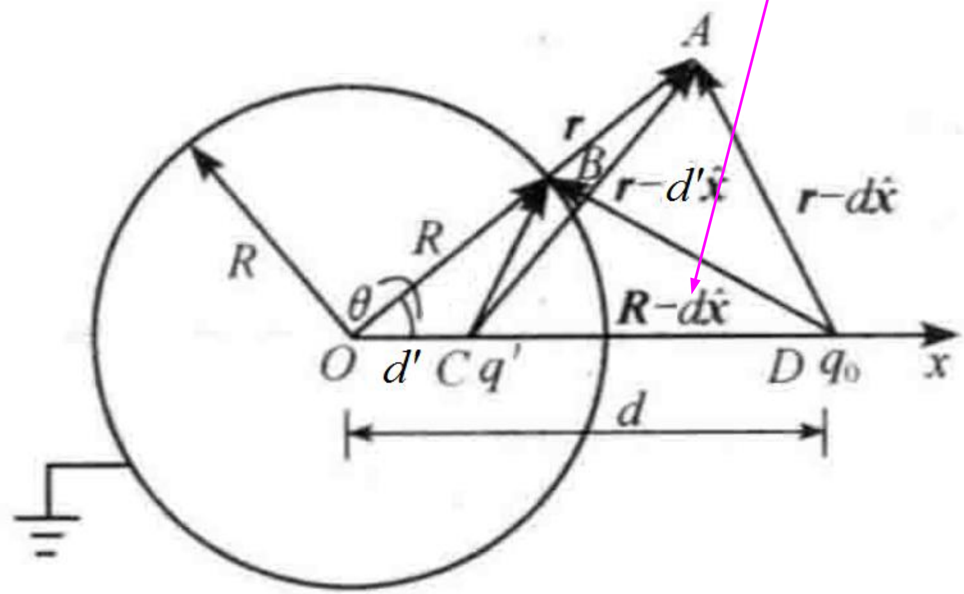
上述结果和例2.10一致。

⇒静电学中，导体可当作介电常量→∞的电介质。

[例2.12] 半径为R的导体球壳接地，球外有一点电荷q_0，与球心相距d，求空间各点电势、电场和导体球的面电荷分布，以及q_0受到的力。

教材误印为a

分析：根据体系对称性，假设在球心与q_0连线上、距离球心d'处放置像电荷q'来代替导体球上的感应电荷，可使边界条件维持不变，即导体球面U=0。

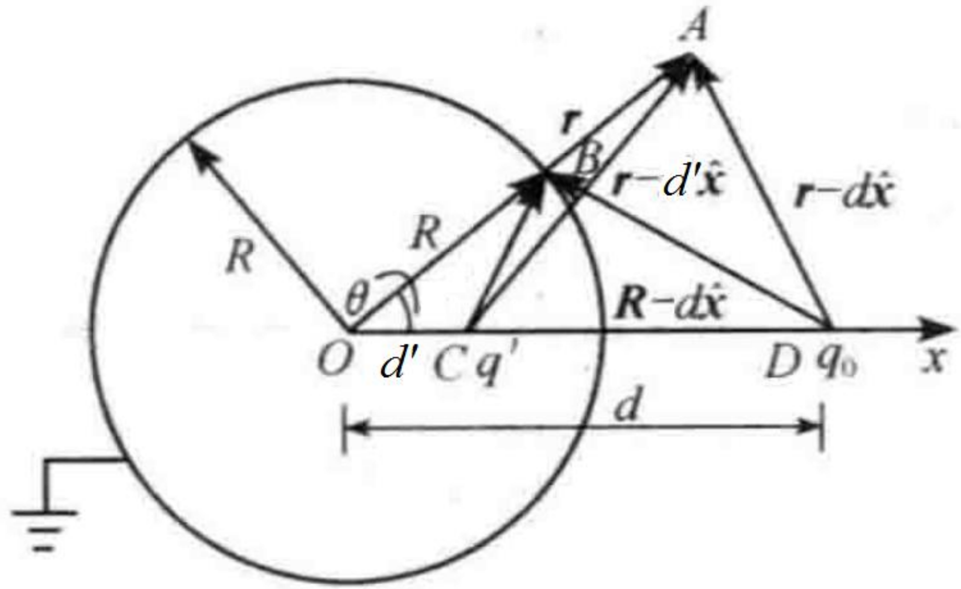


球面电像法

去掉导体球，由源电荷和像电荷求导体球外区域场。

[解] 1) 求像电荷大小和位置

q_0及q'在球面上任一点产生的电势为零。



$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_0}{|\boldsymbol{R}-d\hat{\boldsymbol{x}}|}+\frac{q'}{|\boldsymbol{R}-d'\hat{\boldsymbol{x}}|}\right)=0 \qquad (\#)$$

于是q_0和q'连线的直径两端点的电势分别为

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_0}{R+d}+\frac{q'}{R+d'}\right)=0, \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_0}{d-R}+\frac{q'}{R-d'}\right)=0$$

以上两方程解得 $q' = -\frac{R}{d} q_0$，$d' = \frac{R^2}{d}$ (*)

前提：知道两个不等量异号点电荷系统的零等势面为球面。若不知此性质，可按教材p64方法分析(?)

另解：由上页(#)式可得

$$q_0^2 (\boldsymbol{R} - d'\hat{\boldsymbol{x}})^2 = q'^2 (\boldsymbol{R} - d\hat{\boldsymbol{x}})^2$$

即$q_0^2 (R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos\theta) = q'^2 (R^2 + d^2 - 2Rd \cos\theta)$

上式为恒等式，两边含$\cos\theta$和不含$\cos\theta$项分别相等

$$q_0^2 2Rd' = q'^2 2Rd, \quad q_0^2 (R^2 + d'^2) = q'^2 (R^2 + d^2)$$

联合求解，可再次得到(*)式。

2) 求电势、电场强度、感应电荷和q_0受力

设R_1，R_2分别为球外任一点 $P(r, \theta, \varphi)$ 到q，q'距离，则P点电势

$$U_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_0}{R_1} + \frac{q'}{R_2}\right) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{R}{dR_2}\right)$$

其中$R_1 = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}$，$R_2 = \sqrt{r^2 + d'^2 - 2rd'\cos\theta}$.

电场分量 $$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{d}{R_1^3} - \frac{Rd'}{dR_2^3}\right)\sin\theta$$

$$E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r - d\cos\theta}{R_1^3} - \frac{R(r - d'\cos\theta)}{dR_2^3}\right)$$

$r=R$时球面上的感应电荷密度为

$$\sigma_e = \varepsilon_0 E_r \Big|_{r=R}$$

$$= \frac{q_0}{4\pi}\left[\frac{R-d\cos\theta}{(R^2+d^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}} - \frac{(R/d)(R-d'\cos\theta)}{(R^2+d'^2-2Rd'\cos\theta)^{3/2}}\right]$$

$$= -\frac{q_0}{4\pi}\frac{d^2/R-R}{(R^2+d^2-2Rd\cos\theta)^{3/2}}$$

负号
表示
吸引

可证球面上感应电荷总量恰好为 $q' = -\frac{R}{d}q_0$

作用在q_0上的力，等价于q'对q_0的库仑力，即

$$\boldsymbol{F} = \frac{q_0 q' \hat{\boldsymbol{x}}}{4\pi\varepsilon_0 (d-d')^2} = -\frac{Rdq_0^2\hat{\boldsymbol{x}}}{4\pi\varepsilon_0(d^2-R^2)^2}.$$

[例2.13] 在上例中，如果导体不接地而带电荷Q_0，求球外电势，并求q_0所受的力。

或球面均匀带电

解：将本题的体系看成两个子体系的叠加，

子体系1：上例的体系；子体系2：球心带电Q_0-q'

两个子体系各自满足导体球面等电势，二者电量之和正好是Q_0。根据叠加原理，本题体系的电势、电场就可以是这两个子体系相应量的叠加。

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_0-q'}{r}+\frac{q_0}{|\boldsymbol{r}-d\hat{\boldsymbol{x}}|}+\frac{q'}{|\boldsymbol{r}-d'\hat{\boldsymbol{x}}|}\right)$$

$$\boldsymbol{F}=\frac{q_0(Q_0-q')\hat{\boldsymbol{x}}}{4\pi\varepsilon_0 d^2}+\frac{q_0 q'\hat{\boldsymbol{x}}}{4\pi\varepsilon_0(d-d')^2}=\cdots$$

电像法小结

- 理论根据

  唯一性定理

- 基本思想

  在区域外放置适当的像电荷，等效导体 (介质) 边界上未知的感应 (极化) 电荷对域内电场的影响

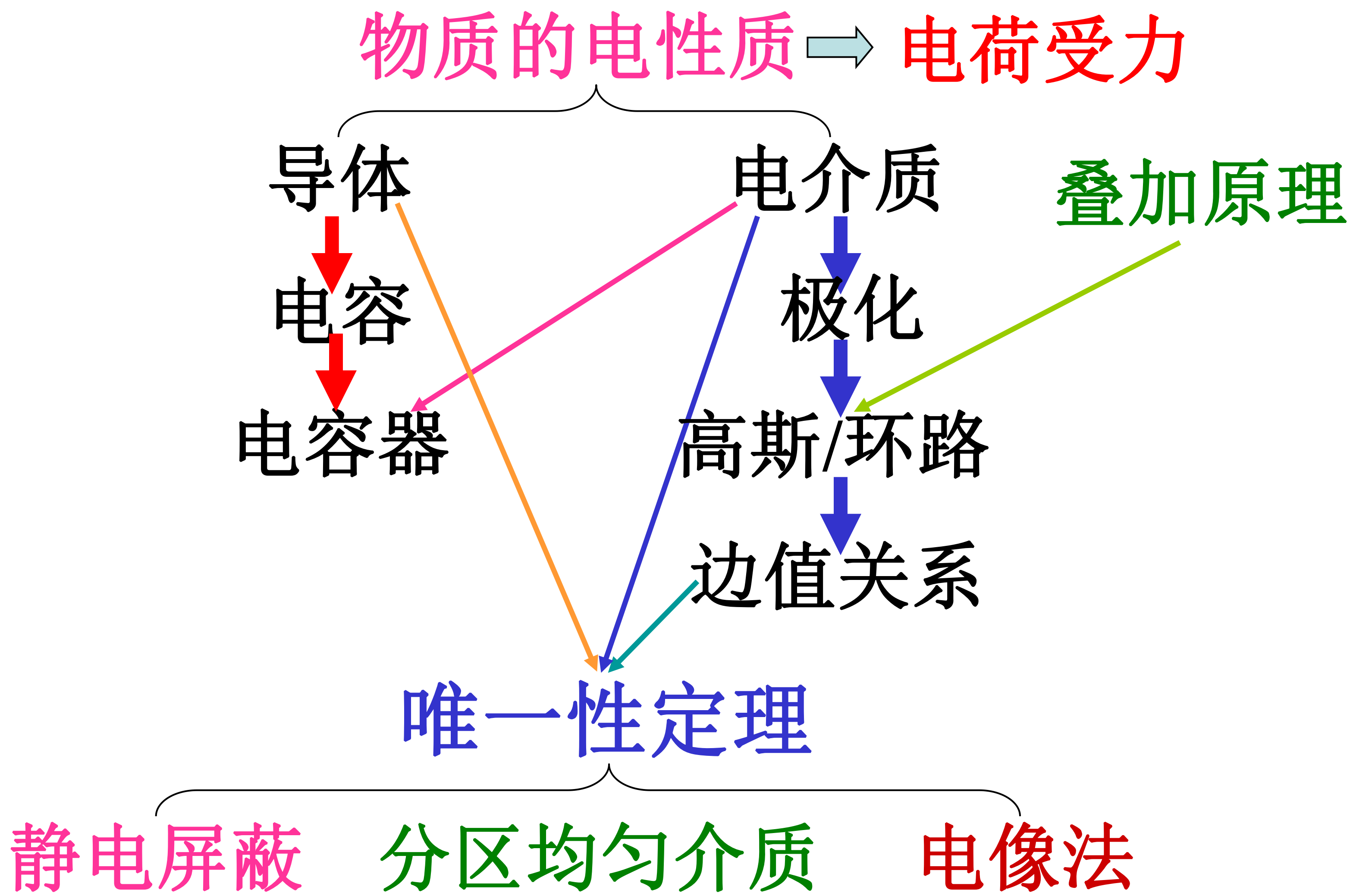
- 适用对象

  边界简单 (球、柱、面)、简单电荷体 (线、点)

- 原则

  不能影响原边界条件

第2章 小结


物质的电性质
电荷受力
导体
电介质
叠加原理
电容
极化
电容器
高斯/环路
边值关系
唯一性定理
静电屏蔽
分区均匀介质
电像法

能量的基本概念

- 引入目的
  - ➢ 是物质的共同属性，物质运动的普遍量度
  - ➢ 便于研究不同运动形式的转换
- 特点
  - ➢ 状态的单值函数，属于整个系统
  - ➢ 能量本身没有确定意义，能量差才有意义
- 描述方法
  - ➢ 引入状态参量，规定零点能，用做功计算能量

静电能定义

- 一个系统的带电过程总伴随着电荷的相对运动。在这个过程中，外力必须克服电荷间的相互作用而做功。
- 外界做功所消耗的能量将转换为带电系统的能量，该能量定义为带电系统的静电能 **(的增量)**。也可把静电力做功定义为系统静电能的减少。
- 于是，静电能应由系统的电荷分布决定。
- 点电荷在外电场中的电势能就是一种静电能。

3.1 真空中点电荷间的相互作用能

- 设想空间中有多个点电荷，电量q_i，位置$\boldsymbol{r}_i$，任意两个点电荷间的距离$r_{ij}=|\boldsymbol{r}_{ij}|=|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|$。
- 点电荷之间的相互作用能：与点电荷间的相对位置有关的静电能。状态量取为r_{ij} $(i, j=1, 2, \ldots, N)$。
- 静电能零点：当所有$r_{ij}\to\infty$时，点电荷间的静电相互作用消失，自然地取这时的相互作用能为零。
- 先介绍两个点电荷的静电能，然后推广到一般点电荷系的情形。

1. 两个点电荷的静电能 (初始q_1和q_2相距无穷远)

- 将q_1移至$\boldsymbol{r}_1$，外力不做功
- 再将q_2移至$\boldsymbol{r}_2$，外界克服静电力$\boldsymbol{F}_{12}$做功

$$W_{12}=q_2U_{12}=q_2\int_{r_2}^{\infty}\boldsymbol{E}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{q_2q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \qquad (\#)$$

- 先移q_2再移q_1，外力做功$W_{21}=q_1U_{21}$，
- 由(#)式对称性，$W_{21}=W_{12}$→外力做功与q_1和q_2的移动顺序无关，将W_{21}或W_{12}定义为该体系的静电能。
- 等价表达式

$$W_2=\frac{1}{2}(W_{12}+W_{21})=\frac{1}{2}(q_1U_{21}+q_2U_{12})$$

2. 三个点电荷的静电能

$$W_3=\frac{1}{2}(W_{12}+W_{21}+W_{13}+W_{31}+W_{23}+W_{32})$$

$$=\frac{1}{2}(q_2U_{12}+q_1U_{21}+q_3U_{13}+q_1U_{31}+q_3U_{23}+q_2U_{32})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}q_iU_i,$$

其中$U_i=\sum_{j=1,j\neq i}^{3}U_{ji}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1,j\neq i}^{3}\frac{q_j}{r_{ji}}$

将U_i代入W_3，则

$$W_3=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1,j\neq i}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{q_iq_j}{r_{ji}}.$$

3. 点电荷系的静电能

$$W_N=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iU_i,\quad \text{其中}U_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}U_{ji}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_j}{r_{ji}}$$

同理，将U_i代入W得

$$W_N=\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{i=1}^{N}q_iU_{ji}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_iq_j}{r_{ji}}\overset{\text{简记}}{=}\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_iq_j}{r_{ji}}$$

数学归纳法：对$N+1$个点电荷，可证 **(见教材p68)**

$$W_{N+1}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i,j=1\\ j\neq i}}^{N+1}\frac{q_iq_j}{r_{ji}}.$$

3.2 连续电荷分布的静电能

首先讨论只有自由电荷的情形，即电场空间中只有导体和介电常量为ε_0的物体 (包括真空) 存在。

1. 体电荷分布情形

设电荷密度为$\rho_e(\boldsymbol{r})$，将该体电荷无限分割，并把每一小部分当作点电荷处理，则由点电荷系统静电能$W_e=½\sum_i q_i U_i$可推得

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho_e(\boldsymbol{r}) U_1(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}V,$$

$U_1(\boldsymbol{r})$表示除$\rho_e(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$外的其余电荷在$\boldsymbol{r}$处产生的电势。

$U_1(\boldsymbol{r})$和总电势$U(\boldsymbol{r})$的关系

设$\mathrm{d}V$为一球形体元，由**1.7**节例**1.11**球壳内电势

$$U_2 = \frac{\rho_\mathrm{e}}{6\varepsilon_0}(3R_2^2 - 2R_1^3/a - r^2),$$

取$R_1=0$，$R_2=a$，可得电荷密度为ρ_e、半径为a的均匀带电球体在球内的电势为

$$U' = \frac{\rho_\mathrm{e}}{6\varepsilon_0}(3a^2 - r^2),$$

在球心处取极大值$U'_m = \rho_\mathrm{e} a^2 / 2\varepsilon_0$，

故当$a\rightarrow 0$时，$U'_m\rightarrow 0$，于是$U'\rightarrow 0$，$U_1(r)\approx U(r)$

$$\rightarrow W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\iiint_V \rho_\mathrm{e}(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V.$$

2. 面电荷分布情形

设面电荷密度为$\sigma_e(\boldsymbol{r})$。将面电荷无限分割为圆形面电荷元$\sigma_e(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S$，它在自身产生的电势不会大于$\sigma_e a/2\varepsilon_0$ (a为面元半径，参见**1.7**节例**1.10**)，当$\mathrm{d}S\to 0$ ($a\to 0$)时，该电势$\to 0$。

于是，$U_1(\boldsymbol{r})\approx U(\boldsymbol{r})$，其静电能为

$$W_e = \frac{1}{2}\iint_S \sigma_e(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S.$$

3. 线电荷分布情形

不能将静电能写为

$$W_e = \frac{1}{2}\int_L \lambda_e(l)U(l)\mathrm{d}l \quad 或 \quad W_e = \frac{1}{2}\int_L \lambda_e(l)U_1(l)\mathrm{d}l$$

因为$\lambda_e \mathrm{d}l$在自身处的电势不仅不趋于零，还会按$\ln(1/r)$ (r为离线元$\mathrm{d}l$的垂直距离)$\to\infty$。$U_1(l)$也$\to\infty$。

这在物理上意味着，要把电荷从分散状态压缩到一条几何线上，外界需要做无穷大的功，这显然是办不到的。

因此，在计算静电能时，无论线径怎样小的带电体均不能当作线电荷处理。

4. 多个带电体组成的系统的静电能

设有N个带电体，可将总电势$U(\boldsymbol{r})$分为两部分：

$$U(\boldsymbol{r})=U^{(i)}(\boldsymbol{r})+U_i(\boldsymbol{r})$$

其中$U^{(i)}(\boldsymbol{r})$表示第i个带电体在$\boldsymbol{r}$处产生的电势，$U_i(\boldsymbol{r})$表示除第i个带电体外其余带电体在$\boldsymbol{r}$处产生的电势。按照前述结论，可得

$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\iiint_V \rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})[U^{(i)}(\boldsymbol{r})+U_i(\boldsymbol{r})]\mathrm{d}V$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\iiint_{V_i}\rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})U^{(i)}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\iiint_{V_i}\rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})U_i(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V.$$

N个带电体视为一体

上式可记为

$$W_{\mathrm{e}}=W_{自}+W_{互},$$

其中自能

$$W_{自}=\sum_{i=1}^{N}W_{自}^{(i)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\iiint_{V_i}\rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})U^{(i)}(\boldsymbol{r})dV,$$

互能

$$W_{互}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\iiint_{V_i}\rho_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r})U_i(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V.$$

注意 点电荷、线电荷的自能不能计算 (为无穷大)

但任意带电物之间都可以计算互能

作业、预习及思考题

- 作业：2.22~2.24, 3.1~3.3 (2.23(2)提示：仿例2.13，新体系⇔例2.12体系+带电$Q-q'$导体球，但q'不同！ $Q-q'$均匀分布于球面)
- 预习：3.2~3.4

下次课讨论

- 思考题2.10 两个半无限大接地导体板构成二面角，点电荷q位于其内，怎样的θ可使用电像法？