第五周作业评价

黄天一

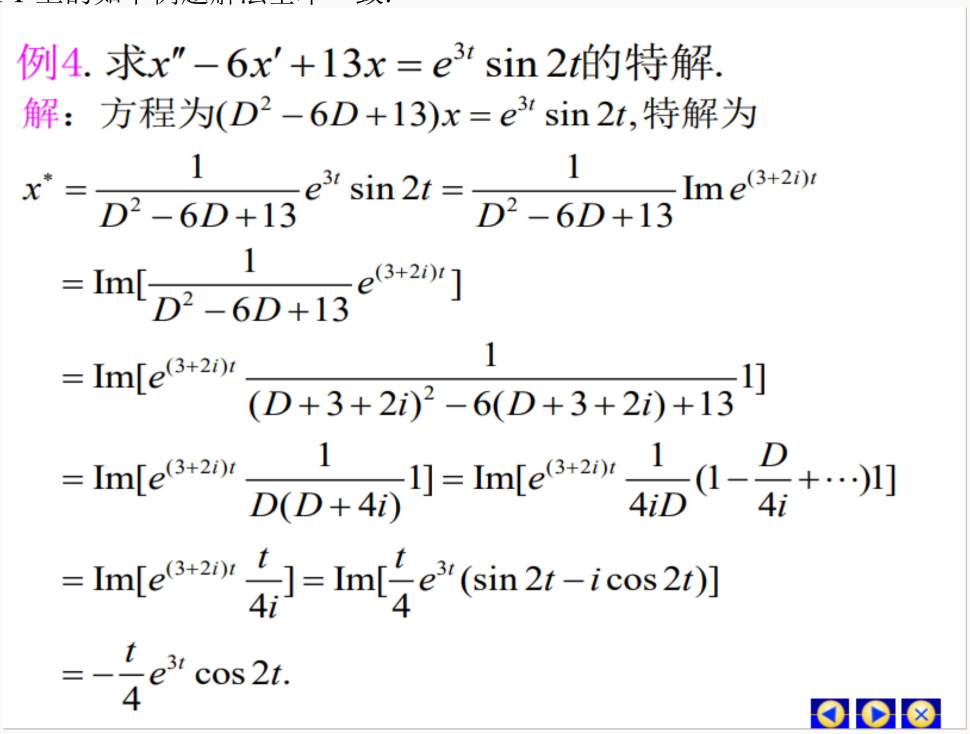
ElegantLaTeX Program

更新：2022 年 10 月 11 日

这次作业总体难度不大, 大致完成情况还不错, 但是跳步 & 口胡较前几次作业增加了不少, 同学们还是要尽量把论述过程补充完整. 下面具体谈谈作业里的问题.

P85-9 本题要求讨论一般二阶常实系数齐次线性方程具有非零解的充要条件. 绝大部分同学能给出 $a_1=0, a_0a_2>0$ 这一条, 但其实 $a_2=0$ 还对应着方程存在非零常数解, 所以也可行 (但这属于细节问题, 不予扣分, 我在各位的作业里有所标注). 此外, 很多同学的过程为: 若 $x(t)$ 为周期解, 故特征方程有共轭纯虚根, 这就缺乏论述了, 判错.

85-11(4),103-3 这两题考察同一个方程的特解求解. 本题利用运算子法/待定系数法/二阶方程的特解公式都可以 (但你不能告诉我因为课本的例题求出来过了, 所以你知道特解是什么!) 这一题比较大的问题集中于用运算子法时不少同学跳步 + 口胡, 实际这一题在求解 $5x''+5x=\sin t$ 时和老师 PPT 上的如下例题解法基本一致:



如果对运算子法不熟可以再对照着课件/笔记认真复习一下, 它在求解高阶 $(n\geqslant 3)$ 方程的

特解时比待定系数法的效率高不少.

96-4(3) 这题是很典型的 **Euler 方程**, 它可以化为如下形式:

$$a_n t^n \frac{d^n x}{dt^n} + \cdots + a_1 t \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0.$$

Euler 方程的标准求解方法是作变换 $u = \ln|t|$, 各位可以验证: 若记 $\mathcal{D} = \frac{d}{du}$, 则

$$t^k \frac{d^k}{dt^k} = \mathcal{D}(\mathcal{D}-1)\cdots(\mathcal{D}-k+1).$$

这样就能把原方程化为 x 关于 u 的常系数微分方程, 进而可以常规求解. 此外, 有同学作变换 $x = ut$ 求解, 也是可行的.

96-5 这题难度不大, 但写全对的很少. 主要两个问题: 1. (1) 给出的充要条件应为 $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ 而非 $\lambda_i < 0$, (2)(3) 问类似; 2. (2) 问不少同学没有考虑重根的情况, 结果给出的充要条件是 $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leqslant 0$ 或者 $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$. 实际上, 若 λ 的重数为 1, 则 $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$; 若重数大于 1, 则 $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$(想想为什么).

97-10 这题的标准求解步骤是求出通解形式后再利用初值条件确定常数. 有同学看出 e^t 是特解, 所以给出答案 e^t, 非常简洁. 但我们暂未讨论初值问题解的存在唯一性, 故你给出的解未必是唯一解 (尽管真的是这样), 所以还是应该按步骤来. 此外, 这题确定常数的过程实际非常轻松, 你甚至不需要写出特征根的具体形式, 借助 Vandermonde 行列式可逆就是.

附加 3-1 本题利用运算子法或者把方程复化求出一个特解就好, 但各位一定要确切算出一个特解, 不能告诉我你发现特解应该是什么形式云云. 最后记得根据特解简要讨论物理意义并给出建议.

附加 3-2 两个积分方程都可以分别化为: 一个二阶常系数微分方程 & **初值条件**. 所以说, 最后求得通解中的常数完全是可以确定的, 这一点很多同学忽视了.