§3.5 凹凸性和曲率

3.5.1 函数的凹凸性

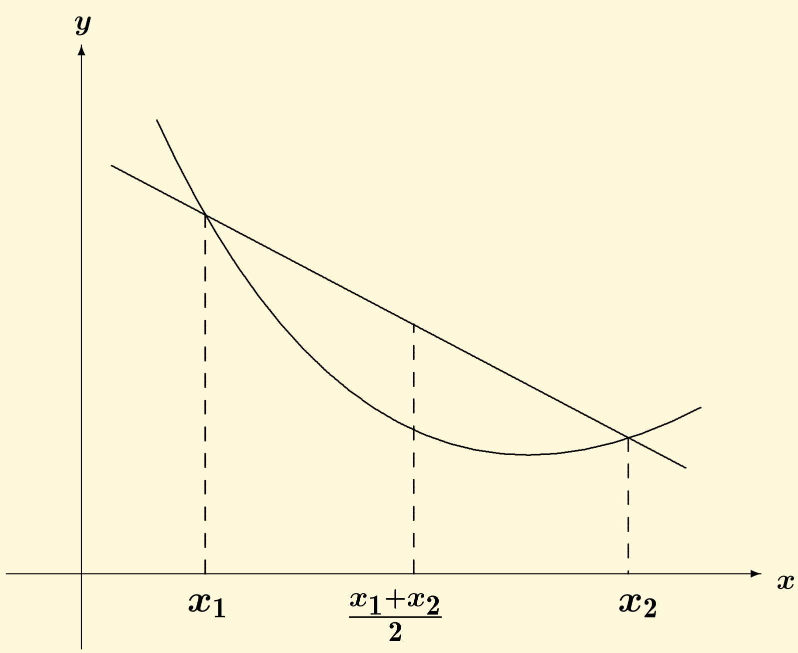


图 3.1 下凸

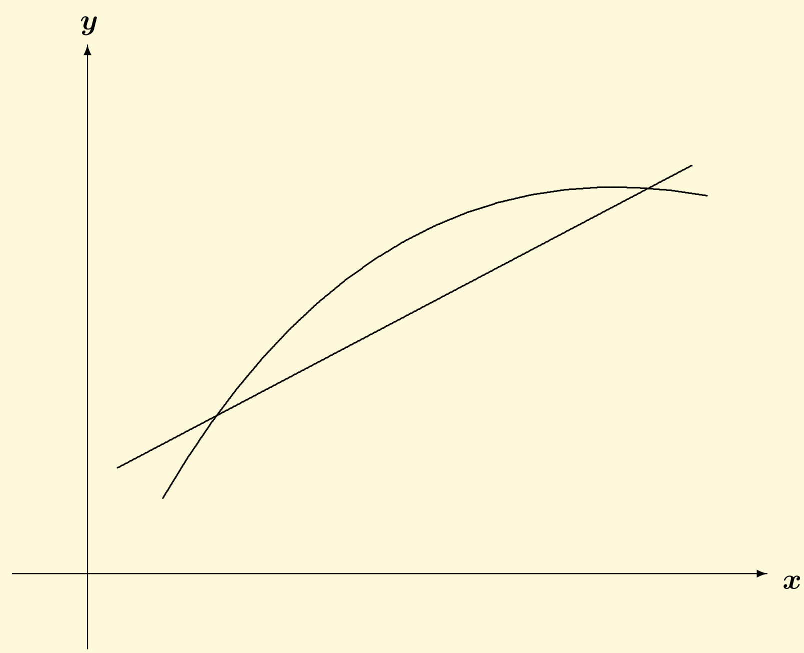


图 3.2 上凸

如果曲线 L 作为区间 I 上函数 $f(x)$ 的图象是下凸的（上凸的）, 就称函数 $f(x)$ 是是 I 上的凸函数（凹函数）.

对于凸函数 $f(x)$, 以及它的图象 L（一条凸曲线）, 任取 L 上的两点 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$（不妨设 $x_1 < x_2$）, 连接这两点的直线方程是

$$y = g(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \ x \in [x_1, x_2].$$

根据上述凸（凹）性的几何描述, 该直线在曲线 L 的上方, 即

$$f(x) \leqslant f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \ x \in [x_1, x_2].$$

对 I 中的任意两点 x_1, x_2 成立. 由于 x_1 与 x_2 之间的数可表示为

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2,$$

其中 $\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in (0, 1)$. 将上面不等式中的 x 换为 $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, 可得

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

因此我们给出如下定义.

定义 1 设 $f(x)$ 是区间 I 上的函数, 如果任给 I 中两点 x_1, x_2, 以及任意 $\alpha \in (0,1)$ 有

$$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2),$$

则称函数是区间 I 上的凸函数, 当上式的不等号改为 "$<$" 时, 就称 $f(x)$ 为严格凸的

注意, 函数或者曲线的凸和凹, 只是看图象的角度不同而已, 不同的书上会出现不同的定义. 往往甲书上定义的凸, 却是乙书上定义的凹, 没有一个相对统一的说法. 因此, 查阅文献时, 首先要看文献中对凸凹性的定义.

定理 1 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果任给 I 中两点 x_1, x_2, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数.

证明 对于 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, 记 $y_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y_2 = \frac{x_3+x_4}{2}$, 则

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

因此,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) &= f\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(y_1)+f(y_2)}{2} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \frac{f(x_3)+f(x_4)}{2}\right) \\ &= \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}. \end{aligned}$$

按此方法, 并利用归纳原理, 可知对型如 $m = 2^n$ 的自然数, 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_m)}{m}. \tag{3.1}$$

令

$$x_0 = \frac{x_1 + \cdots + x_{m-1}}{m-1},$$

则

$$x_0 = \frac{x_1 + \cdots + x_{m-1} + x_0}{m}.$$

因此, 从上式得到

$$f(x_0) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_{m-1}) + f(x_0)}{m},$$

即,

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1}}{m-1}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{m-1})}{m-1}.$$

所以从定理的条件可知, 对任意自然数 m, 不等式 (3.1) 成立.

现设 $x, y \in I$, 及任意自然数 n, m $(n < m)$, 在 (3.1) 中令 $x_1 = \cdots = x_n = x$, $x_{n+1} = \cdots = x_m = y$, 得到

$$f\left(\frac{n}{m}x + (1 - \frac{n}{m})y\right) \leqslant \frac{n}{m}f(x) + (1 - \frac{n}{m})f(y).$$

即, 对任意有理数 $r \in (0, 1)$, 有

$$f\left(rx + (1 - r)y\right) \leqslant rf(x) + (1 - r)f(y).$$

对于任意实数 $\alpha \in (0, 1)$, 可取趋于 α 的有理数列 $r_n \in (0, 1)$. 将上式中的 r 换成 r_n, 并令 $n \to \infty$, 根据 f 的连续性, 就得到

$$f\left(\alpha x + (1 - \alpha)y\right) \leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

这就证明了 f 是 I 上的凸函数. 证毕.

证法 2 (反证法) 若 $f(x)$ 不是 I 上的凸函数, 则存在 $x_1, x_2 \in I$, 及 $x_0 \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} > \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

即,

$$f(x_0) > f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_0-x_1).$$

构造线性函数

$$g(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

它的图像是连接 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$ 的弦, 因此有

$$g(x_1) = f(x_1), \quad g(x_2) = f(x_2), \quad f(x_0) > g(x_0).$$

令

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

则 $h(x_1) = h(x_2) = 0$, $h(x_0) > 0$.

由于 $h(x)$ 是连续函数, 存在 x_0 的邻域 $(a, b) \subset (x_1, x_2)$, $x_0 \in (a, b)$, 使得

$$h(a) = h(b) = 0, \quad h(x) > 0,\ x \in (a, b).$$

此时有

$$h\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0,\ \text{即},\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) > g\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

因为 g 是线性函数, 所以

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{g(a)+g(b)}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

因此

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

这与条件矛盾!

定理 2 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, x_1, x_2, x_3 是 I 三点, 且 $x_1 < x_2 < x_3$. 那么有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

证明 令 $\alpha = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, 则

$$x_2 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_3.$$

由 f 的凸性, 知

$$f(x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_3).$$

将 α 代入此式, 经变形即得定理中的不等式. 证毕.

定理 3 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, 那么 $f(x)$ 在 I 的内点是连续的.

证明 设 x_0 是 I 的一个内点. 在 I 中选取四个点 x_1, x_2, y_1, y_2 使得 $x_1 < x_2 < x_0 < y_1 < y_2$. 根据定理 2, 当 $x \in (x_2, y_1)$ 且 $x \neq x_0$ 时, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(y_2)-f(y_1)}{y_2-y_1}.$$

此式说明当 $x \in (x_2, y_1)$ 且 $x \neq x_0$ 时, $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|$ 是有界的, 即存在正数 M, 使得 $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leqslant M$. 因而

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant M|x-x_0|, \quad x \in (x_2, y_1).$$

从此式便可得出 f 在 x_0 连续. 证毕.

从以上定理的证明可看出若 $f(x)$ 是开区间 I 上的凸函数, 则 f 在 I 上连续, 且当 $[a, b]$ 是 I 中的有限闭区间时, f 在 $[a, b]$ 上是 Lipschitz 连续的.

定理 4 设 $f(x)$ 是区间 I 上连续, 在此区间内部可微. 如果 $f'(x)$ 在 I 内 (严格) 单调递增, 则 $f(x)$ 是 I 上的 (严格) 凸函数. 反之, 如果 $f(x)$ 是 I 上的凸函数, 则 $f'(x)$ 在 I 上单调递增.

证明 对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 及任意 $\alpha \in (0,1)$. 不妨设 $x_1 < x_2$. 记 $x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, 则 $x_1 < x_0 < x_2$, 且 $\alpha = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}$. 由微分中值定理, 存在 $\xi_1 \in (x_1, x_0)$ 和 $\xi_2 \in (x_0, x_2)$ 使得

$$f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_0 - x_1);$$

$$f(x_2) - f(x_0) = f'(\xi_2)(x_2 - x_0).$$

注意到 $f'(x)$ 是单调递增的, 我们有 $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$. 于是

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

此式可变形为 $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$. 因此, $f(x)$ 在 I 上是凸函数. 证毕.

定理 5 设 $f(x)$ 是区间 I 上连续, 在此区间内有二阶导函数. 如果对 I 内任意 x 有 $f''(x) \geqslant 0$ ($f''(x) > 0$), 则 $f(x)$ 是 I 上 (严格) 凸函数. 反之, 如果 $f(x)$ 是 I 上的凸函数, 则对 I 内任意 x 有 $f''(x) \geqslant 0$.

定理 6 (Jensen **不等式**) 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数. 则对 I 中任意 n 个点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots + \alpha_n f(x_n),$$

其中 $\alpha, \cdots, \alpha_n$ 都是正数且 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$.

证明 根据 $f(x)$ 在内部的连续性和凸性, 利用归纳法即可证明.

例 1 设 x, y 非负且 $x+y \leqslant 1$. 求证:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

证明 令 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. 则当 $x>0$ 时

$$f'(x)=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}>0,\ f''(x)=-3x(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}<0.$$

这说明当 $x>0$ 时 $f(x)$ 是严格单调递增的凹函数.

于是当 $x+y \leqslant 1$ 时, 有

$$f(x)+f(y) \leqslant f(x)+f(1-x) \leqslant 2f(\frac{x+1-x}{2})=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

等号当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时成立.

例 2 设 a, b, c 是正数. 求证:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

例 3 设 a, b, c 是正数. 求证:

$$\frac{ab^2}{a^2+2b^2+c^2}+\frac{bc^2}{a^2+b^2+2c^2}+\frac{ca^2}{2a^2+b^2+c^2}\leqslant\frac{a+b+c}{4}.$$

证明 记 $k=a^2+b^2+c^2$,

$$u=\frac{a}{a+b+c},\ v=\frac{b}{a+b+c},\ w=\frac{c}{a+b+c},$$

则 k, u, v, w 都是正数, 且 $u+v+w=1$. 考察函数

$$f(x)=\frac{x}{k+x},\quad (x>0).$$

因为

$$f'(x)=\frac{k}{(k+x)^2}>0,\quad f''(x)=\frac{-2k}{(k+x)^3}<0,$$

所以 $f(x)$ 是严格单调递增的凹函数.

根据琴生不等式, 有

$$uf(b^2)+vf(c^2)+wf(a^2)\leqslant f(ub^2+vc^2+wa^2). \tag{1}$$

由显然的不等式:

$$a(c-a)^2+b(a-b)^2+c(b-c)^2\geqslant 0,$$

可得到

$$ub^2+vc^2+wa^2\leqslant \frac{1}{3}k.$$

由 $f(x)$ 的递增性及 (1), 得

$$uf(b^2)+vf(c^2)+wf(a^2)\leqslant f\left(\frac{1}{3}k\right)=\frac{1}{4}.$$

这就是所要证明的.

例 4 (**加权几何算术平均不等式**) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 都是正数, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. 则有不等式

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

特别取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, 则有几何算术平均不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

证明 考虑区间 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = -\ln x$. 因为 $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, 所以 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的严格凸函数. 于是根据 Jensen 不等式, 有

$$-\ln(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant -\lambda_1 \ln x_1 - \cdots - \lambda_n \ln x_n,$$

即,

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

例 5 (Hölder **不等式**) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 都是非负数, 且 $p > 1, q > 1$ 是一对共轭数, 即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 则有不等式

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中等号成立的充分必要条件是数组 $x_1^p, x_2^p, \cdots, x_n^p$ 和 $y_1^q, y_2^q, \cdots, y_n^q$ 成比例.

证明 只需考虑数组中的数都大于零的情况. 令 $f(x) = x^p, (x > 0)$. 因为 $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$, 所以 f 是严格凸函数. 令

$$\lambda_k = \frac{y_k^q}{\sum_{i=1}^n y_i^q}, \quad A_k = x_k y_k^{1-q}, \ k = 1, 2, \cdots, n,$$

根据 Jensen 不等式, 有

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{k} \lambda_k f(A_k).$$

即，

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} y_k^q}\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k^q}{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}\cdot (x_k y_k^{1-q})^p\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^p}{\sum_{k=1}^{n} y_k^q}.$$

这就是

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

等号成立当且仅当

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n,$$

即，$x_1^p, x_2^p, \cdots, x_n^p$ 和 $y_1^q, y_2^q, \cdots, y_n^q$ 成比例.

定义 2 设 $y = f(x)$ 在包含点 x_0 的区间上连续, 如果点 x_0 是 $f(x)$ 的凸、凹区间的一个分界点 (即, 在 x_0 的一边是凸的, 但在另一边是凹的), 则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个拐点 (或称扭转点). 有时也称函数图象上的点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点.

例如, 对于函数 $f(x) = x^3$ 来说, $x = 0$ 就是它的一个拐点.

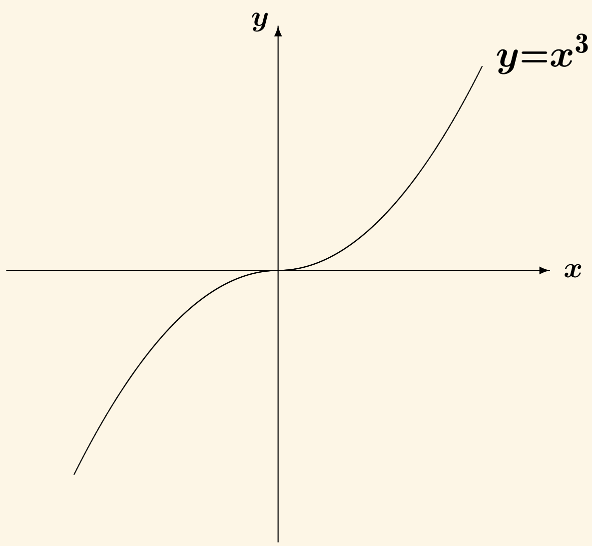


图 3.3

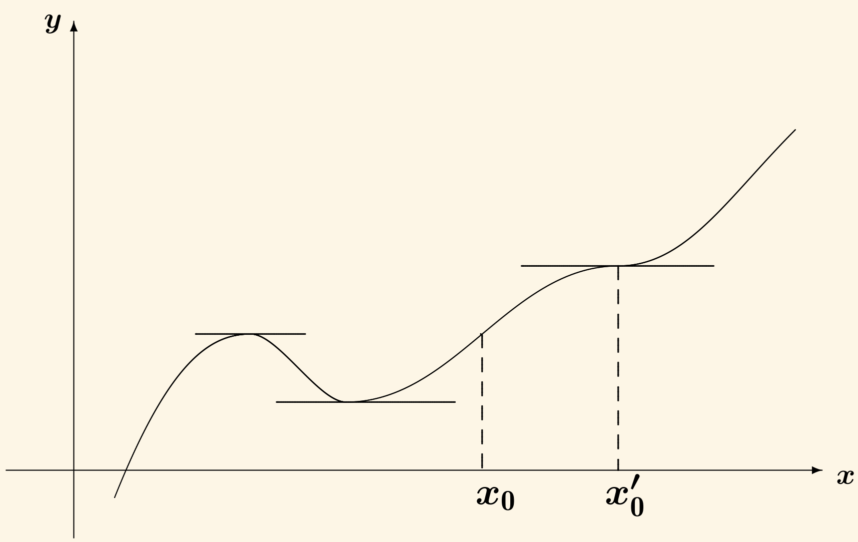


图 3.4

定理 7 设 $f(x)$ 在 x_0 连续, 在 x_0 的一个邻域内（不包含 x_0）可微. 如果在 x_0 的左侧某个区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 内 $f'(x)$ 严格单调递增（或递减）, 而在 x_0 的右侧某个区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 内 $f'(x)$ 严格单调递减（或递增）, 则 x_0 是 $f(x)$ 的拐点.

定理 8 设 $f(x)$ 在 x_0 连续, 在 x_0 的一个邻域内（不包含 x_0）二阶可微. 如果在 x_0 的左侧某个区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 内 $f''(x) > 0\ (< 0)$, 而在 x_0 的右侧右侧某个区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 内 $f''(x) < 0\ (> 0)$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的拐点. 特别, 当 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数时, x_0 是拐点的必要条件是 $f''(x_0) = 0$.

这样, 就通过函数的二阶导数给出了函数拐点的一个有效判别法. 注意函数在一点的二阶导数为零, 只是判断拐点的必要条件, 即拐点处二阶导数必然为零, 但二阶导数为零的点未必是拐点. 例如对于函数 $f(x) = x^4$, 不难看出 $f''(0) = 0$, 但显然 $x = 0$ 不是函数的拐点.

凸点和凹点

设 $f(x)$ 为区间 (a,b) 上的连续函数. 对 $x_0 \in (a,b)$, 若存在 x_0 的邻域 U 和实数 $A(x_0)$ 使得对任意 $x \in U \setminus \{x_0\}$ 有

$$f(x) \geqslant f(x_0) + A(x_0)(x - x_0),$$

则称 x_0 为 $f(x)$ 的凸点. 当上面的不等号为 "$>$" 时, x_0 称为"严格凸点". 类似地, 用反向的不等号可以定义 $f(x)$ 的凹点和严格凹点.

注 1: 直观上说, x_0 是函数的凸点是指, 在 x_0 的一个小邻域内函数的图像在过 $(x_0, f(x_0))$ 的某直线的上方; x_0 是函数的凹点是指, 在 x_0 的一个小邻域内函数的图像在过 $(x_0, f(x_0))$ 的某直线的下方;

注 2: 当 x_0 为 $f(x)$ 的凸点或凹点, 且 $f(x)$ 在 x_0 可导时, 定义中的 $A(x_0) = f'(x_0)$.

性质 1 x_0 既是 $f(x)$ 的凸点, 又是 $f(x)$ 的凹点 $\Longleftrightarrow$ 在 x_0 一个邻域内 $f(x)$ 是线性函数.

证明 因为 x_0 是 $f(x)$ 的凸点, 所以存在 x_0 的一个邻域 U_1 和数 A_1 使得

$$f(x) \geqslant f(x_0) + A_1(x - x_0),\ x \in U_1 \setminus \{x_0\}.$$

又因为 x_0 是 $f(x)$ 的凹点, 所以存在 x_0 的一个邻域 U_2 和数 A_2 使得

$$f(x) \leqslant f(x_0) + A_2(x - x_0),\ x \in U_2 \setminus \{x_0\}.$$

记 $U = U_1 \cap U_2$. 则在 $U \setminus \{x_0\}$ 内, 上面两个不等式同时成立. 因此

$$A_1(x - x_0) \leqslant A_2(x - x_0),\ x \in U \setminus \{x_0\}.$$

因而 $A_1 = A_2$. 于是在 U 内有

$$f(x) = f(x_0) + A_1(x - x_0).$$

性质 2 连续函数 $f(x)$ 是 (a,b) 上(严格)凸函数 $\Longleftrightarrow$ (a,b) 中的每个点都是 $f(x)$ 的(严格)凸点.

证明 若 $f(x)$ 是 (a,b) 上凸函数, 则对任意 $x_0 \in (a,b)$ 有

$$\limsup_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \liminf_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

取一个数 A 使之介于上面的上极限和下极限之中, 则存在 x_0 的邻域 U 使得

$$f(x) \geqslant f(x_0) + A(x-x_0), \ x \in U \setminus \{x_0\}.$$

这说明 x_0 是 f 的凸点.

若 $f(x)$ 不是 (a,b) 上凸函数, 则存在 (a,b) 中三点 $x_1 < x_2 < x_3$ 使得 $f(x_1) = f(x_3) < f(x_2)$. 此时 f 在 $[x_1, x_3]$ 上的最大值点必在内部. 设 x_0 是最小的最大值点. 则 x_0 是 f 的凹点. 若 x_0 又是 f 的凸点, 则由性质 1 知, f 在 x_0 的邻域是线性的. 这不可能. 因此, x_0 不是凸点. 证毕.

性质 3 若 $f(x)$ 为区间 (a,b) 上的连续函数且不是一次函数, 则 $f(x)$ 一定存在严格凹点或严格凸点.

证明 假设 $f(x)$ 在 (a,b) 上不是一次函数, 则存在 $a<x_1<x_2<x_3<b$ 使得三点 $(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2)),(x_3,f(x_3))$ 不共线. 不妨设

$$f(x_2)-\left(f(x_1)+\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)\right)>0,$$

此不等式也可写成

$$f(x_2)-\left(f(x_3)+\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_3)\right)>0$$

令

$$g(x)=-\varepsilon(x-x_2)^2+f(x_2)+\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x-x_2).$$

取 $\varepsilon>0$ 充分小使得

$$g(x_1)>f(x_1),\quad g(x_3)>f(x_3).$$

令 $h(x)=g(x)-f(x)$. 则有 $h(x_1)>0$, $h(x_3)>0$, 且 $h(x_2)=0$. 设 ξ 是 $h(x)$ 在 $[x_1,x_3]$ 上的最小值点, 即

$$h(\xi)=\min_{x\in[x_1,x_3]} h(x).$$

则

$$h(\xi)\leqslant 0,\ \xi\in(x_1,x_3).$$

于是有

$$f(x)\leqslant g(x)-h(\xi),\ \xi\in(x_1,x_3).$$

因为 $g(x)-h(\xi)$ 的图像是开口朝下的抛物线, 所以当 $x\neq\xi$ 时有

$$g(x)-h(\xi)<g'(\xi)(x-\xi)+g(\xi)-h(\xi)=g'(\xi)(x-\xi)+f(\xi).$$

即,

$$f(x)<g'(\xi)(x-\xi)+f(\xi),\ x\in(x_1,x_3)\setminus\{\xi\}.$$

这说明 ξ 是 $f(x)$ 的一个严格凹点. 证毕.

渐近线

定义 3 设有曲线 $y = f(x)$, 当曲线上的点沿着曲线运动而远离原点时, 它与某条直线的距离趋于零, 就称这条直线是曲线 $y = f(x)$ 的渐近线.

渐近线分三类: 垂直渐近线, 水平渐近线, 斜渐近线.

垂直渐近线 若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$, 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ 则直线 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐近线.

水平渐近线 若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ 则直线 $y = a$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

斜渐近线 对于函数 $f(x)$, 若存在 $a \neq 0$ 满足

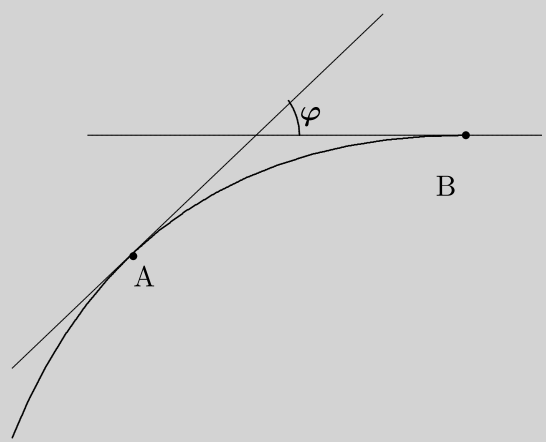
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax) = b, \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = b,$$

则直线 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

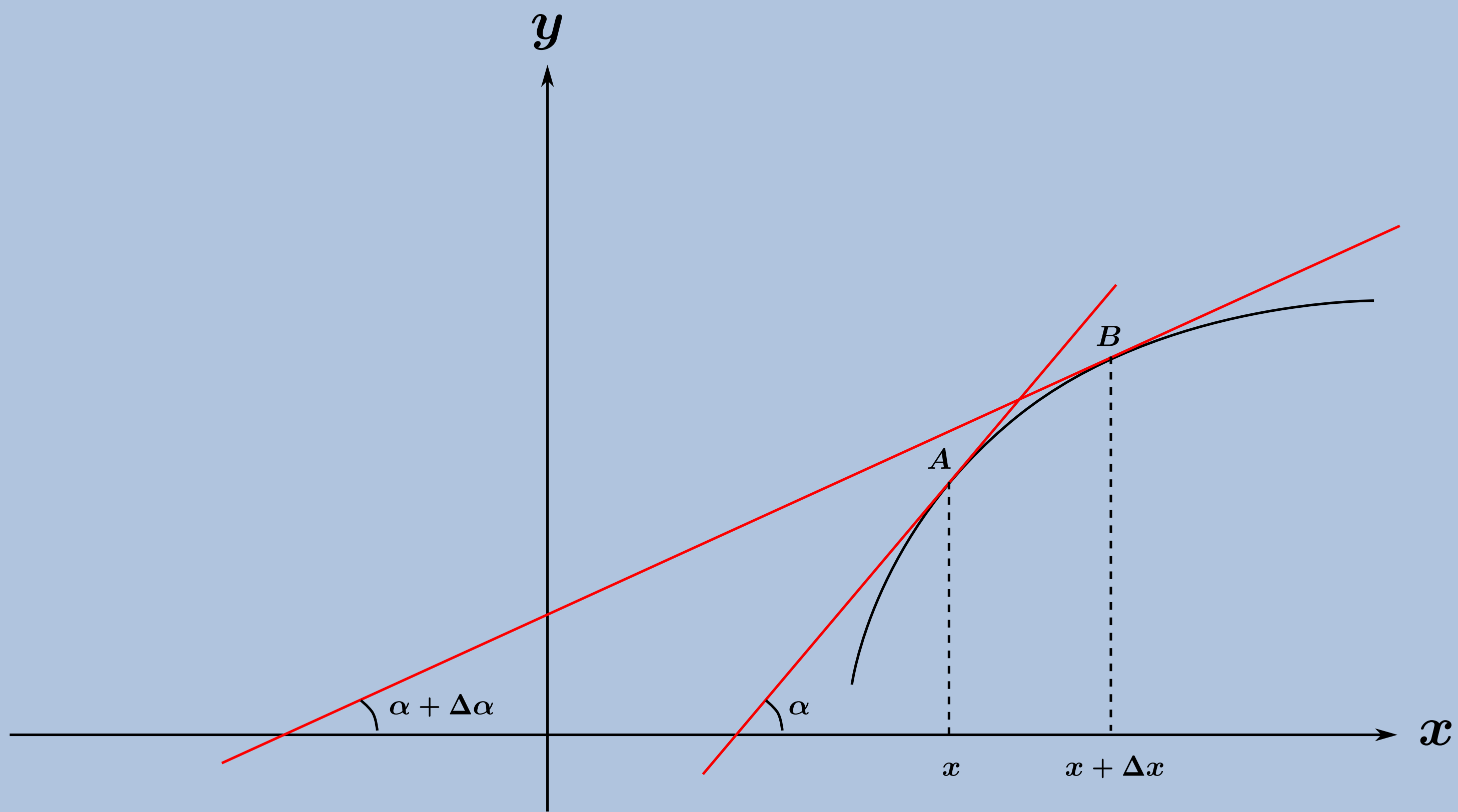
3.5.2 平面曲线的曲率

定义 4 设 L 是平面上的光滑曲线, A, B 是 L 上两点. 从 A 到 B 的弧长为 σ, 当质点沿 L 从 A 运动到 B 时, 切线转过的角度为 φ, 则比值 $\frac{\varphi}{\sigma}$ 刻画了弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 的平均弯曲程度, 称为弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 的平均曲率. 如果 $\lim\limits_{B\to A}\frac{\varphi}{\sigma}$ 收敛, 就将这极限值定义为曲线在 A 点的曲率. 记为 $\kappa = \kappa(A)$.

显然, 曲率的值越大, 则表明曲线越弯曲; 曲率的值越小, 则曲线越平坦. 可以猜测, 若曲线在每点的曲率为零, 则表明曲线没有弯曲, 因此这实际上是直线. 若曲线在每点的曲率都相同, 则曲线应为圆.



设平面曲线由显式 $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ 表示. 在这种情况下, 设曲线上点 A 和 B 的坐标分别是 $A(x,\ f(x))$ 和 $B(x + \Delta x,\ f(x + \Delta x))$.



设从起点 $(a, f(a))$ 到任意动点 $(x, f(x))$ 的弧长记为 $s = s(x)$, 动点 $(x, f(x))$ 处切线与 x 轴正向的夹角记为 $\alpha(x)$. 则对应于 x 的增量为 Δx,

弧长的增量是

$$\Delta s = s(x+\Delta x) - s(x),$$

夹角的增量为

$$\Delta \alpha = \alpha(x+\Delta x) - \alpha(x).$$

不难看出

$$\Delta \alpha = \arctan f'(x+\Delta x) - \arctan f'(x).$$

所以

$$\begin{aligned}
\kappa = \kappa(A) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arctan f'(x+\Delta x) - \arctan f'(x)}{s(x+\Delta x)-s(x)} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\arctan f'(x+\Delta x) - \arctan f'(x)}{\Delta x}\Big/\frac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x}\right) \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arctan f'(x+\Delta x) - \arctan f'(x)}{\Delta x}\Big/\lim_{\Delta x\to 0}\frac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x}.
\end{aligned}$$

上式分子的极限是

$$(\arctan f'(x))' = \frac{f''(x)}{1+f'^2(x)},$$

而分母的极限是

$$s'(x) = \sqrt{1+f'^2(x)}.$$

这个公式将在求曲线的弧长的章节内证明. 从而, 函数 $y = f(x)$ 所表示的曲线 L 在一点处的曲率为

$$\kappa = \kappa(x) = \frac{f''(x)}{\left(1+f'^2(x)\right)^{3/2}}.$$

参数方程表示的曲线的曲率

设有二阶光滑的曲线, 其参数方程为

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

因为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

所以该曲线的曲率为

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3} \Bigg/ \left(1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2\right)^{3/2} \\ &= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\left((\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2\right)^{3/2}}\end{aligned}$$

例 6 圆 $x = R\cos t,\ y = R\sin t\ (t \in [0, 2\pi])$ 的曲率为 $\frac{1}{R}$.

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 中每点都有左导数和右导数. 若 $f(a)=f(b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'_-(\xi)f'_+(\xi)\leqslant 0$.

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有 n 阶导函数, 且对任意 $x\in(a,b)$ 有 $f^{(n)}(x)\neq 0$. 令

$$F(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

则对任意 $x\in(a,b)$ 有 $F(x)\neq 0$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 且满足微分方程

$$f'(x)=e^x f(x).$$

若 $f(0)>0$, 则对任意 $x>0$ 有 $f(x)>0$.