微分方程

变分法与非线性偏微分方程

内容:

1. 变分法的历史与应用
2. 变分法的概念与Euler-Lagrange方程(组)
3. 极小元的存在唯一性定理
4. 非线性方程的解法
5. 非线性特征值问题与Lagrange乘子
6. 山路定理与应用

一、变分法的历史与应用：

- Johann Bernoulli(1667－1748)1696年提出著名的“最速降线”问题
- Johann Bernoulli 、 L ‘Hôpital(1661-1704)、 Jakob Bernoulli(1654-1705)、 Leibniz(1646-1716)和Newton (1642-1727)都得到了解答
- Euler(1707-1783)和Lagrange(1736-1813)给出这一类问题的普遍解法，从而确立了数学的一个新分支:变分法
- 变分法应用广泛：
  - 数学：微分方程,微分几何,最优控制等,如Jeep Problem
  - 物理：光学,量子力学,电磁学等,如Fermat原理
  - 经济：动态最优问题,经济管理等,如Ramsey Model
  - 机器学习,图像处理,电子工程……
- 2019年Abel奖(数学诺贝尔奖)： Karen Uhlenbeck

二、变分法的概念与Euler-Lagrange方程(组)：

- 泛函的定义：设 $\mathbb{M}$ 为函数空间(集合)，则

$$J:\mathbb{M}\to\mathbb{R}\ (u(x)\in\mathbb{M}\mapsto J[u(x)]\in\mathbb{R})$$

称为 $\mathbb{M}$ 上的泛函

- 求泛函的极值问题称为变分问题，其相应的方法称为变分法

Calculus of Variations(Variational Method)

- 若存在 $u_0\in\mathbb{M}$ 使任意与 u_0 相邻近的 $u_0+\delta u_0\in\mathbb{M}$ 满足

$J[u_0]\le(\ge)J[u_0+\delta u_0]$，则称泛函 J 在 u_0 达到极小值(极大值)，

u_0 称为泛函 J 的极小元(极大元)

- 泛函的变分：$\delta J[u]=\dfrac{d}{d\alpha}J[u+\alpha\delta u]\Big|_{\alpha=0}$

光学最小作用原理

例. Fermat原理:光沿光程为极值的路径传播

$$\delta J[y(x)] = \delta \int_a^b n(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx = 0$$

其中 $y = y(x)$ 为光的路径，$n(x, y)$: 介质的折射率

➢变分基本引理: 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 为有界光滑区域。

$$f \in C(\Omega), \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \int_\Omega f v\, dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \text{ in } \Omega$$

证: 反证法. 设 $\exists x_0 \in \Omega, f(x_0) > 0.$

则由连续性知 $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega, f(x) > 0.$

取 $0 < v \in C_0^\infty(B_\varepsilon(x_0)) \subset C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega f v\, dx = \int_{B_\varepsilon(x_0)} f v\, dx > 0,$$ 矛盾!

➢Euler-Lagrange方程：

对Lagrange函数 $L:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R},\ (\nabla u(x),u(x),x)\mapsto L(\nabla u(x),u(x),x)$

考虑泛函 $J[u(x)]=\int_\Omega L(\nabla u(x),u(x),x)dx$，其中光滑函数 $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$

满足一定边界条件，比如 $u|_{\partial\Omega}=\varphi$. 为方便引入如下记号

$$p=(p_1,\cdots,p_N)=\nabla u(x)=(u_{x_1},\cdots,u_{x_N}),z=u(x),$$

$$L(\nabla u(x),u(x),x)=L(p,z,x)=L(p_1,\cdots,p_N,z,x_1,\cdots,x_N),$$

⇨ 若 u 为上述 $J[u(x)]$ 的极值元，则 u 必满足

$$\boxed{-\sum_{i=1}^N(L_{p_i}(\nabla u(x),u(x),x))_{x_i}+L_z(\nabla u(x),u(x),x)=0}$$ Euler-Lagrange方程

略证： $\forall v\in C_0^\infty(\Omega),\forall\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow(u+\alpha v)|_{\partial\Omega}=u|_{\partial\Omega}=\varphi\Rightarrow\delta J[u]=0$(条件及极值定理)

$$0=\delta J[u]=\frac{d}{d\alpha}J[u+\alpha v]\Big|_{\alpha=0}=\int_\Omega[\sum_{i=1}^N L_{p_i}(\nabla u(x),u(x),x)v_{x_i}+L_z(\nabla u(x),u(x),x)v]dx$$

分部积分+变分基本原理 $\Rightarrow$ 结论！

例. Euler-Lagrange方程

1.$L(p,z,x)=\frac{1}{2}|p|^2-zf(x), L_{p_i}=p_i, L_z=-f(x),$

$J[u]=\int_\Omega(\frac{1}{2}|\nabla u|^2-uf)dx, u|_{\partial\Omega}=\varphi$的极值元$u \Rightarrow \begin{cases}\Delta u=-f(x)\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$

2.$N=1, L(p,z,x)=n(x,z)\sqrt{1+p^2}, L_p=\frac{n(x,z)p}{\sqrt{1+p^2}}, L_z=n_z(x,z)\sqrt{1+p^2},$

$J[y(x)]=\int_a^b n(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx, y|_{x=a}=y_1, y|_{x=\mathrm{b}}=y_2$的极值元$y$

$$\Rightarrow \begin{cases}-\frac{d}{dx}[\frac{n(x,y)y'}{\sqrt{1+y'^2}}]+n_y(x,y)\sqrt{1+y'^2}=0\\ y|_{x=a}=y_1, y|_{x=\mathrm{b}}=y_2\end{cases}$$

3.$L(p,z,x)=\frac{1}{2}|p|^2-\int_0^z f(s)ds, L_{p_i}=p_i, L_z=-f(z),$

$J[u]=\int_\Omega(\frac{1}{2}|\nabla u|^2-\int_0^u f(s)ds)dx, u|_{\partial\Omega}=\varphi$的极值元$u \Rightarrow \begin{cases}-\Delta u=f(u)\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$

4. $L(p,z,x)=\sqrt{1+|p|^2}, L_{p_i}=\dfrac{p_i}{\sqrt{1+|p|^2}}, L_z=0,$

$J[u]=\int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}dx, u|_{\partial\Omega}=\varphi$的极值元$u \Rightarrow \begin{cases}\sum_{i=1}^N\left(\dfrac{u_{x_i}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)_{x_i}=0\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$

$N=2$: 极小曲面方程 $\begin{cases}(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$

➢Euler-Lagrange方程组:

当$\vec{z}=(z^1,\cdots,z^m)=\vec{u}=(u^1,\cdots,u^m)\in\mathbb{R}^m, P=(p_i^j)_{m\times N}=\nabla\vec{u}=(u_{x_i}^j)_{m\times N}$,

$L: M^{m\times N}\times\mathbb{R}^m\times\overline{\Omega}\to\mathbb{R}, J[\vec{u}]=\int_\Omega L(\nabla\vec{u}(x),\vec{u}(x),x)dx, \vec{u}|_{\partial\Omega}=\vec{\varphi}$

$$\boxed{-\sum_{i=1}^N\left(L_{p_i^j}(\nabla\vec{u}(x),\vec{u}(x),x)\right)_{x_i}+L_{z^j}(\nabla\vec{u}(x),\vec{u}(x),x)=0,\ j=1,\cdots,m}$$

Euler-Lagrange方程组

例. Euler-Lagrange方程组

$$N=1, m=2: \vec{u}=\begin{pmatrix} y(x) \\ w(x) \end{pmatrix}, x\in\overline{\Omega}=[0,\frac{\pi}{2}], \vec{u}(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}(\frac{\pi}{2})=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$J[\vec{u}]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+w'^2+2yw)dx, \vec{z}=\vec{u}=\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}, \nabla\vec{u}=\begin{pmatrix} u_x^1 \\ u_x^2 \end{pmatrix}=P=\begin{pmatrix} p_1^1 \\ p_1^2 \end{pmatrix},$$

$L(P,\vec{z},x)=(p_1^1)^2+(p_2^1)^2+2z^1z^2$, $J[\vec{u}]$的极值元$\vec{u}$满足

$$\begin{cases} -y''+w=0 \\ -w''+y=0 \end{cases}, \begin{pmatrix} y(0) \\ w(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(\frac{\pi}{2}) \\ w(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

通解 $\begin{cases} y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x \\ w=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x \end{cases} \Rightarrow C_1=C_2=C_3=0, C_4=1$

$$\Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix}=\sin x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

三、极小元的存在唯一性定理：

定理：令常数$1<q<\infty$,容许集$\mathbb{M}=\{u\,|\int_\Omega(|u|^q+|\nabla u|^q)dx<+\infty, u|_{\partial\Omega}=\varphi\}\neq\phi$.

1^0(存在性).若$L(p,z,x)$关于p是凸的且存在常数$\alpha>0,\beta\geq 0$满足

$$L(p,z,x)\geq\alpha|u|^q-\beta,$$

则存在极小元$u_0\in\mathbb{M}$使$J[u_0]=\min\limits_{u\in\mathbb{M}}J[u]=\min\limits_{u\in\mathbb{M}}\int_\Omega L(\nabla u,u,x)dx.$

2^0(唯一性).若存在常数$\theta>0$使$\sum\limits_{i,j=1}^{N}L_{p_ip_j}(p,x)\xi_i\xi_j\geq\theta|\xi|$(一致凸性),

则$J[u]=\int_\Omega L(\nabla u,x)dx$在$\mathbb{M}$中的极小元是唯一的。

（参考L. C. Evans PDEs P448-P449）

很多非线性偏微分方程定解问题的解的存在唯一性！

注： 极小元近似法:选$\mathbb{M}$中一组基$\{\varphi_i(x)\}$, 设极小元n 级近似为$u_0^n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\varphi_i$,

则$J[u_0^n]=J(a_1,\cdots,a_n)$.由极值必要条件$\partial J(a_1,\cdots,a_n)/\partial a_i=0, 1\leq i\leq n$解出$a_i$得$u_0^n$.

四、非线性方程的解法：初等解法和复杂解法

例. 1. $\nabla\cdot[\sigma(u)\nabla u]=0, w=\int_{u_0}^{u}\sigma(\xi)d\xi$(Kirchhoff变换) $\to \Delta w=0$

2. $u_t+uu_x=\beta u_{xx}, u=-2\beta\dfrac{\partial\ln v}{\partial x}$(Cole-Hopf变换) $\to v_t=\lambda v_{xx}$

3. $u_t=(\sigma(u)u_x)_x, u=u(\xi), \xi=\dfrac{x}{\sqrt{t}}$(相似变换) $\to (\sigma(u)u')'+\dfrac{\xi}{2}u'=0$

4. $u_t=(u^n u_x)_x, u=f(\xi), \xi=x+at$(行波变换) $\to af'=(f^n f')'$

$$\to u=f(\xi)=\{n[a(x+at)+c]\}^{\frac{1}{n}}$$

5. $iu_t+u_{xx}+\beta|u|^2u=0, u=e^{i(kx-\mu t)}v(\xi), \xi=x-bt, k=b/2, \mu=k^2-a^2$(平面波变换)

$$\to v_{\xi\xi}-a^2v+\beta v^3=0\to v_\xi^2=a^2v^2-\frac{\beta}{2}v^4\to v(\xi)=a\sqrt{\frac{2}{\beta}}\operatorname{sech} a\xi$$

$$\to u=a\sqrt{\frac{2}{\beta}}e^{i[\frac{1}{2}bx-(\frac{1}{4}b^2-a^2)t]}\operatorname{sech}[a(x-bt)]$$

目前发展比较成熟的复杂解法：

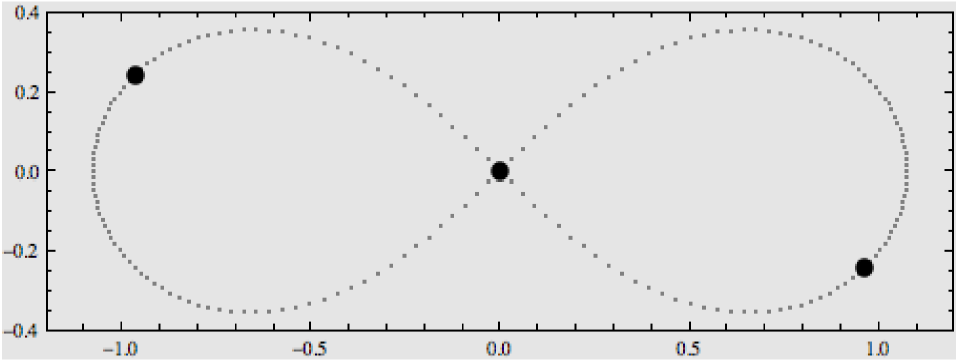
反散射法，Backlund变换法，Darboux变换法，齐次平衡法，Hirota双线法，Tanh函数展开法……

➢用变分法证明三体问题8字平面周期解的存在性：

$$\ddot{q}_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad q_i \in \mathbb{R}^2, i = 1, 2, 3$$

$$U(q) = \sum_{1 \le i < j \le 3} \frac{1}{|q_i - q_j|} \text{(Newton势)}$$

$$m_1 = m_2 = m_3 = T = 1$$



2000，Ann.Math.，Montgomery

2002，中国科学A，张世清

$$\min_{E或A_B} J[q] = \min_{E或A_B} \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{q}(t)|^2 dt + \int_0^1 U(t) dt$$

五、非线性特征值问题与Lagrange乘子：

➢非线性特征值问题：

考虑泛函 $J[u]=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx, u|_{\partial\Omega}=0 \quad (L=\frac{1}{2}|p|^2)$ 在约束条件

$$I[u]=\int_\Omega G(u)dx=0 \quad (G:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ 为光滑函数})$$

下的极小元，此类问题称为泛函的条件极值问题。

设$g(z)=G'(z)$满足$|g(z)|\le C(|z|+1) \Rightarrow |G(z)|\le C(|z|^2+1) \quad (z\in\mathbb{R}, C>0:$常数$)$

令$\mathbb{M}=\{u \mid \int_\Omega (|u|^2+|\nabla u|^2)dx<+\infty, u|_{\partial\Omega}=0, I[u]=0\}\ne\phi$，则存在极小元$u_0\in\mathbb{M}$

和$\lambda\in\mathbb{R}$使$J[u_0]=\min_{u\in\mathbb{M}} J[u], \int_\Omega \nabla u_0\cdot\nabla v dx=\lambda\int_\Omega g(u_0)v dx \quad (\forall v\in C_0^\infty(\Omega))$，即$u_0$为

$$\boxed{\begin{cases} -\Delta u=\lambda g(u) & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}}$$

(非线性特征值问题)的广义解。

称 λ 为对应约束条件 $I[u]=0$ 的Lagrange乘子。(Evans P464)

对一般情形，类比多元函数的条件极值求法，有

设$J_i[u]\ (0\le i\le N_0)$为$\mathbb{M}$上的连续可微泛函, u_0为泛函$J_0[u]$ 在约束条件 $G=\{u\mid J_i[u]=\alpha_i, 1\le i\le k; J_i[u]\le\alpha_i, k+1\le i\le N_0\}\ (\alpha_i\in\mathbb{R}:$给定$)$下的极值元，则存在不全为零的$\lambda_i\in\mathbb{R}\ (0\le i\le N_0)$使

$$\sum_{i=0}^{N_0}\lambda_i J_i'[u_0]=0, \text{其中}\ \delta J_i[u_0]=\frac{d}{d\alpha}J_i[u_0+\alpha\delta u_0]\Big|_{\alpha=0}=J_i'[u_0]\delta u_0.$$

(化为无条件极值问题)

例. 等周问题： $J_1[y(x)]=\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=l>a$(等周条件), $y(0)=y(a)=0.$

求$J_0[y(x)]=\int_0^a y(x)\mathrm{d}x$的极大元和极大值(面积)。

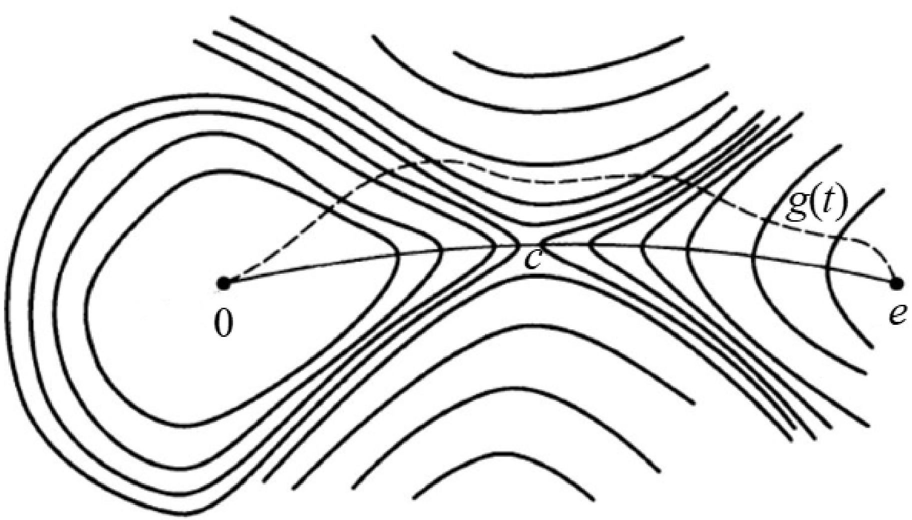
略解： **对极大元** y_0 **和** $\forall v\in C_0^\infty(0,a)$, **计算** $\frac{d}{d\alpha}J_i[y_0+\alpha v]\Big|_{\alpha=0}\Rightarrow J_i'[y_0], i=0,1.$

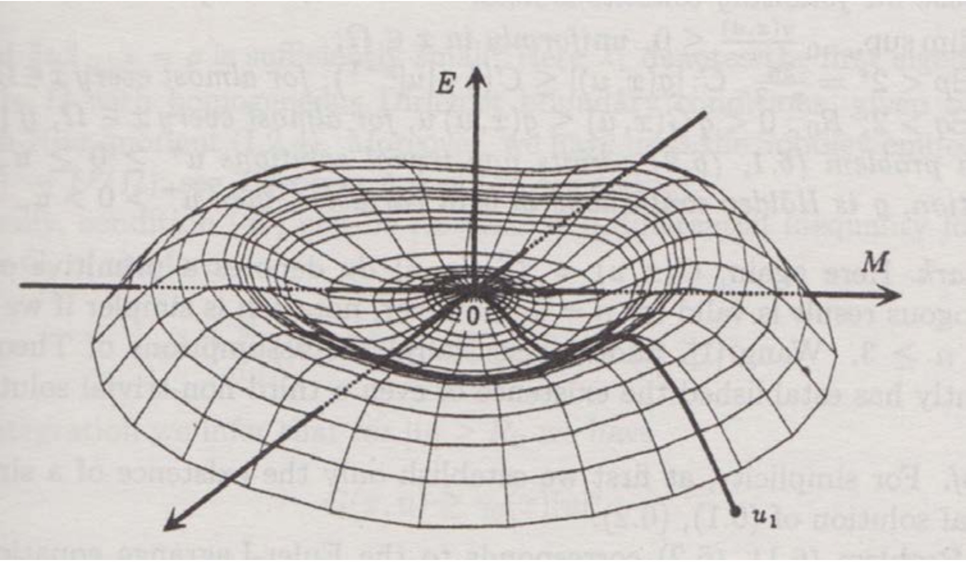
讨论 $\lambda_0 J_0'[y_0]+\lambda_1 J_1'[y_0]=0$ **并利用分部积分和变分基本引理，有**

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\left(y_0'/\sqrt{1+y_0'^2}\right)'+1=0+\text{边界条件}\Rightarrow \text{结论：极大元为圆！}$$

六、山路定理与应用：（参考张恭庆《变分法讲义》）

山路定理：设E为实Banach空间，泛函$J\in C^1(E,\mathbb{R})$满足Palais-Smale条件（即任何满足$J[u_k]$有界及$J'[u_k]\to 0$的序列$\{u_k\}_{k\ge 1}\subset E$ 均有收敛子列）以及$(a)J[0]=0,\exists r,\alpha>0$满足$J[u]\ge\alpha\quad(\forall u,\|u\|=r);(b)\exists e\in E,\|e\|>r$满足$J[e]\le 0.$令$\Gamma=\{g\in C([0,1],E)\mid g(0)=0,g(1)=e\},$则$c=\inf\limits_{g\in\Gamma}\max\limits_{t\in[0,1]}J[g(t)]$是$J$的临界值（鞍点）。





例. 变分法和山路定理的应用：

1. 当$1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$, $\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda \mathrm{u} \ \text{ in } \ \Omega \subset \mathbb{R}^N, N \ge 3 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$

对某些λ存在正的解！ (1983，CPAM，Brezis&Nirenberg)

2. $-(a + b\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2\, dx)\Delta u + V(x)u = \mu u + |u|^{p-1} u \ \text{ in } \ \mathbb{R}^3,$

$a, b, \mu > 0, 3 < p < 5,\ \ V(x) \to +\infty (|x| \to +\infty).$

存在无穷多个非平凡解！(数学物理学报，2019,39A(2))

3. $-\Delta u = g(u) - \mu u \ \text{ in } \ \mathbb{R}^N (N \ge 2), \|u\|^2 = m.$

在不同情形下至少存在一个，有限多或无穷多个解！

(2019，Adv.Nonlinear Stud.，Hirata & Tanaka)