第 3 章 一元函数的微分学

§3.1 导数

3.1.1 导数的定义

1° 曲线的切线

首先要明确什么是“曲线上一点的切线”. 在初等几何中, 通常将只与圆周有一个交点的直线, 定义为圆的切线. 然而, 对于一般曲线来说, 这种定义方式就不适合了. 例如对于抛物线 (图 3.1), 显然交于抛物线一点 A 的直线有多条, 其中有的明显就不是切线. 而对于图 3.2, 直线交图示曲线于两点, 显然在交点 A 处, 直线应该是“切线”. 对于图 3.3 中的曲线在 A 点有一个尖点. 在尖点处, 与曲线相交一点的切线却有多条.

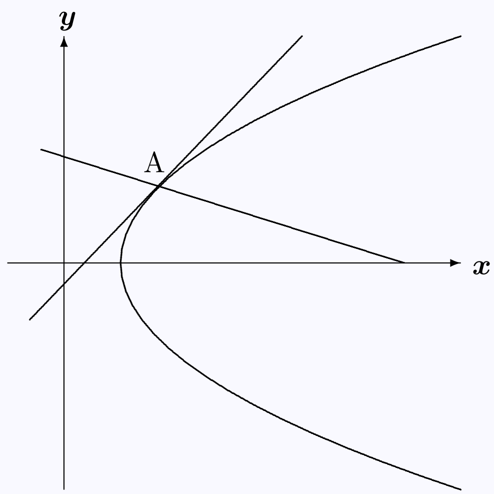

图 3.1

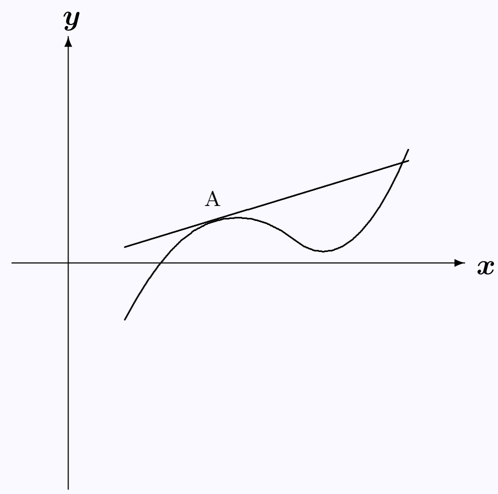

图 3.2

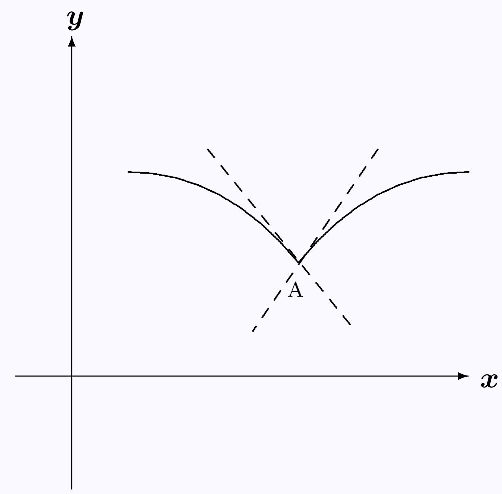

图 3.3

那么, 如何定义一般曲线的切线呢? 一个可行的途径是从割线开始, 连接曲线 C 上两点 M_0 和 M, 作一条割线 L (图 3.4) , 当点 M 沿着曲线 C 滑动到 M_0 时, 如果 L 有一个 "极限位置" , 我们便将这个 "极限位置" 的直线, 定义为曲线在一点的 M_0 的切线.

平面上过一点的直线可由直线与 x 轴的正向的夹角 α 来表征. 这个夹角 α 是指正 x 轴绕原点沿逆时针方向转动, 并在首次变得与该直线平行时所扫过的角度, 因此满足 $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. 角度的正切 $\tan\alpha$ 称为直线的斜率.

设 $\alpha(M)$ 是割线 M_0M 与 x 轴的夹角, 如果

$$\lim_{M\to M_0}\alpha(M)=\alpha$$

则极限值 α 应该是 M_0 点处切线与 x 轴的夹角. 现在假设曲线 C 由函数 $y=f(x)$ 表示 (或者说曲线是函数 $f(x)$ 的图象), 点 M_0 的坐标是

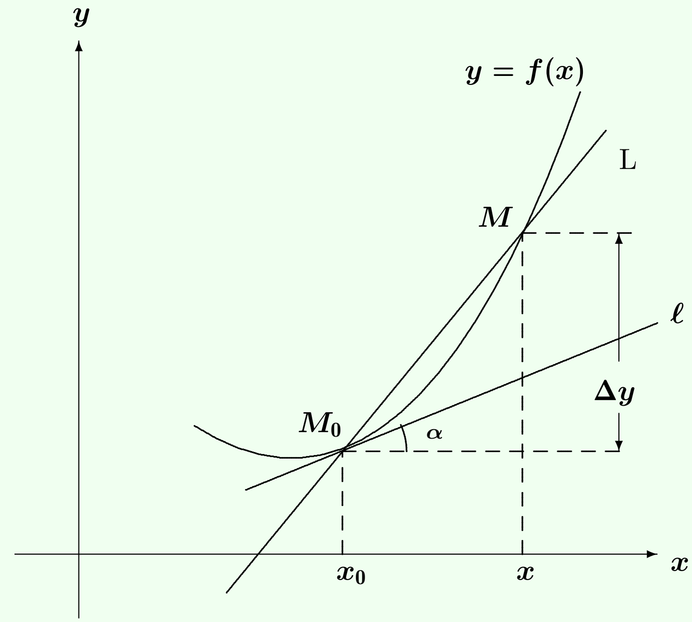

图 3.4

$M_0(x_0, f(x_0))$, 动点 M 的坐标是 $M(x, f(x))$, 所以割线的斜率是

$$\tan\alpha(M)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

故上述求极限的过程就是

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\tan\alpha(M)=\tan\alpha$$

如果左边的极限存在的话, 该极限就是切线的斜率.

2° 直线运动质点的瞬间速度

考察沿直线作变速运动的一个质点. 设质点所运动的距离与时间之间的关系为 $S = S(t)$. 因此在从 t_0 到 t 这段时间间隔内, 质点运动的平均速度是

$$\bar{v} = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

显然, 这个平均速度并不能完全反映质点在 t_0 到 t 这段时间内更具体的运动规律. 如果要了解质点在某一时刻运动的变化规律（即速度）, 只要上述平均的时间间隔越来越短. 特别, 如果极限

$$\lim_{t \to t_0} \bar{v} = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

存在, 则称为在时刻 t_0 时, 质点运动的瞬时速度.

无论是几何上的从割线到切线, 还是物理中的从平均速度到瞬时速度, 极限的形式都是一样的. 抽象地说, 都是刻划函数在一点的变化速率. 或者说是在一点函数的变化量与自变量的变化量之间的比率. 我们将其抽象出来, 就有了关于导数的定义.

定义 1 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的邻域中有定义, 如果极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在, 就称它为 $y=f(x)$ 在 x_0 的导数（或微商）, 记成 $f'(x_0)$, $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$ 或 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}$, 并称 $f(x)$ 在 x_0 可导.

从上面的第一个例子可知, 函数的导数的几何意义, 就是曲线在一点的切线的斜率, 而从第二个例子可知, 导数的物理意义就是在一个时刻的瞬时速度.

如果函数在一点的导数不存在, 还包含了一种可能, 就是极限等于无穷大. 对于这种情况的几何解释是, 函数的图象在一点的切线的斜率是无穷大, 也就是切线平行于 y 轴. 所以我们一般不考虑平行于 y 轴的切线.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的右边近旁有定义, 如果 $\Delta x > 0$, 且

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称它为 $f(x)$ 在 x_0 的右导数, 记成 $f'_+(x_0)$, 并称 $f(x)$ 在 x_0 右可导. 类似可定义 $y = f(x)$ 在 x_0 的左可导和它的左导数 $f'_-(x_0)$.

显然, $f(x)$ 在 x_0 可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 左、右可导, 并有

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

定义 3 如果 $y = f(x)$ 在区间 I 的每一点都可导, 则称 $f(x)$ 在 I 上可导, $f'(x)$ 是 I 上一个函数称为 $f(x)$ 的导函数. 如果区间 I 包含有端点, 则在该端点处, $f(x)$ 只需有相应的单侧可导性.

$y = f(x)$ 的导函数, 也可记成 y', $\frac{dy}{dx}$ 等.

例 1 设 $y=c$ (常数), 求 y'.

解 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$

例 2 设 $y=x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty)$, 其中 n 是自然数. 求 y'.

解 对于任意实数 x, 由二项式定理得

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2+\cdots+(\Delta x)^n$$

故

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1}.$$

即 $y=x^n$ 的导函数是 $y'=nx^{n-1}$, 导函数的定义域也是 $(-\infty,+\infty)$. 特别, 当 $n=1$ 时, 函数 $y=x$ 的导函数为常值函数 $y=1$, 即 $y=x$ 在每一点的切线的斜率都是 1.

|◄ ►| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

例 3 求函数 $f(x) = e^x$ 的导函数.

解 因为

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

所以 $(e^x)' = e^x$.

例 4 求对数函数 $y = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$ 的导函数, 这里 $a > 0$, 且 $a \neq 1$.

解 对于任意的 $x > 0$, 有 $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, 且

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\ln a}\frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

利用极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

得

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

特别当 $a = e$ 时, 上面的结果为

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

由此可见, 对于以 e 为底的自然对数的导数特别简单.

例 5 求正弦函数和余弦函数的导函数.

解 记 $y=\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$. 则对任意一点 x,

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

由 $\cos x$ 的连续性以及基本极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x$$

即 $(\sin x)'=\cos x$.

类似可得 $(\cos x)'=-\sin x$.

例 6 求下列分段函数的导函数

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\geqslant 0 \\ x^2, & x<0 \end{cases}$$

解 函数 $f(x)$ 由函数 $y=x^3$ $(x\geqslant 0)$ 以及 $y=x^2$ $(x<0)$ 在 $x=0$ 处拼接而成. 当 $x>0$ 时, $f'(x)=3x^2$, 当 $x<0$ 时, $f'(x)=2x$, 当 $x=0$ 时,

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^3}{\Delta x}=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=0$$

所以

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ 2x, & x<0 \end{cases}$$

定理 1 设 $f(x)$ 在 x_0 可导, 则 $f(x)$ 在 x_0 连续. 换句话说, 如果函数在一点 x_0 不连续, 则显然在 x_0 处不可导.

证明 由已知条件, 极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

存在. 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= f'(x_0)\cdot 0=0.\end{aligned}$$

由此得

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

即, $f(x)$ 在 x_0 连续.

例 7 函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续, 但是在 $x=0$ 不可导.

证明 当 $x=0$时

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1,$$
$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1.$$

所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导. 注意, 从图3.5 可以看出, 函数在 $x=0$ 有一个尖点, 即在 $x=0$ 不光滑, 所以没有切线.

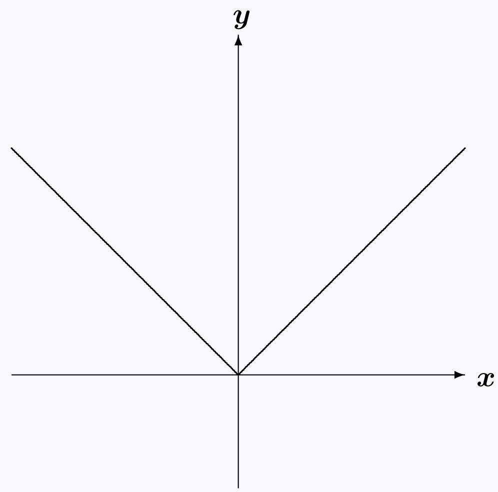

图 3.5

3.1.2 函数的四则运算

定理 2 (**函数的和差积商的导数**) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导, 则 $f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$ 及 $\frac{f(x)}{g(x)}$ (当 $g(x) \neq 0$ 时) 皆可导, 并有

1° $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;

2° $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

3° $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

证明 关于 1°, 直接由导数的定义和极限的运算即可证得. 关于 2°, 利用下列恒等式

$$
\begin{aligned}
& f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) \\
&= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)
\end{aligned}
$$

得

$$(f(x)g(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

关于 3°, 首先注意到, 函数 $g(x)$ 在点 x 处可导, 所以在这一点连续. 因此在 x 处, 条件 $g(x)\neq 0$ 意味着在 x 的附近 $g(x)$ 也不为零. 所以当自变量的增量 Δx 非常小时, $g(x+\Delta x)\neq 0$, 这时有

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{g(x+\Delta x)}-\frac{1}{g(x)}\right)\\ &= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{g(x)g(x+\Delta x)}\\ &= -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\ &= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

再由 2° 即得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)'\\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.\end{aligned}$$

例 8 设 $f(x)$ 可导, 则 $(cf(x))' = cf'(x)$, 其中 c 是常数. 这个结论是显然的.

例 9 求 $f(x) = x^2(\sin x + \cos x)$ 的导数.

解

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2)'(\sin x + \cos x) + x^2(\sin x + \cos x)' \\
&= 2x(\sin x + \cos x) + x^2(\cos x - \sin x)
\end{aligned}
$$

例 10 求函数 $\tan x$ 和 $\cot x$的导数.

解

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.
\end{aligned}
$$

类似可得

$$
(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.
$$

3.1.3 复合函数的求导法则

定理 3 (复合函数的导数) 设函数 $y = g(x)$ 定义在区间 I 上, 函数 $z = f(y)$ 定义在区间 J 上, 且 $g(I) \subset J$. 如果 $g(x)$ 在点 $x \in I$ 处可导, 而 $f(y)$ 在点 $y = g(x)$ 可导, 则复合函数 $f \circ g$ 在点 x 处可导, 且有:

$$(f \circ g)'(x) = (f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$

证明 我们只考虑任意一点 x_0 和 $g(x_0)$ 都不是所在区间的端点的情况 (对于出现端点的情况, 只需在下面的证明中做一些简单修改). 考察

$$\begin{aligned}\frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \\ &= \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

在上式中, 只有当 $g(x)-g(x_0)\neq 0$ 时才有意义. 但是当 $g(x)-g(x_0)=0$ 时, 上式右边的第一个分式的分子也是零 $f(g(x))-f(g(x_0))=0$, 所以我们约定这个分式为 $f'(g(x_0))$ 不但是合理的, 而且上式的两端都等于零. 因此仍然成立. 根据这样的分析, 上式对任何情况都是成立的. 令 $x\to x_0$, 由于 $g(x)$ 连续, 所以 $g(x)\to g(x_0)$. 因此在上式中取极限, 就有

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_0}\frac{f\circ g(x)-f\circ g(x_0)}{x-x_0}\\
=&\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}\\
=&\lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\
=&f'(g(x_0))g'(x_0)
\end{aligned}$$

复合函数的求导法则通常称为“链式法则”. 在实际使用中, 定理 3 也可以表示成:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

也就是说, 如果 z 是变量 x 的复合函数, 中间变量为 y, 则为了求 z 对 x 的微商 $\frac{dz}{dx}$, 可先求 z 对中间变量 y 的微商 $\frac{dz}{dy}$, 再求中间变量 y 对 x 的微商 $\frac{dy}{dx}$, 将所得结果相乘就得到 $\frac{dz}{dx}$.

多个函数复合也有相应的“链式法则”.

例 11 求 $z=\sin(\cos x^2)$ 的导数.

解 该函数是 $z=\sin u$, $u=\cos v$, $v=x^2$ 等三个函数复合而成的. 所以

$$(\sin(\cos x^2))'=(\sin u)'(\cos v)'(x^2)'=-2x\cos u\sin v=-2x\cos(\cos x^2)\sin x^2.$$

例 12 求 $z=(1-x)^9$ 的导数.

解 将 $(1-x)^9$ 用二项式定理展开, 应用 $(x^n)'=nx^{n-1}$ 以及导数的四则运算, 可以求出该函数的导数. 但是如果将该函数看成是 $z=y^9$ 和 $y=1-x$ 的复合, 则运算更为简单

$$((1-x)^9)'=(y^9)'(1-x)'=-9y^8=-9(1-x)^8.$$

例 13 求 $z=\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$ 的导数.

解 该函数可以看成是 $z=y^3$ 和 $y=\frac{1+x}{1-x}$ 的复合函数. 所以

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3\right]' &= (y^3)'\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \\ &= 3y^2\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= 3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\cdot\frac{2}{(1-x)^2} \\ &= \frac{6(1+x)^2}{(1-x)^4}.\end{aligned}$$

例 14 设 $f(x)$ 在点 x 处可导, 且 $f(x) \neq 0$, 则函数 $\ln|f|$ 在点 x 可导, 且

$$(\ln|f|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

特别有

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

证明 由于 $f(x)$ 在点 x 可导, 所以连续, 因此存在一个含 x 的区间 $(x-\delta,\ x+\delta)$, 使得函数 f 在其上的取值保持同号.

当在 $(x-\delta,\ x+\delta)$ 上取正号时, $|f| = f$, 即 $\ln|f| = \ln f$, 它是函数 $z = \ln y,\quad y = f(x)$ 的复合函数.

因此

$$(\ln|f|)' = (\ln y)' \cdot f'(x) = \frac{1}{y} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

当函数在 $(x-\delta,\ x+\delta)$ 上取负号时, $|f| = -f$, 所以 $\ln|f| = \ln(-f)$,

它是函数 $z=\ln y$, $y=-f(x)$ 的复合函数, 此时

$$(\ln|f|)'=(\ln y)'\cdot(-f'(x))=\frac{1}{y}\cdot(-f'(x))=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

例 15 设 $y=x^\alpha$, $(x>0)$, 这里 α 是任意实数. 证明 $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

证明 当 α 是自然数（包括 $\alpha=0$）时, 我们已经根据函数导数的定义给予了证明. 当 $\alpha\neq 0$ 时（当然也包括正的自然数）, $x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$, 它是函数 $y=e^u$ 和函数 $u=\alpha\ln x$ 的复合函数. 所以

$$\begin{aligned}\frac{dx^\alpha}{dx}&=\frac{de^u}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}\\&=x^\alpha\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}\\&=\alpha x^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

例 16 设 $u(x), v(x)$ 可导, 且 $v(x) > 0$, 则函数 $y = v(x)^{u(x)}$ 可导, 其导数是

$$(v(x)^{u(x)})' = v(x)^{u(x)} \left(u'(x) \ln v(x) + \frac{u(x)v'(x)}{v(x)} \right).$$

证明 因为 $y = v(x)^{u(x)} = e^{u(x)\ln v(x)}$ 它是函数 $y = e^w$, $w = u(x)\ln v(x)$ 的复合, 所以 y 在 x 处的导数是

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{u(x)\ln v(x)}(u \ln v)'(x) \\ &= v(x)^{u(x)} \left(u'(x) \ln v(x) + \frac{u(x)v'(x)}{v(x)} \right). \end{aligned}$$

3.1.4 反函数的求导法则

定理 4 (**反函数的导数**) 设 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续, 且有反函数 f^{-1}, 如果 f 在点 x 处可导, 且 $f'(x)\neq 0$. 则定义在区间 $J=f(I)$ 的反函数 f^{-1} 在点 $y=f(x)$ 也可导, 且

$$(f^{-1})'(y)f'(x)=1$$

或写成

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

证明 我们只对 x 以及 y 不是区间端点的情况进行证明. 对于端点, 只需将下列证明作一点修改即可.

从定义出发, 要证明反函数 $f^{-1}(y)$ 的可导性, 就看

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{h}$$

的极限是否存在.

因为 y 不是区间 J 的端点, 所以当 h 很小时, $y+h\in J=f(I)$. 又因为 f 是严格单调的, 所以必存在唯一的 $u=u(h)\in I$, 使得 $y+h=f(x+u)$, 而且, 一方面严格单调性保证了当 $h\neq 0$ 时, $u\neq 0$. 另一方面 $f^{-1}(y)$ 的连续性保证了当 $h\to 0$ 时,

$$\lim_{h\to 0}(x+u)=\lim_{h\to 0}f^{-1}(y+h)=f^{-1}(y)=x,$$

即当 $h\to 0$ 时, $u\to 0$.

于是在

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{h} &= \frac{f^{-1}(f(x+u))-f^{-1}(y)}{h}\\ &= \frac{u}{f(x+u)-f(x)}\\ &= \frac{1}{\frac{f(x+u)-f(x)}{u}}\end{aligned}$$

中, 当 $h\to 0$时, 上式最右端的比式的极限是 $\frac{1}{f'(x)}$, 说明左端在 $h\to 0$ 时的极限存在. 即

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{h}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

例 17 求反三角函数的导函数.

解 $y = \arcsin x$ 是 $x = \sin y$, $|y| < \frac{\pi}{2}$ 的反函数, 而 $x = \sin y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内可导, 且 $(\sin y)' = \cos y \neq 0$, 所以在对应的区间 $(-1,1)$ 内, $y = \arcsin x$ 可导, 且

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

类似地, 可得

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1).$$

现在考虑函数 $y = \arctan x$, 它是 $x = \tan y$ 的反函数, 因为在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内, $(\tan y)' = \sec^2 y \neq 0$, 所以

$$\begin{aligned}(\arctan x)' &= \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < +\infty.\end{aligned}$$

类似有

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < +\infty.$$

3.1.5 基本初等函数的导数

$(c)' = 0$ (c为常数);

$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;

$(\tan x)' = \sec^2 x$; $(\cot x)' = -\csc^2 x$;

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

$(e^x)' = e^x$; $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

$(a^x)' = a^x \ln a$; $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;

$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$;

3.1.6 高阶导数

设 $y=f(x)$ 在区间 I 可导, 它的导函数 $y'=f'(x)$ 也称为函数 f 的一阶导数(微商). $y'=f'(x)$ 作为 x 的函数, 仍然可以研究它在一点的导数.

如果 $f'(x)$ 在一点 x_0 可导, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 二阶可导. 其导数值 $(f'(x))'|_{x=x_0}$ 通常记为

$$f''(x_0),\quad y''(x_0),\quad \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$$

称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的二阶导数.

有时候在不引起混淆时也记

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0}=\frac{d^2f(x_0)}{dx^2},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}=\frac{d^2y(x_0)}{dx^2}$$

类似可以讨论函数 $y=f(x)$ 在一点 x_0 的三阶、四阶 $\cdots$ 导数 $f'''(x_0),\ f^{(4)}(x_0),\ \cdots$ 以及三阶、四阶 $\cdots$ 导函数 $f'''(x),\ f^{(4)}(x),\ \cdots$.

一般地, 对 $n \geqslant 1$, 如果函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数 $f^{(n-1)}(x)$ 在点 x_0 可导, 则称 f 在 x_0 处 n 阶可导, 记为

$$y^{(n)}(x_0),\ f^{(n)}(x_0),\ \left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x=x_0},\quad \text{或}\quad \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x=x_0}$$

称为函数 f 在一点 x_0 处的 n 阶导数.

如果 $f^{(n-1)}(x)$ 的导函数 $(f^{(n-1)}(x))'$ 存在, 则称其为函数 f 的 n 阶导(函)数, 记作

$$y^{(n)}(x),\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^n y}{dx^n}(x),\quad \text{或}\quad \frac{d^n f}{dx^n}(x).$$

显然有

$$\frac{d^n f}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right).$$

一个函数的导函数不一定可导, 甚至不必连续. 例如, 函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在任意点可导, 且

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

显然 $f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续.

因此对函数求导的阶要求越高, 对函数的限制越多. 以 $f(x)=|x|$ 这个例子看, 该函数在 $x=0$ 不可导, 函数的图象在此有一个尖点, 不光滑. 因此一个函数可导, 通常形象地称函数光滑. 函数具有越高的高阶导数, 则函数就越 "光滑". 因此, 一般而言, 函数的性态也就越好.

定理 5 (Leibniz 公式) 设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都有 n 阶导数, 则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}. \tag{1}$$

证明 对 n 用归纳法. $n=1$ 时是显然的, 设 (1) 对 n 成立, 则

$$\begin{aligned}
(uv)^{(n+1)} &= \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k u^{(n-k+1)} v^{(k)} + C_n^k u^{(n-k)} v^{(k+1)}\right) \\
&= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} u^{(n+1-k)} v^{(k)} + u v^{(n+1)} \\
&= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) u^{(n+1-k)} v^{(k)} + u v^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} v^{(k)},
\end{aligned}$$

即, (1) 对 $n+1$ 成立. 由归纳法可知, 定理成立.

例 18 求 $f(x) = e^{ax}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 其中 a 是常数.

解 $(e^{ax})' = ae^{ax}$, $(e^{ax})'' = (ae^{ax})' = a^2e^{ax}$, $\cdots$, 一般有

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

特别

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

例 19 求 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 n 阶导函数, $x \in (-\infty, +\infty)$.

解 用数学归纳法易证

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, \cdots$$

例 20 求 $(1+x)^\alpha$, $x\in(-1,+\infty)$ 的 n 阶导函数.

解 由幂函数求导法则易知

$$((1+x)^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\quad n=1,2,\cdots$$

特别

$$\left.((1+x)^\alpha)^{(n)}\right|_{x=0}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1),\quad n=1,2,\cdots$$

例 21 求 $f(x)=\ln(1+x)$, $x\in(-1,+\infty)$ 的 n 阶导函数.

解 用归纳法可证

$$\frac{d^n\ln(1+x)}{dx^n}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\quad n=1,2,\cdots$$

因此

$$\left.\frac{d^n\ln(1+x)}{dx^n}\right|_{x=0}=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

例 22 设 $y = x^2 e^{ax}$, 求 $y^{(n)}(x)$, a 是常数.

解 由 Leibniz 公式得到

$$
\begin{aligned}
y^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)} (e^{ax})^{(n-k)} \\
&= x^2 (e^{ax})^{(n)} + 2nx (e^{ax})^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 (e^{ax})^{(n-2)} \\
&= a^n x^2 e^{ax} + 2n a^{n-1} x e^{ax} + n(n-1) a^{n-2} e^{ax} \\
&= a^{n-2} \big(a^2 + 2nax + n(n-1) \big) e^{ax}.
\end{aligned}
$$

例 23 设 $y=\arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$.

解 由 $y'=\frac{1}{1+x^2}$ 可知, 函数 $\arctan x$ 有任意阶导数, 且

$$(1+x^2)y'=1.$$

在上式两边求 $n-1$ 阶导数, 并由 Leibniz 公式得到

$$(1+x^2)y^{(n)}+2(n-1)xy^{(n-1)}+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}=0.$$

将 $x=0$ 代入就得到递推公式

$$y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0).$$

由于 $y(0)=0$, $y'(0)=1$. 就得到

$$y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!,\quad y^{(2k)}(0)=0,\quad (k=0,1,2\cdots).$$

3.1.7 向量值函数的导数

所谓向量值函数, 就是一个从实数集合 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^k$ 的一个映射

$$\vec{f}:\ [a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^k,\quad \vec{f}:\ t\longmapsto\vec{f}(t)$$

其中简单地讲, $\mathbb{R}^k$ 是所有 $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_k),\ \ x_i\in\mathbb{R}$ 形式的向量所构成的空间, 称为 k 维欧氏空间. 因此如果写成分量形式, 则

$$\vec{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_k(t))$$

即每个分量 $f_i=f_i(t)$ 都是 t 的函数.

$\mathbb{R}^k$ 是一个度量空间, 其度量是

$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_k-y_k)^2}$$

根据这个度量, 可以定义向量值函数的连续性, 只要将连续函数的定义中的不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 换成 $|\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)|<\varepsilon$ 即可, 这里的 "绝对值" 是上面关于向量的度量. 显然, 向量值函数 $\vec{f}(t)$ 连续的充分必要条件是它的每

一个分量 $f_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant k$ 连续.

我们也可用同样的方法定义 $\vec{f}(t)$ 的导数, 即

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t} = \vec{f}'(t)$$

如果上式左边的极限存在. 不难看出, 向量值函数 $\vec{f}(t)$ 可导的充要条件是它的每一个分量 $f_1(t), \cdots, f_k(t)$ 均可导, 而且

$$\vec{f}'(t) = (f_1'(t), \cdots, f_k'(t)).$$

$\mathbb{R}^k$ 中向量具有加法、数乘、内积, 特别对于 $k=3$, 还有我们熟悉的外积. 因此我们有下列性质

1° $(\vec{f}(t) \pm \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \pm \vec{g}'(t)$.

2° $(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)$.

3° 对于$k=3$, 有 $(\vec{f}(t) \times \vec{g}(t))' = \vec{f}'(t) \times \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \times \vec{g}'(t)$.