# 一、紧性相关概念及命题

Def 1.1 列紧：任意无限子集有聚点

Def 1.2 紧致：任意开覆盖有有限子覆盖.（最常用，空间紧都指紧致）

Def 1.3 可数紧：任意可数开覆盖有有限子覆盖（紧致的弱化版）

Fact.

以上性质是闭遗传的

即，对于每个闭子集 $A\subset X$，子空间拓扑下，保持以上性质

Pf：验证列紧，紧致

Prop 1.1（有限交性质）

紧致 $\Leftrightarrow$ $\forall \{U_\alpha\}$ 开，$X\subset \bigcup_\alpha U_\alpha$，$\exists \{U_i\}_{i=1}^n \subset \{U_\alpha\}$，$X\subset \bigcup_{i=1}^n U_i$

$\Leftrightarrow$ $\forall \{F_\alpha^c\}$ $F_\alpha$ 闭，$X\subset \bigcup_\alpha F_\alpha^c = (\bigcap_\alpha F_\alpha)^c$，$\exists \{F_i^c\}_{i=1}^n$

$X\subset \bigcup_{i=1}^n F_i^c$

$\Leftrightarrow$ $\forall \{F_\alpha\}$，闭，$\bigcap_\alpha F_\alpha = \phi$，$\exists \{F_i\}_{i=1}^n$，$\bigcap_{i=1}^n F_i = \phi$

$\Leftrightarrow$ $\forall \{F_\alpha\}$，闭，若任意有限个的交非空，则 $\bigcap_\alpha F_\alpha \neq \phi$

Cor 1.2 紧集内一列闭子集 $F_i$，$\forall i, F_i\neq\phi$，$F_1\supset F_2\supset\cdots$

则 $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \phi$ （实际上是可数紧的推论，紧致的条件太强）

Prop 1.3 紧致性在连续满射下保持，即 $X$ 满足 $\Rightarrow f(X)$ 满足

Cor 1.4 $Id: (X,\mathcal{T}_1)\to(X,\mathcal{T}_2)$ cts（i.e. $\mathcal{T}_2\subset\mathcal{T}_1$）

$(X,\mathcal{T}_1)$ cpt $\Rightarrow$ $(X,\mathcal{T}_2)$ cpt.

二、紧致与分离

Def 2.1

$(X,\mathcal{T})$ 称为 Hausdorff 空间（或 T2）

若 $\forall x_1,x_2\in X$，$\exists\, U_1,U_2\in\mathcal{T}$，$U_1\ni x_1$，$U_2\ni x_2$，$U_1\cap U_2=\phi$

Prop 2.1　T2 在连续单射的逆下保持，即 $f: X\to Y$ cts，injective

$Y$ T2 $\Rightarrow$ $X$ T2

Cor 2.2.　$\mathcal{T}_2\supset\mathcal{T}_1$ $\Rightarrow$ $Id:(X,\mathcal{T}_2)\to(X,\mathcal{T}_1)$ cts

$(X,\mathcal{T}_1)$ T2 $\Rightarrow$ $(X,\mathcal{T}_2)$ T2

Prop 2.3　T2 空间中，紧集一定是闭集.

Cor 2.4　$f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ cts，$X$ cpt，$Y$ T2

则 $f$ 是闭映射，即 $\forall F\subset X$，闭 $\Rightarrow$ $f(F)\subset Y$ 闭

Cor 2.5　$f:(X,\mathcal{T}_X)\to(Y,\mathcal{T}_Y)$ cts，bijective，$X$ cpt，$Y$ T2

则 $f$ 是同胚.

紧致实际上是说开集"很少"，而 T2 本质上是开集"充分多"

这个命题很好说明了这种性质：

Prop 2.6　$(X,\mathcal{T})$ cpt，T2　$\mathcal{T}_1\subsetneq\mathcal{T}\subsetneq\mathcal{T}_2$，则

$(X,\mathcal{T}_1)$ not T2，$(X,\mathcal{T}_2)$ not compact.

Pf：　$Id:(X,\mathcal{T})\to(X,\mathcal{T}_1)$，连续，

若 $(X,\mathcal{T}_1)$ T2，$Id$ 是闭映射，同胚

$Id:(X,\mathcal{T}_2)\to(X,\mathcal{T})$ 连续

若 $(X,\mathcal{T}_2)$ cpt，$Id$ 是闭映射，同胚

## 三、度量空间的紧性.

**Thm 3.1** 开头提到的三种紧性在度量空间中等价

（亦可参见课本证明）

(1) 紧致 $\Rightarrow$ 可数紧显然

(2) 可数紧 $\Rightarrow$ 列紧

为说明无限子集有聚点，只用证明，其中的可数集有聚点

$S=\{x_1, x_2 \cdots\}$，若 $S'=\phi$，则 $S$ 闭，

$\forall x_i$，$\exists \varepsilon_i>0$，$B(x_i, \varepsilon_i) \cap S=\{x_i\}$，

$\{B(x_i,\varepsilon_i)\}$ 为 $S$ 的可数覆盖但无有限子覆盖，矛盾！

(3) 列紧 $\Rightarrow$ 紧致.

Prop 3.2 列紧 $\Rightarrow$ Lebesgue property

$\downarrow$

$\forall$ 开覆盖 $\{U_\alpha\}$，$\exists\, a>0$，$\forall x\in X$，$\exists\, U_\alpha$，$B(x,a)\subset U_\alpha$

Pf. 否则，$\forall n>0$，$\exists\, x_n\in X$，s.t. $B(x_n,\frac{1}{n})\not\subset U_\alpha$，$\forall \alpha$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有聚点 $x\in X$，$\exists\, x_{n_k}\to x$

设 $x\in U_\beta$，则 $\exists\, \varepsilon>0$，$B(x,\varepsilon)\subset U_\beta$

$\exists\, K$，$\forall k>K$，$d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}$，且 $\frac{1}{n_k}<\frac{\varepsilon}{2}$

故 $B(x_{n_k},\frac{1}{n_k})\subset B(x,\varepsilon)\subset U_\beta$，矛盾.

Def 3.1 ($\varepsilon$-net)

$(X,d)$，点集 $S\subset X$ 称为 $\varepsilon$-网，若 $\forall x\in X$，$\exists\, s\in S$，$d(x,s)<\varepsilon$.

Prop 3.3 列紧 $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0$，$\exists$ 有限 $\varepsilon$-net

Pf. 若否，$\exists\, \varepsilon_0$，$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，s.t. $\forall n$，$d(x_{n+1},x_i)>\varepsilon_0$，$\forall i\in\{1,\cdots,n\}$

$\{x_n\}$ 有聚点 $x_0$，$\exists\, x_{n_k}\to x_0$，而 $d(x_{n_{k+1}},x_{n_k})>\varepsilon_0$，矛盾！

Lebesgue property + finite $\varepsilon$-net $\Rightarrow$ compact !

**Thm 3.2** 度量空间中，列紧 $\Leftrightarrow$ 有限 $\varepsilon$-net + 完备.

Pf. "$\Rightarrow$" 列紧 $\Rightarrow$ Cauchy 列收敛 $\Rightarrow$ 完备

"$\Leftarrow$" 只有证对可数集成立

$\forall n$，有限 $\frac{1}{2^n}$-net $\{x_1^n \cdots x_{k_n}^n\}$

至少有一个 $x_{i_n}^n\in B(x_{i_{n-1}}^{n-1},\frac{1}{2^{n-1}})$（已取好）

$B(x_{i_n}^n,\frac{1}{2^n})\cap B(x_{i_{n-1}}^{n-1},\frac{1}{2^{n-1}})$ 有无穷多个点

$\Rightarrow x_{i_n}^n$ Cauchy 列 $\Rightarrow$ 收敛到 $x_0$ $\Rightarrow$ 有聚点.

**Def 3.1** 一致连续（非常依赖度量的一个性质）

**Thm 3.3** $(X,d_X)$ 有 Lebesgue property

$\Leftrightarrow$ $\forall (Y,d_Y)$ 以及 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 连续，

均有 $f$ 一致连续.

Pf: "$\Rightarrow$" 显然

"$\Leftarrow$" 反证，若 $(X, d_X)$ 无 Lebesgue property

则 $\exists$ 开覆盖 $\{U_\alpha\}$，$\exists$ 一列子集 $E_n$，满足

$\operatorname{diam}(E_n) \to 0$，但 $\forall n$，$\forall \alpha$，$E_n \not\subset U_\alpha$

$\max\{d(x,y) \mid x,y \in E_n\}$

取 $x_n \neq y_n \in E_n$，则序列 $x_n$ 无极限点，

否则，设 $x_0 \in \{x_n\}'$，$\exists \gamma$，$B(x_0, \varepsilon) \subset U_\gamma$

$\exists n > \lceil \frac{2}{\varepsilon} \rceil$，$d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$，进而 $\forall x \in E_n$

$d(x, x_0) < \varepsilon$，$E_n \subset U_\gamma$，矛盾

同理，$y_n$ 无极限点。

$A = \{x_n\}$，$B = \{y_n\}$，$A \cap B = \phi$，$A, B$ 闭集。

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$ cts，但 $f(x_n) = 0$，$f(y_n) = 1$

不一致连续，矛盾。

以上证明有一处不严谨，所以我们需要如下引理：

Lemma 3.4.

$(X, d_X)$ 不满足 L.P，则去掉有限个点后仍不满足 L.P.

只用证 $(X \setminus \{x_0\}, d)$ 不满足 L.P，递推可得。

否则，$\forall \{U_\alpha\}$ cover $X$，$\exists \gamma$，s.t. $B(x_0, \varepsilon_0) \subset U_\gamma$

$\exists \delta < \frac{\varepsilon_0}{2}$ 为 $X \setminus \{x_0\}$ 的 L. number.

$\forall U$，$\operatorname{diam}(U) < \delta \Rightarrow \exists \beta$，$U \setminus \{x_0\} \subset U_\beta$

若 $x_0 \notin U$，$U \subset U_\beta$

若 $x_0 \in U$，则 $\forall u \in U$，$d(x, u) < \delta \Rightarrow u \in B(x_0, \varepsilon_0) \subset U_\gamma \Rightarrow U \subset U_\gamma$

故 $\delta$ 是 $X$ 的 L. number，矛盾！

Cor 3.5.

$(X, d_X)$，紧致，$f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 连续 $\Rightarrow$ $f$ 一致连续