定理 X,Y相互独立时, $E(Y|X)=E(Y)$

$$\psi(x)=E(Y|X=x)=\sum_y y\cdot P(Y=y|X=x)=\sum_y y\cdot P(Y=y)=E(Y)$$

$$\frac{P(Y=y,X=x)}{P(X=x)}=\frac{P(Y=y)\cancel{P(X=x)}}{\cancel{P(X=x)}}$$

hw: 3.4.2, 3.4.4, 3.6.3, 3.6.4, 3.6.5

定理 $g(x)$, $h(y)$一元函数. $E(g(X))$, $E(h(Y))$存在, 则$E(g(X)h(Y)|X)=g(X)E(h(Y)|X)$

证: 令 $r_1(x)=E(g(X)h(Y)|X=x)$, $r_2(x)=E(h(Y)|X=x)$

$$r_1(x)=\sum_y g(x)h(y)\cdot f_{Y|X}(y|x)=g(x)\sum_y h(y)f_{Y|X}(y|x)=g(x)\cdot r_2(x)$$

定理 $\psi(X)=E[Y|X]$, $E(\psi(X)g(X))$, $E(Yg(X))$存在, 则$E(\psi(X)g(X))=E(Yg(X))$存在

(对$\forall$适当的$g(x)$都有上式成立, 定义$E[Y|X]=\psi(X)$)

证: $E(\psi(X)g(X))=\sum_x \psi(x)g(x)P(X=x)=\sum_x\left(\sum_y y f_{Y|X}(y|x)\right)g(x)\cdot P(X=x)$

$$=\sum_x\sum_y y\cdot g(x)\cdot P(X=x,Y=y)=E(Yg(X))$$

例 X_i $i=1,2,\cdots$ 独立同分布 $P(X_i=1)=p$, $P(X_i=0)=1-p=q$ $N\sim P(\lambda)$

$P(N=n)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}$, $X=\sum_{i=1}^{N}X_i$ 求$E(X|N)$, $E(N|X)$, $E(X)$, $Var(X)$

解: $f_{X|N}(x|n)=C_n^x p^x q^{n-x}$

$$f_{N|X}(n|x)=\frac{P(N=n,X=x)}{P(X=x)}=\frac{P(X=x|N=n)\cdot P(N=n)}{\sum_{n\geq x}P(X=x|N=n)\cdot P(N=n)}=\frac{C_n^x\cdot\cancel{p^x}q^{n-x}\cdot\cancel{e^{-\lambda}}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}}{\sum_{m\geq x}C_m^x\cdot\cancel{p^x}q^{m-x}\cdot\cancel{e^{-\lambda}}\cdot\frac{\lambda^m}{m!}}$$

$$=\frac{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{x!}(n-x)!}q^{n-x}\cdot\frac{\lambda^n}{\cancel{n!}}}{\sum_{m\geq x}\frac{\cancel{m!}}{\cancel{x!}(m-x)!}q^{m-x}\cdot\frac{\lambda^m}{\cancel{m!}}}=\frac{q^{n-x}\cdot\lambda^n}{(n-x)!}\cdot\frac{1}{\lambda^x e^{q\lambda}}=\frac{(\lambda q)^{n-x}}{(n-x)!}e^{-\lambda q}$$

$$\downarrow\ \sum_{m\geq x}\frac{(\lambda q)^{m-x}\cdot\lambda^x}{(m-x)!}$$

B(n,p)类似

$$E(X|N=n)=\sum_x x\cdot f_{X|N}(x|n)=\sum_x x\cdot C_n^x p^x q^{n-x}=np \qquad E(X|N)=Np$$

$$E(N|X=x)=\sum_{n\geq x}n\cdot f_{N|X}(n|x)=\sum_{n\geq x}n\cdot\frac{(\lambda q)^{n-x}}{(n-x)!}e^{-\lambda q}\xlongequal{k=n-x}\sum_{k=0}^{\infty}(k+x)\cdot\frac{(\lambda q)^k}{k!}e^{-\lambda q}$$

$$=\lambda q+x$$

$$E(X)=E(E(X|N))=E(Np)=\lambda p$$

$$E(X^2)=\sum_{n=1}^{\infty}E(X^2|N=n)\,p(N=n)=\sum_{n=1}^{\infty}E((\sum_{i=1}^{n}X_i)^2)\,p(N=n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(var(\sum_{i=1}^{n}x_i)+(E(\sum_{i=1}^{n}x_i))^2\right)\cdot p(N=n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n\,var(x_1)+(np)^2)\cdot p(N=n)$$
$$=var(x_1)E(N)+p^2E(N^2)$$
$$var(X)=E(X^2)-E(X)^2=var(X_1)E(N)+E(X_1)^2var(N)$$

$B\in F,\ P(B)>0\quad E(X|B)=\sum x\cdot\dfrac{P((X=x)\cap B)}{P(B)}$

§3.6 母函数

一. 随机变量的和.

$X\sim f_X,\ Y\sim f_Y,\quad Z=X+Y.$

$$f_Z(z)=p(Z=z)=P(\bigcup_x(\{X=x\}\cap\{Y=z-x\}))=\sum_x P(X=x,Y=z-x)$$
$$=\sum_y P(Y=y,X=z-y)$$

若X.Y独立. $f_Z(z)=\sum_x P(X=x)P(Y=z-x)=\sum_x f_X(x)f_Y(z-x)=f_X*f_Y(z)$ 卷积

二. 母函数(生成函数)

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\quad \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=G_a(x)$ —— $\{a_n\}$的母函数.

$\{a_n\}.\{b_n\}\qquad (a*b)_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\triangleq c_n$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}x^kx^{n-k})=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n)$$

X取非负整数值 $p_k=P(X=k)$ $\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k$ 称为X的概率母函数. 记为 $G_X(s)$.

性质: ① 收敛半径 ($G_X(1)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$) $R\geq 1$

② 母函数与分布列一一对应 $G(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k,\ p_k=\dfrac{G^{(k)}(0)}{k!}$

③ 若 $\sum_{k=0}^{\infty}(p_ks^k)'$ 在 $s=1$ 处收敛. $G_X'(1)=\sum_{k=1}^{\infty}kp_ks^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot p_k=E(X)$

若 $E[X(X-1)\cdots(X-n+1)]$ 存在, $G_X^{(n)}(1)=\sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\cdots(k-n+1)s^{k-n}p_k$

$= E[X(X-1)\cdots(X-n+1)]$

三. 常见分布的母函数.

(1) $X\sim B(n,p)$, $p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$, $k=0,\cdots,n$ $\quad G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}\cdot s^k = (ps+q)^n$

(2) $X\sim G(p)$ $\quad p_k = q^{k-1}p$, $k=1,2,\cdots$ $\quad G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} q^{k-1} p s^k = \frac{ps}{1-qs}$

(3) $X\sim P(\lambda)$ $\quad p_k = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ $\quad G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} s^k = e^{-\lambda+\lambda s}$

四. 独立随机变量的和

$X_1,\cdots,X_n$ 取非负整数值, 相互独立. $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$, X_i 母函数 $G_i(s)$, 则 $G_Y(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s)$

证: $G_i(s) = \sum_k s^k P(X_i=k) = E[s^{X_i}]$

$G_Y(s) = E[s^Y] = E[s^{X_1+\cdots+X_n}] = \prod_{i=1}^{n} E(s^{X_i}) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s)$

例: 掷5颗骰子, 求点数和为15的概率.

解: X_i 第 i 颗骰子点数. X_i, $i=1,2,3,4,5$ 相互独立.

$Y=\sum_{i=1}^{5} X_i$ $\quad G_i(s) = \frac{1}{6}(s+s^2+\cdots+s^6) = \frac{1}{6}\cdot\frac{s(1-s^6)}{1-s}$

$G_Y(s) = \frac{1}{6^5} s^5 (1-s^6)^5 (1-s)^{-5}$

$= \frac{1}{6^5} s^5 (1-5s^6+10s^{12}\cdots)(\sum_{k=0}^{\infty} C_{-5}^k (-s)^k)$

s^{15} 系数为 $\frac{1}{6^5}(C_{-5}^{10}\cdot(-1)^{10} - 5C_{-5}^{4})$ $\quad P(Y=15) = s^{15}$ 系数

hw 3.7.8, 5.1.1 (a)(b), 5.1.2, 5.1.4