实分析精选 50 题

第一章 测度论

1. 设μ,υ是定义在$\sigma-$代数S上的两个测度，μ是有限的,且υ对于μ是绝对连续的,则存在可测集E,使得$X-E$对于υ而言具有$\sigma-$有限测度,并使得对E的任何可测子集F,$\upsilon(F)$或为0或为∞.

证明:
(ⅰ)若υ本身是一个有限测度或者$\sigma-$有限测度,取E为空集即可.

(ⅱ)考虑υ不是一个有限测度或者$\sigma-$有限测度的情形:

引理: 设μ,υ是定义在$\sigma-$代数S上的两个测度，μ是有限的,且υ对于μ是绝对连续的,υ不是一个有限测度或者$\sigma-$有限测度.若$\upsilon(E)=\infty$,并且对于υ而言并非一个$\sigma-$有限集,则存在一个可测子集F,F的任何子集G,$\upsilon(G)$或为0或为∞.

证明:

$$设\alpha=\sup\{\mu(G)\,|\,G\subset E,0<\upsilon(G)<\infty 或\upsilon(G)=\infty,但G=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i,\upsilon(G_i)<\infty\}$$

则存在$E_i\subset E,\mu(E_i)\to\alpha,(i\to\infty)$,且$E_i$满足:

$$G\subset E,0<\upsilon(G)<\infty 或\upsilon(G)=\infty,但G=\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i,\upsilon(G_i)<\infty.$$

令$F_n=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$,则$\mu(F_n)\ge\mu(E_n)$,且F_n也满足上式的条件.

$\therefore\mu(F_n)\le\alpha\ \therefore\mu(F_n)\to\alpha\ \ (n\to\infty)$,故:$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\alpha$.

考虑:$F=E-\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$, $\upsilon(F)=\infty$,否则E对于υ而言具有$\sigma-$有限测度. F 的任何子集G,$\upsilon(G)$或为0或为∞.如若不然:存在可测子集$M:0<\upsilon(M)<\infty$,则:$\mu(M)\neq 0$,$M\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\varnothing$,且$\mu(M\cup\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right))>\alpha$.但$M\cup\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)$满足:

$$\text{“}G \subset E, 0 < \upsilon(G) < \infty \text{ 或 } \upsilon(G) = \infty, \text{但 } G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i, \upsilon(G_i) < \infty \text{”}$$

的条件.故与 $\mu(M \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right)) \le \alpha$ 矛盾.所以存在一个可测子集 F , F 的任何子集 G , $\upsilon(G)$ 或为 0 或为 ∞.

令 $\beta = \sup\{\mu(E) \mid E \in S, \upsilon(E) \ne 0$,对 E 的任何可测子集 F , $\upsilon(F)$ 或为 0 或为 $\infty\}$.

类似与证明引理中的讨论,利用穷举法,存在:

$$G_i, \mu(G_i) \to \beta, (i \to \infty), \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i) = \beta \quad ,$$

这里 $G_i \in S$, 对 G_i 的任何可测子集 F , $\upsilon(F)$ 或为 0 或为 $\infty\}$. $(i = 1, 2, \ldots)$

考虑: $\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i = E$,则对 E 的任何可测子集 F , $\upsilon(F)$ 或为 0 或为 ∞.在 $X - E$ 中,不存在一个可测子集 F , $\upsilon(F) \ne 0$, F 的任何可测子集 G , $\upsilon(G)$ 或为 0 或为 ∞.

事实上,若 $X - E$ 中存在这样一个可测子集 H ,则 $E \cup H$ 满足:

$E \cup H \in S$, $\upsilon(E \cup H) \ne 0$,对 $E \cup H$ 的任何可测子集 F , $\upsilon(F)$ 或为 0 或为 ∞.但 $E \cap H = \varnothing$,所以 $\mu(E \cup H) = \mu(E) + \mu(H)$. 又注意到 $\upsilon(H) \ne 0$,所以 $\mu(H) \ne 0$,所以 $\mu(E \cup H) = \mu(E) + \mu(H) > \beta$.这与 β 的定义是矛盾的.所以在 $X - E$ 中,不存在一个可测子集 F , $\upsilon(F) \ne 0$, F 的任何可测子集 G , $\upsilon(G)$ 或为 0 或为 ∞.

若 $X - E$ 对于 υ 而言不具有 $\sigma -$ 有限测度,则由引理, 存在一个可测子集 F , F 的任何子集 G , $\upsilon(G)$ 或为 0 或为 ∞.这与上面的讨论是矛盾的.

所以 $X - E$ 对于 υ 而言具有 $\sigma -$ 有限测度. 证毕

2. 设 $\{\mu_n\}$ 是可测空间 (X, R) 上一列有限的广义测度,

(i) 若 $\{\mu_n\}$ 是全有限的测度序列,则必存在 (X, R) 上全有限测度 μ ,使得 μ_n 对于 μ 是绝对连续的 $(n = 1, 2 \ldots)$.

(ii) 证明必存在 (X,R) 上全有限测度 μ，使得 μ_n 对于 μ 是绝对连续的 $(n=1,2...)$.

证明：

(i) $\{\mu_n\}$ 中 $0\le\mu(X)\le 2$ 的测度记为 υ_n，重新排列，其余的记为 T_n，重新排列

定义 $\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\upsilon_n(E)}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n(E)}{T_n^{n+1}(X)}$.

可以证明 $\mu(\varnothing)=0,\mu(X)<+\infty$,对于 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,E_i\cap E_i=\varnothing$:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\upsilon_n(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)}{T_n^{n+1}(X)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon_n(E_i)}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{\infty}T_n(E_i)}{T_n^{n+1}(X)}$$

由于二和均收敛,故可交换顺序.

$$\therefore\ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\upsilon_n(E_i)}{2^n}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T_n(E_i)}{T_n^{n+1}(X)}=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$$

所以 μ 是一个全有限测度,容易验证: μ_n 对于 μ 是绝对连续的 $(n=1,2...)$.

(ii) 考虑 $\{\mu_n\}$ 的全变差测度 $\{|\mu_n|\}$, $|\mu_n|$ 仍是一个全有限测度,由 (i) 的证明存在有限测度 μ，使得 $|\mu_n|$ 对于 μ 是绝对连续的，

所以 μ_n 对于 μ 是绝对连续的 $(n=1,2...)$. 证毕.

3. (i) 设 μ 是可测空间 (X,R) 上全 $\sigma-$有限的测度，证明：必存在 (X,R) 上全有限测度 υ，使得 μ 等价于 υ.

(ii) 设 $\{\mu_n\}$ 是可测空间 (X,R) 上全 $\sigma-$有限的广义测度序列, 证明必存在 (X,R) 上全有限测度 μ，使得 μ_n 对于 μ 是绝对连续的 $(n=1,2...)$.

(i) 证明:

$\because$ μ 是可测空间 (X,R) 上全 $\sigma-$有限的测度,$\therefore$ $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$,且 $\mu(E_i)<+\infty$ E_i 互斥

将 $\{E_i\}$ 分类, $0\le\mu(E_i)\le 2$ 的记作 $\{F_i\}$ (重新排列), 其余的记为 $\{G_i\}$ (重新排列),

作 (X,R) 上的可测函数 f：

$$f=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n} & x\in F_n,\quad n=1,2,\ldots\\ \dfrac{1}{\left(\mu\left(G_n\right)\right)^{n+1}} & x\in G_n, n=1,2,\ldots\end{cases}$$

考虑 f 在 X 上的积分:

$$\int_X fd\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu(F_n)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu(G_n)^{n+1}}\mu(G_n)<\infty,$$

令 $\upsilon(E)=\int_E fd\mu$. 易证 υ 是 (X,R) 上全有限测度.

1. 若 $\mu(E)=0\Rightarrow\upsilon(E)=0$

2. 若 $\upsilon(E)=0$, $\because f>0$, 易证 $\mu(E)=0$　　所以 μ 等价于 υ.

(ii) 考虑 $\{\mu_n\}$ 的全变差测度 $\{|\mu_n|\}$, $|\mu_n|$ 仍是一个全 $\sigma-$ 有限测度,

由 (i) 的证明: 存在 (X,R) 上全有限测度 υ_n，使得 $|\mu_n|$ 等价于 υ_n.

由第 2 题 (i) 的证明, 必存在 (X,R) 上全有限测度 μ，使得 υ_n 对于 μ 是绝对连续的 $(n=1,2\ldots)$.

所以:

. $|\mu_n|$ 对于 μ 是绝对连续的 $(n=1,2\ldots)$,

即: μ_n 对于 μ 是绝对连续的 $(n=1,2\ldots)$.　　证毕.

4. 设 (X,S,μ) 是一个全有限测度空间，f 是 (X,S,μ) 上的一个可测函数，如果对于扩张数直线上的任何 $Borel$ 集 M，有 $\upsilon(M)=\mu(f^{-1}(M))$，则 υ 是 $Borel$ 集类上的一个测度，设 $g(t)=\mu\left(\{x\in X: f(x)<t\}\right)$，若 f 是有限函数，则 g 具有下列性质：

（1） 它是单调增加的 （2）左连续的 $g(-\infty)=0, g(\infty)=\mu(X)$.

我们称 g 为 f 的分布函数.若 g 是连续的,则 g 引出的 $Lebesgue-Stieltjes$ 测度 μ_g 是 υ 的增补. f 是可测集 E 的特征函数,则 $\upsilon(M)=\chi_M(1)\mu(E)+\chi_M(0)\mu(E^c)$.

证明:考虑$\varnothing$,$\upsilon(\varnothing)=\mu(f^{-1}(\varnothing))=\mu(\varnothing)=0$

考虑M_i,$M_i\cap M_j=\varnothing\Rightarrow f^{-1}(M_i)\cap f^{-1}(M_j)=\varnothing$, $f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty}M_i)=\bigcup_{i=1}^{\infty}f^{-1}(M_i)$

所以由μ的可列可加性可以得到υ的可列可加性,所以υ是*Borel*集类上的一个测度.

考虑$g(t)=\mu\left(\{x\in X:f(x)<t\}\right)$:

$g(t_1)=\mu\left(\{x\in X:f(x)<t_1\}\right)$, $g(t_2)=\mu\left(\{x\in X:f(x)<t_2\}\right)$.

若$t_1<t_2$则$g(t_1)\le g(t_2)$.

因为$g(t)$是单调增加的函数,其任一点的左极限必定存在,所以只需证明对某一列单调增加的数列:$x_1<x_2<......<x_n\to x$,有$\lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(x)$.

事实上

$$
\begin{aligned}
g(x)-g(x_1)&=\mu\left(\{t\in X:x_1\le f(t)<x\}\right)\\
&=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{t\in X:x_n\le f(t)<x_{n+1}\}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\{t\in X:x_n\le f(t)<x_{n+1}\}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left[g(x_{n+1})-g(x_n)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[g(x_{n+1})-g(x_1)\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}g(x_{n+1})-g(x_1).
\end{aligned}
$$

所以$\lim_{n\to\infty}g(x_n)=g(x)$,所以$g$是左连续的.显然$g(-\infty)=0,g(\infty)=\mu(X)$.

考虑g引出的*Lebesgue−Stieltjes*测度μ_g,设s_g^*为μ_g^*-可测集类,S是*Borel*集类,任意的*Borel*集必是μ_g^*-可测集,设$\overline{S}$为υ的增补所组成的集类.

$\mu_g^*\left([a,b)\right)=g(b)-g(a)=\mu\left(\{x\in X:a\le f(x)<b\}\right)=\upsilon\left([a,b)\right)$所以$\upsilon(M)=\mu_g^*(M)$.

对于任意$E\in S_g^*$,不妨设$\mu_g^*(E)<\infty$,对于E,存在$F\in S$,$\mu_g^*(E)=\mu_g^*(F)$.

F 为 E 的可测覆盖,$\therefore \mu_g^*(F-E)=0$,而 $F-E$ 也有一个可测覆盖 $G, \mu_g(G)=0$

$E=(F-G)\bigcup(E\bigcap G)$,$\therefore E\in\overline{S}$,所以 $S_g^*\subset\overline{S}$,又注意到 μ_g 是一个完全测度,所以由增补的定义, μ_g 是 υ 的增补.

设 f 是可测集 E 的特征函数,则 $f(x)=\chi_E(x)$.

若 $1\in M, 0\notin M$, $\therefore f^{-1}(M)=E$,所以 $\upsilon(M)=\chi_M(1)\mu(E)+\chi_M(0)\mu(E^c)$

类似进行讨论,可以得到结论

. 证毕.

5. 设 μ^* 是可传 $\sigma-$ 环 H 上的正则外测度，如果 $\{E_n\}$ 是 H 中之集的一个增序列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n=E$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*(E_n)=\mu^*(E)$.

证明：

(i) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*(E_n)=+\infty$,则问题不证自明.

(ii)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*(E_n)=+\infty$,由正则外测度的性质: $\mu^*(E_n)=\overline{\mu}^*(E_n)$.

设 所有 $\overline{\mu}-$ 可测集为 $\overline{S}$, $\overline{S}=S(\overline{S})$.

$\therefore\overline{S}$ 中存在 F_n 使得 $E_n\subset F_n, \overline{\mu}^*(E_n)=\overline{\mu}(F_n)$,且对于 $G\subset F_n-E_n$ $\overline{\mu}(G)=0$

对于 E_{n+1} ,存在 F_{n+1} 使得 $E_{n+1}\subset F_{n+1}, \overline{\mu}^*(E_{n+1})=\overline{\mu}(F_{n+1})$.

注意到 $F_n-E_{n+1}\subset F_n-E_n$,所以 $\overline{\mu}(F_n-E_{n+1})=0$,所以可以作到 F_{n+1} 包含 F_n .

同样有 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n=F$, $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\mu}(F_n)=\overline{\mu}(F)$, $\overline{\mu}^*(E_n)=\overline{\mu}(F_n)=\mu^*(E_n)\le\mu^*(E)$,所以 $\overline{\mu}(F)\le\mu^*(E)$,但注意到 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$,故 $\overline{\mu}(F)\ge\overline{\mu}^*(E)\ge\mu^*(E)$.

所以 $\overline{\mu}(F)=\mu^*(E)$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*(E_n)=\mu^*(E)$. 证毕

6. 设 (X,S,μ) 是 $\sigma-$ 有限测度空间，如果 $\{\upsilon_n\}$ 是定义在 S 上的有限广义测度的一个序列,其中每一个 υ_n 对于 μ 都是绝对连续的,且对于 S 中的每一个 E , $\lim\limits_{n\to\infty}\upsilon_n(E)$ 存在且有限，则集函数 υ_n 对于 μ 是一致绝对连续的.

证明：

设$E,F\in S$，如果E,F满足$\mu(E\Delta F)=0$，则我们将E,F看作相等的．记为：$E=F[\mu]$．在新的相等意义下，测度μ在S上仍然无歧义地确定．

又$\because \mu(E)=0$与$E=\varnothing$等价，所以在新的相等意义下μ成为一个正测度，$(S(\mu),\mu)$作成一个测度环．

设R表示S中一切具有有限测度的元素的集合，对于$E,F\in R$，令：$\rho(E,F)=\mu(E\Delta F)$．

这是R上的一个度量，称R为$(S(\mu),\mu)$连带的度量空间．

考虑下面的两个引理：

引理 1：R按度量$\rho(E,F)=\mu(E\Delta F)$作成一个完备度量空间．

证明：若$\{E_n\}$是R中一个基本列，即：

$$\rho(E_n,E_m)\to 0\Leftrightarrow \mu(E_n\Delta E_m)\to 0$$

$$\therefore \int_X\left|\chi_{E_n}-\chi_{E_m}\right|d\mu\to 0\quad (n\to\infty,m\to\infty)$$

所以$\{\chi_{E_n}\}$是依测度基本的，故存在可测函数f，使得$\{\chi_{E_n}\}$依测度收敛于f．根据黎斯引理，存在一个子列$\{\chi_{E_{n_k}}\}$，使得$\{\chi_{E_{n_k}}\}$几乎处处收敛于f．显然f也是一个集合的特征函数，（设为E）所以由积分的定义和控制收敛定理，有：$\therefore \int_X\left|\chi_{E_n}-f\right|d\mu\to 0\quad (n\to\infty)$，即$\therefore \int_X\left|\chi_{E_n}-\chi_E\right|d\mu\to 0\quad (n\to\infty)$

所以$\rho(E_n,E)\to 0\Leftrightarrow \mu(E_n\Delta E)\to 0$．

即：R按度量$\rho(E,F)=\mu(E\Delta F)$作成一个完备度量空间．

引理 2：υ是定义在S上的有限测度，且υ对于μ是绝对连续的，则υ在R上可以无歧义地确定，且是R上的连续函数．

证明：

由于υ对于μ是绝对连续的，所以$\mu(E\Delta F)=0\Rightarrow \upsilon(E\Delta F)=0$

显然υ在R上可以无歧义地确定，事实上由$\mu(E\Delta F)$的定义，只考虑在零点$\varnothing$的连续性情形．

若结论不成立：

$\exists\varepsilon_0>0$，存在 $E_n\in R$, 使得 $\mu(E_n)<\dfrac{1}{2^n}, n=1,2,3,\ldots$ 但 $\upsilon(E_n)>\varepsilon_0$.

令 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{i=n}^{\infty}E_i$ ：

因为 $\mu(E_n)<\dfrac{1}{2^n}, n=1,2,3,\ldots$ 所以 $\mu(F)<\sum\limits_{i=n}^{\infty}\mu(E_i)<\dfrac{1}{2^{n-1}}\ n=1,2,3,\ldots$

故 $\mu(F)=0\Rightarrow\upsilon(F)=0$.

但 $\upsilon(F)=\lim\limits_{n\to\infty}\upsilon\left(\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}E_m\right)\geq\lim\limits_{n\to\infty}\upsilon\left(E_n\right)\geq\varepsilon_0$，矛盾．所以 υ 是 R 上的连续函数.

下面考虑本问题：考虑 $\forall\varepsilon>0$

令：$\varepsilon_k=\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}\bigcap\limits_{m=k}^{\infty}\left\{E:E\in R,\left|\upsilon_n(E)-\upsilon_m(E)\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{3}\right\}k=1,2,\ldots$.

由引理 2，υ_n 和 υ_m 都是 R 上的连续函数，所以 $\left\{E:E\in R,\left|\upsilon_n(E)-\upsilon_m(E)\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{3}\right\}$ 是闭集，由闭集的性质：$\varepsilon_k=\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}\bigcap\limits_{m=k}^{\infty}\left\{E:E\in R,\left|\upsilon_n(E)-\upsilon_m(E)\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{3}\right\}k=1,2,\ldots$ 也是闭集．显然 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\subset R$，对于本题来说，由于对于 S 中的每一个 E，$\lim\limits_{n\to\infty}\upsilon_n(E)$ 存在且有限，所以 R 上的每一个 E，总存在一个 k_1, 使得 $E\in\varepsilon_{k_1}$，所以 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\supset R$．又因为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\subset R$，所以 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k=R$.

由引理 1，R 按度量 $\rho(E,F)=\mu(E\Delta F)$ 作成一个完备度量空间. 所以由 *Baire* 定理：完备的度量空间不能表示为可数个无处稠密集并的形式. 故 $\exists k_0$, 使得 ε_{k_0} 在某一个球中稠密，即：$\exists B$, 使得 $B\subset\overline{\varepsilon_{k_0}}=\varepsilon_{k_0}$．这就说明：在 R 中存在 E_0 和正数 r_0 使得：$\left\{E:\rho(E,E_0)<r_0\right\}\subset\varepsilon_{k_0}$．因为每一个 υ_n 对于 μ 都是绝对连续的，由引理 2：

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_n>0\text{，当 }\mu(E)<\delta_n\text{ 时，}\left|\upsilon_n(E)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

取 $\delta_0=\min\left\{\delta_1,\delta_2,\ldots\delta_{k_0}\right\}$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_0>0$，当 $\mu(E)<\delta_0$ 时，

$$\left|\upsilon_n(E)\right|<\frac{\varepsilon}{3}\left(1\le n\le k_0\right)$$

令：$\delta=\min(\delta_0,r_0)$，当 $\mu(E)<\delta$ 时，$\rho(E\cup E_0,E_0)<r_0$，$\rho(E_0-E,E_0)<r_0$

所以 $\left|\upsilon_n\left(E\cup E_0\right)-\upsilon_{k_0}\left(E\cup E_0\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$，$\left|\upsilon_{k_0}\left(E_0-E\right)-\upsilon_n\left(E_0-E\right)\right|<\frac{\varepsilon}{3}$

对于 $n\ge k_0$ 的 υ_n 来讲，因为 $E=\left(E\cup E_0\right)-\left(E_0-E\right)$

所以：$\left|\upsilon_n(E)\right|=\left|\upsilon_n(\left(E\cup E_0\right)-\left(E_0-E\right))\right|=\left|\upsilon_n\left(E\cup E_0\right)-\upsilon_n\left(E_0-E\right)\right|$

$=\left|\upsilon_n\left(E\cup E_0\right)-\upsilon_{k_0}\left(E\cup E_0\right)+\upsilon_{k_0}\left(E\cup E_0\right)-\upsilon_{k_0}\left(E_0-E\right)+\upsilon_{k_0}\left(E_0-E\right)-\upsilon_n\left(E_0-E\right)\right|$

$\le\left|\upsilon_n\left(E\cup E_0\right)-\upsilon_{k_0}\left(E\cup E_0\right)\right|+\left|\upsilon_{k_0}\left(E\cup E_0\right)-\upsilon_{k_0}\left(E_0-E\right)\right|+\left|\upsilon_{k_0}\left(E_0-E\right)-\upsilon_n\left(E_0-E\right)\right|$

$=\left|\upsilon_n\left(E\cup E_0\right)-\upsilon_{k_0}\left(E\cup E_0\right)\right|+\left|\upsilon_{k_0}\left(E\right)\right|+\left|\upsilon_{k_0}\left(E_0-E\right)-\upsilon_n\left(E_0-E\right)\right|$

$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$.

所以集函数 υ_n 对于 μ 是一致绝对连续的.

进一步考虑：如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\upsilon_n(E)=\upsilon(E)$，显然 υ 具有有限可加性.

设 $\left\{E_k\right\}\in R,\lim\limits_{k\to\infty}E_k=\varnothing$，且 E_k 是递减的.

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\mu(E_k)=0$．则由刚刚证明的结论可以得到：

$$\left|\upsilon(E_k)\right|\le\sup\left(\left|\upsilon_n(E_k)\right|\right)\to 0\,.$$

利用＜＜测度论讲义＞＞（严加安著）$P.13$　1.3.4 定理，

$\upsilon(E)$ 是一个有限的广义测度，且 υ 对于 μ 是绝对连续的.　　　　证毕

7. 设 $\left\{A_n\right\}$ 是互不相交的可测集列，$B_n\subset A_n\left(n=1,2,\ldots\right)$,则 $m^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}m^*\left(B_n\right)$.

证明：由外测度的定义及性质：$m^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}m^*\left(B_n\right)$

考虑到可测集的性质：对于任意的 T，$m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$，所以 $m^*(T)\ge m^*(T\cap E)$．令 $T=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$　所以有 $m^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n)\ge\sum\limits_{n=1}^{\infty}m^*\left(B_n\right)$.

故问题得到证明.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　证毕

8. 设点集 E_1, E_2，且 E_1 是可测集，若 $m(E_1 \Delta E_2)=0$.则：E_2 可测，且 $m(E_1)=m(E_2)$.

证明：因为 $m(E_1\Delta E_2)=0$，所以 $m^*(E_1\Delta E_2)=0$.

$\because E_1 \bigcup E_2=(E_1)\bigcup(E_1\Delta E_2)=(E_2)\bigcup(E_1\Delta E_2)$，所以 $m^*(E_1\bigcup E_2)=m^*(E_1)=m^*(E_2)$.

E_1 是可测集，$E_1\Delta E_2$ 可测，故 $E_1\Delta E_2=\left(E_1\bigcup E_2\right)\setminus\left(E_1\bigcap E_2\right)$ 可测.

考虑到：$E_2=\left[\left(E_1\Delta E_2\right)\setminus E_1\right]\bigcup\left(E_1\bigcap E_2\right)$，$\left(E_1\Delta E_2\right)\bigcup E_1=E_1\bigcup E_2$，故 $E_1\bigcup E_2$ 可测，所以 $\left(E_1\bigcap E_2\right)$ 可测．则 E_2 可测．又由：$m^*(E_1\bigcup E_2)=m^*(E_1)=m^*(E_2)$，

所以 $m(E_1)=m(E_2)$.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　证毕

9. 设 $E\subset R^1$，是一个可测集，且 $0<\alpha<m(E)$．则存在 E 中有界闭集 F，使得 $m(F)=\alpha$.

证明：令 $E_x=\left[-x,x\right]$，$g(x)=m\left(\left[-x,x\right]\bigcap E\right)$，$\left(x\ge 0\right)$.

易知：$g(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数，$g(0)=0, \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=m(E)$.

所以存在 x_0 使得 $g(x_0)=\dfrac{\alpha+m(E)}{2}=\beta>\alpha$

定义 $\left[-x_0,x_0\right]\bigcap E=G$，$m(G)=\beta>\alpha$，则 G 是一个有界的集合，并且可测.

考虑 G 的内测度（详见那汤松书）：

$$m(G)=m^*(G)=m_*(G)=\sup\{m(F):F\text{ 是 }G\text{ 的闭子集}\}$$

故存在 G 的闭子集 F_0，使得 $m(F_0)=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\eta>\alpha$

同样令 $f(x)=m\left(\left[-x,x\right]\bigcap F_0\right)$，$\left(x\ge 0\right)$.

易知：$f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数，$f(0)=0, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\eta$.

所以存在 x_1 使得 $f(x_1)=\alpha$．显然 $\left[-x_1,x_1\right]\bigcap F_0$ 是一个有界的闭集．令 $F=\left[-x_1,x_1\right]\bigcap F_0$ 即可.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　证毕

10. 设 X 是由 R^1 中某些互不相交的正测集组成的集类．则 X 是可数的.

证明：

由上题可以得到：对于 X 中任意一个元素 E，存在 E 中有界闭集 F，使得 $m(F)=\alpha<m(E)$．这里因为 F 属于某一个闭区间，去掉闭区间的两个端点，

考虑到开集的构造，由于 $0<m(F)=\alpha<m(E)$,所以必存在一个区间属于 F．

故对于每一个 E，存在一个区间 $I, I\subset E$．考虑到有理数的稠密性，所以每一个 I 中存在有理数点．又因为有理数全体是可数的，所以 X 是可数的．　证毕

11. 设 $E\subset R^1$ 有界，试证明：E 是可测集当且仅当 $\forall\varepsilon>0$,存在有限个互不相交的区间 $I_1,I_2,...I_m$ 之并集 $J=\bigcup\limits_{k=1}^{m}I_k$，使得 $m^*(E\Delta J)<\varepsilon$．

证明：$\Rightarrow$

因为 E 是可测集，且有界．所以存在一个闭集 $F\subset E$，使得 $m(E\setminus F)<\dfrac{\varepsilon}{2}$．对于 F，必存在一个开集 $G\supset F$，使得 $m(G\setminus F)<\dfrac{\varepsilon}{2}$．由开集的构造可以得到，存在 $\{I_k\}\ (k=1,2,...)$，使得 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k$．注意到 F 是一个有界闭集，所以是紧的．故存在有限个 I_i，（不妨记为：$I_1,I_2,...I_m$）使得 $J=\bigcup\limits_{k=1}^{m}I_k\supset F$．注意到 $E\Delta J\subset\left(G\setminus F\right)\bigcup\left(E\setminus F\right)$，所以 $m^*(E\Delta J)=m(E\Delta J)<\varepsilon$．

$\Leftarrow$

由题意，$\forall\varepsilon>0$,存在有限个互不相交的区间 $I_1,I_2,...I_m$ 之并集 $J=\bigcup\limits_{k=1}^{m}I_k$，使得 $m^*(E\Delta J)<\varepsilon$．考虑 $E\setminus J\subset E\Delta J$，因为 $m^*(E\Delta J)<\varepsilon$，总存在一个开集 G 覆盖 $E\setminus J$ 使得 $m(G)<\varepsilon+\varepsilon$．令 $E\setminus J=E_0$，所以 $m^*(G\setminus E_0)<2\varepsilon$．

不妨考虑这有限个区间为开区间．这时 $G\bigcup J\triangleq G_0$ 也为开集．并且：

$$m^*(G_0\setminus E)<m^*(G\setminus E_0)<2\varepsilon$$

由于 ε 的任意性，我们可以得到：$\forall\varepsilon>0$，存在开集 G，使得 $G\supset E$，$m^*(G\setminus E)<\varepsilon$ 事实上这就是 E 可测的充分必要条件．所以 E 是可测集．　证毕

12. 设A,B是R^1上的正测集，令$E=\{|b-a|;b\in B,a\in A\}$,则$E$必包含一个区间.

证明：

由周民强书P98定理2.15取$\lambda=\frac{3}{4}$，存在区间I_1,I_2使得：

$$m(A\cap I_1)>\frac{3}{4}m(I_1)，\quad m(B\cap I_2)>\frac{3}{4}m(I_2)$$

记：$I_1=(x_1,x_2)$，$I_2=(x_3,x_4)$.

（ⅰ）若$m(I_1)\ge m(I_2)$；

考虑$\forall x_0\in\left[x_3-x_1,x_3-x_1+\frac{3(x_4-x_3)}{4}-\frac{(x_2-x_1)}{4}\right]$：

令$A_0=A\cap I_1$，$B_0=B\cap I_2$若$x_0\notin E_1=\{b-a;b\in B,a\in A\}$，则：

$$(\{x_0\}+A_0)\cap B_0=\varnothing$$

但是$(\{x_0\}+A_0)\subset\left[x_3,x_3+\frac{3(x_4-x_3)}{4}+\frac{3(x_2-x_1)}{4}\right]$. 注意到$m(I_1)\ge m(I_2)$，

所以$(x_3,x_4)\subset\left[x_3,x_3+\frac{3(x_4-x_3)}{4}+\frac{3(x_2-x_1)}{4}\right]$. 于是得到：

$$B_0\subset\left[x_3,x_3+\frac{3(x_4-x_3)}{4}+\frac{3(x_2-x_1)}{4}\right].$$

又因为$(\{x_0\}+A_0)\cap B_0=\varnothing$，所以$m((\{x_0\}+A_0))+m(B_0)\le\frac{3(x_4-x_3)}{4}+\frac{3(x_2-x_1)}{4}$.

但由题意：$m(A_0)+m(B_0)=m((\{x_0\}+A_0))+m(B_0)>\frac{3(x_4-x_3)}{4}+\frac{3(x_2-x_1)}{4}$

所以矛盾

故$x_0\in E_1=\{b-a;b\in B,a\in A\}$，即：

$$\left[x_3-x_1,x_3-x_1+\frac{3(x_4-x_3)}{4}-\frac{(x_2-x_1)}{4}\right]\subset\{b-a;b\in B,a\in A\}.$$

（ⅱ）若$m(I_1)<m(I_2)$；

考虑$\forall x_0\in\left[x_1-x_3,x_1-x_3+\frac{3(x_2-x_1)}{4}-\frac{(x_4-x_3)}{4}\right]$：

若 $x_0 \notin E_2 = \{a-b; b\in B, a\in A\}$，则 $\left(\{x_0\}+B_0\right)\bigcap A_0 = \varnothing$．但是：

$$\left(\{x_0\}+B_0\right) \subset \left[x_1, x_1+\frac{3\left(x_4-x_3\right)}{4}+\frac{3\left(x_2-x_1\right)}{4}\right]$$

因为 $m(I_1)<m(I_2)$，所以 $A_0 \subset \left[x_1, x_1+\frac{3\left(x_4-x_3\right)}{4}+\frac{3\left(x_2-x_1\right)}{4}\right]$．于是：

$$m(\left(\{x_0\}+A_0\right))+m(B_0) \le \frac{3\left(x_4-x_3\right)}{4}+\frac{3\left(x_2-x_1\right)}{4}$$

但由题意：$m(A_0)+m(B_0)=m(\left(\{x_0\}+A_0\right))+m(B_0) > \frac{3\left(x_4-x_3\right)}{4}+\frac{3\left(x_2-x_1\right)}{4}$，矛盾．

所以 $x_0 \in E_2 = \{a-b; b\in B, a\in A\}$，即：

$$\left[x_1-x_3, x_1-x_3+\frac{3\left(x_2-x_1\right)}{4}-\frac{\left(x_4-x_3\right)}{4}\right] \subset \{a-b; b\in B, a\in A\}$$

由讨论知：无论如何 E 必包含一个区间．　　证毕

13. 设 μ^* 是可传 $\sigma-$ 环上的外测度，$\overline{S}$ 是由全体 μ^*- 可测集组成的类，若 $A\in H$，$\{E_n\}$ 是 $\overline{S}$ 中之集的增序列，则 $\mu^*(\lim\limits_{n\to\infty}\left(A\bigcap E_n\right))=\lim\limits_{n\to\infty}\mu^*\left(A\bigcap E_n\right)$．

证明：

事实上可以得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(A\bigcap E_n\right)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(E_n\bigcap A\right)=\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)\bigcap A$．

令 $E_0=\varnothing, D_n=E_n-E_{n-1}, (n=1,2,\ldots)$．

所以 $\mu^*\left(\left(\bigcup\limits_{n=1}^{m}E_n\right)\bigcap A\right) \le \mu^*\left(\left(\bigcup\limits_{n=1}^{m}D_n\right)\bigcap A\right) \le \sum\limits_{n=1}^{m}\mu^*\left(D_n\bigcap A\right)$．

因为：$E_n\in\overline{S}$，　$E_{n-1}\in\overline{S}$，　所以 $D_n\in\overline{S}$．于是由卡氏条件：

$$\mu^*(A\bigcap E_n)=\mu^*(A\bigcap E_n\bigcap D_n)+\mu^*(A\bigcap E_n\bigcap D_n^c)$$

易见：$\mu^*(A\bigcap E_n\bigcap D_n^c)=\mu^*(A\bigcap E_{n-1}), \mu^*(A\bigcap E_n\bigcap D_n)=\mu^*(A\bigcap D_n)$

所以 $\mu^*(A\bigcap D_n)=\mu^*(A\bigcap E_n)-\mu^*(A\bigcap E_{n-1})$　$(n=1,2,\ldots)$

故 $\mu^*\left(\left(\bigcup\limits_{n=1}^{m}E_n\right)\bigcap A\right) \le \mu^*\left(E_m\bigcap A\right)$．

令 $m\to\infty$, 有 $\mu^*(\lim_{n\to\infty}(A\cap E_n))\le\lim_{n\to\infty}\mu^*(A\cap E_n)$，而我们可以很容易地得到: $\mu^*(\lim_{n\to\infty}(A\cap E_n))\ge\lim_{n\to\infty}\mu^*(A\cap E_n)$，于是 $\mu^*(\lim_{n\to\infty}(A\cap E_n))=\lim_{n\to\infty}\mu^*(A\cap E_n)$. 证毕

14. 设 μ^* 是定义在 X 上的一切子集所成的类上的正则外测度, 使得 $\mu^*(X)=1$. 设 M 是 X 的一个子集，使得 $\mu_*(M)=0$，$\mu^*(M)=1$. 如果令: $\upsilon^*(E)=\mu^*(E)+\mu^*(E\cap M)$

试证明:(ⅰ) υ^* 是一个外测度.

(ⅱ)集 E 是 υ^*-可测集的充要条件：E 是 μ^*-可测集.

(ⅲ)设 A 是一个给定的集合，则对于包含 A 的任何 υ^*-可测集 E，$\inf\upsilon^*(E)=2\mu^*(A)$.

(ⅳ) υ^* 不是正则外测度.

证明:

(ⅰ) 对于 $E=\varnothing$，$\upsilon^*(\varnothing)=\mu^*(\varnothing)+\mu^*(\varnothing\cap M)=0$.

若 $E_1\subset E_2, \mu^*(E_1)\le\mu^*(E_2); \mu^*(E_1\cap M)\le\mu^*(E_2\cap M)$,所以 $\upsilon^*(E_1)\le\upsilon^*(E_2)$.

而 $\upsilon^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)+^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i\cap M)\right)$

$$\le\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)+\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i\cap M)=\sum_{i=1}^{\infty}(\mu^*(E_i)+\mu^*(E_i\cap M))=\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon^*(E)$$

所以 υ^* 是一个外测度.

(ⅱ) 若 E 是一个 μ^*-可测集.

所以对于任意的 T : $\mu^*(T)=\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\cap E^c)$，

$$\mu^*(T\cap M)=\mu^*(T\cap M\cap E)+\mu^*(T\cap M\cap E^c)，$$

考虑对于任意的 T : $\upsilon^*(T)=\mu^*(T)+\mu^*(T\cap M)$，

$$\upsilon^*(T\cap E)=\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\cap E\cap M)，$$

$$\upsilon^*(T\cap E^c)=\mu^*(T\cap E^c)+\mu^*(T\cap E^c\cap M)，$$

所以 $\upsilon^*(T)=\upsilon^*(T\cap E)+\upsilon^*(T\cap E^c)$． 即集 E 是 υ^*-可测集.

若集 E 是 υ^*-可测集, 则有:

$\mu^*(T)+\mu^*(T\cap M)=\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\cap E\cap M)+\mu^*(T\cap E^c)+\mu^*(T\cap E^c\cap M)$.

由外测度的性质: $\mu^*(T\cap M)\le \mu^*(T\cap E\cap M)+\mu^*(T\cap E^c\cap M)$.

所以 E 是 μ^*-可测集.

（iii） E 是 υ^*-可测集, 由（ii）， E 是 μ^*-可测集.

所以由测度论书中 P65 定理 8: $\mu^*\left(E\right)=\mu^*\left(E\cap M\right)+\mu_*\left(E\cap M^c\right)$.

因为 $\mu_*\left(E\cap M^c\right)\le\mu_*\left(M^c\right)$，又因为：

$$\mu_*(M^c)+\mu^*(M)\le\mu^*\left(M\cup M^c\right)=1,\ \mu^*(M)=1$$

所以 $\mu_*(M^c)=0$， $\mu_*\left(E\cap M^c\right)=0$； $\mu^*\left(E\right)=\mu^*\left(E\cap M\right)$ 故 $\upsilon^*(E)=2\mu^*\left(E\right)$． 由于 μ^* 是正则外测度, 所以存在可测覆盖 F , 使得 $\mu^*(F)=\mu^*(A)$.

即: $\mu^*(A)=\inf\left\{\mu^*(E):E\supset A,E\in\overline{S}\right\}$. 这里 $\overline{S}$ 指全体 μ^*-可测集.

所以 $\inf\upsilon^*(E)=2\mu^*(A)$.

（iv） $\overline{S}$ 指全体 μ^*-可测集

考虑: $\overline{\upsilon}^*(E)=\inf\left\{\overline{\upsilon}(F):F\supset E,F\in\overline{S}\right\}$：

对于 M^c , $\overline{\upsilon}^*(M^c)=2\mu^*\left(M^c\right)$，但 $\upsilon^*\left(M^c\right)=\mu^*(M^c)+\mu^*(M^c\cap M)=\mu^*(M^c)$. 而事实上 $\mu^*(M^c)\ne0$ ． 若 $\mu^*(M^c)=0$， 由 $\mu_*(M^c)=0$， 得到 M^c 是 μ^*-可测集. 但事实上 M^c 并不是 μ^*-可测集. 所以 $\mu^*(M^c)\ne0$.即: $\upsilon^*\left(M^c\right)\ne\overline{\upsilon}^*(M^c)$.

即 υ^* 不是正则外测度. 证毕

15. 设 $A,B\subset R^n$， $A\cup B$ 可测，且 $m(A\cup B)<\infty$. 若: $m(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$.

则: A, B 皆为 $Lebesgue$ 可测集.

证明:

由题意, 存在 A 的等测包 H_1, $H_1 \supset A$; 存在 B 的等测包 H_2, $H_2 \supset B$;

且 $m(H_1) = m^*(A), \quad m(H_2) = m^*(B)$, $H_1 \bigcup H_2 \supset A \bigcup B$. 所以:

$$m(H_1 \bigcup H_2) \ge m(A \bigcup B) = m(H_1) + m(H_2)$$

由测度的性质: $m(H_1 \bigcup H_2) \le m(H_1) + m(H_2)$, 所以:

$$m(H_1 \bigcup H_2) = m(H_1) + m(H_2) = m(A \bigcup B).$$

故 $H_1 \bigcup H_2$ 是 $A \bigcup B$ 的等测包,且 $m(H_1 \bigcap H_2) = 0$.

由外测度的性质: $m^*(H_1 \setminus A) \le m(\left(H_1 \bigcup H_2\right) \setminus \left(A \bigcup B\right)) + m^*(\left(H_1 \bigcap H_2\right) \setminus A) = 0$

所以 $m(H_1 \setminus A) = 0$. 故 $H_1 \setminus A$ 可测, 所以 A 可测. 同理可得 B 可测. 证毕

第二章 可测函数

16.设$\{f_k(k)\}$是E上可测函数列（其中E是R^n上的可测集）且：

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),\ a.e.x\in E.$$

若有E上非负可积函数$g(x)$，使$|f_k(x)|\le g(x)\ (k=1,2,\cdots)$．试证明对任给$\varepsilon>0$,

有$\lim\limits_{j\to\infty} m\left(\bigcup\limits_{k\ge j}^{\infty}\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}\right)=0$.

证明：因为$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),\ a.e.x\in E$，对于任意的$\varepsilon>0$，令：

$$E_k(\varepsilon)=\{x\in E,|f_k-f|>\varepsilon\}$$

显然$\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}E_k(\varepsilon)$中的点一定不是收敛点．从而$m(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}E_k(\varepsilon))=0$.

考虑若$x\in\{x\in E,\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k(\varepsilon)\}$，$x$必然属于$\{x\in E,|g(x)|\ge\frac{\varepsilon}{2}\}$，所以：

$$\{x\in E,\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k(\varepsilon)\}\subset\{x\in E,|g(x)|\ge\frac{\varepsilon}{2}\}.$$

因为$g(x)$可积，所以$m(\{x\in E,|g(x)|\ge\frac{\varepsilon}{2}\})<\infty$，

根据递减集合列测度定理，$\lim\limits_{j\to\infty} m\left(\bigcup\limits_{k\ge j}^{\infty}\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\varepsilon\}\right)=0$.　　证毕

17. 设$f(x), f_k(x)(k=1,2,\cdots)$是$E\subset R^1\ (m(E)<\infty)$上正实值可测函数，且有$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)=f(x),\ x\in E$．试证明对任给$\delta>0$存在$A\subset E$以及$k_0, m(A)<\delta$使得当$k>k_0$时，$f_k(x)\le f(x)+\delta,\ x\in E\setminus A$.

证明：

对任给$\delta>0$,令$E_k=\{x\in E, f_k(x)>f(x)+\delta\}$．则考虑$\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}E_k$：

因为$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)=f(x),\ x\in E$，所以$\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j}^{\infty}E_k=\varnothing$．否则，将存在一些点，使在这些点上$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}f_k(x)\ne f(x)$, 所以$\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=j}^{\infty}E_k^c=E$．于是$m(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=j}^{\infty}E_k^c)=m(E)$.

因为 $m(E)<\infty$，所以对于 $\delta>0$，存在 k_0，使得 $m(E-\bigcup_{j=1}^{k_0}\bigcap_{k=j}^{\infty}E_k^c)<\delta$.

则令 $A=E-\bigcup_{j=1}^{k_0}\bigcap_{k=j}^{\infty}E_k^c$，

在 $E-A=\bigcup_{j=1}^{k_0}\bigcap_{k=j}^{\infty}E_k^c$ 上，$k>k_0$ 时，$f_k(x)\le f(x)+\delta$.　　　　证毕

18. 设 (X,R,μ) 是测度空间，$E\subset R$，$\{f_n\}$ 是 E 上可测函数序列，并且 $f_n\overset{\mu}{\Rightarrow}f$（有限函数），证明：必存在子序列 $\{f_{n_\nu}\}$，使得 $\forall\delta>0$，$\exists\,E_\delta\subset E$，$\mu(E-E_\delta)<\delta$，且 $\{f_{n_\nu}\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 f .

证明：

$\because\quad f_n\overset{\mu}{\Rightarrow}f$，$\quad\therefore\quad \mu\left(\{x\in E:|f_n-f|>\varepsilon\}\right)\to 0\ (n\to\infty)$.

取 $\varepsilon=\dfrac{1}{\nu}$，存在 n_ν，使得 $\mu\left(\left\{x\in E:\left|f_{n_\nu}-f\right|>\dfrac{1}{\nu}\right\}\right)<\dfrac{1}{2^\nu}$.

按照这种方法取得 $\{f_{n_\nu}\}$，　其中 $n_\nu<n_{\nu+1}$.

易有：$\sum_{\nu=1}^{\infty}\mu\left(\left\{x\in E:\left|f_{n_\nu}-f\right|>\dfrac{1}{\nu}\right\}\right)<\infty$.　所以：

$$\lim_{j\to\infty}\mu\left(\bigcup_{\nu=j}^{\infty}\left\{x\in E:\left|f_{n_\nu}-f\right|>\frac{1}{\nu}\right\}\right)=0 .$$

于是 $\forall\delta>0$，取 j_k 充分大，使得 $\mu\left(\bigcup_{\nu=j_k}^{\infty}\left\{x\in E:\left|f_{n_\nu}-f\right|>\dfrac{1}{\nu}\right\}\right)<\dfrac{\delta}{2^k}$，$j_k<j_{k+1}$

令 $E_\delta=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{\nu=j_k}^{\infty}\left(\left\{x\in E:\left|f_{n_\nu}-f\right|<\dfrac{1}{\nu}\right\}\right)$，$\mu(E-E_\delta)<\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\delta}{2^k}=\delta$.

下面证明在 E_δ 上 $\{f_{n_\nu}\}$ 一致收敛于 f：

事实上，$\because\ E_\delta=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{\nu=j_k}^{\infty}\left(\left\{x\in E:\left|f_{n_\nu}-f\right|<\dfrac{1}{\nu}\right\}\right)$，对于一切 $x\in E_\delta$，

$\forall\varepsilon>0$，只要 $\exists j_{k_0}$，使得 $\dfrac{1}{j_{k_0}}<\varepsilon$，即 $\nu\ge j_{k_0}$ 时，$\dfrac{1}{\nu}<\varepsilon$，有 $\left|f_{n_\nu}-f\right|<\varepsilon$.

即：$\left\{f_{n_\nu}\right\}$在E_δ 上一致收敛于 f . 证毕

19. 证明:存在$\left[a,b\right]$上一列连续函数$\left\{f_n(x)\right\}$,使得形式级数 $f_1+f_2+f_3+...+f_n+...$ 在不打乱顺序的情况下,可将其中插入括号分段求和后所成的函数项级数(关于 m)几乎处处收敛于任何给定的 $Lebesgue$ 可测函数.

证明:

有理系数多项式全体为一个可列集,将它们排成一列$\left\{\varphi_n(x)\right\}$,作:

$$f_n(x)=\varphi_n(x)-\varphi_{n+1}(x) \qquad \left(\varphi_0(x)=0\right)$$

对于任意的 $Lebesgue$ 可测函数 $f(x)$，存在多项式函数 $P_n(x)\to f(x), a.e. x\in\left[a,b\right]$

对于每一个 $P_k(x)$,$\exists\varphi_{n_k}(x)\in\left\{\varphi_n(x)\right\}$ $\left(n_k>n_{k-1}\right)$,使得 $\left|P_k(x)-\varphi_{n_k}(x)\right|<\dfrac{1}{k}$.

在 $P_n(x)$ 收敛于 $f(x)$ 的集合上,考虑将 $f_1+f_2+f_3+...+f_n+...$ 加括号:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(f_{n_{k+1}}+......+f_{n_k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_{n_k}-\varphi_{n_{k+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\varphi_{n_k}-\varphi_{n_{k+1}}\right)=\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}$$

于是 $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\varphi_{n_k}-f\right|\le\lim\limits_{k\to\infty}\left(\left|\varphi_{n_k}-p_n\right|+\left|p_n-f\right|\right)=0$.

得到 $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_{n_k}=f$,即: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(f_{n_{k+1}}+......+f_{n_k}\right)=f \quad a.e. x\in\left[a,b\right]$ 证毕

20. 设 $f(x), f_1(x), f_2(x), ...f_k(x)...$ 是$\left[a,b\right]$上几乎处处有限的可测函数，且有：

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x) \quad a.e. x\in\left[a,b\right]$$

则存在 $E_n\subset\left[a,b\right]$，使得 $m\left(\left[a,b\right]\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0$，而 $f_k(x)$ 在每一个 E_n 上一致收敛于 $f(x)$.

证明：

由 ЕГОРОВ 定理： 对于$\dfrac{1}{n}$,存在 B_n，使得 $m(B_n)<\dfrac{1}{n}$. 在$\left[a,b\right]\backslash B_n$ 上，$\left\{f_k(x)\right\}$一致收敛于 $f(x)$.

取 $E_n=\left[a,b\right]\backslash B_n$， $m(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n)=0.$ 因为$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n=\left[a,b\right]\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$

所以$m\left(\left[a,b\right]\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0$，而$f_k(x)$在每一个$E_n$上一致收敛于$f(x)$.　　证毕

21. 设(X,R,μ)是测度空间，　$\mathrm{E}\subset X$，$\{f_n\}$是E上的可测函数列，$\mu(\mathrm{E})<+\infty$，$f_n\xrightarrow[\mu]{\bullet}\infty$. 则对$\forall\delta>0$，$\exists$E的可测子集　E_δ，使得$\mu(\mathrm{E}-\mathrm{E}_\delta)<\delta$，且$\{f_n\}$在$\mathrm{E}_\delta$上均匀发散与$\infty$.

（即对任何$m>0$，$\exists N>0$，使$n\geq N$，对一切$x\in\mathrm{E}_\delta$，　$f_n(x)\geq M$）.

证明：$\because$ $f_n\xrightarrow[\mu]{\bullet}\infty$，$\mu(\mathrm{E})<+\infty$，$\therefore$考虑集合$\{x\in\mathrm{E}:|f_n|\geq M\}$（$M$为任意自然数），

令$F=\bigcap_{M=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\{x\in\mathrm{E}:|f_n|\geq M\}$：则$\mu(F)=\mu(\mathrm{E})$，$\left(x\in F:f_n(x)\to\infty\right)$.

令$F_m=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=k}^{\infty}\{x\in\mathrm{E}:|f_n|\geq M\}$，　$\therefore\lim\limits_{m\to+\infty}\mu(F_m)=\mu(\mathrm{E})$，　$\mu(\mathrm{E}-F)=0$.

这里$\mathrm{E}-F=\bigcup_{M=1}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in\mathrm{E}:|f_n|\leq M\}$，　$\mu(\mathrm{E}-F)=0$.

$\therefore\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in\mathrm{E}:|f_n|\leq M\})=0\ \therefore\lim\limits_{k\to+\infty}\mu(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in\mathrm{E}:|f_n|\leq M\})=0$

于是$\forall\delta>0$，对于每一个M_k，存在一个n_k，使$\mu(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in\mathrm{E}:|f_n|\leq M_k\})<\dfrac{\delta}{2^k}$

这里$M_k=K$（不妨取$n_k>n_{k-1}$）.

$\therefore\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in\mathrm{E}:|f_n|\leq M_k\})\leq\sum_{k=1}^{\infty}\mu(\bigcup_{n=n_k}^{\infty}\{x\in\mathrm{E}:|f_n|\leq M_k\})<\delta$，

令$\mathrm{E}_\delta=\mathrm{E}-\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\{x\in\mathrm{E}:|f_n|\leq M_k\}$，则在$\mathrm{E}_\delta=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=n_k}^{\infty}\{x\in\mathrm{E}:|f_n|\geq M_k\}$上有：

$\forall M>0$，$\exists M_k>M$，使$\forall x\in\mathrm{E}_\delta$，$|f_n|\geq M$，　$n\geq n_k$，

即：f_n在E_δ上均收敛于$+\infty$.　　证毕

22. 设$f(x),g(x)$是$\left[a,b\right]$上严格递减的连续函数.且对任意的$t\in R^1$,有:

$$m\left(\left\{x\in\left[a,b\right]: f(x)>t\right\}\right)=m\left(\left\{x\in\left[a,b\right]: g(x)>t\right\}\right).$$

则 $f(x)=g(x)\quad x\in\left[a,b\right]$.

证明:

取 $t=f(a)$, $m\left(\left\{x\in\left[a,b\right]: f(x)>f(a)\right\}\right)=0$. 所以:

$$m\left(\left\{x\in\left[a,b\right]: g(x)>f(a)\right\}\right)=0 .(*)$$

由于 $f(x),g(x)$ 是 $\left[a,b\right]$ 上严格递减的连续函数.所以(*)说明 $f(a)\ge g(a)$.

取 $t=g(a)$, $m\left(\left\{x\in\left[a,b\right]: g(x)>g(a)\right\}\right)=0$. 所以:

$$m\left(\left\{x\in\left[a,b\right]: f(x)>g(a)\right\}\right)=0 .(**)$$

所以(**)说明: $f(a)\le g(a)$. 故 $f(a)=g(a)$.

对于 $t=f(x_0), x_0\in(a,b]$:

$m\left(\left\{x\in\left[a,b\right]: f(x)>f(x_0)\right\}\right)=x_0-a$,

所以: $m\left(\left\{x\in\left[a,b\right]: g(x)>f(x_0)\right\}\right)=x_0-a$. 故 $f(x_0)\ge g\left(x_0\right)$;

对于 $t=g(x_0), x_0\in(a,b]\Rightarrow f(x_0)\le g\left(x_0\right)$.所以 $f(x_0)=g\left(x_0\right)$.

所以 $f(x)=g(x).\quad x\in\left[a,b\right]$. 证毕

23. 设 f 是有界变差函数，对任何分点 $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$，记号:

$$p_f(x_0,x_1,\ldots x_n)=\sum{}'(f(x_i)-f(x_{i-1}))$$

$\sum{}'$ 表示满足 $f(x_i)-f(x_{i-1})\ge 0$ 的 i 的求和，称 $p_f(x_0,x_1,\ldots x_n)$ 为正变差，而称 $\overset{b}{\underset{a}{P}}(f)=\sup\{p_f(x_0,\ldots x_n)\}$ 为正全变差.

则 (i): 对任何 $c(a<c<b)$, $\overset{b}{\underset{a}{P}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{P}}+\overset{b}{\underset{c}{P}}$;

(ii): $\overset{x}{\underset{a}{P}}(f)=p(x)$，这里 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的正变差函数.

证明: (i) $\forall\varepsilon>0$，在 $[a,c]$，$[c,b]$ 上分别取分点:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=c,\quad c=x_0'<x_1'<\ldots<x_m'=b,$$

使 $p_f(x_0,x_1,\dots x_n) > \overset{c}{\underset{a}{P}}(f)-\varepsilon$， $p_f(x_0^{'},x_1^{'},\dots x_m^{'}) > \overset{b}{\underset{c}{P}}(f)-\varepsilon$.

$\overset{b}{\underset{a}{P}}(f) \ge p_f(x_0,x_1,\dots x_n,x_0^{'},x_1^{'},\dots x_m^{'})$

$= p_f(x_0,x_1,\dots x_n)+p_f(x_0^{'},x_1^{'},\dots x_m^{'}) > \overset{c}{\underset{a}{P}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{P}}(f) \to \varepsilon$

令 $\varepsilon \to 0$，便有 $\overset{b}{\underset{a}{P}}(f) \ge \overset{c}{\underset{a}{P}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{P}}(f)$

另：$\forall \varepsilon>0$，$\exists [a,b]$ 上的一个分点 $x_0\dots x_n$ 使 $p_f(x_0,x_1,\dots x_n) > \overset{b}{\underset{a}{P}}(f)-\varepsilon$.

设 $x_{k-1}<c\le x_k$ 作分点：$x_0\dots x_{k-1},c,x_k\dots x_n$.

于是：

$\overset{b}{\underset{a}{P}}(f)-\varepsilon < p_f(x_0,x_1,\dots x_n) \le p_f(x_0,x_1,\dots x_{k-1},c,x_k\dots x_n)$

$$= p_f(x_0,x_1,\dots x_{k-1},c)+ p_f(c,x_k\dots x_n) \le \overset{c}{\underset{a}{P}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{P}}(f)$$

令 $\varepsilon \to 0$，$\overset{b}{\underset{a}{P}}(f) \le \overset{c}{\underset{a}{P}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{P}}(f)$，$\therefore \overset{b}{\underset{a}{P}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{P}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{P}}(f)$.

(ii) $P(x)=\dfrac{1}{2}\{\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)+f(x)-f(a)\}$

题目即证：$\overset{x}{\underset{a}{P}}(f)=\dfrac{1}{2}\{\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)+f(x)-f(a)\}$

$\because$ $f(x)-f(a)=p(x)-n(x)$，令 $n(x)=-h(x)$

$\therefore$ $f(x)-f(a)=p(x)+h(x)$，$\overset{b}{\underset{a}{P}}(f(x)-f(a))=\overset{b}{\underset{a}{P}}(f(x))$

$\therefore \overset{b}{\underset{a}{P}}(f(x))=\overset{b}{\underset{a}{P}}(p(x)-h(x))$，事实上由定义得

$\sum{}^{'}\left(p(x_i)+h(x_i)-p(x_{i-1})-h(x_{i-1})\right) \le \sum{}^{'}\left(p(x_i)-p(x_{i-1})\right)+\sum{}^{'}\left(h(x_i)-h(x_{i-1})\right)$

$\therefore \overset{b}{\underset{a}{P}}(f(x)) \le \overset{b}{\underset{a}{P}}(p(x))+\overset{b}{\underset{a}{P}}(h(x))=P(b)$

下证 $\overset{b}{\underset{a}{P}}(f(x)) \ge P(b)$，对于 $\overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)$，$\forall \varepsilon>0$，存在一个分法：

$$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$$

使 $\sum|f(x_i)-f(x_{i-1})| \ge \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)-\varepsilon$

令 $\sum{}^{''}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ 表示 $f(x_i)-f(x_{i-1})\le 0$ 时绝对值求和

即 $\sum{}^{'}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)+\sum{}^{''}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right) \ge \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x)-\varepsilon$.

$\sum\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)+\sum{}^{'}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)+\sum{}^{''}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)$

$$\geq \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) - \varepsilon + \sum \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right)$$

$$\therefore 2\sum{}' \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) \geq \overset{b}{\underset{a}{V}} f(x) + f(b) - f(a) - \varepsilon$$

$$\therefore \sum{}' \left(f(x_i) - f(x_{i-1}) \right) \geq \frac{1}{2}\{\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + f(b) - f(a)\} - \varepsilon = P(b) - \varepsilon$$

$\therefore \overset{b}{\underset{a}{P}}(f) \geq P(b) - \varepsilon$，由 ε 的任意性，得 $\overset{b}{\underset{a}{P}}(f) \geq P(b)$.

$$\therefore \overset{b}{\underset{a}{P}}(f) = P(b)$$

对于任意的 x， $\overset{x}{\underset{a}{P}}(f) = p(x)$ 也类似成立. 证毕

第三章　　积分论

24. 设(X,R,μ)是测度空间,$1\le p<\infty,0<\eta<p$．如果：

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|^p d\mu=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_X |g_n-g|^p d\mu=0$$

试证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_X |f_n|^{p-\eta}|g_n|^{\eta}d\mu=\int_X |f|^{p-\eta}|g|^{\eta}d\mu$

证明：先证明三个引理：

引理 1：$a\ge 0,b\ge 0,\ p>1,$则$a^p+b^p\le (a+b)^p$.

证明：不妨设$a>b>0$，$(a+b)^p-a^p=p\xi^{p-1}b$，这里$a<\xi<a+b$，

$\therefore p\xi^{p-1}b>\xi^{p-1}b>a^{p-1}b>b^{p-1}b>b^p$，

$\therefore (a+b)^p>a^p+b^p$，其它情形会出现等号成立的情形.

引理 2:设(X,R,μ)是测度空间,f是可积函数,则存在一个$\sigma-$有限测度集合E,使得$\int_E fd\mu=\int_X fd\mu$.

证明:

$\because f$可积,$\therefore |f|$可积,所以$\int_X |f|d\mu<+\infty$．令$E_N=X(N<|f|\le N+1),N=0,1,2,\ldots$

$$N\mu(E_N)\le\int_{E_N}|f|d\mu<\int_X |f|d\mu<+\infty,\text{所以 }\mu(E_N)<+\infty.$$

设$E=\{x\in X:|f(x)|\ne 0\}$, $E=\bigcup\limits_{N=0}^{\infty}E_N$,所以$E$是一个$\sigma-$有限测度集合,且$\int_E fd\mu=\int_X fd\mu$.

引理 3: :设(X,R,μ)是测度空间. f_n,f是非负可测函数, $f_n\in L^p(X),f\in L^p(X)$,

$p>1,$则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|^p d\mu=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\int_X |f_n^p-f^p|d\mu=0$.

证明:$\Rightarrow$

由引理 2，存在E_n使得$\int_{E_n}|f_n|^p d\mu=\int_X |f_n|^p d\mu$，$E_n$是一个$\sigma-$有限测度集合．令$A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，易见$A$是一个$\sigma-$有限测度集合，令$B=\{x\in X:|f(x)|\ne 0\}$，$B$也是一个$\sigma-$有限测度集合，令$S=A\bigcup B$，所以$S$是一个$\sigma-$有限测度集合.

且$\int_X |f_n-f|^p d\mu=\int_S |f_n-f|^p d\mu$.

$\because \int_S |f_n|^p d\mu \le 2^p(\int_S |f_n-f|^p d\mu+\int_S |f|^p d\mu)$.

$\forall \varepsilon>0$,对于S，存在一个E，使得$\mu(E)<\infty, \int_{S-E} |f|^p d\mu<\varepsilon$.

调整ε，能达到以下结果：

$\forall \varepsilon>0$,对于S，存在一个F，使得$\mu(F)<\infty, \int_{S-F} |f|^p d\mu<\frac{\varepsilon}{3}, \int_{S-F} |f_n|^p d\mu<\frac{\varepsilon}{3}$

$n=1,2,3,\ldots\ldots$

（事实上$\lim\limits_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|^p d\mu=0$在这一个过程中起着至关重要的作用.）

由闵可夫斯基不等式：

$$\left(\int_F |f_n|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_F |f_n-f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_F |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_F |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_F |f_n-f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_F |f_n|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\int_F f_n^p d\mu=\int_F f^p d\mu$，

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\int_X |f_n-f|^p d\mu=0$，所以在$X$上$f_n \Rightarrow f$．注意到在$F$上，$\mu(F)<\infty$，$\therefore f_n{}^p \Rightarrow f^p$．

由周民强《实变函数论》第 177 页结论：

在F上$\lim\limits_{n\to\infty}\int_F \left|f_n^p-f^p\right| d\mu=0$，

即：$\forall \varepsilon>0, \exists N$, 当$n\ge N$时，$\int_F \left|f_n^p-f^p\right| d\mu<\frac{\varepsilon}{3}$，

$\int_X \left|f_n^p-f^p\right| d\mu<\int_F \left|f_n^p-f^p\right| d\mu+\int_{S-F} |f|^p d\mu+\int_{S-F} |f_n|^p d\mu<\varepsilon$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\int_X \left|f_n{}^p-f^p\right| d\mu=0$.

$\Leftarrow$

$\because f_n\ge 0, f\ge 0$, 当$f_n(x)>f(x)$时，$f_n(x)-f(x)>0$.

由引理 1：

$\therefore [f_n-f]^p+[f]^p \le [f_n]^p, \therefore [f_n-f]^p \le [f_n]^p-[f]^p$

当$f_n(x)<f(x)$时，$f_n(x)-f(x)<0$

同样有：$\therefore [f-f_n]^p \le [f]^p-[f_n]^p$，

$\therefore \left|f_n - f\right|^p \le \left|f_n{}^p - f^p\right|$，

所以：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_X \left|f_n^p - f^p\right| d\mu = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int_X \left|f_n - f\right|^p d\mu = 0$.

下证本题：

$\because \int_X \left|f_n - f\right|^p d\mu \to 0, \therefore \int_X \left\|f_n\right| - \left|f\right\|^p d\mu \to 0$ ，

由引理 3 $\therefore \int_X \left|\left|f_n\right|^p - \left|f\right|^p\right| d\mu \to 0, \quad (n\to\infty)$

$$\therefore \int_X \left|(\left|f_n\right|^{p-\eta})^{\frac{p}{p-\eta}} - (\left|f\right|^{p-\eta})^{\frac{p}{p-\eta}}\right| d\mu \to 0, \quad (n\to\infty)$$

再由引理 3：$\therefore \int_X \left|\left|f_n\right|^{p-\eta} - \left|f\right|^{p-\eta}\right|^{\frac{p}{p-\eta}} d\mu \to 0, \quad (n\to\infty)$ （2）

同理有 $\therefore \int_X \left|\left|g_n\right|^{\eta} - \left|g\right|^{\eta}\right|^{\frac{p}{\eta}} d\mu \to 0, \quad (n\to\infty)$ （3）

$\because \int_X \left|f_n - f\right|^p d\mu \to 0 \quad (n\to\infty)$

$$\therefore \int_X \left|f_n\right|^p d\mu \le 2^p \left(\int_X \left|f\right|^p d\mu + \int_X \left|f_n - f\right|^p d\mu\right)$$

所以 $\exists M_1$, 使得 $\int_X \left|f_n\right|^p d\mu \le M_1, \int_X \left|f\right|^p d\mu \le M_1, \quad n = 1, 2 \ldots$

同理 $\exists M_2$, $\int_X \left|g_n\right|^p d\mu \le M_2, \int_X \left|g\right|^p d\mu \le M_2, \quad n = 1, 2 \ldots$

$$\therefore \left|\int_X \left|f_n\right|^{p-\eta} \left|g_n\right|^{\eta} d\mu - \int_X \left|f\right|^{p-\eta} \left|g\right|^{\eta} d\mu\right|$$

$$= \left|\int_X \left|f_n\right|^{p-\eta} \left|g_n\right|^{\eta} d\mu - \int_X \left|f_n\right|^{p-\eta} \left|g\right|^{\eta} d\mu + \int_X \left|f_n\right|^{p-\eta} \left|g\right|^{\eta} d\mu - \int_X \left|f\right|^{p-\eta} \left|g\right|^{\eta} d\mu\right|$$

$$\le \int_X \left|f_n\right|^{p-\eta} \left|\left|g_n\right|^{\eta} - \left|g\right|^{\eta}\right| d\mu + \int_X \left|g\right|^{\eta} \left|\left|f_n\right|^{p-\eta} - \left|f\right|^{p-\eta}\right| d\mu \text{；}$$

$$\int_X \left|f_n\right|^{p-\eta} \left|\left|g_n\right|^{\eta} - \left|g\right|^{\eta}\right| d\mu \le \left(\int_X [\left|f_n\right|^{p-\eta}]^{\frac{p}{p-\eta}} d\mu\right)^{\frac{p-\eta}{p}} \left(\int_X \left|\left|g_n\right|^{\eta} - \left|g\right|^{\eta}\right|^{\frac{p}{\eta}} d\mu\right)^{\frac{\eta}{p}}$$

$$\le M_1^{\frac{p-\eta}{p}} \left(\int_X \left|\left|g_n\right|^{\eta} - \left|g\right|^{\eta}\right|^{\frac{p}{\eta}} d\mu\right)^{\frac{\eta}{p}} \xrightarrow{(3)} 0 \quad (n\to\infty)$$

$$\int_X \left|g\right|^{\eta} \left|\left|f_n\right|^{p-\eta} - \left|f\right|^{p-\eta}\right| d\mu$$

$$\le M_2^{\frac{\eta}{p}} \left(\int_X \left|\left|f_n\right|^{p-\eta} - \left|f\right|^{p-\eta}\right|^{\frac{p}{p-\eta}} d\mu\right)^{\frac{p-\eta}{p}} \xrightarrow{(2)} 0 \ (n\to\infty)$$

$$\therefore \left|\int_X |f_n|^{p-\eta}|g_n|^{\eta}\,d\mu-\int_X |f|^{p-\eta}|g|^{\eta}\,d\mu\right|\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_X |f_n|^{p-\eta}|g_n|^{\eta}\,d\mu=\int_X |f|^{p-\eta}|g|^{\eta}\,d\mu$. 证毕

25. 设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上的连续函数序列，且 f_n 处处收敛到$[a,b]$上的 *Lebesgue* 可积函数 f ，问等式：$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[a,b]} f_n(x)dx=\int\limits_{[a,b]} f(x)dx$ 是一定成立？

解：不一定成立；举个反例：

令：$f_n(x)=\dfrac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+x^2} \quad x\in[0,1] \qquad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}\infty & x=0\\ 0 & x\in(0,1]\end{cases} \qquad \int\limits_{[0,1]} f(x)dx=0$$

但$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[0,1]} f_n(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[0,1]}\dfrac{n}{1+(nx)^2}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}\neq 0$

所以不一定成立. 解毕

26. 设$\{f_n(x)\}$是 E 上的可积函数序列, 且一致收敛至 $f(x)$.

问(1) $f(x)$ 在 E 上是否可积?

(2)等式$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E f_n(x)dx=\int\limits_E f(x)dx$ 是否一定成立?

解(1) $m(E)<\infty$ 时, $f(x)$ 可积.

事实上: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n\geq N$ 时:

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{m(E)+1}$$

所以$|f(x)|<|f_N(x)|+\dfrac{\varepsilon}{m(E)+1}$, 这里$\dfrac{\varepsilon}{m(E)+1}\in L(E)$. 故 $f(x)$ 可积.

当 $m(E)=\infty$, 不一定成立;

考虑: $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x^2+k^2} \qquad x\in(0,+\infty)$

因为 $\frac{1}{x^2+k^2}\le\frac{1}{k^2}$，所以 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+k^2}$ 一致收敛. 即: $f_n(x)$ 一致收敛至 $f(x)$

$$\int_{(0,+\infty)} f_n(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(0,+\infty)}\frac{1}{x^2+k^2}dx<\infty$$

但 $\int_{(0,+\infty)} f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{k}=\infty$,即: $f(x)$ 在 E 上不可积.

(2) $m(E)<\infty$ 时, 等式成立.

由(1) : $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n\ge N$ 时:

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{m(E)+1}$$

所以当 $n\ge N$ 时: $\int_E\left|f_n(x)-f(x)\right|dx<\frac{\varepsilon}{m(E)+1}\cdot m(E)<\varepsilon$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E\left|f_n(x)-f(x)\right|dx=0$

成立: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx$.

当 $m(E)=\infty$, 不一定成立;

令: $f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^n} & x\in(0,2^n]\\ 0 & x\in\left(2^n,\infty\right)\end{cases}$

显然 $f_n(x)$ 一致收敛至 0.

但是 $\int_E f_n(x)dx=1$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\ne\int_E f(x)dx$ 解毕

27. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x), x\in E, \mu(E)<+\infty$,且 $\int_E\left|f_k(x)\right|^r d\mu\le M\,(k=1,2,\ldots)$, $0<r<\infty$.

则对 $0<p<r$, 有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E\left|f_k(x)-f(x)\right|^p d\mu=0$.

证明: 考虑 $\frac{r}{p}=q$, 令: $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$,对 E 的任何可测子集 e :

$$\int_e\left|f_k(x)\right|^p d\mu\le\left(\int_e\left|f_k(x)\right|^{pq}d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_e 1d\mu\right)^{\frac{1}{q'}}\le M^{\frac{1}{q}}\mu(e)^{\frac{1}{q'}}$$

于是:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, as\ \mu(e) < \delta, \int_e |f_k(x)|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{4\cdot 2^p}, (k=1,2...)\quad \int_e |f(x)|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{4\cdot 2^p}$

因为 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), x \in E, \mu(E) < +\infty$,所以 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛与 $f(x)$.

即：$\forall \varepsilon > 0$, $\mu\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2(\mu(E)+1)^{\frac{1}{p}}}\} \to 0, as\ k \to \infty$

于是对于 δ ,$\exists K$, 当 $k > K$ 时 $\mu\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2(\mu(E)+1)^{\frac{1}{p}}}\} < \delta, as\ k \to \infty$

令 $E_k = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2(\mu(E)+1)^{\frac{1}{p}}}\}$;

对于 $k > K$ ：

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|^p d\mu = \int_{E-E_k} |f_k(x) - f(x)|^p d\mu + \int_{E_k} |f_k(x) - f(x)|^p d\mu$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2(\mu(E)+1)}\mu(E) + 2^p(\int_{E_k} |f_k(x)|^p d\mu + \int_{E_k} |f(x)|^p d\mu) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon .$$

即: $\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|^p d\mu = 0$ 证毕.

28. 设 $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(E), f_k \in L^p(E)\ (k=1,2,...)$ 且有 $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x). a.e. x \in E$

$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x)|^p d\mu = \int_E |f(x)|^p d\mu$,则 $\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|^p d\mu = 0$（$\mu$ 是 σ 一有限测度）.

证明:

因为 $\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(x)|^p d\mu = \int_E |f(x)|^p d\mu$, $|f_k(x)|^p > 0, |f(x)|^p > 0$

由周民强《实变函数论》第 177 页结论：

$$\lim_{k\to\infty} \int_E \left| |f_k(x)|^p - |f(x)|^p \right| d\mu = 0 .$$

则对于 E 的任意可测子集 e , $\lim_{k\to\infty} \int_e \left| |f_k(x)|^p - |f(x)|^p \right| d\mu = 0$;

易有下面的性质:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists F \subset E, \mu(F) < +\infty, \int_{E-F} |f(x)| d\mu < \varepsilon$$

令 $G = E - F$,故 $\lim_{k\to\infty} \int_G \left| |f_k(x)|^p - |f(x)|^p \right| d\mu = 0$,即:

$$\lim_{k\to\infty}\int_G\left|f_k(x)\right|^p d\mu=\int_G\left|f(x)\right|^p d\mu .$$

于是存在k_1, 当$k>k_1$, $\int_G\left|f_k(x)\right|^p d\mu<2\varepsilon$.

由于$\forall\varepsilon>0,\exists\delta,\mu(e)<\delta,\int_e\left|f(x)\right|^p d\mu<\varepsilon$，且在$F$ 上：

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x).\ a.e.\ x\in F$$

由叶果洛夫定理：对于$\delta>0,\exists e_\delta$, 使得$\mu(e_\delta)<\delta$.在$F-e_\delta$上, f_k 一致收敛于 f ,

且 $\int_{e_\delta}\left|f(x)\right|^p d\mu<\varepsilon$. 同时存在k_2, 当$k>k_2$, $\int_{e_\delta}\left|f_k(x)\right|^p d\mu<2\varepsilon$. 于是：

$$\forall\varepsilon>0\text{ ,存在}k_3,\text{ 当}k>k_3,\ \left|f_k(x)-f(x)\right|<\left(\frac{\varepsilon}{\mu(F)}\right)^{\frac{1}{p}} .$$

所以：

$$\forall\varepsilon>0\text{ ,存在}k_0=\max\{k_1,k_2,k_3\},\text{ 当}k>k_0\text{时}$$

$$\int_E\left|f_k(x)-f(x)\right|^p d\mu$$

$$\le 2^p\left(\int_G\left|f_k(x)\right|^p d\mu+\int_G\left|f(x)\right|^p d\mu\right)+2^p\left(\int_{e_\delta}\left|f_k(x)\right|^p d\mu+\int_{e_\delta}\left|f(x)\right|^p d\mu\right)$$

$$+\int_{F-e_\delta}\left|f_k(x)-f(x)\right|^p d\mu=2^p\cdot 2\varepsilon+2^p\cdot 2\varepsilon+\varepsilon .$$

即：$\lim_{k\to\infty}\int_E\left|f_k(x)-f(x)\right|^p d\mu=0$. 证毕

29. 设$1\le p<\infty$, $f_k\in L^p(E)\ (k=1,2,\ldots)$ 且：

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x).\ a.e.\ x\in E\ ,\sup\left\|f_k\right\|_p\le M .$$

则$\forall g\in L^{p'}(E)$ (p' 是 p 的共轭指标)有：$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)g(x)dm=\int_E f(x)g(x)dm$.

证明:

不妨设$m(E)=\infty$,$\because g\in L^{p'}(E)$, $\therefore\left|g\right|\in L^{p'}(E)$，于是：

$$\forall\varepsilon>0,\exists F\subset E,m(F)<+\infty,\int_{E-F}\left|g(x)\right|^{p'}dm<\varepsilon^{p'}\text{ 且}$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta,m(e)<\delta,\int_e\left|g(x)\right|^{p'}dm<\varepsilon^{p'} .$$

由叶果洛夫定理：$\exists e_\delta$, $m(e_\delta)<\delta$，在$F-e_\delta$上, f_k 一致收敛于 f .

即：$\forall \varepsilon > 0$,存在k_0, 当$k > k_0$, $\left|f_k(x) - f(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{m(F)^{\frac{1}{p}}}$.

所以 $\forall \varepsilon > 0$,存在k_0, 当$k > k_0$时：

$$\int_E \left|f_k(x)g(x) - f(x)g(x)\right| dm$$

$$\leq \int_{E-F} \left|f_k(x)g(x) - f(x)g(x)\right| dm + \int_{F-e_\delta} \left|f_k(x)g(x) - f(x)g(x)\right| dm$$

$$+\int_{e_\delta} \left|f_k(x)g(x) - f(x)g(x)\right| dm$$

$$\leq 2[\int_{E-F} \left|f_k(x)\right|^p dm + \int_{E-F} \left|f(x)\right|^p dm]^{\frac{1}{p}} \left(\int_{E-F} \left|g(x)\right|^{p'} dm\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$+2[\int_{e_\delta} \left|f_k(x)\right|^p dm + \int_{e_\delta} \left|f(x)\right|^p dm]^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_\delta} \left|g(x)\right|^{p'} dm\right)^{\frac{1}{p'}} + \varepsilon \int_E \left|g(x)\right|^{p'} dm$$

$$\leq 2\varepsilon(2M^p + 2M^p)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon \int_E \left|g(x)\right|^{p'} dm$$

注意到ε的任意性,即$\lim\limits_{k\to\infty} \int_E \left|f_k(x)g(x) - f(x)g(x)\right| dm = 0$.

进一步得到: $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)g(x)dm = \int_E f(x)g(x)dm$. 证毕.

30. 已知 $f(x) \in L^2(R)$, $f_k(x) = \sqrt{k} f(kx), k \in N$. 则$\forall g(x) \in L^2(R)$, 有：

$$\lim_{k\to\infty} \int_R f_k(x)g(x)dm = 0$$

证明：

$$\int_R f_k(x)g(x)dm = \sqrt{k}\int_R f(kx)g(x)dm = \frac{1}{\sqrt{k}}\int_R f(x)g(\frac{x}{k})dm$$

令：$g_k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{k}} g(\dfrac{x}{k})$，$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{k}} g(\dfrac{x}{k}) = 0$；事实上问题即证：

$$\lim_{k\to\infty} \int_R f(x)g_k(x)dm = 0$$

考虑$\int_R g_k^2(x)dm = \dfrac{1}{k}\int_R g^2(\dfrac{x}{k})dm = \int_R g^2(x)dm = M^2$

$\because$ $f(x) \in L^2(R)$，$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$，使得$\left(\int_{R-[-A,A]} f^2(x)dm\right)^{\frac{1}{2}} < \dfrac{\varepsilon}{2M}$.

设$\left(\int_R f^2(x)dm\right)^{\frac{1}{2}}=Q$，考虑：

$$\left|\int_R f(x)g_k(x)dm\right|<\int_R\left|f(x)g_k(x)\right|dm=\int_{[-A,A]}\left|f(x)g_k(x)\right|dm+\int_{R-[-A,A]}\left|f(x)g_k(x)\right|dm$$

$$\leq\left(\int_{R-[-A,A]} f^2(x)dm\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_R g_k^2(x)dm\right)^{\frac{1}{2}}+\int_{[-A,A]}\left|f(x)g_k(x)\right|dm$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\int_{[-A,A]}\left|f(x)g_k(x)\right|dm$$

在$\left[-A,A\right]$上，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta,$当$me<\delta$，$\left(\int_e f^2(x)dm\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{4M}$

g_k^2依测度收敛于0，$\therefore\forall\varepsilon>0,m(E_k)\to 0(k\to\infty)$.

这里：$E_k=\{x\in[-A,A]:g_k^2>\frac{\varepsilon^2}{32AQ^2}\}$. 所以：

$\exists K,$当$k>K$时，$m(E_k)<\delta$；

$$\int_{[-A,A]}\left|f(x)g_k(x)\right|dm$$

$$\leq\left(\int_{E_k} f^2(x)dm\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_R g_k^2(x)dm\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_{[-A,A]-E_k} f^2(x)dm\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{[-A,A]-E_k} g_k^2(x)dm\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$<\frac{\varepsilon}{4M}M+\left(\frac{\varepsilon^2}{32AQ^2}2A\right)^{\frac{1}{2}}Q=\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以$\exists K,$当$k>K$时$\left|\int_R f(x)g_k(x)dm\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

$\therefore\lim\limits_{k\to\infty}\int_R f_k(x)g(x)dm=0$. 证毕.

31. 已知: $f_n(x)$是R上的可测函数列，$f(x)\in L(R),$且$\lim\limits_{n\to\infty}\int_R\left|f_k(x)-f(x)\right|dm=0$.

则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_R\left|e^{-\frac{|x|}{k}}f_k(x)-f(x)\right|dm=0$.

证明:

$\because f(x)\in L(R),\therefore\forall\varepsilon>0,\exists A>0$,使得$\int_{R-[-A,A]}\left|f(x)\right|dm<\frac{\varepsilon}{16}$

$\therefore\forall\varepsilon>0,\exists k_1,$当$k>k_1$时：

$$\int_{R-[-A,A]}\left|f_k(x)\right|dm<\int_{R-[-A,A]}\left|f(x)\right|dm+\int_R\left|f_k(x)-f(x)\right|dm$$

$$<\frac{\varepsilon}{16}+\frac{\varepsilon}{16}=\frac{\varepsilon}{8};$$

所以当 $k>k_1$ 时：

$$\int_R\left|e^{-\frac{|x|}{k}}f_k(x)-f(x)\right|dm< \int_{[-A,A]}\left|e^{-\frac{|x|}{k}}f_k(x)-f(x)\right|dm+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_R\left|f_k(x)-f(x)\right|dm=0$,所以 $f_k(x)$ 在 $[-A,A]$ 上依测度收敛于 $f(x)$,

$e^{-\frac{|x|}{k}}$ 在 $[-A,A]$ 上依测度收敛于 1． 由于 $m([-A,A])<\infty$,所以：

$e^{-\frac{|x|}{k}}f_k(x)$ 在 $[-A,A]$ 上依测度收敛于 $f(x)$.

对于 $\frac{\varepsilon}{8A+1}$,令 $E_k=\{x\in[-A,A]:\left|e^{-\frac{|x|}{k}}f_k(x)-f(x)\right|>\frac{\varepsilon}{8A+1}\}$

故 $m(E_k)\to 0$． $\because\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $me<\delta$, $\int_e\left|f(x)\right|dm<\frac{\varepsilon}{18}$.

对于 $\delta>0$, $\exists k_2$, 当 $k>k_2$ 时, $m(E_k)<\delta$, 这里取 $k_2>k_1$

$$\int_{[-A,A]}\left|e^{-\frac{|x|}{k}}f_k(x)-f(x)\right|dm<\int_{E_k}\left|f(x)\right|dm+\int_{E_k}\left|f_k(x)\right|dm+\frac{\varepsilon}{8A+1}\cdot 2A$$

$$<\int_{E_k}\left|f(x)\right|dm+\int_R\left|f_k(x)-f(x)\right|dm+\int_{E_k}\left|f(x)\right|dm+\frac{\varepsilon}{4}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\int_R\left|f_k(x)-f(x)\right|dm<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{16}.$$

所以 $\exists k_2$, 当 $k>k_2$ 时：

$\int_R\left|e^{-\frac{|x|}{k}}f_k(x)-f(x)\right|dm<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_R\left|e^{-\frac{|x|}{k}}f_k(x)-f(x)\right|dm=0$. 证毕

32. 设 g 是 E 上的几乎处处有限的可测函数, $p>1$,设 q 是 p 的共轭数,若 $\forall f\in L^p(E)$, $fg\in L^1(E)$,则 $g\in L^q(E)$.

证明：

若 $g\notin L^q(E)$,则 $\int_E|g|^q dm=\infty$.

记 $E_k=E\bigcap\left\{x\in R:|x|\le k\right\}\bigcap\left\{x\in R:|g|\le k\right\}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}|g|^q dm=\infty$.

因此：

取 n_1，使得 $\int_{E_{n_1}} |g|^q dm \geq 1$；

取 $n_2 > n_1$，使得 $\int_{E_{n_2}-E_{n_1}} |g|^q dm \geq 2$；

……………………………………

取 $n_k > n_{k-1}$，使得 $\int_{E_{n_k}-E_{n_{k-1}}} |g|^q dm \geq k$；

取 $\{n_k\}$, 则 $n_k > n_{k-1}$，$\infty > \int_{E_{n_k}-E_{n_{k-1}}} |g|^q dm \geq k$；

作函数 $F_k(t) = \int_{S_t \cap (E_{n_k}-E_{n_{k-1}})} |g|^q dm$，这里 $S_t = \{x \in R : |x| \leq t\}$．由积分的绝对连续性，$F_k(t)$ 为 $[k-1.k]$ 上的连续函数．又 $F_k(n_{k-1}) = 0, F_k(n_k) = \int_{E_{n_k}-E_{n_{k-1}}} |g|^q dm \geq k$，所以：

$$\exists t_0, \quad s.t. \quad F_k(t_0) = k .$$

记 $F_k = S_{t_0} \cap (E_{n_k} - E_{n_{k-1}})$,作函数 $h(x) = \begin{cases} \dfrac{|g|^{q-1}}{k^{\frac{2+\varepsilon}{p}}} & x \in F_k \\ 0 & x \notin F_k \end{cases}$.

因为 $(E_{n_k} - E_{n_{k-1}}) \cap (E_{n_l} - E_{n_{l-1}}) = \varnothing \quad (k \neq l)$,所以 $F_k \cap F_l = \varnothing$．取 $0 < \varepsilon < \dfrac{2+\varepsilon}{p} < 2$

下证：$h(x) \in L^p(E)$：

$$\int_E |h(x)|^p dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F_k} \left[\frac{|g|^{q-1}}{k^{\frac{2+\varepsilon}{p}}} \right]^p dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F_k} \frac{|g|^q}{k^{2+\varepsilon}} dm = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2+\varepsilon}} \int_{F_k} |g|^q dm = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^{2+\varepsilon}} < +\infty$$

所以 $h(x) \in L^p(E)$；

但这时:

$$\int_E |gh| dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F_k} \frac{|g|^q}{k^{\frac{2+\varepsilon}{p}}} dm = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{2+\varepsilon}{p}}} \int_{F_k} |g|^q dm = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^{\frac{2+\varepsilon}{p}}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

与条件矛盾． 证毕

33.若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数, $E \subset [a,b]$ 是可测集,且 $f(x)$ 在 E 上可微,则:

$$m^*(f(E)) \leq \int_E |f'(x)| dx .$$

证明:

易知 $f'(x)$ 是 E 上的可测函数．$\forall \varepsilon > 0$,做集合列:

$$E_n=\{x\in E:(n-1)\varepsilon\le\left|f'(x)\right|<n\varepsilon\},\ (n=1,2,...)\text{；}$$

$$m^*(f(E_n))\le n\varepsilon m(E_n)=(n-1)\varepsilon m(E_n)+\varepsilon m(E_n)\le\int_{E_n}\left|f'(x)\right|dx+\varepsilon m(E_n)\text{；}$$

由此可知:

$$m^*(f(E))\le\sum_{n=1}^{\infty}m^*(f(E_n))\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}\left|f'(x)\right|dx+\varepsilon m(E_n)\text{；}$$

由 ε 的任意性,得到 $m^*(f(E))\le\int_E\left|f'(x)\right|dx$. 证毕

34. 所谓一致可积函数列是这样定义的:

设 $f_k(x)\in L(E)$, $\forall\varepsilon>0$ 存在非负的函数 $g(x)\in L(E)$,使得:

$$\int_{\{x\in E:\left|f_k(x)\right|\ge g(x)\}}\left|f_k(x)\right|dx\le\varepsilon\quad(k=1,2,...).$$

它与下列条件等价:

$(i)\ \sup\left\{\int_E\left|f_k(x)\right|dx\right\}<\varepsilon$

$(ii)\ \forall\varepsilon>0,\exists h(x)\in L(E),h(x)>0, and\ \delta>0\ s.t.\int_e h(x)dx<\delta\Rightarrow\int_e\left|f_k(x)\right|dx<\varepsilon$

设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上的可测函数列,且几乎处处收敛于 $f(x)$. 则:

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E\left|f_k(x)-f(x)\right|dx=0\Leftrightarrow\{f_k(x)\}$ 是 E 上一致可积函数列

证明:$\Rightarrow$

因为: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E\left|f_k(x)-f(x)\right|dx=0$；

所以:$\forall\dfrac{\varepsilon}{2}>0,\exists K$, 当 $k>K$ 时, $\int_E\left|f_k(x)-f(x)\right|dx<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

$$\int_e\left|f_k(x)\right|dx\le\int_E\left|f_k(x)-f(x)\right|dx+\int_e\left|f(x)\right|dx$$

取 $h(x)=\max\{f_1(x),f_2(x),f_3(x),...f_K(x),f(x)\}$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2},\int_E h(x)dx<\dfrac{\varepsilon}{2}$,所以 $\int_e\left|f(x)\right|dx<\dfrac{\varepsilon}{2}$,于是 $\int_e\left|f_k(x)\right|dx<\varepsilon\ (k=1,2,...)$.

所以 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上一致可积函数列.

$\Leftarrow$

由于：

$\forall\varepsilon>0,\exists h(x)\in L(E),h(x)>0, and\ \delta>0\ s.t.\int_e h(x)dx<\delta\Rightarrow\int_e\left|f_k(x)\right|dx<\varepsilon$；

因为 $\int_e\left|f(x)dx\right|\le\underline{\lim}\int_e\left|f_k(x)dx\right|$，对于 δ ,存在 B, 使得：

$m(E\setminus B)<+\infty,\int_B h(x)dx<\delta$.所以$\int_B |f_k(x)|dx<\varepsilon$；

因为$h(x)\in L(E)$,所以对于δ,存在δ_0,对于任意的集合C,只要$m(C)<\delta_0$，便有$\int_C h(x)dx<\delta$． 即$\int_C |f_k(x)|dx<\varepsilon$；

令$F=E\setminus B$,$m(F)<+\infty$,在F上,存在集合C,使得$m(C)<\delta_0$；

在$F-C$上$f_k(x)$一致收敛于$f(x)$,$\int_C |f_k(x)|dx<\varepsilon$．

于是对于$\dfrac{\varepsilon}{m(F)+1}$,存在$k_0$,当$k\ge k_0$时：

$$|f_k(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{m(F)+1}\ \forall x\in F-C$$

所以存在k_0,当$k\ge k_0$时：

$$\int_E |f_k(x)-f(x)|dx<\int_{E-B-C}|f_k(x)-f(x)|dx+\int_B |f_k(x)|dx+\int_B |f(x)|dx+\int_C |f_k(x)|dx+\int_C |f(x)|dx$$
$$<5\varepsilon$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|dx=0$． 证毕

35.设$f_k\in L(E),(k=1,2,...),m(E)<+\infty$,且存在$E$上几乎处处有限的函数$f(x)$,

$f(x)\in L(E)$,$f_k(x)$依测度收敛于$f(x)$.

试证明：(i)与(ii)等价;

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|dx=0$

(ii) $\forall\varepsilon>0$,存在$\delta>0$，当$e\subset E,m(e)<\delta$时:

$$\int_e |f(x)|dx<\varepsilon\ \int_e |f_k(x)|dx<\varepsilon，(k=1,2,..)$$

证明：$(i)\Rightarrow(ii)$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|dx=0$， $f(x)\in L(E)$．所以有：

$\forall\varepsilon>0$,存在$\delta_0>0$，当$e\subset E,m(e)<\delta_0$时，$\int_e |f(x)|dx<\dfrac{\varepsilon}{2}$；

存在$K,k\ge K$时，$\int_E |f_k(x)-f(x)|dx<\dfrac{\varepsilon}{2}$，所以

$k \ge K$ 时，$\int_e |f_k(x)|dx < \int_E |f_k(x) - f(x)|dx + \int_e |f(x)|dx < \varepsilon$；

对于$1 \le k < K$，存在δ_k，使得$\int_e |f_k(x)|dx < \varepsilon$；

取$\delta = \min(\delta_0, \delta_1, ...\delta_{k-1})$即有：$\forall \varepsilon > 0,$存在$\delta > 0$，当$e \subset E, m(e) < \delta$时：

$$\int_e |f_k(x)|dx < \varepsilon \ (k = 1, 2, ...) .$$

$(i) \Leftarrow (ii)$

因为 $f_k(x)$ 依测度收敛于 $f(x)$，所以对于$\frac{\varepsilon}{m(E)+1}$和$\delta,$存在$G,$当$k \ge G$时：

$$m(\{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{m(E)+1}\}) < \delta$$

令 $E_k = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \frac{\varepsilon}{m(E)+1}\}$：

所以：

$$\int_E |f_k(x) - f(x)|dx < \int_{E-E_k} |f_k(x) - f(x)|dx + \int_{E_k} |f_k(x)|dx + \int_{E_k} |f(x)|dx$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon .$$

故$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_k(x) - f(x)|dx = 0$.　　　　证毕.

36.设 $f(x)$ 是 R^1 上正值递增函数，$\{g_k(x)\}$ 是$[0,1]$上的实值可测函数．若有：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{f(x)} = 0, \int_{[0,1]} f\left[|g_k(x)|\right]dx \le M (k = 1, 2, ...) ;$$

以及$\lim_{k\to\infty} g_k(x), a.e. x \in [0,1]$．则$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} |g_k(x) - g(x)|dx = 0$.

证明：因为$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{f(x)} = 0,$所以$\forall \varepsilon > 0, \exists G > 0,$当$x > G$时：$\frac{x}{\varepsilon} < f(x)$.

考虑任意的$E \subset [0,1]$：

$$E_k^1 = \{x \in E : |g_k(x)| \le G\}, E_k^2 = \{x \in E : |g_k(x)| > G\}$$

$$\int_E |g_k(x)|dx = \int_{E_k^1} |g_k(x)|dx + \int_{E_k^2} |g_k(x)|dx ;$$

$\int_{E_k^1}|g_k(x)|dx < Gm(E_k^1) < Gm(E)$；

$\int_{E_k^2}\frac{|g_k(x)|}{\varepsilon}dx < \int_{E_k^2} f\left(|g_k(x)|\right)dx < \int_{[0,1]} f\left(|g_k(x)|\right)dx < M$；

所以$\int_{E_k^2}|g_k(x)|dx < M\varepsilon$.

考虑对于任意的$\varepsilon > 0$，存在一个$\delta = \frac{\varepsilon}{m(E)+1}$，只要$m(E) < \delta$时：

$$\int_E |g_k(x)|dx = \int_{E_k^1}|g_k(x)|dx + \int_{E_k^2}|g_k(x)|dx < (M+1)\varepsilon$$

这说明$g_k(x)$满足 35 题的(ii)条件，由 35 题，问题得证. 证毕.

37.设E上一切正值可积函数全体为H . 则(i)与(ii)等价：

(i) $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{\{x\in E: f(x)>t\}} f(x)dx = 0$（对任意的$f(x)\in H$）

(ii) $\lim\limits_{m(E)\to 0}\int_E f(x)dx = 0$（对任意的$f(x)\in H$）

证明：$(i)\Rightarrow(ii)$

由(i)：$\forall\varepsilon > 0, \exists G_0,$ 当$t \ge G_0$时：

$$\int_{\{x\in E: f(x)>t\}} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$（对任意的$f(x)\in H$）.

对于$\int_E f(x)dx = \int_{\{x\in E: f(x)>G_0\}} f(x)dx + \int_{\{x\in E: f(x)\le G_0\}} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} + G_0 m(E)$

只要$m(E) < \frac{\varepsilon}{2G_0+1}$，便有$\int_E f(x)dx < \varepsilon$；

即：$\lim\limits_{m(E)\to 0}\int_E f(x)dx = 0$.

$(i)\Leftarrow(ii)$

由题意：当$m(E) < \delta$时，$\int_E f(x)dx < \varepsilon$；

对于$E_t = \{x\in E: f(x) > t\}$，易见$\lim\limits_{t\to\infty} m(E_t) = 0$

所以$\lim\limits_{t\to\infty}\int_{\{x\in E: f(x)>t\}} f(x)dx = 0$. 证毕

38. 设 $f,g\in L(E), f_k,g_k\in L(E).\left|f_k(x)\right|\le M\ (k=1,2,...)$，且:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E\left|f_k-f\right|dx=0\quad \lim_{k\to\infty}\int_E\left|g_k-g\right|dx=0\,.$$

则 $\lim_{k\to\infty}\int_E\left|f_k g_k-fg\right|dx=0$

证明：

$\int_E\left|f_k g_k-fg\right|dx\le\int_E\left|f_k g_k-f_k g\right|dx+\int_E\left|f_k g-fg\right|dx$；

又因为：$\int_E\left|f_k g_k-f_k g\right|dx\le M\ \int_E\left|g_k-g\right|dx$；

下面考虑 $\int_E\left|f_k g-fg\right|dx$：

因为 $\left|f_k(x)\right|\le M$ ，所以 $\left|f_k(x)g(x)\right|\le M\left|g(x)\right|$；

因为 $g\in L(E)$，所以 $M\left|g(x)\right|\in L(E)$；

由于 $\lim_{k\to\infty}\int_E\left|f_k-f\right|dx=0$，于是 f_k 依测度收敛于 f .

故 $f_k(x)g(x)$ 依测度收敛于 $f(x)g(x)$.

由控制收敛定理： $\lim_{k\to\infty}\int_E\left|f_k g-fg\right|dx=0$.

所以 $\lim_{k\to\infty}\int_E\left|f_k g_k-fg\right|dx=0$. 证毕.

39. 设 $f_1(x), f_2(x),\dots f_k(x),\dots$ 是 $E\subset R^n$ 上的非负可积函数,且有：

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x), a.e.x\in E，\quad \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx=\int_E f(x)dx\,;$$

则对于 E 中任意可测子集 e，有 $\lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)dx=\int_e f(x)dx$.

证明：

令 $M_k(x)=\max\{f_k(x),f(x)\}, m_k(x)=\min\{f_k(x),f(x)\}$；

易有 $\lim_{k\to\infty}M_k(x)=f(x), a.e.x\in E$， $\lim_{k\to\infty}m_k(x)=f(x), a.e.x\in E$.

又因为 $0\le m_k(x)\le f(x)$， $M_k(x)=f(x)+f_k(x)-m_k(x)$，

$\left|f_k(x)-f(x)\right|=M_k(x)-m_k(x)$；

由控制收敛定理： $\lim_{k\to\infty}\int_E m_k(x)dx=\int_E f(x)dx$；

所以$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E M_k(x)dx=\lim\limits_{k\to\infty}(\int_E f(x)dx+\int_E f_k(x)dx-\int_E m_k(x)dx)=\int_E f(x)dx$

于是$\lim\limits_{k\to\infty}\int_E\left|f_k(x)-f(x)\right|dx=0$.

故对于E中任意可测子集e，$\lim\limits_{k\to\infty}\int_e\left|f_k(x)-f(x)\right|dx=0$；

即有：$\lim\limits_{k\to\infty}\int_e f_k(x)dx=\int_e f(x)dx$. 证毕.

40. 设{ $f_k(x)$ }是$[0,1]$上的可测函数列,则(i)与(ii)等价：

(i)存在$[0,1]$上几乎处处收敛于0的子列{ $f_{nk}(x)$ }；

(ii)存在数列$\{t_n\}$：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|t_n|=\infty$，使$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|t_n f_n(x)|$在$[0,1]$上几乎处处收敛；

证明：

$(i)\Rightarrow(ii)$

存在$[0,1]$上几乎处处收敛于0的子列{ $f_{nk}(x)$ }，为方便记号，不妨就认为{ $f_k(x)$ }几乎处处收敛于0.

$\therefore$ $f_n(x)$在$[0,1]$上依测度收敛于0；

对于1，$\dfrac{1}{2}$，$\exists N$ 当$n>N$时：

$m\mathrm{E}_n^{(1)}<\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{E}_n^{(1)}=\{x\in[0,1]\mid |f_n(x)|>1\}$.

取$n_1>N$ 及E_{n1}在E_{n1}上$|f_{n1}(x)|>1$，$m\mathrm{E}_{n1}<\dfrac{1}{2}$；

$\because$ $f_n(x)$在E_{n1}上依测度收敛于0，

$\therefore$在E_{n1}中有E_{n2}使$|f_{n2}(x)|>\dfrac{1}{2^2}$，$m\mathrm{E}_{n2}<\dfrac{1}{2^2}$；

依次：$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，$\mathrm{E}_{n1}\supset\mathrm{E}_{n2}\supset\mathrm{E}_{n3}\supset\cdots$.

$f_{nk}(x)$在E_{nk}上 $|f_{nk}(x)|>\dfrac{1}{k^2}$，$m\mathrm{E}_{nk}<\dfrac{1}{2^k}$.

$\therefore\sum\limits_{i=1}^{\infty}m\mathrm{E}_{nk}<+\infty$ $\therefore$ $m(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=i}^{\infty}\mathrm{E}_{nk})=0$ $\therefore$ $m(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=i}^{\infty}\mathrm{E}_{nk}^c)=1$.

在$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=i}^{\infty}\mathrm{E}_{nk}^c$上考虑$\mathrm{E}_{n1}^c\subset\mathrm{E}_{n2}^c\subset\cdots\subset\mathrm{E}_{nk}^c\cdots$ $x_0\in(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=i}^{\infty}\mathrm{E}_{nk}^c)$

$\therefore\exists N$ 当$i>N$时，$x_0\in\mathrm{E}_{ni}^c$ $\therefore$ $x_0\notin\mathrm{E}_{ni}$ $i=N+1\cdots$ ；

$\therefore$ 自 $f_{ni}(x)$起，$i=N+1$，$|f_{ni}(x_0)|<\dfrac{1}{i^2}$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_{ni}(x_0)|$收敛，$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_{ni}(x_0)|$在$[0,1]$上几乎处处收敛．取$t_{ni}=1$，其余为$0$.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}|t_n|=+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|t_n f_n(x)|$在$[0,1]$上几乎处处收敛.

$(ii)\Rightarrow(i)$

令 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|t_n f_n(x)|$，

$\mathrm{E}_k=\{x\in[0,1]\,|\,g(x)|\le k\}$ $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathrm{E}_k=\mathrm{E}$ $m\mathrm{E}=1$，

在E_m上 $\int_{\mathrm{E}_m}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|t_n||f_n(x)|dx=\int_{\mathrm{E}_m}g(x)dx<+\infty$. *

$\therefore \int_{\mathrm{E}_m}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|t_n||f_n(x)|dx<+\infty$ ，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|t_n|\int_{\mathrm{E}_m}f(x)|dx<+\infty$

$\because$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|t_n|=+\infty$ $\therefore$ 必有$\int_{\mathrm{E}_m}|f_n(x)|dx$的子列$\int_{\mathrm{E}_m}|f_{nk}(x)|dx\to 0$.

$\therefore$ E_m上，$f_{nk}(x)$依测度收敛于0，$\therefore$ $f_{nk}(x)$有子列$f_{nkv}(x)$几乎在E_m上收敛于0. 为方便记号，记在E_1上找到该子列为$f_{nk}^{(1)}$，同样对*式考虑 $f_{nk}^{(1)}$（在E_2上）$\exists$子列$f_{nk}^{(2)}$在E_2上几乎处处收敛于0．依次作下去：有

E_1 $f_{n1}^{(1)}$ $f_{n2}^{(1)}$ $\cdots$ $f_{nk}^{(1)}$ $\cdots\cdots$

E_2 $f_{n1}^{(2)}$ $f_{n2}^{(2)}$ $\cdots$ $f_{nk}^{(2)}$ $\cdots\cdots$ 利用对角线法找到子列$f_{nk}(x)$，

E_3 $f_{n1}^{(3)}$ $f_{n2}^{(3)}$ $\cdots$ $f_{nk}^{(3)}$ $\cdots\cdots$ $f_{nk}(x)$在E上几乎处处收敛于0

$\cdots\cdots$

E_k $f_{n1}^{(k)}$ $f_{n2}^{(k)}$ $\cdots$ $f_{nk}^{(k)}$ $\cdots\cdots$

$\therefore$

$f_{nk}(x)$在$[0,1]$上几乎处处收敛于0. 证毕

41. 设$1<p<+\infty$, $f_n\in L^p(R^1),\|f_n\|_p\le M_1(n=1,2,3,\ldots)$, $f\in L^p(R^1)$,且有：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt=\int_0^x f(t)dt \quad x\in R^1$$

则对任意的$g\in L^q(R^1)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{R^1} f_n(t)g(t)dt=\int_{R^1} f(t)g(t)dt$.

证明：对任意的$g\in L^q(R^1)$, $\forall\varepsilon>0,\exists M>0,$在$R^1-[-M,M]$上：

$$\left(\int_{R^1-[-M,M]}|g(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}<\frac{\varepsilon}{2[2M_1+2M_0]};$$

（这里$M_0=\left(\int_{R^1}|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$）

考虑：$\int_{R^1-[-M,M]}|f_n(t)-f(t)||g(t)|dt\le\left(\int_{R^1}|f_n(t)-f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{R^1-[-M,M]}|g(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$

$$\le\left[2\left(\int_{R^1}|f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}+2\left(\int_{R^1}|f_n(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_{R^1-[-M,M]}|g(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2[2M_1+2M_0]}\left(2M_1+2M_0\right)=\frac{\varepsilon}{2}$$

在$\left(-M,M\right)$上 $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-M}^M f_n(t)dt=\int_{-M}^M f(t)dt$

所以对任意的阶梯函数$\varphi(t)$，有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-M}^M f_n(t)\varphi(t)dt=\int_{-M}^M f(t)\varphi(t)dt$

由于$L^q(R^1)$的可分性，存在阶梯函数$\varphi_0(t)$，使得$\|g-\varphi_0\|_q\le\frac{\varepsilon}{6(M_0+M_1)}$

所以：

$$\left|\int_{-M}^M f_n(t)g(t)dt-\int_{-M}^M f(t)g(t)dt\right|$$

$$\le\left|\int_{-M}^M f_n(t)g(t)dt-\int_{-M}^M f_n(t)\varphi_0(t)dt\right|+\left|\int_{-M}^M f_n(t)\varphi_0(t)d-\int_{-M}^M f(t)\varphi_0(t)dt\right|$$

$$+\left|\int_{-M}^M f(t)\varphi_0(t)dt-\int_{-M}^M f(t)g(t)dt\right|$$

$$\le\|f_n(t)\|_p\|g-\varphi_0\|_q+\|f(t)\|_p\|g-\varphi_0\|_q+\left|\int_{-M}^M f_n(t)\varphi_0(t)d-\int_{-M}^M f(t)\varphi_0(t)dt\right|$$

因为有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-M}^M f_n(t)\varphi(t)dt=\int_{-M}^M f(t)\varphi(t)dt$：

所以$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,$当$n\ge N$时：

$$\left|\int_{-M}^{M} f_n(t)\varphi_0(t)d - \int_{-M}^{M} f(t)\varphi_0(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{6}$$

故 $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 当 $n \geq N$ 时：

$$\left|\int_{R^1} f_n(t)g(t)dt - \int_{R^1} f(t)g(t)dt\right| \leq \left|\int_{-M}^{M} f_n(t)g(t)dt - \int_{-M}^{M} f(t)g(t)dt\right| + \int_{R^1-[-M,M]} |f_n(t) - f(t)||g(t)|dt$$

$$\leq \|f_n(t)\|_p \|g-\varphi_0\|_q + \|f(t)\|_p \|g-\varphi_0\|_q + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{R^1} f_n(t)g(t)dt = \int_{R^1} f(t)g(t)dt$. 证毕.

42. 设{ $f_k(x)$ }是 $[0,1]$ 上非负可积函数列,且有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\int_0^1 f_n(x)dx)^{\frac{1}{2}} < +\infty$.试证明：

对于 $a.e.x \in [0,1]$, 存在 N ，使得 $f_n(x) \leq (\int_0^1 f_n(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ ， $n \geq N$ ；

证明：考虑 $\mathrm{E}_n = \{ x \in [0,1]：\ f_n(x) > (\int_0^1 f_n(x)dx)^{\frac{1}{2}} \}$；

有：$(\int_0^1 f_n(x)dx)^{\frac{1}{2}} \cdot m\mathrm{E}_n < \int_{\mathrm{E}_n} f_n(x)dx$.

$\therefore m\mathrm{E}_n < (\int_0^1 f_n(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ $\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} m\mathrm{E}_n$ 收敛 $\therefore m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}\mathrm{E}_k^c) = 1$.

$x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}\mathrm{E}_k^c$ ，说明：对于 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}\mathrm{E}_k^c$ 中的 x 存在 N ，使 $n \geq N$ 时, $x \in \mathrm{E}_n^c$,

即: $f_n(x) \leq (\int_0^1 f_n(x)dx)^{\frac{1}{2}}$. 证毕

43. 设 $m(\mathrm{E}) < +\infty$ ， $f_n(x)$ ， $n = 1,2,3\ldots\ldots$ 都是E上几乎处处有限的．且：

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad x \in E$；则存在子列{ f_{n_i} }， $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_{ni}(x)$ 使得在E上几乎处处绝对收敛.

证明：$\because \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad m(\mathrm{E}) < +\infty$；

$\therefore f_n(\mathrm{x}) \Rightarrow 0$ 对于 $\frac{1}{i^2}$， $i = 1,2,3\ldots\ldots$ $\exists n_i$ 使 $m\mathrm{E}_i = m\{x \in \mathrm{E} :| f_{ni}(x)| > \frac{1}{i^2}\} < \frac{1}{i^2}$

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{\infty} m\mathrm{E}_i < +\infty$

$\therefore m(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=i}^{\infty}\mathrm{E}_i) = 0$ $\qquad\qquad \therefore m(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=i}^{\infty}\mathrm{E}_i^c) = 1$

令 $F=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=i}^{\infty}\mathrm{E}_k^c$：

若 $x_0\in F$，则存在 N 使 $n\ge N$ 时， $x\in\mathrm{E}_n^c$；

即 $|f_{ni}(x_0)|<\dfrac{1}{i^2}$ $\quad\therefore\sum\limits_{i=1}^{\infty}|f_{ni}(x_0)|<+\infty$

故 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_{ni}(x)$ 在 E 上几乎处处绝对收敛. 证毕

44. 设 $f\in L(R^1),\quad p>0$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-p}f(nx)=0\quad a.e.x\in R^1$.

证明：令 $F(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|n^{-p}f(nx)\right|$：

$$\int_{R^1}F(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R^1}\left|n^{-p}f(nx)\right|dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}\int_{R^1}|f(x)|dx<+\infty .$$

所以 $F(x)$ 是可积的， $F(x)<\infty\quad a.e.x\in R^1$.

由级数的性质 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-p}f(nx)=0\quad a.e.x\in R^1$. 证毕.

45. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上正值可积函数，令 $0<q\le 1$，设 $\Gamma=\left\{E\subset[0,1]:m(E)\ge q\right\}$

则 $\inf\limits_{E\in\Gamma}\left\{\int_E f(x)dx\right\}>0$.

证明：

若 $\inf\limits_{E\in\Gamma}\left\{\int_E f(x)dx\right\}=0$，则存在一列 $\{E_n\}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)dx=0$.

由法都引理，$\int_{[0,1]}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f(x)\chi_{E_n}dx=0$，所以存在子列使得：

$$\lim_{k\to\infty}f(x)\chi_{E_{n_k}}(x)=0,\ a.e.x\in[0,1];$$

不妨就设其为 $f(x)\chi_{E_n}(x)$.

所以 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x)\chi_{E_n}(x)=0,\ a.e.x\in[0,1]$.

设收敛的点组成的集合为 A：

由叶果洛夫定理：取 $\delta=\dfrac{q}{3}$，在可测集 B，使得 $m(A-B)<\dfrac{q}{3}$；

在 B 上 $f(x)\chi_{E_n}(x)$ 一致收敛于 0；

在B上，对于$\dfrac{q}{3}$，存在可测集C， $C\subset B,\ m(B-C)<\dfrac{q}{3}$，

存在正数k_0，使得在C上，有$\dfrac{1}{k_0}<f(x)<k_0$， $f(x)\chi_{E_n}(x)$一致收敛于 0.

令$F=[0,1]-C$：

显然$m(F)<\dfrac{2q}{3}$，因为$m(E_n)\geq q$，所以$C\bigcap E_n\neq\varnothing\ (n=1,2,3...)$. ⋆

但是由于在C上，有$\dfrac{1}{k_0}<f(x)<k_0$， $f(x)\chi_{E_n}(x)$一致收敛于 0，

所以对于$\dfrac{1}{2k_0}$，存在$N>0,$当$n\geq N$， $f(x)\chi_{E_n}(x)<\dfrac{1}{2k_0}$.

故存在$N>0,$当$n\geq N$时： $\chi_{E_n}(x)=0$.

这说明$C\bigcap E_n=\varnothing\left(n\geq N\right)$；

这与⋆矛盾，所以$\inf\limits_{E\in\Gamma}\left\{\int_E f(x)dx\right\}>0$. 证毕.

46.设 $f\in L\left((0,+\infty)\right)$.则函数$g(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{f(t)}{x+t}dt$在$\left(0,+\infty\right)$上连续.

证明：对于$\forall x_0\in\left(0,+\infty\right)$， $g(x_0)=\int_0^{+\infty}\dfrac{f(t)}{x_0+t}dt$；

对于$t>0,\dfrac{f(t)}{x_0+t}<\dfrac{f(t)}{x_0}$，因为 $f\in L\left((0,+\infty)\right)$，所以$g(x_0)<\infty$；

对于任意收敛于 0 的数列$h_n\left(\left|h_n\right|\leq\dfrac{x_0}{2}\right)$：

$$g(x_0+h_n)-g(x_0)=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{x_0+h_n+t}-\frac{f(t)}{x_0+t}dt\ .$$

考虑$\left|\dfrac{f(t)}{x_0+h_n+t}\right|\leq\dfrac{\left|f(t)\right|}{\left|x_0+t\right|-\left|h_n\right|}\leq\dfrac{\left|f(t)\right|}{\left|\dfrac{x_0}{2}+t\right|}$：

由题意$\dfrac{\left|f(t)\right|}{\left|\dfrac{x_0}{2}+t\right|}$是可积函数，显然：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(t)}{x_0+h_n+t}=\frac{f(t)}{x_0+t}.$$

由控制收敛定理：$\lim\limits_{n\to\infty}g(x_0+h_n)-g(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{x_0+h_n+t}-\frac{f(t)}{x_0+t}dt=0$

所以函数 $g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{x+t}dt$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续. 证毕

47 设 $\mathrm{E}\subset[a,b]$，(a,b) 可以是无限大，并且是勒贝格可测集．则（关于 m ）几乎所有 E 中的点是 E 的全密点．（相关概念见夏道行书 145 页）

证明：

1、$m(\mathrm{E})=0$ 时，即使 E 中没有全密点，由于 $m(\mathrm{E})=0$，

$\therefore$ 也可以说（关于 m ）几乎所有 E 中的点是 E 的全密点.

2、考虑 $m(\mathrm{E})>0$ 的情形，令 $F(x)=m((a,x)\bigcap\mathrm{E})$：

$\therefore F(x)$ 是单调递增函数.

$\therefore F(x)$ 几乎处处可微且 $F^{'}(x)$ 可积.

$\therefore [a,b]$ 中对于 $F(x)$ 来说不可微点的测度为 0 .

$\therefore$ E 中对于 $F(x)$ 来说不可微点的测度为 0 .

$\therefore$ E 中关于 m 几乎处处有密度，对于有密度的点记为 E_0，$m(\mathrm{E}_0)>0$.

$$\forall x\in\mathrm{E}_0,\quad 0\le F^{'}(x)\le 1,$$

假设题设不对，则存在 $\mathrm{E}_0^{'}$（在 $\mathrm{E}_0^{'}$ 上，$0\le F^{'}(x)<1$），$m(\mathrm{E}_0^{'})>0$.

设 $\mathrm{E}_n=\{x\in\mathrm{E}:1-\frac{1}{n-1}\le F'(x)<1-\frac{1}{n}\}$，$n=2,3,\dots$

由于 $F^{'}(x)$ 可积：

$\therefore F^{'}(x)$ 可测 $\therefore \mathrm{E}_n$ 可测（ *Lebesgue* ）$\therefore \mathrm{E}_0^{'}=\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}\mathrm{E}_n$.

由于 $m(\mathrm{E}_0^{'})>0$，$\therefore \exists N$，使 $m(\mathrm{E}_N)>0$.

在 E_N 上，$F^{'}(x)<1-\frac{1}{N}$.

$\forall x,\ \lim\limits_{(a,b)\to x}\frac{m((a,b)\bigcap\mathrm{E}_N)}{b-a}<1-\frac{1}{N}$

$\therefore \exists (c.d) \subset [a,b]\quad \left(d-c\right)(1-\frac{1}{N-1}) \leq m((c,d)\bigcap \mathrm{E}_N) < (d-c)(1-\frac{1}{N})$

$\therefore m(\mathrm{E}_N) > 0$ 且对于 (c,d) 中任意 I（I 为开区间）：

有 $|\mathrm{I}|(1-\frac{1}{N-1}) < m(\mathrm{I}\bigcap \mathrm{E}_N) < |\mathrm{I}|(1-\frac{1}{N})$ （＊）

但由 $m((c,d)\bigcap \mathrm{E}_N) > 0 \Rightarrow$（由周民强书 98 页定理 2. 15）

对于 $1-\frac{1}{N}$ ：$\exists \mathrm{I}_0 \subset (c,d),$，使 $m(\mathrm{I}_0\bigcap \mathrm{E}_N) > (1-\frac{1}{N})|\mathrm{I}_0| > 0$.

与（＊）矛盾 $\therefore m(\mathrm{E}_0^{'}) = 0$. 证毕

48. 设 $f_n \in L([0,1])$，$(n=1,2\ldots)$，$F \in L([0,1])$，若有：

$(i)\ |f_n(x)| \leq F(x)$；

(ii) 对任意的 $g(x) \in C[0,1]$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{[0.1]} f_n(x)g(x)dx = 0$；

则对于任意可测集 $\mathrm{E} \subset [0,1]$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{\mathrm{E}} f_n(x)dx = 0$.

证明：

对于任意可测集 E，$0 \leq X_{\mathrm{E}}(x) \leq 1$，

$\therefore$ 对于事先给定的 δ，$\exists\, [0,1]$ 上一个连续函数 $g_{\mathrm{E}}(x)$.

$|g_{\mathrm{E}}(x)| \leq 1$ 且 $m(\{x\in[0,1]: X_{\mathrm{E}}(x) \neq g_{\mathrm{E}}(x)\}) < \delta$.

这里不妨设 $g_{\mathrm{E}}(x) \overset{\Delta}{=} g_{\mathrm{E}}^{\delta}(x)$：

$\because F \in L([0,1])$，$\therefore |F(x)| \in L([0,1])$；

$\therefore \forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta_0$，使 $m\mathrm{E} < \delta_0$ 时：$\int_{\mathrm{E}} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{4}$.

对于 δ_0 可找到 $g_{\mathrm{E}}^{\delta_0}(x) \overset{\Delta}{=} G(x)$，$|G(x)| \leq 1$． $\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)G(x)dx = 0$

$\therefore \forall\varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时：$|\int_0^1 f_n(x)G(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2}$，

所以 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时：

$|\int_{\mathrm{E}} f_n(x)dx| = |\int_0^1 f_n(x)X_{\mathrm{E}}(x)dx|$

$\leq |\int_0^1 f_n(x)(X_{\mathrm{E}}(x) - G(x))dx| + |\int_0^1 f_n(x)G(x)dx|$

$< \int_0^1 F(x)\,|\,X_{\mathrm{E}}(x) - G(x)\,|\,dx + \dfrac{\varepsilon}{2}$；

记 $\mathrm{E}_1 \overset{\Delta}{=} \{x \in [0,1] : X_{\mathrm{E}} \neq G(x)\}$， $m(\mathrm{E}_1) < \delta_0$，

$\therefore \int_0^1 F(x)\,|\,X_{\mathrm{E}}(x) - G(x)\,|\,dx$

$= \int_{\mathrm{E}_1} F(x)\,|\,X_{\mathrm{E}}(x) - G(x)\,|\,dx < 2\int_{\mathrm{E}_1} F(x)dx < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\therefore \forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时：$|\int_{\mathrm{E}} f_n(x)dx| < \varepsilon$

$\therefore$ 对于任意可测集 $\mathrm{E} \subset [0,1]$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathrm{E}} f_n(x)dx = 0$. 证毕

49. 设 $\{f_n\}$ 是测度空间 (X, R, μ) 的集 E 上的可测函数列，如果 (i) 存在 E 上的可积函数 F，使 $|f_n| \underset{\mu}{\overset{\bullet}{\leq}} F (n = 1,2\ldots)$. (ii) $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于可测函数 f，那么必有 $f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$.

证明：由极限的性质:

$\because |f| \underset{\mu}{\overset{\bullet}{\leq}} F$ 不妨设处处小于 F， $\forall \varepsilon > 0$，考虑:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathrm{E} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x \in \mathrm{E} : |F(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\},$$

$\because F$ 是 E 上的可积函数，于是:

$$\frac{\varepsilon}{2}\mu(\{x \in \mathrm{E} : |F(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}) \leq \int_{\{x \in \mathrm{E} : |F(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}} F(x)d\mu \leq \int_{\mathrm{E}} F(x)d\mu < +\infty$$

$\therefore \mu(\{x \in \mathrm{E} : F(x) \geq \dfrac{\varepsilon}{2}\}) < +\infty$.

$\because f_n \xrightarrow[\mu]{\bullet} f$，对于 $\varepsilon > 0$：

$\mu(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathrm{E} : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$. 注意到:

$\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathrm{E} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) < +\infty$,

$\therefore \mu(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathrm{E} : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0$， $k \to +\infty$

$\therefore \mu(\{x \in \mathrm{E} : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0$.

$\therefore \ f_n \underset{\mu}{\Rightarrow} f$ 证毕

50. 设$\{f_n(x)\}$是支集含于(a,b)的连续可微函数. 且满足:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx = 0 = \lim_{n\to\infty}\int_a^b |f'_n(x)-F(x)|dx$$

则$F(x)=f'(x)\ a.e. x\in(a,b)$其中$f,F\in L([a,b])$.

证明: $f_n(x)$连续可微.

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b |f'_n(x)-F(x)|dx=0$. 于是:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n'(x)dx=\int_a^b F(x)dx. \qquad F\in L([a,b])$$

所以 $f'_n(x)\in L([a,b])$.由周民强书 P259 例 1:

$$f_n(x)=\int_a^x f_n'(t)dt+f_n(a)$$

因为: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx=0$,

所以存在子列 $f_{n_i}(x)$, 使得$\lim\limits_{i\to\infty} f_{n_i}(x)=f(x) \quad a.e. x\in(a,b)$.

由$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b |f'_n(x)-F(x)|dx=0$, 所以$\lim\limits_{i\to\infty}\int_a^x |f'_{n_i}(t)-F(t)|dt=0$.

故: $\lim\limits_{i\to\infty}\int_a^x f'_{n_i}(t)dt=\int_a^x F(t)dt$

因为 $f_{n_i}(x)=\int_a^x f'_{n_i}(t)dt+f_{n_i}(a)$, $\lim\limits_{i\to\infty} f_{n_i}(x)=f(x). \quad a.e. x\in(a,b)$.

所以$\lim\limits_{i\to\infty} f_{n_i}(x)=\lim\limits_{i\to\infty}\int_a^x f_{n_i}(t)dt+\lim\limits_{i\to\infty} f_{n_i}(a)=\int_a^x F(t)dt+f(a)=f(x)$.

即: $F(x)=f'(x)\ a.e. x\in(a,b)$ 证毕

Measure Theory In Locally Compact Spaces

Sec51

(3) The σ-ring generated by the class of all bounded open sets, or equivalently, the σ-ring generated by **U**, coincides with **S**.

Proof. For every compact set C, there exists a bounded open set U such that $C \subset U$.

Since $U - C = U \cap (C)^c$ and C is a closed set, then $U - C$ is a bounded open.

Let **D** be the class of all bounded open set.

Since $C = U - (U - C) \in$ S(**D**), then **S** $\subset$ S(**D**).

Since all σ-bounded open set belong to **S**, then **D** $\subset$ **S**, then **S** $\supset$ S(**D**).
It imply that **S**=S(**D**).

Since all Borel set are σ-bounded, if $U \in$ **U**, then $U \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. Here C_k is compact set, and there exists a bounded open set U_k such that $C_k \subset U_k$.

Then $U \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ and $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k \cap U)$.

It implies that **U** $\subset$ S(**D**),and S(**U**) $\subset$ S(**D**).
It is easy to verify that S(**U**) $\supset$ S(**D**). then we have S(**U**)= S(**D**)=**S**. ▮

(5) The σ-ring generated by the class of all bounded open Baire sets, or equivalently, the σ-ring generated by $\mathbf{U}_0$, coincides with $\mathbf{S}_0$.

Proof. Let $\mathbf{D}_0$ be the class of all bounded open Baire set.

From the proof of Theorem D, we have C_0 is a Baire compact set, U_0 is a open Baire set.

Since U is a bounded set. There exists a set $D \in \mathbf{D}_0$, such that $C \subset D \subset U$.

For every compact set C in $\mathbf{C}_0$, $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, here U_n is open set.

Then there exists a set D_n, such that $C \subset D_n \subset U_n$. Then we have $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$.

It implies $\mathbf{C}_0 \subset$ S($\mathbf{D}_0$), so $\mathbf{S}_0 \subset$ S($\mathbf{D}_0$).

It is obvious that $\mathbf{D}_0 \subset \mathbf{S}_0$, then $\mathbf{S}_0 \supset$ S($\mathbf{D}_0$). We have $\mathbf{S}_0$=S($\mathbf{D}_0$).

Since $\mathbf{D}_0 \subset \mathbf{U}_0$, then S($\mathbf{D}_0$)$\subset$S($\mathbf{U}_0$).

Every set in $\mathbf{U}_0$ is σ-bounded, then $\mathbf{U}_0 \subset$ S($\mathbf{D}_0$). So we obtain S($\mathbf{D}_0$)=S($\mathbf{U}_0$). ▮

Sec 52

(5) Suppose that X is compact and x^* is a point such that $\{x^*\}$ is not a G_δ; if, for every E in S, $\mu(E) = \chi_E(x^*)$, then μ is a regular Borel measure which is not completion regular.

Proof. For every compact set C and open set U such that $C \subset U$.

If $x^* \in C$, then $x^* \in U$,then $\mu(C) = \mu(U) = 1$.

If $x^* \notin C$ and $x^* \in U$, we can study the set $U - \{x^*\}$.

The set $U - \{x^*\}$ is also a open set, and $x^* \notin U - \{x^*\}, C \subset U - \{x^*\} \hat{=} D$.

Then $\mu(C) = \mu(D) = 0$.

Then μ is a regular Borel measure.

If μ is completion regular, then for every subset E, there exist sets A and B ,such that $A \subset E \subset B$, $\mu_0(B - A) = 0$. Here A and B are Baire set.

We write $E \hat{=} \{x^*\}$, here E is not a Baire set.

So we have $A = \varnothing$, and $\mu_0(B - A) = 1$.

It conflicts with the assumption. ▮

(6) If μ_1, μ_2, and μ are Borel measures such that $\mu = \mu_1 + \mu_2$, then the regularity of any two of them implies that of the third.

Proof. (I) If μ_1, μ_2 are regular. We consider the compact set C, for every $\varepsilon > 0$, there exist open set U_1 and U_2, such that $C \subset U_1, C \subset U_2$ and

$$\mu_1(U_1) \le \mu_1(C) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu_2(U_2) \le \mu_2(C) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

We write $U = U_1 \cap U_2$, then $\mu_1(U) \le \mu_1(U_1), \mu_2(U) \le \mu_2(U_2)$

We obtain that $\mu(U) = \mu_1(U) + \mu_2(U) \le \mu_1(U_1) + \mu_2(U_2)$

$$\leq \mu_1(C)+\mu_2(C)+\varepsilon=\mu(C)+\varepsilon .$$

Then μ is regular.

(II) Since $\mu_i << \mu$, if μ is regular, then we can obtain that μ_i is regular. $(i=1,2)$

This result follows from (9). ▮

(8) If μ is a regular Borel measure, then, for every $\sigma-$bounded set E,

$$\mu^*(E)=\inf\{\mu(U): E\subset U\in \mathbf{U}\} \text{ and } \mu_*(E)=\sup\{\mu(C): E\supset C\in \mathbf{C}\}.$$

Proof. We only prove the first result, for we can imitate it when we prove the second assertion.

Since $\mu^*(E)=\inf\{\mu(F): E\subset F\in \mathbf{S}\}\leq \inf\{\mu(U): E\subset U\in \mathbf{U}\}$, then for every $\varepsilon>0$,

there exists a set F in **S**, such that $E\subset F$ and $\mu(F)<\mu^*(E)+\frac{\varepsilon}{2}$.

Since μ is a regular Borel measure, for every $\varepsilon>0$, there exists a open set U in **U**,

such that $F\subset U$, $\mu(U)<\mu(F)+\frac{\varepsilon}{2}$.

Then we obtain $\mu(U)<\mu(F)+\frac{\varepsilon}{2}<\mu^*(E)+\varepsilon$.

In other words, $\mu^*(E)=\inf\{\mu(U): E\subset U\in \mathbf{U}\}$ ▮

(9) If μ and v are Borel measures such that μ is regular and $v<<\mu$, then v is regular.

Proof. If v is not a regular measure, then there exists a bounded open set U such that U is not inner regular.(It follows from Theorem F in P228).

Then we obtain that

$$v(U)>\sup\{v(C): U\supset C\in \mathbf{C}\}, \text{ and } v(U)<\infty .$$

It follows that, for every compact set C in **C** such that $U\supset C$, there exists a positive integer $\varepsilon_0>0$ such that $v(U)>v(C)+\varepsilon_0$. Then we have $v(U-C)>\varepsilon_0$.

Since μ is regular, for $\frac{\varepsilon_0}{i}>0$, there exists a compact set C_i in **C** such that

$$U\supset C_i,\ \mu(U-C_i)<\frac{\varepsilon_0}{i}.$$

We can assume that $C_i\subset C_{i+1}$, for we can let $C_i\cup \hat{C}_{i+1}=C_{i+1}$.

Then $\{U - C_i\}$ is a decreasing sequence, and $\infty > v(U - C_i) > \varepsilon_0$.

Since $\lim_{i\to\infty}(U - C_i) \hat{=} E$, then $\mu(E) = 0$.

The relation $v << \mu$ follows that $v(E) = 0$. But we can obtain that

$\lim_{i\to\infty} v(U - C_i) = v(E) \geq \varepsilon_0 > 0$.

Then we obtain that v is regular. ▮

Sec 53

(2) If λ and $\hat{\lambda}$ are two contents inducing the outer measures μ^* and $\hat{\mu}^*$ respectively, and if, for every C in **C,** $\lambda(C) \leq \hat{\lambda}(C) \leq \mu^*(C)$, then $\mu^* = \hat{\mu}^*$.

Proof. Since $\mu^*(U) = \lambda_*(U)$, $\mu^*(E) = \inf\{\lambda_*(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}$, it is enough to prove $\mu^*(U) = \hat{\mu}^*(U)$.

Since $\mu^*(U) = \lambda_*(U) = \sup\{\lambda(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\}$, the relation $\lambda(C) \leq \hat{\lambda}(C)$ implies that $\mu^*(U) \leq \hat{\mu}^*(U)$.

Since the regularity of the measure μ, the relations

$$\mu^*(U) = \mu(U) = \sup\{\mu^*(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\}$$

$$\hat{\mu}^*(U) = \hat{\lambda}_*(U) = \sup\{\hat{\lambda}(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\} \text{ imply } \mu^*(U) \geq \hat{\mu}^*(U).$$

It follows that $\mu^*(U) = \hat{\mu}^*(U)$. ▮

(3) The result of (2) may be strengthened to the following converse of Theorem C. If λ and $\hat{\lambda}$ are two contents, inducing the outer measures μ^* and $\hat{\mu}^*$ respectively, and if, for every C in **C,** $\mu^*(C^0) \leq \hat{\lambda}(C) \leq \mu^*(C)$, then $\mu^* = \hat{\mu}^*$.

Proof. From the proof of (2), it is enough to prove $\mu^*(U) = \hat{\mu}^*(U)$,

and we have $\mu^*(U) \geq \hat{\mu}^*(U)$.

It is enough to prove $\mu^*(U) \leq \hat{\mu}^*(U)$ from the relation $\mu^*(C^0) \leq \hat{\lambda}(C)$.

$\mu^*(U) \geq \hat{\mu}^*(U) = \hat{\lambda}_*(U) = \sup\{\hat{\lambda}(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\}$ implies that it is sufficient to prove $\mu^*(U) = \sup\{\hat{\lambda}(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\}$.

For every open set U in **U**, for every $\varepsilon > 0$, there exists a compact set D such that

$$D \subset U, \qquad \mu(U) < \mu(D) + \varepsilon .$$

It is easy to verify that there exists a compact set C such that

$$D \subset C^0 \subset C \subset U .$$

It implies that

$$\mu(U) < \mu(D) + \varepsilon < \mu^*(C^0) + \varepsilon \le \hat{\lambda}(C) + \varepsilon .$$

The relation $\mu(U) < \mu(D) + \varepsilon < \mu^*(C^0) + \varepsilon \le \hat{\lambda}(C) + \varepsilon$ implies that

$$\mu^*(U) = \sup\{\hat{\lambda}(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\}. \qquad \blacksquare$$

(4) If μ is the Borel measure induced by a content λ, and if $\lambda(C) > 0$ whenever $C^0 \neq \varnothing$, then $\mu(U) > 0$ for every non empty U in **U.**

Proof. Since for every non empty U in **U**,

$$\mu(U) = \lambda_*(U) = \sup\{\lambda(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\}.$$

Write $x_0 \in U$, then $\{x_0\}$ is a compact set in **C.**

There exists a compact set E such that $\{x_0\} \subset E^0 \subset E \subset U$.

$E^0 \neq \varnothing$ implies that $\lambda(E) > 0$, then $\mu(U) > \lambda(E) > 0$. $\blacksquare$

Sec 54

(3) If μ is a Borel measure and if for every C in **C,** $\lambda(C) = \sup\{\mu(C_0) :$ $C \supset C_0 \in \mathbf{C}_0\}$, then μ is completion regular if and only if λ is a regular content;

Proof. $\Rightarrow$

If μ is completion regular, it is easy to understand that

$$\mu(C) = \mu_*(C) = \sup\{\mu(C_0) : C \supset C_0 \in \mathbf{C}_0\}.$$

In fact, the result above can be obtained from the relations

$\mu_*(E) = \sup\{\mu(S_0) : E \supset S_0 \in \mathbf{S}_0\}$ and regularity of the Baire measure .

So we have $\mu(C) = \lambda(C)$, then λ is a regular content;

$\Leftarrow$ Let ν be the Baire contraction of μ.

If λ is a regular content, it is implies that $\mu(C) = \lambda(C)$,

and $\mu(C) = \sup\{\mu(C_0) = v(C_0) : C \supset C_0 \in \mathbf{C}_0\}$.

This relation implies that, for every $\varepsilon > 0$, there exists a set C_0 in $\mathbf{C}_0$ such that

$$\mu(C) < \mu(C_0) + \varepsilon \Leftrightarrow \mu(C - C_0) < \varepsilon .$$

Write $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, there exists a set C_n in $\mathbf{C}_0$ such that

$$\mu(C) < \mu(C_n) + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \mu(C - C_n) < \frac{1}{n}.$$

It implies that $\mu(C - \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = 0$, then $v^*(C - \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = 0$.

So C is a v^*- measurable set, then μ is completion regular. ▮

(4) A content λ is inner regular if, for every C in **C**, $\lambda(C) = \sup\{\lambda(D) :$ $C^0 \supset D \in \mathbf{C}\}$. The following analogs of Theorems A and B are true.

(4a) If μ is the Borel measure induced by an inner regular content λ, then $\mu(C^0) = \lambda(C)$ for every C in **C**.

Proof. Since the inner regularity of the content λ, for every C in **C**, for every $\varepsilon > 0$, there exists a compact set D in **C** such that

$$C^0 \supset D, \qquad \lambda(C) < \lambda(D) + \varepsilon .$$

It follows from 53C that

$$\mu(C^0) \le \lambda(C) < \lambda(D) + \varepsilon < \lambda_*(C^0) + \varepsilon = \mu(C^0) + \varepsilon ;$$

the desire result follows from the arbitrariness of ε. ▮

(4b) If μ is a regular Borel measure and if, for every C in **C**, $\mu(C^0) = \lambda(C)$, then λ is an inner regular content and the Borel measure induced by λ coincides with μ.

Proof. It is clear that λ is a content. The regularity of μ implies that, for C^0 and for every $\varepsilon > 0$, there exists a compact set D such that

$$C^0 \supset D, \qquad \mu(C^0) < \mu(D) + \varepsilon .$$

It is easy to verify that there exists a compact set E such that

$$D \subset E^0 \subset E \subset C^0 .$$

It implies that

$$\lambda(C) = \mu(C^0) < \mu(D) + \varepsilon < \mu(E^0) + \varepsilon = \lambda(E) + \varepsilon .$$

So λ is an inner regular content.

Let $\hat{\mu}$ be the Borel measure induced by λ, the proof above follows that

$$\mu(C^0) = \lambda(C) = \hat{\mu}(C^0) .$$

For every compact set C in **C**, and $\varepsilon > 0$**,** there exists a open set U such that

$$C \subset U\text{,} \quad \mu(U) < \mu(C) + \varepsilon$$

It is easy to verify that there exists a compact set D such that

$$C \subset D^0 \subset D \subset U .$$

It is implies that $\mu(D^0) < \mu(C) + \varepsilon$ and $\mu(C) = \inf\{\mu(D^0) : C \subset D^0 \subset D \in \mathbf{C}\}$

We have $\mu(C) = \hat{\mu}(C)$ for every compact set C in **C**, it is implies that $\mu = \hat{\mu}$. ▮

Sec 56

(1) If x_0 is a point of X and $\Lambda(f) = f(x_0)$ for every f in L, and if $\mu(E)$ $= \chi_E(x_0)$ for every Borel set E,then $\Lambda(f) = \int f d\mu$.

Proof. It is easy to verify that Λ is a positive linear functional.

Write $\lambda(C) = \inf\{\Lambda(f) : C \subset f \in L_+\}$, and $\hat{\mu}$ is the Borel measure induced by λ, then λ is a regular content., and $\Lambda(f) = \int f d\hat{\mu}$.

If $x_0 \in C$, then $\lambda(C) = 1$; if $x_0 \notin C$, then $\lambda(C) = 0$. Here C is a compact set.

It implies that $\lambda(C) = \hat{\mu}(C) = \mu(C)$ for every compact set C .

Then $\hat{\mu}(E) = \mu(E)$ for every Borel set E . We obtain that $\Lambda(f) = \int f d\mu$. ▮

(2) If μ_0 is a Baire measure and $\Lambda(f) = \int f d\mu_0$ for every f in L, and if μ is a Borel measure such that $\Lambda(f) = \int f d\mu$,then $\mu(E) = \mu_0(E)$ for every Baire set E .

Proof. For every Baire compact set C, write $\lambda(C) = \inf\{\Lambda(f) : C \subset f \in L_+\}$.

Here it is obvious that Λ is a positive linear functional. Let $\hat{\mu}$ be the Borel measure induced by λ.

Then $\lambda(C) = \hat{\mu}(C) = \mu(C) = \hat{\mu}(C)$.

It follows that $\mu(E) = \mu_0(E)$ for every Baire set E. ▮

(3) If μ_0 is a Baire measure and $\Lambda(f) = \int f d\mu_0$ for every f in L, write

$$\lambda_*(U) = \sup\{\Lambda(f) : U \supset f \in L_+\}$$

for every U in **U**, and

$$\mu^*(E) = \inf\{\lambda_*(U) : E \subset U \in \mathbf{U}\}$$

for every $\sigma-$bounded set E; then $\mu^*(E) = \mu_0(E)$ for every Baire set E.

Proof. It is obvious that Λ is a positive linear functional on L,then there exists a Borel measure μ such that $\Lambda(f) = \int f d\mu$.

From the result of above , $\mu(E) = \mu_0(E)$ for every Baire set E.

Write $\hat{\lambda}(C) = \inf\{\Lambda(f) : C \subset f \in L_+\}$, $\hat{\lambda}_*(U) = \sup\{\hat{\lambda}(C) : U \supset C \in \mathbf{C}\}$.

For every $\varepsilon > 0$, and a fixed open set U in **U**, there exists a compact set C such that $\hat{\lambda}_*(U) < \hat{\lambda}(C) + \varepsilon$, $C \subset U$.

Let $F = X - U$, here F is a closed set, and $C \cap F = \varnothing$.

Then there exists a function f in L, such that $C \subset f \subset U$.

Here $\hat{\lambda}(C) < \Lambda(f) < \hat{\lambda}_*(U)$. We have $\hat{\lambda}_*(U) < \Lambda(f) + \varepsilon$, and

$$\hat{\lambda}_*(U) = \sup\{\Lambda(f) : U \supset f \in L_+\}.$$

Then we obtain $\hat{\lambda}_*(U) = \lambda_*(U)$.

Let $\hat{\mu}$ is the Borel measure induced by the content $\hat{\lambda}$, then we obtain that

$$\mu(D) = \hat{\mu}(D) \text{ for every set } D \text{ in } \mathbf{S};$$

and $\mu^*(E) = \hat{\mu}(E)$ for every $\sigma-$bounded set E.

It is follows that $\mu^*(E) = \hat{\mu}(E) = \mu(E) = \mu_0(E)$ for every Baire set E. ▮

(5) A linear functional Λ on L is bounded if there exists a constant k such that $|\Lambda(f)| \le k \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ for every f in L. Every bounded (but not necessarily positive) linear functional is the difference of two bounded positive linear functionals.
Hint. This result can follow from a result in Rudin's book.
(6) If X is compact, then every positive linear functional on L is bounded.
Proof. Let Λ be a positive linear functional on L, then exists a regular Borel measure μ such that $\Lambda(f) = \int f d\mu$ for every for every f in L.

Since X is compact, then $X \in \mathbf{C}$, and $\mu(X) < \infty$.

So $|\Lambda(f)| \le \int |f| d\mu \le \sup\{|f(x)| : x \in X\} \cdot \mu(X)$, here $\mu(X)$ is a constant.

Then Λ is bounded. ▮