线性代数B2
第十九讲

陈发来

2022.10.24

第三章 线性空间

§1线性空间基本理论

Definition

定义1 设V是非空集合，F是数域. 对V中的元素定义运算:

1. **加法**: 对V中的任意两个元素α, β组成的有序对(α, β)，存在V中唯一元素γ 与之对应，简记为$\alpha + \beta = \gamma$.
2. **数乘**: 对任意常数$\lambda \in F$及向量$\alpha \in V$，存在V中唯一的一个元素γ与之对应，简记为$\lambda\alpha = \gamma$.

加法与数乘运算满足下列运算规律:

(A1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ 对任意$\alpha, \beta \in V$成立.

(A2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ 对任意$\alpha, \beta, \gamma \in V$成立.

(A3) 存在元素$\theta \in V$使得$\alpha + \theta = \theta + \alpha = \alpha$对任意$\alpha \in V$成立. θ 称为**零元素**. 零元素也常简记为0.

(A4) 对任意$\alpha \in V$，存在$\beta \in V$使得$\alpha + \beta = \beta + \alpha = \theta$. β称为α的**负元素**，简记为$-\alpha$，并且定义$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$.

第三章 线性空间

Definition

(D1) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$对任意$\lambda\in F$及$\alpha,\beta\in V$成立.

(D2) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$对任意$\lambda,\mu\in F$及$\alpha\in V$成立.

(M1) $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$对任意$\lambda,\mu\in F$及$\alpha\in V$成立.

(M2) $1\alpha=\alpha$对任意$\alpha\in V$成立.

则称V是数域F上的**线性空间**, 简记为$V(F)$或V. 线性空间V中的元素称为**向量**.

关于加法与数乘两种运算可以用映射的观点解释. 记

$$V\times V:=\{(\alpha,\beta)\,|\,\alpha,\beta\in V\},\ F\times V:=\{(\lambda,\alpha)\,|\,\lambda\in F,\alpha\in V\}.$$

所谓V中的加法实际上是从$V\times V$到V的一个映射, 而数乘是$F\times V$到V的一个映射.

Definition

定义2 设V是数域F上的线性空间，W是V的非空子集。如果W对于线性空间V的加法与数乘运算保持封闭，即

1. 对任意$\alpha, \beta \in W$，有$\alpha + \beta \in W$;
2. 对任意$\lambda \in F, \alpha \in W$，有$\lambda\alpha \in W$.

则称W是V的**子空间**.

$W = \{0\}$及$W = V$称为**平凡子空间**。

Definition

定义3 设V是数域F上的线性空间，$S \subset V$是非空集合。则

$$\langle S \rangle := \{\lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_m\alpha_m \,|\, \lambda_i \in F,\ \alpha_i \in S\}$$

是一个子空间，称为V的**生成子空间**，S称为生成子空间的**生成元**。

显然α可以用S 线性表示，当且仅当$\alpha \in \langle S \rangle$.

第三章 线性空间

设

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix}.$$

A的行空间$R(A) := \langle \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_m \rangle$. $\dim(R(A)) = r(A)$.

A的列空间$C(A) := \langle \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n \rangle$. $\dim(C(A)) = r(A)$.

A的零空间$N(A) := \{\mathbf{x} \in F^n \mid A\mathbf{x} = 0\}$.
$\dim(N(A)) = n - r(A)$.

第三章 线性空间

Definition

定义4 设V是数域F上的线性空间，称向量组$T \subset V$可以由向量组$S \subset V$ **线性表示**，如果T中每一个向量都可以用向量组S线性表示。如果向量组S与T可以相互线性表示，则称S与T **等价**。

向量组的等价是一种等价关系.

Theorem

定理1 设S与T是线性空间V的两个向量组。则

1. T可以由S线性表示，当且仅当$\langle T\rangle \subset \langle S\rangle$.
2. U可以由T线性表示，T可以由S线性表示，则U可以由S线性表示.
3. S与T等价，当且仅当$\langle S\rangle = \langle T\rangle$.
4. U与T等价，T与S等价，则U与S等价.

第三章 线性空间

Definition

定义5 设V是数域F上的线性空间，S 是V中一组向量。如果S中某个向量能用S中其它向量线性表示，则称S **线性相关**。否则，称它们**线性无关**。特别地，一个向量组成的向量组**线性相关**，当且仅当该向量为零向量。

关于向量组的线性相关性，有下列等价的说法

1. $\alpha_1,\cdots,\alpha_m (m\geq 2)$线性相关；
2. 存在不全为零的常数$\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in F$使得$\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i\alpha_i=\theta$;
3. 存在向量α_i使得$\alpha_i=\sum\limits_{j\neq i}\lambda_j\alpha_j$;
4. 存在α_i使$\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_m\rangle=\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_m\rangle$.

第三章 线性空间

线性无关（相关）的引入。

假设线性空间V可以由$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性生成。于是任意$\alpha \in V$, 存在常数$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$使得

$$\alpha = \lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_n\alpha_n$$

假设α有另一个表示，即存在常数$\mu_1, \ldots, \mu_n$使得

$$\alpha = \mu_1\alpha_1 + \ldots + \mu_n\alpha_n$$

则

$$(\lambda_1 - \mu_1)\alpha_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)\alpha_n = 0.$$

如果α的表示唯一，则由上述可以推出$\lambda_i - \mu_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 这就是$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性无关的定义！

第三章 线性空间

Theorem

定理2 设向量组S_1是向量组S的一个子集. 则如果S_1线性相关, 则S也线性相关; 如果S线性无关, 则S_1也线性无关.

Definition

定义6 设S是线性空间V中的向量组. 若S的子集S_1线性无关, 且任加S中一个其它向量α后$S_1 \cup \{\alpha\}$线性相关, 则称S_1为向量组S的**极大无关组**.

Theorem

定理3 向量组的极大无关组有下列等价的说法

1. 向量组S的子集S_1是S的极大无关组;
2. 向量组S可以由子集S_1线性表示, 且S_1线性无关;
3. 向量组S与它的子集S_1等价, 且S_1线性无关;
4. $\langle S \rangle = \langle S_1 \rangle$, 且$S_1$线性无关。

第三章 线性空间

Theorem

定理4 两个等价向量组$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$和$\{\beta_1, \cdots, \beta_s\}$ 分别线性无关，则$r = s$.

证明.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_s \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{pmatrix},$$

$A \in F^{r\times s}, B \in F^{s\times r}$. 则$AB = I_r$, $BA = I_s$. 则$r = s$.
几何: $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_r \rangle = \langle \beta_1, \ldots, \beta_s \rangle$. □

Corollary

推论2 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_r$和$\beta_1, \cdots, \beta_s$分别为向量集合$S$的两个极大无关组，则$r = s$.

第三章 线性空间

Definition

定义7 向量组S所含极大无关组的向量的个数称为向量组的**秩**，记为rank(S) 或$r(S)$.

Theorem

定理5 设S,T是线性空间V中的向量组. 则有(设秩有限)

1. S线性无关当且仅当$\mathit{rank}(S)=\#S$.
2. S线性相关当且仅当$\mathit{rank}(S)<\#S$.
3. 若T可以用S线性表示，则$\mathit{rank}(T)\le \mathit{rank}(S)$.
4. 若T与S等价，则$\mathit{rank}(T)=\mathit{rank}(S)$.
5. 若T可以用S线性表示,且T线性无关，则$\#T\le\#S$.

第三章 线性空间

Definition

定义8 设V是数域F上的线性空间, S是V中一组线性无关向量. 如果V中任何向量都能表示成S的线性组合, 则称S为V的一组**基**. 若S是有限的, 则称V为**有限维线性空间**, S中元素的个数称为线性空间V的**维数**, 记为$\dim V$. 不是有限维的线性空间称为**无限维线性空间**, 其维数为无穷大. 设基$S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$是有限的, 则任意向量$\alpha \in V$可以唯一地表示成$S$的线性组合

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \ldots + x_n\alpha_n.$$

称$(x_1, \ldots, x_n)$为向量α在基S下的**坐标**.

注: 基就是线性空间的极大无关组, 维数就是线性空间的秩.

Theorem

定理6 设V是数域F上的有限维线性空间，则存在线性无关向量组$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$使得$V = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$.

Theorem

定理7 设V是数域F上的n维线性空间. 则有

1. V中任意$n+1$个向量线性相关。
2. V中任意n个线性无关向量为一组基。
3. 设$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in V$是$r(r < n)$个线性无关的向量，则存在$V$中的向量$\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$使得$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$构成$V$的一组基。称$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$为线性无关组$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 的一组**扩充基**。
4. 设U与V都是数域F上的有限维线性空间，且$U \subseteq V$，则$\dim U \leq \dim V$.
5. 设U与V都是数域F上的有限维线性空间，且$U \subseteq V$，若$\dim U = \dim V$，则$U = V$.

第三章 线性空间

设n维线性空间V在两组基$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$下的关系式为

$$(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)T, \tag{1}$$

矩阵T称为从基$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$到基$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$的**过渡矩阵**. 显然

$$(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)T^{-1}, \tag{2}$$

即从基$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$到基$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$的过渡矩阵为$T^{-1}$.
现设向量$\mathbf{v} \in V$在两组基$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$及$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$下的坐标分别为$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ 与$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$. 则由

$$\mathbf{v} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)\mathbf{x} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)\mathbf{y} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)T\mathbf{y}$$

可得$\mathbf{x} = T\mathbf{y}$. 因此，从原坐标$\mathbf{x}$到新坐标$\mathbf{y}$的**坐标变换公式**为

$$\mathbf{y} = T^{-1}\mathbf{x}. \tag{3}$$

第五章 线性空间

Example

例1 设$V=R$. $F=Q$. 证明: V按通常加法、数乘构成线性空间, 并且$1,\sqrt{2},\sqrt{3}$线性无关.

证明.

显然对任意$a,b\in V$, $\lambda\in F$, $a+b\in V$, $\lambda a\in V$. 因此V构成线性空间. 下证$1,\sqrt{2},\sqrt{3}$线性无关.
设$a,b,c\in F$满足$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$. 则$(b\sqrt{2}+c\sqrt{3})^2=a^2$
即$2bc\sqrt{6}=a^2-2b^2-3c^2$. 于是$bc=0$.
若$b=0$, 则$a+c\sqrt{3}=0\rightarrow a=c=0$.
若$c=0$, 则$a+b\sqrt{2}=0\rightarrow a=b=0$.
即$1,\sqrt{2},\sqrt{3}$线性无关. □

Example

例2 求Fibonacci数列的通项公式: $F_1=F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.

解.

令$V=\{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_{i+2}=a_{i+1}+a_i\}$. 则$V$是$\mathbb{R}^n$的子空间. 显然对$\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)\in V$, $\mathbf{a}$由a_1,a_2唯一确定:

$$\mathbf{a}=(a_1,a_2,F_1a_1+F_2a_2,F_2a_1+F_3a_2,\ldots,F_{n-2}a_1+F_{n-1}a_2)$$

令$\alpha=(1,0,\ldots)\in V$, $\beta=(0,1,\ldots)\in V$, 则$\mathbf{a}=a_1\alpha+a_2\beta$. 即$\alpha,\beta$是$V$的一组基, $\dim V=2$. 下面求V的一组特殊基.
设$\mathbf{q}=(1,q,\ldots,q^{n-1})\in V$ $(q\neq 0)$. 于是$q^{i+2}=q^{i+1}+q^i$.
解得$q_{1,2}=(1\pm\sqrt{5})/2$. 显然$\mathbf{q}_1=(1,q_1,\ldots,q_1^{n-1})$,
$\mathbf{q}_2=(1,q_2,\ldots,q_2^{n-1})$也构成$V$的一组基. 由
于$\mathbf{f}:=(F_1,F_2,\ldots,F_n)\in V$, 设其在基$\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2$下的坐标为$x,y$. 由$\mathbf{f}=x\mathbf{q}_1+y\mathbf{q}_2=(x+y,xq_1+yq_2,\ldots)$得
$x+y=1$, $xq_1+yq_2=1$. 解得$x=(q_2-1)/(q_2-q_1)$,
$y=(1-q_1)/(q_2-q_1)$. 故

$$\begin{aligned}F_n&=xq_1^{n-1}+yq_2^{n-1}=(q_2^n-q_1^n)/(q_2-q_1)\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).\end{aligned}$$

第五章 线性空间

Example

例3 无限域F上的线性空间V不能被它的有限个真子空间覆盖. 即设$V_1, \ldots, V_k$是V的真子空间, 则存在向量$\alpha \notin \cup_{i=1}^{k} V_i$.

证明.

不妨设子空间V_i之间互不包含. 对k用归纳法. $k=1$时结论显然. 对$k=2$, 存在$\alpha \in V_1 \backslash V_2$, $\beta \in V_2 \backslash V_1$. 下证
$\langle \alpha, \beta \rangle \not\subset V_1 \cup V_2$. 若不然对任意$\lambda, \mu \neq 0$,
$\gamma = \lambda\alpha + \mu\beta \in V_1 \cup V_2$, 不妨设$\gamma \in V_1$. 由$\alpha \in V_1$,
故$\beta \in V_1$, 矛盾! 故存在$\gamma = \lambda\alpha + \mu\beta \notin V_1 \cup V_2$.

现假设结论对k成立. 对$k+1$, 若$V_{k+1} \subset \cup_{i=1}^{k} V_i$, 则由归纳假设结论显然. 不然存在$\beta \in V_{k+1} \backslash (\cup_{i=1}^{k} V_i)$. 同理存在$\alpha \in \cup_{i=1}^{k} V_i \backslash V_{k+1}$. 下证$\langle \alpha, \beta \rangle \not\subset \cup_{i=1}^{k+1} V_i$, 即存在
$\gamma = \lambda\alpha + \mu\beta \notin \cup_{i=1}^{k+1} V_i$. □

.

若不然，对任意$\mu \neq 0$，$\gamma = \alpha + \mu\beta \in \cup_{i=1}^{k+1} V_i$. 若$\gamma \in V_{k+1}$，由于$\beta \in V_{k+1}$，则$\alpha \in V_{k+1}$，矛盾！故$\gamma \in \cup_{i=1}^{k} V_i$. 由$F$的无限性，至少存在两个不同数$\mu_1, \mu_2$及某个$V_i$使得
$\gamma_1 = \alpha + \mu_1\beta \in V_i$, $\gamma_2 = \alpha + \mu_2\beta \in V_i$. 于是
$(\mu_1 - \mu_2)\beta = \gamma_1 - \gamma_2 \in V_i$. 进而$\beta \in V_i \subset \cup_{j=1}^{k} V_j$. 矛盾！ □

Example

例4 设$A \in F^{m\times n}$, $B \in F^{n\times p}$, $C \in F^{p\times q}$. 证明:
如果$r(B) = r(AB)$，则$r(BC) = r(ABC)$.

证明.

引入$V_1 = \{\mathbf{x} \in F^p \,|\, B\mathbf{x} = 0\}$, $V_2 = \{\mathbf{x} \in F^p \,|\, AB\mathbf{x} = 0\}$,
$V_3 = \{\mathbf{y} \in F^q \,|\, BC\mathbf{y} = 0\}$, $V_4 = \{\mathbf{y} \in F^q \,|\, ABC\mathbf{y} = 0\}$.
则$\dim V_1 = p - r(B)$, $\dim V_2 = p - r(AB)$,
$\dim V_3 = q - r(BC)$, $\dim V_4 = q - r(ABC)$. □

.

又显然$V_1 \subset V_2$, $V_3 \subset V_4$. 若$r(B) = r(AB)$, 则$V_1 = V_2$.
下证$V_3 = V_4$, 于是由$\dim V_3 = \dim V_4$得$r(BC) = r(ABC)$.
实际上设$y \in V_4$, 则$Cy \in V_2$. 于是$Cy \in V_1$, 即$BCy = 0$.
因而$y \in V_3$. □

Example

例5 设A为n阶方阵. 证明: $r(A^n) = r(A^{n+1}) = \ldots$.

证明.

设$A \neq 0$. 若$r(A^k) = r(A^{k+1})$, 由例4, 取$B = A^k$, $C = A$, 得$r(A^{k+1}) = r(A^{k+2})$. 下面说明$r(A^n) = r(A^{n+1})$. 这只要说明使$r(A^k) = r(A^{k+1})$成立的最小正整数$k \leq n$.
实际上由$n \geq r(A) > r(A^2) > \ldots > r(A^k) > 0$得$k \leq n$. □

Example

例6 设$A\in F^{m\times n}$, $B\in F^{n\times p}$. 证明:

$$r(A)+r(B)-n\le r(AB).$$

证明.

$$r(A)+r(B)-n\le r(AB)\Leftrightarrow$$
$$(p-r(AB))-(p-r(B))\le n-r(A).$$

引入$V_A=\{\mathbf{x}\in F^n\,|\,A\mathbf{x}=0\}$, $V_B=\{\mathbf{y}\in F^p\,|\,B\mathbf{y}=0\}$, $V_{AB}=\{\mathbf{z}\in F^p\,|\,AB\mathbf{z}=0\}$. 则$V_B\subset V_{AB}$,
$r(A)+r(B)-n\le r(AB)\Leftrightarrow \dim V_{AB}-\dim V_B\le \dim V_A$.
再引入$V_B'=\{y=Bz\in F^n\,|\,z\in V_{AB}\}$. 我们证明:

$$(1)\ V_B'\subset V_A;\quad (2)\ \dim V_B'=\dim V_{AB}-\dim V_B.$$

(1) 设$y\in V_B'$, 则$y=Bz$, $z\in V_{AB}$. 于是$Ay=ABz=0$, 即$y\in V_A$. 因此$V_B'\subset V_A$.

□

第五章 线性空间

(2) 若$y\in V_B$, 则$By=0$, $ABy=0$, 故$y\in V_{AB}$, $V_B\subset V_{AB}$. 设$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$为V_B的一组基, $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s$为$V_{AB}$的一组基. 显然$B\beta_1,\ldots,B\beta_s\in V_B'$. 下证$B\beta_1,\ldots,B\beta_s$为$V_B'$的一组基, 从而$\dim V_B'=\dim V_{AB}-\dim V_B$.

实际上, 任意$\alpha\in V_{AB}$,

$$\alpha=\lambda_1\alpha_1+\ldots+\lambda_r\alpha_r+\mu_1\beta_1+\ldots+\mu_s\beta_s.$$

于是$B\alpha=\mu_1B\beta_1+\ldots+\mu_sB\beta_s$. 即$V_B'=\langle B\beta_1,\ldots,B\beta_s\rangle$.

下证$B\beta_1,\ldots,B\beta_s$线性无关.

若$\mu_1B\beta_1+\ldots+\mu_sB\beta_s=0$, 则$\mu_1\beta_1+\ldots+\mu_s\beta_s\in V_B$. 故存在常数$\delta_1,\ldots,\delta_r$使得

$$\mu_1\beta_1+\ldots+\mu_s\beta_s=\delta_1\alpha_1+\ldots+\delta_r\alpha_r.$$

从而$\mu_1=\ldots=\mu_s=0$, 即$B\beta_1,\ldots,B\beta_s$线性无关.

由(1),(2)得$\dim V_B'=\dim V_{AB}-\dim V_B\le\dim V_A$. $\square$

第三章 线性空间

作业：§2.5 2,3,4,6,8.