

2022 数学分析 B3 期中考试 (胡班)

徐诩绫目高等研究所 (转载)

日期: 2022 年 11 月 27 日

1、(20 分)

- (1) 证明实数空间的开集是至多可数个开区间的并。
- (2) 证明实数空间中的至少包含两个点的连通集合必为一个区间。

2、(20 分)

- (1) 证明紧致空间上的连续函数有界, 并能达到上确界、下确界。
- (2) 证明紧致度量空间上的连续函数一定一致连续。

3、(20 分) 实射影空间 \mathbb{RP}^2 的点为 \mathbb{R}^3 中经过原点的所有直线。设 $(x, y, z) \neq 0$, $L = [x, y, z] = \{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ 为经过此点和原点的直线。请给出 \mathbb{RP}^2 的坐标片, 并验证其为二维流形。

4、(20 分)

- (1) 证明 $GL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \det A = ad - bc \neq 0 \right\}$ 是一个四维流形。
- (2) 证明 $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ 是一个三维流形。

5、(20 分) 考虑单位球面 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1\}$ 。令 (θ, ϕ) 为 S^2 的一个局部坐标卡, $(x_1, x_2, x_3) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, $\theta \in (0, \pi), \phi \in (0, 2\pi)$ 。记 $I: S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 为包含映射。

- (1) 试将 $I_* \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right), I_* \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)$ 表示为 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$ 的线性组合。
- (2) 证明 $I_* \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right), I_* \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)$ 和 $x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ 正交。