1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. 求 A^{-1}.

解: 法一: $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & & n & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & & \\ & & \ddots & 2 & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & 1 \end{array}\right)$

$=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \vdots & & \ddots & -1 & \\ & & \ddots & 1 & & & \ddots & -1 \\ & & & 1 & & & & 1 \end{array}\right)$

$=\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & & & & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & & & & \ddots & \ddots & -2 \\ & & & 1 & & & & & 1 \end{array}\right)$.

i.e. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & -2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

法二: $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$ (维数较高后不太好算)

法三: 记 $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

则 $N^n=0$. $A=I+2N+3N^2+\cdots+nN^{n-1}$.

(注意到, $\dfrac{1}{(1-x)^{k+1}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} C_{n+k}^{k}x^n$).

则 $A^{-1}=(I-N)^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & -2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$. □

2. $A\in F^{m\times n}$, 求 $X\in F^{m\times n}$ s.t. $A^TX=X^TA$.

解：法一：相抵标准型：

$\exists\ r>0$, $P\in GL_m(F)$, $Q\in GL_n(F)$, s.t. $A=P\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}Q$

则 $A^TX=X^TA \iff Q^T\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P^TX=X^TP\begin{pmatrix}I_r&\\&0\end{pmatrix}Q$

$\iff \begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}P^TXQ^{-1}=(Q^T)^{-1}X^TP\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$. (*)

记 $Y=P^TXQ^{-1}\in F^{m\times n}$

$=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\a_3&a_4\end{pmatrix}$. $a_1\in F^{r\times r}$, $a_2\in F^{r\times(n-r)}$,

$a_3\in F^{(m-r)\times r}$, $a_4\in F^{(m-r)\times(n-r)}$.

代入(*)式，解得：$a_1=a_1^T$. $a_2=0$.

综上：$X=(P^T)^{-1}\begin{pmatrix}a_1&0\\a_3&a_4\end{pmatrix}Q$.

$a_1=a_1^T\in F^{r\times r}$, $a_3\in F^{(m-r)\times r}$, $a_4\in F^{(m-r)\times(n-r)}$

法二：利用广义逆.

应用 [编辑]

任何一种广义逆阵都可以用来判断线性方程组是否有解，若有解时列出其所有的解[4]。若以下$n\times m$的线性系统有解存在

$$Ax=b$$

其中向量x为未知数，向量b为常数，以下是所有的解

$$x=A^gb+[I-A^gA]w$$

其中参数w为任意矩阵，而A^g为A的任何一个广义逆阵。解存在的条件当且仅当A^gb为其中一个解，也就是当且仅当$AA^gb=b$。

设 $Y\in F^{n\times n}$, $Y^T=Y$

即，求解：$A^TX=Y$.

①解存在条件：$A^T(A^T)^-Y=Y$. (*)

很多人没写!

设 $A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$. 则取 $(A^T)^- = (P^T)^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}(Q^T)^{-1}$

则 $(*) \Leftrightarrow \quad Q^T\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(Q^T)^{-1} Y = Y$

$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & \\ & -I_{n-r} \end{pmatrix}(Q^T)^{-1} Y = 0$

$\Leftrightarrow \quad Y = Q^T \cdot \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_1 \in F^{r\times r}, Y_2 \in F^{r\times(n-r)}$

$Y = Y^T$ 则 $\begin{pmatrix} Y_1^T & 0 \\ Y_2^T & 0 \end{pmatrix} Q = Q^T\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

i.e. $(Q^T)^{-1}\begin{pmatrix} Y_1^T & 0 \\ Y_2^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

设 $\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ S_2 & 0 \end{pmatrix} = (Q^T)^{-1}\begin{pmatrix} Y_1^T & 0 \\ Y_2^T & 0 \end{pmatrix}$

则 $S_1 = S_1^T$. $S_2 = 0$

则 $Y = Q^T\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$.

② 通解: $\qquad Z \in F^{m\times n}$. Y 如 ①

$X = (A^T)^- Y + [I-(A^T)^- A^T] Z$.

$= (P^T)^{-1}\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}(Q^T)^{-1} Q^T\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$

$+ \left(I - (P^T)^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^T\right) Z$

$(A^T)^{-1} Y = (P^T)^{-1}\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$

$$(I-(A^T)^{-1}A^T)Z=(P^T)^{-1}\begin{pmatrix}0 & \\ & I_{m-r}\end{pmatrix}P^T Z$$

$$=(P^T)^{-1}\begin{pmatrix}0 & \\ & I_{n-r}\end{pmatrix}(P^T Z Q^{-1})Q$$

$$=(P^T)^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0\\ Z_1 & Z_2\end{pmatrix}Q$$

综上：$X=(P^T)^{-1}\begin{pmatrix}S_1 & 0\\ Z_1 & Z_2\end{pmatrix}Q$. $S_1=S_1^T$. . $\square$

3. $A, B\in F^{m\times n}$. $C, D\in F^{n\times p}$.

求证：$r(AC-BD)\le r(A-B)+r(C-D)$.

证明：
$$r(A-B)+r(C-D)=r\begin{pmatrix}A-B & \\ & C-D\end{pmatrix}$$
$$=r\begin{pmatrix}A-B & (A-B)C+B(C-D)\\ & C-D\end{pmatrix}$$
$$=r\begin{pmatrix}A-B & AC-BD\\ & C-D\end{pmatrix}$$
$$\ge r(AC-BD).$$ $\square$.