2023 春复分析每日一练 (VII)

黄天一

2023 年 6 月 25 日

1 核心内容回顾

1. 正规族的概念, Montel 定理.

2. 黎曼映射定理与边界对应原理.

3. 借助初等全纯函数找共形映射: 幂函数、指数函数、对数函数、分式线性变换的性质.

4. 在共形变换中常见的区域: 二圆相交区域、二圆相切区域、带割线的区域、二连通区域.

2 共形变换习题

1. (18 期末) 求将区域 $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Re} z < \pi\}$ 映为单位圆盘的共形映射.

2. (21 期末) 构造上半圆盘 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ 到上半平面的共形等价映射.

3. (16H 期末) 构造一个共形映射将 $\{z : |z| > 1\} \setminus (-\infty, -1]$ 映为单位圆盘.

4. 构造一个共形映射将 $\{z \in \mathbb{C} : |z - \mathrm{i}| > 1, |z + \mathrm{i}| > 1\}$ 映为单位圆内部.

5. 求出将偏心圆环 $|z - 3| > 9, |z - 8| < 16$ 映为同心圆环 $1 < |w| < R$ 的分式线性变换.

3 一些证明题

1. 设 D 为区域, $a \in D$, z_0 为常数. 证明: $\mathcal{F} = \{f \in H(D) : f(a) = z_0, \operatorname{Re} f > 0\}$ 是 D 上的正规族.

2. 证明: 存在 $B(0,1)$ 上的全纯映射将 $B(0,1)$ 映成 $\mathbb{C}$, 但是不存在 $B(0,1)$ 上的双全纯映射将 $B(0,1)$ 映成 $\mathbb{C}$.

3. (20H 期末) 设 $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$, $G = \{z \in G : 1 < |z| < 2\}$. 证明: 不存在从 D 到 G 的双全纯映射. (不要套用课上讲过的结论)