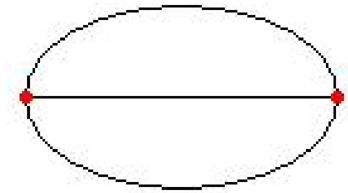
思考题讨论

- **思考题4.3** 证明$m-1=\ell-n$。
- **思考题4.4** 电场综合问题中，导电介质界面两侧的D_n连续吗？$\boldsymbol{D}$的高斯定理为什么不能做静电场综合求解问题的一个基本方程?

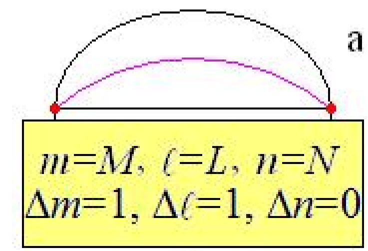
思考题4.3 证明 $m-1=\ell-n$。(*)



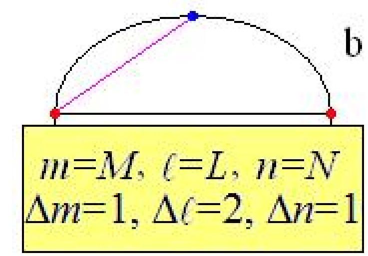
证明1：数学归纳法

1) 非平庸的最简单电路$m=2,\ \ell=3,\ n=2$，满足(*)式。

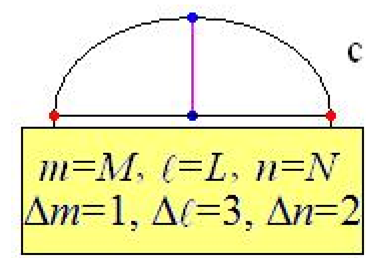
2) 设$m=M,\ \ell=L,\ n=N$时(*)式成立，再增一独立回路时，有三种非平庸情况，均能满足(*)式：



a. 两个旧节点之间增一条连线，$\Delta m=1,\ \Delta\ell=1,\ \Delta n=0$；



b. 在一个旧节点和一个新节点之间增一条连线，$\Delta m=1,\ \Delta\ell=2,\ \Delta n=1$；

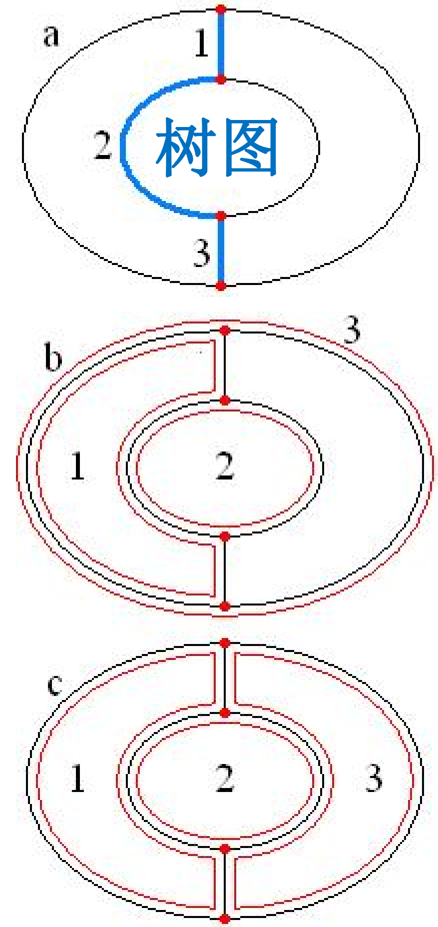


c. 两个新节点之间增一条连线，$\Delta m=1,\ \Delta\ell=3,\ \Delta n=2$。

由1)和2)，(*)式对任意电路成立。

证明2：利用图论知识

- 若干支路将所有n个节点连接但不形成任何回路，则这些支路之一称**树支**，共$n-1$个，如图**a**支路1、2和3。全部树支构成**树图**。
- 树图每再连接两个节点便形成一个**独立回路**。新添支路称**连支**，共m个。
- 树支和连支构成所有支路$\rightarrow n-1+m=\ell$
- 这里定义的独立回路与教材相符，**可操作性强**。
- 旧教材定义有**歧义**：图**b**任一独立回路有支路不被其他独立回路所共有，但图**c**独立回路**2**则不然。



第十六讲 2022-04-21
数学知识补充

1. 矢量运算
2. 哈密顿算符

一、矢量运算

除非特别指出，以下讨论限于三维空间。

1. 矢量

1) 基本性质：既有大小，也有方向。

如位移/力/动量/角动量/电场强度/磁感应强度

印刷体粗斜字母，如$\boldsymbol{A}$

手写体斜体字母加箭头，如 $\vec{A}$

矢量的分量形如A_i，其中下标i=1, 2, 3或x, y, z。

按限制程度，矢量可分三类：

自由矢量：起点任取，如速度、加速度、力偶矩

滑移矢量：作用线固定，如刚体受力

束缚矢量：始端固定，如空间分布的电场强度

2) 与标量和张量的对比

标量：有大小，无方向，可有正负。

如路程/能量/转动惯量/电势/温度/人数。

一般用普通斜体表示，如电势φ

张量：一般指2阶张量，有9个分量。

如应力张量/惯量张量/电极化张量/电磁动量流密度张量。

用粗正体或字符加双箭头表示，如**T**或$\overleftrightarrow{T}$，

双下标分量，如T_{ij}，其中i, j=1, 2, 3或x, y, z

更广义地，可以将标量、矢量和张量依次命名为0阶、1阶和2阶张量。

3) 标量/矢量/张量的联系1： 两个矢量间的桥梁

a. 标量： $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}$ (各向同性介质)

$\boldsymbol{J} = I \boldsymbol{\omega}$ (定轴转动)

b. 张量： $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}_e \cdot \boldsymbol{E}$ (各向异性介质)

$\boldsymbol{J} = \overleftrightarrow{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ (定点转动)

c. 矢量： $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{\upsilon}$, $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{B}$

若三个矢量存在叉乘关系，则它们可分为两类：

极矢量：空间反演下变号，如位移/速度/力

轴矢量：空间反演下不变号，如角速度/力矩/磁感应强度

另一种等效说法：

极矢量：镜像反射下，切分量不变而法分量反向

轴矢量：镜像反射下，切分量反向而法分量不变

4) 标量/矢量/张量联系2： n阶张量运动⇒n+1阶张量

a. 标量 $\xrightarrow{\text{运动}}$ 矢量：$\rho \xrightarrow{\text{运动}} \boldsymbol{j}$，$w \xrightarrow{\text{运动}} \boldsymbol{S}$

b. 矢量 $\xrightarrow{\text{运动}}$ 张量：$\boldsymbol{g} \xrightarrow{\text{运动}} \overleftrightarrow{T}$

(3个分量分别在3个方向上变化→9个分量)

5) 张量形式可高效利用数学工具

如N个线圈的磁能，我们以前熟悉的是分量形式，但也可以写成张量形式，直接利用数学的张量理论解决科学问题。

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} M_{ij} I_i I_j$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_1 & \cdots & I_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & \cdots & M_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{I} \cdot \overleftrightarrow{M} \cdot \boldsymbol{I}$$

2.基本运算

1) 点乘： $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=\sum_{i=1}^{3}A_iB_i$

2) 叉乘： $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{e}_z$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{3}(A_jB_k-A_kB_j)\,\boldsymbol{e}_i$$

(i, j, k互异，i, j, k按1, 2, 3排列的偶次置换顺序)

3. 哑标和自由标

1) 表达式中需求和的指标叫哑标，不求和的指标叫自由标，如$\sum_{i=1}^{3} A_i B_i C_j$中，$i$是哑标，$j$是自由标。

2) 哑标求和后不再出现，自由标求和后依然存在。故而哑标名称可随意更换，但表达式中的自由标不可更换，等式两边的自由标须同时更换名称。

4. 爱因斯坦 (Einetein) 求和约定

经常遇到重复指标求和情形，在不会引起歧义时，可以略去求和符号。如：上式简记为$A_i B_i C_j$。

5. 克罗内克 (Kronecker) 对称张量

- 定义： $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$
- 性质：对称性 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$， 指标缩并 $A_i\delta_{ij} = A_j$

6. 列维-西维塔 (Levi-Civita) 反对称张量

- 定义： $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & i,j,k\text{按1,2,3或其偶次置换顺序} \\ -1 & i,j,k\text{按2,1,3或其偶次置换顺序} \\ 0 & \text{其他}\, i,j,k \end{cases}$
- 性质： $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = -\varepsilon_{jik}$， $\varepsilon_{iik} = 0,$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}.$$

7. 点乘与叉乘的表示

1) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_iB_i$

2) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_{ijk}A_jB_k\boldsymbol{e}_i$

理解：$i=1$时，非零的ε_{ijk}只有ε_{123}和ε_{132}，

$\varepsilon_{ijk}A_jB_k=\varepsilon_{123}A_2B_3+\varepsilon_{132}A_3B_2=A_2B_3-A_3B_2$，

恰为$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$的$x$分量。

计算方式：对于标量式，直接展开证明

对于矢量式，证明i分量相等

8. 三矢量运算

1) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

证明：左 $=A_i(B\times C)_i=A_i\varepsilon_{ijk}B_jC_k=B_j\varepsilon_{ijk}C_kA_i$

$=B_j\varepsilon_{jki}C_kA_i=B_j(C\times A)_j=$中

另一等号同理可证。

2) $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$

证明： 左第i分量

$=\varepsilon_{ijk}A_j(B\times C)_k=\varepsilon_{ijk}A_j(\varepsilon_{klm}B_lC_m)$

$=\varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}A_jB_lC_m=(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})A_jB_lC_m$

$=A_jB_iC_j-A_jB_jC_i=(A_jC_j)B_i-(A_jB_j)C_i=$右第$i$分量

2. 哈密顿 (Hamilton) 算符

1. 基本知识

- 纳布拉 (Nabla)∇的定义

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i$$

分量$\partial/\partial x_i$在不引起歧义时可简记为 ∂/∂_i，甚至∂_i

- ∇ 既是微分算子，又是矢量。
- 算符与变量不可交换顺序，如 $\partial_i A_j B_i \neq A_j \partial_i B_i$
- 算符作用于多个变量，须加括号 $\partial_i A_j B_i \neq \partial_i (A_j B_i)$

2. ∇的三种基本运算

1) 梯度 $\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$， i分量为$\partial_i\varphi$

意义：将φ的变化作一阶泰勒展开

$$\Delta\varphi = \varphi(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) - \varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta z$$

$$= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \nabla\varphi\cdot\Delta\boldsymbol{r}$$

保持$|\Delta\boldsymbol{r}|$不变，则当$\Delta\boldsymbol{r}//\nabla\varphi$时，$\Delta\varphi$最大，

$\nabla\varphi$指向φ值上升最快的方向

2) 散度

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z = \sum_{i=1}^{3}\partial_i A_i$$

意义：由高斯公式 $\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V$

可证 $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \lim\limits_{\Delta V\to 0}\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}/\Delta V$

闭合面 $\boldsymbol{S}$包围的体积

可见，散度是单位体积的通量。

$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，$\boldsymbol{A}$为无源场；$\nabla\cdot\boldsymbol{A}\neq 0$，$\boldsymbol{A}$为有源场

3) 旋度

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\partial_j A_k \boldsymbol{e}_i$$

意义：由Stokes公式 $\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

可证 $\left|\nabla \times \boldsymbol{A}\right| = \lim\limits_{\Delta S_\perp \to 0} \oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} / \Delta S_\perp,$

可见，旋度是单位横截面的环量。

$\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$, $\boldsymbol{A}$为无旋场；$\nabla \times \boldsymbol{A} \neq 0$, $\boldsymbol{A}$为有旋场

2. 运算举例

- 证明 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0.$

左 $=\partial_i(\nabla\times\boldsymbol{A})_i=\partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k \overset{i,j\text{互换}}{=} \partial_j\varepsilon_{jik}\partial_i A_k$,

将∂_i和∂_j交换顺序，结果不变，又$\varepsilon_{jik}=-\varepsilon_{ijk}$,

上式$=-\partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k=-$左,

所以左=0，原题得证。

实际上，$\partial_i\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k$ 整体上关于全局求和的指标i, j反对称，相当于奇函数在对称区间积分，结果必然为零。

- 证明

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}).$$

右前两项i分量

$$= B_j\partial_j A_i + \varepsilon_{ijk}B_j(\nabla\times\boldsymbol{A})_k$$

$$= B_j\partial_j A_i + \varepsilon_{ijk}B_j\varepsilon_{klm}\partial_l A_m$$

$$= B_j\partial_j A_i + (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})B_j\partial_l A_m$$

$$= B_j\partial_j A_i + B_j\partial_i A_j - B_j\partial_j A_i = B_j\partial_i A_j,$$

同理，右边后两项i分量$=A_j\partial_i B_j$,

$\rightarrow$右边i分量$= B_j\partial_i A_j + A_j\partial_i B_j = \partial_i(A_jB_j)$ =左边i分量

- **由电偶极子电势计算电场 (p25例1.9)**

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3},$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}&=-\nabla U=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\\
&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^3}-\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\\
&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial_i(p_j r_j)\boldsymbol{e}_i}{r^3}+\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\nabla r\\
&=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_j\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i}{r^3}+\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}+\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}
\end{aligned}$$

- **两个电偶极子间的静电力 (p87例3.10)**

由例1.9， $\boldsymbol{E}_2 = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\boldsymbol{p}_2}{r^3} + \dfrac{3(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$,

$$\therefore W_{互} = -\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^5},$$

$$\boldsymbol{F}_{12} = -(\nabla W_{互})_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2} = -\nabla\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r})}{4\pi\varepsilon_0 r^5}\right]_{\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2}$$

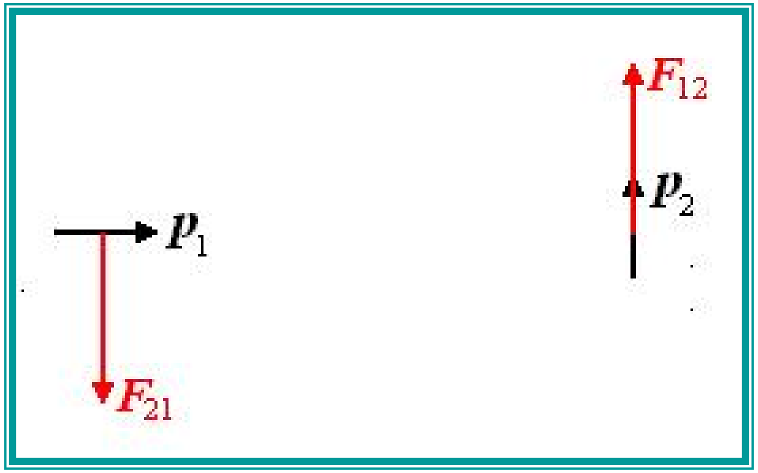
$$= \frac{\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5} + \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{p}_1 + (\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{p}_2}{r^5} - \frac{15(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^7}$$

$$= \frac{3}{4\pi\varepsilon_0 r^4}[(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2 - 5p_{1r}p_{2r})\hat{r} + p_{2r}\boldsymbol{p}_1 + p_{1r}\boldsymbol{p}_2].$$

$\boldsymbol{F}_{21}=-\boldsymbol{F}_{12}$，但一般不在连线方向。

如：当$\boldsymbol{p}_1//\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{p}_2\perp\boldsymbol{r}$时， $\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}=\dfrac{3p_1\boldsymbol{p}_2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}.$

两个力均位于连线的垂直方向，不完全满足牛顿第三定律！



原因：$\boldsymbol{F}_{21}$和$\boldsymbol{F}_{12}$不是一对作用力！

- 严格推导场观点下的静电能

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{e}} &= \frac{1}{2}\iiint_V \rho_{\mathrm{e}0} U \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\iiint_V (\nabla\cdot\boldsymbol{D}) U \mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{2}\iiint_V [\nabla\cdot(\boldsymbol{D}U) - \boldsymbol{D}\cdot\nabla U]\mathrm{d}V \\
&= \frac{1}{2}\oiint_S (\boldsymbol{D}U)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V,
\end{aligned}
$$

将V扩大到无穷空间，原始积分不变，此时S可看成半径趋于无穷的球面。球面上$\boldsymbol{D}\sim r^{-2}$, $U\sim r^{-1}$, $S\sim r^2$

⇒上式首项 (称为表面项) 趋于零，于是

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V.$$

作业、预习及思考题

- 补充作业：

  1. 证明：1) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0$ 2) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0$

  3) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$

  2. 证明p316 (4-36) 和 (4-39) 式

- 预习：5.1 磁现象与磁场、5.2 毕一萨定律

- 思考题 0.2 从(3.2.14)式导出$w_{极}=\frac{1}{2}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}$。

- 思考题 0.3 如果 $\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 对任意闭合曲面S都成立，能否推出$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$?