关于曲面的一个基本问题：给定关于参数(u,v)的两个对称二次微分形式

$$\varphi = a_{11}dudu + 2a_{12}du\cdot dv + a_{22}dvdv > 0$$

$$\psi = b_{11}dudu + 2b_{12}du\cdot dv + b_{22}dvdv,$$

什么条件下存在$\mathbb{R}^3$的参数曲面$r(u,v)$使得φ,ψ 分别是它的第一、第二基本形式？如果存在这样的曲面，是否唯一？

将证明：当二次微分式φ,ψ满足Gauss方程和Codazzi方程时，存在参数曲面$r(u,v)$分别以φ,ψ为它的第一、第二基本形式；在相差$\mathbb{R}^3$的一个刚体运动的意义下，第一基本形式和第二基本形式完全决定曲面。

将采用自然标架和正交标架两种方法讨论这些问题。

§0.1 活动标架

活动标架的概念起源于力学。在研究刚体运动时会在刚体上联系一个标架，刚体运动时标架随着运动，这样得到依赖于参数t的一族标架，刚体的运动就可以用这一族标架来表示。Cotten、Darboux等人把标架概念推广到与多个变量有关的情形。E. Cartan将这个理论发扬光大，他将活动标架从运动群推广到任意李群，并引进外微分形式直接研究几何。

首先简要介绍曲面上的活动标架的概念。

定义0.1. *(向量场)* *设$\mathbb{R}^3$中的曲面S的参数表示为$r=r(u,v)$。*

(i)参数曲面S上的(光滑)向量场$X(u,v)$ 是指对于S上任一点$r(u,v)$，$X(u,v)$是从点$r(u,v)$出发的一个向量，并且$X(u,v)$光滑地依赖于参数(u,v)。即光滑映射$X:(u,v)\mapsto X(u,v)\in T_P\mathbb{R}^3$。

(ii)对于$(u,v)\in D$，当$X(u,v)$为曲面S在$r(u,v)$的切向量时，即$X(u,v)\in T_PS$，则称$X(u,v)$ 为曲面S的切向量场。

(iii)当$X(u,v)$是曲面S在$r(u,v)$的法向量时，$X(u,v)$称为曲面S的法向量场。

例：r_u,r_v为曲面S的两个切向量场。N是曲面的单位法向量场。

定义0.2. *(活动标架)* *曲面S上的一个活动标架场是指映射*

$$(u,v)\mapsto \{r(u,v);X_1(u,v),X_2(u,v),X_3(u,v)\},$$

其中X_1, X_2, X_3是曲面S上处处线性无关的光滑向量场，$\{r(u,v); X_1(u,v), X_2(u,v), X_3(u,v)\}$是以曲面上的点$r(u,v)$为原点的$\mathbb{R}^3$的一个标架。

如果$X_1(u,v), X_2(u,v), X_3(u,v) \in T_P\mathbb{R}^3$为单位正交基，则称它为曲面的正交标架。

曲面上活动标架$\{r(u,v); r_u, r_v, N\}$称为参数曲面的自然标架场。

$X_1, X_2, X_3 \in T_P\mathbb{R}^3$线性无关，因此混合积$(X_1, X_2, X_3) \neq 0$。一般还要求$(X_1, X_2, X_3) > 0$，即这些标架均为正定向。

例：设曲面S的参数表示为$r = r(u,v)$。令

$$e_1 = \frac{r_u}{\sqrt{E}},$$

$$e_2 = \frac{r_v - \langle r_v, e_1\rangle e_1}{|r_v - \langle r_v, e_1\rangle e_1|}.$$

令

$$e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{r_u \wedge r_v}{|r_u \wedge r_v|} = N,$$

则$\{r; e_1, e_2, e_3\}$是S的一个(正定向)正交标架。$\{e_1, e_2\}$是曲面切平面的单位正交基。为了使标架$\{r; X_1, X_2, X_3\}$能方便反映曲面的几何，后面均要求X_1, X_2为曲面的切向量。

例：设$r(s)$为$\mathbb{R}^3$中的一条弧长参数曲线，$\{r(s); e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$是沿$r(s)$的正定向正交标架，其中$e_1 = \frac{dr}{ds}$。令

$$\frac{de_i(s)}{ds} = \sum_{j=1}^{3} q_{ij}(s) e_j, \quad i = 1, 2, 3.$$

由$\langle e_i, e_j\rangle \equiv \delta_{ij}$，

$$0 = \frac{d}{ds}\langle e_i, e_j\rangle = \langle q_{ik}e_k, e_j\rangle + \langle e_i, q_{jk}e_k\rangle = q_{ij} + q_{ji}.$$

在讨论空间曲线的局部理论时，假定$\ddot{r} \neq 0$，由$\ddot{r} := \kappa e_2, \kappa > 0$确定$e_2$。一般情形，$e_2, e_3$和$e_1$构成正交标架即可。沿$r(s)$任意的任意正交标架$\{r(s); \widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3\}$满足

$$\widetilde{e}_1 = e_1, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{e}_2 \\ \widetilde{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} := B \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \end{pmatrix},$$

其中$\theta = \theta(s)$。同样令

$$\frac{de_1}{ds} = \widetilde{q}_{12}\widetilde{e}_2 + \widetilde{q}_{13}\widetilde{e}_3.$$

则

$$\widetilde{q}_{12}^2+\widetilde{q}_{13}^2=|\ddot{r}|^2=\kappa^2=q_{12}^2+q_{13}^2$$

不依赖于标架的选取，$\sqrt{q_{12}^2+q_{13}^2}$即曲线曲率κ。更具体有

$$\begin{pmatrix}\widetilde{q}_{12}\\ \widetilde{q}_{13}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_{12}\\ q_{13}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}q_{12}\\ q_{13}\end{pmatrix}. \quad (*)$$

事实上，记

$$e=\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\\ e_3\end{pmatrix},\quad \widetilde{e}=Ae,\quad \frac{de}{ds}=Qe,\quad \frac{d\widetilde{e}}{ds}=\widetilde{Q}\widetilde{e},$$

则

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\widetilde{e} &= \widetilde{Q}\widetilde{e}\\ &= \frac{dA}{ds}e+A\frac{de}{ds}=\frac{dA}{ds}e+AQe\\ &= (\frac{dA}{ds}+AQ)A^{-1}\widetilde{e},\end{aligned}$$

即不同标架$\widetilde{e}=Ae$的导数的变换关系为

$$\widetilde{Q}=\frac{dA}{ds}A^{-1}+AQA^{-1}.$$

由$A=diag(1,B)$代入得$(*)$。

当$\kappa^2=q_{12}^2+q_{13}^2\neq 0$时，存在$\theta(s)$使得

$$\widetilde{q}_{13}=-\sin\theta q_{12}+\cos\theta q_{13}=0,$$

$$\widetilde{q}_{12}=\cos\theta q_{12}+\sin\theta q_{13}>0.$$

从而

$$\widetilde{q}_{12}=\kappa,\quad \widetilde{e}_2=N(s),$$

并且

$$\frac{d\widetilde{e}_1}{ds}=\ddot{r}(s)=\widetilde{q}_{12}\widetilde{e}_2=\kappa(s)N(s),$$

$$\frac{d\widetilde{e}_2}{ds}=\frac{dN}{ds}=\widetilde{q}_{21}\widetilde{e}_1+\widetilde{q}_{23}\widetilde{e}_3=-\kappa(s)T(s)+\tau(s)B(s),$$

$$\frac{d\widetilde{e}_3}{ds}=\frac{dB}{ds}=\widetilde{q}_{32}\widetilde{e}_2=-\tau(s)N(s).$$

即$(\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_2,\widetilde{e}_3)^T$为Frenet标架，$\frac{d\widetilde{e}}{ds}=\widetilde{Q}\widetilde{e}$为Frenet标架运动方程。

§0.2 自然标架的运动方程

设$r=r(u,v)$为$\mathbb{R}^3$中参数曲面。有自然标架场$\{r;r_u,r_v,N\}$。采用记号：

$$u^1=u,\quad u^2=v;$$

$$r_1=\frac{\partial r}{\partial u^1}=r_u,\quad r_2=\frac{\partial r}{\partial u^2}=r_v;\quad r_\alpha=\frac{\partial r}{\partial u^\alpha},\quad \alpha=1,2;$$

$$r_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 r}{\partial u^\beta\partial u^\alpha},\quad \alpha,\beta=1,2;$$

$$g_{\alpha\beta}=\langle r_\alpha,r_\beta\rangle,\quad \alpha,\beta=1,2;$$

$$b_{\alpha\beta}=\langle r_{\alpha\beta},N\rangle=-\langle r_\alpha,N_\beta\rangle,\quad \alpha,\beta=1,2$$

其中$(g_{\alpha\beta}),(b_{\alpha\beta})$分别为曲面的第一、第二基本形式在$(u^1,u^2)$下的系数矩阵。记$(g_{\alpha\beta})$的逆矩阵为$(g^{\alpha\beta})$，即对称矩阵

$$(g^{\alpha\beta})=\frac{1}{\det(g_{\alpha\beta})}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12}\\ -g_{21} & g_{11}\end{pmatrix}=\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F\\ -F & E\end{pmatrix}$$

它满足

$$\sum_{\beta=1}^{2}g_{\gamma\beta}g^{\beta\alpha}=\delta_\gamma^\alpha=\sum_{\beta=1}^{2}g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}.$$

记

$$b_\alpha^\beta=\sum_{\gamma=1}^{2}b_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}=\sum_{\gamma=1}^{2}g^{\beta\gamma}b_{\gamma\alpha}.$$

则(b_α^β)为Weingarten变换的系数矩阵，即

$$W(r_\alpha)=-N_\alpha=\sum_{\beta=1}^{2}b_\alpha^\beta r_\beta.$$

也有

$$\sum_\gamma b_\alpha^\gamma g_{\gamma\beta}=\sum_\gamma(\sum_\eta b_{\alpha\eta}g^{\eta\gamma})g_{\gamma\beta}=\sum_{\gamma,\eta}b_{\alpha\eta}g^{\eta\gamma}g_{\gamma\beta}=\sum_\eta b_{\alpha\eta}\delta_\beta^\eta=b_{\alpha\beta}=\sum_\gamma g_{\beta\gamma}b_\alpha^\gamma.$$

第一基本形式系数矩阵(其逆矩阵)常用来降(升)指标。

Einstein求和约定：在每一个单项式中，若一个指标字母α等作为上标和下标各出现一次，则该式就表示对$\alpha=1,2$的求和式。例如$dr=r_1du^1+r_2du^2=r_\alpha du^\alpha$，

$$I=g_{11}du^1du^1+2g_{12}du^1\cdot du^2+g_{22}du^2du^2=g_{\alpha\beta}du^\alpha\cdot du^\beta=g_{\alpha\beta}du^\alpha\otimes du^\beta=g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta,$$

$$II=b_{11}du^1du^1+2b_{12}du^1\cdot du^2+b_{22}du^2du^2=b_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta.$$

接下来计算自然标架$(r;r_1,r_2,N)$的偏导数，即自然标架的运动方程。由Weingarten变换的定义

$$N_\alpha=\frac{\partial N}{\partial u^\alpha}=-W(r_\alpha)=-b_\alpha^\beta r_\beta.$$

或者记

$$N_\alpha=\frac{\partial N}{\partial u^\alpha}=D_\alpha^\beta r_\beta.$$

与r_γ作内积得

$$-b_{\gamma\alpha}=g_{\gamma\beta}D_\alpha^\beta,$$

两边乘以$g^{\xi\gamma}$并对γ求和得

$$-g^{\xi\gamma}b_{\gamma\alpha}=-b_\alpha^\xi=g^{\xi\gamma}g_{\gamma\beta}D_\alpha^\beta=\delta_\beta^\xi D_\alpha^\beta=D_\alpha^\xi.$$

即$D_\alpha^\beta=-b_\alpha^\beta$。

记

$$r_{\alpha\beta}=\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma r_\gamma+C_{\alpha\beta}N,\quad (1)$$

其中$\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma,C_{\alpha\beta}$为待定系数。由$r_{\alpha\beta}=r_{\beta\alpha}$可得

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma=\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma,\quad C_{\alpha\beta}=C_{\beta\alpha}.$$

(1)与N作内积得

$$C_{\alpha\beta}=\langle r_{\alpha\beta},N\rangle=b_{\alpha\beta}.$$

最后求系数$\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$。(1)与$r_\xi$作内积得

$$g_{\xi\gamma}\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma:=\Gamma_{\xi\beta\alpha}=\langle r_{\alpha\beta},r_\xi\rangle.$$

另一方面

$$\begin{aligned}2\langle r_{\alpha\beta},r_\xi\rangle &= \frac{\partial}{\partial u^\beta}\langle r_\alpha,r_\xi\rangle+\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\langle r_\beta,r_\xi\rangle-\frac{\partial}{\partial u^\xi}\langle r_\beta,r_\alpha\rangle\\ &= \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial u^\xi}.\end{aligned}$$

因此

$$g_{\xi\eta}\Gamma_{\beta\alpha}^\eta=\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial u^\xi}).$$

两边同乘以$g^{\gamma\xi}$并对ξ求和得

$$g^{\gamma\xi}g_{\xi\eta}\Gamma_{\beta\alpha}^\eta=\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma=\frac{1}{2}g^{\gamma\xi}(\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^\alpha}-\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\xi}).$$

因此得到曲面的Christoffel符号

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} (\frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\xi}}),$$

它们由曲面第一基本形式的系数以及它们的一阶偏导数完全确定。黎曼曲率又可以由Christoffel符号以及它的一阶偏导数给出，而仅由第一基本形式决定的几何量称为内蕴几何量。

至此已得到

定理0.3. 曲面自然标架$(r; r_1, r_2, N)$的运动方程

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial u^{\alpha}} = r_{\alpha}, & \alpha = 1, 2; \quad (M_1) \\ \frac{\partial r_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} r_{\gamma} + b_{\alpha\beta} N, & \alpha, \beta = 1, 2; \quad (M_2) \\ \frac{\partial N}{\partial u^{\alpha}} = -b^{\beta}_{\alpha} r_{\beta}, & \alpha = 1, 2 \quad (M_3) \end{cases}$$

其中

$$g_{\alpha\beta} = \langle r_{\alpha}, r_{\beta} \rangle, \quad \alpha, \beta = 1, 2;$$

$$b_{\alpha\beta} = \langle r_{\alpha\beta}, N \rangle = -\langle r_{\alpha}, N_{\beta} \rangle, \quad \alpha, \beta = 1, 2;$$

$$b^{\beta}_{\alpha} = b_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = g^{\beta\gamma} b_{\gamma\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, 2;$$

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} g^{\gamma\xi} (\frac{\partial g_{\beta\xi}}{\partial u^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\xi}}{\partial u^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^{\xi}}), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2.$$

自然标架的运动由第一、第二基本形式的系数完全确定。

作业：1,2,4,5