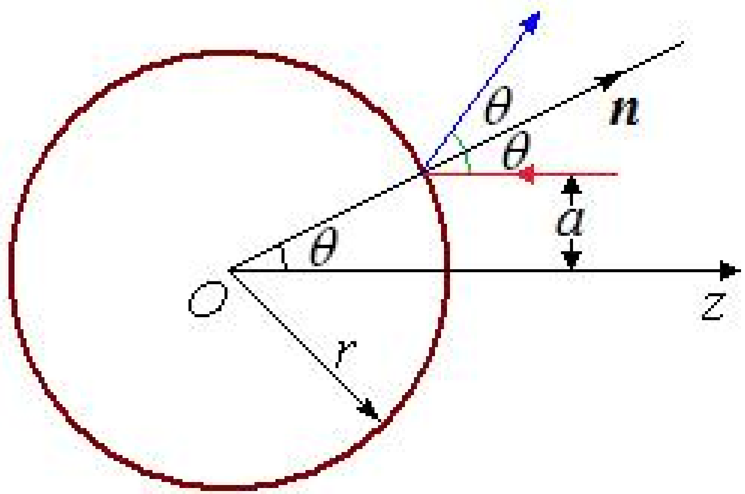
思考题讨论

- 思考题4.1 解释电子与晶格碰撞的“失忆”性。
- 思考题4.2 分析焦耳定律的微观机制。

思考题4.1 解释电子与晶格碰撞时的“失忆”性。

晶格离子

几乎不动



解答：瞄准距为$a \le r\sin\theta$的电子占碰撞电子的比例是$a^2/r^2=\sin^2\theta$，只要证明电子散射后的立体角与总立体角之比为$\sin^2\theta$，则推得散射电子各向同性分布。

由图示，散射电子的出射角为2θ，占总立体角比例

$$2\pi\int_0^{2\theta}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta/4\pi=(1-\cos 2\theta)/2=\sin^2\theta.$$

思考题4.2 分析焦耳定律的微观机制。

解答： 单位体积内的载流子数目为n，

单位时间内的碰撞次数为$1/\overline{\tau}$，

由 $\boldsymbol{u}_0=0$，$\boldsymbol{u}_1=-e\overline{\tau}\boldsymbol{E}/m$ 知，每次碰撞损失能量

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{u}_1^2=\frac{1}{2}m\,(e\overline{\tau}\boldsymbol{E}/m)^2=\frac{e^2\overline{\tau}^2E^2}{2m}.$$

所以单位体积的能量损失率

$$p=n\frac{1}{\overline{\tau}}\frac{e^2\overline{\tau}^2E^2}{2m}=\frac{ne^2\overline{\tau}E^2}{2m}.$$

从 $j=\dfrac{ne^2\overline{\tau}}{2m}E$ 得到E，代入到上式，可得

$$p=\frac{2m}{ne^2\overline{\tau}}j^2=j^2/\sigma.$$

第十五讲 2022-04-19

第4章 稳恒电流

§4.1 稳恒条件

§4.2 欧姆定律与焦耳定律

§4.3 电源与电动势

§4.4 基尔霍夫定律

§4.5 稳恒电流与静电场的综合求解

2. 基尔霍夫定律

1) 基尔霍夫第一定律：汇合于任一节点处的各电流的代数和等于零，即

$$\sum I=\sum I_{\text{入}}-\sum I_{\text{出}}=0,$$

该方程又称节点电流方程。上式中的$I_{\text{入}}$和$I_{\text{出}}$分别为流入和流出考察节点的电流。

它是稳恒电流条件 $\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$ 的必然结果。

2) 基尔霍夫第二定律 (回路电压方程)：电路中的任一闭合回路的全部支路电压的代数和等于零，即

$$\sum U = \sum (\pm \mathcal{E} \pm Ir \pm IR) = 0,$$

其中$\mathcal{E}$和r分别为某条支路的电动势和内阻，R和I分别为该支路的负载电阻和电流强度。该方程的依据是静电场环路定理$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$。

- $\mathcal{E}$和I的正负号规则：先任意规定回路的绕行方向，再根据绕行方向决定$\mathcal{E}$和I的符号。当回路绕行方向经电源内部由正极指向负极时，$\mathcal{E}$取正号，反之取负号；当回路绕行方向与I的流向一致时，I取正号，反之取负号。

3. 两种求解电路方法

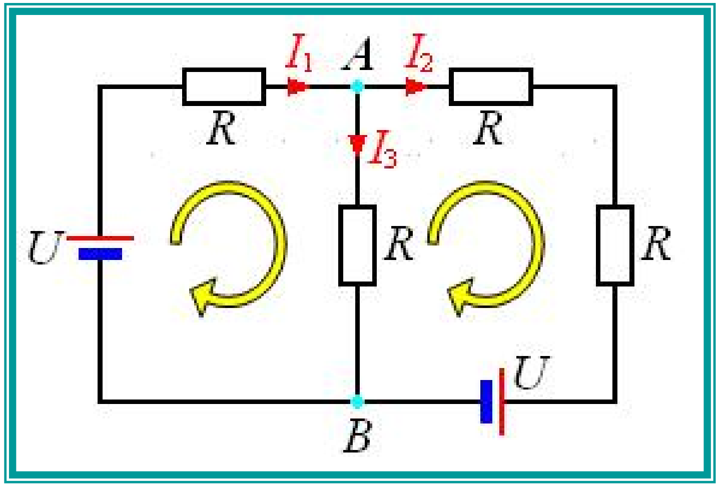
1) 支路电流法

- 设定ℓ个支路电流的方向和取值，以及m个独立回路的绕行方向。
- 由基尔霍夫第一定律给出节点的$n-1$个独立方程(?)，由基尔霍夫第二定律给出m个独立回路的m个独立方程，共$n-1+m$个独立方程。
- 由于$n-1+m=\ell$，这些方程的支路电流有唯一解。
- 如果所得支路电流值>0，则实际电流方向与设定方向一致；反之则相反。

[例4.1] 如图所示电路，求各支路中的电流。

[解] 本电路节点数n=2，独立回路数m=2，支路数ℓ=3，满足$n-1+m=\ell$。由基尔霍夫定律列出3个独立方程

$$\begin{cases} I_2 + I_3 - I_1 = 0 & \text{第一定律} \\ -U + I_1R + I_3R = 0 & \\ U - I_3R + 2I_2R = 0 & \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} -U + I_1R + I_3R = 0 \\ U - I_3R + 2I_2R = 0 \end{matrix}\right\} \text{第二定律}$$



易解得

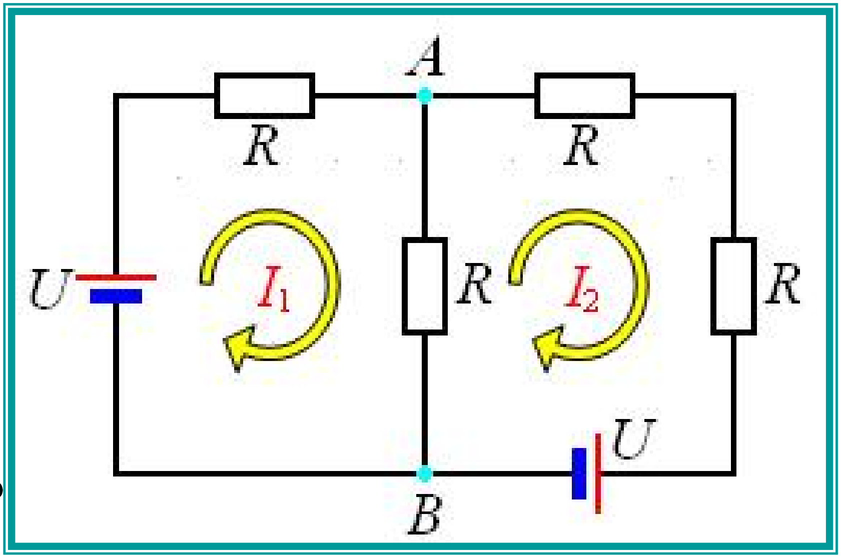
$$I_1 = \frac{2U}{5R}, \quad I_2 = -\frac{U}{5R}, \quad I_3 = \frac{3U}{5R}$$

负号表示实际电流与设定的方向相反。

2) 回路电流法

设定独立回路的电流及方向，由基尔霍夫第二定律可唯一解出这些电流值。再根据基尔霍夫第一定律，由独立回路电流计算支路电流。如图，设例4.1中2个独立回路的电流分别为I_1和I_2。回路电压方程

$$\begin{cases} -U + I_1 R + (I_1 - I_2)R = 0 \\ U + (I_2 - I_1)R + 2I_2 R = 0 \end{cases}$$



解得 $I_1 = \dfrac{2U}{5R}$， $I_2 = -\dfrac{U}{5R}$

负号表示与设定方向相反。

可见支路电流法和回路电流法等效。

§ 4.5 稳恒电流与静电场的综合求解

稳恒的I要求稳定的Q，静Q产生静E，所以可以有稳恒电流和静电场共存的综合求解问题。

例如电阻法勘探原理——将两个插入地面的电极加上电压。地面电势相关电场，电场相关稳恒电流，稳恒电流相关电阻率$\Rightarrow$由地面电势可推测大地电阻率。于是，测量两电极在不同位置时地面的电势，就能估算地下电阻率的分布，从一个侧面提供有关地质构造和矿藏分布的信息。(见补充习题)

这类问题中的导电介质需用ε和σ两个量表征。

- 综合求解问题不同于电路分析问题

  前者要求同时确定导体内的电流分布和电场分布这些细致结构，而后者只是计算各支路的电流强度和节点的电势这些电流和电场的整体特征。

- 综合求解问题不同于纯静电场问题

  前一问题中，导体内的电流和电场都不为零，且具有一定的分布规律。而静电平衡时，导体内恒有j=0，E=0，导体为等势体。因此，后一问题只需研究导体外的静电场分布。

1. 基本方程

综合求解问题的基本方程包括静电场的环路定理、稳恒条件和欧姆定律：

$$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0,\quad \oiint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0,\quad \boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}.$$

当存在导体界面时，由环路定理和稳恒条件可证明在界面两侧电场强度的切向分量连续，电流密度的法向分量连续，即

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0,\ \ \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{j}_1-\boldsymbol{j}_2)=0.$$

式中$\boldsymbol{n}$为界面的单位法向矢量。

2. 基本方程的闭合性

比较综合求解问题与纯静电场问题的基本方程，可以发现，除了稳恒条件方程的右边恒为零之外，它们在数学形式上几乎完全相似。$\boldsymbol{E}$与$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$与$\boldsymbol{j}$，Q与I，ε与σ，一一对应。

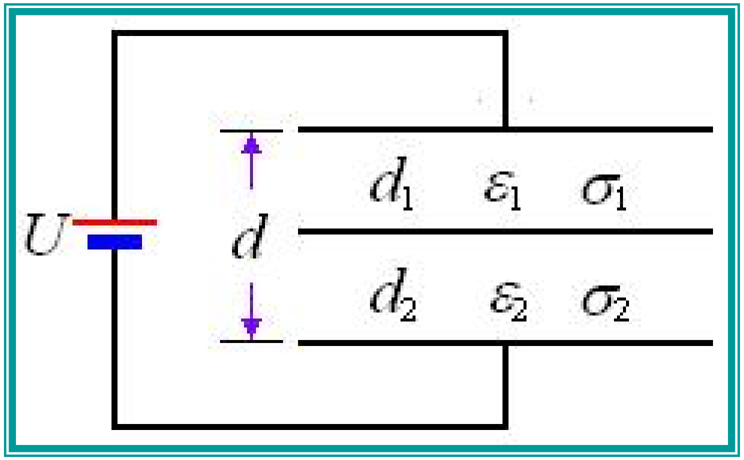
纯静电场问题的基本方程	综合求解问题的基本方程
$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0,$	$\oint_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0,$
$\oiint_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q,$	$\oiint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0,$
$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}.$	$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}.$

既然纯静电场问题的基本方程是闭合的，所以综合求解问题的基本方程也是闭合的。进一步有推论：

- 导电介质中的稳恒电流和静电场的分布规律取决于导电介质的电导率，而与极化性质 (即介电常数) 无关。
- 按高斯定理，可由静电场E确定导电介质的总电荷分布，所以该分布也只取决于导电介质的电导率，而与介电常数无关。
- 导电介质中的自由电荷和极化电荷在总电荷中所占的份额与介电常数有关。

3. 解法及举例

循序渐进，步步为营



[例4.2] 如图，一平板电容器极板间距为d，填充两层导电介质。第一层厚度为d_1，介电常量为ε_1，电导率为σ_1；第二层的相应参量为d_2，ε_2和σ_2，$d=d_1+d_2$。设电容器两端电压为U，忽略边缘效应，

1) 求介质1和2中的电流密度和电场强度；

2) 求介质分界面上的总电荷面密度；

3) 求介质分界面上的自由电荷面密度。

[解] 1) 由稳恒条件知电流密度法向分量连续，得

$$\boldsymbol{j}_1 = \boldsymbol{j}_2 = \boldsymbol{j},$$

由欧姆定律有

$$E_1 = j/\sigma_1,\ E_2 = j/\sigma_2,$$

由环路定理有

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U,$$

$$\text{即}(d_1/\sigma_1 + d_2/\sigma_2)\, j = U,$$

最后求得

$$j = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}U, \quad E_{1,2} = \frac{\sigma_{2,1}}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}U.$$

2) 两介质分界面上的总电荷面密度为

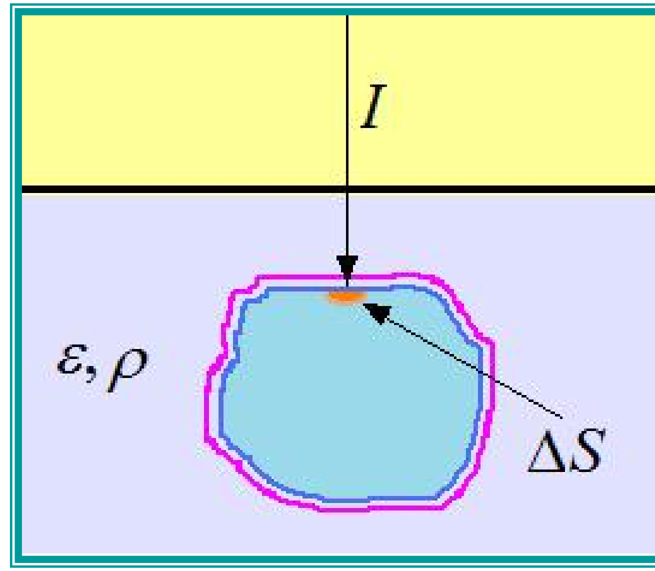
$$\sigma_{\mathrm{e}} = \varepsilon_0 (E_2 - E_1) = \frac{\varepsilon_0(\sigma_1 - \sigma_2)}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U.$$

3) 两介质分界面上的自由电荷面密度为

$$\sigma_{\mathrm{e0}} = D_2 - D_1 = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 - \varepsilon_1 \sigma_2}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1} U.$$

由本题结果可见，$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$和σ_{e}只与介质的电导率有关，而σ_{e0}不仅与电导率有关，还与介电常量有关。这些结果与前述三点结论一致。

[例4.3] 如图，一块状电极全部埋入大地，电流为I；大地电阻率为ρ，介电常量为ε。求电极上的自由电荷量Q。



埋入大地的块状电极

[解] 取电极表面外侧为高斯面，其中接线端部分为ΔS，其余部分为S。由稳恒条件

$$\oiint_{S+\Delta S} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{\Delta S} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

式中第二项为$-I$，于是有

$$\iint_{S} \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = I.$$

ΔS上的电流密度与ΔS反平行！

应用欧姆定律得

$$\iint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\rho}\iint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = I, \quad \iint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \rho I.$$

$$\text{而} \iint_{\Delta S} \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon_l \boldsymbol{E}\cdot \Delta\boldsymbol{S} = \varepsilon_l \rho_l \boldsymbol{j}\cdot \Delta\boldsymbol{S} = -\varepsilon_l \rho_l I.$$

由高斯定理得

$$Q = \oiint_{S+\Delta S} \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \varepsilon \iint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{\Delta S} \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \varepsilon\rho I - \varepsilon_l \rho_l I.$$

ΔS处于接线之中，接线电阻率ρ_l<<大地电阻率ρ，接线介电常数ε_l~ε_0，故可忽略上式第二项。于是

$$Q = \varepsilon\rho I.$$

4. 与静电场问题类比

如果将电极的引线去掉，认为电流由电极内部发出，则稳恒条件方程变成

$$\oiint_S \boldsymbol{j}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = I.$$

于是综合求解问题与纯静电场问题的基本方程有同构的数学形式，可以用同一种方法处理。

为便于区分，将纯静电场问题的物理量用下标“i”表示。表4.1给出两类问题物理量的对应关系。

综合求解	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{E}$	I	σ (导电介质)	$\sigma\to\infty$, (电极$\boldsymbol{E}$=0)
纯静电场	$\boldsymbol{D}_i$	$\boldsymbol{E}_i$	Q_i	ε_i(电介质)	$\varepsilon_i\to\infty$, (导体$\boldsymbol{E}_i$=0)

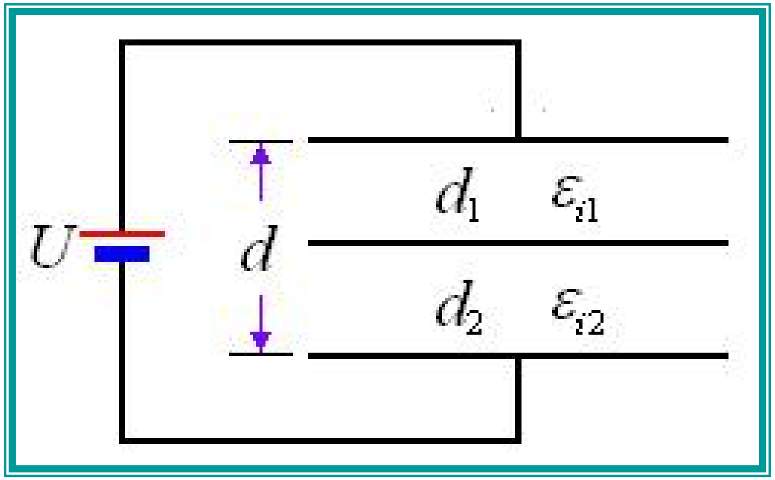
重解[例4.2] 按表4.1，对应的纯静电场问题如图所示。

介质界面与等势面重合→$\boldsymbol{D}_i=\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{E}_0$为自由电荷产生的电场。介质1和2中的电场分别为

$$E_{i1}=D_i/\varepsilon_{i1}=\varepsilon_0E_0/\varepsilon_{i1},\quad E_{i2}=\varepsilon_0E_0/\varepsilon_{i2}.$$

由题设条件可知

$$E_{i1}d_1+E_{i2}d_2=U.$$



可解得

$$E_0=\frac{\varepsilon_{i1}\varepsilon_{i2}}{(\varepsilon_{i1}d_2+\varepsilon_{i2}d_1)\varepsilon_0}U.$$

从而求得纯静电场解为

$$D_i=\frac{\varepsilon_{i1}\varepsilon_{i2}}{\varepsilon_{i1}d_2+\varepsilon_{i2}d_1}U,\quad E_{i1,2}=\frac{\varepsilon_{i2,1}}{\varepsilon_{i1}d_2+\varepsilon_{i2}d_1}U.$$

由表4.1的对应关系，可推出原综合求解问题的解为

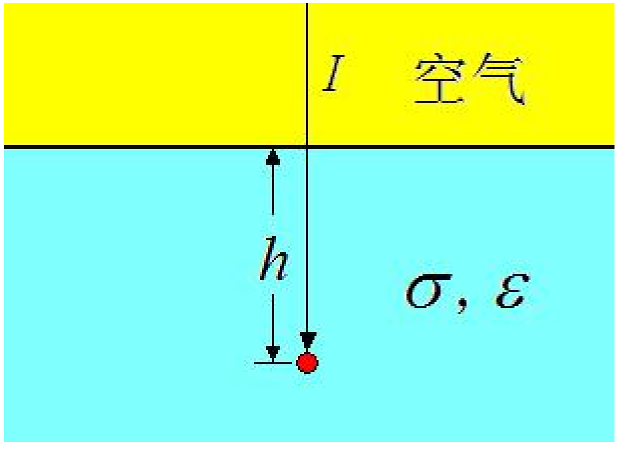
$$j=\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}U,\quad E_{1,2}=\frac{\sigma_{2,1}}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}U.$$

至此，将$\boldsymbol{D}_i$、$\boldsymbol{E}_{i1}$、$\boldsymbol{E}_{i2}$、ε_{i1}、ε_{i2}等统统忘掉，考虑两层电介质的实际介电常量ε_1和ε_2，求得实际电位移矢量为

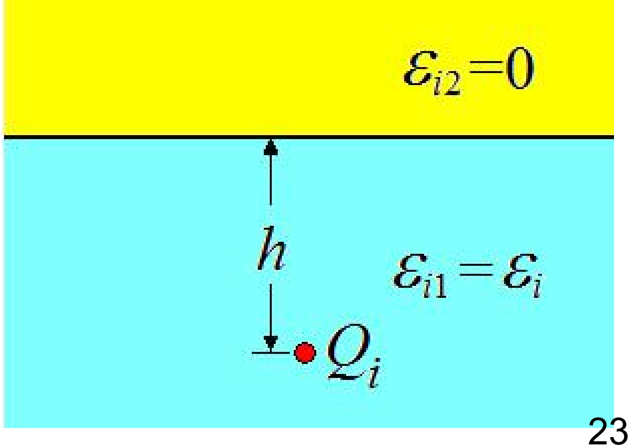
$$D_1=\varepsilon_1 E_1=\frac{\varepsilon_1\sigma_2}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}U,\quad D_2=\frac{\varepsilon_2\sigma_1}{\sigma_1 d_2+\sigma_2 d_1}U.$$

据此可求得介质分界面上的自由电荷面密度σ_{e0}。上述结果与例4.2给出的结果完全一致。

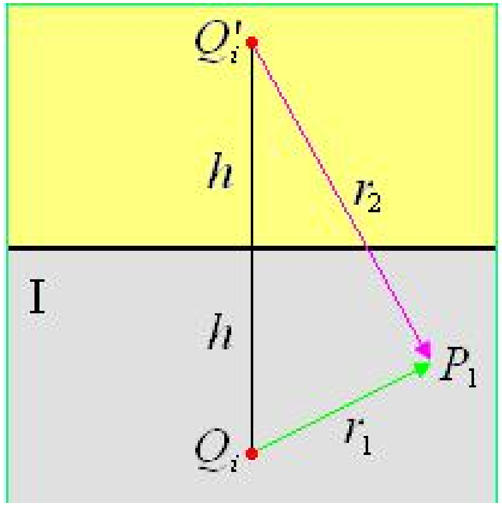
[例4.4] 如图所示，一微型电极埋入大地深h处，通以恒定电流I。设大地可视作均匀各向同性导电介质，电导率为σ，介电常量为ε，求大地内的电流分布和大地内、外的电场分布。

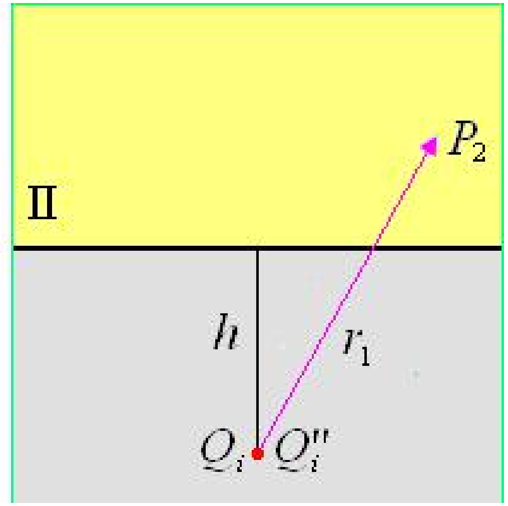


[解] 假定大地上方空气的电导率为零，介电常量为ε_0。先不考虑大地和空气的介电常量，将上图所示的综合求解问题转换为下图所示的纯静电场问题。



新问题可以用电像法求解。





求I区电场

求II区电场

对I区(即大地)和II区(即空气)的电场，可分别按左、右图配置像电荷。由例2.11给出的普遍结果，有

$$Q_i' = Q_i'' = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_{i1} - \varepsilon_{i2})}{\varepsilon_{i1}(\varepsilon_{i1} + \varepsilon_{i2})} Q_i = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_i} Q_i .$$

以至I、II两区的电场强度E_{i1}、E_{i2}分别为

$$\boldsymbol{E}_{i1}=\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_i r_1^3}\boldsymbol{r}_1+\frac{Q_i'}{4\pi\varepsilon_0 r_2^3}\boldsymbol{r}_2=\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_i}\left(\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}+\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}\right),$$

$$\boldsymbol{E}_{i2}=\left(\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_i}+\frac{Q_i''}{4\pi\varepsilon_0}\right)\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}=\frac{Q_i\boldsymbol{r}_1}{2\pi\varepsilon_i r_1^3}.$$

相应电位移矢量为

$$\boldsymbol{D}_{i1}=\varepsilon_i\boldsymbol{E}_{i1}=\frac{Q_\mathrm{i}}{4\pi}\left(\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}+\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}\right),\quad \boldsymbol{D}_{i2}=\varepsilon_{i2}\boldsymbol{E}_{i2}=0.$$

根据表**4.1**给出的对应关系，大地区：

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}+\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}\right),\quad \boldsymbol{j}_1=\frac{I}{4\pi}\left(\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3}+\frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}\right).$$

空气区：

$$\boldsymbol{E}_2=\frac{I}{2\pi\sigma r_1^3}\boldsymbol{r}_1,\quad \boldsymbol{j}_2=0.$$

本章小结

电荷守恒→连续方程→稳恒条件→

电流
电势
电源

基尔霍夫定律求解复杂电路

欧 (焦) 定律
经典电子论

→微观机制→全电路欧定律

纯静电场问题
综合求解问题

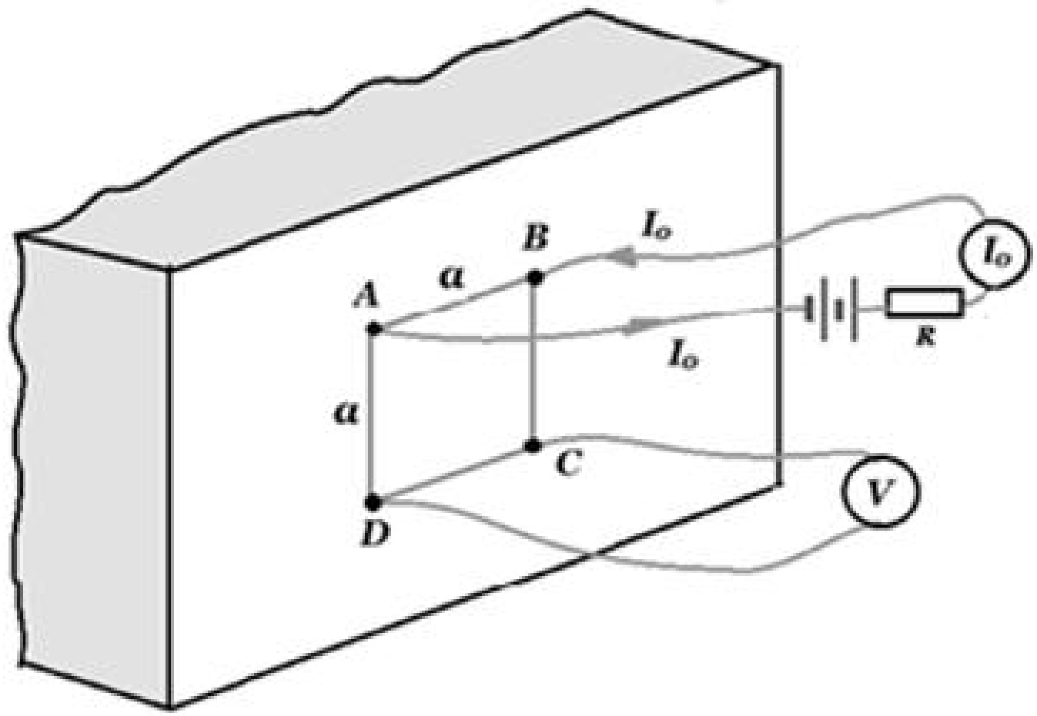
数学上等价 →用前者解法求解后者

作业、预习及思考题

- 作业：**4.9~4.15**
- 补充作业：见下页
- 预习：数学补充 (矢量运算和哈密顿算符)

- 思考题4.3 证明$m-1=\ell-n$。
- 思考题4.4 综合求解问题中，导电介质界面两侧的D_n连续吗？$\boldsymbol{D}$的高斯定理为什么不能作为综合求解问题的一个基本方程？

补充作业：



一个平面把空间分为两个部分，一半充满了均匀导电介质，而探测者在另一半空间里工作。他们在平面上画出一个边长为a的正方形的轮廓，并用精细的电极使一电流I_0在正方形的两个相邻角，一个流入，一个流出。同时，他们测量另两个角之间的电势差为U。如何用这些数据计算介质的电阻率？