§3.3 微分中值定理

3.3.1 Rolle 定理和 Fermat 定理

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义, 如果对其中的任一点 x, 都有

$$f(x_0) \geqslant f(x), \quad (\text{ 或 } \ f(x_0) \leqslant f(x)),$$

则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值（或极小值）, x_0 称为 $f(x)$ 的一个极大值点（或极小值点）. 极大值和极小值统称为极值, 极大值点和极小值点统称为极值点.

直观上, 从几何上看, 如果函数 $f(x)$ 在一点 x_0 取到极大 (极小) 值, 而且函数在此点的切线存在, 那么在这点的切线应当是水平的（平行于 x 轴）, 也就是说函数在这点的导数为零.

定理 1 (Fermat **定理**) 设函数 $f(x)$ 在其定义区间 I 的一个内点（即不是端点）x_0 处取到极值, 如果函数在这一点可导, 则必有 $f'(x_0) = 0$.

证明 不妨设函数在 x_0 取到极大值. 根据定义, 存在一个 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, 使得

$$f(x_0+h) - f(x_0) \leqslant 0$$

只要改变量 h 满足 $|h| < \delta$. 于是差商

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0, \quad \text{当 } h < 0 \text{ 时}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0, \quad \text{当 } h > 0 \text{ 时}$$

又因为函数在 x_0 可导, 所以在上列两式中分别令 $h \to 0^-$ 和 $h \to 0^+$, 有

$$f'_-(x_0) \geqslant 0, \quad f'_+(x_0) \leqslant 0$$

故 $f'(x_0) = 0$. 当 f 在 x_0 取到极小值的情况, 可类似证明.

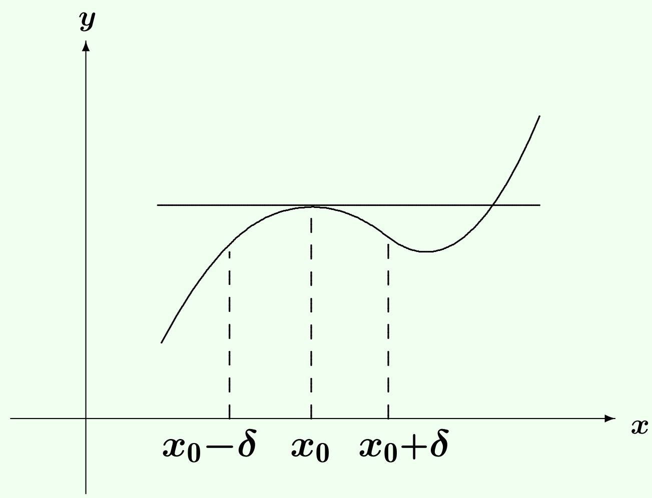


图 3.1

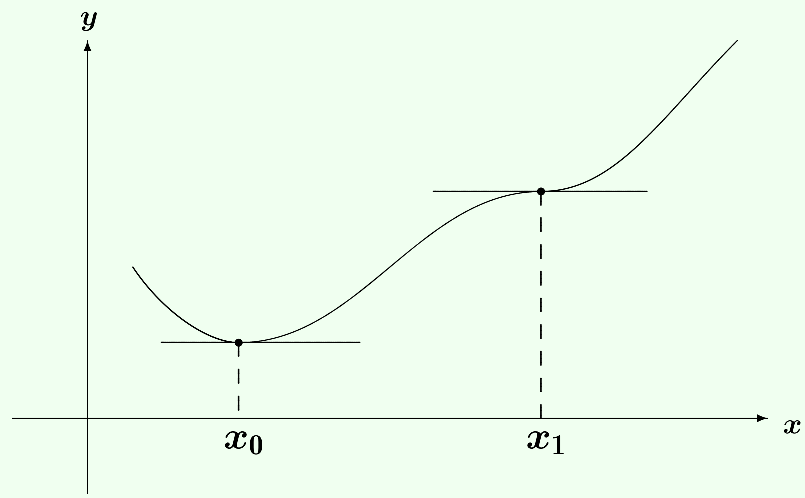


图 3.2

注意 Fermat 定理的逆并不成立, 也就是说, 即使函数 f 在一内点的导数为零, 未必这一点是极值点, 最简单的反例是 $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$, 显然, $f'(0) = 0$, 但是 $x = 0$ 不是该函数的极值点. 即便如此, Fermat 定理提供了这样的途径, 即由导数的信息, 推断函数的有关 (极大、极小) 值是否存在? 通常, 称导数为零的点为函数的驻点, 因此想了解函数的极值点, 只要在驻点中作进一步讨论即可.

定理 2 (Rolle **定理**) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 而且 $f(a)=f(b)$, 则必有 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=0$.

证明 根据闭区间 $[a,b]$ 上连续函数一定有最大值和最小值 (最大值和最小值当然也是极值) 的实事, 如果最大值和最小值中至少有一个在 (a,b) 内部一点 ξ 取得, 则由 Fermat 定理知, $f'(\xi)=0$. 反之, 最大值和最小值都只能在端点 a 和 b 处取得, 而 $f(a)=f(b)$, 所以最大值和最小值相等, 即, 函数是一个常值函数, 此时函数的导函数在任何一点都为零. 证毕.

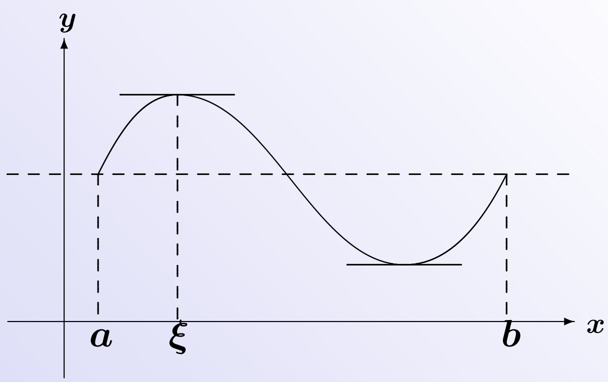


图 3.3

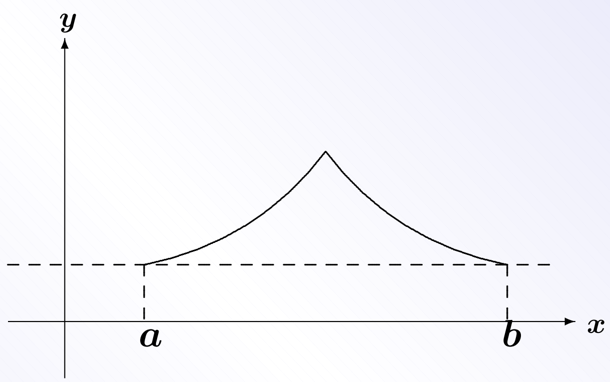


图 3.4

3.3.2 微分中值定理

定理 3 (**微分中值定理**) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 在 (a,b) 可微, 则必有 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

证明 我们构造函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a).$$

则容易验证: $F(b)=F(a)=0$, 而且 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 因此 $F(x)$ 满足 Rolle 定理的三个条件, 故存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

这即是定理的结论. 证毕.

有时, 我们也称微分中值定理为 Lagrange 中值定理. 当 $f(a) = f(b)$ 时, 中值定理就转化成 Rolle 定理, 因此它是比 Rolle 定理更一般的定理.

从几何上看, 微分中值定理的结果是不难理解的. 考虑函数的差商

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

它是割线 AB 的斜率. 设想一下, 如果我们平行移动这条割线, 则它至少有一次机会达到这样的位置, 即在曲线上与割线 AB 距离最远的那一点 M, 成为曲线的切线 (图3.5). 也就是说, 存在介于 a 和 b 之间的一点 ξ, 使得定理 3 成立.

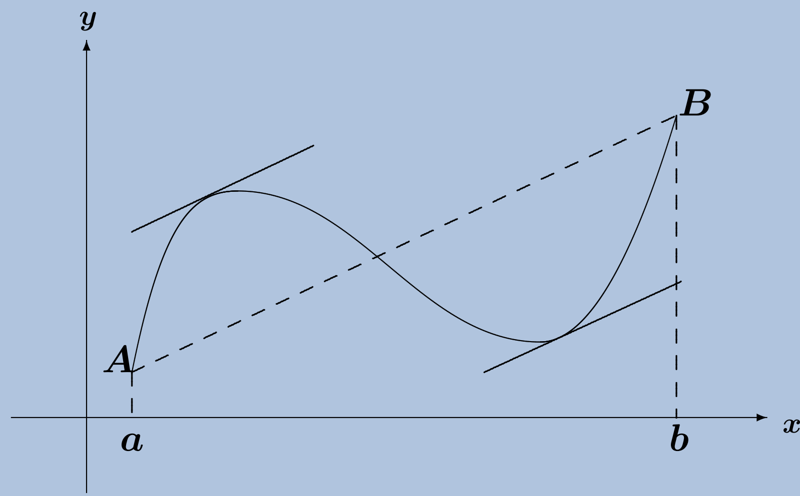


图 3.5

从物理上看, 一个沿直线运动的质点, 必然在某一个时刻的瞬时速度, 等于整个运动过程的平均速度.

推论 1 如果函数 f 在一个区间上连续, 且对区间内的每一个点 x, 都有 $f'(x)=0$, 则函数 f 在区间上一定是常值函数. 对于两个可导函数 f 和 g, 如果它们的导数相等, 则两个函数相差一个常数.

证明 任取区间上两点 $x_1<x_2$, 在 $[x_1,x_2]$ 上, 由中值定理知, 存在一点 ξ 使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$$

但 $f'(x)$ 恒为零, 所以 $f'(\xi)=0$, 于是 $f(x_1)=f(x_2)$, 即函数在区间上任意两点的值相等, 所以是常值函数.

进一步可以证明，若函数 f 在一个区间上连续, 且对区间内的每一个点 x, 都有 $f^{(n)}(x)=0$, 则函数 f 在区间上一定是次数不超过 $n-1$ 的多项式.

例 1 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且满足方程 $f'(x) = f(x)$, 则存在常数 c 使得 $f(x) = ce^x$.

证明 令 $g(x) = e^{-x}f(x)$. 则 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = 0$. 于是 $g(x)$ 是常数, 记 $g(x) = c$. 则有 $f(x) = ce^x$.

以上结论可以推广如下:

设 $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $\varphi'(x) = g(x)$. 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且满足方程 $f'(x) = g(x)f(x)$, 则存在常数 c 使得 $f(x) = ce^{\varphi(x)}$.

推论 2 设函数 f 在区间 I 可微, 且 $|f'(x)| \leqslant M$（即导数有界）. 则

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M|x_2 - x_1|$$

即, 具有有界导数的函数一定是 Lipschitz 连续的.

例 2 设函数 f 在区间 I 上有定义. 若存在 $M > 0$, 及 $\alpha > 1$ 使得

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M|x_2 - x_1|^\alpha, \ \forall\, x_1, x_2 \in I,$$

则 $f(x)$ 是常数.

证明 对于任意 I 的内点 x_0, 当 Δx 充分小时, 有

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| \leqslant M|\Delta x|^\alpha.$$

因此,

$$\left|\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right| \leqslant M|\Delta x|^{\alpha-1}.$$

由于 $\alpha > 1$, 我们得到

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 0,$$

即, $f'(x_0) = 0$. 这说明 f 在 I 上可导且导函数恒为零, 因此 f 为常数.

例 3 证明: 对任意常数 c, 方程 $x^3 - 3x + c = 0$ 在 $[0, 1]$ 中不可能有两个相异的实根.

证明 记 $f(x) = x^3 - 3x + c$. 若对某个 c, 方程在 $[0, 1]$ 上有两个相异的实根 x_1, x_2 不妨设 $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant 1$ 则 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 因此 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足 Rolle 定理的三个条件, 所以必有 $x_1 < \xi < x_2$ 使得

$$f'(\xi) = 3(\xi^2 - 1) = 0.$$

即 $|\xi| = 1$, 但 $0 \leqslant x_1 < \xi < x_2 \leqslant 1$, 故矛盾. 矛盾说明有两个相异实根的假设是不对的.

例 4 设 $0 < a < b$, 证明

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

证明 由于 $0 < a < b$, 故在 $[a, b]$ 上, 函数 $\ln x$ 显然满足中值定理的条件, 所以存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$\ln b - \ln a = (\ln x)'|_{x=\xi}(b-a) = \frac{1}{\xi}(b-a)$$

但

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{a}$$

即有所证的结果.

取 $a = x > 0, b = x + 1$ 可得

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

例 5 证明恒等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \leqslant 1$$

证明 命 $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. 则 $f'(x) \equiv 0$. 所以

$$\arcsin x + \arccos x \equiv c \quad (\text{常数}).$$

将 $x = 0$ 代入, 即得 $c = \frac{\pi}{2}$.

例 6 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f'(\xi) - \xi f(\xi) = 0.$$

证明 令 $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} f(x)$. 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 在 (a, b) 可导, 且 $g(a) = g(b) = 0$. 根据 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 即

$$-\xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2} f(\xi) + e^{-\frac{1}{2}\xi^2} f'(\xi) = 0,$$

也就是 $f'(\xi) - \xi f(\xi) = 0$.

例 7 设 $0 < a < 2$. 求证不存在 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数 $f(x)$, 使得对任意 x 有 $f(ax - f(x)) = x$.

证明 若 $f(x)$ 是满足条件的函数, 令 $g(x) = ax - f(x)$, 则

$$f(x) + g(x) = ax, \tag{1}$$

$$f(g(x)) = x. \tag{2}$$

由 (2) 知当 $x \neq y$ 时, 有 $g(x) \neq g(y)$. 注意到 g 是连续函数, 根据介值定理可知 g 是严格单调函数.

若 g 严格减, 则由 (1) 知 f 严格增. 设 $x < y$. 有 $g(x) > g(y)$, 因而 $f(g(x)) > f(g(y))$, 结合 (2) 可得 $x > y$, 矛盾! 这说明 g 只能严格增.

若 g 有上界, 则 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=a$ 是有限的. 根据 f 的连续性有

$$\lim_{x\to+\infty} f(g(x))=f(a),$$

这与 (2) 矛盾! 于是 g 无上界, 同理 g 也无下界.

由于 g 连续, 且无上界和下界, 因而对于任意实数 x 存在 y 使得 $g(y)=x$, 由 (2) 得 $f(x)=y$, 因此

$$g(f(x))=x. \tag{3}$$

由 (3) 可知 f 也严格增. 于是 f 和 g 是互为反函数的严格增连续函数.

从 (1) 可得

$$f\circ f(x)=af(x)-x, \tag{4}$$

$$g\circ g(x)=ag(x)-x. \tag{5}$$

设 f_n 为 f 的 n 次迭代, g_n 为 g 的 n 次迭代, 从上面两式, 可得

$$f_n(x) = c_n f(x) - c_{n-1}x, \tag{6}$$

$$g_n(x) = c_n g(x) - c_{n-1}x, \tag{7}$$

其中数列 c_n 满足递推公式:

$$c_{n+1} = ac_n - c_{n-1}, \quad c_1 = 1, \ c_2 = a.$$

若 0 是 f 的不动点, 则 0 也是 g 的不动点, $f(0) = g(0) = 0$. 对 (2) 求导可得

$$f'(0)g'(0) = 1.$$

对 (1) 求导可得

$$f'(0) + g'(0) = a.$$

这两个式子是矛盾的, 不然有

$$a = f'(0) + g'(0) \geqslant 2\sqrt{f'(0)g'(0)} = 2.$$

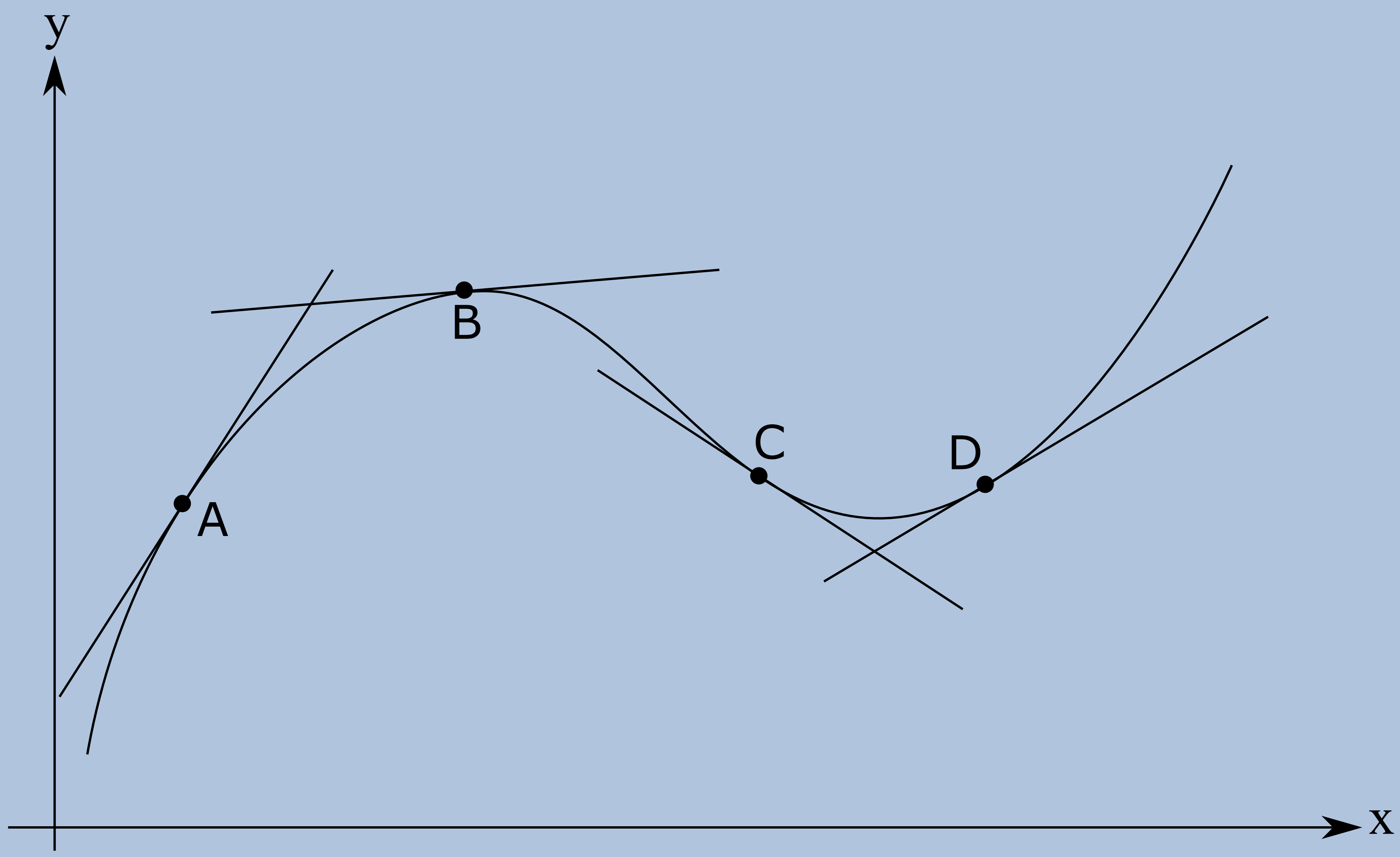
这说明 0 不是 f 和 g 的不动点. 因此 $f(0)$ 和 $g(0)$ 中必有一个是正数.

不妨设 $f(0)>0$. 从 f 的严格增性, 可知 $\{f_n(0)\}$ 为严格递增数列. 因为 $f_n(0)=c_nf(0)$, 所以 c_n 是递增的, 因而 $c_n\geqslant c_1=1$. 又

$$c_{n+1}-c_n=(a-2)c_n+c_n-c_{n-1}<c_n-c_{n-1}.$$

所以 $\{c_n-c_{n-1}\}$ 是非负递减的, 这说明 $\{c_n-c_{n-1}\}$ 收敛, 但这又可推出 c_n 趋于零, 与 $c_n\geqslant 1$ 矛盾. 这样就完成了证明.

3.3.3 函数的单调性与极值



定理 4 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 在 I 的内部可微, 如果对 I 内的每一点 x, 有 $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) > 0$), 则 $f(x)$ 在 I 上是(严格)单调递增的; 如果对 I 内的每一点 x, 有 $f'(x) \leqslant 0$ ($f'(x) < 0$), 则 $f(x)$ 在 I 上是(严格)单调递减的.

证明 考虑 $f'(x) \geqslant 0$ 的情形($f'(x) \leqslant 0$ 的情形可类似证明). 设 x_1, x_2 是 I 中任意两点, 并且 $x_1 < x_2$. 定理的条件表明, 函数 f 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, 在 (x_1, x_2) 内可微. 故由中值定理知, 存在一点 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

因为对所有的 x, 有 $f'(x) \geqslant 0$, 所以 $f'(\xi) \geqslant 0$; 而 $x_2 - x_1 > 0$, 推得 $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$. 从而 f 是单调递增的. 证毕.

定理 5 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域内可导, 且在 x_0 连续.

1° 如果 $f(x)$ 在 x_0 左边的某个区间内 (即对某个 $\delta > 0$, 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内), 有 $f'(x) > 0$, 而在 x_0 的右边某个区间内 (即对某个 $\delta' > 0$, 在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内), 有 $f'(x) < 0$, 则 x_0 为一个极大值点.

2° 如果 $f(x)$ 在 x_0 左边的某个区间内 (即对某个 $\delta > 0$, 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内), 有 $f'(x) < 0$, 而在 x_0 的右边某个区间内 (即对某个 $\delta' > 0$, 在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内), 有 $f'(x) > 0$, 则 x_0 为一个极小值点.

3° 如果 $f(x)$ 在 x_0 左、右的某个区间内, $f'(x)$ 的符号相同, 则 x_0 不是极值点.

作为定理 5 的一个直接结果, 如果要求连续函数在一个闭区间上的最大值、最小值, 可先求出函数在区间内的极值点, 再比较函数在这些极值点的值和两个端点的值, 即得出结果 (注意, 连续函数有可能在闭区间的端点达到最大、最小值).

定理 6 设函数 $f(x)$ 在 x_0 有二阶导数, x_0 是 $f(x)$ 的一个驻点, 即 $f'(x_0) = 0$. 如果 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是函数的极大值点; 如果 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是函数的极小值点.

例 8 证明: 当 $0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x$.

证明 设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 显然它是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的连续函数. 又因为在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内, 有

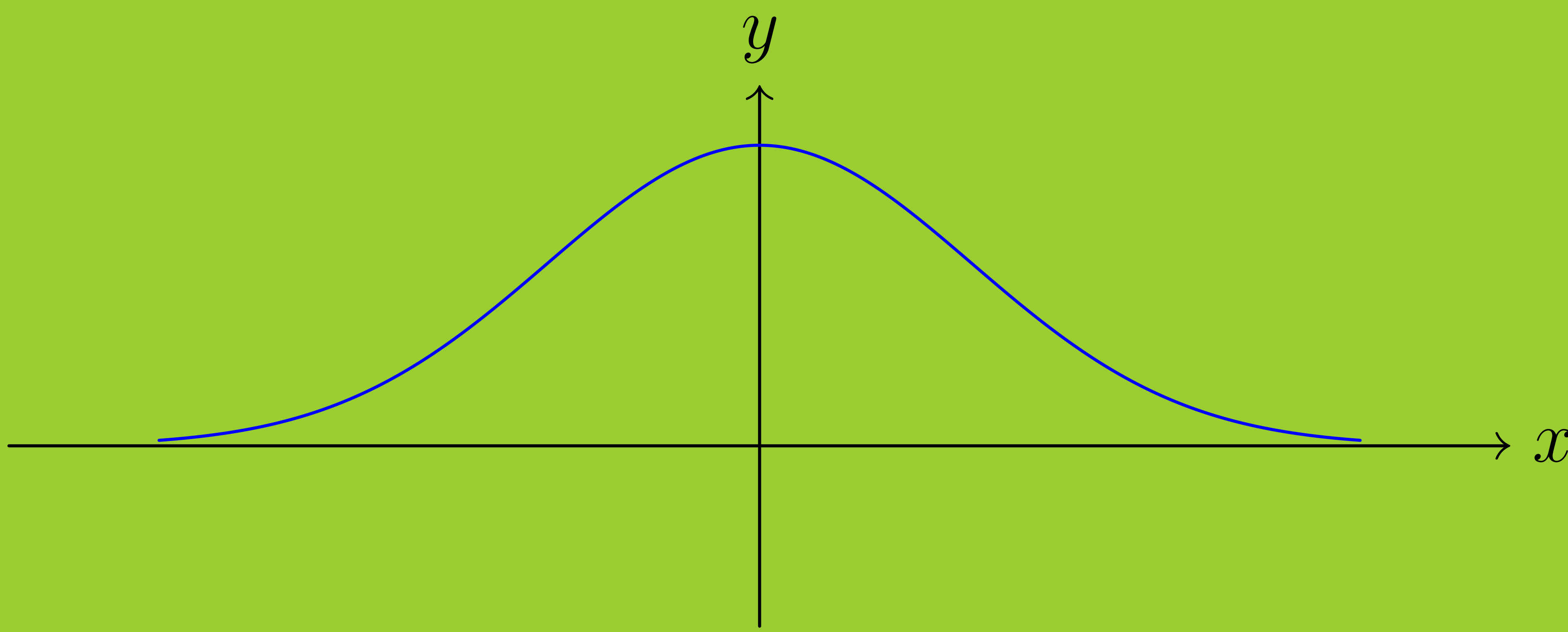
$$f'(x) = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$$

这是因为当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x > 0$, $\tan x > x$. 故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 内严格单调递减, 所以对 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, 有

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \geqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

例 9 求函数 $f(x)=e^{-x^2}$ $(x\in(-\infty,+\infty))$ 的单调区间与极值.

解 $f'(x)=-2xe^{-x^2}$, 所以驻点为 $x=0$. 当 $x\in(-\infty,0)$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x\in(0,\ +\infty)$ 时, $f'(x)<0$. 所以函数在区间 $(-\infty,0]$ 上严格单调增, 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调减, $x=0$ 是函数的极大值点, 且极大值是 $f(0)=1$.



例 10 求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 在区间 $[-4,4]$ 上的最大值与最小值.

解 显然, $f(x)$ 在区间 $(-4,4)$ 内可导, 由

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

得, $f(x)$ 的驻点为 $x_1=-1,\ x_2=3$.

因

$$f(-1)=10,\quad f(3)=-22,$$

而在区间的端点处,

$$f(-4)=-71,\quad f(4)=-15,$$

比较这些值的大小可知函数 $f(x)$ 在驻点 $x_1=-1$ 处取到最大值 10, 在端点 $x=-4$ 处取到最小值 -71.

例 11 求证: $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, $x > 0$.

证明 记

$$f_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

则 $f_1(x) = e^x - (1 + x)$. 因为 $f_1'(x) = e^x - 1 > 0$, $x > 0$, 所以 $f_1(x)$ 在 $x > 0$ 严格递增, 从 $f_1(0) = 0$, 即知 $f_1(x) > 0$, $x > 0$.

现假设当 $x > 0$ 时有 $f_{n-1}(x) > 0$. 由于

$$f_n'(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) = f_{n-1}(x) > 0,$$

所以 $f_n(x)$ 在 $x \geqslant 0$ 严格递增, 因而, $f_n(x) > f_n(0) = 0$, $x > 0$. 根据归纳法有, $f_n(x) > 0$, $x > 0$, 对一切自然数 n 成立.

例 12 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导, $f(a)=0$, 且当 $x \geqslant a$ 时, 有

$$|f'(x)| \leqslant |f(x)|.$$

求证: $f(x)=0$.

证明 令 $g(x)=\left(e^{-x}f(x)\right)^2$. 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{-x}f(x)\left(e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)\right) \\ &= 2e^{-2x}\left(f(x)f'(x)-|f(x)|^2\right) \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

这说明 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减. 因为 $f(a)=0$, 说明 $g(x) \leqslant 0$. 但从 $g(x)$ 的定义可知 $g(x) \geqslant 0$. 于是 $g(x)=0$, 从而 $f(x)=0$.

例 13 设 α, β 是正数, 且 $\alpha+\beta=1$. 对任意正数 x, y 有

$$x^{\alpha} y^{\beta} \leqslant \alpha x+\beta y.$$

证明 先证明 $y=1$ 的情况. 令 $f(t)=t^{\alpha}-\alpha t-\beta, t \in[0,1]$. 因为

$$f'(t)=\alpha t^{\alpha-1}-\alpha=\alpha\left(\frac{1}{t}\right)^{\beta}-\alpha>0,\ t \in(0,1).$$

所以 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上严格递增. 因此, $f(t) \leqslant f(1)=0$. 即,

$$t^{\alpha} \leqslant \alpha t+\beta,\ t \in[0,1].$$

对于任意正数 x, y, 不妨设 $x \leqslant y$, 将 $t=\frac{x}{y}$ 代入上式, 得

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha} \leqslant \alpha \frac{x}{y}+\beta.$$

此即所证.

例 14 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是正数, 且 $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. 则对任意正数 $x_1, \cdots, x_n$ 有

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

证明 $n = 1$ 时, 结论是显然的, $n = 2$ 时, 结论也已证明. 假设结论对 $n - 1$ 个正数是成立的.

令 $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}$. 则 $\alpha + \alpha_n = 1$. 于是有

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} &= \left(x_1^{\alpha_1/\alpha} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}/\alpha} \right)^{\alpha} \cdot x_n^{\alpha_n} \\ &\leqslant \alpha \left(x_1^{\alpha_1/\alpha} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}/\alpha} \right) + \alpha_n x_n \\ &\leqslant \alpha \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} x_1 + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha} x_{n-1} \right) + \alpha_n x_n \\ &= \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n. \end{aligned}$$

根据归纳法原理, 结论得证.

例 15 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上有 $n+1$ 阶连续导函数, 且 $f(0)\geqslant 0, f'(0)\geqslant 0, \cdots, f^{(n)}(0)\geqslant 0$. 又对任意 $x>0$, 有 $f(x)\leqslant f^{(n+1)}(x)$. 求证: $f(x)\geqslant 0$.

证明 令

$$g(x)=f(x)+\frac{1}{M}\left(e^x-1-x-\cdots-\frac{x^n}{n!}\right),\ M>0.$$

则 $g(0)\geqslant 0, g'(0)\geqslant 0, \cdots g^{(n)}(0)\geqslant 0$.

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x)&=f^{(n+1)}(x)+\frac{1}{M}e^x\geqslant f(x)+\frac{1}{M}e^x\\ &>f(x)+\frac{1}{M}\left(e^x-1-x-\cdots-\frac{x^n}{n!}\right)=g(x),\ x>0.\end{aligned}$$

因为 $g^{(n+1)}(0)=f^{(n+1)}(0)+\frac{1}{M}\geqslant\frac{1}{M}>0$, 所以由 $g^{(n+1)}$ 的连续性, 存在 $\delta>0$ 使 $g^{(n+1)}(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上为正, 从而 $g^{(n)}(x)$ 在此区间上严格增, 由于 $g^{(n)}(0)\geqslant 0$, 因此 $g^{(n)}(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上为正, 归纳地可以证明 $g(x)$ 在 $(0,\delta)$ 为正.

设

$$a = \sup\{t \in (0, \infty) \mid g(x) > 0, x \in (0, t)\}.$$

假设 $a < \infty$, 则 $g(a) = 0$. 由 Rolle 定理, 存在 $a_1 \in (0, a)$ 使 $g'(a_1) \leqslant 0$. 反复用 Rolle 定理可知存在 $a_{n+1} \in (0, a)$ 使 $g^{(n+1)}(a_{n+1}) \leqslant 0$. 因此 $g(a_{n+1}) < 0$. 但由 a 的定义, 应有 $g(a_{n+1}) > 0$. 这是矛盾! 于是 $a = +\infty$, 即

$$g(x) > 0,\ \ x \in (0, \infty).$$

令 $M \to +\infty$, 就得 $f(x) \geqslant 0$.

证明2 利用 Taylor 公式, 对任意固定的 $x > 0$, 存在 $x_1 \in (0, x)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(x_1)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &\geqslant \frac{f(x_1)}{(n+1)!}x^{n+1} \end{aligned}$$

定理 7 (Darboux **定理**) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导. 则 $f'(x)$ 能取到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任意数. 即, 导函数满足介值定理.

证明 不妨设 $f'(a) < r < f'(b)$. 令 $g(x) = f(x) - rx$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $g'(a) < 0 < g'(b)$.

从 $g'(a) < 0$ 可知, 在 a 右边一个小邻域内 $g(x)$ 的值要比 $g(a)$ 小;

从 $g'(b) > 0$ 可知, 在 b 左边一个小邻域内 $g(x)$ 的值要比 $g(b)$ 小.

这说明 $g(a)$ 和 $g(b)$ 都不是 $g(x)$ 的最小值. 因此 $g(x)$ 的最小值只能在 (a,b) 中某点 ξ 取到. 由 Fermat 定理可知 $g'(\xi) = 0$. 即, $f'(\xi) = r$. 证毕.

注意 从 Darboux 定理可知, 导函数没有第一类间断点.

例 16 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有二阶导函数, $f(x), f'(x), f''(x)$ 都大于零, 假设存在正数 a, b 使得 $f''(x) \leqslant af(x) + bf'(x)$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立.

(i) 求证: $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$;

(ii) 求证: 存在常数 c 使得 $f'(x) \leqslant cf(x)$.

(iii) 求使上面不等式成立的最小常数 c.

证明 由条件知 f 及 f' 是单调递增的正函数，因此 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ 都存在。

根据微分中值定理，对任意 x 存在 $\theta_x \in (0,1)$ 使得

$$f(x+1) - f(x) = f'(x+\theta_x) > f'(x) > 0.$$

上式左边当 $x \to -\infty$ 时极限为 0，因而有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = 0$.

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

设 $c=\frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$. 则 $c>b>0$, 且 $\frac{a}{b-c}=-c$. 于是根据条件有

$$f''(x)-cf'(x)\leqslant(b-c)f'(x)+af(x)=(b-c)(f'(x)-cf(x)).$$

即,

$$\left(e^{-(b-c)x}(f'(x)-cf(x))\right)'\leqslant 0.$$

这说明函数 $e^{-(b-c)x}(f'(x)-cf(x))$ 是单调递减的。注意到该函数当 $x\to-\infty$ 时极限为 0, 因此有 $f'(x)-cf(x)\leqslant 0$. 即,

$$f'(x)\leqslant cf(x).$$

常数 c 就是最佳的, 这是因为对函数 $f(x)=e^{cx}$ 有

$$f''(x)=af(x)+bf'(x).$$

例 17 求证: 若 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微, 则必存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n) < f(ax_n),\ n=1,2,\cdots,$$

其中 $a>1$ 是常数.

证明 (反证法) 若结论不对, 则存在 $M>0$, 使得

$$f'(x) \geqslant f(ax),\ (x \geqslant M).$$

因为 $f>0$, 所以当 $x>M$ 时, $f'(x)>0$,
这说明 $f(x)$ 在 $[M,+\infty)$ 严格递增.

根据微分中值定理, 对 $x>M$, 存在 $\xi\in(x,ax)$ 使得

$$\begin{aligned} f(ax)-f(x) &= f'(\xi)(ax-x) \\ &\geqslant f(a\xi)(a-1)x > f(ax)(a-1)x. \end{aligned}$$

上式当 $x>\frac{1}{a-1}$ 时, 不能成立.

例 18 求证不存在可微函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 满足方程

$$f'(x)=f\circ f(x),\ x\in(0,+\infty). \tag{1}$$

证明 若 $f(x)$ 是一个满足 (1) 的非负可导函数, 则由 (1) 知 f 及其各阶导数都是严格递增的.

若 f 有界, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$ 是有穷正数. 由 Lagarange 中值定理, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(x+1)-f(x)=f'(x+\theta)=f\circ f(x+\theta)>f\circ f(x). \tag{2}$$

令 $x\to+\infty$, 上式左端趋于零, 而右端趋于 $f(B)>0$, 这个矛盾说明 f 是无界的.

从 $f(x)$ 的无界, 可知 $f\circ f(x)$ 也无界.

取 $x_0>0$ 使得 $f\circ f(x_0)=b>1$. 因而当 $x>x_0$ 时

$$f'(x)=f\circ f(x)>f\circ f(x_0)=b>1.$$

由此并根据 Lagarange 中值定理知当 $x>x_0$ 时, 存在 $\theta_x\in(x_0,x)$ 使得

$$f(x)-f(x_0)=f'(\theta_x)(x-x_0)>b(x-x_0),$$

即,

$$f(x)>f(x_0)-bx_0+bx. \tag{3}$$

从 (2) 得 $f\circ f(x)<f(x+1)$, 又因为 f 是严格增的, 因此有

$$f(x)<x+1.$$

这样从 (3) 就得到

$$(b-1)x<bx_0+1-f(x_0).$$

此式当 x 大时不能成立. 于是满足条件的 f 不存在.

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出