Name :- Sumit Kumar Yadav Roll No. 18CS30042

Assignment :-1

(1) (a) $\lambda x \cdot x \cdot z \lambda y \cdot xy$

$\Rightarrow (\lambda x \cdot ((xz)(\lambda y \cdot (xy))))$

(b) $(\lambda x \cdot xz)\ \lambda y \cdot \omega\ \lambda \omega \cdot \omega y z x$

$\Rightarrow ((\lambda x \cdot (xz))(\lambda y \cdot (\omega(\lambda \omega \cdot ((((\omega y)z)x))))))$

(c) $\lambda x \cdot x y \lambda x \cdot y x$

$\Rightarrow (\lambda x \cdot ((xy)(\lambda x \cdot (y x))))$

(2) (a) $\lambda x \cdot xz\ \lambda y \cdot xy$

$\Rightarrow (\lambda x \cdot ((xz)\ (\lambda y \cdot (x y))))$

free variable

(b) $(\lambda x \cdot xz)\ \lambda y \cdot \omega \lambda \omega \cdot \omega y z x$

$\Rightarrow ((\lambda x \cdot (xz))\ (\lambda y \cdot (\omega (\lambda \omega \cdot ((((\omega y)z)x))))))$

free variables

(c) $\lambda x \cdot xy\ \lambda x \cdot y\ x$

$\Rightarrow (\lambda x \cdot ((xy)(\lambda x \cdot (y x))))$

free variables

Sumit Kumar Yadav (18CS30042)

③ (a) NOT(NOT TRUE) = TRUE

Given:

$$NOT = \lambda x.((x\ FALSE)\ TRUE)$$
$$TRUE = \lambda x.\lambda y.x$$
$$FALSE = \lambda x.\lambda y.y$$

Proof:- $NOT(NOT\ TRUE) = \lambda x.((x\ FALSE)\ TRUE)\ (NOT\ TRUE)$

$= ((NOT\ TRUE)\ FALSE)\ TRUE$

$= ((\lambda x.((x\ FALSE)\ TRUE)\ TRUE)\ FALSE)\ TRUE$

$= (((TRUE\ FALSE)\ TRUE)\ FALSE)\ TRUE$

$= ((((\lambda x.\lambda y.x)\ FALSE)\ TRUE)\ FALSE)\ TRUE$

$= (((\lambda y.FALSE)\ TRUE)\ FALSE)\ TRUE$

$= ((FALSE)\ FALSE)\ TRUE$

$= ((\lambda x.\lambda y.y)\ FALSE)\ TRUE$

$= (\lambda y.y)\ TRUE$

$= TRUE$

(b) OR false True = True

Given:-

$$OR = \lambda x.\lambda y.((x\ true)\ y)$$
$$true = \lambda x.\lambda y.x$$
$$false = \lambda x.\lambda y.y$$

Proof:- OR false true $= \lambda x.\lambda y.((x\ true)\ y)\ false\ true$

$= \lambda y.((false\ true)\ y)\ true$

Sumit Kumar Yadav (18CS30042)

$= (\text{false true})\ \text{true}$

$= ((\lambda x \cdot \lambda y \cdot y)\ \text{true})\ \text{true}$

$= (\lambda y \cdot y)\ \text{true}$

$= \text{true}$

(c) succ 2 = 3

Given:

$2 = \lambda f \cdot \lambda y \cdot f(fy)$

$3 = \lambda f \cdot \lambda y \cdot f(f(fy))$

$\text{succ} = \lambda z \cdot \lambda f \cdot \lambda y \cdot f(zfy)$

Proof:-

$\text{succ}2 = (\lambda z \cdot \lambda f \cdot \lambda y \cdot f(zfy))2$

$= \lambda f \cdot \lambda y \cdot f(2fy)$

$= \lambda f \cdot \lambda y \cdot f((\lambda f \cdot \lambda y \cdot f(fy))fy)$

$= \lambda f \cdot \lambda y \cdot f((\lambda y \cdot f(fy))y)$

$= \lambda f \cdot \lambda y \cdot f(f(fy))$

$= 3$

(d) (Y fact) 2 = 2

Given:-

$Y = \lambda f \cdot (\lambda x \cdot f(xx))(\lambda x \cdot f(xx))$

$\text{fact} = \lambda f \cdot \lambda n \cdot \text{IF } n=0 \text{ THEN } 1 \text{ ELSE } n*(f(n-1))$

Proof:-

$(Y\,\text{fact})2 = (\lambda f \cdot (\lambda x \cdot f(xx))(\lambda x \cdot f(xx))\text{fact})2$

$= (\lambda x \cdot \text{fact}(xx))(\lambda x \cdot \text{fact}(xx))2$

$= (\text{fact}((\lambda x \cdot \text{fact}(xx))(\lambda x \cdot \text{fact}(xx))))2$

$= (\text{fact}(Y\,\text{fact}))2$

Sumit Kumar Yadav (18CS30042)

$= (\lambda f . \lambda n \text{ if } n=0 \text{ then } 1 \text{ else } n * (f(n-1)))(Y\text{-}fact)\, 2$

$= (\lambda n \text{ if } n=0 \text{ then } 1 \text{ else } n * ((Y fact)(n-1)))\, 2$

$= \text{if } \underset{\text{not possible}}{2=0} \text{ then } 1 \text{ else } 2 * ((Y fact)(2-1))$

$= 2 * ((Y fact)\, 1)$

$= 2 * 1$

$= 2$

(e) Given: $mul = \lambda n . \lambda m . \lambda x . (n(mx))$

Solve: $mul\ \bar{3}\ \bar{3}$

$mul\ \bar{3}\bar{3} = ((\lambda n . \lambda m . \lambda x\ (n(mx))\ \bar{3})\,\bar{3})$

$= (\lambda m . \lambda x\ (\bar{3}\ (mx))\ \bar{3})$

$= (\lambda x . (\bar{3}\ (\bar{3}\ x))$

$= \lambda x . (\bar{3}\ (\lambda f . \lambda y . f(f(fy))x))$

$= \lambda x . (\bar{3}\ \lambda y\ x(x(xy)))$

$= \lambda x . (\lambda f . \lambda z\ f(fz)) . \lambda y\ x(x(xy)))$

$= \lambda x(\lambda z(\lambda y . x(x(xy))) . (\lambda y . x(x(xy))(\lambda y . x(x(xy))z)))))$

$= \lambda x(\lambda z(\lambda y\ x(x(xy))\lambda y . x(x(xy))x(x(xz)))))$

$= \lambda x(\lambda z(\lambda y\ x(x(xy)\ x(x(x(x(x(xz)))))))$

$= \lambda x(\lambda z\ x(x(x(x(x(x(x(x(xz)))))))))$

$= \lambda x\ (x^9 z)$

$= \bar{9}$

Sumit Kumar Yadav (18CS30042)

(f) Solve : add $\bar{8}$ $\bar{1}$

given : add $= \lambda n . \lambda m . \lambda f . \lambda x . nf(mfx)$

$\Rightarrow$ add $\bar{8}\bar{1}$ $= ((\lambda n . \lambda m . \lambda f . \lambda x . nf(mfx))\ \bar{8}\ \bar{1}$

$= \lambda f . \lambda x . \bar{8} f(\bar{1} f x)$

$= \lambda f . \lambda x (\lambda f . \lambda x f^8 x) f((\lambda f . \lambda x . f x$

$= \lambda f . \lambda x . (((\lambda f . \lambda x\ f^8 x) f)(f x))$

$= \lambda f . \lambda x f^8 (f x)$

$= \lambda f . \lambda x . f^9 x$

$= \bar{9}$

(g) If false then x else y = y

Given:- if a then b else c = a b c

true $= \lambda x . \lambda y . x$

false $= \lambda x . \lambda y . y$

Proof:- if false then x else y

$= $ false x y

$= (\lambda x . \lambda y . y)(x\ y)$

$= (\lambda y . y) y$

$= y$

Name: Sumit Kumar Yadav   Roll No.

(h) Prove: add & ~~add~~ mul are commutative.

(i) add:

To prove: $\text{add}\ (\bar{a}\ \bar{b}) = \text{add}\ (\bar{b}\ \bar{a})$

Consider, LHS: $\text{add}\ \bar{a}\ \bar{b}$

$= \lambda n . \lambda m . \lambda f . \lambda x . nf(mfx)\ \bar{a}\ \bar{b}$

$= \lambda f . \lambda x . \bar{a} f\ (\bar{b} f\ x)$

$= \lambda f . \lambda x . f^{a+b+2}\ x$

Now, RHS: $\text{add}\ (\bar{b}\ \bar{a})$

$= \lambda n . \lambda m . \lambda f . \lambda x . nf\ (mfx)\ \bar{b}\ \bar{a}$

$= \lambda f . \lambda x . \bar{b} f\ (\bar{a} f x)$

$= \lambda f . \lambda x . f^{b+a+2}\ x$

$\therefore$ LHS = RHS

$\therefore$ add is commutative.

(ii) mul:- To prove: $\text{mul}\ (\bar{a}\ \bar{b}) = \text{mul}\ (\bar{b}\ \bar{a})$

LHS: $\text{mul}(\bar{a}\ \bar{b})$

$= \lambda n . \lambda m . \lambda x\ (n\ (m x))\ \bar{a}\ \bar{b}$

$= \lambda x\ (\bar{a}\ (\bar{b}\ x))$

$= \lambda x\ f^{a+b}\ x$

Now, RHS: $\text{mul}\ (\bar{b}\ \bar{a})$

$= \lambda n . \lambda m . \lambda x\ (n\ (m x))\ \bar{b}\ \bar{a}$

$= \lambda x\ (\bar{b}\ (\bar{a}\ x))$

$= \lambda x f^{b+a}\ x = \lambda x f^{a+b} x$

$\therefore$ LHS = RHS

$\Rightarrow$ ~~mul~~ mul is commutative.