26.02.2024. - ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ CURS 1

- examen → la fel ca la TMI
- curs → abstract
- seminar → concret

Bibliografie

- H. BREZIS - Functional Analysis, Sobolev Spaces and PDE
- M. WILLEM - Functional Analysis
- B. MacCluer - Elementary functional analysis

Cuprins

1) Metode de spații Banach: preliminarii, T. HAHN-BANACH, principiul mărginirii uniforme sau BANACH-STEINHAUS, T. aplicației deschise și T. graficului închis, T. BANACH-ALAOGLU
2) Metode de spații Hilbert: preliminarii, baze Hilbert și dezvoltări FOURIER, T. RIESZ, T. de descompunere ortogonală, T. proiecției, descompunerea spectrală a op. autoadjuncți compacți.
3) Teorie spectrală sau teorie GELFAND (C^*-algebre)
(dacă avem timp)

I. METODE DE SPAȚII BANACH

1. Noțiuni fundamentale

DEF. (spațiu normat)
Fie X spațiu vectorial peste $\underbrace{\mathbb{R} \text{ sau } \mathbb{C}}_{\mathbb{K}}$.
Spunem că $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ s.n. NORMĂ dacă
(N1) Pt $x \in X$ avem că $\|x\| = 0 \iff x = 0$
(N2) Pt $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in X$ avem că $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
(N3) Pt $\forall x, y \in X$ avem că $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.
Spunem că $(X, \|\cdot\|)$ s.n. SPAȚIU NORMAT

Obs. $\|\cdot\|$ generează o metrică $d: X \times X \to [0,\infty)$, $d(x,y) = \|x-y\|$, $\forall x,y \in X$
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x,y \in X$
- $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$, $\forall x,y,z \in X$

Deci (X,d) este spațiu metric

⊛ Șir convergent: $(x_n) \subseteq X$ sp. normat, (x_n) conv la $x^* \in X$ și scriem $x_n \to x^*$ / $\lim\limits_n x_n = x^*$ dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^* - x_n\| = 0$
↳ Avem unicitatea limitei! (exc)

⊛ Șir CAUCHY: $(x_n) \subseteq X$ s.n. CAUCHY dacă $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n, m \ge n_\varepsilon$: $\|x_n - x_m\| \le \varepsilon$.

REMARCĂ. Orice șir convergent e CAUCHY. Reciproca, în general, este falsă!

DEF. Fie X sp normat. Spunem că X este spațiu Banach dacă orice șir CAUCHY din X e convergent.

EXERCIȚIU. X sp normat, $(x_n) \subseteq X$ CAUCHY în X cu un subșir convergent la x^*.
Atunci $x_n \to x^*$.

DEF. • Fie (x_n) șir din sp normat X. Asociem $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$; ea e convergentă dacă $(s_n) \subseteq X$ e convergent la s, $s_n \to s$, unde $s_n = \sum_{j=0}^{n} x_j$ $(n \in \mathbb{N})$.
scriem $s \overset{not}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} x_j\right)$

• Spunem că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e absolut convergentă dacă $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

PROP. Fie X sp normat. UASE : (a) X sp BANACH
(b) Orice serie absolut convergentă din X e convergentă

dem. „⇒" Fie $(x_n) \subseteq X$ cu $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.
Știu că X e BANACH. Vreau $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e conv, adică (s_n) conv, $s_n = \sum_{j=0}^{n} x_j$ $(n\in\mathbb{N})$
E suficient să arătăm că (s_n) e CAUCHY (pt că X e BANACH)
Fixăm $n<m$, $n,m \in \mathbb{N}$

$$\|s_m - s_n\| = \left\|\sum_{j=n+1}^{m} x_j\right\| \overset{(N3)}{\leq} \sum_{j=n+1}^{m} \|x_j\| \xrightarrow[n\to\infty]{m\to\infty} 0$$

„⇐" Fie (x_n) șir CAUCHY în X. Arătăm că (x_n) are un subșir convergent.
Construim inductiv $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$ șir de nr naturale a.î.

• $\exists\, n_1 \geq 0$ a.î. $\forall\, n \geq n_1$: $\|x_n - x_{n_1}\| \leq \frac{1}{2}$

• $\exists\, \tilde{n}_2 \geq 0$ a.î. $\forall\, n \geq \tilde{n}_2$: $\|x_n - x_{\tilde{n}_2}\| \leq \frac{1}{2^2}$

luăm $n_2 > \max(\tilde{n}_2; n_1)$; deci $n_1 < n_2$ și $\|x_{n_2} - x_{n_1}\| \leq \frac{1}{2}$

Inductiv avem construită $(n_k)_{k\geq1}$ ca mai sus și $\boxed{\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k},\ \forall\, k \geq 1}$

Iau $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subseteq X$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty$$

Cu ipoteza : $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ convergentă

$S_k = \sum_{j=1}^{k} y_j = x_{n_{k+1}} - x_{n_1}$, $k \geq 1$ ⇒ $(S_k) = (x_{n_{k+1}} - x_{n_1})_k$ convergent,
deci $(x_{n_k})_{k\geq1}$ convergent ⇒ (x_n) convergent

DEF. (continuitate)
X, Y sp normate, $f: X \to Y$ s.n. <u>continuă</u> dacă
$f^{-1}(U)$ deschisă în X pt orice U deschisă în Y

NOTAȚII $B_X[x_0, R] = \{x \in X : \|x - x_0\| \le R\}$
$B_X(x_0, R) = \{x \in X : \|x - x_0\| < R\}$

REMARCĂ. X, Y sp normate, $f: X \to Y$. UASE:
(a) f continuă pe X
(b) $f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n)$, $\forall (x_n)$ șir convergent din X.

DEF. X, Y sp vectoriale, $T: X \to Y$ s.n. <u>liniară</u> dacă $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in X$

REMARCĂ. X, Y normate. În general, $T: X \to Y$ liniară $\not\Rightarrow$ T continuă

PROP. (aplicații liniare continue)
Fie X, Y sp normate, $T: X \to Y$ liniară. UASE: (a) T continuă
(b) $\exists M > 0$ a.î. $\boxed{\|Tx\| \le M\|x\|, \forall x \in X}$

dem. <u>(b) ⇒ (a)</u> Fie $x_n \to x^*$. Vrem $Tx_n \to Tx^*$

$\|Tx_n - Tx^*\| = \|T(x_n - x^*)\| \le M\|x_n - x^*\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ deci $\|Tx_n - Tx^*\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow Tx_n \to Tx^*$

<u>(a) ⇒ (b)</u> $T^{-1}(B_Y(0,1))$ deschisă în X, dar T liniară $\Rightarrow T(0) = 0$, deci
$0 \in T^{-1}(B_Y(0,1))$, deci $\exists R > 0$ a.î. $B_X[0,R] \subseteq T^{-1}(B_Y(0,1))$
Adică $\forall x \in B_X[0,R]$ avem că $\|Tx\| < 1$
Luăm $x \in X$, $x \ne 0$, $R\frac{x}{\|x\|}$ are norma R, deci $\frac{R}{\|x\|} \cdot x \in B_X[0,R]$

$\Rightarrow \|T(\frac{R}{\|x\|} \cdot x)\| < 1 \iff \|Tx\| \le \frac{1}{R} \cdot \|x\|$, $\forall x \ne 0$; e adev și pt $x = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|Tx\| \le \underbrace{\frac{1}{R}}_{\overset{not}{=} M} \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$

qed

DEF. (spațiul operatorilor $B(X,Y)$)
Fie X, Y sp normate, $B(X,Y) = \{T: X \to Y \mid T \overbrace{\text{liniară și continuă}}^{\text{OPERATOR}}\}$ sp vectorial peste $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} (T+S)x = Tx + Sx & (x \in X) \\ (\alpha T)x = \alpha Tx & (x \in X) \end{cases}$$

Pt orice $T \in B(X,Y)$, punem $\|T\| = \inf\{M > 0 : M \text{ satisface } (*)_T\}$
$(*)_T$: $\|Tx\| \le M\|x\|$, $\forall x \in X$
Avem. $\|\cdot\| : B(X,Y) \to [0, \infty)$ este normă (<u>norma operatorială</u>)
- $\|Tx\| \le \|T\| \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$
- $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \ne 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{x \in B_X[0,1]} \|Tx\|$

$(B(X,Y), \|\cdot\|_{op})$ e spațiu normat.

REMARCĂ. Fie $(T_n) \subseteq B(X,Y)$, $T \in B(X,Y)$, $\|T_n - T\|_{op} \to 0$

Atunci $\|T_n x - Tx\| \to 0$ pt orice $x \in X$.

dem. Într-adevăr, fie $x \in X$ (fixat), $\|T_n x - Tx\| = \|(T_n - T)x\|$

$\leq \|T_n - T\| \cdot \|x\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ qed

ex.
(*) $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ $1 < p < \infty$. Fie $1 < q < \infty$ a.î. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Fie $g \in L^q$. Definim $T_g : L^p \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_X fg \, d\mu$

T_g e bine def, liniar și cont în sp BANACH $(L^p, \|\cdot\|_p)$

Avem $\|T_g\|_{op} = \|g\|_{L^q}$

(*) $Y = \mathbb{R}$: $B(X, \mathbb{R}) \stackrel{not}{=} X^*$ dualul lui X

04.03.2024 - CURS 2 ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

Spațiul operatorilor

- X, Y sp normate
- $T: X \to Y$ liniară, atunci $\underset{\text{operator}}{T}$ continuă ddacă $\exists M > 0$ a.î. $\|Tx\| \le M\|x\|$, $\forall x \in X$ (*)
- $B(X,Y) = \{T: X \to Y \mid T$ lin și cont$\}$ e sp vectorial în mod natural

De fapt, $B(X,Y)$ sp normat cu norma operatorială $\|\cdot\|_{op} : B(X,Y) \to [0,\infty)$

$\|T\|_{op} = \inf\{M > 0 : M$ ca în (*)$\}$

Se arată că $\|T\|_{op} = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup\limits_{\substack{\|x\| \le 1 \\ x \in X}} \|Tx\|$

TEOREMĂ. Fie X, Y sp normate, avem că dacă Y BANACH, atunci $(B(X,Y), \|\cdot\|_{op})$ BANACH.

dem Fie (T_n) șir CAUCHY în $\|\cdot\|_{op}$, adică $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\|T_n - T_m\|_{op} \le \varepsilon$, $\forall n, m \ge n_\varepsilon$ (*)

În particular, dacă $x \in X$ fixat, $n, m \ge n_\varepsilon$, putem scrie că

(**) $\|T_n x - T_m x\| \le \underbrace{\|T_n - T_m\|_{op}}_{\le \varepsilon \text{ (din (*))}} \|x\|$, deci $(T_n x)_n$ e șir CAUCHY în spațiul BANACH Y, deci convergent.

Fie $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$, $(x \in X)$

Am format aplicația $T: X \to Y$, $x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. Avem că T liniară (T_n liniare, $\lim\limits_{n\to\infty}$ lin)

În (**) facem $m \to \infty$, obținem că $\forall n \ge n_\varepsilon$ $\|T_n x - Tx\| \le \varepsilon \|x\|$, $\forall x \in X$

Deci $T \in B(X,Y)$ și $\|T_n - T\|_{op} \le \varepsilon$, $\forall n \ge n_\varepsilon$ $\Big(\|(T_n - T)x\| \le \underset{M}{\underbrace{\varepsilon}}\|x\| \Rightarrow \left.\begin{matrix} T_n - T \in B(X,Y) \\ T_n \in B(X,Y)\end{matrix}\right\} \Rightarrow T \in B(X,Y)\Big)$

Deci $T_n \to T$ în $\|\cdot\|_{op}$ ●

REMARCĂ. (dualul)

1) X sp normat

$(B(X, \underset{\substack{\downarrow \\ Y \text{ e BANACH}}}{\mathbb{R}}), \|\cdot\|_{op}) = \overset{\text{FUNCȚIONALE}}{\overbrace{X^*}}$ dualul sp normat X; X^* este BANACH cu $\|\cdot\|_{op}$ (din th precedentă)

$X^* = \{f: X \to \mathbb{R} \mid f$ liniară și continuă$\}$

X^* BANACH chiar dacă X doar normat!

2) $B(X, \underset{\substack{\downarrow \\ Y}}{X}) \overset{\text{not}}{=} B(X)$

TEOREMA HAHN-BANACH (prelungirea funcționalelor)

Lucrăm peste $\mathbb{R}$.

DEF. Fie X spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$. Spunem că $p: X \to \mathbb{R}$ e funcțională subliniară dacă

- $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$
- $p(tx) = t\,p(x)$, $\forall t \ge 0$, $x \in X$

TEOREMĂ (HAHN-BANACH)

Fie X sp vectorial peste $\mathbb{R}$, Y subspațiu în X
$p: X \to \mathbb{R}$ subliniară, $\varphi: Y \to \mathbb{R}$ liniară a.î. $\varphi(y) \leq p(y)$, $\forall y \in Y$
Atunci $\exists$ $f: X \to \mathbb{R}$ liniară a.î. $\cdot$ $f(y) = \varphi(y)$, $\forall y \in Y$
$\cdot$ $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$

LEMĂ (cheia pt H-B)
Fie X sp vect peste $\mathbb{R}$, $p: X \to \mathbb{R}$ subliniară, Y subspațiu în X, $\varphi: Y \to \mathbb{R}$ liniară a.î. $\varphi \leq p$ pe Y.
Fie $x_0 \in X \setminus Y$. Atunci $\exists$ $f: \mathbb{R}x_0 \oplus Y \to \mathbb{R}$ liniară a.î. $\cdot$ $f|_Y = \varphi$
$\cdot$ $f \leq p$ pe $\mathbb{R}x_0 \oplus Y$

dem. $\mathbb{R}x_0 = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}x_0 \oplus Y = \{tx_0 + y : t \in \mathbb{R}, y \in Y\}$
Vrem liniară $f: \mathbb{R}x_0 \oplus Y \to \mathbb{R}$ cu $f|_Y = \varphi$. Fie $\lambda x_0 + y \in \mathbb{R}x_0 \oplus Y$ $(\lambda \in \mathbb{R}, y \in Y)$

atunci $f(\lambda x_0 + y) = \lambda f(x_0) + f(y) = \lambda \underbrace{f(x_0)}_{\alpha} + \varphi(y)$

$f(\lambda x_0 + y) = \lambda\alpha + \varphi(y)$
Dată în acest fel, f e liniară și $f|_Y = \varphi$.
Căutăm α a.î. $f(\lambda x_0 + y) = \lambda\alpha + \varphi(y) \leq p(\lambda x_0 + y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, y \in Y$ $(*)$
Luăm $\lambda = t > 0$
$(*) \iff \alpha + \varphi(\frac{1}{t}y) \leq p(x_0 + \frac{1}{t}y)$, $\forall y \in Y$
$\iff \alpha + \varphi(y) \leq p(x_0 + y)$, $\forall y \in Y$
Luăm $\lambda = s < 0$, $-s = t > 0$
$(*) \iff -\alpha t + \varphi(y) \leq p(-tx_0 + y)$, $\forall y \in Y$
$\iff -\alpha + \varphi(\frac{1}{t}y) \leq p(-x_0 + \frac{1}{t}y)$, $\forall y \in Y$
$\iff -\alpha + \varphi(y) \leq p(-x_0 + y)$, $\forall y \in Y$

În concluzie $(*) \iff \binom{<}{>} \begin{cases} -\alpha + \varphi(y) \leq p(-x_0 + y), & \forall y \in Y \\ \alpha + \varphi(\tilde{y}) \leq p(x_0 + \tilde{y}), & \forall \tilde{y} \in Y \end{cases}$

$\iff \varphi(y) - p(-x_0 + y) \leq \alpha \leq p(x_0 + \tilde{y}) - \varphi(\tilde{y}) \quad \forall y, \tilde{y} \in Y$

Vrem să arătăm că $\varphi(y) + \varphi(\tilde{y}) \leq p(x_0 + \tilde{y}) + p(-x_0 + y)$, $\forall y, \tilde{y} \in Y$

$\varphi(y) + \varphi(\tilde{y}) = \varphi(y + \tilde{y}) \leq p(y + \tilde{y}) = p(\tilde{y} + x_0 + (-x_0 + y)) \leq p(\tilde{y} + x_0) + p(-x_0 + y)$ ∎
(putem lua α orice val din $[\sup_y(\varphi(y) - p(-x_0 + y)), \inf_{\tilde{y}}(p(x_0 + \tilde{y}) - \varphi(\tilde{y}))]$)

ZORN Orice mulțime nevidă ordonată ce este $\boxed{\text{inductivă}}$, admite un $\boxed{\text{element maximal}}$.

explicația noțiunilor ce apar în ZORN: - inductivă: orice submulțime Q a lui $(P, \leq)$ ce este total ordonată, admite un majorant

- total ordonată: $\forall a, b \in Q$ avem $a \leq b$ sau $b \leq a$
- majorant Q: $p \in P$ a.î. $q \leq p$, $\forall q \in Q$
- element maximal în P: un element $m \in P$ a.î. dacă $m \leq p$ cu $p \in P$, atunci $p = m$.

ZORN și HAHN-BANACH

dem th H-B

$\mathcal{H} = \{ (\tilde{Y}, \tilde{\varphi}) : \tilde{Y}$ subsp în X a.î. $Y \subseteq \tilde{Y} \subseteq X$, $\tilde{\varphi} : \tilde{Y} \to \mathbb{R}$ liniară a.î. $\tilde{\varphi}|_Y = \varphi$ și $\tilde{\varphi} \leq p$ pe $\tilde{Y} \}$

$\mathcal{H} \neq \emptyset$ pt că $(Y, \varphi) \in \mathcal{H}$

Relația de ordine: $(Y_1, \varphi_1), (Y_2, \varphi_2) \in \mathcal{H}$; $\boxed{(Y_1, \varphi_1) \leq (Y_2, \varphi_2) \overset{DEF}{\iff} Y_1 \subseteq Y_2 \text{ și } \varphi_2|_{Y_1} = \varphi_1}$

INDUCTIVĂ fie $\mathcal{F}$ total ordonată, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. Vreau majorant pt $\mathcal{F}$.

- $\bigcup_{\tilde{Y} \in \mathcal{F}} \tilde{Y}$ subspațiu vectorial în X căci $\mathcal{F}$ total ordonată
- $\psi : \underbrace{\bigcup_{\tilde{Y} \in \mathcal{F}} \tilde{Y}}_{\overset{not}{=} H} \to \mathbb{R}$, $\psi(z) = \tilde{\varphi}(z)$, dacă $z \in \tilde{Y}$ bine definită pt că $\mathcal{F}$ total ordonată

ψ liniară, $\psi \leq p$ pe H

Acum avem că $(H, \psi) \in \mathcal{H}$ majorant pt $\mathcal{F}$

Concluzie cu ZORN $\Rightarrow \exists (Z, f) \in \mathcal{H}$ element maximal în $(\mathcal{H}, \leq)$

Cu lema avem că $Z = X$ ■

H-B forma complexă (peste $\mathbb{C}$)

REMARCĂ. X sp vectorial peste $\mathbb{C}$, $\varphi : X \to \mathbb{C}$ liniară

$\forall x \in X$, $\varphi(x) = (\mathrm{Re}\,\varphi)(x) + i(\mathrm{Im}\,\varphi)(x)$

IDEE: $x \in X$, $ix \in X$

$$\begin{aligned} \varphi(ix) &= (\mathrm{Re}\,\varphi)(ix) + i(\mathrm{Im}\,\varphi)(ix) \\ &\shortparallel \\ i\varphi(x) &= -(\mathrm{Im}\,\varphi)(x) + i(\mathrm{Re}\,\varphi)(x) \end{aligned}$$

Deci $(\mathrm{Im}\,\varphi)(x) = -(\mathrm{Re}\,\varphi)(ix)$, $\forall x \in X$

$\Rightarrow \varphi(x) = (\mathrm{Re}\,\varphi)(x) - i(\mathrm{Re}\,\varphi)(ix)$

Avem $\mathrm{Re}\,\varphi : X \to \mathbb{R}$ este $\mathbb{R}$-liniară

Reciproc: luăm $\varphi_1 : X \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-liniară și punem $\varphi : X \to \mathbb{C}$, $\varphi(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_1(ix)$

Atunci φ este $\mathbb{C}$-liniară

DEF. X $\mathbb{C}$-spațiu vectorial, $p: X \to [0,\infty)$ s.n. seminormă dacă
- $p(x+y) \le p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$
- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$

TEOREMĂ (H-B forma complexă)

Fie X $\mathbb{C}$-sp vect, $p: X \to [0,\infty)$ seminormă; Y subspațiu în X, $\varphi: Y \to \mathbb{C}$ liniară a.î. $|\varphi(y)| \le p(y)$, $\forall y \in Y$. Atunci

$\exists$ $f: X \to \mathbb{C}$ liniară a.î. $f|_Y = \varphi$, $|f(x)| \le p(x)$, $\forall x \in X$

dem. $\varphi(x) = (\mathrm{Re}\varphi)(x) - i(\mathrm{Re}\varphi)(ix)$, $\forall x \in X$

Avem $\mathrm{Re}\varphi: Y \to \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$-liniară

$|\mathrm{Re}\varphi| \le |\varphi| \le p$ pe Y

Cu H-B (forma reală), $\exists$ $f_1: X \to \mathbb{R}$ cu $f_1|_Y = \mathrm{Re}\varphi$ și $f_1 \le p$ pe X

Luăm $f: X \to \mathbb{C}$ dată prin $f(x) = f_1(x) - i f_1(ix)$ $(x \in X)$.

$f|_Y = \varphi$, f liniară

Vrem ca $|f(x)| \le p(x)$, $\forall x \in X$

- $x \in X$ cu $f(x) = 0$ $\quad |f(x)| = 0 \le p(x)$ căci $p \ge 0$
- $x \in X$ cu $f(x) \ne 0$

$\lambda = \dfrac{|f(x)|}{f(x)} \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$

$$|f(x)| = \lambda f(x) = f(\lambda x) = \mathrm{Re} f(\lambda x) = f_1(\lambda x) \le p(\lambda x) = \underbrace{|\lambda|}_{=1} p(x) = p(x)$$

11.03.2024 - ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ CURS 3

TEOREMĂ (HAHN-BANACH)

X sp vect peste $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$), $p: X \to [0,\infty)$ seminormă
Y subspațiu în X, $\varphi: Y \to \mathbb{K}$ liniară a.î. $|\varphi(y)| \le p(y)$, $\forall y \in Y$
Atunci există $f: X \to \mathbb{K}$ liniară a.î. · $f(y) = \varphi(y)$, $\forall y \in Y$
· $|f(x)| \le p(x)$, $\forall x \in X$.

APLICAȚII

① **HAHN-BANACH (forma "uzuală")**

Fie X spațiu normat peste $\mathbb{K}$, Y subspațiu în X
$\varphi: Y \to \mathbb{K}$ liniară și continuă
Atunci există $f: X \to \mathbb{K}$ liniară și continuă a.î. · $f(y) = \varphi(y)$, $\forall y \in Y$
· $\|f\|_{X^*} = \|\varphi\|_{Y^*}$

dem. $\varphi \in Y^*$, deci $|\varphi(y)| \le \|\varphi\|_{Y^*} \cdot \|y\|$, $\forall y \in Y$
Luăm norma (deci seminorma): $p: X \to [0,\infty)$, $p(x) = \|\varphi\|_{Y^*} \|x\|$
Cu H-B, există $f: X \to \mathbb{K}$ liniară a.î. · $f|_Y = \varphi$
· $|f| \le p$ pe X adică
$|f(x)| \le \|\varphi\|_{Y^*} \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Deci } f \in X^* \text{ cu } \|f\|_{X^*} \le \|\varphi\|_{Y^*} \\ \text{Avem că } \|f\|_{X^*} \ge \|\varphi\|_{Y^*} \text{ pt că } f \text{ extensie a lui } \varphi \end{array}\right\} \text{qed}$$

② Fie X normat peste $\mathbb{K}$, $x_0 \in X$ cu $x_0 \ne 0$
Atunci există $f \in X^*$ cu $f(x_0) = 1$ și $\|f\|_{op} = \frac{1}{\|x_0\|}$

dem. Iau $Y = \mathbb{K}x_0 = \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{K}\}$ subspațiu în X.
Fie $\varphi: Y \to \mathbb{K}$, $\varphi(\lambda x_0) = \lambda$ liniară cu $\varphi(x_0) = 1$
Apoi, dacă $y = \lambda x_0 \in Y$, atunci $|\varphi(y)| = |\varphi(\lambda x_0)| = |\lambda| = \frac{1}{\|x_0\|} \overset{|\lambda|\cdot\|x_0\|}{\widetilde{\|y\|}}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{deci } \varphi \in Y^* \text{ cu } \|\varphi\|_{Y^*} \le \frac{1}{\|x_0\|} \\ \text{Apoi, } \varphi\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) = \frac{1}{\|x_0\|} \le \|\varphi\|_{Y^*} \end{array}\right\} \Rightarrow \|\varphi\|_{Y^*} = \frac{1}{\|x_0\|}$$

Concluzia rezultă acum din ①

Spații cât

PROP. Fie X sp normat peste $\mathbb{K}$, Y subspațiu închis în X
· Considerăm $X/_Y = \{x/_Y : x \in X\}$ ($x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in Y$) spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$
$x/_Y = \{x + y : y \in Y\} = x + Y$
· Pt $x \in X$, punem $\|x/_Y\| \overset{DEF}{=} dist(x, Y) = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\}$
$= \inf\{\|x+y\| : y \in Y\}$
$= \inf\{\|z\| : z \in x/_Y\}$

Atunci $(X/_Y, \|\cdot\|)$ e normat
Mai mult, dacă X BANACH, atunci $X/_Y$ e BANACH.

dem. Dacă $x \in X$ cu $\| x/_Y \| = 0$, atunci $x/_Y = 0_{X/Y}$, adică $x \in Y$

Într-adevăr: există $(y_n) \subseteq Y$ a.î. $\|x - y_n\| \to \|x/_Y\| = 0$, adică $y_n \to x$ în X

dar Y închis în X, deci $x \in Y$.

- restul proprietăților normei reies din proprietățile infimumului.

$\Rightarrow (X/_Y, \|\cdot\|)$ normat

- Fie acum $(\xi_n) \subseteq X/_Y$ cu $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \|\xi_n\|_{X/Y} < \infty}_{\text{ipoteza de lucru}}$

Vrem $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ conv în $X/_Y$.

$$\boxed{\text{Iau } \|\xi_n\|_{X/Y} + \frac{1}{2^n}}$$

$\xi_n = x_n/_Y$ cu $x_n \in X$

$\exists\, y_n \in Y$ a.î. $\|x_n + y_n\| \leq \|\xi_n\| + \frac{1}{2^n}$

[**AFIRMAȚIE**: $\pi : X \to X/_Y : x \mapsto x/_Y$ surjecție canonică, liniară, apoi

$\|\pi x\|_{X/Y} = \|x/_Y\| \leq \|x\|$, $\forall\, x \in X$, deci π lin și continuă cu $\|\pi\|_{op} \leq 1$.]

Avem că $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\| < \infty$ cu ipoteza de lucru

Dar X e BANACH, deci $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)}_{z^*}$ conv în X.

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \qquad \text{APLICĂM } \pi \text{ continuă și liniară}$$

$$\Rightarrow \pi(z_*) = \pi\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\right)$$

$$\overset{\pi \text{ cont}}{=} \lim_{n\to\infty} \pi\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\right)$$

$$\overset{\pi \text{ lin}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\pi(x_i + y_i)}_{\underbrace{\pi(x_i)}_{\xi_i} + \underbrace{\pi(y_i)}_{0_{X/Y}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \text{ convergentă}$$

$\Rightarrow (X/_Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ BANACH.

③ Aplicația 3 la HAHN-BANACH

Fie X normat, Y subspațiu închis în X, $x_0 \in X$ cu $x_0 \notin Y$.

Atunci, $\exists\, f \in X^*$ cu
- $f|_Y \equiv 0$
- $f(x_0) = 1$
- $\|f\|_{op} = \frac{1}{\|x_0/_Y\|}$

dem. Aplicăm ② pt $X/_Y$ căci $x_0/_Y \neq 0_{X/Y}$ ($x_0 \notin Y$)

Cu ②, $\exists\, \Lambda : X/_Y \to \mathbb{K}$ liniară și continuă cu $\|\Lambda\|_{op} = \frac{1}{\|x_0/_Y\|}$, $\Lambda(x_0/_Y) = 1$

Luăm $f: X \to \mathbb{K}$ dată prin $f = \Lambda \circ \pi$ lin, cont cu $f|_Y = 0$, $f(x_0) = 1$

$$|f(x)| = |\Lambda(\pi x)| = |\Lambda(x/Y)| \le \underbrace{\|\Lambda\|_{op}}_{= \frac{1}{\|x_0/Y\|}} \cdot \underbrace{\|x/Y\|}_{\le \|x\|}$$

deci $\|f\|_{op} \le \dfrac{1}{\|x_0/Y\|}$

PRINCIPIUL MĂRGINIRII UNIFORME BANACH - STEINHAUS

Introducere: fie X, Y normate, $\mathcal{T}$ mărginită în $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{op})$, adică $\exists M > 0$ a.î. $\|T\|_{op} \le M$, $\forall T \in \mathcal{T}$.

Atunci, $\forall x \in X$ avem că $\|Tx\| \le \|T\|_{op} \|x\| \le M\|x\|$, $\forall T \in \mathcal{T}$

adică $\{Tx : T \in \mathcal{T}\}$ mărg în Y sau $(\|Tx\|)_{T \in \mathcal{T}}$ mărg în $\mathbb{R}$.

Instrumentul principal

BAIRE: (X,d) spațiu metric complet, $(G_n)_n$ șir de deschiși din X a.î. $\overline{G_n} = X$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Atunci $\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = X$.

Trecem la complementare: Într-un sp metric complet, reuniune numărabilă de închiși cu interiorul vid este o mulțime cu interiorul vid.

Caz particular

Fie X spațiu BANACH, (F_n) șir de mulțimi închise în X a.î. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$

Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \emptyset$.

TH. BANACH - STEINHAUS

Fie X BANACH, Y normat, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$ a.î.

- Pt orice $x \in X$, $\{\|Tx\|\}_{T \in \mathcal{T}}$ mărginită

Atunci $\mathcal{T}$ mărg în $(\mathcal{B}(X,Y), \|\cdot\|_{op})$: $\exists M > 0$ a.î. $\|T\|_{op} \le M$, $\forall T \in \mathcal{T}$.

dem. $A + B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$, când $A \subseteq X$, $B \subseteq X$; $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$

Fie $\boxed{W = \bigcap_{T \in \mathcal{T}} T^{-1}(B_Y[0,1])}$

Avem că W este închisă în X.

Apoi, din ipoteză $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{nW}_{\bigcap_{T \in \mathcal{T}} T^{-1}(B_Y[0,n])}$

Fie $x \in X \Rightarrow \exists M_x \in \mathbb{N}$ a.î. $\underbrace{\|Tx\| \le M_x}_{Tx \in B[0,M_x]}$, $\forall T \in \mathcal{T}$

$x \in T^{-1}(B[0,M_x])$, $\forall T \in \mathcal{T}$

Cu Baire, $\exists M_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\overset{\circ}{\widehat{M_0 W}} \neq \emptyset$, sau echivalent $\overset{\circ}{W} = \emptyset$

Fie $x_0 \in \mathring{W}$, deci luăm $\delta > 0$ a.î. $B_X[x_0, \delta] \subseteq W$

$x_0 \in W \Rightarrow -x_0 \in W$

Rezultă că $B_X[0, \delta] = -x_0 + B_X[x_0, \delta] \subseteq W + W$

deci, $\forall\, T \in \mathcal{T}$

$$T(B_X[0,\delta]) \subseteq T(W + W) = T(W) + T(W) \subseteq B_Y[0,1] + B_Y[0,1] = B_Y[0,2]$$

$\Rightarrow T(B_X[0,\delta]) \subseteq B_Y[0,1]$, deci $T(B_X[0,\frac{\delta}{2}]) \subseteq B_Y[0,1]$, $\forall\, T \in \mathcal{T}$.

Acum fie $T \in \mathcal{T}$, $x \in X$ cu $\|x\| \neq 0$

$$\|Tx\| = \left\| T\left(\frac{2\|x\|}{\delta} \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \frac{2}{\delta} \cdot \|x\| \cdot \underbrace{\left\| T\left(\frac{\delta}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \right) \right\|}_{\leq 1} \leq \frac{2}{\delta} \cdot \|x\|$$

Astfel că $\|T\|_{op} \leq \frac{2}{\delta}$, $\forall\, T \in \mathcal{T}$.

Despre spații reflexive - BIDUALUL

Fie X normat, $x \in X$ fixat; definim

$x_* : X^* \to \mathbb{K}$ dată prin $x_*(f) = f(x)$ pt orice $f \in X^*$

Avem x_* liniară. Apoi, $\forall\, f \in X^*$

$$|x_*(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{op} \|x\| = \|x\| \cdot \|f\|_{op}$$

Rezultă că $x_* \in (X^*)^*$ cu $\|x_*\|_{(X^*)^*} \leq \|x\|$

Arătăm că, de fapt, $\|x_*\| = \|x\|$ $\quad (\geq)$

$$\|x_*\| = \overset{\max}{\sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \leq 1}}} \underbrace{|x_*(f)|}_{f(x)}$$

? Există $f \in X^*$ cu $\|f\|_{op} \leq 1$ și $|f(x)| = \|x\|$

$\exists\, \tilde{f} \in X^*$ a.î. $\tilde{f}(x) = 1$, $\|\tilde{f}\| = \frac{1}{\|x\|}$ $\quad (x \neq 0)$ $\quad$ din ②

Iau $f = \|x\| \tilde{f} \in X^*$, $\|f\|_{op} = 1$, $f(x) = \|x\|$

$$X \longrightarrow (X^*)^*$$
$$x \longmapsto x_* \quad \text{e liniară și } \underset{\|x\| = \|x_*\|}{\text{izometrie}}$$

Spunem că X REFLEXIV dacă aplicația de mai sus e surjecție.

18.03.2024 - **ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ CURS 4**

COROLAR 1 (la BANACH-STEINHAUS)

Fie X BANACH, $B^* \subset X^*$ a.î. $(b^*(x))_{b^* \in B^*}$ mărginită în $\mathbb{R}$ pt orice $x \in X$.
Atunci B^* mărginită în X^*, adică $(\|b^*\|_{OP})_{b^* \in B^*}$ e mărginită în $\mathbb{R}$.

dem. BANACH-STEINHAUS cu $Y = \mathbb{R}$

COROLAR 2 ("dualul" COROLARULUI 1)

Fie X normat, $B \subseteq X$ a.î. $f(B)$ mărg în $\mathbb{R}$, pt orice $f \in X^*$.
Atunci B mărg în X.

dem. Pt fiecare $b \in X$, luăm $b^* : X^* \to \mathbb{R}$, dată prin $b^*(f) = f(b)$, pt orice $f \in X^*$

Am arătat că $b^* \in (X^*)^*$ cu $\|b^*\|_{(X^*)^*} = \|b\|$ ↳ via HAHN-BANACH

$$\|b^*\|_{(X^*)^*} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|_{X^*} \le 1}} \|b^*(f)\|$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Știm că } (X^*, \|\cdot\|_{X^*}) \text{ e BANACH.} \\ \text{Luăm familia } (b^*)_{b \in B} \subseteq \mathcal{B}(X^*, \mathbb{R}) \\ \text{Știm că } (\underbrace{b^*(f)}_{f(b)})_{b \in B} = f(B) \text{ mărg pt orice } f \in X^* \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Cu BANACH-STEINHAUS, $(\underbrace{\|b^*\|_{(X^*)^*}}_{\|b\|})$ mărg în $\mathbb{R}$

deci B mărginită în X. ∎

CONVERGENȚĂ SLABĂ PE DUAL (**TEOREMA BANACH-ALAOGLU**)

DEF. X normat, (f_n) șir din X^*, $f \in X^*$.
Spunem că șirul (f_n) converge slab pe dual la f și scriem $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ dacă $f_n(x) \to f(x)$, pt orice $x \in X$.

(avem unicitatea limitei, liniaritate etc.)

LEMĂ. ("cheie" BANACH-ALAOGLU)

Fie X normat, Z densă în X, $\overline{Z} = X$

Apoi fie (f_n) șir din X^* a.î.
- $(\|f_n\|_{X^*})$ mărg în $\mathbb{R}$, deci (f_n) mărg în X^*
- Pt orice $z \in Z$, avem că $(f_n(z))_n$ convergent în $\mathbb{R}$.

Atunci șirul (f_n) converge slab la $f \in X^*$ și $\|f\|_{X^*} \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{X^*}$

dem. Fie $x \in X \setminus Z$; fie $\varepsilon > 0$ fixat. Știm $\overline{Z} = X$, deci luăm $z \in Z$ cu $\|z - x\| \le \varepsilon$.
Apoi fie $c > 0$ cu $\|f_n\|_{X^*} \le c$ pt orice $n \in \mathbb{N}^*$
Știm că $(f_n(z))$ convergent; luăm un rang $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. pt orice $n, m \ge n(\varepsilon)$, $|f_n(z) - f_m(z)| \le \varepsilon$.

Atunci, putem scrie că pt $n, m \geq n(\varepsilon)$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(x)|$$
$$\leq \underbrace{\|f_n\|_{X^*}}_{\leq c} \underbrace{\|x-z\|}_{\leq \varepsilon} + \varepsilon + \underbrace{\|f_m\|_{X^*}}_{\leq c} \underbrace{\|x-z\|}_{\leq \varepsilon} \leq (2c+1)\varepsilon$$

Deci $(f_n(x))_n$ CAUCHY în $\mathbb{R}$, deci convergent, pt orice $x \in X$.

Fie $f : X \to \mathbb{R}$ cu $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$

Avem că f liniară. Știm că $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{X^*} \cdot \|x\|$, pt orice $x \in X$
pt orice $n \in \mathbb{N}^*$

Deci, $|f(x)| \leq \underbrace{\left(\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{X^*}\right)}_{<\infty} \cdot \|x\|$, pt orice $x \in X$

Rezultă că $f \in X^*$ cu $\|f\|_{X^*} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_{X^*}$ ■

DEF. Un spațiu normat X s.n. <u>separabil</u> dacă există $Z \subset X$ cu Z numărabilă și densă în X, adică $\overline{Z} = X$.

<u>TEOREMĂ. (BANACH-ALAOGLU)</u>

Fie X spațiu normat <u>separabil</u> și (f_n) un șir din X^* cu $(\|f_n\|_{X^*})$ mărg.
Atunci există (f_{n_k}) subșir al lui $(f_n)_n$ și $f \in X^*$ a.î. $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} f$

<u>dem</u>. Aplicăm procedeul CANTOR:

Fie $Z = (x_n)_n$ numărabilă, densă în X.
E suficient să arătăm (vezi LEMA) că există un subșir (f_{n_k}) al lui (f_n) a.î. $(f_{n_k}(x_j))_{k\in\mathbb{N}}$ convergent în $\mathbb{R}$, pt orice $j \in \mathbb{N}$ fixat.

<u>Fixăm x_1</u>: $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ mărginit în $\mathbb{R}$, deci există $(f_{n,1})_n$ subșir al lui $(f_n)_n$ a.î. $(f_{n,1}(x_1))_n$ convergent în $\mathbb{R}$.

<u>Fixăm x_2</u>: $(f_{n,1}(x_2))_n$ mărginit în $\mathbb{R}$, deci există $(f_{n,2})_n$ subșir al lui $(f_{n,1})_n$ subșir al lui $(f_n)_n$ a.î. $(f_{n,2}(x_2))_n$ convergent în $\mathbb{R}$.

<u>Inductiv</u>: pt orice $\underset{k\geq 2}{k \in \mathbb{N}^*}$, $(f_{n,k})_n$ subșir $(f_{n,k-1})_n$ a.î. $(f_{n,k}(x_k))_n$ conv în $\mathbb{R}$.

Luăm $g_n = f_{n,n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Avem că $(g_n)_n$ subșirul lui $(f_n)_n$ cu prop că $(g_n(z))_n$ conv pt orice $z \in Z$. ■

APLICAȚII DESCHISE

L1 Fie X normat, Y BANACH, $A \in B(X,Y)$ surjecție.
Atunci 0 e punct interior $\overline{A(B_X[0,1])}$.

dem. A surjecție, avem că $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} A(B_X[0,n]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\overline{A(B_X[0,n])}}_{\overline{n\,A(B_X[0,1])}}$

cu BAIRE : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ cu $\overset{\circ}{\overline{n_0 A(B_X[0,1])}} \neq \emptyset$.

$n_0 \overset{\circ}{\overline{A(B_X[0,1])}}$, deci $\overset{\circ}{\overline{A(B_X[0,1])}} \neq \emptyset$

Fie $y_0 \in \overset{\circ}{\overline{A(B_X[0,1])}}$

$\Rightarrow$ există $r>0$ a.î. $B_Y[y_0,r] \subseteq \overline{A(B_X[0,1])}$. Deci $-y_0 \in \overline{A(B_X[0,1])}$

(y_0 = lim de x_n din bilă
$-y_0$ = lim de $-x_n$ tot din bilă centrată în 0
$\Rightarrow$ $-y_0 \in$ închiderii)

$B_Y[0,r] = -y_0 + B[y_0,r] \subseteq \overline{A(B_X[0,1])} + \overline{A(B_X[0,1])}$

$\subseteq \overline{A(B_X[0,2])} = \overline{2A(B_X[0,1])} = 2\,\overline{A(B_X[0,1])}$

$\Rightarrow B_Y[0,\frac{r}{2}] \subseteq \overline{A(B_X[0,1])}$ ■

L2 Fie X BANACH, Y normat, $A \in B(X,Y)$ a.î. 0 punct interior lui $\overline{A(B_X[0,1])}$.
Atunci 0 este punct interior lui $A(B_X[0,1])$.

dem. Din ipoteză știm că există $c>0$ a.î. $B_Y[0,2c] \subseteq \overline{A(B_X[0,1])}$
Vom dem că : $B_Y[0,c] \subseteq A(B_X[0,1])$.

Știm că : $(*)$ pt orice $y^* \in B_Y[0,2c]$ deci $\|y^*\| \leq 2c$, $y^* \in \overline{A(B_X[0,1])}$,
adică pt orice $\varepsilon>0$, $\exists\, x^*_\varepsilon \in B_X[0,1]$: $\|y^* - Ax^*_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

Fie $y \in B_Y[0,c]$ fixat. Construim inductiv $(z_n) \subseteq X$ a.î. :

(i_n) $\|z_n\| \leq \frac{1}{2^n}$, $\|y - \underbrace{(Az_1 + \dots + Az_n)}_{A(\sum_{j=1}^{n} z_j)}\| \leq \frac{c}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Pasul 1 : $\left.\begin{array}{l} y^* = 2y \in B_Y[0,2c] \\ \varepsilon = c \end{array}\right\} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \exists\, x^*_\varepsilon \in B_X[0,1]$ cu $\|2y - Ax^*_\varepsilon\| \leq c$

deci $\|y - A(\underbrace{\tfrac{x^*_\varepsilon}{2}}_{=z_1 \text{ cu } \|z_1\| \leq \frac{1}{2}})\| \leq \frac{c}{2}$

Pasul inductiv : $z_1, \dots, z_n$ cu $(i_j)_{j=\overline{1,n}}$; vrem z_{n+1}

$y^* = 2^{n+1}(y - (Az_1 + \dots + Az_n))$, $\|y^*\| \leq 2c$, deci $y^* \in B_Y[0,2c]$

Aplicăm $(*)$ cu $\varepsilon = c$. Atunci

$\exists\, x^*_\varepsilon \in B_X[0,1]$ a.î. $\|y^* - Ax^*_\varepsilon\| \leq c$

$\|2^{n+1}(y - (Az_1 + \dots + Az_n)) - Ax^*_\varepsilon\| \leq c$

deci $\|y - (Az_1 + \dots + Az_n) - A(\underbrace{\tfrac{x^*_\varepsilon}{2^{n+1}}}_{=z_{n+1} \in B_X[0,\frac{1}{2^{n+1}}]})\| \leq \frac{c}{2^{n+1}}$ deci avem (i_{n+1})

Vrem $x \in B_X[0,1]$ cu $Ax = y$, unde $y \in B_Y[0,c]$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$$

Dar X BANACH, deci $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ conv în X

Fie $x = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} z_j \in B_X[0,1]$

Apoi $Ax = A\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} z_j\right) = \lim_{n\to\infty} A\left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} A z_j \overset{(in)}{=} y$, deci $Ax = y$. ▪

$\boxed{L_1 + L_2}$ Fie X, Y sp BANACH, $A \in B(X,Y)$ surjecție. Atunci 0 este punct interior lui $A(B_X[0,1])$.

TEOREMĂ (aplicației deschise)

Fie X, Y sp BANACH, $A \in B(X,Y)$ surjecție. Atunci A deschisă, adică pt orice U deschis în X, avem că $A(U)$ e deschis în Y.

25.03.2024 - CURS 5 ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

Bella BOLOBAS - Linear Analysis (cambridge Univ. Press)

TEOREMA APLICAȚIEI DESCHISE

Fie X, Y sp BANACH, $A \in B(X,Y)$ cu A surjecție.
Atunci A deschisă, adică $A(U)$ deschisă în Y pt orice U deschisă în X

dem. Am dem din $\boxed{L_1}$ și $\boxed{L_2}$ că 0 este punct interior lui $A(B_X[0,1])$

Deci există $r>0$ a.î. $\boxed{B_Y[0,r] \subseteq A(B_X[0,1])}$!

Fie U deschisă în X. Vrem $A(U)$ deschisă în Y

Fie $y_0 \in A(U) \Rightarrow \exists\, x_0 \in U$ a.î. $A(x_0) = y_0$. Dar $x_0 \in U$ deschisă $\Rightarrow$ există $\delta > 0$ a.î.

$B_X[x_0, \delta] \subseteq U \longrightarrow \underset{\cup\!\shortmid}{A(U)}$

$B_X[x_0,\delta] = x_0 + \delta B_X[0,1]$. Atunci, $A(B_X[x_0,\delta]) = \underbrace{Ax_0}_{y_0} + \delta A(B_X[0,1])$ (pt că A liniară)

$\supseteq y_0 + \delta B_Y[0,r]$

$\supseteq B_Y[y_0, r\delta]$

$\Rightarrow B_Y[y_0, r\delta] \subseteq A(U) \Rightarrow A(U)$ deschisă

COROLAR (teorema aplicației inverse)

Fie X, Y spații BANACH, $A \in B(X,Y)$ bijecție. Atunci $A^{-1} \in B(Y,X)$.

(ATENȚIE : Avem continuitatea inversei)

COROLAR (norme echivalente)

Fie X sp vectorial $/_{\mathbb{K}}$. $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ 2 norme complete pe X a.î. $\exists\, \alpha > 0$ cu

$\|x\|_1 \le \alpha \|x\|_2$, pt orice $x \in X$.

Atunci, există $\beta > 0$ a.î. $\|x\|_2 \le \beta \|x\|_1$, pt orice $x \in X$.

dem. Fie $I: X \to X$ funcția identitate, adică $Ix = x$, $\forall x \in X$

I liniară. Știm că $\|Ix\|_1 \le \alpha \|x\|_2$ pt orice $x \in X$, adică

$$I: \underbrace{(X, \|\cdot\|_2)}_{\text{sp Banach}} \to \underbrace{(X, \|\cdot\|_1)}_{\text{sp Banach}} \text{ continuă}$$

Cu th. aplicației inverse : $I = I^{-1} : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ continuă, adică

$\exists\, \beta > 0$ a.î. $\|\underbrace{Ix}_{x}\|_2 \le \beta \|x\|_1$, $\forall x \in X$.

TEOREMA GRAFICULUI ÎNCHIS

$(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 2 sp normate, $X \times Y = \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$ sp vectorial $/_{\mathbb{K}}$.

normat cu : $\|x+y\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y \to (X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$

TEOREMĂ (a graficului închis)

Fie X, Y sp Banach, $A: X \to Y$ liniară cu $G(A) = \{(x, A(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ închisă în $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$. Atunci A continuă.

dem. Pe X considerăm 2 norme: $\|\cdot\|_X$ şi norma de grafic

Norma de grafic pe X: $\|x\|_A := \|x\|_X + \|Ax\|_Y$

Avem $\|\cdot\|_A$ normă pe X. În plus, $\|\cdot\|_A$ completă.

Fie $(x_n)_n$ CAUCHY în $\|\cdot\|_A \Rightarrow (x_n)_n$ CAUCHY în $\|\cdot\|_X$ şi $(Ax_n)_n$ CAUCHY în $\|\cdot\|_Y$

$(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach

$\Rightarrow \exists x \in X, y \in Y$ cu

$\|x_n - x\|_X \to 0$ şi $\|Ax_n - y\|_Y \to 0$

$((x_n, Ax_n))_n \subseteq G(A)$ închis

Apoi $(x_n, Ax_n) \xrightarrow[n\to\infty]{X\times Y} (x,y)$

$\Rightarrow (x,y) \in G(A)$, adică $y = Ax$

Deci $\|x_n - x\|_A \to 0 \Rightarrow (X, \|\cdot\|_A)$ BANACH

Avem $\|x\|_A = \|x\|_X + \|Ax\|_Y \geq \|x\|_X$, $\forall x \in X$

Cu COROLARUL de mai sus, $\exists c > 0$ cu $\underbrace{\|x\|_A}_{\|x\|_X + \|Ax\|_Y} \leq c\|x\|_X$ $\Rightarrow \|Ax\|_Y \leq \underbrace{(c-1)}_{\stackrel{not}{=} d}\|x\|_X$, $\forall x \in X$

$\Rightarrow A$ continuă

CAP. 2

SPECTRUL

Def. (vectori proprii şi valori proprii)

Fie X sp normat $/\mathbb{C}$. $T \in \mathcal{B}(X)$

Spunem că $\lambda \in \mathbb{C}$ e valoare proprie pentru T dacă există $\boxed{x \in X,\ x \neq 0 \text{ a.î. } Tx = \lambda x}$

Altfel spus: $\underbrace{\mathrm{Ker}(\lambda I - T)}_{\text{subsp. vectorilor proprii asociaţi valorii proprii } \lambda} \neq \{0\}$

$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ val proprie pt } T\}$ ← SPECTRUL PUNCTUAL al lui T

$\dim(\mathrm{Ker}(\lambda I - T))$ - multiplicitatea valorii proprii λ. Poate fi $+\infty$!

REMARCĂ.

(a) Dacă $\lambda \in \sigma_p(T)$, atunci $|\lambda| \leq \|T\|_{op}$.

Într-adevăr, fie $x \neq 0$ a.î. $Tx = \lambda x$, deci $\underbrace{\|\lambda x\|}_{|\lambda|\cdot\|x\|} = \|Tx\| \leq \|T\|_{op} \cdot \|x\|$, deci $|\lambda| \leq \|T\|_{op}$

(b) Fie $(\lambda_j)_{j=1}^n \subseteq \sigma_p(T)$ distincte 2 câte 2

fie $(e_j)_{j=1}^n$ v.p. asociaţi, $Te_j = \lambda_j e_j$, $1 \leq j \leq n$. Atunci $\{e_1, \dots, e_n\}$ lin indep

dem. $k=1$ clar

$k \mapsto k+1$ $(k \leq n-1)$

Fie $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{C}$ a.î. $\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j e_j = 0$

$0 = T(0) = T\left(\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j Te_j = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j \lambda_j e_j$

$\| $

$\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_{k+1} \alpha_j e_j$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \underbrace{(\lambda_{k+1} - \lambda_j)}_{\neq 0} \alpha_j e_j = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

$\Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$

TEOREMĂ (Carl Neumann)

Fie X BANACH, $T \in \mathcal{B}(X)$ cu $\|T\|_{op} < 1$

Atunci avem că: (1) $\mathcal{I} - T$ inversabil în $\mathcal{B}(X)$ (bijecție de la X la X

(2) $(\mathcal{I}-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ în $\underbrace{(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_{op})}_{\text{sp Banach, căci } X \text{ Banach}}$

(3) $\|(\mathcal{I}-T)^{-1}\|_{op} \le \frac{1}{1-\|T\|_{op}}$

obs. • $S, T \in \mathcal{B}(X)$, atunci $\|ST\|_{op} \le \|S\|_{op} \cdot \|T\|_{op}$

• $S^n = \underbrace{SS\ldots S}_{\text{de } n \text{ ori}}$, $S \in \mathcal{B}(X)$

dem. Pt $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{j=0}^{n} T^j \in \mathcal{B}(X)$

Apoi, $\|S_n\|_{op} \le \sum_{j=0}^{n} \|T^j\|_{op} \le \sum_{j=0}^{n} \|T\|_{op}^j \le \frac{1}{1-\|T\|_{op}}$

ATENȚIE:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\|_{op} \le \sum_{j=0}^{\infty} \|T\|_{op}^j = \frac{1}{1-\|T\|_{op}} < \infty \\ (\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_{op}) \text{ BANACH} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} T^n \text{ convergentă în } (\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_{op})$$

adică (s_n) conv în $\mathcal{B}(X)$ la $s \in \mathcal{B}(X)$: $\|s_n - s\|_{op} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$s(\mathcal{I}-T) = \left(\lim_{n\to\infty} s_n\right)(\mathcal{I}-T)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\underbrace{s_n(\mathcal{I}-T)}_{s_n - s_n T}) = \lim_{n\to\infty} (\mathcal{I} - T^{n+1}) = \mathcal{I}$$

căci $\|T^{n+1}\|_{op} \le \|T\|_{op}^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $(\|T\|_{op} \le 1)$

Analog $(\mathcal{I}-T)s = \mathcal{I}$

Deci $s = (\mathcal{I}-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$

$$\|(\mathcal{I}-T)^{-1}\|_{op} = \|s\|_{op} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\|s_n\|_{op}}_{\le \frac{1}{1-\|T\|_{op}}} \le \frac{1}{1-\|T\|_{op}}$$

PROPOZIȚIE

Fie X Banach, $GL(X) = \{T \in \mathcal{B}(X) : T \text{ bijecție}\}$ (deci $T^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ cu th apl inverse)

Atunci (1) $GL(X)$ deschisă în $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_{op})$

(2) $GL(X) \ni T \longmapsto T^{-1} \in GL(X)$ este continuă

dem. (1) Fie $T_0 \in GL(X)$; vrem $B_{\mathcal{B}(X)}\left[T_0, \frac{1}{2\|T_0^{-1}\|_{op}}\right] \subseteq GL(X)$

Fie $T \in B_{\mathcal{B}(X)}\left[T_0, \frac{1}{2\|T_0\|_{op}}\right]$

$T \in \mathcal{B}(X)$ cu $\|T-T_0\|_{op} \le \frac{1}{2\|T_0^{-1}\|_{op}}$

$\|(T-T_0)T_0^{-1}\| \le \|T-T_0\|_{op} \|T_0^{-1}\|_{op} \le \frac{1}{2} < 1$

Cu CARL NEUMANN: $\mathcal{I} + (T-T_0)T_0^{-1}$ inversabil în $\mathcal{B}(X)$

Apoi, $T = T_0 + (T-T_0) = (\underbrace{\mathcal{I} + (T-T_0)T_0^{-1}}_{\text{inversabil}})\underbrace{T_0}_{\text{inversabil}} \in GL(X)$

(2) $T_0 \in GL(X)$, $\varepsilon > 0$, $\delta_\varepsilon = \min\left(\frac{\varepsilon}{2\|T_0^{-1}\|_{op}^2}, \frac{1}{2\|T_0^{-1}\|_{op}}\right)$

Luăm $\|T-T_0\|_{op} \le \delta_\varepsilon$. Vrem $\|T^{-1}-T_0^{-1}\|_{op} \le \varepsilon$

$\|T-T_0\|_{op} \le \dfrac{1}{2\|T_0^{-1}\|_{op}}$, deci cu (1) $\to$ $T \in GL(X)$ cu $T^{-1} = T_0^{-1}\left(\mathcal{I}+(T-T_0)T_0^{-1}\right)^{-1}$

$$\begin{aligned} T^{-1} - T_0^{-1} &= T^{-1}(T_0 - T)\, T_0^{-1} \\ &= T_0^{-1}\left(\mathcal{I} + (T-T_0)\,T_0^{-1}\right)^{-1}(T_0 - T)\, T_0^{-1} \end{aligned}$$

Apoi
$$\begin{aligned} \|T^{-1} - T_0^{-1}\|_{op} &\le \|T_0^{-1}\|_{op}^2 \, \|T_0 - T\|_{op} \, \frac{1}{1 - \|(T-T_0)\,T_0^{-1}\|_{op}} \\ &\le \|T_0^{-1}\|_{op}^2 \, \|T_0 - T\|_{op} \, \frac{1}{1 - \|T-T_0\|_{op}\, \|T_0^{-1}\|_{op}} \\ &\le \|T_0^{-1}\|_{op}^2 \, \delta_\varepsilon \, \frac{1}{1 - \delta_\varepsilon \|T_0^{-1}\|_{op}} \\ &\le \cancel{\|T_0^{-1}\|_{op}^2} \, \frac{\varepsilon}{2\cancel{\|T_0^{-1}\|_{op}^2}} \, \frac{1}{1 - \cancel{\frac{1}{2\|T_0^{-1}\|_{op}}\|T_0^{-1}\|_{op}}} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

01.04.2024 - CURS 6 ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

DEF. (spectru, rezolventă)

Fie X spațiu BANACH (peste $\mathbb{C}$)

Luăm $T \in B(X)$.

- $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T : X \to X \text{ bijecție}\}$

Cu teorema aplicației inverse avem că $\lambda \in \rho(T) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda I - T : X \to X \text{ bijecție și} \\ (\lambda I - T)^{-1} \in B(X) \end{cases}$

$\rho(T)$ s.n. mulțimea REZOLVANTĂ asociată lui T.

- $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ s.n. SPECTRUL lui T.

TEOREMĂ (despre SPECTRU)

Fie X BANACH peste $\mathbb{C}$, $T \in B(X)$. Atunci:

(1) $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|_{op}\}$

(2) $\rho(T)$ deschisă în $\mathbb{C}$

(3) $\sigma(T)$ compactă în $\mathbb{C}$

(4) $\sigma(T) \neq \emptyset$

dem. (1) Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| > \|T\|_{op}$. Atunci $\|\frac{1}{\lambda} T\|_{op} = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|T\|_{op} < 1$, deci

rezultă că (vezi C.NEUMANN) : $I - \frac{1}{\lambda} T$ inversabil, deci $\lambda I - T$ inversabil

adică $\lambda \in \rho(T)$.

(2) Fie $\lambda_0 \in \rho(T)$. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$, atunci $I - (\lambda_0 I - T)^{-1}(\lambda I - T) =$

$= (\lambda_0 I - T)^{-1}(\lambda_0 I - T - \lambda I + T) = (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - T)^{-1}$

Apoi $I - \underbrace{(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - T)^{-1}}_{A \in B(X)} = (\lambda_0 I - T)^{-1}(\lambda I - T)$

Dacă $\lambda_0 \approx \lambda$, atunci $\|A\|_{op} < 1$, deci $I - A$ inversabil (care NEUMANN)

deci $\underbrace{(\lambda I - T)^{-1}}_{\text{inversabil}}(\lambda I - T)$ inversabil, deci $\lambda I - T$ inversabil. Avem $\lambda \in \rho(T)$.

(3) $\left.\begin{array}{l} \text{din (1)} \to \sigma(T) \text{ mărginită în } \mathbb{C} \\ \text{din (2)} \to \sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T) \text{ închisă în } \mathbb{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma(T)$ compactă în $\mathbb{C}$

(4) SINGH (2006)

Pp că $\sigma(T) = \emptyset$

Fie $f : \mathbb{C} \to B(X)$ dată prin $f(z) = (zI - T)^{-1}$ $(z \in \mathbb{C})$

În particular, există $T^{-1} \in B(X)$

Desigur că $T^{-1} \neq 0_{B(X)}$; cu H-B, există $\varphi \in B(X)^*$ cu $\varphi(T^{-1}) \neq \varphi(0) = 0$

deci $\varphi : B(X) \to \mathbb{C}$ liniară și continuă

$\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

$z \longleftrightarrow Re^{i\theta}$, $R > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$

Definim $g : [0,\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 (\simeq \mathbb{C})$ dată prin

$$g(r,\theta) = \varphi(f(re^{i\theta})), \quad g(0,\theta) = \varphi(f(0)) = \varphi(T^{-1})$$

Vrem $g \in \mathcal{C}^1([0,\infty) \times \underbrace{[0,2\pi]}_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^2)$.

Fie $\theta \in \mathbb{R}$, $r, r_0 \in [0,\infty)$

$$\frac{g(r,\theta) - g(r_0,\theta)}{r - r_0} = \frac{\varphi(f(re^{i\theta})) - \varphi(f(r_0 e^{i\theta}))}{r - r_0}$$

$$= \varphi\left(\frac{(re^{i\theta}I - T)^{-1} - (r_0 e^{i\theta} - T)^{-1}}{r - r_0}\right)$$

(ecuația rezolventei : $\frac{1}{\lambda - t} - \frac{1}{\mu - t} = \frac{\mu - t - \lambda + t}{(\lambda - t)(\mu - t)} = \frac{\mu - \lambda}{(\lambda - t)(\mu - t)}$

$= (\mu - \lambda) \frac{1}{\lambda - t} \frac{1}{\mu - T}$

Deci $T \in \mathcal{B}(X)$, $\lambda, \mu \in \rho(T)$, atunci $\boxed{(\lambda I - T)^{-1} - (\mu I - T)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda I - T)^{-1}(\mu I - T)^{-1}}$

$\Leftrightarrow I - (\lambda I - T)(\mu I - T)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu I - T)^{-1}$

$\Leftrightarrow (\mu I - T) - (\lambda I - T) = (\mu - \lambda) I \quad \Leftrightarrow (\mu - \lambda) I = (\mu - \lambda) I$)

$$\overset{\text{ec. rezolventei}}{=} \varphi\left(\frac{(r_0 - r)e^{i\theta}(re^{i\theta}I - T)^{-1}(r_0 e^{i\theta}I - T)^{-1}}{r - r_0}\right)$$

$$= -e^{i\theta}\varphi((re^{i\theta}I - T)^{-1}(r_0 e^{i\theta}I - T)^{-1})$$

$\frac{\partial g}{\partial r}(r_0, \theta) = -e^{i\theta}\varphi((f(r_0 e^{i\theta}))^2)$ (din continuitatea lui φ și a operației de luare a inversului)

Similar $\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta_0) = -ri\, e^{i\theta_0}\varphi((f(re^{i\theta_0}))^2)$

__Deci $g \in \mathcal{C}^1$.__ Luăm acum $F(r) = \int_0^{2\pi} g(r,\theta)\, d\theta \quad (r \geq 0)$

$$F'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\, d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\varphi((f(re^{i\theta}))^2)\, d\theta$$

$$ir F'(r) = \int_0^{2\pi} -ire^{i\theta}\varphi((f(re^{i\theta}))^2)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\, d\theta \overset{L-N}{=} g(r, 2\pi) - g(r, 0) = 0$$

Concluzie parțială : F __constantă__ $\quad F(r) = F(0) = -2\pi\varphi(T^{-1}) \quad (r \geq 0)$

Pe de altă parte : $(r>0)$ $\varphi(f(re^{i\theta})) = \varphi((re^{i\theta}I - T)^{-1}) = \frac{1}{re^{i\theta}}\varphi\left(\left(I - \frac{1}{re^{i\theta}}T\right)^{-1}\right)$

facem $r \to \infty$, deci $\varphi(f(re^{i\theta})) \xrightarrow{r \to \infty} 0$

Pt r suficient de mare : $|\varphi(f(re^{i\theta}))| < \frac{1}{2}|\varphi(T^{-1})|$

Deci, putem scrie că:

$$2\pi\,|\varphi(T^{-1})| = |F(0)| = |F(r)| \le \int_0^{2\pi} |\varphi(f(re^{i\theta}))|\,d\theta < \frac{1}{2}\cdot 2\pi\,\underbrace{|\varphi(T^{-1})|}_{\neq 0\ (H-B)}$$

$\Rightarrow 1 < \frac{1}{2}$ ⨳

OPERATORI COMPACȚI

F. RIESZ: articol în ACTA MATHEMATICA nr. 41 (1918), pg. 71-98.

DEF. (operator compact)

E, F spații normate $/\mathbb{K}$, $T: E \to F$ liniară

T s.n. COMPACTĂ dacă ► pt orice șir (u_n) mărginit în E, există (u_{n_k}) subșir a.î. $(T(u_{n_k}))_k$ convergent

REMARCĂ.

(1) E normat, $A \subseteq E$, A precompactă dacă $\bar{A}$ compactă.

- Pp că E este BANACH. Avem că A precompactă în E dacă orice șir din A admite un subșir convergent (adev și în sp. metrice complete)

(2) E normat, F BANACH, $T: E \to F$ liniară. Atunci T compactă dacă și numai dacă $T(B_E[0,1])$ este precompactă în F.

(3) E, F normate, $T: E \to F$ liniar, compact. Atunci $T \in \mathcal{B}(E,F)$.

NOTAȚIE $K(E,F) = \{T: E \to F : T \text{ liniară, compactă}\}$ subspațiu în $\mathcal{B}(E,F)$.

TEOREMĂ.

Fie E normat și F BANACH. Atunci $K(E,F)$ subspațiu închis în sp BANACH $(\mathcal{B}(E,F), \|\cdot\|)$ (pt că F BANACH) deci e sp BANACH (închis în BANACH = BANACH)

dem. • Știm că este subspațiu

• închis

Fie $(K_n)_n$ șir din $K(E,F)$ și $K \in \mathcal{B}(E,F)$ cu $\|K_n - K\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Vrem $K \in K(E,F)$.

Fie (u_n) șir din E cu $\|u_n\| \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pt un anume $M > 0$.

PROCEDEUL CANTOR:

- $K_1 \in K(E,F)$: există $(u_{1,j})_j$ subșir al lui $(u_j)_j$ a.î. $(K_1(u_{1,j}))_j$ convergent
- $K_2 \in K(E,F)$: există $(u_{2,j})_j$ subșir al lui $(u_{1,j})_j$ a.î. $(K_2(u_{2,j}))_j$ convergent

Inductiv: $(u_{k,j})_j$ subșir al lui $(u_{k-1,j})_j$ a.î. $(K_k(u_{k,j}))_j$ convergent

Luăm $\boxed{v_j = u_{j,j} \ (j \in \mathbb{N}^*)}$

$(K_n(v_j))_{j\in\mathbb{N}^*}$ convergent, pt orice $n \in \mathbb{N}^*$

Vrem $(K(v_j))_j$ CAUCHY în F complet, deci convergent.

Fixăm $\varepsilon > 0$, $i, j, n \in \mathbb{N}^*$, avem că

$$\|K(v_i) - K(v_j)\| \le \|K(v_i) - K_n(v_i)\| + \|K_n(v_i) - K_n(v_j)\| + \|K_n(v_j) - K(v_j)\|$$

alegem n_ε a.î. $\|K - K_{n_\varepsilon}\| \le \varepsilon$

alegem j_ε a.î. $\|K_{n_\varepsilon}(v_i) - K_{n_\varepsilon}(v_j)\| \le \varepsilon$, $\forall i, j \ge j_\varepsilon$

Deci, dacă $i, j \geq j_\varepsilon$, atunci $\|K(v_i) - K(v_j)\| \leq \underbrace{\|K - K_{n_\varepsilon}\|}_{\varepsilon} \cdot \underbrace{\|v_i\|}_{M} + \varepsilon + \varepsilon M = \varepsilon(1 + 2M)$

deci $(K(v_i))_{i \in \mathbb{N}}$ CAUCHY, deci convergent și K compact, $K \in \mathcal{K}(E, F)$

LEMA RIESZ

Fie E sp normat, M subspațiu închis în E, $M \neq E$.
Atunci $\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$, $\exists u \in E$ cu $\|u\| = 1$ a.î. $\text{dist}(u, M) \geq 1 - \varepsilon$.

__dem.__ Fie $v \in E$ cu $v \notin M$. Deoarece M închis, $d = \text{dist}(v, M) > 0$

Alegem $m_0 \in M$ cu $d \leq \|v - m_0\| \leq \underbrace{\frac{1}{1-\varepsilon} d}_{d + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} d}$ (la infimum adaug ceva, deci găsesc un elem mai mic)

Acum luăm $u = \dfrac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$

Vrem să arătăm că u este cel căutat.

- $\|u\| = 1$
- Fie $m \in M$, scriem $\|u - m\| = \left\| \dfrac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\|$

$$= \frac{1}{\|v - m_0\|} \| \underbrace{v - m_0 - \|v - m_0\| m}_{v - (\underbrace{m_0 + \|v - m_0\| m}_{\in M})} \|$$

$$\geq \frac{1}{\|v - m_0\|} d \geq 1 - \varepsilon.$$

__REMARCĂ.__ E normat, M subspațiu finit dimensional în E. Atunci M închis în E!!

__TEOREMĂ.__

Fie E spațiu normat cu $B_E[0,1]$ compactă.
Atunci E este finit dimensional.

__dem.__ Pp că E este infinit dim.
Există un șir (E_n) strict crescător de subspații finit dimensionale în E.
Deci E_n-urile sunt închise
$E_n \subsetneq E_{n+1}$
Cu LEMA RIESZ, există (u_n) cu $\|u_n\| = 1$, $u_n \in E_n$ și $\text{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 2$
$m < k$, $\|u_m - u_k\| \geq \frac{1}{2}$. Deci (u_n) NU are subșiruri CAUCHY
contradicție cu $B_E[0,1]$ compactă.

08.04.2024 - CURS 7 ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

OPERATORI COMPACȚI

LEMA RIESZ

Fie E sp. normat, M subspațiu închis, $M \neq E$

Atunci, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists u \in E$ cu $\|u\| = 1$ și $dist(u, M) \geq 1 - \varepsilon$.

↳ Dacă E normat cu $B_E[0,1]$ compactă, atunci $\dim E < \infty$

TEOREMĂ (alternativa FREDHOLM)

Fie E spațiu BANACH, $T \in K(E)$. Atunci

(a) $\underbrace{N(I-T)}$ e finit dim

$Ker(I-T) = \{u \in E \mid (I-T)u = 0\}$

(b) $\underbrace{R(I-T)}_{Im(I-T)}$ e închis

(c) $N(I-T) = \{0\} \Longrightarrow R(I-T) = E$.

dem. (a) $E_1 = N(I-T)$

$B_{E_1}[0,1] \subseteq T(B_E[0,1])$ (căci $y \in E_1$ cu $\|y\| \leq 1$, avem că $(I-T)y = 0$, deci $y = Ty \in T(B_{E_1}[0,1]) \subseteq T(B_E[0,1])$)

Deci $B_{E_1}[0,1] \subseteq \overline{T(B_E[0,1])}$ compactă căci T compact, rez că $\dim E_1 < \infty$

(b) Fie $(f_n) \subseteq R(I-T)$ cu $\|f_n - f\| \to 0$, $f \in E$. Vreau $f \in R(I-T)$

Fie $u_n \in E$, $f_n = u_n - Tu_n$

$d_n = dist(u_n, N(I-T))$

Există $v_n \in N(I-T)$ cu $\|u_n - v_n\| = d_n$ (aici folosim $\dim N(I-T) < \infty$)

Scriem

$\boxed{(*)\ f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n)}$ pt că $v_n \in N(I-T)$

Afirmație: $(\underbrace{\|u_n - v_n\|}_{d_n})_n$ e mărginit.

Prin R.A. pp că - trecând eventual la un subșir - $\|u_n - v_n\| \xrightarrow{n} \infty$

Luăm $w_n = \dfrac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$, $\|w_n\| = 1$

Utilizând $(*)$: $w_n - Tw_n = \dfrac{f_n}{\|u_n - v_n\|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (pt că f_n convergent $\Rightarrow \|f_n\|$ mărg și $\dfrac{1}{\|u_n - v_n\|} \xrightarrow{n} 0$)

Iar T compact, trecând eventual la un subșir avem că $Tw_n \to z \in E$

Rez că $w_n \to z$, deci $Tw_n \to Tz$ $\Rightarrow$ $z - Tz = 0$ $\Rightarrow$ $z \in N(I-T)$

Avem acum $dist(w_n, N(I-T)) \to 0$

Apoi $dist(w_n, N(I-T)) = \inf\{\|\underbrace{w_n}_{\frac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}} - w\| : w \in N(I-T)\}$

$= \dfrac{1}{\|u_n - v_n\|} \inf\{\|u_n - \underbrace{v_n - w\|u_n - v_n\|}_{\in N(I-T)}\| : w \in N(I-T)\}$

$= \dfrac{1}{\underbrace{\|u_n - v_n\|}_{d_n}} \underbrace{dist(u_n, N(I-T))}_{d_n} = 1$ ⨳

Șirul $(u_n - v_n)_n$ mărg și T compact, trecând eventual la un subșir, putem pp că

$T(u_n - v_n) \to \ell \in E$

Atenție: $f_n \to f$. Ne uităm la $(*)$: $u_n - v_n \to f+\ell$ $\Big] \Rightarrow T(u_n - v_n) \to \ell = T(f+\ell)$

deci $Tg = \ell$

Fie $g = f + \ell$

Avem că $g - Tg = f+\ell - Tg = f+\ell-\ell = f \Rightarrow f \in R(\mathcal{I}-T)$

(c) Pp că $N(\mathcal{I}-T) = \{0\}$. Vrem $R(\mathcal{I}-T) = E$. Prin RA pp că $\underbrace{R(\mathcal{I}-T) = E_1}_{\text{spațiu BANACH căci închis}} \subsetneq E$

Apoi $T(E_1) \subseteq E_1$ căci $T(\mathcal{I}-T) = (\mathcal{I}-T)T$

Avem că $T \in K(E_1)$. Rez că $E_2 = (\mathcal{I}-T)(E_1)$ închis în E_1

Avem $E_2 \neq E_1$ (luăm $f \in E \setminus E_1$, $f \neq (\mathcal{I}-T)x$ pt orice $x \in E$

$\mathcal{I}-T$ injectiv, deci $\underbrace{(\mathcal{I}-T)(f)}_{\in E_1} \neq \underbrace{(\mathcal{I}-T)(\mathcal{I}-T)x}_{\text{tot } E_2 \text{ când } x \text{ parcurge } E}$, $\forall x \in E$)

Pt $\forall n \in \mathbb{N}^*$ punem,

$$E_n = (\mathcal{I}-T)^n(E)$$

$(E_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șir descrescător strict de subspații închise în E.

Folosim LEMA RIESZ: pt orice $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$, $dist(u_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$

Scriem $Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m)$

Acum $n > m$, remarcăm $E_{n+1} \subsetneq E_n \subseteq E_{m+1} \subsetneq E_m$

$$\underbrace{-(u_n - Tu_n)}_{\in E_{n+1}} + \underbrace{(u_m - Tu_m)}_{\in E_{m+1}} + \underbrace{u_n}_{E_n} \in E_{m+1}$$

$\|Tu_n - Tu_m\| = \|\underbrace{(\,---\,)}_{\in E_{m+1}} - u_m\| \geq dist(u_m, E_{m+1}) \geq \frac{1}{2}$ ↯ cu compacitatea lui T care implică (Tu_n) admite cel puțin un subșir conv

$\Rightarrow R(\mathcal{I}-T) = E$. ∎

TEOREMĂ (spectrul unui op. compact)

Fie E sp BANACH cu $\dim E = \infty$

Fie $T \in K(E)$. Atunci avem că:

(a) $0 \in \sigma(T)$;

(b) $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$

(c) unul din cazurile următoare e adevărat:

- $\sigma(T) = \{0\}$;
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ e finită
- $\sigma(T) \setminus \{0\}$ e un șir ce converge la 0

dem. (a) Pp că $0 \notin \sigma(T)$

T inversabil, $T^{-1} \in B(E)$

Dar $\mathcal{I} = \underbrace{\underbrace{T^{-1}}_{\in B(E)}\underbrace{T}_{\in K(E)}}_{\in K(E)}$ deci $\overline{\mathcal{I}(B_E[0,1])} = B_E[0,1]$ este compactă $\Big\} \Rightarrow \dim E < \infty$ ↯ cu ipoteza

(b) Fie $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$

Vrem $\lambda \in \sigma_p(T)$, adică $\lambda\mathcal{I} - T$ NU e injecție

Pp că $\lambda I - T$ injectivă. Deci $I - \frac{1}{\lambda}T$ injecție, $N(\underbrace{I - \frac{1}{\lambda}T}_{\text{compact}}) = \{0\}$ $\xrightarrow{\text{alt. FREDHOLM}}$ $R(I - \frac{1}{\lambda}T) = E$

deci $R(\lambda I - T) = E$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lambda I - T \text{ surj} \\ \lambda I - T \text{ inj}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda I - T$ bijecție, deci $\lambda \in \rho(T)$ ⨳ cu $\lambda \in \sigma(T)$.

LEMĂ (pt punctul (c))

Fie (λ_n) un şir de scalari distincţi cu $\lambda_n \to \lambda$, $(\lambda_n) \subseteq \sigma(T) \setminus \{0\}$

Atunci $\lambda = 0$.

dem. Ştim că (vezi (b)), $\lambda_n \in \sigma_p(T)$

Fie $e_n \in E \setminus \{0\}$ cu $Te_n = \lambda_n e_n$

$E_n = \text{span}(e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\dim E_n = n$

închis în E, $E_n \subsetneq E_{n+1}$

Folosim LEMA RIESZ: $\exists\, u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ a.î. $\text{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ $(n \geq 2)$

Luăm $2 \leq m < n$. Remarcăm

$E_{m-1} \subseteq E_m \subseteq E_{n-1} \subseteq E_n$

Apoi avem că $(T - \lambda_n I)(E_n) \subseteq E_{n-1}$

Apoi $\left\| \frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m} \right\| = \Big\| \underbrace{\frac{T(u_n) - \lambda_n u_n}{\lambda_n}}_{\in E_{n-1}} - \underbrace{\frac{T(u_m) - \lambda_m u_m}{\lambda_m}}_{\in E_{m-1}} + u_n - \underbrace{u_m}_{\in E_m} \Big\|$

$\geq \text{dist}(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$

Dacă $\lambda_n \to \lambda \neq 0$
prin RA

$\left(\left\| \frac{1}{\lambda_n} u_n \right\| = \frac{1}{|\lambda_n|}\right)_n$ şir mărg

T compact, $\left(\frac{Tu_n}{\lambda_n}\right)_n$ ar admite cel puţin un subşir convergent ⨳

Deci $\lambda = 0$ ∎

(c) $\underbrace{\underbrace{\sigma(T)}_{\text{compact}} \cap \left\{\lambda : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\right\}}_{\text{finită}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

dacă nu e finită, are un şir

şir în compact $\Rightarrow$ are subşir convergent în $\sigma(T)$

$\Rightarrow$ şirul merge la 0 (din lemă)

în $\sigma(T) \cap \{\underbrace{\lambda : |\lambda| \geq \frac{1}{n}}_{\text{închisă}}\}$ compactă

⨳

$\sigma(T) = \bigcup_n (\underbrace{\sigma(T) \cap \{\lambda : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\}}_{\text{finită}})$

$\Rightarrow \sigma(T)$ finită sau numărabilă

$\Downarrow$ lemă

ok.

25.04.2024 - CURS 8 ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

SCHAUDER
STUDIA MATH., 2(1930), 185-186

RIESZ (alternativa FREDHOLM)
Fie E sp Banach, $T \in K(E)$ atunci
$$N(I-T) = \{0\} \Rightarrow R(I-T) = E$$

Explicația numelui:
$$1 \in \sigma_p(T) \quad \text{SAU} \quad 1 \in \rho(T)$$

TEOREMĂ (adjunct în spații Banach)
Fie E, F sp. BANACH, $A \in B(E,F)$. Considerăm $A^*: F^* \to E^*$ dat prin, pt orice $f \in F^*$
$$(A^*f)(x) = f(Ax), \text{ pt orice } x \in E.$$
Atunci A^* bine definit, $A^* \in B(F^*, E^*)$, $\|A^*\|_{B(F^*,E^*)} = \|A\|_{B(E,F)}$

dem. Fie $f \in F^*$, avem că $A^*f \in E^*$, căci $A^*f = f \circ A$
Avem că A^* este liniară. Apoi, pt $f \in F^*$, $x \in E$
$$|(A^*f)(x)| = |f(Ax)| \leq \|f\|_{F^*} \|Ax\|_F \leq \|f\|_{F^*} \|A\|_{B(E,F)} \|x\|_E$$
Rez că $\|A^*f\|_{E^*} \leq \|A\|_{B(E,F)} \cdot \|f\|_{F^*}$ pt orice $f \in F^*$
Rez că $A^* \in B(F^*, E^*)$ și $\|A^*\|_{B(F^*,E^*)} \leq \|A\|_{B(E,F)}$
(Consecința HAHN-BANACH:
pt orice $v \in F$, $v \neq 0$, există $f \in F^*$ cu $\|f\|_{F^*} = 1$, $f(v) = \|v\|$)
Fie $u \in E$ cu $Au \neq 0$. Există $f \in F^*$ cu $\|f\|_{F^*} = 1$ și $f(Au) = \|Au\|_F$
Deci $|(A^*f)(u)| = f(Au) = \|Au\|$
$$\|Au\| \leq \|A^*f\|_{E^*} \cdot \|u\|_E \leq \|A^*\|_{B(F^*,E^*)} \underbrace{\|f\|_{F^*}}_{=1} \|u\|_E$$
$$\|A\|_{B(E,F)} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|}{\|u\|} \leq \|A^*\|_{B(F^*,E^*)} \quad \text{qed}$$

DEF. (ortogonale)
Fie E sp. BANACH
- Fie $U \subseteq E$, definim $U^\perp = \{ f \in E^* : f(u) = 0 \text{ pt orice } u \in U \}$
  Avem că $U^\perp$ subspațiu închis în E^*.
- Fie $V \subseteq E^*$, definim $V^\perp = \{ u \in E : f(u) = 0 \text{ pt orice } f \in V \}$
  Avem că $V^\perp$ subspațiu închis în E.

PROP. (cheia contribuției lui SCHAUDER)
Fie E, F sp BANACH, $A \in B(E,F)$. Atunci
- $N(A^*) = R(A)^\perp$
- $N(A) = R(A^*)^\perp$

dem. Pt prima afirmație:
Fie $f \in N(A^*)$, deci $f \in F^*$ cu $A^*f = 0$, adică $f(Ax) = 0$ pt orice $x \in E$
atunci $f|_{R(A)} = 0$, adică $f \in R(A)^\perp$
Incluziunea inversă e la fel.

Pt a doua afirmație:

Fie $u \in N(A)$, adică $u \in E$, $Au = 0$

Fie $g \in R(A^*)$, $g = A^* f$ cu $f \in F^*$

Avem că $g(u) = (A^* f)(u) = f(Au) = f(0) = 0$

Rez că $u \in R(A^*)^\perp$

Avem că $N(A) \subseteq R(A^*)^\perp$.

Pp că $N(A) \subsetneq R(A^*)^\perp$, deci există $u \in R(A^*)^\perp$ cu $u \notin N(A)$, adică $Au \neq 0$

Dar F^* separă F, adică dacă $v_1, v_2 \in F$ cu $v_1 \neq v_2$, atunci există $f \in F^*$ cu $f(v_1) \neq f(v_2)$

(consecință HAHN-BANACH)

Atunci $\exists\ f \in F^*$, $\underbrace{f(Au)}_{(A^* f)(u)} \neq \underbrace{f(0)}_{0}$ ↯

PROP. (compacitatea adjunctului unui compact)

Fie E, F sp BANACH, $T \in B(E,F)$ compact

Atunci $T^* \in B(F^*, E^*)$ compact

dem. Știu că $T \in B(E,F)$ compact, adică $\overline{T(B_E[0,1])} = K$ compactă în F

Vreau că pt orice șir $(f_n) \subseteq B_{F^*}[0,1]$ să existe $(f_{n_k})_k$ subșir a.î. $(T^* f_{n_k})_k$ CAUCHY (vezi E^* BANACH).

Aplicăm Arzela-Ascoli în $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$.

Fixăm $(f_n) \in B_{F^*}[0,1]$.

Fie $(\varphi_n)_n \subseteq C(K)$ dat prin $\varphi_n(x) = f_n(x)$, pt orice $x \in K$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow \varphi_n = f_n|_K \in C(K)$

Fie $M > 0$ a.î. $\|x\|_F \leq M$, $\forall\ x \in K$ (K compactă $\Rightarrow$ mărg)

ARZELA-ASCOLI pt (φ_n):

(AA1) $\|\varphi_n\|_\infty = \max\limits_{x \in K} \underbrace{|\varphi_n(x)|}_{|f_n(x)| \leq \underbrace{\|f_n\|_{F^*}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\|x\|_F}_{\leq M}} \leq M$ pt orice $n \in \mathbb{N}$

(AA2) Fie $x, y \in K$, $n \in \mathbb{N}^*$

$|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| = |f_n(x-y)| \leq \underbrace{\|f_n\|_{F^*}}_{\leq 1} \cdot \|x-y\|_F$ ✓ (luăm $\delta_\varepsilon = \varepsilon$)

Deci există $(\varphi_{n_j})_j$ subșir CAUCHY în $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, adică

$\underbrace{\|\varphi_{n_i} - \varphi_{n_j}\|_{\infty, K}}_{\max\limits_{x \in K} |\varphi_{n_i}(x) - \varphi_{n_j}(x)|} \xrightarrow[i,j \to \infty]{} 0$

$\max\limits_{x \in K} |\varphi_{n_i}(x) - \varphi_{n_j}(x)| \geq \sup\limits_{z \in B_E[0,1]} \underbrace{|\varphi_{n_i}(Tz) - \varphi_{n_j}(Tz)|}_{\underbrace{f_{n_i}(Tz)}_{(T^* f_{n_i})(z)} - \underbrace{f_{n_j}(Tz)}_{(T^* f_{n_j})(z)}}$

$= \|T^* f_{n_i} - T^* f_{n_j}\|_{E^*}$ qed

TEOREMA (SCHAUDER - 1930)

Fie E sp BANACH, $T \in K(E)$, atunci
$R(I-T) = E \Rightarrow N(I-T) = 0$

dem. Știu că $T^* \in K(E^*)$
Apoi, $R(I_E-T)^\perp = N((I_E-T)^*) = N(I_{E^*}-T^*)$
Dar $R(I_E-T) = E$, deci $R(I-T) = E^\perp = \{0\}$
Deci $N(I_{E^*}-T^*) = \{0\}$
Cu alternativa FREDHOLM aplicată lui T^* compact avem $R(I_{E^*}-T^*) = E^*$
Dar $N(I_E-T) = R(I_{E^*}-T^*)^\perp = (E^*)^\perp = \{0\}$ qed

REZUMAT (teoria RIESZ - SCHAUDER pt op. compacți)
1918 1930

RIESZ E BANACH, $T \in K(E)$ AVEM CĂ
- $1 \in \sigma_p(T)$ SAU $1 \in \rho(T)$

SCHAUDER Dacă $1 \in \sigma_p(T)$, atunci $R(I-T) \neq E$.

— CAP.

METODE HILBERTIENE

SPAȚII pre-HILBERT

DEF. (produs scalar)
Fie X sp vectorial peste $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$)
O aplicație $(\cdot|\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ s.n. PRODUS SCALAR dacă
(a) $(x|x) \geq 0$ și $(x|x) = 0$ ddacă $x = 0$ $(x \in X)$
(b) Pt orice $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y, z \in X$, avem că
$(\alpha x + \beta y | z) = \alpha(x|z) + \beta(y|z)$
(c) Pt orice $x, y \in X$, $(x|y) = \overline{(y|x)}$

REM: Dacă $x, y, z \in X$, atunci $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$
Dacă $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$, atunci $(x|\alpha y) = \overline{\alpha}(x|y)$

NOTAȚIE: Considerăm $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$, dată prin $\|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$ $(x \in X)$

VREM SĂ ARĂTĂM CĂ E NORMĂ!

IDENTITATEA PARALELOGRAMULUI
Pt orice $x, y \in X$, avem că $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

dem. $\left(\frac{x+y}{2} \middle| \frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2} \middle| \frac{x-y}{2}\right)$

$= \frac{1}{4}(x+y | x+y) + \frac{1}{4}(x-y | x-y)$

$= \frac{1}{4}(\|x\|^2 + \|y\|^2 + (x|y) + (y|x)) + \frac{1}{4}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - (x|y) - (y|x))$

$= \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ qed

IDENTITATEA DE POLARIZARE

Fie $x, y \in X$, atunci

$$4(x|y) = \underbrace{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}_{\text{până aici peste } \mathbb{R}} + \underbrace{i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2}_{\text{până aici peste } \mathbb{C}}$$

CAUCHY - SCHWARZ

Fie $x, y \in X$, atunci $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

dem. Pp $(x|y) \neq 0$

$\dfrac{|(x|y)|}{(x|y)}$ de modul 1 $\Rightarrow$ Există $\theta \in [0, 2\pi)$ a.î. $e^{i\theta} = \dfrac{|(x|y)|}{(x|y)}$

deci $e^{i\theta}(x|y) = |(x|y)|$

Considerăm polinomul in $t \in \mathbb{R}$

$$P(t) = (x + te^{-i\theta}y \mid x + te^{-i\theta}y) = \|x + te^{-i\theta}y\|^2$$

$$\underset{\text{din def}}{0 \leq} P(t) = \|x\|^2 + t\underbrace{e^{i\theta}(x|y)}_{|(x|y)|} + t\underbrace{e^{-i\theta}(y|x)}_{|(x|y)|} + t^2\|y\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Dar $\overline{e^{-i\theta}(y|x)} = e^{i\theta}(x|y) = |(x|y)| \geq 0$

$$\Rightarrow 0 \leq P(t) = \|x\|^2 + 2t|(x|y)| + t^2\|y\|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Delta = 4|(x|y)|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \quad \text{adică C-S qed}$$

22.04.2024 - CURS 9 ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

Recapitulare

$(X, (\cdot|\cdot))$ pre-HILBERT, $\|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$

► CAUCHY-SCHWARZ:

dacă $x, y \in X$, atunci

$|(x|y)| \le \|x\| \|y\|$, pt orice $x, y \in X$

► $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$

- $\|0\| = 0$, $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = (\alpha x | \alpha x)^{\frac{1}{2}}$
  $= (\alpha \bar{\alpha} (x|x))^{\frac{1}{2}}$
  $= |\alpha| \cdot \|x\|$

PROP. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, pt orice $x, y \in X$

dem. Fie $x, y \in X$, apoi

$$\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = \underbrace{\|x\|^2 + (x|y) + \underbrace{(y|x)}_{\overline{(x|y)}}}_{} + \|y\|^2$$

$$2\,\mathrm{Re}(x|y) \le 2|(x|y)| \overset{C-S}{\le} 2\|x\| \cdot \|y\|$$

$$\le (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \blacksquare$$

CONCLUZIE $x \mapsto \|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$ e normă pe X $\rightsquigarrow$ pre HILBERT $\Rightarrow$ NORMAT

PITAGORA. Fie $x, y \in X$ cu $(x|y) = 0$, atunci $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

dem $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}(x|y)}_{=0} + \|y\|^2 \quad \blacksquare$

DEF. (sistem ortonormat)

$(X, (\cdot|\cdot))$ pre-HILBERT, fie $(e_i)_{i \in J}$

$(e_i)_{i \in J}$ e sistem ortonormat dacă $\begin{cases} \cdot\ \|e_i\| = 1, & \forall i \in J \\ \cdot\ (e_i|e_j) = 0, & \forall i, j \in J \text{ cu } i \ne j \end{cases}$

PROP. (ineg BESSEL)

Fie $(X, (\cdot|\cdot))$ pre-HILBERT, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un sistem ortonormat. Atunci

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2 \le \|x\|^2, \text{ pt orice } x \in X$$

dem. Pt fiecare $k \in \mathbb{N}^*$, $y_k = \sum_{j=1}^{k} (x|e_j) e_j$

Atunci $(x - y_k | y_k) = 0$

$(x - y_k | y_k)$ = calcul cu dezvoltarea produsului și lui y_k

Cu PITAGORA avem că $\|x\|^2 = \|x - y_k\|^2 + \|y_k\|^2$

$$\ge \|y_k\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{k} |(x|e_j)|^2 \underbrace{\|e_j\|^2}_{1} \xrightarrow{k \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} |(x|e_j)|^2 \quad \blacksquare$$

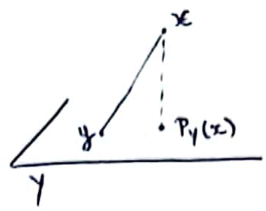
PITAGORA

REMARCĂ (Consecință)

Fie $(e_1, \dots, e_n)$ sistem ortonormat în X. Fie $Y = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$

Pt orice $x \in X$, avem că

$$\| x - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (x|e_j) e_j}_{P_Y(x)} \| \le \| x - y \|, \text{ pt orice } y \in Y.$$



dem. $y \in Y$, $y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, α_j-urile $\in \mathbb{K}$

$$\left.\begin{array}{l} a = x - \sum_{j=1}^{n} (x|e_j) e_j \\ b = \sum_{j=1}^{n} ((x|e_j) - \alpha_j) e_j \end{array}\right\} \Rightarrow (a|b) = 0$$

(pt că $(a|e_j) = 0$, $\forall j = \overline{1,n}$)

Deci $\underbrace{\| x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \|^2}_{\|x-y\|^2} = \| a+b \|^2 \overset{\text{PITAGORA}}{=} \|a\|^2 + \|b\|^2 \ge \|a\|^2 = \| x - \sum_{j=1}^{n} (x|e_j) e_j \|^2$ ∎

DEF. (bază HILBERT)

Fie $(X, (\cdot|\cdot))$ pre-HILBERT, $(e_i)_{i\in J}$ (sistem ortonormat)

$(e_i)_{i\in J}$ este bază HILBERT dacă:

- $(e_i)_{i\in J}$ sistem ortonormat
- $\overline{\text{span}(e_i)_{i\in J}} = X$.

TEOREMĂ (PARSEVAL, serii FOURIER abstracte)

Fie X pre-HILBERT, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bază HILBERT în X, $x \in X$ fixat. Atunci:

- $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n) e_n$ (serie FOURIER relativ la $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$)
- $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(x|e_j)|^2$

dem. Fie $\varepsilon > 0$ fixat, fie $x \in X$

există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, există $x_{n_\varepsilon} \in \text{span}(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a.î. $\| x - \underbrace{x_{n_\varepsilon}}_{\sum_{j=1}^{n_\varepsilon} \alpha_j e_j} \| \le \varepsilon$

Dacă $n \ge n_\varepsilon$, atunci pot scrie

$$\| x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \| \le \varepsilon \quad (\text{luăm } \alpha_{n_\varepsilon+1} = \dots = \alpha_n = 0)$$

! din REMARCĂ

$$\ge \| x - \sum_{j=1}^{n} (x|e_j) e_j \| \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (x|e_j) e_j$$

PARSEVAL: $\|x\|^2 = \| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (x|e_j) e_j \|^2$

$\|\cdot\|^2$ continuă

$$= \lim_{n\to\infty} \| \sum_{j=1}^{n} (x|e_j) e_j \|^2 \overset{\text{PITAGORA}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |(x|e_j)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2$$ ∎

PROP (GRAM-SCHMIDT)

Fie X pre-HILBERT, sunt echivalente:

(1) X separabil

(2) X admite bază HILBERT (cel mult) numărabilă

DEF. X pre-HILBERT

Spunem că X este HILBERT dacă $(X, \|\cdot\|)$ este BANACH.
↳ norma generată de $(\cdot|\cdot)$

TEOREMĂ (RIESZ-FISCHER)

Fie X sp HILBERT, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sistem ortonormat, $(\alpha_n) \subseteq \mathbb{K}$; UASE:

- $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ e convergentă

În acest caz, $\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$

dem. Pt $n\in\mathbb{N}^*$, luăm $s_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$

Deoarece X complet, avem că

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ convergentă în X, dacă și numai dacă, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CAUCHY

Fie $n, m \in \mathbb{N}^*$, $n<m$. Atunci

$$\|s_n - s_m\|^2 = \|\sum_{j=n+1}^{m} \alpha_j e_j\|^2 \overset{\text{PITAGORA}}{=} \sum_{j=n+1}^{m} |\alpha_j|^2$$

Deoarece $\mathbb{R}$ este complet,

$$(s_n)_n \text{ CAUCHY} \iff \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2\right)_n \text{ CAUCHY} \iff \left(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2\right)_n \text{ convergent}$$

Restul, analog cu dem la PARSEVAL.

TEOREMĂ (proiecția pe un convex închis)

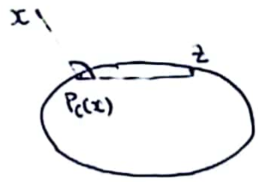
DEF. X sp vectorial$/\mathbb{K}$, $C \subseteq X$

C este $\boxed{\text{convexă}}$ dacă pt orice $x, y \in C$, avem că $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$.

Fie X HILBERT, C submulțime nevidă, convexă, închisă în X, $x \in X$.

- Atunci, $\exists!\ P_C(x) \in C$ a.î. $\|x - P_C(x)\| = \operatorname{dist}(x, C) = \inf_{z\in C} \|x - z\|$
- Caracterizare $P_C(x)$ pt $x \in X$ fixat:

$\boxed{P_C(x)}$ este unicul $y \in C$ a.î. $\boxed{\operatorname{Re}(x-y\,|\,z-y) \le 0,\ \forall z \in C}$
(ineg variațională)



- În plus, $\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \le \|x_1 - x_2\|$, $\forall x_1, x_2 \in X$

CONSECINȚĂ (proiecția pe un subspațiu închis)

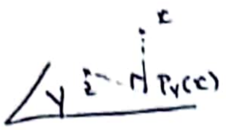
Fie X sp HILBERT, Y subspațiu închis în X, $x \in X$.

Atunci $\exists!\ P_Y(x) \in Y$ a.î. $\|x - P_Y(x)\| = \operatorname{dist}(x, Y) = \inf_{y\in Y} \|x-y\|$

Apoi $P_Y : X \to X$ este liniar și continuu, $P_Y \in \mathcal{B}(X)$, cu $\|P_Y\|_{\mathcal{B}(X)} = 1$, $P_Y^2 = P_Y$

- <u>Caracterizare $P_Y(x)$ pt $x \in X$ fixat:</u>

$P_Y(x)$ este unicul $\hat{y} \in Y$ cu prop că $(x - \cancel{P_Y(x)}\,\hat{y} \mid z) = 0$ pt orice $z \in Y$.



29.04.2024 - CURS 10 ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

TEOREMĂ (proiecția pe un convex închis)

Fie H un spațiu HILBERT peste $\mathbb{K}$, C convexă închisă în H.
Fie $x \in H$. Atunci există și este unic $P_C(x) \in C$ a.î. $\|x - P_C(x)\| = \inf_{z \in C} \|x - z\| = dist(x, C)$.

În plus, $P_C(x)$ este unica soluție a inegalității variaționale:
găsiți $y \in C$ a.î. $Re(x - y \mid z - y) \le 0$, pt orice $z \in C$.

În fine, $P_C : H \to C \subseteq H$ este nonexpansiv, adică $\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \le \|x_1 - x_2\|$, pt orice $x_1, x_2 \in H$

existența
dem. Din definiția $dist(x, C)$, există $(x_n) \subseteq C$ a.î. ~~$\|x - x_n\|^2 \le$~~

(*) $dist(x,C)^2 \le \|x - x_n\|^2 \le dist(x,C)^2 + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

Arătăm că (x_n) e CAUCHY.

IDENTITATEA PARALELOGRAMULUI: $\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{a-b}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|b\|^2)$ $a, b \in H$

$a = x - x_n$
$b = x - x_m$ $n, m \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$ $\underbrace{\Big\|x - \underbrace{\tfrac{x_n + x_m}{2}}_{\in C}\Big\|^2}_{\ge dist(x,C)^2} + \left\|\frac{x_m - x_n}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x - x_m\|^2 + \|x - x_n\|^2)$

$\le \frac{1}{2}\left(2 dist(x,C)^2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\|x_m - x_n\|^2 \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$, deci (x_n) CAUCHY; H HILBERT, deci complet $\Big\} \Rightarrow (x_n)$ conv

$\Rightarrow \exists\, P_C(x) \in H$ cu $\|P_C(x) - x_n\| \to 0$
Dar $(x_n) \subseteq C$ închisă, deci $P_C(x) \in C$
În (*) facem $n \to \infty$ $\Rightarrow \|x - P_C(x)\| = dist(x, C)$

unicitatea lui $P_C(x)$ Pp că $\exists\, y_1, y_2 \in C$ a.î. $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = dist(x, C)$
Luăm șirul: $y_1, y_2, y_1, y_2, \ldots \to$ e șir minimizant, precum (x_n) în (*)
Deci, ca mai sus, acest și e Cauchy $\Rightarrow$ conv $\Rightarrow y_1 = y_2$.

Notăm $y = P_C(x)$
Știm că $\|x - y\| \le \|x - z\|$, $\forall z \in C$
Pt orice $z \in C$, avem că
$(1-t)y + tz \in C$, $\forall t \in [0,1]$ $\Rightarrow$ pt orice $z \in C$ fixat, avem că

$$\|x - y\|^2 \le \|x - ((1-t)y + tz)\|^2$$
$$= \|(x - y) - t(z - y)\|^2$$
$$= \|x - y\|^2 + t^2\|z - y\|^2 - t\underbrace{(z - y \mid x - y)}_{\overline{(x - y \mid z - y)}} - t(x - y \mid z - y)$$
$$= \|x - y\|^2 + t^2\|z - y\|^2 - 2t\,Re(x - y \mid z - y)$$

$\Rightarrow 2t\,Re(x - y \mid z - y) \le t^2\|z - y\|^2$

$\Leftrightarrow 2Re(x - y \mid z - y) \le t\|z - y\|^2$, $\forall t \in (0,1]$

Acum facem $t \to 0$ și obținem $Re(x - y \mid z - y) \le 0$.

Pp că $y_1, y_2 \in C$ cu $Re(x-y_1 | z-y_1) \le 0$ $\quad \forall z \in C$
$Re(x-y_2 | z-y_2) \le 0$

$$\left.\begin{array}{l} \to Re(x-y_1 | y_2-y_1) \le 0 \\ Re(x-y_2 | y_1-y_2) \le 0 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} 0 \ge Re\big((x-y_1 | y_2-y_1) + \underbrace{(x-y_2 | y_1-y_2)}_{=(y_2-x | y_2-y_1)}\big)$$

$$= Re \|y_2-y_1\|^2 = \|y_2-y_1\|^2$$

deci $y_1 = y_2$

P_C nonexpansiv, i.e. pt orice $x_1, x_2 \in H$, $\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \le \|x_1 - x_2\|$

Știm că $Re(x_i - P_C(x_i) | z - P_C(x_i)) \le 0$, $\forall z \in C$ $\rightsquigarrow \begin{cases} Re(x_1 - P_C(x_1) | P_C(x_2) - P_C(x_1)) \le 0 \\ Re(x_2 - P_C(x_2) | P_C(x_1) - P_C(x_2)) \le 0 \end{cases}$

Avem că

$$\|P_C(x_1) - P_C(x_2)\|^2 \le \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\|^2 - Re(x_1 - P_C(x_1) | P_C(x_2) - P_C(x_1)) - Re(x_2 - P_C(x_2) | P_C(x_1) - P_C(x_2))$$

$$= Re(x_1 - x_2 | P_C(x_1) - P_C(x_2))$$

$$\le |(x_1 - x_2 | P_C(x_1) - P_C(x_2))|$$

$$\overset{C-S}{\le} \|x_1 - x_2\| \cdot \|P_C(x_1) - P_C(x_2)\| \quad \blacksquare$$

TEOREMA PROIECȚIEI

Fie H spațiu HILBERT, fie Y subspațiu închis în H. Pentru orice $x \in H$, există și este unic $P_Y(x) \in Y$ a.î. $\|x - P_Y(x)\| \le \|x - z\|$, $\forall z \in Y$

Apoi, $P_Y(x)$ este unicul element din Y cu prop că $(x - P_Y(x) | y) = 0$, $\forall y \in Y$

În plus, $P_Y \in \mathcal{B}(H)$, $P_Y^2 = P_Y$, $\|P_Y\|_{\mathcal{B}(H)} = 1$.

dem. Y în particular e convex închis $\Rightarrow$ prima parte e dem din th. anterioară.

Apoi, știm că

$Re(x - P_Y(x) | z - P_Y(x)) \le 0$, $\forall z \in Y$

Fie $y \in Y$, $y = \underbrace{y + P_Y(x)}_{z \in Y \text{ căci } Y \text{ subsp}} - P_Y(x)$ $\quad \to Re(x - P_Y(x) | y) \le 0$, $\forall y \in Y$

Dacă $y \in Y$, atunci $-y \in Y \Rightarrow Re(x - P_Y(x) | y) = 0$

Dacă $y \in Y$, atunci $iy \in Y \Rightarrow 0 = Re(x - P_Y(x) | iy) = Re(-i(x - P_Y(x) | y))$
$= Im(x - P_Y(x) | y)$

P_Y liniar

Fie $x_1, x_2 \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$(\alpha x_1 + \beta x_2 - \underline{P_Y(\alpha x_1 + \beta x_2)} | y) = 0$, $\forall y \in Y$

$$\left.\begin{array}{l} (x_1 - P_Y(x_1) | y) = 0 \\ (x_2 - P_Y(x_2) | y) = 0 \end{array} \quad \forall y \in Y \right\} \Rightarrow (\alpha x_1 + \beta x_2 - (\underline{\alpha P_Y(x_1) + \beta P_Y(x_2)}) | y) = 0, \forall y \in Y$$

$\Rightarrow$ din unicitate, $P_Y(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha P_Y(x_1) + \beta P_Y(x_2)$

cont din nonexpansivitate

$x \in Y$, $P_Y(x) = x \Rightarrow P_Y^2 = P_Y$ și $\|P_Y\| = 1$

ORTOGONALITATE

H spațiu HILBERT peste $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$

DEF. Fie $A \subseteq H$, definim $A^{\perp} = \{x \in H : \underbrace{(x|y) = 0}_{x \perp y} \text{ pt orice } y \in A\}$

- $A^{\perp}$ subspațiu închis în H
- $\{0\}^{\perp} = H$; $H^{\perp} = \{0\}$
- dacă $A \subseteq B \subseteq H$, atunci $B^{\perp} \subseteq A^{\perp} \subseteq H$.
- $A^{\perp} = \overline{\text{span}(A)}^{\perp}$

REMARCĂ.

Y subspațiu închis în H

▶ dacă $x \in H$, atunci $P_Y(x)$ este unicul elem a.î. $P_Y(x) \in Y$ și $(x - P_Y(x) | y) = 0$, $\forall y \in Y$

sau echivalent cu $\begin{cases} P_Y(x) \in Y \\ x - P_Y(x) \in Y^{\perp} \end{cases}$

TEOREMA DE DESCOMPUNERE ORTOGONALĂ

Fie H spațiu HILBERT, Y subspațiu închis

Dacă $x \in H$, atunci $\exists!$ $x_1 \in Y$ și $x_2 \in Y^{\perp}$ a.î. $\boxed{x = x_1 + x_2 \quad \begin{cases} x_1 = P_Y(x) \\ x_2 = x - P_Y(x) \end{cases}}$ existența

dem. unicitatea rez imd din $Y \cap Y^{\perp} = \{0\}$

$$\left.x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2' \Rightarrow \underbrace{x_1 - x_1'}_{\in Y} = \underbrace{x_2' - x_2}_{\in Y^{\perp}}\right\} \Rightarrow x_1 = x_1' \text{ și } x_2 = x_2' \quad \blacksquare$$

PROP. Fie H sp HILBERT

(a) Dacă Y subsp închis, atunci $Y^{\perp\perp} = Y$

(b) Dacă $A \subseteq H$, atunci $A^{\perp\perp} = \overline{\text{span}(A)}$

(c) Pt $A \subseteq H$, $\overline{\text{span}(A)} = H \iff A^{\perp} = \{0\}$

dem. (a) Avem $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$

Fie $x \in Y^{\perp\perp}$. Avem $x = \underset{Y}{\underset{\cap}{x_1}} + \underset{Y^{\perp}}{\underset{\cap}{x_2}}$ $\Rightarrow$ $\left.\underbrace{x - x_1}_{\in Y^{\perp\perp}} = x_2 \in Y^{\perp}\right\} \Rightarrow x_2 \in Y^{\perp} \cap Y^{\perp\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow x_2 = 0$

$\Rightarrow x = x_1 \in Y$

$\Rightarrow Y^{\perp\perp} \subseteq Y$

(b) $A^{\perp} = \overline{\text{span}(A)}^{\perp} \;\Big|^{\perp} \Rightarrow A^{\perp\perp} = \overline{\text{span}(A)}^{\perp\perp} \overset{(a)}{=} \overline{\text{span}(A)}$

(c) „$\Leftarrow$" $A^{\perp} = \{0\} \;\Big|^{\perp} \Rightarrow \underset{\overline{\text{span}(A)}}{\underset{\| (b)}{A^{\perp\perp}}} = \{0\}^{\perp} = H$

„$\Rightarrow$" $\left.\begin{array}{c}\overline{\text{span}(A)} = H \\ \| (b) \\ A^{\perp\perp}\end{array}\right\} \Rightarrow A^{\perp\perp} = H \;\Big|^{\perp}$

$\Rightarrow (A^{\perp})^{\perp\perp} = H^{\perp} = \{0\}$

$\left.\begin{array}{l} A^{\perp} = \overline{\text{span}(A)}^{\perp} \text{ subsp închis} \\ \overset{(a)}{\Rightarrow} \underset{A^{\perp\perp\perp}}{\underset{\|}{(A^{\perp})^{\perp\perp}}} = A^{\perp} \end{array}\right\} \Rightarrow A^{\perp} = \{0\}$

13.05.2024 - CURS 11 ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

RECAPITULARE

(a) TEOREMA DE DESCOMPUNERE ORTOGONALĂ

Fie H sp HILBERT și Y subspațiu închis în H. Atunci $\boxed{H = Y \oplus Y^{\perp}}$, adică pt orice $x \in H$, avem în mod unic $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in Y$, $x_2 \in Y^{\perp}$.

(b) Luăm A submulțime în HILBERTUL H.

$H = \overline{span(A)} \oplus \underbrace{\overline{span(A)}^{\perp}}_{A^{\perp}}$

(c) Despre baze HILBERT: $(e_n)_n$ un sistem ortonormat în H

· $(e_n)_n$ de mai sus e bază HILBERT dacă - prin def - $\overline{span(e_n)_n} = H$

$\Updownarrow$

· $\{e_n : n \in \mathbb{N}^*\}^{\perp} = \{0\}$

sau, detaliat, $(f|e_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f = 0$ $(f \in H)$

TEOREMA LUI RIESZ privind dualul unui spațiu HILBERT

Introducere: Fie H HILBERT, $x \in H$, definim $f_x : H \to \mathbb{C}$ dată prin
$f_x(y) = (y|x)$ $(y \in H)$

Avem f_x liniară pt că $(\cdot|\cdot)$ liniar în primul arg.

Pt cont, fie $y \in H$: $|f_x(y)| = |(y|x)| \overset{C-S}{\leq} \|y\| \cdot \|x\|$

deci $\|f_x\|_{H^*} \leq \|x\|$. Dar luăm $y = x$ și $\|f_x\|_{H^*} = \|x\|_H \Rightarrow f_x \in H^*$ și $\|f_x\|_{H^*} = \|x\|_H$

TEOREMĂ RIESZ

Fie H HILBERT, $f \in H^*$. Atunci $\exists!\, x \in H$ cu $f = f_x$, adică $f(y) = (y|x)$, $\forall y \in H$.

dem. Teorema este clară pt $f = 0_{H^*}$: $f = f_{0_H}$

Pp că $f \neq 0$, adică $\ker f \neq H$ ($\ker f$ subsp închis)

Apoi, cu th de descompunere ortogonală: $H = \ker f \oplus (\ker f)^{\perp}$

Rez că $(\ker f)^{\perp} \neq \{0\}$

Fie $\tilde{b} \in (\ker f)^{\perp} \setminus \{0\} \Rightarrow f(\tilde{b}) \neq 0$

Luăm $b_1 = \frac{1}{f(\tilde{b})} \tilde{b} \in (\ker f)^{\perp}$ și $f(b_1) = 1$ $(b_1 \neq 0)$

Fie $y \in H$, $y - f(y) b_1 \in \ker f$

Apoi $(y|b_1) = \underbrace{(\underbrace{y - f(y) b_1}_{\in \ker f} | \underbrace{b_1}_{\in (\ker f)^{\perp}})}_{=0} + (f(y) b_1 | b_1) = f(y) \|b_1\|^2$

$\Rightarrow f(y) = (y | \underbrace{\frac{b_1}{\|b_1\|^2}}_{= x \text{ (cel căutat)}})$, $\forall y \in H$ → avem existența

unicitatea: $(y|x_1) = (y|x_2)$ $\forall y \in H$

$\Rightarrow (y | x_1 - x_2) = 0, \forall y \in H \xrightarrow[y = x_1 - x_2]{} \|x_1 - x_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

DUALITATE ÎN SPAȚII HILBERT

TEOREMĂ (adjunctul)

Fie H HILBERT, $T \in B(H)$. Atunci $\exists!\ T^* \in B(H)$ a.î. $(Tx|y) = (x|T^*y)$, $\forall x, y \in H$

dem. Existența: Fie $y \in H$ și construim $T^*y \in H$

Luăm $f^y : H \to \mathbb{C}$, $f^y(x) = (Tx|y)$

Avem f^y liniară

Fie $x \in H$, $|f^y(x)| = |(Tx|y)| \overset{C-S}{\leq} \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \underbrace{\|T\|_{op}\|y\|}\cdot\|x\|$

Deci $f^y \in H^*$, $\|f^y\| \leq \|T\|\|y\|$

Cu RIESZ, $\exists!\ T^*y \in H$ a.î. $\underbrace{f^y(x)}_{(Tx|y)} = (x|T^*y)$, $\forall x \in H$

Am construit $H \ni y \longmapsto T^*y \in H$

T^* liniară: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $y_1, y_2 \in H$

Analizăm $T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$: este unicul din H a.î.

$$\begin{aligned}(x|T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) &= (Tx|\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)\\ &= \overline{\alpha_1}(Tx|y_1) + \overline{\alpha_2}(Tx|y_2)\\ &= \overline{\alpha_1}(x|T^*y_1) + \overline{\alpha_2}(x|T^*y_2)\\ &= (x|\alpha_1 T^*y_1 + \alpha_2 T^*y_2),\ \forall x \in H\end{aligned}$$

$\Rightarrow T^*(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 T^*y_1 + \alpha_2 T^*y_2 \to$ avem liniaritatea

T^* continuă: Avem că $\|f^y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$

f^y reprezentată via RIESZ, deci $\|f^y\| = \|T^*y\|$

$\Rightarrow \|T^*y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$, $\forall y \in H \Rightarrow T^* \in B(H)$ cu $\boxed{\|T^*\| \leq \|T\|}$ ∎

OPERAȚIE FUNDAMENTALĂ pe $B(H)$: ($B(H)$ alg Banach, C^*-alg)

$B(H) \ni T \longmapsto T^* \in B(H)$

sp Banach + compunerea e cont care e pe post de înmulțire

în $\mathbb{C}$ $\bar{z}$ aici T^*

PROP. (proprietățile adjunctului)

Fie H sp Hilbert, $T, S \in B(H)$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Avem că:

(i) $(T^*)^* = T$ și $\|T^*\| = \|T\|$

(ii) $(TS)^* = S^*T^*$

(iii) $(T+S)^* = T^* + S^*$, $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$

(iv) $(\operatorname{Im} T)^\perp = \operatorname{Ker} T^*$

(v) $\|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2$

dem. (i) Pt orice $x, y \in H$, $(Tx|y) = (x|T^*y)$ $\xrightarrow{\text{conjugăm și schimbăm notația}}$ sau $(T^*x|y) = (x|Ty)$

$\| \ \exists!\ (T^*)^* \in B(H)$, deci $T = (T^*)^*$

$(x|(T^*)^*y)$

Știm $\|T^*\| \leq \|T\|$

apoi $\|\underbrace{(T^*)^*}_{T}\| \leq \|T^*\|$ $\Big\} \Rightarrow \|T^*\| = \|T\|$

(ii) Fie $x, y \in H$

$$\left.\begin{array}{l}((TS)x \mid y) = (x \mid (TS)^* y) \\ \hookrightarrow = (T(Sx) \mid y) = (Sx \mid T^* y) = (x \mid \underbrace{S^* T^*}_{\in \mathcal{B}(H)} y)\end{array}\right\} \Rightarrow (TS)^* = S^* T^*$$

(iii) la fel ca (ii)

(iv) Fie $y \in (\operatorname{Im} T)^{\perp}$

$\Rightarrow \underbrace{(Tx \mid y)}_{} = 0, \ \forall x \in H$

$= (x \mid T^* y) \iff T^* y = 0 \iff y \in \operatorname{Ker} T^*$

(v) Fie $x \in H$

$\|Tx\|^2 = (Tx \mid Tx) = (x \mid T^* T x) \overset{C-S}{\leq} \|x\| \cdot \|(T^* T) x\| \leq \|x\|^2 \|T^* T\|$

$\Rightarrow \|Tx\| \leq \|T^* T\|^{\frac{1}{2}} \|x\|, \ \forall x \in H \Rightarrow \|T\| \leq \|T^* T\|^{\frac{1}{2}} \iff \|T\|^2 \leq \|T^* T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2$

Paranteză: X BANACH (doar normat)

$A, B \in \mathcal{B}(X)$, atunci $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

$\Rightarrow \|T^* T\| = \|T\|^2$

Apoi $\underbrace{\|T^*\|^2}_{} = \|\underbrace{(T^*)^*}_{} T^*\| \quad (T \mapsto T^*)$

$\|T\|^2 = \|T T^*\|$

CLASE DE OPERATORI VIA "*":

- AUTOADJUNCȚI adică $T \in \mathcal{B}(H)$ cu $T = T^*$
- NORMALI adică $T \in \mathcal{B}(H)$ cu $TT^* = T^* T$

Convergență slabă în spații HILBERT

DEF. Fie H HILBERT, (u_n) din H, $u \in H$

Spunem că $(u_n)_n$ CONVERGE SLAB la u și scriem $u_n \rightharpoonup u$, dacă $f_{u_n} \to f_u$ pe H^*, adică $\forall x \in H$: $\underbrace{f_{u_n}(x)}_{(x \mid u_n)} \to \underbrace{f_u(x)}_{(x \mid u)}$

BANACH-STEINHAUS în spații HILBERT

Fie H HILBERT, (u_n) din H ce converge slab la $u \in H$. Atunci (u_n) mărg în H.

dem. $f_{u_n} \to f_u$ în H^*

Cu B-S rez că $(\underbrace{\|f_{u_n}\|}_{\|u_n\|})$ mărg.

BANACH-ALAOGLU în spații HILBERT

20.05.2024 - CURS 12 ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

TEOREMA BANACH-ALAOGLU ÎN SPAȚII HILBERT

BANACH-ALAOGLU (spații BANACH)
Fie X spațiu normat SEPARABIL, (f_n) șir din X^* cu $(\|f_n\|_{X^*})_n$ șir mărg.
Atunci există $(f_{n_k})_k$ subșir, $f \in X^*$ a.î. $f_{n_k} \to f$, adică $f_{n_k}(x) \to f(x)$, $\forall x \in X$

LEMĂ
Fie H sp HILBERT SEPARABIL, $(u_n)_n$ mărg în H. Atunci există $(u_{n_k})_k$ subșir (u_n), $u \in H$ a.î. $u_{n_k} \rightharpoonup u$ adică $f_{u_{n_k}} \rightharpoonup f_u$
adică $(u_{n_k}|v) \to (u|v)$, $\forall v \in H$

dem lemă. Avem că $\|u_n\| = \|f_{u_n}\|$ $(n \in \mathbb{N})$
Deci $(\|f_{u_n}\|)_n$ mărg în $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ BANACH-ALAOGLU implică existența unui $f \in H^*$ și a unui subșir (u_{n_k}) cu $f_{u_{n_k}} \rightharpoonup f$ sau $(u_{n_k}|v) \to f(v)$, $\forall v \in H$
Cu RIESZ, există și e unic $u \in H$ a.î. $f = f_u$
deci $u_{n_k} \rightharpoonup u$. ∎

TEOREMĂ
Pt H HILBERT în lema de mai sus putem renunța la "SEPARABIL".

dem. Fie (u_n) șir din H, $(\|u_n\|)$ mărg în $\mathbb{R}$.
$Y = \overline{\text{span}(u_n)}$, Y HILBERT (închis în HILBERT = HILBERT)
SEPARABIL
$\Rightarrow$ Aplicăm lema în Y, există (u_{n_k}) subșir (u_n), $u \in Y$ a.î. $u_{n_k} \rightharpoonup u$ în Y, adică $(u_{n_k}|y) \to (u|y)$, $\forall y \in Y$.
Scriem cu TEOREMA DE DESCOMPUNERE OTROGONALĂ: $H = Y \oplus Y^\perp$
Fie $v \in H$, $v = v_1 + v_2$ cu $v_1 \in Y$, $v_2 \in Y^\perp$

$$(u_{n_k}|v) = (u_{n_k}|v_1+v_2) = \underbrace{(\underset{Y}{u_{n_k}}|v_1) + (u_{n_k}|\underset{Y^\perp}{v_2})}_{=0} = (u_{n_k}|\underset{Y}{v_1}) \to (u|v_1) = (u|v)$$ ∎

! **BANACH-ALAOGLU**
Orice șir mărginit într-un spațiu HILBERT admite un subșir slab convergent

---

DIAGONALIZAREA OPERATORILOR AUTOADJUNCȚI COMPACȚI

H spațiu HILBERT peste $\mathbb{R}$. (ni putem lua normali, putem lucra și peste $\mathbb{C}$)

REMARCĂ: (i) Fie H pre-HILBERT, fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ sistem ortonormat.
Atunci $\text{span}(e_1, \dots, e_n)$ e închis în H.
Într-adevăr: • pt orice $u \in H$, $\|u - \sum_{j=1}^n (u|e_j) e_j\| \le \|u - v\|$, $\forall v \in \text{span}(e_1, \dots, e_n)$
• luăm $P: H \to H$, $Pu = \sum_{j=1}^n (u|e_j) e_j$ $(u \in H)$
P liniar, apoi $\forall u \in H$, $\|Pu\|^2 = \|\sum_{j=1}^n (u|e_j) e_j\|^2 \overset{\text{BESSEL}}{\le} \|u\|^2$, deci P cont
• $R(P) \subseteq \text{span}(e_1, \dots, e_n)$
• $u \in \text{span}(e_1, \dots, e_n) \Leftrightarrow u = Pu$
• $(u_k)_k \subseteq \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ cu $\left.\begin{array}{l} u_k \to u \\ P \text{ cont} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{Pu_k}_{u_k} \to Pu \Rightarrow Pu = u$
$\to u \in \text{span}(e_1, \dots, e_n)$
deci $\text{span}(e_1, \dots, e_n)$ închis. ∎

(ii) Fie $A \in \mathcal{B}(H)$, A autoadjunct
Fie λ, μ val proprii pt A, $\lambda \neq \mu$ nenule
↑ vezi DEF. le consider val proprii doar pe cele reale

Atunci ($\lambda \in \mathbb{R}$, apoi) $\ker(\lambda I - A) \perp \ker(\mu I - A)$
adică $\forall v \in \ker(\lambda I - A)$, $w \in \ker(\mu I - A)$ avem că $(v|w) = 0$

Într-adevăr: $Av = \lambda v$

$Aw = \mu w$

$(v|w) = \frac{1}{\lambda}(\lambda v|w) = \frac{1}{\lambda}(Av|w) \overset{A=A^*}{=} \frac{1}{\lambda}(v|\underbrace{Aw}_{\mu w}) = \underbrace{\frac{\mu}{\lambda}}_{\neq 0, \neq 1}(v|w) \Rightarrow (v|w) = 0$

DEF. $\lambda \in \mathbb{R}$ s.n. valoare proprie pt A dacă $\operatorname{Ker}(\lambda I - A) \neq \{0\}$

(iii) $A \in \mathcal{B}(H)$, A autoadjunct
Y subsp închis cu $A(Y) \subseteq Y$ $\Big\}$ Atunci $A(Y^\perp) \subseteq Y^\perp$

Fie $u \in Y^\perp$ deci $(u|y) = 0$, $\forall y \in Y$

Atunci, $\forall y \in Y$

$(Au|y) \underset{A=A^*}{=} (u|\underset{\in Y}{Ay}) = 0$

(iv) Fie $A \in \mathcal{B}(H)$, atunci $\boxed{\|A\| = \overbrace{\sup_{\substack{u,v \in H \\ \|u\|=\|v\|=1}} |(Au|v)|}^{\text{not} = \alpha}}$!

Fie $u, v \in H$, $\|u\| = \|v\| = 1$

$|(Au|v)| \overset{C-S}{\leq} \|Au\| \cdot \|v\| \leq \|A\| \cdot \|u\| \cdot \|v\| = \|A\|$

trecând la sup după u, v, avem că $\alpha \leq \|A\|$

Fie $u \in H$, $\|u\| = 1$, $\|Au\| \neq 0$, luăm $v := \frac{Au}{\|Au\|} \Rightarrow \|v\| = 1 \Rightarrow |(Au|v)| = \|Au\|$

deci $\alpha \geq \|Au\|$

trecem la sup după u ca mai sus, $\alpha \geq \|A\|$.

PROP. $A \in \mathcal{B}(H)$, A autoadjunct
Atunci $\|A\| = \sup_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} |(Au|u)| =: \beta$

dem. Știm că $\|A\| = \alpha \geq \beta$ (din (iv)). Vrem $\beta \geq \alpha = \|A\|$

Apoi: $\forall v \in H$ avem că $|(Av|v)| \leq \beta \|v\|^2$

Fie $u, v \in H$, $\|u\| = 1 = \|v\|$

$(A(u+v)|u+v) - (A(u-v)|u-v) =$

$= (Au|u) + (Au|v) + (Av|u) + (Av|v) - (Au|u) + (Au|v) + (Av|u) + (Av|v)$

$\overset{A=A^*}{=} 4(Au|v)$ deci $|(Au|v)| \leq \frac{1}{4}\Big(\underbrace{|(A(u+v)|u+v)|}_{\leq \beta\|u+v\|^2} + \underbrace{|A(u-v)|u-v|}_{\leq \beta\|u-v\|^2}\Big)$

$\leq \frac{\beta}{4}(2\|u\|^2 + 2\|v\|^2) = \beta$

Acum trecem la sup după u, v ca mai sus și obținem $\alpha \leq \beta$. ∎

COROLAR. Fie $A \in \mathcal{B}(H)$, A autoadjunct nenul, atunci există $\lambda_1 \in \{-\|A\|, \|A\|\}$ și există (u_n) șir din H cu $\|u_n\| = 1$ și $\|Au_n - \lambda_1 u_n\| \to 0$

dem. Fie (u_n) din H cu $\|u_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și $|(Au_n|u_n)| \longrightarrow \|A\|$ (există din prop)

Trecând eventual la un subșir, putem pp că $(Au_n|u_n) \longrightarrow \lambda_1$ cu $|\lambda_1| = \|A\|$

Analizăm $\|Au_n - \lambda_1 u_n\|^2 = (Au_n - \lambda_1 u_n | Au_n - \lambda_1 u_n)$

$= \underbrace{\|Au_n\|^2}_{\leq \|A\|^2 = \lambda_1^2} - 2\lambda_1 \underbrace{(Au_n|u_n)}_{\to \lambda_1} + \lambda_1^2 \longrightarrow 0.$ ∎

TEOREMĂ. (existența „primei" valori proprii pt autoadjuncți compacți)

Fie $A \in \mathcal{B}(H)$ autoadjunct și COMPACT, nenul.
Atunci, $-\|A\|$ sau $\|A\|$ e val proprie pt A.

dem. Știm că există $(u_n) \subseteq H$, $\|u_n\| = 1$, există $\lambda_1 \in \{\|A\|, -\|A\|\}$ a.î. $\|Au_n - \lambda_1 u_n\| \to 0$

Trecând eventual la un subșir - deoarece A compact - $Au_n \to v \in H$

deci $\lambda_1 u_n \to v$ sau $u_n \to \frac{1}{\lambda_1} v =: u$

cum $\underbrace{\|u_n\|}_{=1} \to \|u\| \Rightarrow \|u\| = 1$ și deci $u \neq 0$

Apoi $Au_n \to Au \Rightarrow Au = v = \lambda_1 u$. ∎

27.05.2024 - CURS 13 ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

OPERATORI AUTOADJUNCȚI ȘI COMPACȚI

Scurtă recapitulare

(i) Fie H spațiu HILBERT real, $A \in B(H)$ autoadjunct, compact, nenul și $\dim A(H) = \infty$.
Există $\lambda_1 \in \{-\|A\|, \|A\|\}$ și există $e_1 \in H$ cu $\|e_1\| = 1$ a.î. $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, deci λ_1 valoare proprie nenulă pt A cu $|\lambda_1| = MAX\{|(Au|u)| : \|u\| = 1, u \in H\}$.

(ii) Dacă $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ cu $\lambda \neq \mu$, λ, μ val proprii pt A, apoi $u \in H$ cu $Au = \lambda u$, $v \in H$ cu $Av = \mu v$ atunci $(u|v) = 0$

(iii) Fie $u \in H$, (e_n) sistem ortonormat. Atunci, conform cu BESSEL, $\sum_{n=1}^{\infty} |(u|e_n)|^2 \leq \|u\|^2$.
Apoi cu Riesz - Fischer, avem că $\sum_{n=1}^{\infty} (u|e_n) e_n$ convergentă în H.

(iv) Fie Y submulț din H a.î. $A(Y) \subseteq Y$. Atunci $A(Y^{\perp}) \subseteq Y^{\perp}$,
căci $A(\overline{span(Y)}) \subseteq \overline{span(Y)}$
Deci $A(\underbrace{\overline{span(Y)}^{\perp}}_{Y^{\perp}}) \subseteq \underbrace{\overline{span(Y)}^{\perp}}_{Y^{\perp}}$.

TEOREMĂ (principiul POINCARÉ privind operatorii autoadjuncți compacți)

Fie H sp HILBERT real, $A \in B(H)$, $A = A^*$ și compact cu $\dim A(H) = \infty$. Atunci există $(\lambda_n)_n$ șir de valori proprii nenule cu (e_n) vectori proprii asociați a.î.:

(i) $\boxed{|\lambda_1| = \max\{|(Au|u)| : u \in H, \|u\| = 1\}}$,
pt orice $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{|\lambda_n| = \max\{|(Au|u)| : u \in \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}^{\perp}, \|u\| = 1\}}$
Apoi $\boxed{|\lambda_n| \downarrow 0}$.

(ii) Fie $P_n \in B(H)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $P_n(u) = (u|e_n) e_n$ $(u \in H)$
Atunci avem că
$$\boxed{A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \text{ în } (B(H), \|\cdot\|_{op})}$$

(iii) Fie $u \in H$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} (u|e_n) e_n$ convergentă în H și
$$u = \underbrace{\left(u - \sum_{n=1}^{\infty} (u|e_n) e_n\right)}_{\in \operatorname{Ker} A} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (u|e_n) e_n}_{\in \operatorname{Ker} A^{\perp}}$$

(iv) $(e_n)_n$ formează bază HILBERT în $\operatorname{Ker} A^{\perp}$.

dem. (i) Avem λ_1 cu e_1 asociat
Fie $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}^*$ și pp construite $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ val prop A cu $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ v.p. asociați și pp acest sistem ortonormat
Pt $j \in \overline{1, n-1}$, $Ae_j = \lambda_j e_j$, deci $A(span\{e_1, \dots, e_{n-1}\}) \subseteq span\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$
Iau $H_n = span\{e_1, \dots, e_{n-1}\}^{\perp} = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}^{\perp}$
Avem că $A(H_n) \subseteq H_n$ și $H = span\{e_1, \dots, e_{n-1}\} \oplus H_n$
Considerăm $A_n = A|_{H_n} \in B(H_n)$ autoadjunct și compact
$\dim(A_n(H_n)) = ?$
$A(H) = \underbrace{A(span\{e_1, \dots, e_{n-1}\})}_{\text{dim finită}} \oplus A(H_n) \Rightarrow A(H_n) = A_n(H_n)$ are dim ∞.
Cu rez anterior, $\exists\, \lambda_n \in \{-\|A_n\|, \|A_n\|\}$, $|\lambda_n| = \|A_n\| = \max\{|(\underbrace{A_n u}_{Au}|u)| : \underbrace{u \in H_n}_{u \in \{e_1, \dots, e_{n-1}\}^{\perp}}, \|u\| = 1\}$

λ_n val proprie pt A_n, deci pt A cu $e_n \in H_n = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}^{\perp}$, $\|e_n\| = 1$, $Ae_n = \lambda_n e_n$

Am terminat inducția!

Demo că $|\lambda_n| \searrow 0$:

avem că $|\lambda_n|$ este șir descrescător

Fie $|\lambda_n| \searrow d \geq 0$. Vrem $d = 0$

$$\|Ae_n - Ae_m\|^2 = \|\lambda_n e_n - \lambda_m e_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 2d^2$$

deci, deoarece A compact, deducem $d = 0$.

(ii) Vrem $\|A - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\|_{op} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Fie $u \in H$, avem că: $\|Au - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j u\| = \|Au - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (u|e_j) e_j\|$

$$= \|A(\underbrace{u - \sum_{j=1}^{n}(u|e_j)e_j}_{\in H_{n+1}})\|$$

$$= \|A_{n+1}(u - \sum_{j=1}^{n}(u|e_j)e_j)\|$$

$$\leq \underbrace{\|A_{n+1}\|}_{|\lambda_{n+1}|} \cdot \underbrace{\|u - \sum_{j=1}^{n}(u|e_j)e_j\|}_{\leq \|u\|}$$

$$\big(u - \sum_{j=1}^{n}(u|e_j)e_j \mid \underset{1\leq i\leq n}{e_i}\big) = 0, \ \forall i = \overline{1,n}$$

deci $u - \sum_{j=1}^{n}(u|e_j)e_j \in \underbrace{\text{span}(e_1, \dots, e_n)^{\perp}}_{H_{n+1}}$

$\Rightarrow \|A - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j\|_{op} \leq |\lambda_{n+1}| \searrow 0$.

(iii) $e_n \in \operatorname{Ker} A^{\perp}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Fie $u \in \operatorname{Ker} A$, adică $Au = 0$

$$(u|e_n) = \frac{1}{\lambda_n}(u|\lambda_n e_n) = \frac{1}{\lambda_n}(u|Ae_n) \overset{A=A^*}{=} \frac{1}{\lambda_n}(\underset{0}{Au}|e_n) = 0$$

Rezultă că $\sum_{j=1}^{n}(u|e_j)e_j \in \operatorname{Ker} A^{\perp}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

deci $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n}(u|e_j)e_j = \sum_{n=1}^{\infty}(u|e_n)e_n \in \operatorname{Ker} A^{\perp}$, $\forall u \in H$

Apoi $u \in H$, $u - \sum_{j=1}^{\infty}(u|e_j)e_j \in \operatorname{Ker} A$

Știm că $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ în $\|\cdot\|_{op}$

În particular, $\forall u \in H$, $Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u|e_n)e_n$

$$\Rightarrow \boxed{Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (u|e_n)e_n, \ \forall u \in H} \quad (*)$$

DIAGONALIZAREA PT A.

deci $A(\underbrace{u - \sum_{n=1}^{\infty}(u|e_n)e_n}_{\in \operatorname{Ker} A}) = 0$

(iv) $(e_n)_n$ sistem ortonormat în $\operatorname{Ker} A^{\perp}$

Fie $u \in \operatorname{Ker} A^{\perp}$ cu $(u|e_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Vrem $u = 0$

Cu (*), avem că $Au = 0$, adică $u \in \operatorname{Ker} A$ și $u \in \operatorname{Ker} A^{\perp}$, deci $u = 0$

Astfel că (e_n) bază în $\operatorname{Ker} A^{\perp}$. ∎

COROLAR. Fie H HILBERT real, $A \in \mathcal{B}(H)$, A autoadjunct și compact cu $\dim A(H) = \infty$.
Fie $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \underbrace{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}_{\text{din Th.}}$, $\lambda \neq 0$. Atunci $\lambda I - A : H \to H$ bijecție cu $(\lambda I - A)^{-1} : H \to H$ continuă

dem. · Fie $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\lambda \neq 0$.

Pp că λ val proprie pt A. Fie $e \in H$, $\|e\| = 1$, $Ae = \lambda e$

Rez că $e \in \operatorname{Ker} A^{\perp}$

Apoi $(e|e_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Dar (e_n) bază HILBERT în $\operatorname{Ker} A^{\perp}$, deci $e = 0$ ~~f~~ cu $\|e\| = 1$

$\Rightarrow$ λ NU e valoare proprie dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\lambda \neq 0$.

· $\lambda I - A$ bijecție $\Leftrightarrow$ $I - \underbrace{\tfrac{1}{\lambda} A}_{\text{compact}}$ bijecție $\overset{\text{RIESZ-SCHAUDER}}{\Longleftrightarrow}$ $I - \tfrac{1}{\lambda} A$ injecție ✓ (pt că λ nu e val prop)

EXEMPLU FUNDAMENTAL

$(L^2(a,b), (\cdot|\cdot)_2)$ sp HILBERT

Fie $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă.

Fie $T_K : L^2(a,b) \to C([a,b]) \subseteq L^2(a,b)$

dat prin, pt $u \in L^2(a,b)$

$$(T_K u)(x) = \int_a^b K(x,y)\, u(y)\, dy, \quad \forall x \in [a,b]$$

Avem că T_K bine def, liniar, $T_K \in \mathcal{B}(L^2(a,b))$ e compact (ARZELA - ASCOLI)

Dacă K simetrică, adică $K(x,y) = K(y,x)$, $\forall x,y \in [a,b]$

atunci cu FUBINI, avem că T_K autoadjunct.

PROBLEME STURM - LIOUVILLE

Fixăm $[a,b]$ din $\mathbb{R}$

- $p \in \mathcal{C}^1([a,b])$ cu $p > 0$ pe $[a,b]$
- $q \in \mathcal{C}([a,b])$ cu $q \geq 0$.

$$(SL)_{p,q} \begin{cases} (pu')' + qu = \lambda u \text{ pe } [a,b] \\ u(a) = 0 = u(b) \end{cases}$$

DEF. $\lambda \in \mathbb{R}$ s.n. val proprie pt $(SL)_{p,q}$ dacă există $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ nenulă ce satisface $(SL)_{p,q}$.

Despre SISTEME LINIARE

ARNOLD'S - Ordinary diff eq. SPRINGER

Fie $A : [a,b] \to L(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ $N \geq 1$ fixat

continuă, i.e. „intrările" A cont (componentele matricii A, fct cont)

Considerăm sist lin asoc lui A:

$\boxed{X' = A(t)X}$ adică $X \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R}^N)$ cu $\boxed{X'(t) = A(t)X(t),\ \forall t \in [a,b]}$

TEOREMĂ DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE

Pt orice $(t_0, x_0) \in [a,b] \times \mathbb{R}^N$, $\exists!$ $X : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ soluție pt $X' = A(t)X$ cu $X(t_0) = x_0$

$\cdot\ \mathcal{S}_A = \{ x \in \mathcal{C}^1([a,b]) : x' = A(t)x \}$ SPAȚIU VECTORIAL $/\mathbb{R}$

Fie $t_0 \in [a,b]$ fixat, $\Lambda_{t_0} : \mathcal{S}_A \to \mathbb{R}^N$

$$\varphi \mapsto \varphi(t_0)$$

Λ_{t_0} liniar și bijecție - vezi TEU de mai sus $\Rightarrow \dim \mathcal{S}_A = \dim \mathbb{R}^N = N$

În plus, putem scrie că:

- $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ bază în $\mathcal{S}_A$

$\Updownarrow$

- $\exists\, t_0 \in [a,b]$ a.î. $\{\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_N(t_0)\}$ bază în $\mathbb{R}^N$

$\Updownarrow$

- $\forall\, t \in [a,b] : \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)\}$ bază în $\mathbb{R}^N$

03.06.2024 - CURS 14 ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ

TEOREMĂ.

Fie H HILBERT peste $\mathbb{R}$, $A \in B(H)$ autoadjunct, compact, injectiv; $\dim H = \infty$ (din inj reies cond din th. de diagonalizare)

Atunci există $(\lambda_n)_n$ șir de valori proprii și $(e_n)_n$ șir de vectori proprii asociați a.î.

$(e_n)_n$ bază HILBERT în H și $\lambda_n \xrightarrow{n} 0$

PROBLEMA STRUM-LIOUVILLE

- $[a,b] \subset \mathbb{R}$
- $p \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $p > 0$ pe $[a,b]$
- $q \in \mathcal{C}([a,b])$, $q \geq 0$ pe $[a,b]$

$$(SL)_{pq} \begin{cases} -(pu')' + qu = \lambda u, & [a,b]; \\ u(a) = 0 = u(b) \end{cases}$$

λ val proprie dacă $(SL)_{p,q}$ admite o soluție u nenulă.

REMARCĂ $p \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $p > 0$ pe $[a,b]$; $r \in \mathcal{C}([a,b])$

$(LIN)_{p,r} : -(pu')' + ru = 0$

$\mathcal{S}_{p,r} = \{u \in \mathcal{C}^2([a,b]) : u$ soluție pt $(LIN)_{p,r}\}$ spațiu vectorial $/\mathbb{R}$.

Fie $u \in \mathcal{S}_{p,r}$, punem $u' = v$

$\Rightarrow -(pv)' + ru = 0$

$-p'v - pv' + ru = 0 \Rightarrow v' = \frac{r}{p}u - \frac{p'}{p}v$

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \frac{r}{p}u - \frac{p'}{p}v \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}, \text{ unde } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{r(t)}{p(t)} & -\frac{p'(t)}{p(t)} \end{pmatrix}, \ t \in [a,b]$$

Avem $\mathcal{S}_{p,r} \ni u \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_A$

inj + liniară $\Rightarrow$ surj $\Rightarrow \dim \mathcal{S}_{p,r} = \dim \mathcal{S}_A = 2$

Avem că: pt $u_1, u_2 \in \mathcal{S}_{p,r}$ sunt echivalente

- $\{u_1, u_2\}$ bază în $\mathcal{S}_{p,r}$
- $\exists\, t_0 \in [a,b]$ a.î. $\{(u_1(t_0), u_1'(t_0)), (u_2(t_0), u_2'(t_0))\}$ bază în $\mathbb{R}^2$
- $\forall\, t \in [a,b]$, $\{(u_1(t), u_1'(t)), (u_2(t), u_2'(t))\}$ bază în $\mathbb{R}^2$

LEMĂ (WRONSKIANUL)

Fie $u_1, u_2 \in \mathcal{S}_{p,r}$, definim $\boxed{W_p(u_1,u_2) := p(u_1'u_2 - u_2'u_1)}$ funcție din $\mathcal{C}^1([a,b])$

(W1) $W_p(u_1,u_2)$ constantă pe $[a,b]$

(W2) $W_p(u_1,u_2)$ nenulă dacă și numai dacă $\{u_1,u_2\}$ bază în $\mathcal{S}_{p,r}$

dem. (W1) Calculăm $W_p'(u_1,u_2) = (pu_1')'u_2 + \cancel{pu_1'u_2'} - (pu_2')'u_1 - \cancel{pu_2'u_1'}$

$= ru_1u_2 - ru_2u_1$

$= 0$

(W2) $W_p(u_1,u_2)$ constantă, dar o presupunem nenulă. Dar $p > 0$ pe $[a,b]$, deci $u_1'u_2 - u_2'u_1$ nu se anulează pe $[a,b]$. Spre exemplu

$$\det\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{deci } \{(u_i(a), u_i'(a))\}_{i=\overline{1,2}} \text{ bază în } \mathbb{R}^2$$

Cu remarca, $\{u_1,u_2\}$ bază în $\mathcal{S}_{p,r}$.

reciproc analog. ■

Fie $\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{C}^2([a,b]) : u(a) = 0 = u(b)\}$

$L : \mathcal{D} \to \mathcal{C}([a,b])$ dat prin

$L(u) = -(pu')' + qu$

L liniar ; $(SL)_{p,q}$ echivalent cu $\boxed{u \in \mathcal{D},\ L(u) = \lambda u}$

LEMĂ (simetria lui L)

- Pt orice $u, v \in \mathcal{D}$, avem că $(L(u)|v)_2 = (u|L(v))_2$
- Pt orice $u \in \mathcal{D}$, avem că $(L(u)|u)_2 \geq 0$.
  În plus $(L(u)|u)_2 = 0$ dacă şi numai dacă $u = 0$ pe $[a,b]$.

dem. Fie $u, v \in \mathcal{D}$, atunci

$$(L(u)|v)_2 = \int_a^b -(pu')'v\,dt + \int_a^b quv\,dt = \underbrace{-pu'v\Big|_a^b}_{=0} + \underbrace{\int_a^b pu'v'\,dt}_{\underbrace{\int_a^b pv'u'\,dt}_{-\int_a^b (-pv')'u}} + \underbrace{\int_a^b quv\,dt}_{\int_a^b qvu}$$

$$= (u|L(v))_2$$

Fie $u \in \mathcal{D}$, atunci

$$(L(u)|u)_2 = \underbrace{\int_a^b -(pu')'u\,dt}_{\underbrace{\int_a^b pu'^2\,dt}_{\geq 0}} + \underbrace{\int_a^b qu^2\,dt}_{\geq 0} \geq 0$$

Fie $u \in \mathcal{D}$ cu $(L(u)|u)_2 = 0 \Rightarrow \int_a^b pu'^2 = 0$, dar $p > 0$ pe $[a,b] \Rightarrow u' \equiv 0$ pe $[a,b]$

deci $u \equiv$ constantă pe $[a,b]$, dar $u(a) = 0$ $\Big\} \Rightarrow u \equiv 0$ pe $[a,b]$ ∎

Concluzie pt simetria şi pozitivitatea lui L

Orice val proprie λ pe $(SL)_{p,q}$ satisface $\lambda > 0$, apoi λ simplă, adică $E_\lambda = \{u \in \mathcal{C}^2([a,b]) : u \text{ sol } (SL)_{p,q}\} = \{u \in \mathcal{D} : L(u) = \lambda u\}$ este de dim 1.

Apoi, dacă λ_1, λ_2 val proprii cu $\lambda_1 \neq \lambda_2$, atunci $E_{\lambda_1} \perp E_{\lambda_2}$

dem. Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ cu $L(u) = \lambda u$, $u \in \mathcal{D}$, $u \neq 0$

$0 < (L(u)|u)_2 = (\lambda u|u)_2 = \lambda \underbrace{\|u\|^2}_{>0} \Rightarrow \lambda > 0$

Fie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ val proprii, $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $u_i \in E_{\lambda_i}$

$\lambda_1 (u_1|u_2)_2 = (L(u_1)|u_2)_2 = (u_1|L(u_2))_2 = \lambda_2 (u_1|u_2)_2$, deci $(u_1|u_2)_2 = 0$

Fie λ val proprie. Vrem dim $E_\lambda = 1$

$E_\lambda \subseteq \mathcal{D} \cap \mathcal{S}_{p,q} \Rightarrow \dim E_\lambda \leq \dim \mathcal{S}_{p,q} = 2$

Fie $u_1, u_2 \in E_\lambda$. Avem că $W_p(u_1,u_2)(a) = p(a)\,(u_1'(a)\overbrace{u_2(a)}^{0} - u_2'(a)\overbrace{u_1(a)}^{0}) = 0$

cu lema WRONSKIANULUI $\{u_1, u_2\}$ lin dep. ∎

LEMĂ (pt introducerea funcției GREEN)

Există $\{u_1, u_2\}$ bază în $\mathcal{S}_{p,q}$ a.î. $u_1(a) = 0 = u_2(b)$

<u>dem.</u> $\{u_1, \hat{u}_2\}$ bază în $\mathcal{S}_{p,q}$ cu $u_1(a)=0$ este:

$\{(1,0),(0,1)\}$ bază în $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{S}_{p,q} \ni u \xrightarrow{\Lambda_a} (u(a), u'(a)) \in \mathbb{R}^2$ izomorfism

Fie $\{u_1, \hat{u}_2\} \subset \mathcal{S}_{p,q}$ a.î. $\Lambda_a(u_1) = (0,1)$

$\Lambda_a(\hat{u}_2) = (1,0)$

Luăm $\alpha \in \mathbb{R}$ și punem $u_2 = \alpha u_1 + \hat{u}_2$

Analizăm $\{u_1, u_2\}$

$u_2' = \alpha u_1' + \hat{u}_2'$

$W_p(u_1,u_2)(a) = p(a)\big(\underbrace{u_1'(a)}_{1}\ \underbrace{u_2(a)}_{1} - u_2'(a)\ \underbrace{u_1(a)}_{0}\big) = p(a) \neq 0$

$\Rightarrow \{u_1, u_2\}$ bază, $\forall \alpha$

Alegem $\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $u_2(b)=0$

$\alpha = -\hat{u}_2(b) / u_1(b) \neq 0$

Pp prin RA că $u_1(b)=0$

$u_1 \in \mathcal{S}_{p,q}$ deci $-(pu_1')' + qu_1 = 0 \,|\cdot u_1$

$\int_a^b p u_1'^2 + \int_a^b q u_1^2 + \underbrace{(-p u_1' u_1)\Big|_a^b}_{=0} = 0$, deci $u_1' \equiv 0$ pe $[a,b]$

$\Rightarrow u_1 \equiv \text{const}$, dar $u_1(a) = 0$

$\Rightarrow u_1 \equiv 0$ pe $[a,b]$

$\not\!\!\!\!\!\!\quad$ cu $u_1'(a)=1$ ∎

DEF. (funcție GREEN)

Fie $\{u_1,u_2\}$ bază în $\mathcal{S}_{p,q}$ cu $u_1(a) = 0 = u_2(b)$.

Considerăm $G: [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$ dată prin

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{W} u_1(x) u_2(y), & a \le x < y \le b \\ \frac{1}{W} u_2(x) u_1(y), & a \le y \le x \le b \end{cases}$$

unde $W = W_p(u_1,u_2)$

G continuă, $G(x,y) = G(y,x)$

LEMĂ (funcția GREEN)

Fie $f \in \mathcal{C}([a,b])$ și $u: [a,b] \to \mathbb{R}$ dată prin $u(x) = \int_a^b G(x,y) f(y)\,dy$, $\forall x \in [a,b]$.

Atunci $\boxed{u \in D,\ L(u) = f}$