创建时间:	2019/8/10 16:29	**更新时间:**	2019/8/13 9:01
作者:	Min Xia		
URL:	https://katex.org/docs/supported.html		

仿射变换通过原图和变换后图的各四个点，变换后组成一个3 * 3 的矩阵，这个矩阵是啥，为啥需要8个点

仿射变换

单应矩阵求解

```
M_warp = cv2.getPerspectiveTransform(pts1, pts2) #pts1, pts2分别是来自原图和变换后图的四个点
```

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

--> 设 z1 = 1 x_2的导数 = x_2/z_2 y_2的导数 = y_2/z_2

```
x2 = H11 * X1 + H12 * Y2 + H13z1
y2 = H21 * X1 + H22 * Y2 + H23z1
z2 = H31 * X1 + H32 * Y2 + H33z1
```

-->变换后

```
x2(H31x1+H32y1+H33)=H11x1+H12y1+H13
y2(H31x1+H32y1+H33)=H21x1+H22y1+H23
```

-->a_x * H = 0

```
x2(H31x1+H32y1+H33)−H11x1+H12y1+H13=0
y2(H31x1+H32y1+H33)−H21x1+H22y1+H23=0
```

-->将上面的等式改写为向量积的形式，令h=(H11,H12,H13,H21,H22,H23,H31,H32,1)Th=(H11,H12,H13,H21,H22,H23,H31,H32,1)T，单应矩阵HH是一个齐次矩阵，可以将其最后一个元素归一化为1。则上面两个式子可以改写为

$a_x * h = 0$

$a_y * h = 0$

a_x = (−x_1, −y_1, 0, 0, 0, x_2 x_1, x_2 y_1 ,x_2)^T

a_y = (0, 0, 0, −x_1, −y_1, −1, y_2 x_1, y_2y_1, y_2)^T

- tips:x_2 和 x_1 的关系 可以通过上面的每一次变换后表达。y_2同理, 下图是用x_1'代表 x_2.

Robert Collins
CSE486, Penn State

Algebraic Distance, h_{33}=1 (cont)

$$\begin{array}{ccccc}
 & 2N \times 8 & 8 \times 1 & & 2N \times 1 \\
\begin{array}{c}\text{Point 1}\\ \\ \text{Point 2}\\ \\ \text{Point 3}\\ \\ \text{Point 4}\\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix}
x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1x'_1 & -y_1x'_1 \\
0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -x_1y'_1 & -y_1y'_1 \\
x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_2x'_2 & -y_2x'_2 \\
0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 & -x_2y'_2 & -y_2y'_2 \\
x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_3x'_3 & -y_3x'_3 \\
0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 & -x_3y'_3 & -y_3y'_3 \\
x_4 & y_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_4x'_4 & -y_4x'_4 \\
0 & 0 & 0 & x_4 & y_4 & 1 & -x_4y'_4 & -y_4y'_4
\end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \end{bmatrix} & = &
\begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ x'_2 \\ y'_2 \\ x'_3 \\ y'_3 \\ x'_4 \\ y'_4 \end{bmatrix} \\
\text{additional points} & \vdots & & & \vdots
\end{array}$$

Tips:

- 齐次坐标：一幅2D图像上的非齐次坐标为(x,y)，而齐次坐标为(x,y,1)，也可以写成(x/z,y/z,1)或(x,y,z)。齐次坐标有很多好处，比如可以很清楚的确定一个点在不在直线上：
- 射影变换也叫“单应”--Homography，“Homo”前缀就是same的意思，表示“同”，homography就是用同一个源产生的graphy，中文译过来大概就是“单应”。
- 单应矩阵的求解过程，cv2.getPerspectiveTransform(pts1, pts2)