

# 圆柱薄壳结构的弹-塑性有限元分析

陈铁云 吴水云

(上海交通大学)

**提要** 为着节省计算时间与费用而同时又保证计算结果的精度,本文采用拟协调元、分层子单元模型导出了圆柱薄壳弹-塑性有限元分析的列式,并用拟子结构法处理两个以上薄壳组成的结构,按分块方式形成各独立拟子结构的结构刚度矩阵,然后用分块顺序-逆序修正法求解,得到薄壳结构的广义位移增量,广义应变增量,广义力增量。从而通过叠加求得薄壳各单元的广义应变与广义力。

为了验证上述分析,作者用 Fortran 77 语言编制了相应的计算机程序,对支管在轴向力作用下的 T 型管状接头进行了弹-塑性计算,并作了相应的实验研究以资比较,取得了较好的一致性,从而为薄壳结构的弹-塑性分析提供了一个有效的手段。

## 一、前言

结构的弹-塑性分析长期来被认为是一个难题。有限元法的出现对结构的弹-塑性分析提供了一个强有力的手段。但由于在每次加载时,结构中总有一些单元进入塑性状态,为此导致结构总刚度矩阵中部分元素的改变,以致在求解结构平衡方程组时须重复计算。这既费时又费钱。近年来为着克服这些缺点,提出了子结构法<sup>[1]</sup>,矩阵更新法<sup>[2,13]</sup>。但目前它们只限于用于桁架,刚架、平面应力问题与轴对称壳的弹-塑性有限元分析中。薄壳结构本身的复杂性使薄壳结构的弹-塑性分析变得更为复杂。为着使计算既省时又精确,我们采用拟协调元<sup>[3-6]</sup>,分层子单元模型<sup>[7]</sup>,导出了圆柱薄壳弹-塑性有限元分析的列式。这些单元具有列式简单,收敛性好,节约机时和费用等优点。而在处理薄壳结构时,提出“拟子结构”模型的设想,各拟子结构通过交贯线上的若干个离散点联系起来。对各拟子结构按分块形式组成结构总刚度矩阵,用分块顺序-逆序修正法求解各拟子结构在交贯线节点处的单位载荷作用下的平衡方程组。求得各拟子结构在局部座标系下的位移和联系交贯线处的载荷列阵与位移列阵的柔度矩阵。然后通过交贯线离散点处的位移连续条件,静力平衡条件和各拟子结构本身的平衡条件求得各拟子结构在交贯线节点处的相互作用力,并可按叠加原理求得本次加载时各拟子结构的广义位移增量以及广义应变增量、广义内力增量。从而通过叠加得到各单元在本次加载结束时的广义位移,广义应变和广义内力等。采用分块顺序-逆序修正法求解各拟子结构平衡方程组的优点在于可把结构刚度矩阵中的任一行作为最后消去的一行,而顺序按列,逆序按行进行消元,既可消除不必要的对零元素的计算,又可紧缩内存。所以在每次载荷增量过程中可以将平衡方程组的求解限制在塑性区域内进行,即将塑性区范围的方程

组放到最后求解。因此在弹性区范围内的那些元素仍可利用上次修正的结果, 仅需对塑性范围内的元素进行重新修正, 因而大大减少了每次加载时重新求解平衡方程组时的计算工作量。本文按以上分析过程用 Fortran 77 语言编制了求解薄壳结构弹-塑性分析的有限元程序。

为着验证拟协调元(三角形壳元与矩形壳元)列式及分层子单元模型, 本文先对静水外压作用下的刚固圆柱薄壳用所编程序进行了弹-塑性计算, 并将计算结果与作者的解析解结果及实验结果<sup>[10]</sup>进行比较。然后作为薄壳结构的实例, 应用本文程序对支管端部在轴向力作用下的海洋钻井平台 T 型管状接头进行了弹-塑性分析计算。并作了相应的 T 型管状接头的弹-塑性实验研究。通过本文计算结果与本实验(弹-塑性)的比较以及对其他模型的 SAP5 理论计算<sup>[11]</sup>和实验值<sup>[11]</sup>(弹性)的比较表明它们之间是相当一致的。从而证明本文所提供的方法是可行的。这为圆柱薄壳结构的弹-塑性分析提供了一个有效的方法。在圆柱薄壳结构的弹-塑性计算中具有实用意义。

## 二、圆柱薄壳拟协调元

### 1. 基本原理

在圆柱薄壳理论中, 按 Love-Timoshenko 的几何关系为:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{x\varphi} \\ K_x \\ K_\varphi \\ K_{x\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \\ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\ -\frac{2}{R} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

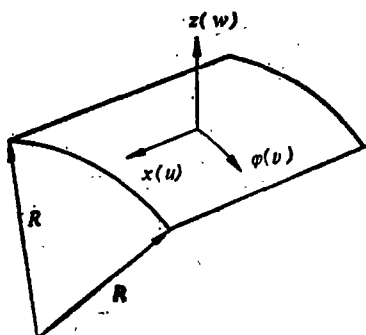


图1 圆柱薄壳坐标

式中  $\{X\}$  为薄壳中面的广义应变,  $u, v, w$  分别为薄壳中面上的点在  $x, \varphi, z$  方向的位移,  $R$  为圆柱薄壳半径(图1)。

拟协调元的基本概念是在单元内离散应变, 并应用围线积分法, 把单元边界上的位移连续条件放松为在积分条件下的满足<sup>[3][4]</sup>。

将广义应变  $\{X\}$  在单元内离散:

$$\{X\} = [N]\{\alpha\} \quad (2.2)$$

式中,  $[N]$  为插值函数,  $\{\alpha\}$  为广义参数。

将 (2.2) 式两端乘  $[N]^T$ , 然后在单元面积上积分并应用格林公式及围线积分, 可得

$$\iint_{Ae} [N]^T \{X\} dA = [C] \{q\} = [A] \{\alpha\} \quad (2.3)$$

从而:

$$\{X\} = [N][A]^{-1}[C]\{q\} \quad (2.4)$$

式中,

$$[A] = \iint_{Ae} [N]^T [N] dA \text{ 为一对称矩阵,}$$

$$\{q\} = \left[ u_i, v_i, w_i, \left( -\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i, \left( \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)_i, \dots, u_k, v_k, w_k, \left( -\frac{\partial w}{\partial x} \right)_k, \left( \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)_k \right]^T.$$

是单元的广义节点位移。

单元的广义内力与广义应变的增量关系为:

$$\{dT\} = [D_{ep}]\{dX\} \quad (2.5)$$

式中,  $\{dT\} = [dT_x, dT_\varphi, dT_{x\varphi}, dM_x, dM_\varphi, dM_{x\varphi}]^T$  为单元的广义内力增量,  $\{dX\}$  为单元广义应变增量,  $[D_{ep}]$  为单元的物理矩阵。

按虚功原理, 得单元刚度矩阵:

$$[K]^e = [C]^T [A]^{-1} \left( \iint_{Ae} [N]^T [D_{ep}] [N] dA \right) [A]^{-1} [C] \quad (2.6)$$

## 2. 15 参数三角形拟协调壳元及 20 参数矩形拟协调壳元。

本文推导了 15 参数三角形拟协调壳元 ( $i-j-k$ ) (图 2) 以适应曲线边界以及单元大小的过渡, 同时借用了文献 [6] 中的矩形拟协调壳元。它们的每条边在展开的柱面上都是直线, 而矩形元每条边还分别与主曲率座标相平行 (图 3)。

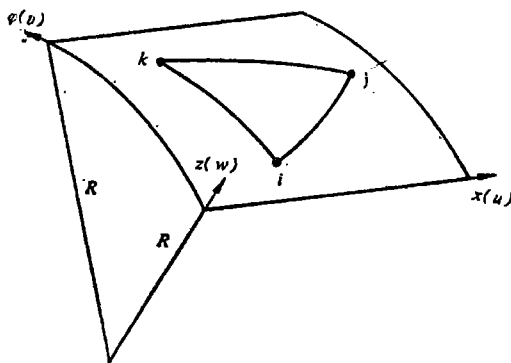


图 2 三角形拟协调圆柱壳元

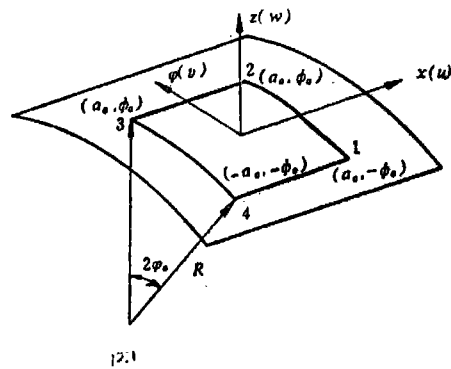


图 3 矩形拟协调圆柱壳元

三角形单元的应变插值函数为:

$$[N] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1 & L_2 & L_3 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

式中,  $L_1, L_2, L_3$  为三角形单元的面积坐标。

矩形元的应变插值函数为:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x R\varphi & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & x R\varphi R x \varphi & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & x R\varphi R x \varphi & 0 \\ & & & & & & & 0 & 1 & x R\varphi x^2 R^2 \varphi^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

为保证围线积分精度使应变离散至少收敛于常应变, 可假设单元边界位移场, 然后可按基本原理得到三角形拟协调壳元与矩形拟协调壳元的刚度矩阵。

### 三、薄壳的分层子单元模型

为着寻求薄壳单元的物理矩阵  $[D_{ep}]$ , 我们在 Wegmuller 板分析的基础上<sup>[7]</sup>, 用分层子单元模型推导了各子单元的弹-塑性矩阵  $[d_{ep}^{(k)}]$  与薄壳单元的物理矩阵  $[D_{ep}]$  之间的关系。

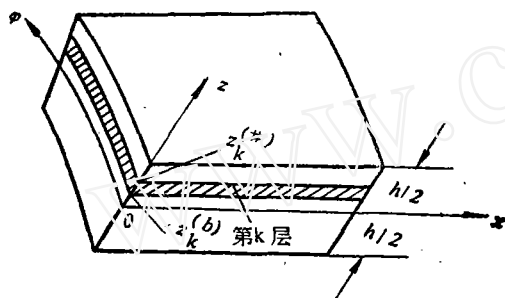


图4 薄壳分层子单元模型

分层子单元模型就是沿着壳厚把壳元分成若干层 (图4), 根据薄壳理论的直法线假设, 薄壳内任意一层 (k) 中任一点处的应力均处于平面应力状态, 而与之相应的应变与广义应变间的关系为:

$$\{\varepsilon^{(k)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(k)} \\ \varepsilon_y^{(k)} \\ \gamma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

式中,  $[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T$  为中面应变, 而  $[K_x, K_y, K_{xy}]$  为中曲面的曲率改变。z 为该点的法向坐标。设第 k 层子单元的应力应变关系为:

$$\{d\sigma^{(k)}\} = [d_{ep}^{(k)}] \{d\varepsilon^{(k)}\} \quad (3.2)$$

式中  $[d_{ep}^{(k)}]$  称为该层子单元的弹-塑性矩阵, 其表达式按 Prandtl-Reuss 的增量理论导得为<sup>[2], [16]</sup>:

$$[d_{ep}^{(k)}] = \frac{E}{Q^{(k)}} \begin{bmatrix} (S_x^{(k)})^2 + 2P^{(k)}, & -S_x^{(k)}S_y^{(k)} + 2\nu P^{(k)}, & -\frac{S_x^{(k)} + \nu S_y^{(k)}}{1+\nu} \cdot \tau_{xy}^{(k)} \\ & (S_y^{(k)})^2 + 2P^{(k)}, & -\frac{S_y^{(k)} + \nu S_x^{(k)}}{1+\nu} \cdot \tau_{xy}^{(k)} \\ & & \frac{R^{(k)}}{2(1+\nu)} + \frac{2E_p^{(k)}}{9E}(1-\nu)(\sigma_e^{(k)})^2 \end{bmatrix}$$

对 称

$$= \begin{bmatrix} d_{11}^{(k)} & d_{12}^{(k)} & d_{13}^{(k)} \\ & d_{22}^{(k)} & d_{23}^{(k)} \\ & & d_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

对 称

$$\text{式中, } P^{(K)} = -\frac{2E_p^{(K)}}{9E}(\sigma_e^{(K)})^2 + \frac{(\tau_{xp}^{(K)})^2}{1+\nu}$$

$$R^{(K)} = (S_x^{(K)})^2 + (S_\varphi^{(K)})^2 + 2\nu S_x^{(K)} S_\varphi^{(K)}$$

$$Q^{(K)} = R^{(K)} + 2(1-\nu^2)P^{(K)}$$

$$\text{而 } S_x^{(K)}, S_\varphi^{(K)} \text{ 为应力偏量, } \sigma_e^{(K)} = \left( \frac{3}{2} S_{ij}^{(K)} S_{ij}^{(K)} \right)^{1/2}, \quad E_p^{(K)} = -\frac{d\sigma_e^{(K)}}{d\varepsilon_p^{(K)}}.$$

应力和合力（广义内力）之间的关系可通过  $\{dT_x\} = \int_{z_K^{(b)}}^{z_K^{(f)}} \{d\sigma_x^{(k)}\} dz$  的积分而得到。同

样也可以得到其他分量的表达式。于是可得：

$$\{dT^{(K)}\} = \begin{Bmatrix} dT_x^{(K)} \\ dT_\varphi^{(K)} \\ dT_{x\varphi}^{(K)} \\ dM_x^{(K)} \\ dM_\varphi^{(K)} \\ dM_{x\varphi}^{(K)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a^{(K)} d_{11}^{(K)} & a^{(K)} d_{12}^{(K)} & a^{(K)} d_{13}^{(K)} & b^{(K)} d_{11}^{(K)} & b^{(K)} d_{12}^{(K)} & b^{(K)} d_{13}^{(K)} \\ & a^{(K)} d_{22}^{(K)} & a^{(K)} d_{23}^{(K)} & b^{(K)} d_{21}^{(K)} & b^{(K)} d_{22}^{(K)} & b^{(K)} d_{23}^{(K)} \\ & & a^{(K)} d_{33}^{(K)} & b^{(K)} d_{31}^{(K)} & b^{(K)} d_{32}^{(K)} & b^{(K)} d_{33}^{(K)} \\ & & & c^{(K)} d_{11}^{(K)} & c^{(K)} d_{12}^{(K)} & c^{(K)} d_{13}^{(K)} \\ & & & & c^{(K)} d_{22}^{(K)} & c^{(K)} d_{23}^{(K)} \\ & & & & & c^{(K)} d_{33}^{(K)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_\varphi \\ d\gamma_{x\varphi} \\ dK_x \\ dK_\varphi \\ dK_{x\varphi} \end{Bmatrix} \quad \text{对 称} \quad (3.4)$$

式中,  $[D_{ep}^{(K)}]$  即为第  $k$  层子单元的物理矩阵, 而  $a^{(K)} = z_K^{(f)} - z_K^{(b)}$ ,  $b^{(K)} = \frac{1}{2} [(z_K^{(f)})^2 - (z_K^{(b)})^2]$ ,  $c^{(K)} = \frac{1}{3} [(z_K^{(f)})^3 - (z_K^{(b)})^3]$ .

把每一层子单元的广义应力叠加起来便可得整个单元的广义应力：

$$\{dT\} = \sum_K \{dT^{(k)}\} = \sum_K ([D_{ep}^{(k)}] \{dX\}) = \left( \sum_K [D_{ep}^{(k)}] \right) \cdot \{dX\} = [D_{ep}] \{dX\} \quad (3.5)$$

$$\text{故得:} \quad [D_{ep}] = \sum_K [D_{ep}^{(K)}] \quad (3.6)$$

当整个单元的各层子单元都处于弹性状态时, 则各子单元的弹-塑性矩阵均为弹性矩阵  $[d_e]$ , 从而可以得到与薄壳理论相同的弹性薄壳的物理矩阵  $[D_e]$ .

#### 四、高斯消去法中的分块顺序-逆序修正法

在结构的弹-塑性有限元分析中, 对每一步载荷增量, 都必须重组结构总刚度矩阵, 反复求解系数矩阵不断改变的大型线性代数方程组, 以致计算时间过长而费用昂贵。为了解决计算太费时的缺点, 曾有人采用子结构法<sup>[1]</sup>与矩阵更新法<sup>[2] [13]</sup>, 并收到了一定的效果。本文则采用分块顺序-逆序修正法<sup>[8]</sup>。

采用顺序消元与逆序消元相结合的办法, 便可以把刚度矩阵中的任何一行作为最后消元的一行。而由于不完全消元区的对称性<sup>[14]</sup>, 逆序消元也可在上三角区进行。

为了进一步提高计算效率, 减少不必要的零元素的计算, 以及能紧缩存储, 便于求解大型问题的分块方法, 本文提出按列而不是按行进行顺序消元, 同样, 在逆序时则是按行而不是按列。具体消元步骤见图5。由于大型结构的刚度矩阵是十分庞大的, 所以必须采用分块

解法<sup>[16]</sup>，本文对顺序修正和逆序修正的元素分别分成若干列块和若干行块（见图5），当

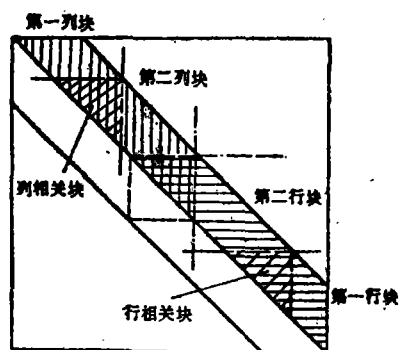


图5 分块顺序-逆序修正法

前一系列（行）块修正完毕，要修正下一列（行）块时，仅需用到前一块的一个三角形区域即与下一列块有关的相关块，所以只要内存  $M \geq \frac{1}{2}b^2$ ， $b$  为总刚度矩阵的半带宽，则问题就可以求解。

当结构进入弹-塑性后，由于可以把弹-塑性范围内的方程放到最后求解，所以仅仅需要重新组成和修正这一范围内的刚度矩阵元素，而那些仍处于弹性阶段的区域的刚度矩阵元素仍可利用上次的修正结果，因而大大提高了计算效率，减少了工作量，节约了计时和费用。

## 五、薄壳结构的拟子结构分析

薄壳结构由两个或两个以上的薄壳相互交叉联结组成。本文以 T 型管状接头为例来说明它们之间的关系。

图6为 T 型管状接头示意图，弦管两端简支，支管端部受集中载荷  $P$ 。由于有限元节点编号在交贯线附近要产生分歧，从而导致结构总刚度矩阵的半带宽  $b$  较大，为着克服这个缺点，我们使用了拟子结构法，即将管状接头在交贯线处分离成几个互相独立的拟子结构，分别用拟协调元对这个独立拟子结构进行求解，然后利用各独立拟子结构在交贯线处的位移连续条件和静力平衡条件以及拟子结构本身的平衡条件，得出整个管接头的分析结果。

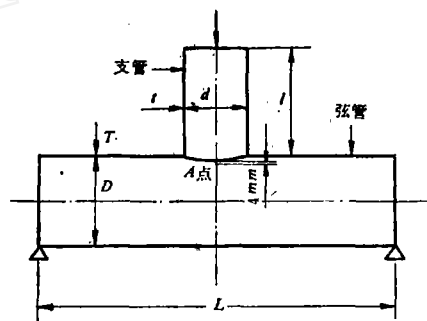


图6 T 型管状接头

图7(a)为支管端部承受集中力  $P_0$  的 T 型管接头的变形示意图，图7(b)及7(c)则为它们分离

成两个独立拟子结构后的受力及变形情况。由于在有限元分析中，结构是被离散为在节点上互相联接的，故弦管与支管之间的力的作用以及位移的连续也是在交贯线的若干个离散点上实现的。

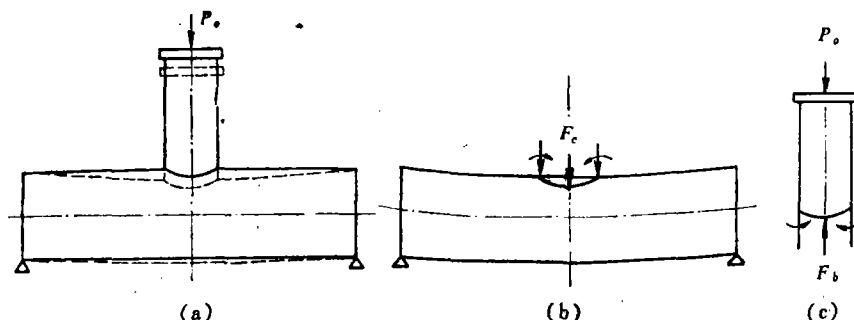


图7 T 型管状接头拟子结构

设弦管与支管在交贯线处通过  $m$  个节点相连（由于对称性，我们仅考虑结构的四分之一），则在弦管的局部坐标系下，我们可以求得作用于这  $m$  个节点上的载荷与这  $m$  个节点的位移之间的关系：

$$[F]_c \{f\}_c = \{u\}_c \quad (5.1)$$

式中， $\{f\}_c$  及  $\{u\}_c$  分别为在弦管局部坐标系下交贯线的  $m$  个节点的外载荷列阵及位移列阵。而  $[F]_c$  则为弦管上联系交贯线处的载荷与位移的柔度矩阵。同样，对于支管亦有类似关系式：

$$[F]_b \{f\}_b = \{u\}_b \quad (5.2)$$

为了应用位移连续条件与静力平衡条件，必须把弦、支管交贯线处的载荷与位移从各自的局部坐标系中转换到整体坐标系来。图 8 表示了局部坐标系与整体坐标系  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  之间的关系：

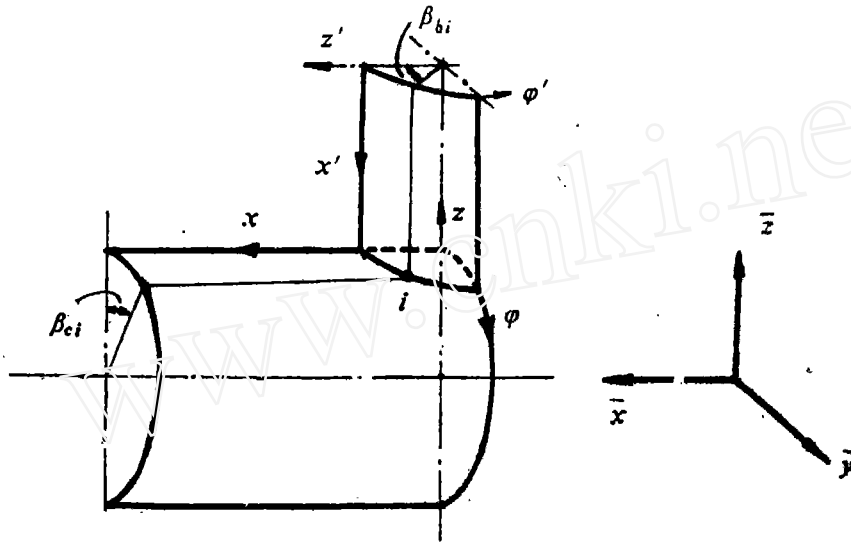


图 8 T 型接头整体坐标与局部坐标关系

设  $\beta_c$  及  $\beta_b$  的定义分别如图 8 所示，则从图 8 中可知，在交贯线上的某个离散点  $i$  处，对弦管有如下转换关系：

$$\{\bar{u}\}_{ic} = [t_i] \{u\}_{ic} \quad (5.3)$$

及

$$\{f\}_{ic} = [t_i]^T \{\bar{f}\}_{ic} \quad (5.4)$$

式中

$$[t_i] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_{ci} & \sin \beta_{ci} & 0 \\ 0 & -\sin \beta_{ci} & \cos \beta_{ci} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

同样，对支管有相似的列式：

$$\{\bar{u}\}_{ib} = [t'_i] \{u\}_{ib} \quad (5.6)$$

$$\{f\}_{ib} = [t'_i]^T \{\bar{f}\}_{ib} \quad (5.7)$$

所以, 在  $m$  个节点上, 有

$$\{\bar{u}\}_c = [T]_c \{u\}_c, \quad \{f\}_c = [T]_c^T \{\bar{f}\}_c \quad (5.8)$$

$$\{\bar{u}\}_b = [T]_b \{u\}_b, \quad \{f\}_b = [T]_b^T \{\bar{f}\}_b \quad (5.9)$$

式中,

$$[T]_c = \begin{bmatrix} t_1 & & 0 \\ & t_2 & \\ 0 & & t_m \end{bmatrix}, \quad [T]_b = \begin{bmatrix} t'_1 & & 0 \\ & t'_2 & \\ 0 & & t'_m \end{bmatrix}$$

在交贯线上的位移连续条件为:

$$\{\bar{u}\}_c = \{\bar{u}\}_b + \{\bar{u}_0\} \quad (5.10)$$

式中,  $\{\bar{u}_0\} = [0, 0, \bar{w}_0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, \bar{w}_0, 0, 0, 0]^T$  为支管的轴向刚体位移。而平衡方程为:

$$\{\bar{f}\}_c + \{\bar{f}\}_b = 0 \quad (5.11)$$

将 (5.8) 的后一式代入 (5.1) 式然后再代入 (5.8) 的前一式, 便可得:

$$\{u\}_c = [T]_c [F]_c [T]_c^T \{\bar{f}\}_c = [\bar{F}]_c \{\bar{f}\}_c \quad (5.12)$$

同理,

$$\{\bar{u}\}_b = [\bar{F}]_b \{\bar{f}\}_b \quad (5.13)$$

将 (5.12) 和 (5.13) 式代入 (5.10) 式同时考虑 (5.11) 式, 得:

$$[\bar{F}] \{\bar{f}\} = \{\bar{u}_0\} \quad (5.14)$$

式中,  $[\bar{F}] = [\bar{F}]_b + [\bar{F}]_c$ ,  $\{\bar{f}\} = \{\bar{f}\}_c = -\{\bar{f}\}_b$

(5.14) 式共有  $6m$  个方程, 而一共有  $6m+1$  个未知数, 因此尚需补充一个方程即支管两端轴向力的平衡:

$$\sum_{i=1}^m F \bar{z}_i = \frac{P_0}{4} \quad (5.15)$$

这样, 求解方程 (5.14) 和 (5.15) 便可以求得弦管、支管之间的相互作用力  $\{\bar{f}\}$  及支管顶端的轴向位移  $\bar{w}_0$ 。

求得  $\{\bar{f}\}$  后, 由 (5.8), (5.9) 式可得各管的  $\{f\}_c$ ,  $\{f\}_b$ , 于是便可以得到弦管, 支管的解, 求得它们的位移、应变及应力的结果而完成管状接头的结构分析。而在弹-塑性的增量分析中仅需将以上位移、载荷等用增量表示即可。

按照以上分析, 本文用 Fortran 77 语言编制了 T 型管接头弹-塑性分析的计算机程序。

## 六、数值计算与实验结果

为着验证上述分析与计算程序, 我们曾对静水外压作用下的两端刚固的圆柱薄壳的试验模型 YM—1, YM—2 用所编程序进行了弹-塑性计算, 计算结果与解析解法及试验结果<sup>[10]</sup>相当接近。

作为薄壳结构的弹-塑性分析的实例, 本文对前节所述的 T 型管状接头进行了弹性与弹-塑性计算, 并进行了相应的实验研究。



在进行实例计算中,为着减少前处理的人工准备时间,减少差错,本文配置了弦管,支管的单元网格的自动生成程序,能在弦管和支管各自的坐标系中独立自动地生成节点及网格划分,并保持两者在交贯线上的节点位置完全一致。

在进行网格划分时,采用三角形元与矩形元相结合以减少节点,提高精度。一般在交贯线附近用三角形元,以便与交贯线形状相吻合,其他地方则采用矩形元。(图9)

由于配置了网格自动生成的前处理子程序,本文所需输入数据极少,除了几何参数,材料参数外,仅需输入网格生成所需的参数及热点区域的加密信息就行了。

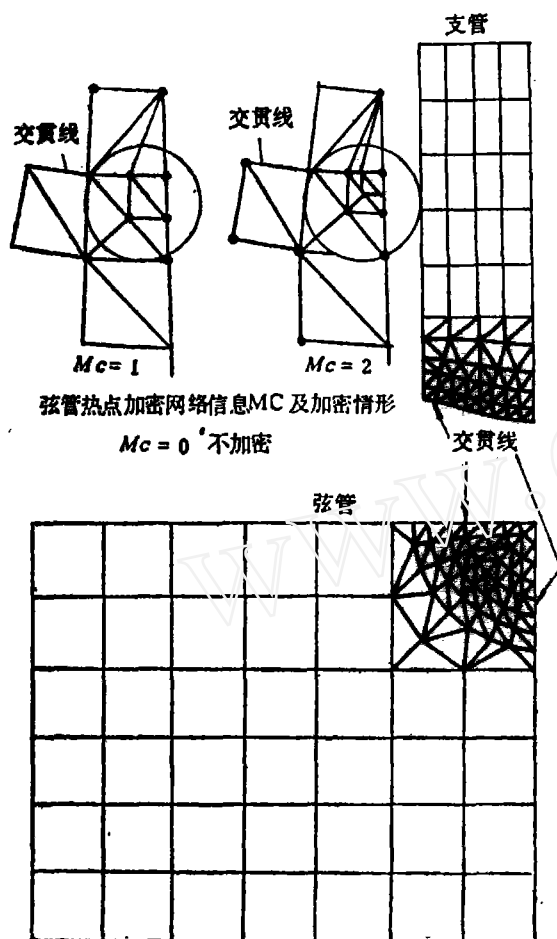


图9 T型接头的有限元网格

## 1. T型管状接头的弹性计算结果与实验结果:

用本文程序对在本校实验室做过试验的钢质模型进行了计算,模型的几何尺度为:

$D=14.7\text{cm}$ ,  $L=93.0\text{cm}$ ,  $T=0.5\text{cm}$ ,  $d=5.3\text{cm}$ ,  $l=28.0\text{cm}$ ,  $t=0.4\text{cm}$   
材料性质:  $E=2.0 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ ,  $\nu=0.3$ .

图10为本文计算结果与实验结果<sup>[12]</sup>及使用SAP5程序计算的结果<sup>[13]</sup>之间的弦管外壁的应力集中系数曲线的比较。

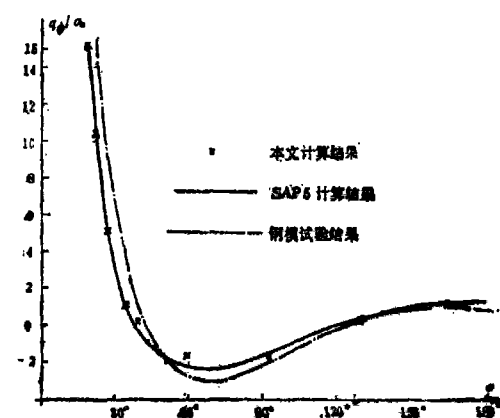


图10 T型管接头弦管外壁的应力集中系数

## 2. T型管状接头的弹-塑性计算与实验数据。

钢质模型 TP—1 与 TP—2 的几何尺寸 (cm)

模 型 代 号	$D$	$L$	$T$	$d$	$l$	$t$
TP—1	44.4	170.0	0.6	23.3	60.0	0.4
TP—2	44.2	170.0	0.8	23.7	60.0	0.8

根据 Instron 拉伸试验机对弦管材料所作的拉伸曲线试验,取  $E=2.0 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ ,  $\nu=0.3$ ,  $\sigma_s=2400 \text{kg/cm}^2$ , 并近似地取拉伸曲线为强化曲线。

图 11 为弦管上热点附近 A 点（见图 6）在加载过程中的周向应变值  $\epsilon_\theta$  与外载荷  $P$  之间的关系的结果与试验值。

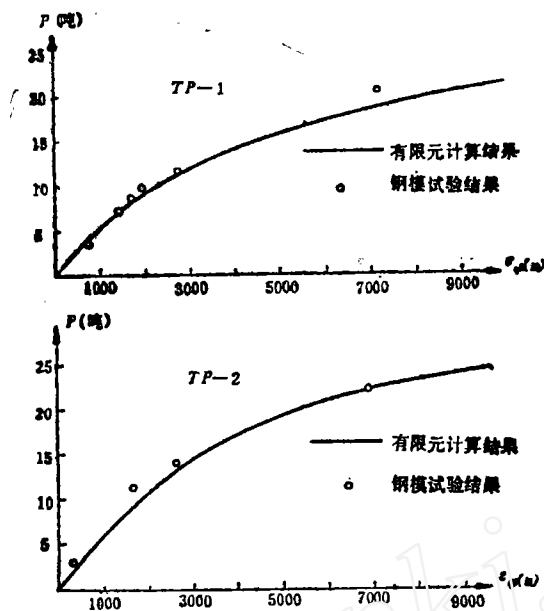


图 11 加载过程中 A 点应变-载荷曲线

## 七、结 束 语

本文利用拟协调圆柱壳元原理，分层子单元模型及薄壳拟子结构模型，推导了圆柱薄壳结构弹-塑性计算的有关列式，并结合分块顺序-逆序修正的算法，编制了相应的计算机程序，进行了圆柱薄壳结构的弹-塑性分析。数值计算表明本程序具有足够的精度，较好的收敛性以及计算省时等优点。计算结果与 T 型接头钢模试验的试验结果的比较，证明本文所提供的方法与程序是可行的，为薄壳结构的弹-塑性分析提出了一个新的有效的手段，具有较大的实用价值。

本文在实验中得到陈伯真副教授、徐汉涛、王友棋、张炳芝、周卓农、陈巍旻，刘勇辉及林忠钦等同志和实验室其他同志的大力帮助，特在此表示感谢！

## 参 考 文 献

- 〔1〕Dodds, Robert H. and Lopez, L. A., Substructuring in Linear and Non-linear Analysis, *Int. Jour. for Num. Meth., in Eng.* **15** (1980)
- 〔2〕陈铁云，杨文华，朱福根，吴水云，矩阵更新法在平面应力问题弹-塑性有限元分析中的应用，上海力学，2(1982)。
- 〔3〕唐立民，有限元分析的若干基本问题，大连工学院学报 2(1979)。
- 〔4〕唐立民，陈万吉，刘迎曦：有限元分析中拟协调元，大连工学院学报，2(1980)。
- 〔5〕陈万吉，刘迎曦，唐立民，拟协调元列式，大连工学院学报，2(1980)。

- [ 6 ] 刘迎曦, 吕和祥, 唐立民, 拟协调圆柱壳元, 大连工学院学报, 2(1981).
- [ 7 ] Wegmuller, A. W., Elastic-plastic Finite Element Analysis, Ingenieur-Archiv, 44(1975).
- [ 8 ] 王勋成, 常亮明: 用于结构弹塑性有限元分析的顺序-逆序修正法, 清华大学学报 2(1982).
- [ 9 ] 陈铁云, 吴水云, 朱农时, 海洋钻井平台 T 型接头的应力分析, 中国造船 4(1982).
- [ 10 ] 陈铁云, 沈一鸣, 环形加强的圆筒形壳在静力压力下的肋间弹-塑性弯曲, 中国造船, 4(1981) .
- [ 11 ] 朱福根, 束继兴, 海洋钻井平台 T 型管状接头的有限元分析, 上海交大学报, 2(1984).
- [ 12 ] Chen Tieyun, Chen Bozhen and Wang Yiuqi, Stress Analysis and Experimental Research of Tubular Joints of Offshore Drilling Platform, *Journal of Energy Resources Technology (ASME)* , 106, March(1984), 43—45.
- [ 13 ] Yang, W. H., A Method for Updating Cholesky Factorization of a Band Matrix, *Comp. Meth in App. Mech. and Eng.*, 12(1977).
- [ 14 ] 曲圣年, SAP5 程序的静力求解器, 机械强度, 3(1983).
- [ 15 ] Koichiro Yoshida, Taiji Inui and Kunihiko Iida, Behavior Analysis and Crack Initiation Prediction of Tubular T-Connections, OTC 2854(1977).
- [ 16 ] 李大潜, 有限元素法续讲 科学出版社 (1979).
- [ 17 ] 陈铁云, 陈伯真, 弹性薄壳力学, 华中工学院出版社 (1983).
- [ 18 ] 陈铁云, 陈伯真, 王友棋, 海洋工程结构中 T、Y、K 型管状接头的解析解法, 海洋工程, 1(1983), 24—35.
- [ 19 ] Chen Tieyun et al, The Application of the Method for Updating Cholesky Factorization of a Band Matrix in the Elastic-plastic Finite Element Analysis, Proc. of the International Conference on F. E. M., Shanghai, People's Republic of China (August 1982), Science Press, Beijing, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. New York, 849—858.

## The Elastic-plastic Finite Element Analysis of Circular Cylindrical Shell Structures

Chen Tieyun, Wu Shuiyun  
(Shanghai Jiaotong University)

### Abstract

The finite element analysis is a powerful tool for the elastic-plastic structures. But the change of the elements of global stiffness matrix requires the repeat

computations in the solution of equilibrium equations for the elastic-plastic finite element analysis of structures during each increase of loading. This requires also a lot of computing efforts and expensive costs. Some techniques, such as substructuring method and method of updating matrix were proposed by some investigators in order to overcome these shortages. These techniques up to date were only used in treating the elastic-plastic analysis of trusses, frames, plane stress problems and axisymmetric problems. The complication of thin shell structures makes the complication of elastic plastic finite element analysis of thin elastic-plastic structures. Besides the save of computing time in the solution of equilibrium equations, the save of computing effort and guarantee of enough accuracy of elastic-plastic finite element analysis of shell structures are required. The quasi-conforming elements and layered subelement model are used. The global stiffness matrix of each individual shell is assembled in blocks. The system of statically equilibrium equations are solved by the forward-backward sequence modification approach in Gauss elimination method. These elements have the advantages of simpler formulation, better convergence, less computing time and satisfying rigid body displacement modes, while the forward-backward sequence modification approach in blocks are used to restrict the solution of statically equilibrium equations in the plastic zones during each increase of loading, i. e. the modification of these elements of global stiffness matrix are only required, these elements reflect the parts of shell have entered into plastic zones. The idea of so-called quasi-substructuring technique is introduced in present paper, i. e. the individual shells are assembled at the intersection line between shells. The intersection line is discretized into finite number of points. The flexibility matrices connecting the interactive generalized forces and generalized strains of each individual shell can be found by solving their statically equilibrium equations by assuming the unit forces at these points with the forward-backward sequence modification approach in blocks. The generalized interactive forces at these points are found by the compatibility conditions and statically equilibrium conditions at these points and the equilibrium equations of individual shells. Finally, the generalized displacements, generalized strains of each individual shell can be found by superposition. All these save a lot of core memory, also guarantee the computing accuracy. The corresponding computer program was compiled with FORTRAN 77.

For the purpose of checking the above formulation, at first, the numerical example of elastic-plastic analysis of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure were computed and compared with the analytic results and experimental results by authors.

As an example of shell structure problem, the elastic-plastic analysis of tubular

(下转第 261 页)

$$p = \sqrt{1 + 6\varepsilon L/h} - 1$$

其中  $\varepsilon = \rho V^2 / 2\sigma^0$ ，为轴向总应变。将其代回前式得

$$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{6}{Lh}(\sqrt{1 + 6\varepsilon L/h} - 1)$$

若取  $\varepsilon = 0.03$ ，得  $L/n = 0.42(\text{in})$ ，而据〔4〕实验值为  $0.51(\text{in})$ 。〔4〕中理论值按位移扰动为  $0.54(\text{in})$ ，速度扰动为  $0.61(\text{in})$ ，再一次说明本文结果符合良好。而且容易看出，若考虑  $M$  的影响，上述全部结果将更接近实验值。

对〔4〕中其它试件，利用(22)和(23)同样可得  $n$  和  $\varepsilon$  关系式。计算表明，将其与〔4〕中实验数据比较，符合得也相当不错。

## 六、结 语

本文介绍的能量法则，为判断多么大的载荷下，结构将发生塑性动力屈曲提供了一种方法，这是以前的理论所未系统讨论过的一个重要问题。另外，从能量观点来计算屈曲型式，在塑性动力屈曲中尚未见过，具有概念明确，计算较简单的优点，是一种值得注意的尝试。

但本文只是一种初步的尝试。特别需要指出的是，能量法则通常只可给出稳定的充分条件，由此定出的临界量在一些问题中可能较保守，甚至很保守，需要具体情况具体分析。这是运用此能量法则必须注意的，如何改进有待进一步工作。

## 参 考 文 献

- 〔1〕Florence, A and Goodier, J. N., *J. Appl. Mech.*, **35** (1968), 80—86.
- 〔2〕Vaughan, H., *Z. A. M. P.*, **20** (1969), 321—328.
- 〔3〕Jones, N. and Papageorgiou, E. A., *Int. J. Mech. Sci.*, **24** (1982), 1—20.
- 〔4〕Goodier, J. N., In *Engineering Plasticity*, Heyman, J. and Leckie, F. A. (Ed.) Cambridge Press, Cambridge. (1968), 183—200.

(上接第 275 页)

T-joints of offshore drilling platform with branch tube under axial compression and corresponding experiments were carried out by us. The computing results are compared not only with our experimental results (elastic-plastic), and also with previous computed results and experimental results (elastic). All these computing results are quite close to the experimental results. These show that the present method is feasible. This provides a new way for the elastic-plastic analysis of thin shell structures and worth for practical purposes.