

一、

1. 递归算法是一种直接或者间接调用自身的算法。它的两个必要组成部分是递归基和递归步骤，缺少前者会导致无法得到结果，缺少后者会导致无限递归。
2. 递归算法的形式往往较简单，其效率往往较低。
3. 分治法是一种解决问题的策略，其核心思想是将一个复杂问题递归地分解为若干个规模较小但结构相似的子问题，直到这些子问题可以直接求解。最终，原问题的解通过合并子问题的解而获得。
4. 减治法是一种解决问题的策略，其核心思想是通过不断迭代逐步减少问题的规模，在每一次迭代中，问题的结构一般保持不变。
5. 变治法是一种解决问题的策略，其核心在于通过适当的变换手段，将原始问题转化为一种更简单的形式。
6. 将以下学习过的算法与对应的算法思想进行匹配分类
  - (1) 分治法思想：A. 快速排序, C. 二分查找, F. 大整数乘法, G. Strassen 算法
  - (2) 减治法思想：D. 快速幂, H. 俄罗斯农夫乘法
  - (3) 变治法思想：B. 拓扑排序, E. 高斯消元法, I. 堆排序

二、

1. 欧几里得算法体现的是减治法的思想。因为欧几里得算法通过不断迭代，将问题的规模逐步减少，直到问题变得简单，简单到可以直接解决

计算步骤：

$$408 = 252 * 1 + 156$$

$$252 = 156 * 1 + 96$$

$$156 = 96 * 1 + 60$$

$$96 = 60 * 1 + 36$$

$$60 = 36 * 1 + 24$$

$$36 = 24 * 1 + 12$$

$$24 = 12 * 2 + 0$$

最大公约数为 12

$$2. (1) f(15) = (15 \% 2) + f(15 / 2) = 1 + f(7)$$

$$f(7) = (7 \% 2) + f(7 / 2) = 1 + f(3)$$

$$f(3) = (3 \% 2) + f(3 / 2) = 1 + f(1)$$

$$f(1) = (1 \% 2) + f(1 / 2) = 1 + f(0)$$

$$f(0) = 0$$

$$\text{因此, } f(15) = 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 4$$

- (2) 这段函数的作用是计算  $n$  的二进制表示中 1 的个数。

(3)

$$\text{递归方程: } T(n) = T(n/2) + 1$$

$$\text{边界条件: } T(0) = 0$$

$$\text{时间复杂度: } O(\log n)$$

3. (1) 上述方法体现了分治法的思想。因为该方法通过将居民分为多组，递归地缩小问题规模，直到找到密接者。

- (2) 假设  $N = 2^k$ ,  $k = 10$ , 则最坏情况下需要做  $k$  次检测可以保证将传染病密接的居民

找出。比起蛮力法（即一位一位遍历检测），在最坏情况下能节省  $N - k$  次检测的次数。

(3)

递推关系式：  $T(N) = T(N/2) + 1$

边界条件：  $T(1) = 0$

时间复杂度：  $O(\log N)$

(4)

检测次数最少时，  $N = 2^k$ ，  $k$  为最小的正整数，即  $N = 2$ 。