

# 算法设计与分析——作业二

作业提交截止日期：2025.5.4 23:59:59

提交文件列表如下：

文件内容	文件格式	文件名
书面作业	.pdf	学号-姓名-hw2-书面作业.pdf
编程题的代码	/	学号-姓名-hw2-编程代码
编程题的文档	.pdf	学号-姓名-hw2-编程文档.pdf

## ① Note

将以上内容打包为一个.zip文件，命名为“学号-姓名-hw2-x.zip”，其中x是你所在班级的编号，具体如下：

罗烨老师上午班级：1，罗烨老师下午班级：2，朱亚萍老师班级：3，张苗苗老师班级：4

发送邮箱：[2433285@tongji.edu.cn](mailto:2433285@tongji.edu.cn)，邮件的主题即为“学号-姓名-hw2-x”，上传作业若成功，会收到回复邮件。

## ⚠ Caution

注意：与第一次作业提交作业的邮箱不同

## 作业要求：

1. 请尽量使用电子版的方式完成答题，如提交手写版的作业，请保持书写端正并将其扫描为足够清晰的pdf文件
2. 解答题的部分需要写明解题过程，若只给答案会扣除一定分数
3. 编程题目文档需要包括算法实现核心代码及其解释，测试用例通过的截图（截图中需要包含输入和输出）。缺少通过截图不得分

## 4. ⚠ Warning

切勿抄袭（抄袭同学或抄袭网上答案），如发现抄袭的情况，本次作业（抄袭者与被抄袭者）按照零分处理

## 一、概念梳理题（20%）

1. 递归算法是一种直接或者间接调用\_\_\_\_\_的算法。它的两个必要组成部分是\_\_\_\_\_和\_\_\_\_\_，缺少前者会导致无法得到结果，缺少后者会导致无限递归。
2. 递归算法的形式往往较\_\_\_\_\_（简单/复杂），其效率往往较\_\_\_\_\_（高/低）。
3. 分治法是一种解决问题的策略，其核心思想是将一个复杂问题递归地分解为若干个规模较小但结构相似的\_\_\_\_\_，直到这些问题可以\_\_\_\_\_。最终，原问题的解通过\_\_\_\_\_而获得。
4. 减治法是一种解决问题的策略，其核心思想是通过不断迭代逐步\_\_\_\_\_问题的规模，在每一次迭代中，问题的结构一般\_\_\_\_\_（发生改变/保持不变）。

5. 变治法是一种解决问题的策略，其核心在于通过适当的变换手段，将原始问题转化为一种更\_\_\_\_\_的形式。

6. 将以下学习过的算法与对应的算法思想进行匹配分类

- A. 快速排序      B. 拓扑排序      C. 二分查找      D. 快速幂      E. 高斯消元法  
F. 大整数乘法      G. Strassen算法      H. 俄罗斯农夫乘法      I. 堆排序

(1) 分治法思想：\_\_\_\_\_

(2) 减治法思想：\_\_\_\_\_

(3) 变治法思想：\_\_\_\_\_

---

## 二、解答题 (40%)

1. 欧几里得算法体现的是哪种解决问题策略的思想？为什么？利用欧几里得算法，求解408和252的最大公约数，写出你的计算步骤 (7%)

2. 阅读以下函数的代码，完成下列问题 (4%+4%+7%)

```
int f(int n)
{
    if (n == 0)
        return 0;
    else
        return (n % 2) + f(n / 2);
}
```

(1) 模拟函数的运算，求解f(15)，写出你的具体过程

(2) 这段函数的作用是什么？

(3) 写出这个函数的递归方程，并给出边界条件，然后依此推导该函数对应算法的时间复杂度

3. 现已知某社区共有 $n$ 个居民 ( $n$ 是一个较大的正整数), 其中有且仅有1位居民为传染病密接, 需要通过核酸检测的方式将该居民找出。为了增加筛查的效率, 现采用如下的策略进行核酸检测:

(4%+4%+7%+3%)

① 将居民分为 $k$ 组, 将每一组内的所有居民的核酸样本混合在一起进行检测。若该组所有人的核酸样本均为阴性, 则总的检测结果为阴性, 否则为阳性。

② 对于检测为阴性的组别, 不再进行检测;

③ 对于检测为阳性的组别, 重复①中的操作, 直到当某组仅含1份样本时, 检测结束。

**【注】**基于平滑性原则, 可认为本题中的 $n$ 是 $k$ 的幂, 即:  $n = k^m$ ,  $m$ 为正整数。

(1) 上述方法体现了哪种解决问题策略的思想? 结合本题与相关概念说明理由。

(2) 假设 $n = 1000$ ,  $k = 10$ , 则最坏情况下需要做几次检测可以保证将传染病密接的居民找出? 比起蛮力法 (即一位一位遍历检测), 在最坏情况下能节省多少次检测的次数?

(3) 写出检测次数 $T(n)$ 的递推关系式, 并给出边界条件, 然后依此推导该函数对应算法的时间复杂度

(4) 基于 (3) 中的推导得到的检测次数 $T(n)$ , 试求: 当 $k$ 取什么值的时候, 检测次数最少?

### 三、编程题（40%）

在图像存储的时候，我们可以使用不同的数值对应不同像素点的颜色。例如，若一张图像只采用黑，白二色进行存储，我们可以用0表示黑色像素点，用1表示白色像素点。现考虑一张大小为 $N \times N$ 的正方形的黑白图像（其中 $N$ 为2的幂，即 $N = 2^n, n$ 为正整数）。现定义该图像的“结构度”如下：

- ① 若该图像所有像素点的颜色相同，则该图像的结构度为1
- ② 否则，将该图像分割为右上、左上、左下、右下，共四个形状，大小都相同的正方形子图像，总图像的结构度为这四个子图像的结构度之和再加一
- ③ 单个像素点，不论其是什么颜色，结构度均为1.

试着编写代码，完成一个图像结构度的计算。

**输入第一行：** N的大小（需要确保是2的幂）

**输入第二行及以后：** 图像所对应的像素点矩阵

#### 示例1

**输入**

```
2
1 1
1 1
```

**输出**

```
1
```

#### 示例2

**输入**

```
4
0 0 0 1
0 0 0 0
0 0 0 0
0 0 0 0
```

**输出**

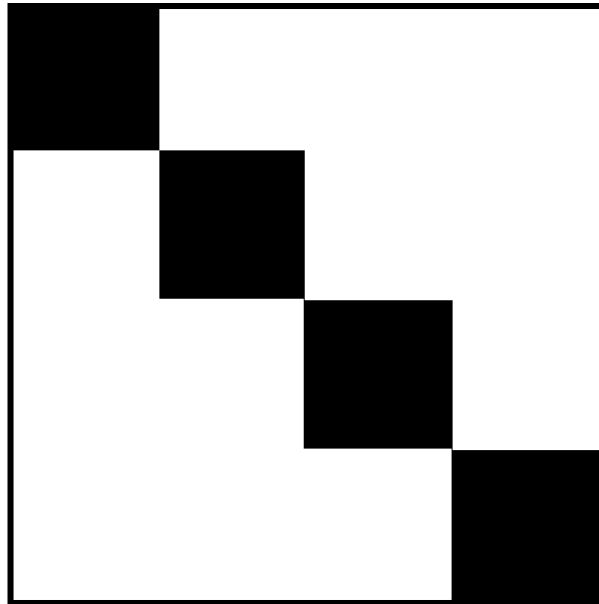
```
9
```

## 完成下列习题

### 💡 Tip

以下内容请写在编程题文档中

(1) 以下是一张大小为 $4 \times 4$ 的图像，请问该图像的结构度是多少？请给出计算的过程。



(2) 该问题可以采用哪种解决问题的策略解决？结合相关概念进行分析。

(3) 使用C++语言编写相关代码，并在文档中给出算法实现核心代码及其解释

(4) 在文档中给出测试用例通过的截图（截图中需要包含输入和输出，可以适当加入一些输入输出提示语句）

【测试用例截图共需四个：① 示例1，② 示例2，③ 第（1）问对应图像，④ 自己编写一个测试用例】

(5) 分析你的代码中的函数在最坏条件下的时间复杂度