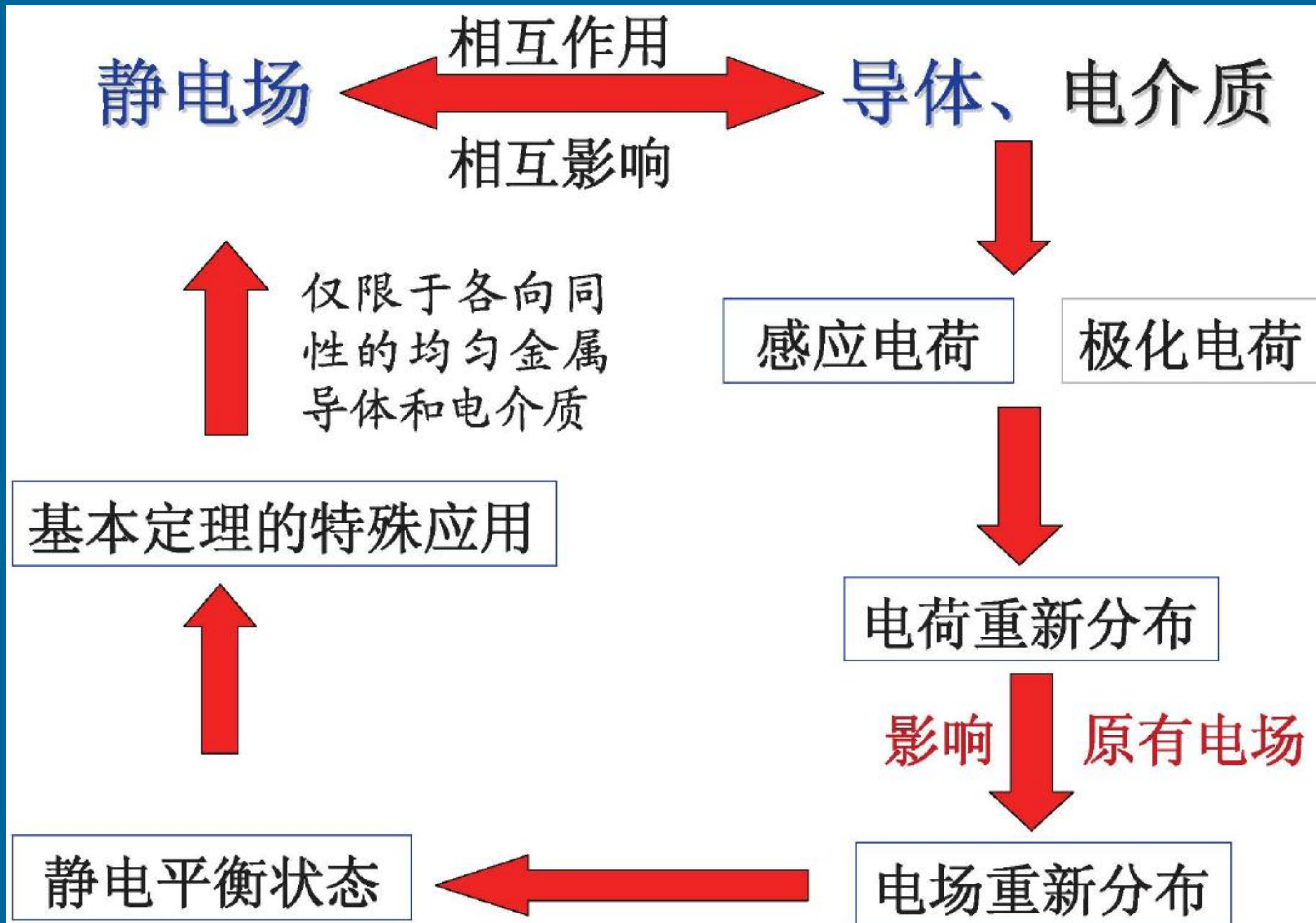
静电场与介质的相互作用

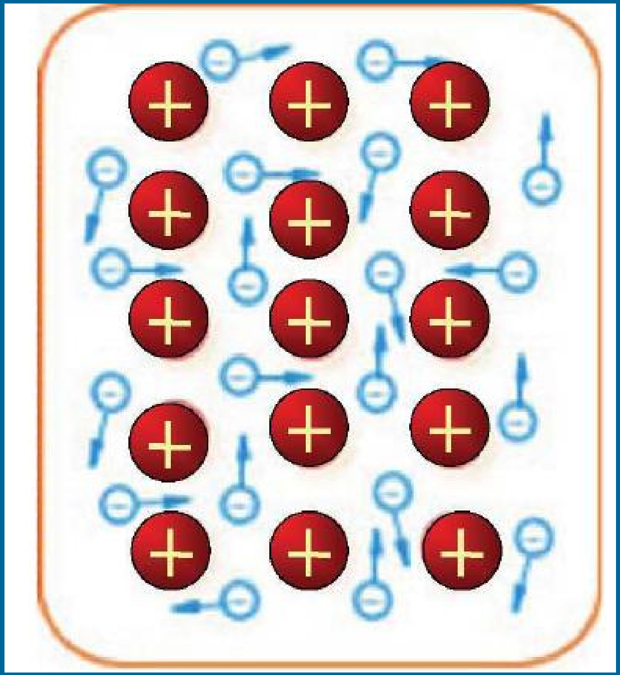


9.7 静电场中的导体

一. 导体的静电平衡

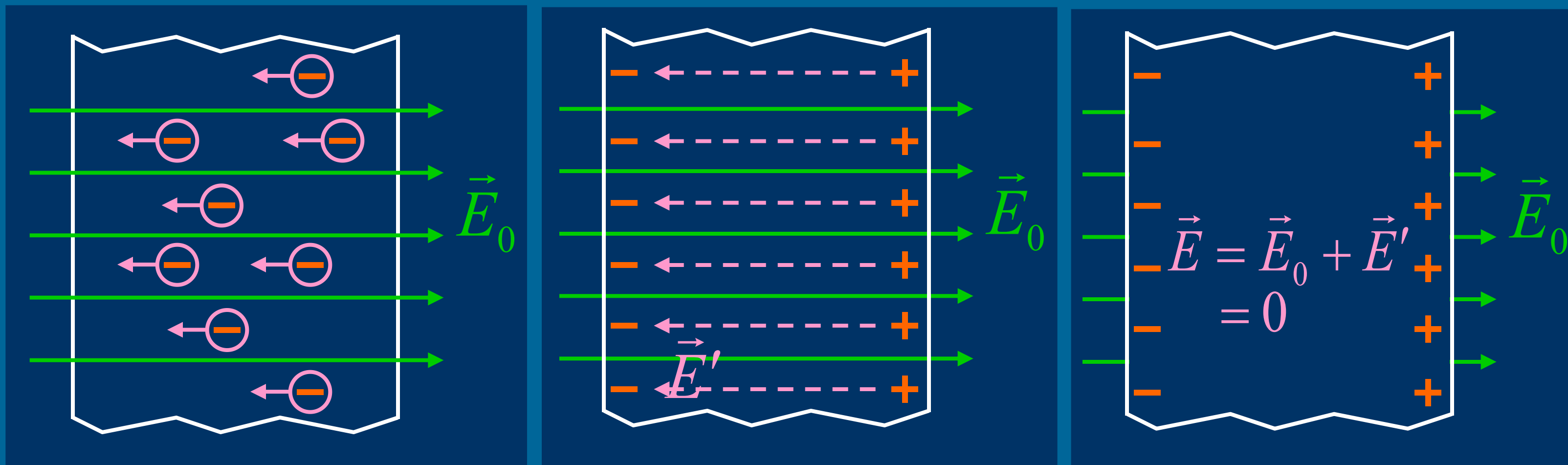
金属导体的电学结构

金属导体: 带负电的自由电子和带正电的晶格点阵组成.当导体不带电也不受外电场的作用时，只有微观的热运动。自由电子在金属中可以向理想气体分子一样自由运动，它们为整个金属晶格所共有，因此称为自由电子气体。



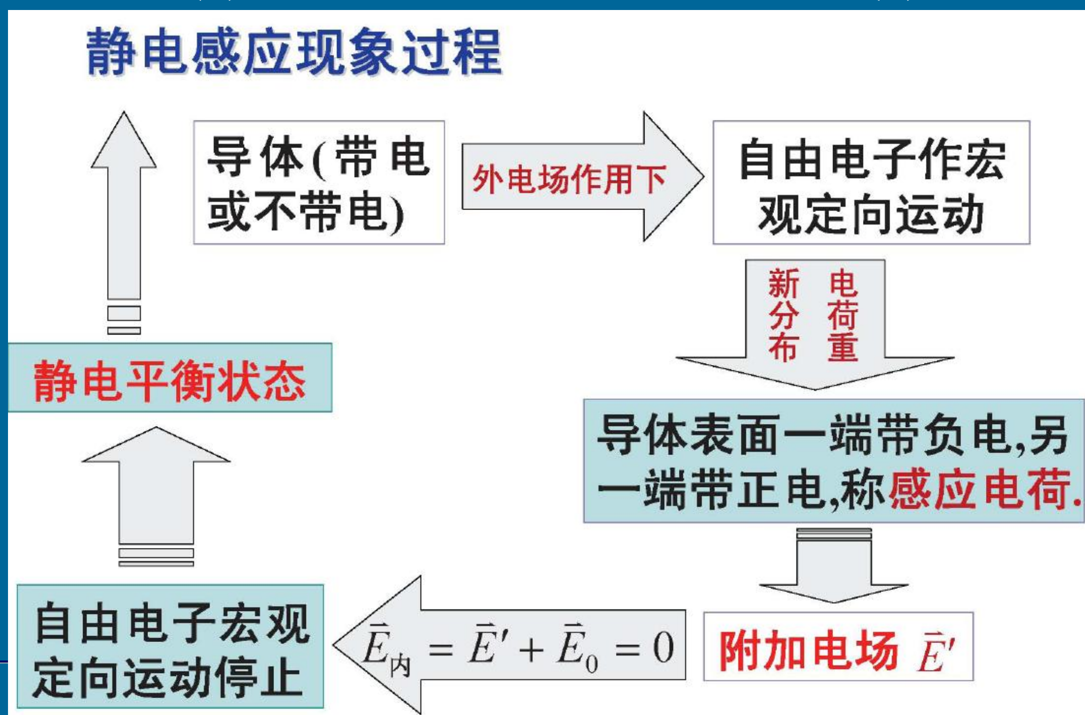
热平衡特征: 任意划取的微小体积元内，自由电子的负电荷和晶体点阵上的正电荷的数目相等，整个导体或其中任一部分都显现电中性.

- 静电感应



在外电场的作用下，自由电子做宏观定向移动,导体中出现电荷重新分布。

静电感应的结果：(1) 导体上的电荷重新分布； (2) 空间电场重新分布。



1. 静电平衡

导体内部和表面上任何一部分都没有宏观电荷运动，我们就说导体处于静电平衡状态，无论导体是否带电，无论其是否处于外电场中。

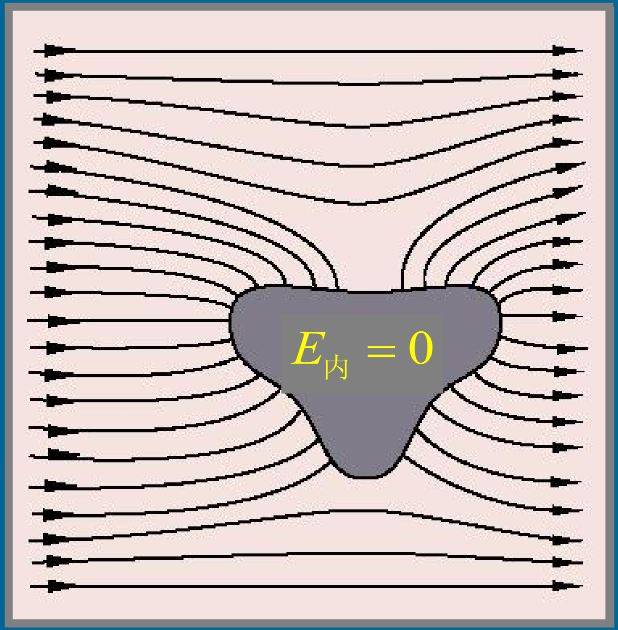
2. 导体静电平衡的条件

$$\boxed{E_{内} = 0}$$

$$\boxed{\vec{E}_{表面} \perp \text{ 导体表面}}$$

3. 静电平衡导体的电势

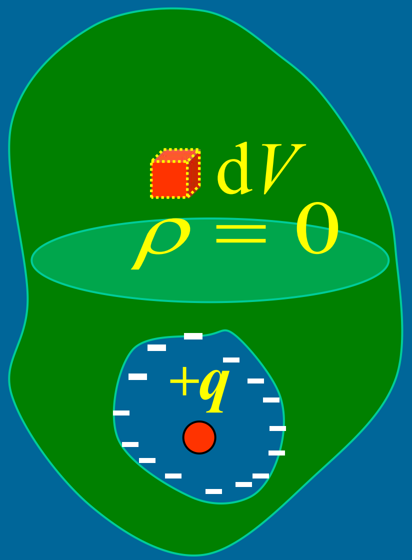
导体静电平衡时，导体上各点电势相等，即导体是等势体，表面是等势面



$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

二.导体上电荷的分布

由导体的静电平衡条件和静电场的基本性质，可以得出导体上的电荷分布



1. 静电平衡导体的内部处处不带电

证明：在导体内任取体积元 dV

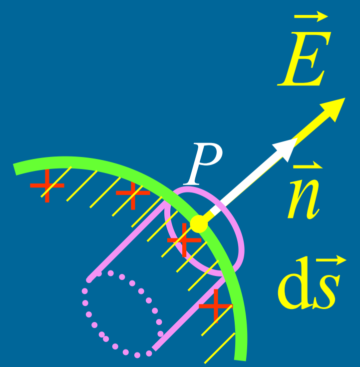
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \xrightarrow{\text{由高斯定理}} \sum_i q_i = \int_V \rho \mathrm{d}V = 0$$

∵体积元任取 ⟶ 导体中各处 $\rho = 0$

2. 静电平衡导体表面附近的电场强度与导体表面电荷的关系

设导体表面电荷面密度为 $\sigma(x,y,z)$

设 P 是导体外紧靠导体表面的一点,相应的电场强度为 $\vec{E}_{表}(x,y,z)$

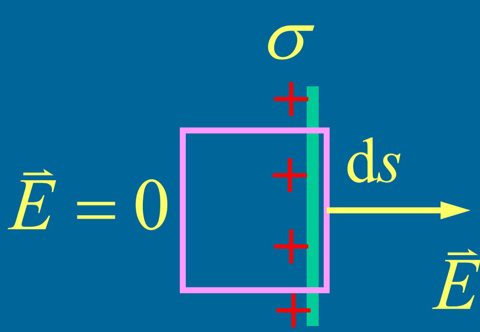


确定电场强度 E 和电荷密度 σ 的关系:

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E_{表}\mathrm{d}S = \frac{\sigma \mathrm{d}S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}}$$

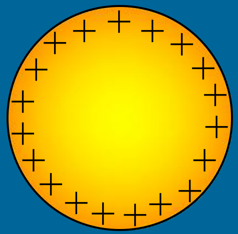
为导体外法线方向



注意：上式中的电场是合场强。

3. 处于静电平衡的孤立带电导体电荷分布

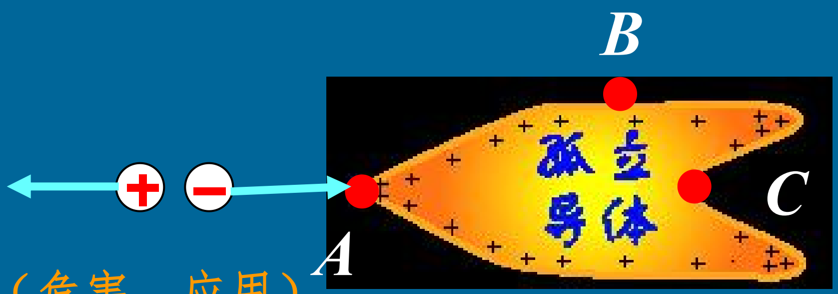
孤立带电导体球



由实验可得以下定性的结论：$\sigma \propto \dfrac{1}{R}$

$$E_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

尖端放电（危害、应用）



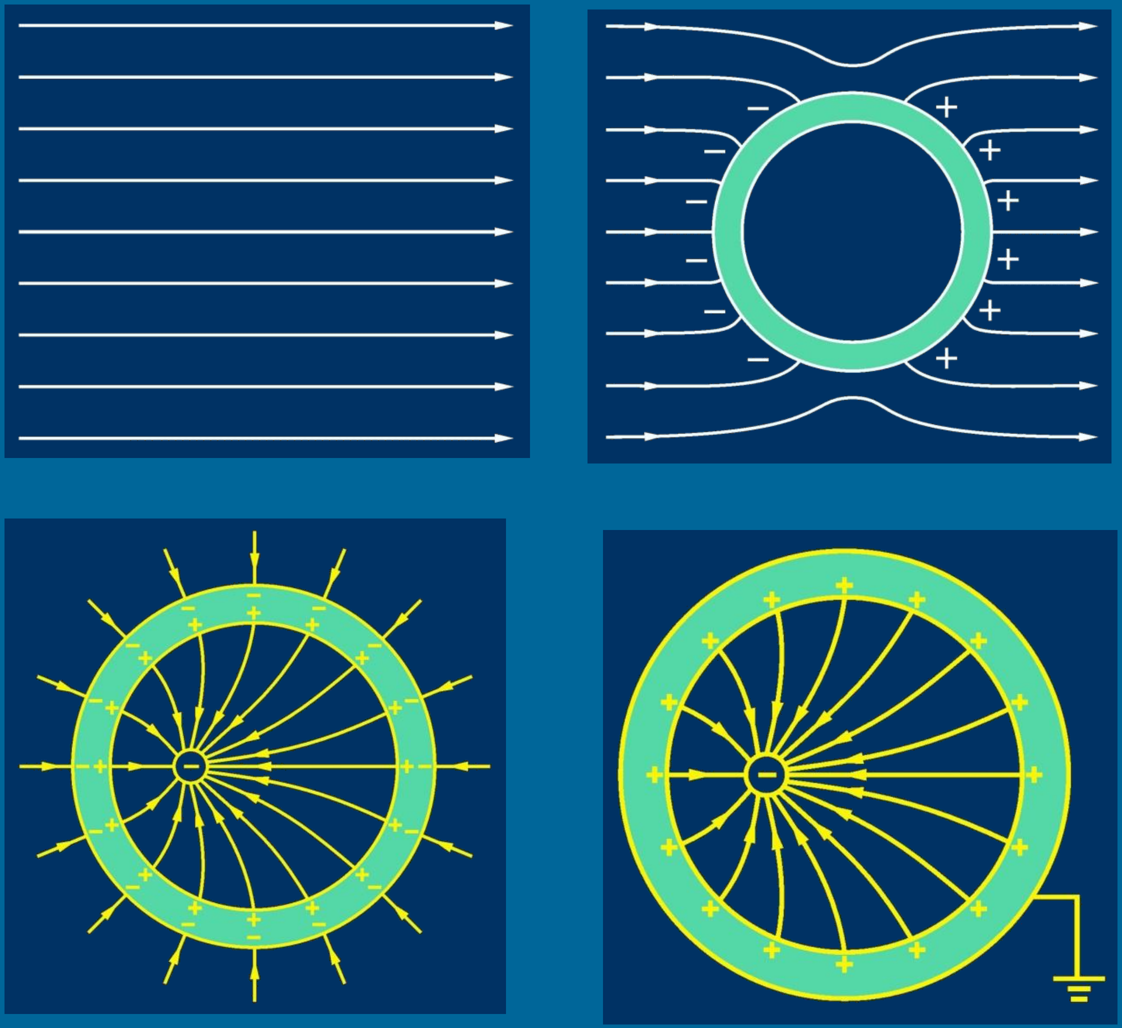
$$\sigma_A > \sigma_B > \sigma_C$$

4.静电屏蔽

导体带电只能在表面！

- 如果,有空腔,且空腔中无电荷,则　电荷只能分布在外表面！
- 如果,有空腔,且空腔中有电荷,则　在内外表面都分布有电荷分布！

- 静电屏蔽



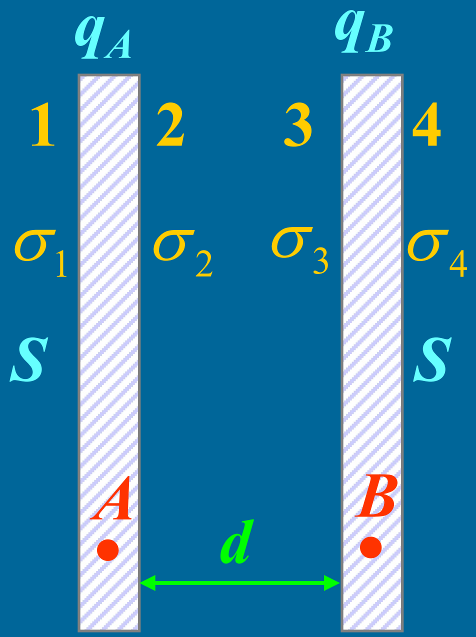
腔内、腔外的场互不影响。

例1 两块等面积的金属平板，分别带电荷q_A和q_B，平板面积均为S，两板间距为d，且满足面积的线度远大于d。

求 静电平衡时两金属板各表面上的电荷面密度。

解 如图示，设4个表面的电荷面密度分别为q_1、q_2、q_3和q_4，由电荷守恒，得

$$\sigma_1 S+\sigma_2 S=q_A,\quad \sigma_3 S+\sigma_4 S=q_B \qquad ①$$



在两板内分别取任意两点A和B，则

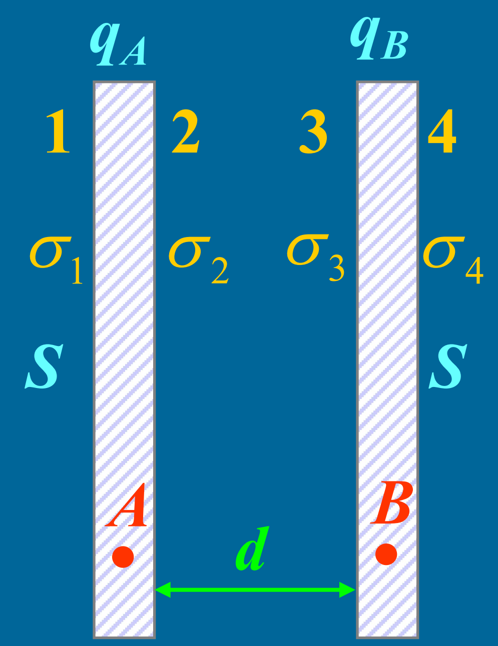
$$\left.\begin{aligned} E_A&=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0\\ E_B&=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4=0\\ \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4=0\end{cases} \Rightarrow \sigma_1=\sigma_4,\quad \sigma_2=-\sigma_3$$

代入①，得

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_A + q_B}{2S}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q_A - q_B}{2S}$$



可见，A、B两板的内侧面带等量异号电荷；两板的外侧面带等量同号电荷。

◆ 特别地，若$q_A = -q_B = q$，则

$$\sigma_1 = \sigma_4 = 0 \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = q/S$$

电荷只分布在两板的内侧面，外侧面不带电。

例2 半径为R_1的导体球带有电荷q，球外有一个内、外半径为R_2、R_3的同心导体球壳，壳上带有电量为Q，如图所示，求:

（1）两球的电势V_1和V_2，

（2）两球的电势差 $\Delta V = V_1 - V_2$

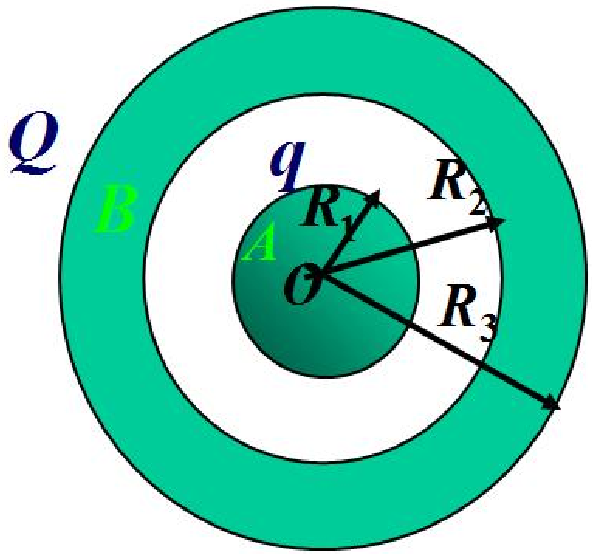
(3) 用导线把球和球壳联在一后，V_1 和 V_2及 ΔV分别是多少

（4）在情形（1）、（2）中，若外球接地，

V_1 和V_2 及ΔV分别是多少？

(5)设外球离地面很远，若内球接地，

$V_1,V_2,\Delta V$各为多少？

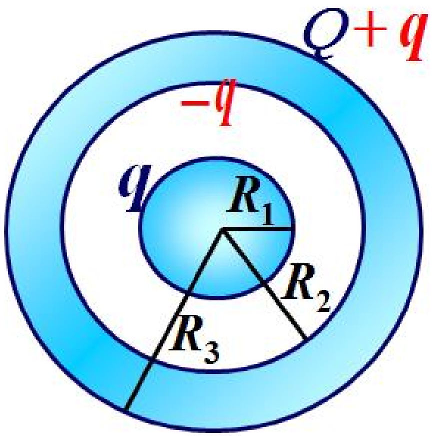


解：(1) 各球面所带的电荷：

由于静电感应，静电平衡时电荷分布

导体球表面：q

导体球壳：$\begin{cases} \text{内表面：} -q \\ \text{外表面：} Q+q \end{cases}$ （电荷守恒）

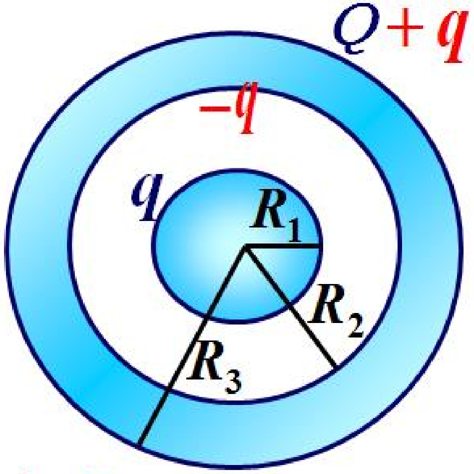


(2) 先用高斯定理求场强分布，再用积分求电势。

由高斯定理：

$$E = \begin{cases} 0 & (r < R_1) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_1 < r < R_2) \\ 0 & (R_2 < r < R_3) \\ \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r > R_3) \end{cases}$$

导体球的电势 V_1



$$V_1=\int_{R_1}^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_2}^{R_3}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_3}^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r+\int_{R_2}^{R_3}0\,\mathrm{d}r+\int_{R_3}^{\infty}\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

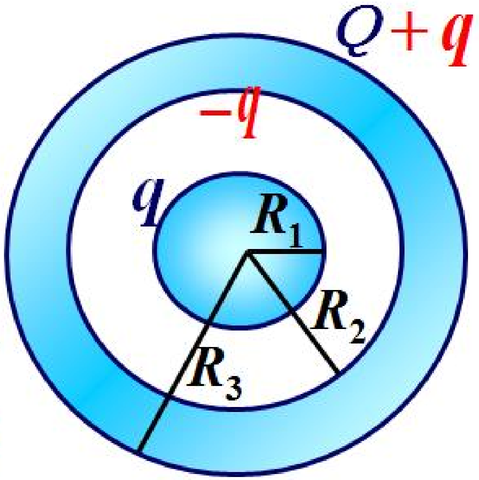
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1}+\frac{-q}{R_2}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{R_3}$$

导体球壳的电势 V_2

$$V_2=\int_{R_3}^{\infty}E\cdot\mathrm{d}r=\int_{R_3}^{\infty}\frac{(Q+q)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{R_3}$$

方法二：电势叠加法：

导体组可看成三层均匀带电球面



$$V_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$V_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{R_3}$$

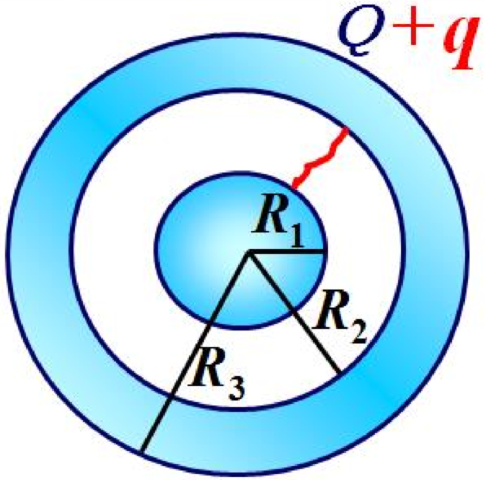
(2)两球的电势差：

$$\Delta V=V_1-V_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1}-\frac{q}{R_2}\right)$$

(3) 用导线连接两球，电荷重新分布:

导体球表面:　0

导体球壳: $\begin{cases} \text{内表面: } 0 \\ \text{外表面: } Q+q \end{cases}$

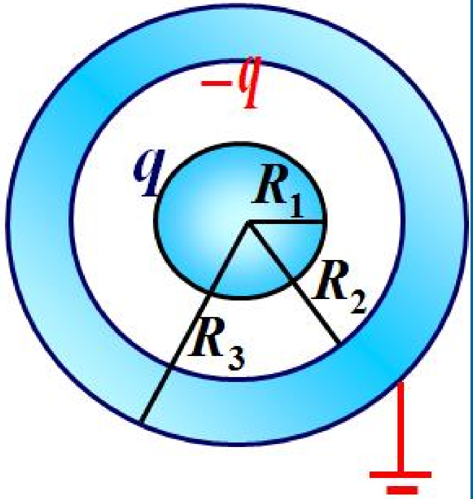


$$V_1 = V_2 = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}, \quad \Delta V = 0$$

(4) 导体球壳接地，电荷重新分布:

导体球表面:　q

导体球壳: $\begin{cases} \text{内表面: } -q \\ \text{外表面: } 0 \end{cases}$

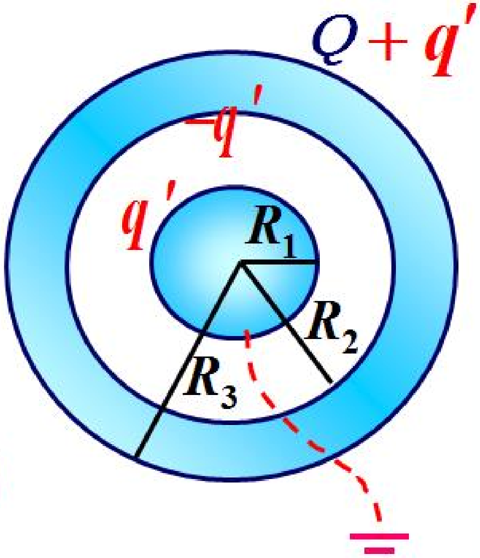


$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}, \quad V_2 = 0, \quad \Delta V = V_1$$

(5) 内球接地，$V_1=0$，电荷重新分布：

导体球表面：q'

导体球壳：$\begin{cases} \text{内表面：} & -q' \\ \text{外表面：} & Q+q' \end{cases}$



$$V_1=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q'}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=0$$

得： $$q'=\frac{-Q R_1 R_2}{R_1R_2+(R_2-R_1)R_3}$$

$$V_2=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}+\frac{-q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}+\frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=\frac{Q+q'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(R_2-R_1)}{R_1R_2+(R_2-R_1)R_3}\text{，}\Delta V=V_1-V_2=-V_2$$

例3：接地导体球附近有一点电荷，求：导体上的感应电荷。

解：　接地导体球：　$V=0$

设导体球上的感应电荷为 $q'_{感}$，

导体是等势体，O 点电势=0 ：

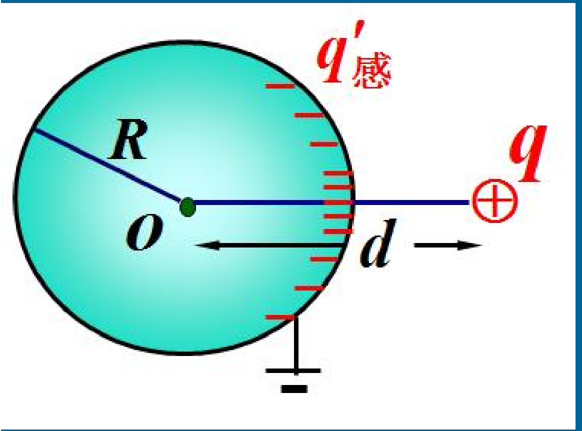
$$V_O = 0$$

$$\because \quad V_O = V_{感} + V_q$$

$$\therefore \quad V_O = \frac{q'_{感}}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} = 0$$

得：

$$q'_{感} = -\frac{R}{d} q$$



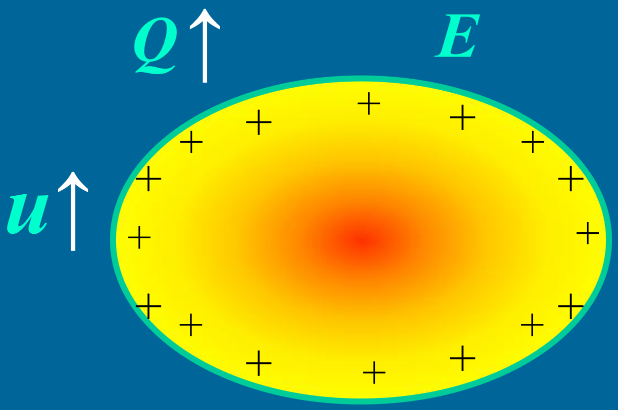
三. 孤立导体的电容

孤立导体的电势 $u \propto Q$

$$\boxed{C = \frac{Q}{u}}$$

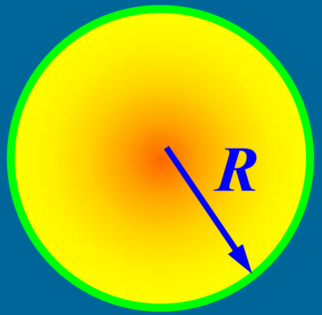
孤立导体的电容

单位:法拉(F)



电容只与导体的几何因素和介质有关，与导体带电量和电势大小无关；物理意义: 导体每升高单位电势所需的电量

求半径为*R* 的孤立导体球的电容.



电势为 $u = \dfrac{Q}{4\pi\ \varepsilon_0 R}$

电容为 $C = 4\pi\varepsilon_0 R$

四. 电容器的电容

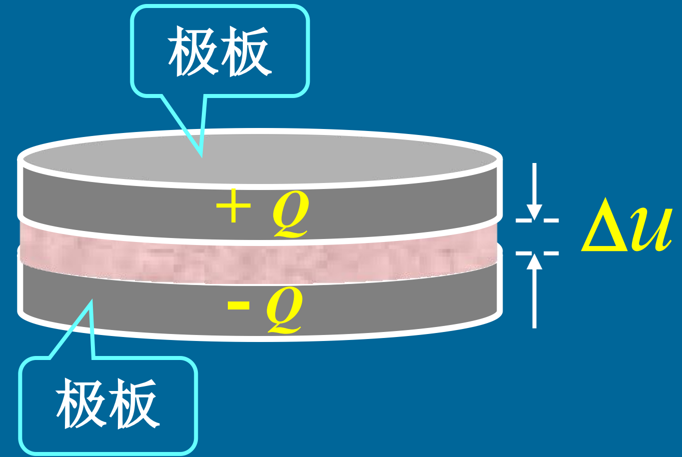
通常，由彼此绝缘相距很近的两导体构成电容器。

使两导体极板带电 $\pm Q$

两导体极板的电势差

$$\Delta u \propto Q$$

电容器的电容 $\boxed{C = \dfrac{Q}{\Delta u}}$



电容器电容的大小取决于极板的形状、大小、相对位置以及极板间介质。

- 电容器电容的计算

$$Q \longrightarrow \vec{E} \longrightarrow \Delta u \longrightarrow C=\frac{Q}{\Delta u}$$

(1) 给电容器充电 $\pm Q$ 用高斯定理求 $\boldsymbol{E}$；

(2) 由 $U_{AB}=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 求 U_{AB} ；

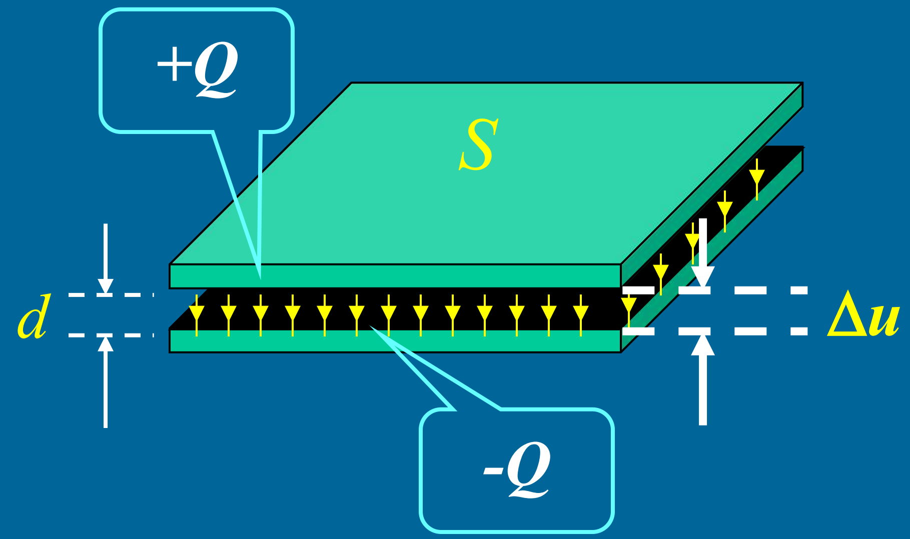
(3) 由定义 $C=Q/U_{AB}$ 计算 C 。

(1) 平行板电容器 书中例题**8.29(P.334)**

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta u = Ed = \frac{Qd}{S\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta u} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

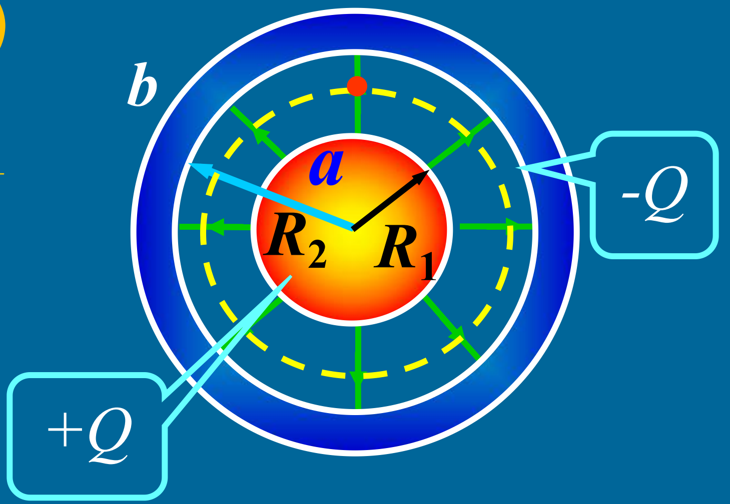


(2) 球形电容器 书中例题**8.30(P.334)**

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Delta u = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta u} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$



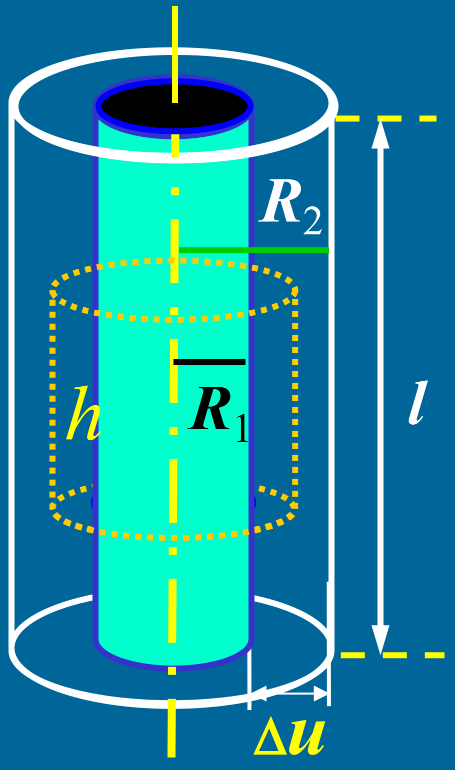
(3) 柱形电容器　书中例题8.31(P.335)

$$2\pi rhE=\frac{Qh}{\varepsilon_0 l}\qquad (R_1<r<R_2)$$

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 rl}\qquad (R_1<r<R_2)$$

$$\Delta u=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 lr}\mathrm{d}r=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

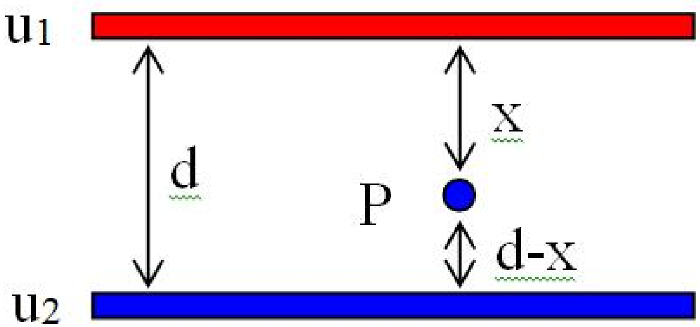
$$\boxed{C=\frac{Q}{\Delta u}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}}$$



书中例题 8.32(P.335)

由两个半径为 a 的平行长直导线，轴间距离为 d>>a。线电荷密度分别为＋λ 和－λ。

求：单位长度平行直导线之间的电容。



解：由高斯定理可求出

直导线在 P 点产生的电场强度大小分别为：

$$E_+ = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \quad \text{和} \quad E_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-x)}$$

E_+和 E_-的方向一致，所以：

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)$$

$$u_1 - u_2 = \int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_a^d \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)dx = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}$$

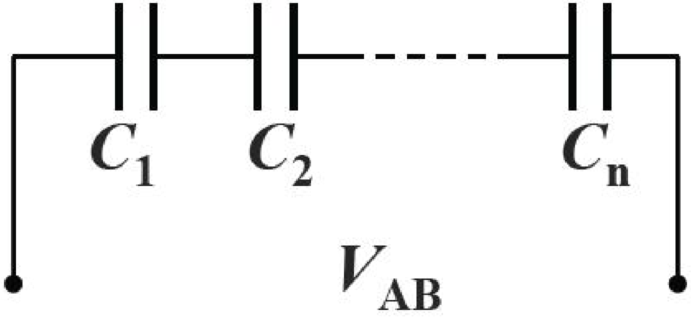
电容器的电容：

$$C = \frac{q}{u_1 - u_2} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/a)}$$

任何导体之间都存在着电容，在电子线路中，这种电容称为分布电容，一般情况下分布电容值很小，可忽略不计，但在高频电路中，需要考虑分布电容。

电容器的串联和并联

1.电容器的串联



设各电荷带电量为q

$$V_1 = q/C_1 \qquad V_2 = q/C_2 \qquad \cdots$$

$$V_{AB} = V_1 + V_2 + \cdots V_n = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)q$$

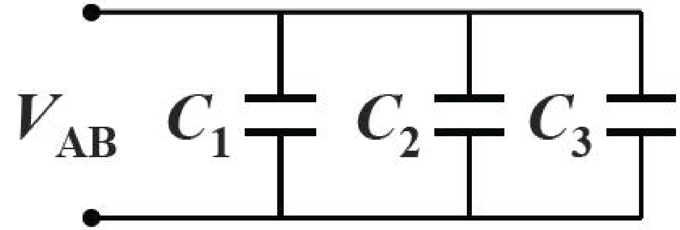
等效电容:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{C_n}$$

结论: 串联电容器的等效电容的倒数等于各电容的倒数之和.

2. 电容器的并联

$$q_1 = C_1 V_{AB} \quad q_2 = C_2 V_{AB} \quad \cdots$$



总电量：

$$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n = (C_1 + C_2 + \cdots C_n) V$$

等效电容: $$C = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

结论:

并联电容器的等效电容等于个电容器电容之和.

- 电容器的应用：

  储能、振荡、滤波、移相、旁路、耦合等。

- 电容器的分类

  形状：平行板、柱形、球形电容器等

  介质：空气、陶瓷、涤纶、云母、电解电容器等

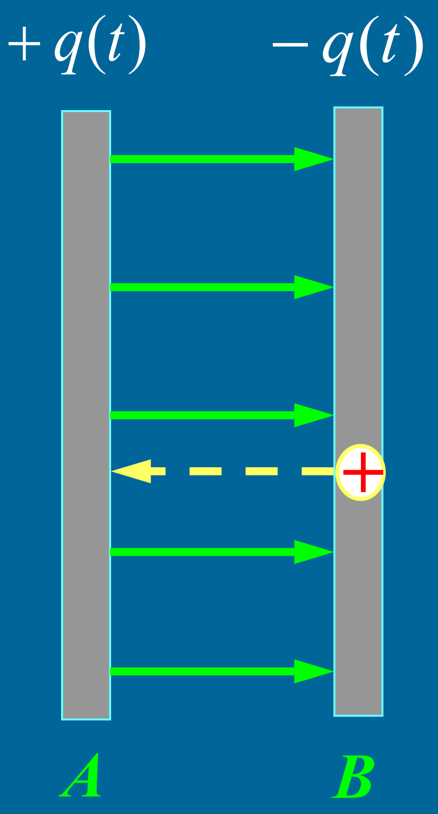
  用途：储能、振荡、滤波、移相、旁路、耦合电容器等。

9.8 电场能量

以平行板电容器为例，来计算电场能量。

设在时间 t 内，从 B 板向 A 板迁移了电荷 $q(t)$

$$u(t)=\frac{q(t)}{C}$$



在将 $\mathrm{d}q$ 从 B 板迁移到 A 板需作功

$$\mathrm{d}A=u(t)\mathrm{d}q=\frac{q(t)}{C}\mathrm{d}q$$

极板上电量从 0 —Q 作的总功为

$$A=\int \mathrm{d}A=\int_0^Q\frac{q(t)}{C}\mathrm{d}q=\frac{Q^2}{2C}$$

$$W = A = \frac{Q^2}{2C} \xrightarrow{Q=CU} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

忽略边缘效应，对平行板电容器有

$$U = Ed \qquad C = \frac{\varepsilon_0 s}{d}$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 sd = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$$

能量密度 $$\boxed{w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$ （适用于所有电场）

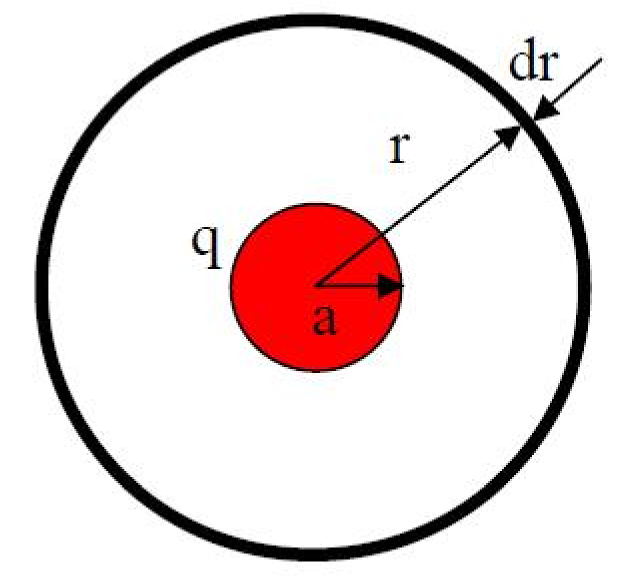
不均匀电场中 $$\mathrm{d}W = w\mathrm{d}V$$

$$\boxed{W = \int_V \mathrm{d}W = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \mathrm{d}V}$$

书中例题 8.33(P.338)　重点

半径为 a，带电量为 q 的孤立金属球，

求：它所产生的电场储存的静电能。



解：由高斯定理可求出电场强度

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

半径为 r，厚度为 dr 的球壳中的静电能为：

$$dW=wdV=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2 4\pi r^2dr$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 4\pi r^2dr$$

$$=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

整个空间中电场的能量为 a 到∞的积分

$$W=\int_V dW=\int_a^\infty\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}dr=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

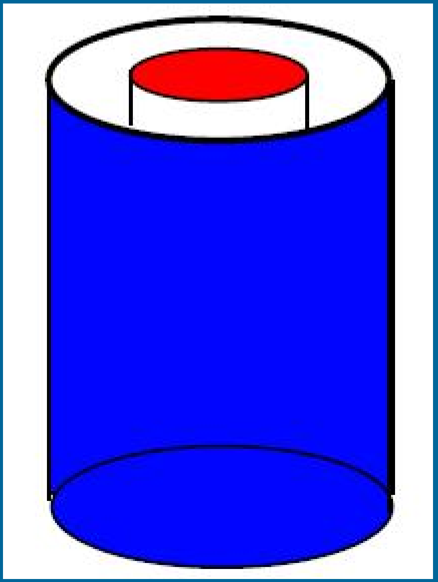
书中例题 8.33(P.338)　　重点

圆柱形电容器长为 L，半径分别为

R_1、R_2，长度 $L>>R_2-R_1$

带电量分别为＋Q 和－Q。

求：球形电容器的电场中的能量。



解：由高斯定理可求出电场强度为：

$$E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}$$

电场能量密度为：

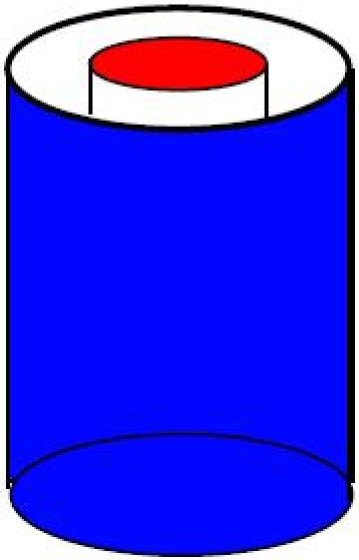
$$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 L^2 r^2}$$

取圆柱薄层半径为 r，厚度为 dr，长为 L，则体元为：

$$dV = 2\pi rL dr$$

体元中电场的能量：

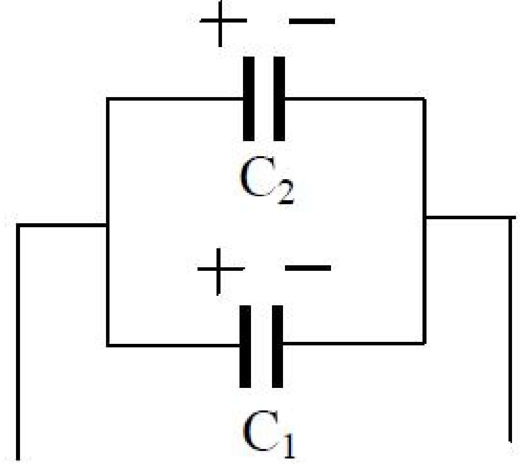
$$dW = wdv = \frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 L^2 r^2} 2\pi rLdr = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 Lr} dr$$



圆桶之间的电场能量为 R_1 到 R_2 间的积分：

$$W = \int_V wdv = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} \frac{dr}{r} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 L} \ln\frac{R_2}{R_1}$$

书中例题 8.35(P.339)



如图两电容并联

$C_1 = 1\mu F$，$u_1 = 100V$

$C_2 = 1\mu F$，$u_2 = 200V$

求：并联前后电容器所储存的静电能。

解：并联前

$W_1 = \frac{1}{2} C_1 u_1^2 = \frac{1}{2} \times 1.0 \times 10^{-6} \times 100^2 = 0.005(J)$

$W_2 = \frac{1}{2} C_2 u_2^2 = \frac{1}{2} \times 2.0 \times 10^{-6} \times 200^2 = 0.04(J)$

总能量：$W = W_1 + W_2 = 0.045$（J）

并联后，$C = C_1 + C_2$ ，$Q = Q_1 + Q_2$

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(Q_1 + Q_2)^2}{2C} = \frac{(C_1 u_1 + C_2 u_2)^2}{2C} = 0.042(J)$$