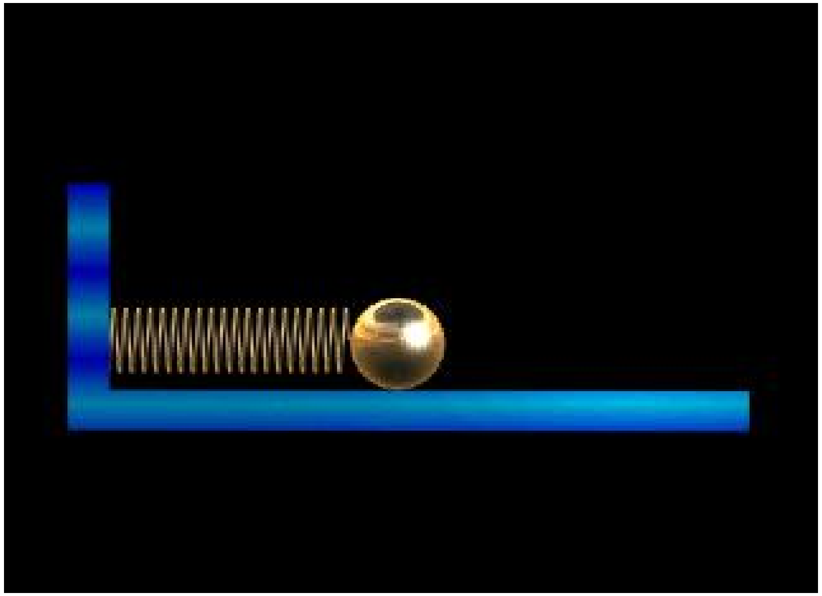
# 第 七 章

# 机械振动

1. 简谐振动
2. 振动的合成与分解
3. 阻尼振动和受迫振动

**机械振动 — 物体在一定位置附近作来回往复的运动。**



**振动有各种不同的形式：　机械振动、电磁振动、　…**

**广义振动：**

**任一物理量(如位移、电流等)在某一数值附近反复变化。**

# §7—1　简谐振动

## ★ 简谐振动

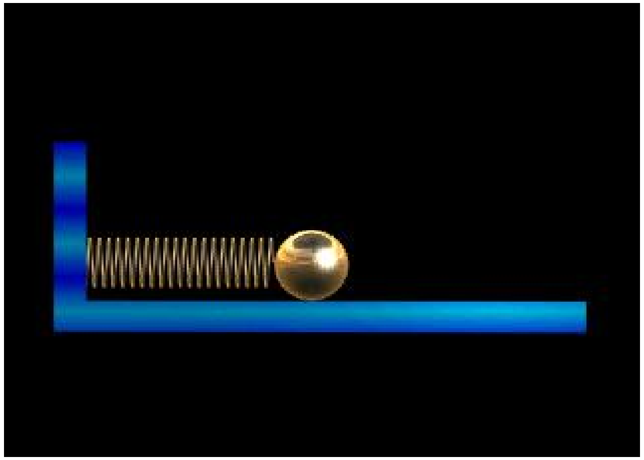
—— 物体振动时，离开平衡位置的位移 $x$ (或角位移 $\theta$ ) 随时间 $t$ 的变化可表示为余弦函数或正弦函数：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

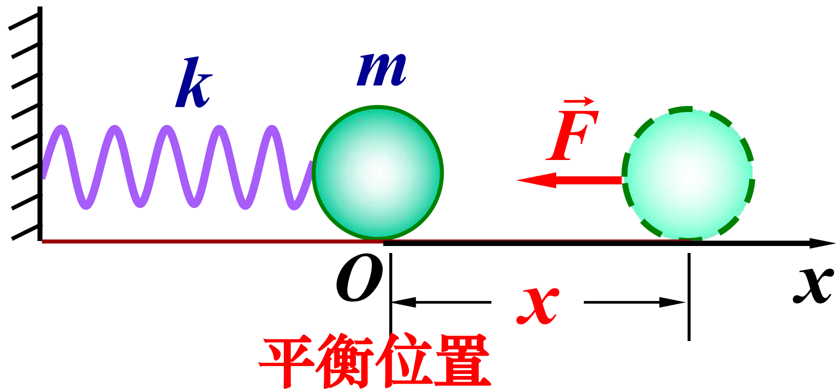
A：振幅，振动幅度的大小，由初条件决定。

ω：角频率（圆频率），振动系统固有的频率

φ：初相位，由初条件决定。



物体在平衡位置的两侧，在弹性恢复力和惯性两个因素互相制约下，不断重复相同的运动过程。




## 一、简谐振动方程

### 1. 动力学特征

系统受力:力的大小与位移成正比，方向与位移方向相反。

$$F = -k\,x$$

### 2. 运动学特征

由牛顿定律： $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$ 得： $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$

令： $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

得谐振动的微分方程：

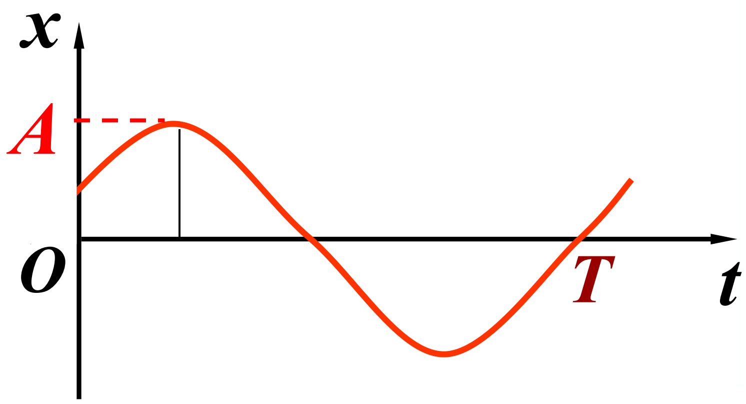
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 x=0$$

3. 运动方程----微分方程的解 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

谐振动的运动方程 — 振动方程。

凡是具有以上受力特征、运动微分方程和运动方程的运动均为简谐振动

$x\sim t$ 关系曲线称振动曲线。




★ 简谐振动特点：

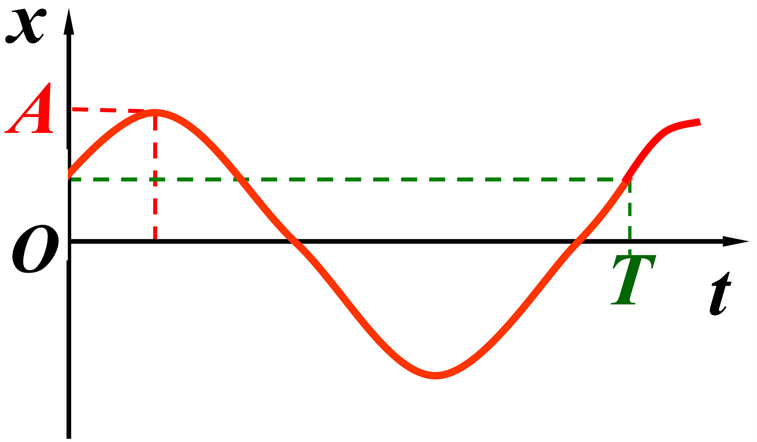
(1) 等幅振动；

(2) 周期振动。

## 二　描述简谐振动的特征量

谐振动方程：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$




1、振幅 $A$ — 最大位移的绝对值。

(参考圆的半径)

### 2、周期、频率和角频率

1）. 周期 $T$ — 完成一次全振动所需的时间

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

弹簧振子：$\omega = \sqrt{k/m}$，$\therefore \quad T = 2\pi\sqrt{m/k}$

2）. 频率 $\nu$ — 单位时间内完成全振动的次数。

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$$

3）. 角频率 $\omega$ — 旋转矢量的角速度。(亦称圆频率)

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu$$

## 3、相位和初相

1）. 相位 $(\omega t+\varphi)$

决定物体的振动状态或旋转矢量在参考圆上的位置。

(1) $(\omega t+\varphi)$ 可确定 $t$ 时刻的 $x$、$v$、$a$ 的大小和方向；

(2) $\cos(\omega t+\varphi)=\cos[\omega(t+T)+\varphi]$，突出了振动的周期性。

2）. 初相 $\varphi$ — $t=0$ 时刻的相位。

## 4、决定简谐振动各特征量的因素

弹簧振子系统： $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\quad,\qquad \nu=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$T$— 固有周期； $\nu$ — 固有频率。

∴周期和频率是由振动系统决定的。

- 对于一个确定的系统，其频率虽然确定，但其运动状态还要由初条件决定。
- ωt+φ是简谐振动的相位，它决定振动物体在任一时刻的位置和运动状态。

## $A$ 和 $\varphi$ 的确定（初始条件）

振动方程： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

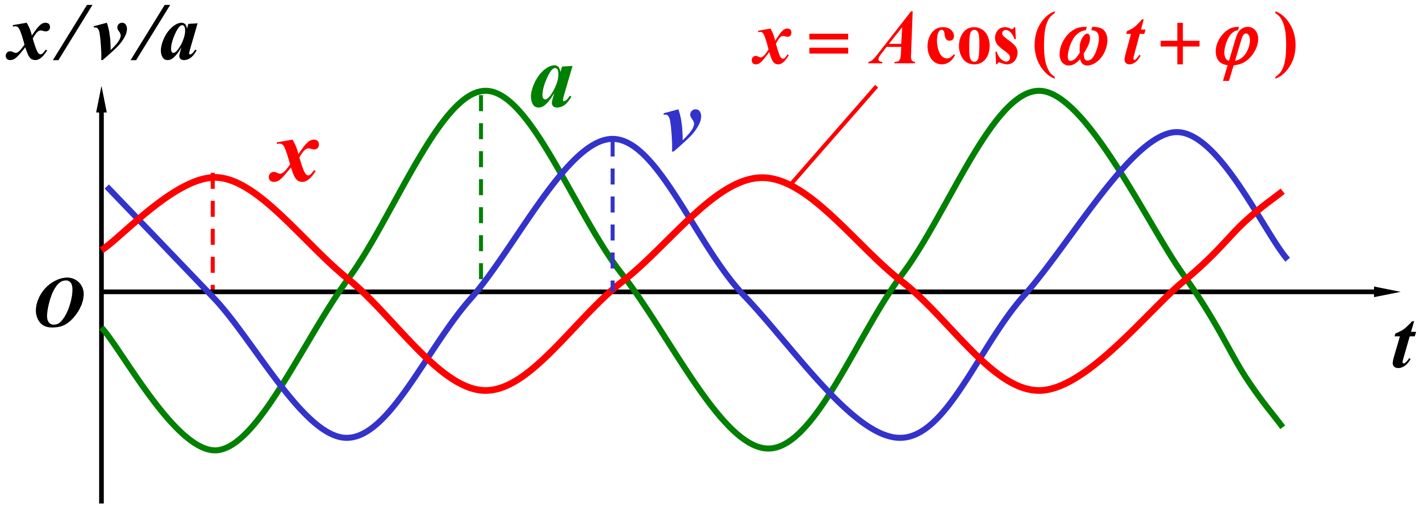
初始条件： $t = 0 \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi & \text{(初位移)} \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi & \text{(初速度)} \end{cases}$

由上式得： $\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega x_0} \end{cases}$

★ 注意：

$\varphi$ 在 $-\pi \sim \pi$ 之间有两个值，要由初始条件判断取舍。

# 三、简谐振动的速度、加速度




1. 速度 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$ $v_{\max} = \omega A$

2. 加速度 $a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$ $a_{\max} = \omega^2 A$

由此看出：速度与位移的相位相差π/2

加速度与速度的相位相差π/2，加速度与位移的相位相差π

## 第一类问题：由简谐振动运动学方程求未知参数

**教材例题7.1** 一质量为0.01kg的物体做谐振动，振幅为8cm，周期为4s，$t$=0时，物体位于$x$=4cm处并处于$x$轴正方向运动，求：1）$t$=1s时，物体的位置坐标、速度和受力；

**解：** 设物体的运动学方程为 $x = A\sin(\omega t+\phi)$

当 $t=1.0\mathrm{s}$ 时，物体的位置坐标、速度和受到的力分别为

$$x_{t=1.0\mathrm{s}}=0.08\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0.07\ (\mathrm{m})$$

$$\dot{x}_{t=1.0\mathrm{s}}=0.08\times\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-0.06\ (\mathrm{m/s})$$

$$f=m\ddot{x}_{t=1.0\,s}=-0.01\times0.08\times\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-1.71\times10^{-3}\,(\mathrm{N})$$

由此得到运动学方程和速度：

$$x=0.08\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{6}\right)\ \mathrm{m}$$

$$v=0.08\times\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{6}\right)\ \mathrm{m/s}$$

**教材例题7.1** 2）若物体在平衡位置并向$x$轴负方向运动时刻开始计时，试求初相和由起始位置到$x$=-8cm处所需的最短时间.

**解：** 设物体的运动学方向为 $x = A\sin(\omega t + \phi)$ 当$t$=0时，$x$=0，代入得

$$0 = 0.08\sin\varphi \quad \text{所以} \quad \varphi=0\text{或}\pi$$

根据$t$=0时，$v_0 < 0$ 这一条件，只能取 $\varphi=\pi$

运动学方程为 $x = 0.08\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \pi\right)$ m

**可见，同一振动不同起始计时时刻，有不同的初相位。**

设起始$x$=0到$x$=-8cm所需的最短时间为$t'$,则

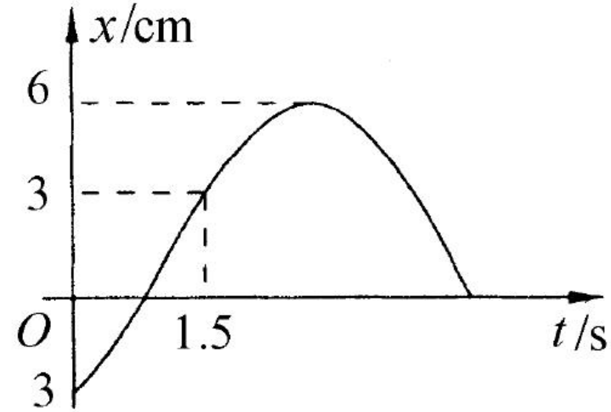
$$-0.08 = 0.08\sin\left(\frac{\pi}{2}t' + \pi\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}t' + \pi\right) = \arcsin(-1) = \frac{3\pi}{2}$$

$$t' = 1\ \text{s}$$

**教材例题7.3** 如图所示为一谐振动的位移-时间曲线，求振动方程。

**解：** 设物体的运动学方程为 $x = A\cos\ (\omega t + \phi)$




由图知 $A$=6 cm，$t$=0时，$x_0$=-3 cm

代入运动学方程 $x_0$=-3=6cos$\varphi$

$$\varphi=\frac{2}{3}\pi \text{或} \frac{4}{3}\pi,\quad \text{由} v_0>0 \text{只能取} \frac{4}{3}\pi$$

再由图知 $t$=1.5时，$x$=3 cm, 再代入运动学方程

$$3=6\cos\varphi'=6\cos(\omega\times1.5+\frac{4}{3}\pi) \qquad \varphi'=\frac{\pi}{3}\text{或}\frac{5\pi}{3}$$

由图知 $t$=1.5时，$v$>0, 故只能取 $\varphi'=\frac{5\pi}{3}$

$$\omega\times1.5+\frac{4}{3}\pi=\frac{5\pi}{3} \qquad \omega=\frac{2\pi}{9}$$

振动方程为

$$x=6\cos\ (\frac{2\pi}{9}\ t-\frac{4\pi}{3})\ \text{cm}$$

## 证明系统是简谐振动和求系统固有振动频率（本章重点）

1.确定研究对象，建立坐标系，受力或力矩分析；

2.由牛二定律或转动定律写出动力学基本方程；

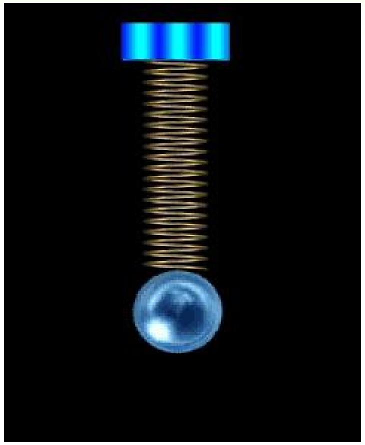
3.将动力学基本方程化为二阶常微分方程，将其与标准振动微分方程做比较，判定是否为简谐振动；

4.由振动微分方程的常系数项写出振动角频率或周期；

5.由t=0时的初始条件x(0)和v(0)确定增幅和初相；

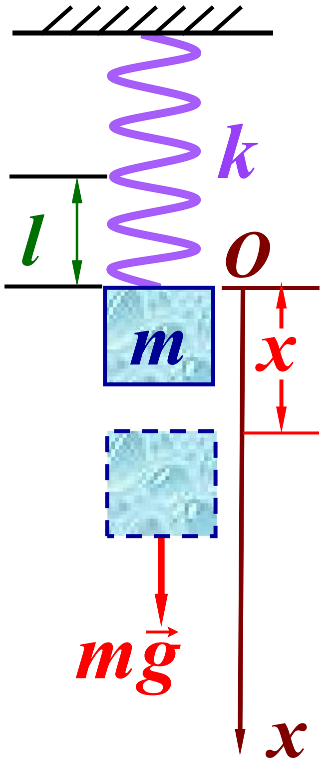
6.比较简谐振动运动学方程的标准形式写出运动学方程。

例题1 一轻弹簧竖直悬挂， 下端重物质量 $m = 0.1\mathrm{kg}$，平衡时弹簧伸长 $l = 9.8\times10^{-2}\ \mathrm{m}$。今使物体在平衡位置获得向下的初速度 $v_0 = 1\mathrm{m.s^{-1}}$，则物体将在竖直方向运动。



求： (1) 运动方程；(2) 最大回复力。

解： (1) 选平衡位置为坐标原点如图。




平衡时 $mg = kl$， $\therefore\ k = \dfrac{mg}{l}$

位移为 $x$ 时 $F = mg - k(l + x) = -kx$

$$\therefore\ m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx\ ,\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

所以物体做谐振动，且有： $\omega = \sqrt{k/m}$

由已知得： $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{mg}{ml}} = \sqrt{\dfrac{g}{l}} = \sqrt{\dfrac{10}{0.1}} = 10\,(\mathrm{s}^{-1})$

由初始条件得：

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{0 + \dfrac{1^2}{(10)^2}} = 0.1\ (\mathrm{m}) \\ \tan\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega\, x_0} = -\dfrac{1}{10\times 0} = -\infty, \qquad \varphi = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

振动方程为： $x = 0.1\cos\left(10\,t - \dfrac{\pi}{2}\right)\quad (\mathrm{SI})$

(2) 最大回复力： $F_{\max} = k\,x_{\max} = k\,A = 1\ (\mathrm{N})$

重力只影响谐振子系统的平衡位置；这样的结论对所有作用于谐振子系统的恒力都成立！

例题2 证明单摆的运动是谐振动 $(\theta < 5^\circ)$

系统受力矩： $M = -mgl\sin\theta \approx -mgl\theta$

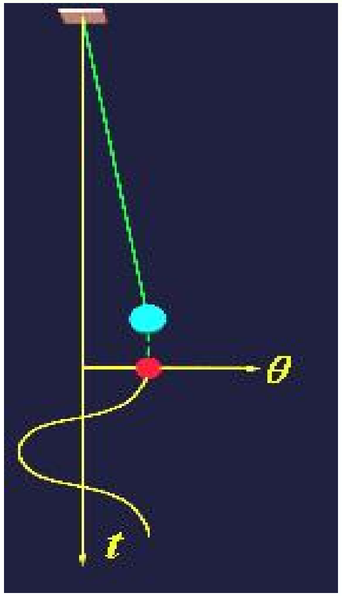
由转动定律： $M = J\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\theta$

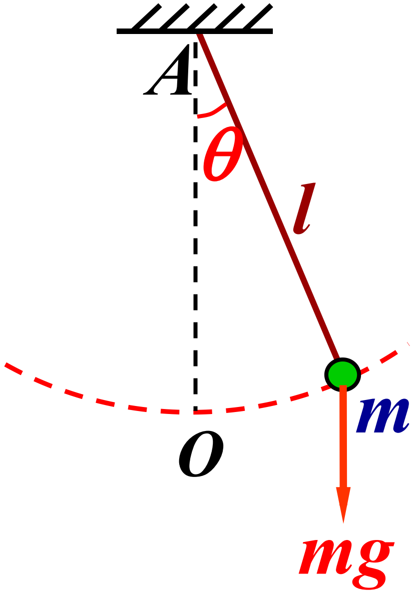
$$ml^2\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\theta, \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

令 $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ 得： $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0$

单摆的运动是谐振动。 周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

振动方程： $\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi)$



振动方程: $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

★ 注意: 初相 $\varphi$ 与角位移 $\theta$ 的区别！

★ 说明:

(1) 单摆周期 $T$ 与摆锤的质量 $m$ 无关。

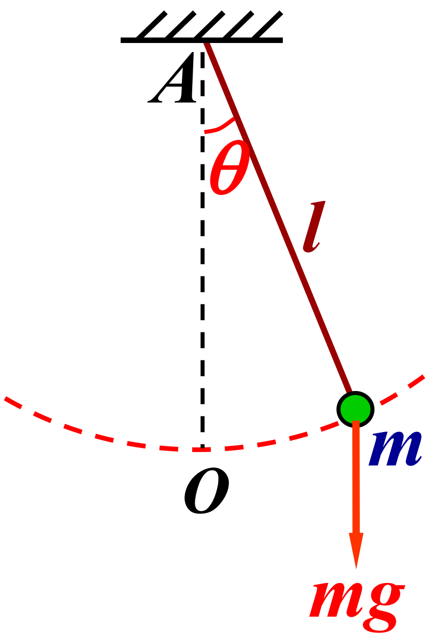
(2) 由 $T$, $l$ 可测量该地的重力加速度 $g$ 。

(3) 单摆在小角度近似下为谐振动。

(4) $\theta$ 较大时:

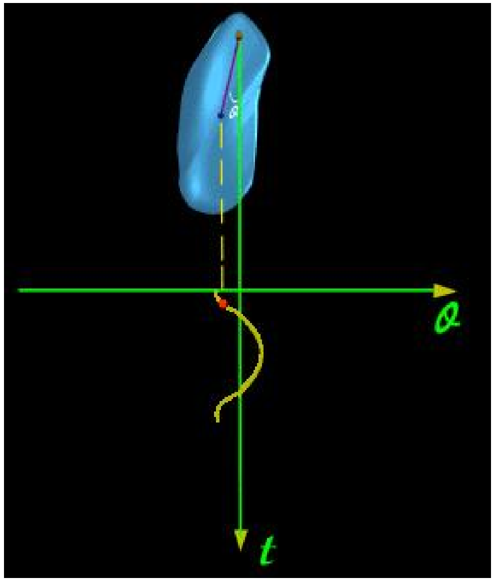
$$M = -mgl\sin\theta = -mgl\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)$$

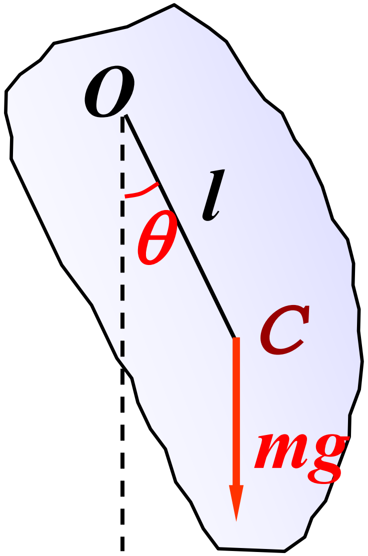
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\sin^4\frac{\theta}{2} + \cdots\right)$$



**(3)复摆**

一任意形状的刚体，支在过0点的光滑水平轴上，使刚体偏离平衡位置后释放，刚体就在平衡位置附近来回摆动，这样的摆叫复摆（也叫物理摆），如图所示 。刚体质量为m，质心为 c ，质心至转轴的距离为l ，且知刚体对该轴的转动惯量为 J

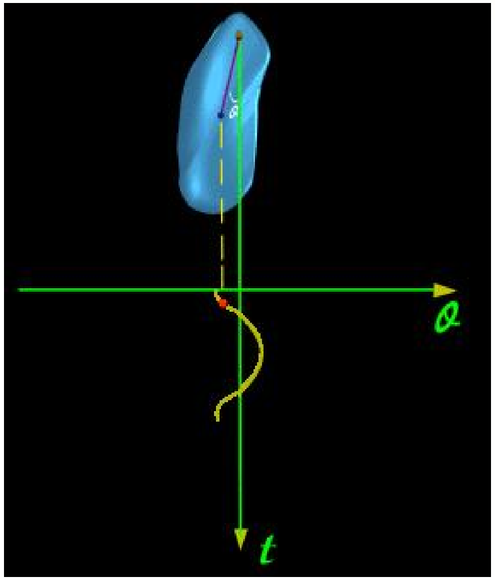


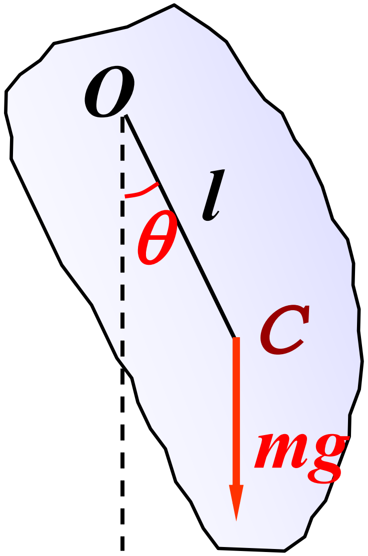
系统受力矩: $M = -mgl\sin\theta$

$\theta$ 很小时 $M = J\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\theta$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgl}{J}\theta = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\theta = 0$$




振动方程: $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$

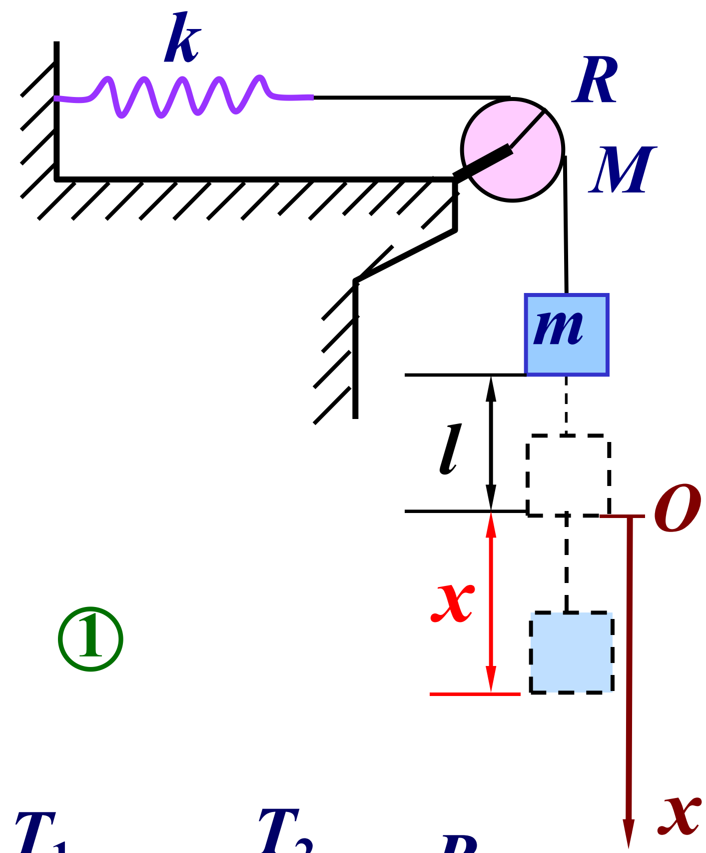



角频率: $\omega = \sqrt{\dfrac{mgl}{J}}$ 周期: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgl}}$

★ 说明: (1) 小角度近似下为谐振动。

(2) 可测量物体对转轴的转动惯量 $J$ 。

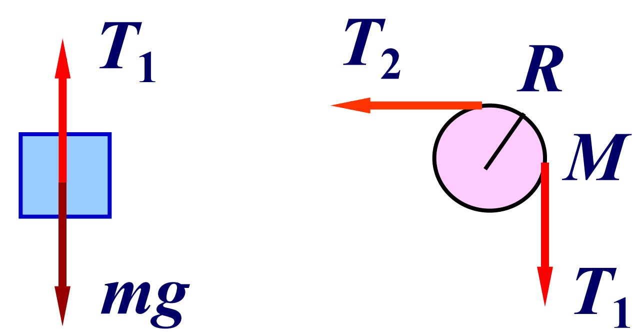
例3 劲度系数为 $k$ 的轻弹簧一端固定在墙上，另一端连结一质量为 $m$ 的物体，跨过一质量为 $M$、半径为 $R$ 的定滑轮，平衡时弹簧伸长 $l$ (如图)。求：该系统的振动圆频率。



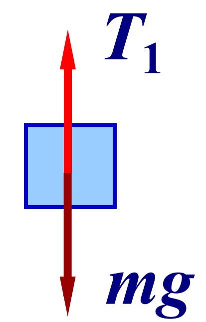

解：在平衡位置处：$mg = kl$ ①

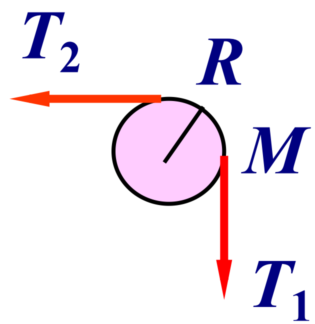
以平衡位置为坐标原点，向下为正建立 $x$ 坐标 。

$m$ 运动到 $x$ 处时，分析受力情况如图：



$$\begin{cases} mg - T_1 = ma = m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} & ② \\ (T_1 - T_2)R = \dfrac{1}{2}MR^2\alpha & ③ \\ T_2 = k(x + l\ ) & ④ \\ \alpha = \dfrac{a}{R} = \dfrac{1}{R}\dfrac{d^2x}{dt^2} & ⑤ \end{cases}$$

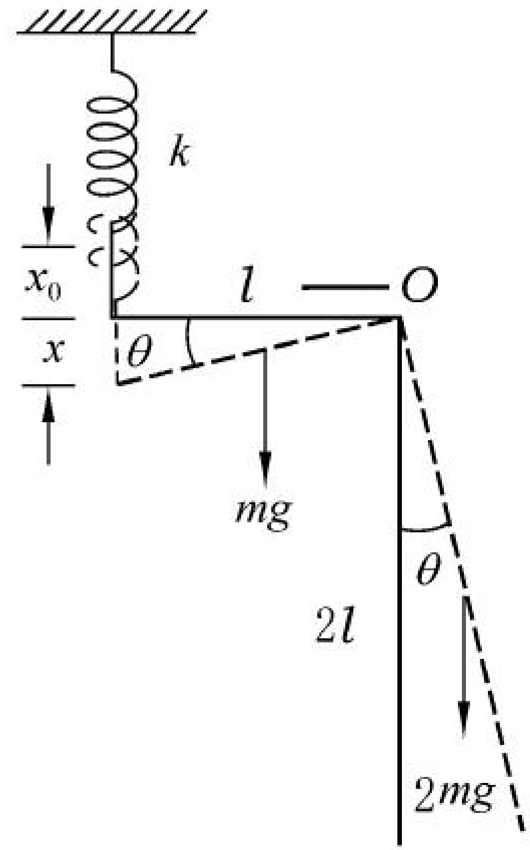



解上面的方程组得: $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m + M/2}x = 0$$

系统的振动圆频率: $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + M/2}}$$

**7-1** 如图7-1所示，一直角均质细杆，水平部分杆长为 $l$，质量为 $m$，竖直部分杆长为 $2l$，质量为 $2m$，细杆可绕直角顶点处的固定轴 $O$ 无摩擦地转动，水平杆的末端与劲度系数为 $k$ 的弹簧相连，平衡时水平杆处于水平位置．试求杆作微小摆动时的周期．




**解** 设平衡时弹簧伸长 $x_0$，则根据细杆系统关于 $O$ 点的合外力矩为零，有

$$kx_0 l = mg\frac{l}{2} \quad (1)$$

当杆摆到任意角度 $\theta$ 位置时，弹簧的伸长量为 $(x_0 + x)$，细杆系统所受的合外力矩为

$$M = mg\frac{l}{2}\cos\theta - 2mgl\sin\theta - k(x_0 + x)l\cos\theta \quad (2)$$

因为摆动幅度非常微小，因而有

$$x \approx l\theta$$

$$\cos\theta \approx 1$$

$$\sin\theta \approx \theta$$

将以上各式及式(1)代入到式(2)中，有

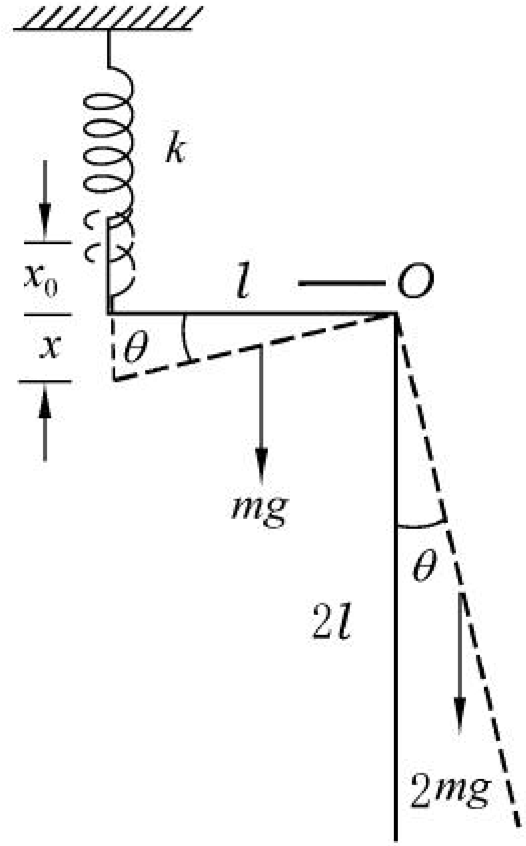
$$M = -(2mgl + kl^2)\theta$$

根据刚体定轴转动定律，有 $J\frac{d^2\theta}{dt^2}=-(2mgl+kl^2)\theta$

即 $$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2mgl+kl^2}{J}\theta=0$$

式中 $J$ 为细杆关于转轴 $O$ 的转动惯量，为

$$J=\frac{1}{3}ml^2+\frac{1}{3}(2m)(2l)^2=3ml^2$$




代入上式后，有 $$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2mg+kl}{3ml}\theta=0$$

因而，细杆绕 $O$ 轴的微小摆动是简谐振动，

其角频率为 $\omega=\sqrt{\frac{2mg+kl}{3ml}}$

周期为 $T=2\pi\sqrt{\frac{3ml}{2mg+kl}}$

## 四、简谐振动的旋转矢量表示法(矢量图解法)

作坐标轴 $Ox$， 自原点作一矢量 $\vec{A}$， 其大小为 $A$，

以角速度 $\omega$ 绕 $O$ 点逆时针旋转。

$\vec{A}$ — 旋转矢量

初始时与 $x$ 轴夹角为 $\varphi$，

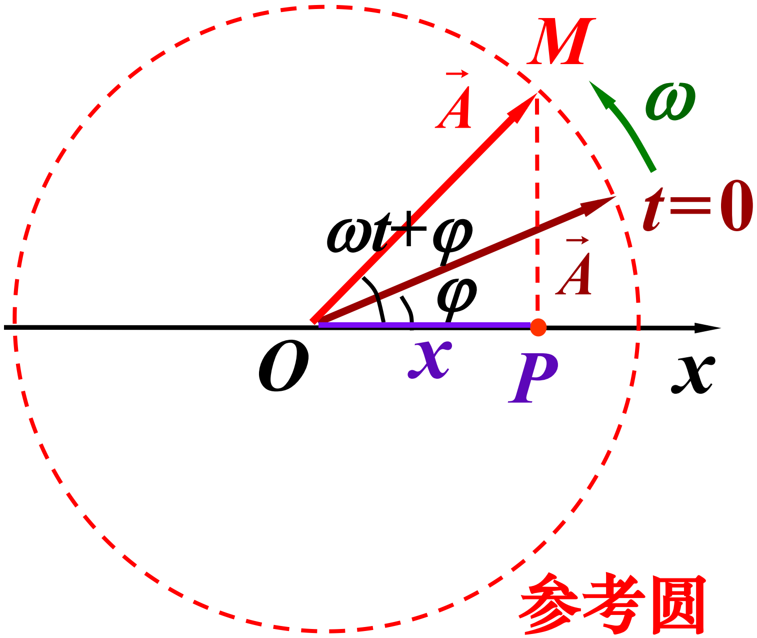
$t$ 时刻与 $x$ 轴夹角为 $\omega t+\varphi$ 。

其矢端 $M$ 在 $x$ 轴投影

$P$ 点的位移：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$P$ 点的运动规律 — 简谐振动。



**例 7.7** 设一音叉的振动为谐振动，其角频率 $\omega=6.28\times10^{2}$ rad/s，音叉尖端的振幅 $A$ 为 1.0 mm．试用旋转矢量法求以下两种情况的初相，并写出运动学方程．(1)当 $t=0$ 时，音叉尖端通过平衡位置并向 $x$ 轴负方向运动；(2)当 $t=0$ 时，音叉尖端在 $x$ 轴的负方向一边，离开平衡位置距离为振幅之半，且向 $x$ 轴负方向运动．

**解** (1)根据题设，$t=0$ 时，旋转矢量的位置，如图 7.12(a)所示，从而得 $\varphi=\frac{1}{2}\pi$，故运动学方程为

$$x=0.1\cos\left(6.28\times10^{2}t+\frac{1}{2}\pi\right)\ \text{cm}$$

(2)根据题设，$t=0$ 时，旋转矢量的位置，如图 7.12(b)所示，从而得 $\varphi=\frac{2}{3}\pi$，故运动学方程为

$$x=0.1\cos\left(6.28\times10^{2}t+\frac{2}{3}\pi\right)\ \text{cm}$$

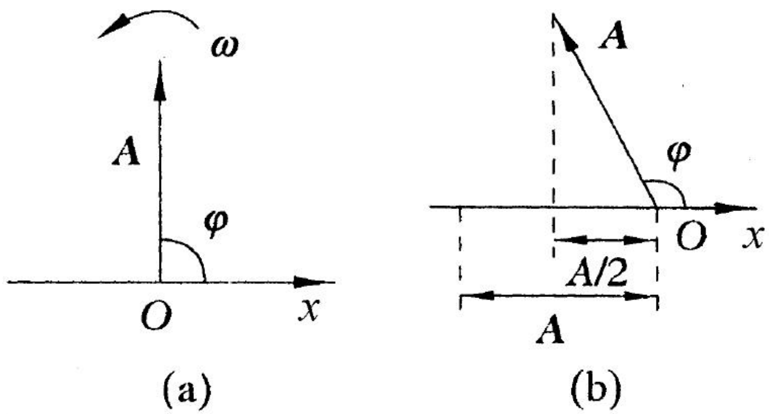



图 7.12

## 五、简谐振动的能量

1. 动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

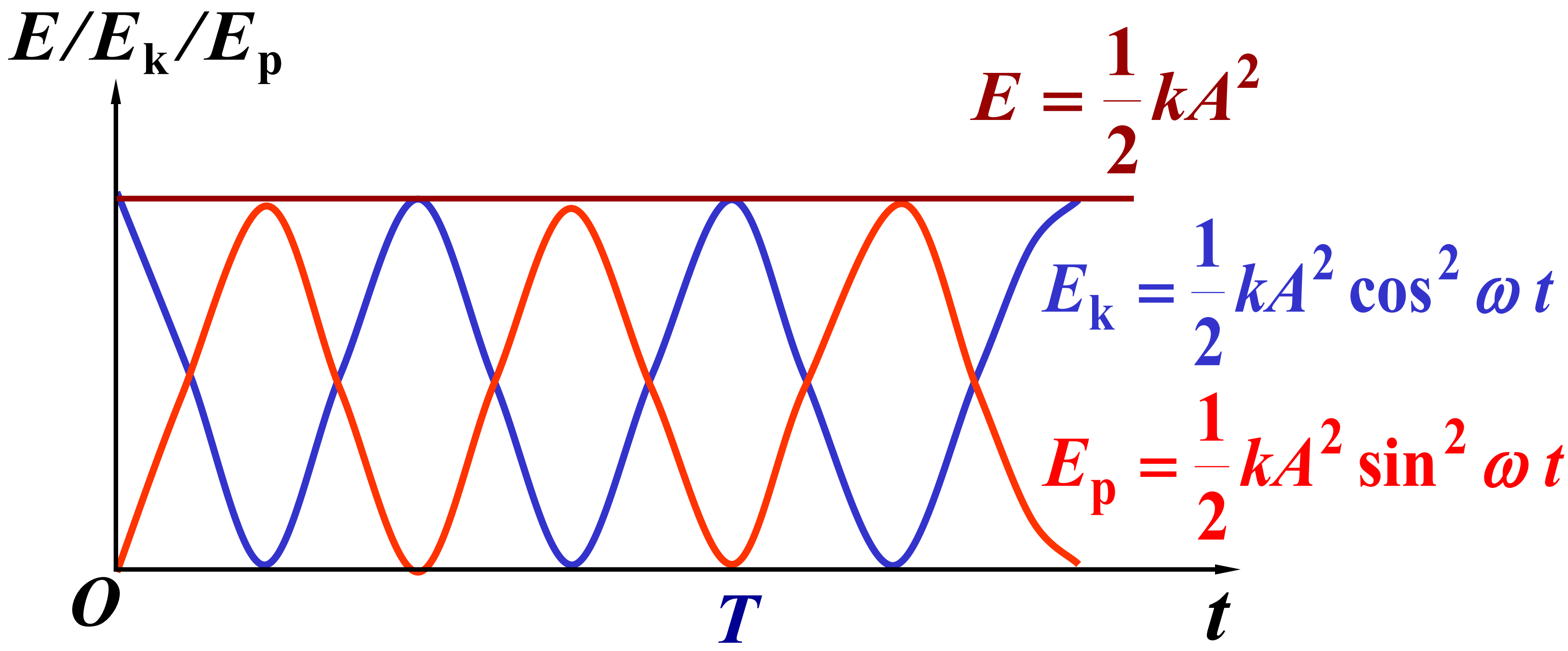
2. 势能

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

3. 总能

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

★ 结论：简谐振动的总能量与振幅的平方成正比且守恒。




★ **说明：**

（1）在运动过程中，动能和势能相互转换。

（2）总机械能保持不变，且与振幅的平方成正比。

（3）动能和势能的极大值相等。

**4. 能量平均值**

$$\overline{E}_{\mathrm{k}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E}_{\mathrm{p}}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}mkA^2\cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}kA^2$$

$$\therefore\qquad \overline{E}_{\mathrm{k}}=\overline{E}_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}E$$

★ **结论：简谐振动的重要特征：**

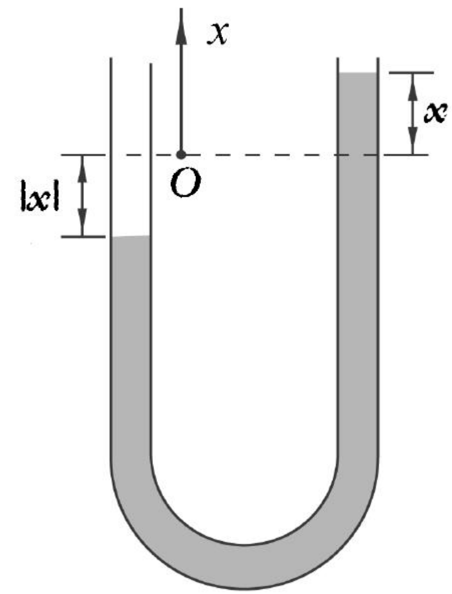
**简谐振动系统的动能和势能在一个周期内的平均值相等，且等于总能量的一半。**

**例 7.9** 图 7.15 所示为截面积为 $S$ 的 U 形管,内装有密度为 $\rho$、长度为 $l$ 的液体柱,受到扰动后管内液体发生振荡,试写出液体柱的运动微分方程.不计各种阻力.

在液体平衡时的液面上,取一点 $O$ 为 $x$ 轴的原点,$x$ 轴向上为正,以液体为研究对象,时刻 $t$,液体的动能 $E_k$ 为

$$E_k=\frac{1}{2}Sl\rho\dot{x}^2$$

要计算重力势能 $E_p$,只需计算 $x$ 小段液柱从左边移到右边所需做的功 $A$(为什么?),因此有




$$E_p=A=\rho Sx^2g$$

根据机械能守恒定律,有

$$E=E_k+E_p=\frac{1}{2}Sl\rho\dot{x}^2+\rho Sx^2g=\text{常量}$$

将上式对 $t$ 求导,经整理后,有

$$\ddot{x}+\left(\frac{2g}{l}\right)x=0$$

液柱的运动为谐振动,其振动的周期 $T$ 为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

# §7－2　简谐振动的合成

## 一、同振向、同频率谐振动的合成

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)\ ,\qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

1. 数学分析法

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t$$

$$-(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t$$

令 $\begin{cases} A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 & ① \\ A\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 & ② \end{cases}$ 则上式得

$$x = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (7\text{-}16)$$

★ 结论：

(1) 同振向同频率谐振动的合成仍为谐振动。

(2) 合振动的频率与两分振动的频率相同。

(3) 合振动振幅和初相由下式决定：

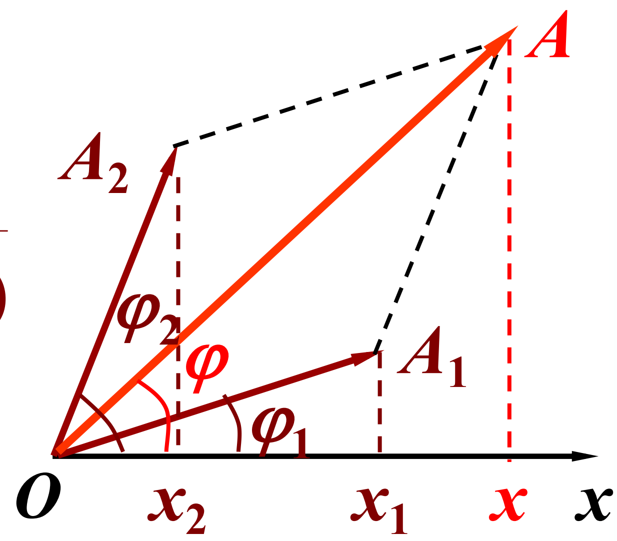
$$\sqrt{①^2 + ②^2} \qquad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (7\text{-}17)$$

$$②/① \qquad \varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \qquad (7\text{-}18)$$

## 2. 旋转矢量法

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

$t = 0$ 时刻的矢量图 →




$$A = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

## 3. 相位差

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)\ ,\quad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) = \varphi_2 - \varphi_1$$

两同频率谐振动的相位差： $\Delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)$ (初相差)

## 4. 同相和反相

(1) 同相：$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

$\Rightarrow \quad A = A_1 + A_2$ 合振幅最大

两振动步调相同，振动加强，同相。

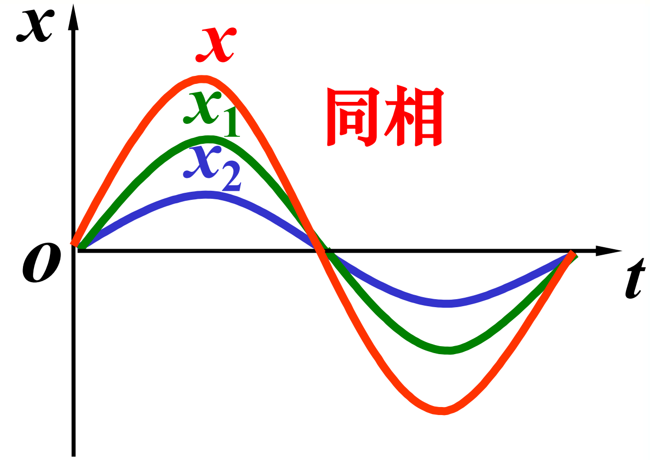
(2) 反相：$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$

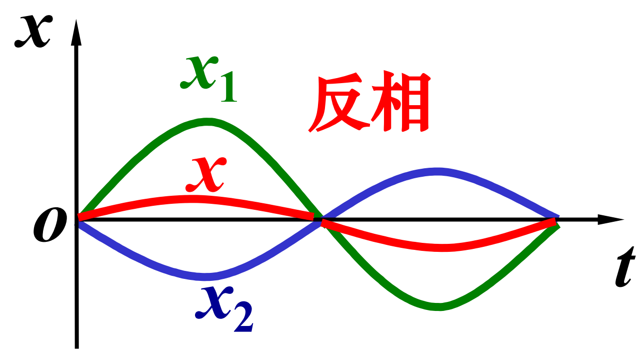
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

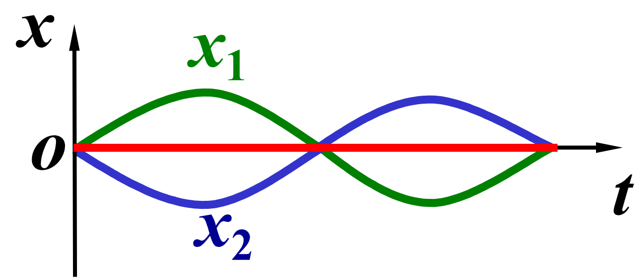
$\Rightarrow \quad A = |A_1 - A_2|$ 合振幅最小

两振动步调相反，振动减弱，反相。

当 $A_1 = A_2$ 时，静止。



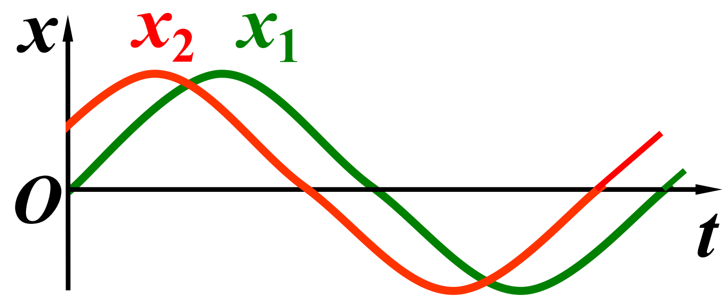



5. 超前和落后

若 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$

则称：$x_2$ 比 $x_1$ 超前；

或 $x_1$ 比 $x_2$ 落后。

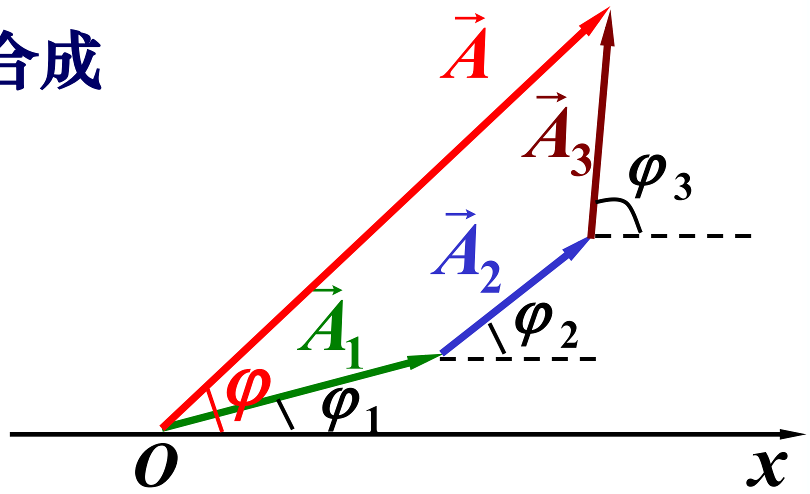



$x_2$ 比 $x_1$ 超前

超前 / 落后以 $|\Delta\varphi| < \pi$ 的相位角来判断。

6. 多个同振向、同频率谐振动的合成

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \cdots$$




采用旋转矢量法：

各分振动矢量首尾依次相接。

## 二、同振向、不同频率谐振动的合成— 拍

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega_2 t + \varphi_2) - (\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$= (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

★ 相位差随时间变化；合振动不再是简谐振动。

为使讨论简便，设两振动的 $A_1 = A_2$ ， $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$。

则有：
$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega_1 t = A\cos 2\pi\nu_1 t \\ x_2 = A\cos\omega_2 t = A\cos 2\pi\nu_2 t \end{cases}$$

合振动方程为：

$$x = x_1 + x_2 = A\cos 2\pi\nu_1 t + A\cos 2\pi\nu_2 t$$

$$x = \underbrace{2A\cos\left(2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t\right)}_{\text{低频振动}}\underbrace{\cos\left(2\pi\frac{\nu_2+\nu_1}{2}t\right)}_{\text{高频振动}}$$

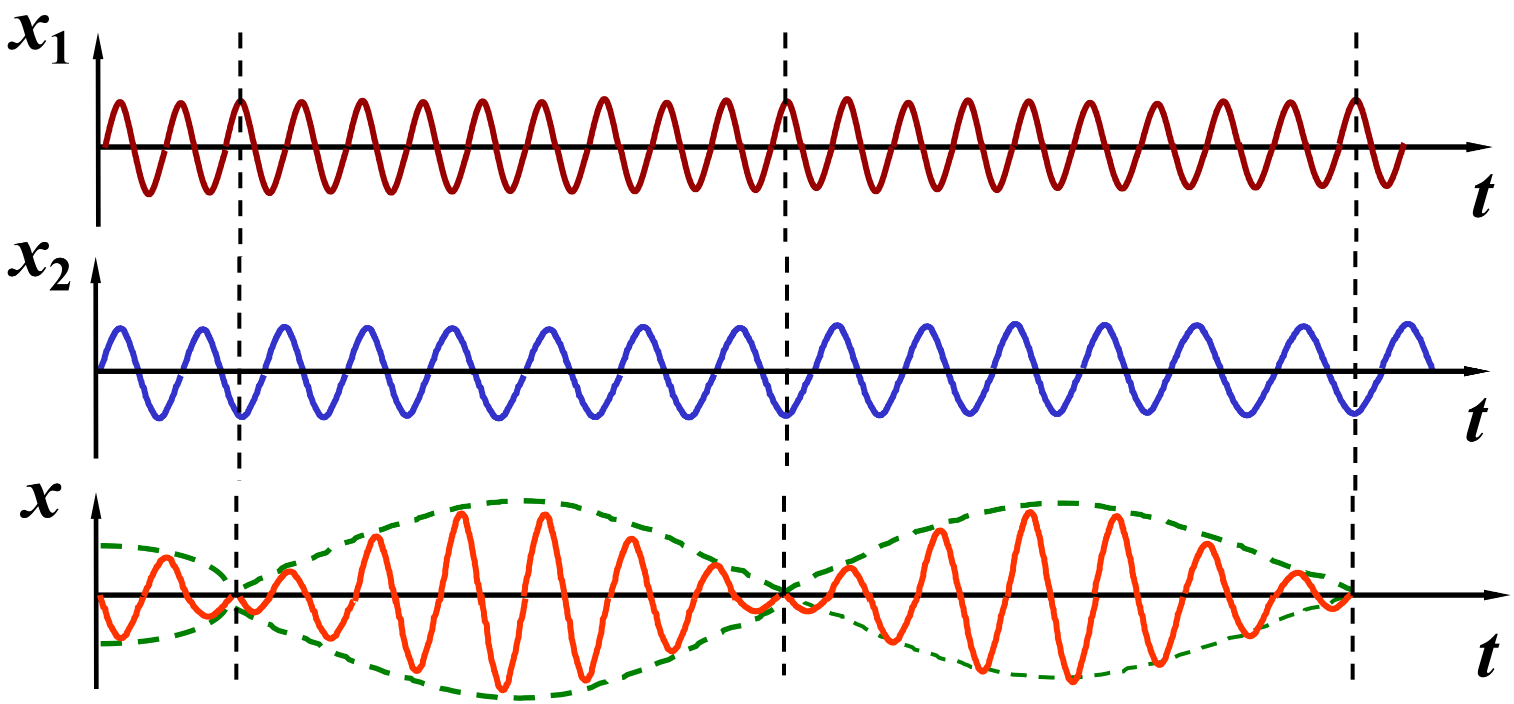
$$= A'\cos(2\pi\nu\, t+\varphi)$$

合振动频率： $\nu = \dfrac{\nu_2+\nu_1}{2}$

合振动振幅： $A' = \left|2A\cos 2\pi\dfrac{\nu_2-\nu_1}{2}t\right|$

★ 讨论: 两频率都较大, 而频率差很小的情况

合振幅出现时大时小的现象 —— 拍现象。




★ **拍频 —— 单位时间内合振幅极大出现的次数。**

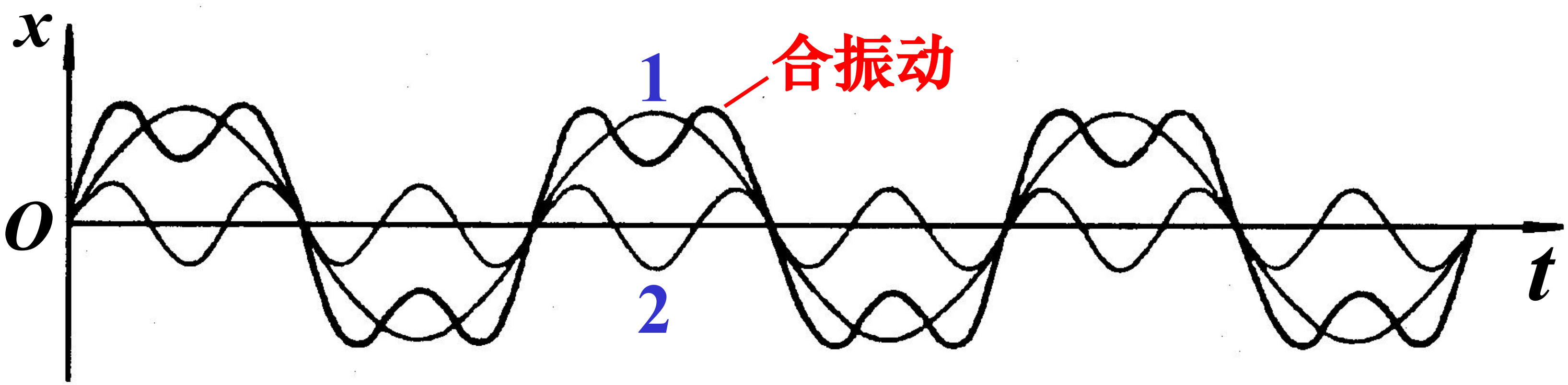
$$\nu_{拍} = \left| \nu_2 - \nu_1 \right| \tag{7-25}$$

**振幅变化的周期为：** $T_{拍} = \dfrac{1}{\nu_2 - \nu_1}$

拍现象的应用:

- 用音叉振动校准乐器
- 测定超声波
- 测定无线电频率
- 调制高频振荡的振幅和频率等

## 三、同振向倍频谐振动的合成




$$\nu_1 = 5\,\mathrm{s}^{-1};\ \nu_2 = 15\,\mathrm{s}^{-1};\ \nu = 5\,\mathrm{s}^{-1}$$

# 三 相互垂直振向简谐振动的合成

## 一、相互垂直的同频率谐振动的合成

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$y = B\cos(\omega t + \beta)$$

消去参数 $t$，得轨迹方程：

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos(\beta - \alpha) = \sin^2(\beta - \alpha) \qquad (7\text{-}31)$$

是一个椭圆类二次曲线方程。

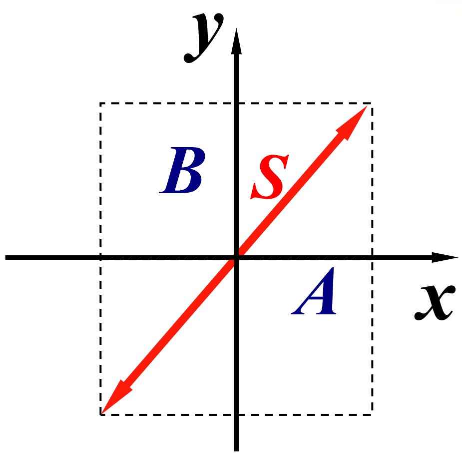
★ 讨论：

1. $\beta - \alpha = 0$ （两个分振动同相）

轨 迹： $y = \frac{B}{A} x$

运动方程： $S = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t + \varphi)$

是谐振动，角频率与初相不变。



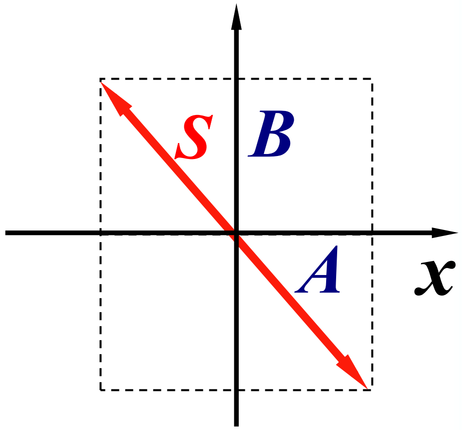

$\Delta\varphi = 0$

2. $\beta - \alpha = \pi$ （两个分振动反相）

轨 迹： $y = -\frac{B}{A} x$

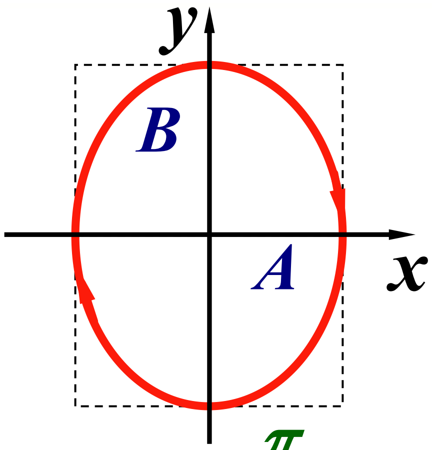
运动方程： $S = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t + \varphi)$

是谐振动，角频率与初相不变。




$\Delta\varphi = \pi$

3. $\beta - \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ （$y$ 比 $x$ 相位超前 $\pi/2$）

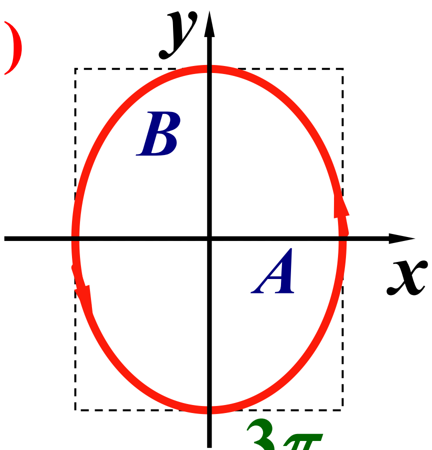



$\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

轨 迹: $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$

是椭圆运动，方向时顺时针 (右旋)。

4. $\beta - \alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ （$y$ 比 $x$ 相位落后 $\pi/2$）




$\Delta\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$

轨 迹: $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$

是椭圆运动，方向时逆时针 (左旋)。

$A = B$ 时，为圆轨道， 即作圆周运动。

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos(\beta-\alpha)=\sin^2(\beta-\alpha)$$

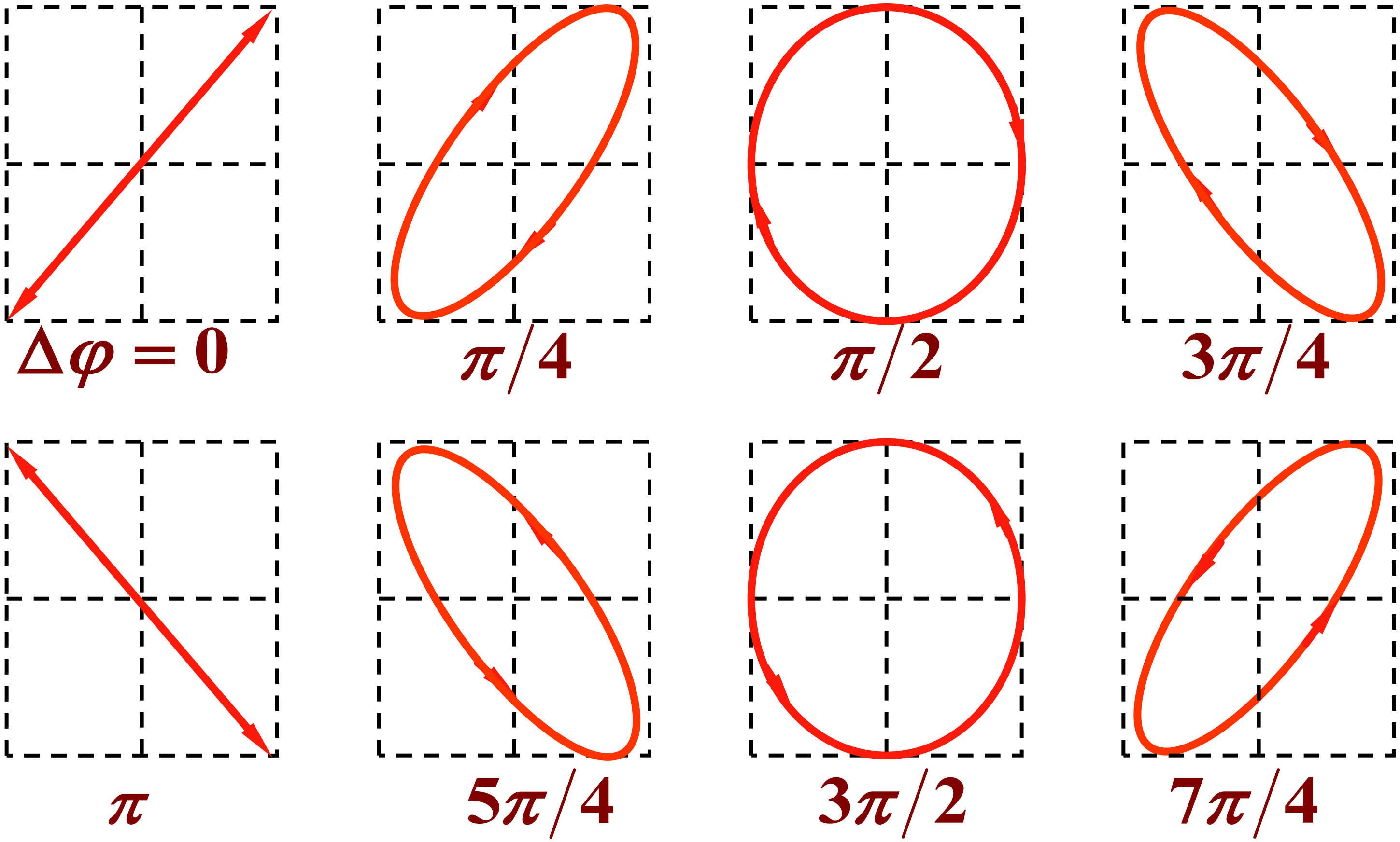


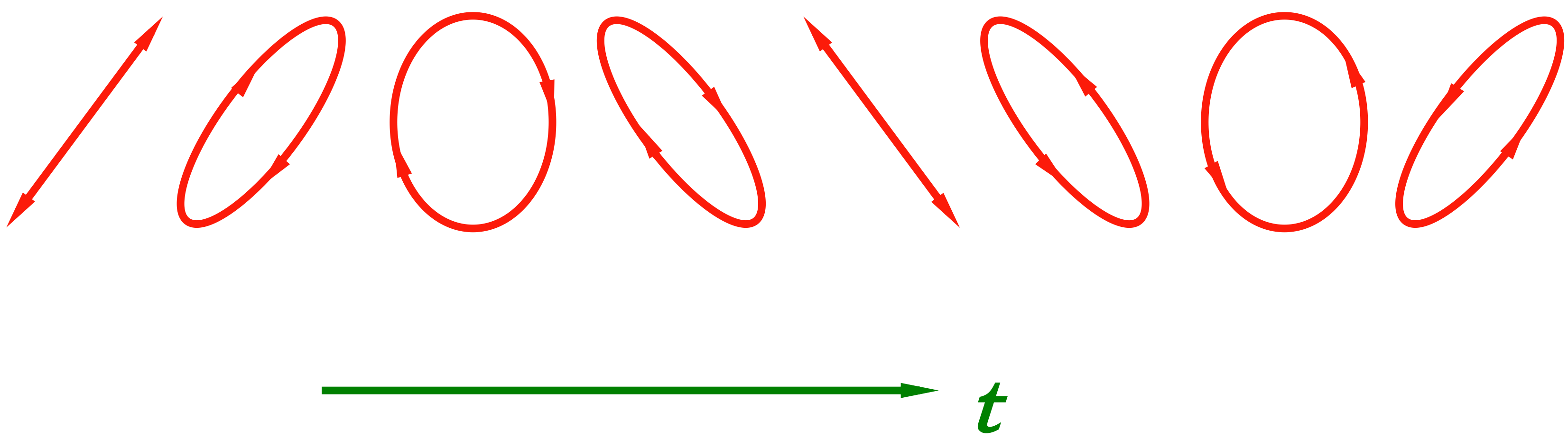

图 7—12

## 二、垂直方向不同频率简谐振动的合成

### 1. 两分振动频率相差很小

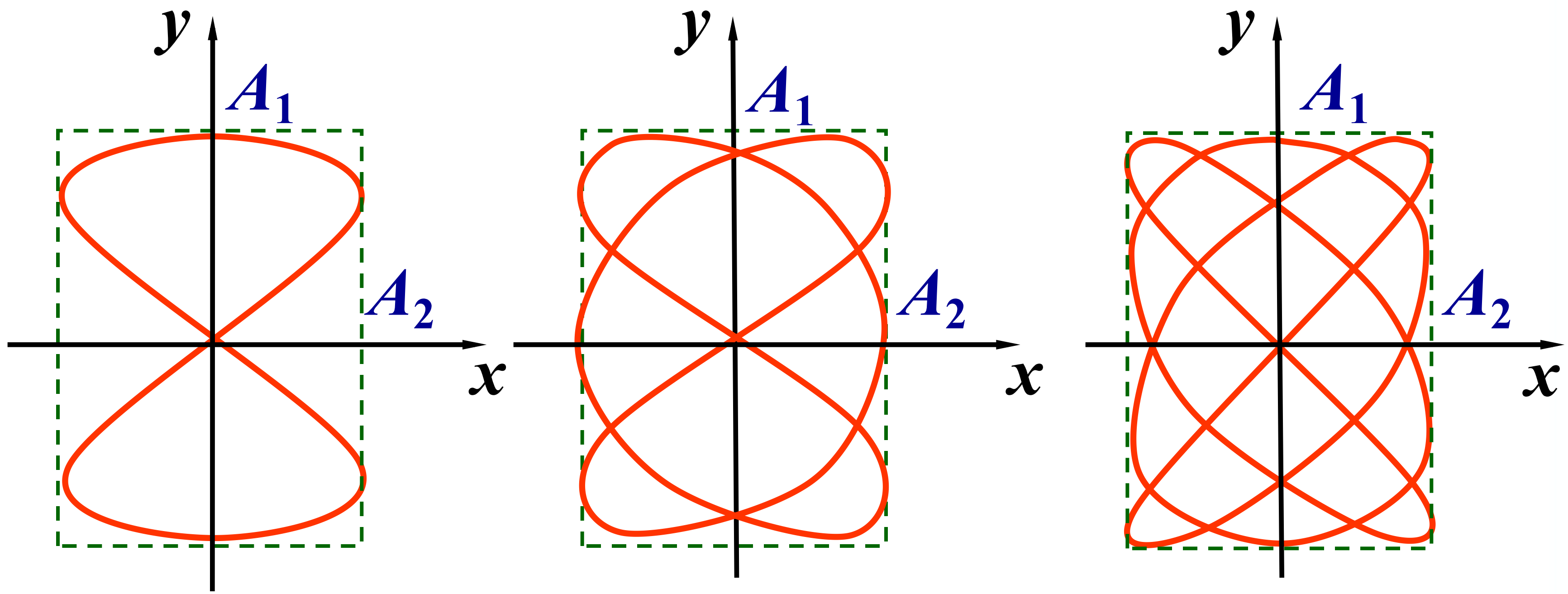
$$\Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

可看作两频率相等而 $\varphi_2 - \varphi_1$ 随 $t$ 缓慢变化，合运动轨迹将按图依次循环地缓慢变化。



## 2. 两振动的频率相差很大

合振动轨道一般不是封闭曲线，但当频率有简单**整数比**关系时，是稳定的封闭曲线，称为“**李萨如图形**”。




$T_x : T_y = 1:2$ $T_x : T_y = 2:3$ $T_x : T_y = 3:4$

★ 测量谐运动的频率和相互垂直的两个简谐振动的相位差。

**图 7—13**

# §7—3 阻尼振动 受迫振动 共振

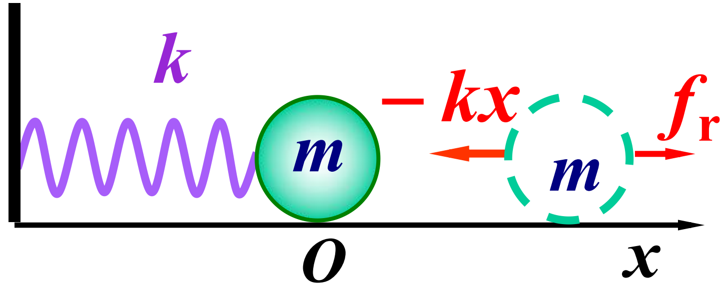
## 一、阻尼振动

阻尼振动 — 振幅(或能量)随时间减小的振动。

阻尼振动

- 摩擦阻尼：系统受到摩擦力的作用，克服阻力作功，系统的振动能量转化为热能。
- 辐射阻尼：振动以波的形式向外传播，使振动能量向周围幅射出去。

## 1. 阻尼振动运动微分方程




有粘滞阻力时弹簧振子：

阻力： $f_r = -\gamma v = -\gamma \dfrac{dx}{dt}$

动力学方程： $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \qquad (7\text{-}36)$$

运动微分方程： $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = 0 \qquad (7\text{-}37)$$

其中：

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ， 称固有角频率，由系统本身性质决定；

$\beta = \gamma/2m$ ， 称阻尼因子，由阻力系数 $\gamma$ 决定。

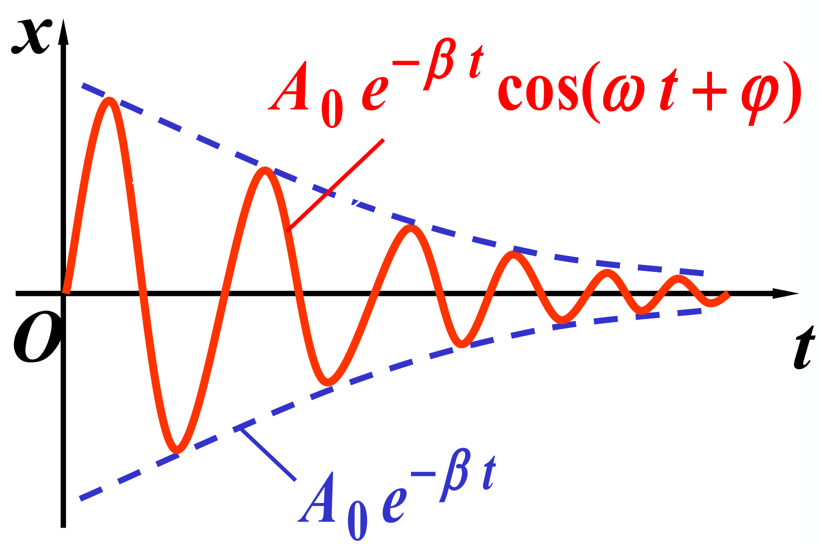
## 2. 弱阻尼（$\beta < \omega_0$）

方程 (7-37) 的解为： $x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$ (7-38)

其中： $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ —— 阻尼振动角频率 (7-39)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$ —— 阻尼振动周期 (7-40)

弱阻尼曲线：



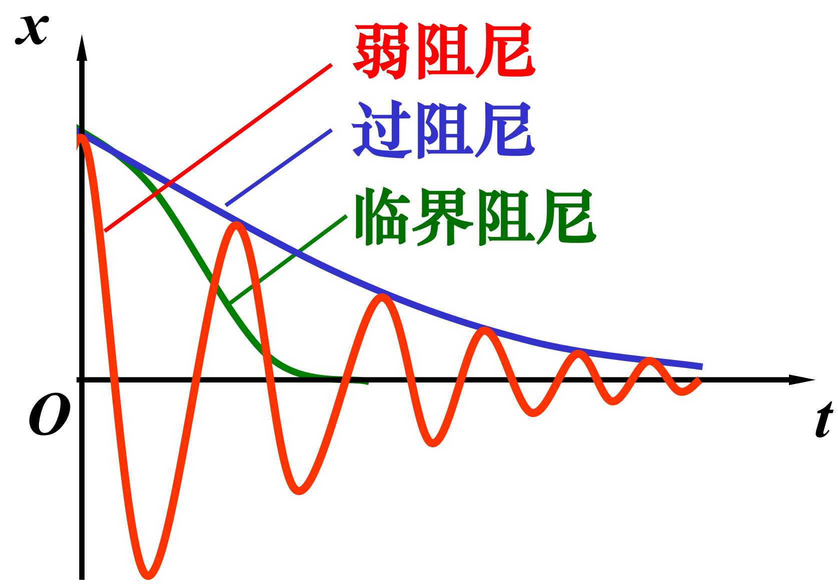

- 振幅随时间 $t$ 作指数衰减；
- 近似为简谐振动；
- 阻尼振动周期比系统的固有周期长。

## 3. 临界阻尼和过阻尼

$\beta < \omega_0$ ：弱阻尼；

$\beta = \omega_0$ ：临界阻尼；

临界阻尼是物体不作往复运动的极限，从周期振动变为非周期振动。




$\beta > \omega_0$ ：过阻尼；

振动从开始最大位移缓慢回到平衡位置，不再做往复运动，非周期运动。

## 二、受迫振动

— 系统在周期性外力持续作用下所发生的振动。

弹性力：$-kx$，　阻尼力：$-\gamma v$，　驱动力：$H\cos\omega t$

受迫振动的运动微分方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+H\cos\omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 x=h\cos\omega t \qquad (7\text{-}41)$$

微分方程的解为

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\varphi_0\right)+A\cos(\omega t+\varphi)$$

(7-42)

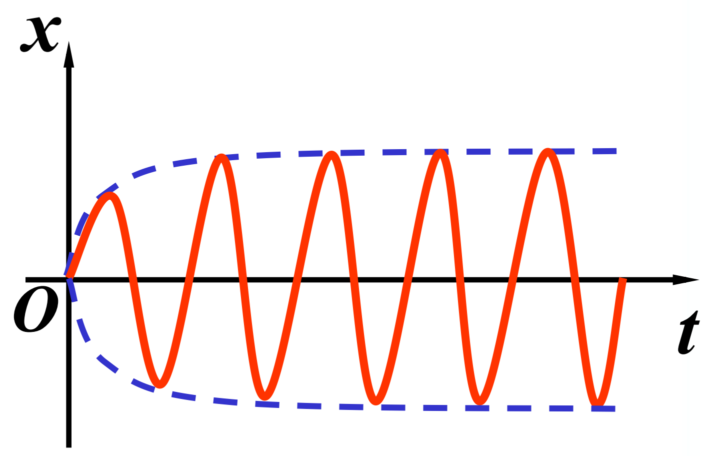
$$x = \underbrace{A_0 e^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \varphi_0)}_{\text{阻尼振动}} + \underbrace{A \cos(\omega t + \varphi)}_{\text{简谐振动}}$$

经一段时间受迫振动 ⟶ 简谐振动：

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

其振幅为：

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$




(7-47)

## 三、共振

—— 驱动力的角频率为某定值时受迫振动的振幅达到极大值的现象。

由 (7-47) 式 $$A=\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}$$

令: $$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}\right)=0$$

得: 共振角频率: $$\omega_{共}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} \qquad (7\text{-}48)$$

共振振幅: $$A_{共}=\frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} \qquad (7\text{-}49)$$

$$\omega_{共} = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - 2\beta^2}\ , \qquad A_{共} = \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^{\ 2} - \beta^2}}$$

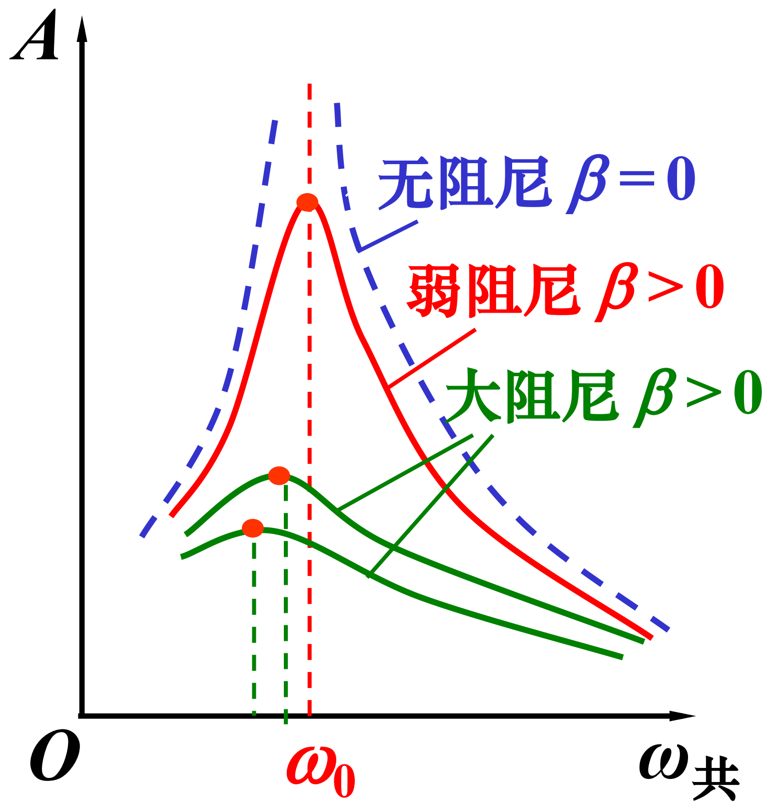
★ 分析:

(1) $\beta$ 越小时，$\omega_{共}$ 越接近于$\omega_0$，$A_{共}$ 越大。

(2) $\beta = 0$ 时，$\omega_{共} = \omega_0$，

$A_{共} \to \infty$ 尖锐振动。

★ 强迫力的方向永远与物体运动方向相同。



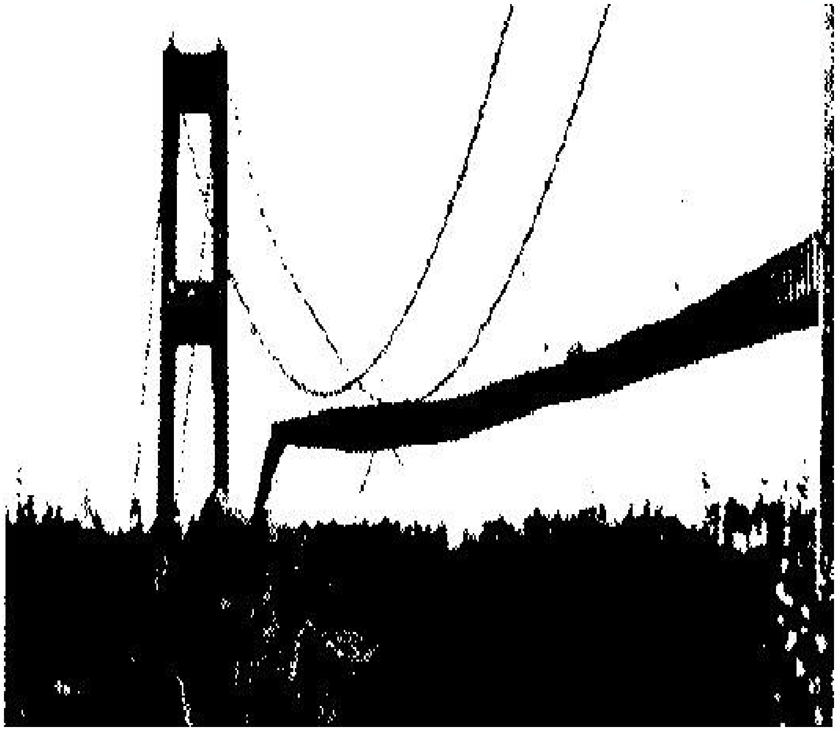
★ 应用:

(1) 电磁共振选台(收音机);

(2) 乐器利用共振提高音响效果;

(3) 研究避免共振的破坏的措施等。

- 破坏外力(强迫力)的周期性
- 改变系统固有频率
- 改变外力的频率
- 增大系统阻尼力



塔科马海峡大桥的共振断蹋

受迫振动与简谐振动有何不同?