

“高等数学 (A 类) II ”

一、(本题 8 分) 求曲面 $x^3 + y^2 + z^3 = 1$ 在 $P(-1, 1, 1)$ 处的切平面与法线方程.

二、(本题 10 分) 求函数 $f(x, y) = x - 2y$ 在区域 $D: (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 5$ 上的最大值、最小值.

三、(本题 $3 \times 8 = 24$ 分) 计算下列二重积分或三重积分

1. $\iint_D (2x - y^2) dx dy$, 其中 $D: x + y \leq 2, x, y \geq 0$;

2. $\iint_D \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 1$;

3. $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, 其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.

四、(本题 $2 \times 6 = 12$ 分) 求下列广义积分

1. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$; 2. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}$.

五、(本题 10 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{x}{3}\right)^n$ 的收敛域及和函数.

六、(本题 10 分) 将函数 $f(x) = \pi - x, 0 \leq x \leq \pi$ 展开为周期为 2π 的余弦级数,

七、(本题 $2 \times 8 = 16$ 分) 计算下列曲线或曲面积分

1. 求 $\int_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + 4y^2}$, 其中 L 为 $20x^2 + 21y^2 = 1$ 取逆时针方向;

2. 设 Σ 为平面 $2x + 2y + z = 1$ 在第一卦限的部分, 求 $I = \iint_{\Sigma} (8x + 8y + 4z) dS$.

八、(本题 10 分) 计算第二类型曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} yz dy dz + zx dz dx + z(x^2 + y^2) dx dy$

其中 Σ 为 $3 - z = x^2 + y^2, z > 0$, 取外侧.