概率论第五章作业答案

1. 某汽车销售点每天出售的汽车数服从参数为1的泊松分布,若一年中有361天经营汽车销售,且每天出售的汽车数是相互独立的,请用中心极限定理求一年中出售380辆以上汽车的概率.

解: 设X_i,为第i天出售的汽车数(i=1,2,⋯,361)，则它们相互独立，都服从参数为1的泊松分布. 根据题意,有$E(X_i)=D(X_i)=1$.记$Y=\sum_{i=1}^{361} X_i$，它是一年中总销售量，则有E(Y)=D(Y)=361

根据独立同分布中心极限定理，所求的概率为

$$P(Y>380)=1-P(Y\leqslant 380)=1-P(\frac{Y-361}{\sqrt{361}}\leqslant\frac{380-361}{\sqrt{361}})\approx 1-\Phi(1)=1-0.8431=0.1587$$

2. (1) 一复杂的系统由100个相互独立起作用的部件所组成. 在整个运行期间每个部件损坏的概率为0.10，为了使整个系统起作用，必须至少有85个部件正常工作，求整个系统起作用的概率.

   (2) 一复杂的系统由n个相互独立起作用的部件所组成，每个部件的可靠性为0.90，且必须至少有80%的部件工作才能使整个系统正常工作，问n至少为多大才能使系统的可靠性不低于0.95?

解: (1) 设

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第 } i \text{ 个部件在整个运行期间正常工作}\\ 0, & \text{第 } i \text{ 个部件在运行期间损坏}\end{cases},(i=1,2,\cdots,100)$$

由已知条件，$X_1,\cdots,X_{100}$相互独立且同分布，

$$P\{X_i=1\}=0.9=p,P\{X_i=0\}=0.1=q.$$

记 $X=\sum_{i=1}^{100}X_i$, 它表示在整个运行期间工作着的部件数, 可知 ,$X\sim b(100,0.9)$.

依题意，所求概率为

$$\begin{aligned}P\{X>85\}&=1-P\{X\leqslant 85\}\\&=1-P\left\{\frac{X-100\times 0.9}{\sqrt{100\times 0.9\times 0.1}}\leqslant\frac{85-100\times 0.9}{\sqrt{100\times 0.9\times 0.1}}\right\}\\&\approx 1-\Phi\left(-\frac{5}{3}\right)=\Phi\left(\frac{5}{3}\right)=0.9525\end{aligned}$$

即整个系统起作用的概率为0.9525.

(2) 与(1)中的假设相同，只是这里X $\sim b(n,0.9)$. 依题意，有

$$P\{X\geqslant 0.8n\}=0.95,$$

即

$$P\left\{\frac{X-0.9n}{\sqrt{n\times 0.9\times 0.1}}\geqslant\frac{0.8n-0.9n}{\sqrt{n\times 0.9\times 0.1}}\right\}=0.95,$$

亦即

$$P\left\{\frac{X-0.9n}{\sqrt{n\times 0.9\times 0.1}}\geqslant-\frac{\sqrt{n}}{3}\right\}=0.95,$$

近似地有

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.95$$

查表得$\frac{\sqrt{n}}{3}=1.645$, 解得 $n=24.35$, 于是 , 要求 $n=25$，即至少25个部件才能使系统可靠性不低于0.95.

3. 假设$X_1, X_2,\cdots, X_n$是来自总体X的简单随机样本，已知$E(X^k) = a_k(k = 1, 2, 3, 4)$，证明当n充分大时，随机变量$Z_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$近似服从正态分布，并指出其分布参数.

证: 由$X_1, X_2,\cdots, X_n$是来自总体X的简单随机样本，知$X_1, X_2,\cdots, X_n$独立同分布，于是$X_1^2, X_2^2,\cdots, X_n^2$也独立同分布.

由$E(X_i^k) = a_k(k = 1, 2, 3, 4; i = 1, 2,\cdots, n)$，得

$$E(X_i^2) = a_2$$

$$D(X_i^2) = E(X_i^4) - [E(X_i^2)]^2 = a_4 - a_2^2$$

$$E(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \frac{1}{n}\cdot na_2 = a_2$$

$$D(Z_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D(X_i^2) = \frac{1}{n}(a_4 - a_2^2)$$

根据独立同分布中心极限定理，有

$$V = \frac{Z_n - E(Z_n)}{\sqrt{D(Z_n)}} = \frac{Z_n - a_2}{\sqrt{\dfrac{a_4 - a_2^2}{n}}}$$

的极限分布是标准正态分布，即当n充分大时，Z_n近似服从参数为$a_2, \dfrac{a_4 - a_2^2}{n}$的正态分布.

4. 抽样检验产品质量时，如果发现次品多于12个，则认为该批产品不能接受，应检验多少产品才能使次品率为10%的一批产品被拒绝接受的概率达0.95?

解: 建设检验n件产品，而n检产品中的次品数是个随机变量，记为X，则 $X \sim B(n, 0.1)$. 且E(X) = 0.1n，D(X) = 0.09n. 由德莫弗-拉普拉斯中心极限定理

$$X \sim N(0.1n, 0.09n)$$

由题意得

$$P(X > 12) = 1 - P(X \leqslant 12) \approx 1 - \Phi\left(\frac{12 - 0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{12 - 0.1n}{0.3\sqrt{n}}\right) = 0.05 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0.1n - 12}{0.3\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

查表

$$\frac{0.1n - 12}{0.3\sqrt{n}} = 1.645 \Rightarrow n \approx 187.59,\ \text{取}\ n = 188$$

5. 随机地选取两组学生，每组80人，分别在两个实验室里测量某种化合物的pH. 各人测量的结果是随机变量，它们相互独立，服从同一分布，数学期望为5，方差为0.3，以$\bar{X}, \bar{Y}$分别表示第一组和第二组所得结果的算术平均.

(1) 求$P\{4.9 < \bar{X} < 5.1\}$.

(2) 求$P\{-0.1 < \bar{X} - \bar{Y} < 0.1\}$.

解: 由题设$E(\bar{X}) = 5, D(\bar{X}) = D(\bar{Y}) = 0.3/80$.

(1) 由中心极限定理知 $\bar{X}$ 近似服从 $N(5,0.3/80)$,故

$$
\begin{aligned}
P\{4.9<\bar{X}<5.1\} &= P\{\frac{4.9-5}{\sqrt{0.3/80}}<\frac{\bar{X}-5}{\sqrt{0.3/80}}<\frac{5.1-5}{\sqrt{0.3/80}}\} \\
&\approx \Phi\left(\frac{5.1-5}{\sqrt{0.3/80}}\right)-\Phi\left(\frac{4.9-5}{\sqrt{0.3/80}}\right) \\
&= 2\Phi\left(1.63\right)-1 = 2\times 0.9484-1 = 0.8968
\end{aligned}
$$

(2) 因 $E(\bar{X}-\bar{Y})=E(\bar{X})-E(\bar{Y})=0, D(\bar{X}-\bar{Y})=D(\bar{X})+D(\bar{Y})=0.3/40$, 由中心极限定理

$$
\begin{aligned}
P\{-0.1<\bar{X}-\bar{Y}<0.1\} &= P\{\frac{-0.1-0}{\sqrt{0.3/40}}<\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-0}{\sqrt{0.3/40}}<\frac{0.1-0}{\sqrt{0.3/40}}\} \\
&\approx \Phi\left(\frac{0.1-0}{\sqrt{0.3/40}}\right)-\Phi\left(\frac{-0.1-0}{\sqrt{0.3/40}}\right) \\
&= 2\Phi\left(1.15\right)-1 = 2\times 0.8749-1 = 0.7498.
\end{aligned}
$$