“《高等数学》（A 类）”

一、（8 分）求由曲线$\begin{cases}3x^2-2y^3=10\\ z=0\end{cases}$绕 y 轴旋转一周所得到的旋转曲面在点$\left(\sqrt{3},1,-1\right)$处的切平面方程与法线方程.

二、（8 分）设$u=f\left(x,y,z\right)$有连续的一阶偏导数，又函数$y=y\left(x\right)$和$z=z\left(x\right)$分别由$e^{xy}-xy=2$和$e^{x}=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$确定. 求$\frac{du}{dx}$.

三、（8 分）求函数$f\left(x\right)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0\\ 1, & 0<x\le 1\\ 0, & 1<x\le\pi\end{cases}$ 在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶级数.

四、（8 分）求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$的和.

五、（每小题 3 分，共 12 分）判断下列级数是否收敛，并说明理由.

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+\left(-2\right)^n}{n^2}$　（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$　（3）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$　（4）$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$

六、（12 分）在第一象限内过曲线$3x^2+2xy+3y^2=C$上任意一点$\left(\alpha,\beta\right)$做该曲线的切线$L$，设$L$与两个坐标轴所围成的三角形面积为$S\left(\alpha,\beta\right)$. 如果当$\left(\alpha,\beta\right)$在该曲线上变动时，$S\left(\alpha,\beta\right)$的最大值为1，求常数$C$的值.

七、（12 分）设$f\left(x,y\right)=\max\left\{x,y\right\}$，$D=\left\{\left(x,y\right)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$，求$\iint\limits_D f\left(x,y\right)\left|y-x^2\right|dxdy$.

八、（12 分）设$\Omega:\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$，求$I=\iiint\limits_{\Omega}\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|dxdydz$.

九、（12 分）设曲线积分$\int_L xy^2dx+y\phi\left(x\right)dy$与路径无关，其中$\phi\left(x\right)$具有连续的导数，且$\phi\left(0\right)=0$. 计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2dx+y\phi\left(x\right)dy$.

十、（8 分）计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz-ydzdx+\left(z+1\right)dxdy}{x^2+y^2}$，其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$，$x-y+z=2$所截出部分的外侧.