概率论第三章作业

1. 一袋内装有 5 个白球，3 个红球。第一次从袋中任意取一个球，不放回；第二次又从袋中任取两个球，X_i 表示第 i 次取到的白球数，$i=1,2$。求：

   (a) (X_1,X_2) 的分布及边缘分布;

   (b) $P\{X_1=0,X_2\neq 0\}$，$P\{X_1=X_2\}$，$P\{X_1X_2=0\}$

   解：

   (a)

$$P\left\{X_1=0,X_2=0\right\}=\frac{3}{8}\times\frac{1}{C_7^2}=\frac{1}{56}$$

$$P\left\{X_1=0,X_2=1\right\}=\frac{3}{8}\times\frac{\mathrm{C}_5^1\mathrm{C}_2^1}{\mathrm{C}_7^2}=\frac{5}{28}$$

$$P\left\{X_1=0,X_2=2\right\}=\frac{3}{8}\times\frac{\mathrm{C}_5^2}{\mathrm{C}_7^2}=\frac{5}{28}$$

$$P\left\{X_1=1,X_2=0\right\}=\frac{5}{8}\times\frac{\mathrm{C}_3^2}{\mathrm{C}_7^2}=\frac{5}{56}$$

$$P\left(X_1=1,X_2=1\right\}=\frac{5}{8}\times\frac{\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1}{\mathrm{C}_7^2}=\frac{5}{14}$$

$$P\left\{X_1=1,X_2=2\right\}=\frac{5}{8}\times\frac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{C}_7^2}=\frac{5}{28}$$

   联合概率分布

X_1,X_2	0	1	2
0	$\frac{1}{56}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$
1	$\frac{5}{56}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{28}$

   边缘概率分布

$$\begin{aligned}
&P\left\{X_1=0\right\}=\tfrac{1}{56}+\tfrac{5}{28}+\tfrac{5}{28}=\tfrac{21}{56}=\tfrac{3}{8}\\
&P\left\{X_1=1\right\}=\tfrac{5}{56}+\tfrac{5}{14}+\tfrac{5}{28}=\tfrac{35}{56}=\tfrac{5}{8}\\
&P\{X_2=0\}=\tfrac{1}{56}+\tfrac{5}{56}=\tfrac{3}{28}\\
&P\left\{X_2=1\right\}=\tfrac{5}{28}+\tfrac{5}{14}=\tfrac{15}{28}\\
&P\left\{X_2=2\right\}=\tfrac{5}{28}+\tfrac{5}{28}=\tfrac{5}{14}
\end{aligned}$$

   即 X_1 的边缘概率分布为

x_1	0	1
p	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

   X_2 的边缘概率分布为

x_2	0	1	2
p	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

(b)

$$
\begin{aligned}
P\{X_1=0,X_2\neq 0\} &= P\{X_1=0,X_2=1\}+P\{X_1=0,X_2=2\}\\
&=\frac{5}{28}+\frac{5}{28}=\frac{5}{14}\\
P\{X_1=X_2\} &= P\{X_1=0,X_2=0\}+P\{X_1=1,X_2=1\}\\
&=\frac{1}{56}+\frac{5}{14}=\frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{X_1X_2=0\} &= P\{X_1=0,X_2=0\}+P\{X_1=0,X_2=1\}\\
&\quad+P\{X_1=0,X_2=2\}+P\{X_1=1,X_2=0\}\\
&=P\{X_1=0\}+P\{X_1=1,X_2=0\}\\
&=\frac{3}{8}+\frac{5}{56}=\frac{13}{28}
\end{aligned}
$$

2. 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律为：

X \ Y	2	4	6
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

求：

(a) $Z=X+Y$ 的分布律；

(b) $M=\max(X,Y)$ 的分布律；

(c) $N=\min(X,Y)$ 的分布律；

解：

(a)

$$
\begin{aligned}
&P(Z=3)=p_{12}=\tfrac{1}{6},\quad P\{Z=5\}=p_{11}+p_{33}=\tfrac{5}{12}\\
&P\{Z=7\}=p_{16}+p_{34}=\tfrac{1}{4},\quad P(Z=9)=p_{35}=\tfrac{1}{6}
\end{aligned}
$$

因此 $Z=X+Y$

Z	3	5	7	9
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

(b)

$$
\begin{aligned}
&\vec{\mathrm{e}}\ (\mathrm{M}=2\mathrm{Y}=p_{12}=\tfrac{1}{6},\quad P\{M=3\}=p_{32}=\tfrac{1}{3}\\
&P\{M=4\}=p_{14}+p_{34}=\tfrac{1}{4},\quad P\{M=6\}=p_{16}+p_{36}=\tfrac{1}{4}
\end{aligned}
$$

所以 $M=\max(X,Y)$ 的分布律为下表：

M	2	3	4	6
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(c)

$$P\{N=1\}=p_{12}+p_{14}+p_{16}=\frac{1}{3},\quad P\{N=2\}=p_{32}=\frac{1}{3}$$
$$P\{N=3\}=p_{34}+p_{36}=\frac{1}{3}$$

所以 $N=\min(X,Y)$ 的分布律为下表:

N	1	2	3
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy}{4}, & |x|<1,|y|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

证明 X 与 Y 不独立，但 X^2 与 Y^2 独立。

(a) 证对 X,Y 而言:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |y|<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X,Y 不独立

$$F_U(u)=P\left\{X^2\leq u\right\}=\begin{cases}0, & u<0\\ \sqrt{u}, & 0\leq u<1\\ 1, & u\geq 1\end{cases}$$
$$F_V(v)=P\left\{Y^2\leq v\right\}=\begin{cases}0, & v<0\\ v, & 0\leq v<1\end{cases}$$

1,$v\geq 1$

$U=X^2,V=Y^2$ 的联合分布函数为

$$F(u,v)=P\left\{X^2\leq u,Y^2\leq v\right\}=\begin{cases}0, & u<0\text{ 或}v<0\\ \sqrt{uv}, & 0\leq u<1,0\leq v<1\\ \sqrt{u}, & 0\leq u<1,1\leq v\\ \sqrt{v}, & 1\leq u,0\leq v<1\\ 1, & 1\leq u,1\leq v\end{cases}$$

可见对 $U=X^2,V=Y^2$ 而言，有 $F(u,v)=F_U(u)F_V(v)$ 即 Y^2 和 X^2 相互独立

4. 设置随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求: (1) 条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$; (2) 条件概率 $P(X\leq 1|Y\leq 1)$

解: (1) 根据题意，(X,Y) 关于 X 的边缘概率密度函数为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y, & x>0\\ 0, & x<0;\end{cases}=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

则条件概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y \mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(2) 条件概率

$$P(X\leqslant 1 \mid Y\leqslant 1)=\frac{P(X\leqslant 1, Y\leqslant 1)}{P(Y\leqslant 1)}$$

而

$$\begin{aligned}P(X\leqslant 1, Y\leqslant 1)&=\iint_{x\leq 1,\ \leq 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-2\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

又 (X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度函数为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

因此，Y 服从参数为 1 的指数分布，于是 $P(Y\leqslant 1)=F(1)=1-\mathrm{e}^{-1}$. 则

$$P(X\leqslant 1 \mid Y\leqslant 1)=\frac{P(X\leqslant 1, Y\leqslant 1)}{P(Y\leqslant 1)}=\frac{1-2e^{-1}}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$$

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且同分布，密度函数为

$$f_T(t)=\begin{cases}e^{-t}, & t>0\\ 0, & t\leq 0\end{cases}$$

证明：随机变量 $U=X+Y$ 与随机变量 $V=X/Y$ 相互独立

解：引入随机变量函数组

$$\begin{cases}u=x+y\\ v=x/y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=uv/(v+1)\\ y=u/(v+1)\end{cases}\quad u>0, v>0$$

其雅可比行列式

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{u}{(v+1)^2}$$

所以，(U,V) 的联合概率密度为

$$f_{UV}(u,v)=\mathrm{e}^{-(uv+u)/(v+1)}\cdot u/(v+1)^2, u>0, v>0$$

即

$$f_{UV}(u,v)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-u}\cdot u/(v+1)^2, & u>0, v>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_U(u)=\begin{cases}\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u}/(v+1)^2\mathrm{d}v=u\mathrm{e}^{-u}, & u>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_V(v)=\begin{cases}\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u}/(v+1)^2\mathrm{d}u=1/(v+1)^2 & v>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

显然，$f_{UV}(u,v)=f_U(u)\cdot f_V(v)$，所以 $X+Y$ 与 X/Y 相互独立。

6. 一仪器由两个部件组成，分别以 X,Y 表示这两个部件的寿命（小时）。已知 (X,Y) 的分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.01x}-e^{-0.01y}+e^{-0.01(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：

(a) 边缘分布函数 $F_X(x)$, $F_Y(y)$;

(b) $P\{1<X\le 2, 1<Y\le 2\}$;

(c) 密度函数 $f(x,y)$

解：

(a) 由边缘分布函数的定义知：

$$F_X(x)=F(x,+\inf)=\begin{cases}1-e^{-0.01x}, & x>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(y,+\inf)=\begin{cases}1-e^{-0.01y}, & y>0\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

(b) 由联合分布函数的定义知

$P\{1<X\le 2,1<Y\le 2\}=F(2,2)-F(2,1)-F(1,2)+F(1,1)=e^{-0.02}-2e^{-0.03}+e^{-0.04}$

(c)

$$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}(0.01)^2e^{-0.01(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

7. 设二维随机变量 (X,Y) 服从矩形区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$ 的均匀分布，且

$$U=\begin{cases}0, & X\le Y\\ 1, & X>Y\end{cases}, V=\begin{cases}0, & X\le 2Y\\ 1, & X>2Y\end{cases}$$

求 U 与 V 的联合概率分布

解：由题意知，U, V 只能取 0 和 1，故 (U, V) 的概率分布为

$$P=\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}$$

$$P=\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=P\{X\le Y\}=0$$

$$P=\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2y}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$$

$$P=\{U=1,V=1\}=1-P\{X\le Y,X\le 2Y\}-P\{X\le Y,X>2Y\}-P\{X>Y,X\le 2Y\}=\frac{1}{2}$$

8. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & X\le Y,\\ 0, & X>Y\end{cases}$$

(a) 写出 (X,Y) 的概率密度；

(b) 问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

(c) 求 $Z=U+X$ 的分布函数

解:

(a) 根据题意，区域 D 的面积为 $S_D=\int_0^1(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$，则 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(b) 对于 0 < t < 1, 有

$$P(U\le 0,X\le t)=P(X>Y,X\le t)=\int_0^t\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}3\mathrm{d}y=\frac{3}{2}t^2-t^3$$

$$P(U\le 0)=P(X>Y)=\frac{1}{2}$$

$$P(X\le t)=\int_0^t\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3\mathrm{d}y=2t^{\frac{3}{2}}-t^3$$

由于 $P(U\le 0,X\le t)\ne P(U\le 0)P(X\ne t)$，所以 U 与 X 不互相独立

(c) 当 z < 0 时，$F(z)=0$ 当 $0\le z<1$ 时，有

$$F(z)=P(U+X\le z)=P(U=0,X\le z)=P(X>Y,X\le z)=\frac{3}{2}z^2-z^3$$

当 $1\le z<2$ 时，有

$$F(z)=P(U+X\le z)=P(U=0,X\le z)+P(U=1,X\le z-1)=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2$$

当 $z\ge 2$ 时，有

$$F(z)=P(U+X\le z)=1$$

所以 $Z=U+X$ 的分布函数为

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \dfrac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1\\ \dfrac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

9. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 服从参数为 $\theta=2$ 的指数分布，求关于 a 的方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根的概率。

注：若连续型随机变量 T 服从参数为 θ 的指数分布，则其概率密度函数具有以下形式：

$$f_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-t/\theta}, & t>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

解：根据题意，X 和 Y 的概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他;}\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

由 X 和 Y 的独立性，则 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1, y>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

由关于 a 的方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根，则有 $\Delta=4(X^2-Y)\geq 0$，即 $X^2\geq Y$。因此，方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根的概率为

$$\begin{aligned}P\left(X^2\geqslant Y\right)&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\mathrm{d}y\\&=1-\int_0^1\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\\&=1-\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\\&=1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\Phi(0)]\\&=0.1445\end{aligned}$$

10. 设 $X_1,\ldots,X_{2n+1}$ 为独立同分布的随机变量（统计上称 $X_1,\ldots,X_{2n+1}$ 为一组容量为 $2n+1$ 的样本）。次序统计量 $X_{(n+1)}$ 称为样本中位数。如果 X_1,X_2,X_3 是 $(0,1)$ 上服从均匀分布的一组样本。求样本中位数落入区间 $(1/2,3/4)$ 概率。

解：$X_{(j)}=x$ 意味着 $X_1,...,X_n$ 中有 $j-1$ 个值小于 x，有一个值等于 x，有 $n-j$ 个值大于 x，对于给定的一个随机变量等于 x，给定的 $j-1$ 个随机变量的值小于 x，给定的其余 $n-j$ 个随机变量的值大于 x，概率密度为：

$$[\mathrm{F}(x)]^{j-1}[1-\mathrm{F}(x)]^{n-j}f(x)$$

因为把 n 个随机变量分成三个组的方法共有

$$\begin{pmatrix} n \\ j-1, n-j, 1\end{pmatrix}=\frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}$$

种，所以 $X_{(j)}$ 的密度函数为

$$f_{X_{(j)}}(x)=\frac{n!}{(n-j)!(j-1)!}[F(x)]^{j-1}[1-F(x)]^{n-j}f(x)$$

利用上式可得 $X_{(2)}$ 的密度函数为

$$f_{X_{(2)}}(x)=\frac{3!}{1!1!}x(1-x) \quad ,0<x<1$$

因此有

$$P\left\{\frac{1}{4}<X_{(2)}<\frac{3}{4}\right\}=6\int_{1/4}^{3/4}x(1-x)\mathrm{d}x=6\left\{\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right\}\mid \begin{matrix} x=3/4 \\ x=1/4 \end{matrix} =\frac{11}{16}$$