概率论与数理统计第一章习题答案

1. 一个工厂生产了 n 台微波炉，以事件 A_i 表示生产的第 i 台微波炉是正品（$1\leq i \leq n$），用 A_i（$1\leq i \leq n$）表示下列事件：
   1) 没有一台微波炉是次品；
   2) 仅有一台微波炉是次品；
   3) 至少有一台微波炉是次品；
   4) 至少两台微波炉不是次品；

解：

1) $A_1A_2\ldots. A_n$ 或$\bigcap_{i=1}^{n} Ai$;

2) $\overline{A_1}A_2A_3\ldots. A_n \cup A_1\overline{A_2}A_3\ldots. A_n \cup\ldots. \cup A_1A_2\ldots. A_{n-1}\overline{A_n}$或$\bigcup_{i=1}^{n}\left[\overline{A}_i\left(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} A_i\right)\right]$;

3) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\ldots.\cup\overline{A_n}$或$\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$;

4) $A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup\ldots\cup A_1A_n \cup A_2A_3 \cup A_2A_4\cup\ldots\cup A_2A_n \cup\ldots\cup A_{n-1}A_n$ 或$\bigcup_{\substack{i,j=1\\ j\neq 1}}^{n} A_i A_j$;

2. 在数学系阅览室中随意抽取一本书，事件 A 表示“数学书”，B 表示“中文版的书”，C 表示“平装书”：
   1) 叙述事件 $A\overline{B}C$ 的实际意义。
   2) 在什么条件下 ABC=C 成立？
   3) 什么时候$\overline{C}\subset A$ 是正确的？
   4) 什么时候$\overline{B}$=C 是正确的？

解：

1) 事件 $A\overline{B}C$ 表示抽取的是一本外文版的平装数学书。
2) ABC=C 等价于 $C\subset AB$，即在“阅览室的平装书都是中文版的数学书”这一条件下，等式 ABC=C 成立。
3) 当阅览室的精装书都是数学书时，$\overline{C}\subset A$ 是正确的。
4) 当阅览室的外文书都是平装书，且平装书都是外文书时，等式$\overline{B}$=C 是正确的

3. 设 A，B，C 是随机事件，A 与 C 互不相容，P(AB)=1/2,P(c)=1/3,则 $P(AB|\overline{C})$=

解：由条件概率的定义，$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{c})}$, 因为 A，C 互不相容，

所以 $A\overline{C}$=A，因此 $P(AB\overline{C})$=P(AB),从而原式=$\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{1/2}{1-1/3}$=3/4

另外，除了用互斥定义得到 $P(AB\overline{C})$=P(AB)，还可以用性质---减法公式：

$$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)$$

由 $P(AC)=0 \rightarrow P(ABC)=0$

从而 $P(\overline{A}BC)=P(AB)$

4. 已知事件 A,B 满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$。

由于 $P(\overline{A}\overline{B})=1-P(\overline{\overline{A}\overline{B}})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$

而 $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

故而 $1-P(A)-P(B)=0$

从而 $P(B)=1-P(A)=1-p$

5. 考虑一元二次方程$x^2+Bx+C=0$,其中 B,C 分别是将一枚骰子接连掷两次先后出现的点数。求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q。

解：一枚骰子掷两次，其基本事件总数为 36。令$A_i(i=1,2)$分别表示“方程有实根”和“方程有重根”，则

$$A_1=\{B^2-4C\geq 0\}=\{C\leq \frac{B^2}{4}\},\ A_2=\{B^2-4C=0\}=\{C=\frac{B^2}{4}\}$$

注意到表 1-1

B	1	2	3	4	5	6
A_1的基本事件个数	0	1	2	4	6	6
A_2的基本事件个数	0	1	0	1	0	0

由此易知A_1的基本事件个数为 0+1+2+4+6+6=19

则有古典概率计算公式得

$$P=P(A_1)=19/36$$

A_2的基本事件个数为 0+1+0+1+0+0=2

由古典概率计算公式得 $q=P(A_2)=2/36=1/18$

6. 一袋中装有 m+n 个球，其中 m 个黑球，n 个白球，现随机地从中每次取出一个球（不放回），求下列事件的概率：
   1) 第 i 次取到的是白球；
   2) 第 i 次才取到白球；
   3) 前 i 次中能取到白球；
   4) 前 i 次中恰好取到 k 个白球（$k\leq i\leq m+n, k\leq n$）；
   5) 到第 i 次为止才取到 k 个白球（$k\leq i\leq m+n, k\leq n$）；
   6) 取球直到剩下的球的颜色都相同为止，最后剩下的全是白球。

答案：

1) 记这一事件为 A_i

$P(A_i)=\frac{C_n^1(m+n-1)!}{(m+n)!}=\frac{n}{m+n}$

2) 记这一事件为 B_i

$$P(B_i) = \frac{C_n^1 P_m^{i-1}(m+n-i)!}{(m+n)!} = \frac{nP_m^{i-1}}{P_{m+n}^i}$$

3) 记该事件为 C_i

$$P(\overline{C}_i) = \frac{P_m^i(m+n-i)!}{(m+n)!} = \frac{P_m^i}{P_{m+n}^i} = \frac{C_m^i}{C_{m+n}^i}$$

$$P(C_i) = 1 - P(\overline{C}_i) = 1 - \frac{C_m^i}{C_{m+n}^i}$$

4) 记事件为 D_i，则易知

$$P(D_i) = \frac{C_i^k P_n^k P_m^{i-k}(m+n-i)!}{(m+n)!} = \frac{C_i^k P_n^k P_m^{i-k}}{P_{m+n}^i} = \frac{C_n^k C_m^{i-1}}{C_{m+n}^i}$$

5) 该事件 E_i 的概率为

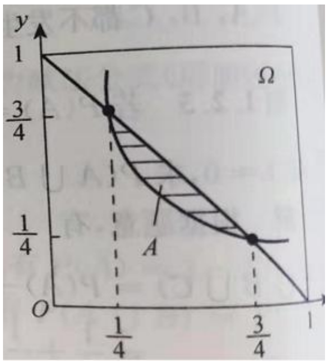
$$P(E_i) = \frac{C_{i-1}^{k-1}P_n^{k-1}P_m^{(i-1)-(k-1)}C_{n-k+1}^1(m+n-i)!}{(m+n)!}$$

$$= \frac{(i-1)!C_n^{k-1}C_m^{i-1}C_{n-k+1}^k}{P_{m+n}^i} = \frac{C_n^{k-1}C_m^{i-1}(n-k+1)}{iC_{m+n}^i}$$

6) 记该事件为 F，

$$P(F) = \frac{n}{m+n}$$

7. 从[0, 1]区间中随机取得 2 个数，求其积不小于 3/16，其和不大于 1 的概率。



解：设两个数分别为 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$，把(x, y)看做平面 x0y 上一点的直角坐标，则样本空间所对应的集合区域为边长为 1 的正方形，记作Ω如下图所示，其积不小于 3/16 的区域为双曲线：$y = \frac{3}{16x}$的上方，其和不大于 1 的区域为直线：$y = 1 - x$ 的下方，即区域 A 即为所求事件的概率

$$S_A = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 1 - x - \frac{3}{16x}dx = \frac{1}{4} - \frac{3}{16}\ln 3$$

8. 某种动物活到 15 岁以上的概率为 0.8，活到 25 岁以上为 0.3，求现年 15 岁的这种动物活到 25 岁的概率。

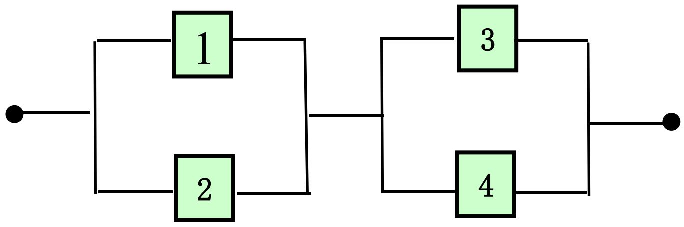
解：设 A={这种动物活到 25 岁以上}，B={这种动物活到 15 岁以上}，由题设知：P(A)=0.3,P(B)=0.8.

由于 $A \subset B$，故 AB=A，从而 P(AB)=P(A)=0.3 于是所要求的概率为

$$P(AB|B)=p(AB)/P(B)=\frac{3}{8}$$

9. 一个元件能正常工作的概率称为这个元件的可靠性，一个系统能正常工作

的概率称为这个系统的可靠性。设一个系统由 4 个元件按下图组成，各个元件能否正常工作是相互独立的，且每个元件的可靠性都等于 p（0<p<1），求这个系统的可靠性。



解：设事件$A_i(i=1,2,3,4)$表示“第 i 个元件能正常工作”，事件 A 表示“系统 L-R 能正常工作”，则有

A=$(A_1\cup A_2)\cap(A_3\cup A_4)$

注意到 $\overline{A}=\overline{(A_1\cup A_2)}\cup\overline{(A_3\cup A_4)}$=$(\overline{A_1}\,\overline{A_2})\cup\overline{(A_3A_4)}$

则有 P($\overline{A}$)=P[$\overline{(A_1A_2)}\cup\overline{(A_3A_4)}$]=P($\overline{A_1}\,\overline{A_2}$)+P$\overline{(A_3A_4)}$-P($\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}$)

=P($\overline{A_1}$)P($\overline{A_2}$)+ P($\overline{A_3}$)P($\overline{A_4}$) $-$ P($\overline{A_1}$)P($\overline{A_2}$)P($\overline{A_3}$)P($\overline{A_4}$)

=2$(1-p)^2-(1-p)^4$

P(A)=1-P($\overline{A}$)=1-2$(1-p)^2+(1-p)^4$

=$[1-(1-p)^2]^2=p^2(2-p)^2$

10. 字通信中信号是由 0 和 1 的长序列组成的，由于随机干扰，当发出信号 0 时，收到的信号为 0 和 1 的概率分别是 0.8 和 0.2；当发出信号的为 1 时收到信号为 0 和 1 的概率分别是 0.1 和 0.9。现假设发出 0 和 1 的概率分别为 0.6 和 0.4，试求：
    a) 收到一个信号，它是 1 的概率。
    b) 收到信号是 1 时，发出的信号确实是 1 的概率。

解：以 A 表示事件“收到的信号是 1”，以B_i（i=0,1）表示事件“发出的信号是 i”，易知B_0，B_1是一个划分，且有：

$$P(B_0)=0.6;\ P(B_1)=0.4;\ P(A|B_0)=0.2;\ P(A|B_1)=0.9.$$

1) 由全概率公式得所求的概率为
$$P(A)=P(B_0)P(A|B_0)+P(B_1)P(A|B_1)=0.48$$
2) 由贝叶斯公式得所求的概率为
$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=0.75$$