计算机类本科生 2023—2024 学年第一学期线性代数课程期末考试试卷（A 卷）

草 稿 区

专业(大类或特色班)：________ 年级：20 ___ 学号：________ 姓名：________ 成绩：

说明：A^T表示矩阵 A 的转置矩阵，A^*表示矩阵 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，O 是零矩阵，$R(A)$或 $r(A)$表示矩阵 A 的秩 A^{-1}表示可逆矩阵 A 的逆矩阵，$|A|$表示方阵 A 的行列式，$\langle\alpha,\beta\rangle$ 表示向量α,β 的内积。

得 分

一 .客观题：1-3 小题为判断题，在对的后面括号中填"√"，错的后面括号中填"×"，4-8 为单选题，将正确选项前的字母填在括号中.(每小题 2 分，共 16 分)。

1. 实矩阵 A 是 $m\times n$ 矩阵，则矩阵 A^TA 和 AA^T 都是半正定矩阵。 (　　)

2. 若矩阵 A 的列向量线性相关，则 A 的行向量不一定线性相关。 (　　)

3. 设 $A_{ik}(i,k=1,2,3)$ 是三阶行列式中元素 a_{ik} 的代数余子式，则当 $a_{13}A_{1k}+a_{23}A_{2k}+a_{33}A_{3k}=0$ 时 k 必为 1。 (　　)

4. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(\lambda-1)x_1^2+\lambda x_2^2+(\lambda+1)x_3^2$，当满足下列条件时是正定二次型 (　　)

(A) $\lambda>-1$　　(B) $\lambda>0$
(C) $\lambda>1$　　(D) $\lambda\geq1$

5. 已知 2 阶行列式$|A|=7$，$|B|=5$，则 $|5B^{-1}A|=$ (　　)

(A) 7　　(B) 175
(C) 7/125　　(D) 35

6. 设A,B都是n阶正交矩阵，则下面哪一个一定是正交矩阵 (　　)

(A) $A+B$　　(B) $A-B$
(C) AB　　(D) kA，(k 为实数)

7. 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，则下面哪个也是$Ax=0$的基础解系 (　　)

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　(B) $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$
(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$　　(D) $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3,4\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3$

8. 向量组$\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14)$，$\alpha_4=(1,-2,2,0),\alpha_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的极大无关组是 (　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$
(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

得 分

二、行列式计算 （第 1 小题 6 分，第 2 小题 8 分，共 14 分）

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$。

2. 计算n阶行列式 $|D_n| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$，其中$n>3$。

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

得 分

三、已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$，且满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，这里 A^* 是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X。

（本题 10 分）

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

得 分

四、当k如何取值时，下面方程组无解？有唯一解？有无穷解？当有解时，求出全部解（对于有无穷多解情况，要求利用导出组基础解系的方式求出通解）。（本题 10 分）

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 - x_3 = k - 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - kx_3 = k \end{cases}$$

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

五、全体二阶实矩阵构成实数域 R 上的线性空间 V，取固定实数矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，在 V 中定义变换 σ：

$\sigma(X)=AX-XA,\quad X\in V$。 (本题 10 分)

(1) 证明 σ 是 V 中的一个线性变换。

(2) 在 V 中取一组基：$E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 σ 在该基下的矩阵。

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

分

六、已知二次型： $f(x_1,x_2,x_3)=17x_1^2+14(x_2^2+x_3^2)-4(x_1x_2+x_1x_3+2x_2x_3)$， （本题 15 分）

(1) 给出它的系数矩阵 A，并求出矩阵 A 的特征根和特征向量。

(2) 用正交变换 $x=Py$ 化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，给出变换矩阵 P，并给出该二次型的正、负惯性指数和符号差。

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

得 分

七、设 A 为 $n(n>2)$ 阶方阵，设 $\alpha_1 \neq 0$ 是 $Ax=0$ 的一个解，若存在一组向量 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$，使得 $A\alpha_i=\alpha_{i-1}, i=2,3,\cdots,s$，证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。（本题 10 分）

CS 扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

得 分

八、设A,B为同阶实方阵， （本题 10 分）

(1) 求证: $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$.

(2) 若$C=A+B$，$D=A-B$均可逆，求矩阵$M=\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$的逆矩阵。

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

得 分

九、设 A 为 2 阶实方阵，且 $|A| < 0$，证明：A 必相似于对角形矩阵。（本题 5 分）

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App