概率论第二章作业答案

1. 设事件A在每一次实验中发生的概率为0.3，当A发生超过3次时，指示灯发出信号，求进行7次独立试验，事件A发生次数X的分布律，并计算指示灯发出信号的概率。

   解：$P(X=k)=C_7^k\cdot 0.3^k\cdot 0.7^{7-k}(k=0,1,2,\cdots,7)$

   $P(X\geqslant 4)=\sum\limits_{k=4}^{7}P(X=k)=\sum\limits_{k=4}^{7}C_7^k\cdot 0.3^k\cdot 0.7^{7-k}=0.126036$

2. 在电源电压不超过200V，在200V到240V之间，超过240V三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为0.1，0.001，0.2。假设电源电压服从正态分布$N(220,25^2)$，试求：

   (a) 该电子元件损坏的概率$\boldsymbol{\alpha}$;

   (b) 该电子元件损坏时，电源电压在200~240的概率$\boldsymbol{\beta}$。

   解：令$A_1=$电压不超过200V，$A_2=$电压在200~240V，$A_3=$电压超过240V，$B=$电子元件损坏. 则

   $P\{A_1\}=P\{X\leqslant 200\}=P\{\dfrac{x-220}{25}\leqslant\dfrac{200-220}{25}\}=\Phi(-0.8)=0.212$

   $P\{A_2\}=P\{200<X<240\}=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.576$

   $P\{A_3\}=P\{X>240\}=1-\Phi(0.8)=0.212$

   由题设知：

   $P(B|A_1)=0.1,P(B|A_2)=0.001,P(B|A_3)=0.2$

   所以 $\boldsymbol{\alpha}=P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)\approx 0.064$

   $\boldsymbol{\beta}=P(A_2|B)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B)}=\frac{0.001\times 0.576}{0.064}=0.009$

3. 设一小时内进入图书馆的读者服从泊松分布，已知一个小时内无人进入图书馆的概率为0.01，求一个小时内至少有2个读者进入图书馆的概率（$\ln 10\approx 2.303$）

   解：设X为一小时内进入图书馆的读者数，则X服从参数为λ的泊松分布，于是$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(k=0,1,\cdots)$.

   由于一个小时内无读者进入图书馆的概率为0.01，即$0.01=P(X=0)=e^{-\lambda}$，则$\lambda=2\ln 10=4.606$，因此一个小时内至少有两个读者进入图书馆的概率为

   $P(X\geqslant 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1\text{-}e^{-\lambda}\text{-}\lambda e^{-\lambda}=0.944$

4. 设离散型随机变量X的分布函数为

   $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.4, & -1\leqslant x<1\\ 0.8, & 1\leqslant x<3\\ 1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

   试求：（1）X的概率分布；（2）P$\{X<2|X\neq 1\}$

   (1)由分布函数与概率分布的关系式得

X	-1	1	3
p_k	0.4	0.4	0.2

   (2)由条件概率及(1)得

   $P\{X<2|X\neq 1\}=\frac{P\{X=-1\}}{P\{X\neq 1\}}=\frac{2}{3}$

5. 向半径为r的圆内随机抛一个点，求此点到圆心的距离X的分布函数$F(x)$，并求$P(X>(\frac{2r}{3}))$.

解：$F(x)=P\{X\leqslant x\}=(\pi x^2)/(\pi r^2)=x^2/r^2$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x^2}{r^2}, & 0\leqslant x<r\\ 1, & x\geqslant r\end{cases}$$

根据X的分布函数，则

$P(X>\dfrac{2r}{3})=1-F(\dfrac{2r}{3})=1-(\dfrac{2}{3})^2=5/9$

6. 设随机变量X的分布律为

-3	-1	0	1	3
0.05	0.20	0.15	0.35	0.25

(a) 求$Y=5-2X$的分布律；

-1	3	5	7	11
0.25	0.35	0.15	0.20	0.05

(b) 求$Z=X^2+1$的分布律。

1	2	10
0.15	0.55	0.30

7. 设连续型随机变量X的分布函数是 $F(x)=\begin{cases}A+Be^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ （其中 $\lambda>0$是常数）

试确定 A及B的值，并求相应的概率密度函数$f(x)$.

解：由分布函数的性质知，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}(A+Be^{-\lambda x})=A=1$，因为$F(x)$连续，故有 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(1+Be^{-\lambda x})=1+B=0$，所以$A=1,B=-1$.

从而

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}；\ f(x)=F'(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

8. 某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件，其寿命(单位:小时)都服从同一指数分布，概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

试求在仪器使用的最初200h以内，至少有一只电子元件损坏的概率。

解：设X表示该型号电子元件的寿命，则X服从参数为$\lambda=\frac{1}{600}$的指数分布。

记$A=$ 电子元件在使用最初200h以内损坏 $=\{X\leqslant 200\}$，则

$P(A)=P\{X\leqslant 200\}=\int_0^{200}\frac{1}{600}e^{-\frac{x}{600}}dx=1\text{-}e^{-\frac{1}{3}}$

设Y表示在使用的最初200h以内电子元件损坏的个数，则$Y\sim B(3,1\text{-}e^{-\frac{1}{3}})$，故所求概率为

$P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y<1\}=1-P\{Y=0\}=1-[1-(1-e^{-\frac{1}{3}})]^3=1-e^{-1}$

9. 设测量误差$X \sim N(0, 10^2)$，先进行100次独立测量，求误差的绝对值超过19.6的次数不小于3的概率。

解：先求任意一次测量误差的绝对值超过19.6的概率p，

$$
\begin{aligned}
p &= P\{|X| > 19.6\} = 1 - P\{|X| \leqslant 19.6\} \\
&= 1 - P\left\{|\frac{X}{10}| \leqslant 1.96\right\} = 1 - [\Phi(1.96) - \Phi(-1.96)] \\
&= 1 - [2\Phi(1.96) - 1] = 1 - [2 \times 0.975 - 1] = 1 - 0.95 = 0.05
\end{aligned}
$$

设Y为100次测量中误差绝对值超过19.6的次数，则$Y \sim b(100, 0.05)$.

因为n很大，p很小，可用泊松分布近似，$np = 5 = \lambda$，所以

$P\{Y \geqslant 3\} \approx 1 - \frac{5^0 e^{-5}}{0!} - \frac{5^1 e^{-5}}{1!} - \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = 1 - \frac{37}{2}e^{-5} \approx 0.87.$

10. 设随机变量X的密度函数为 $f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$，

求随机变量$Y = X^2 + 1$的分布函数与密度函数。

解：X 的取值范围为(-1, 1)，则Y的取值范围为[1, 2).

当$1 \leqslant y < 2$时，

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y \leqslant y\} = P\left\{X^2 + 1 \leqslant y\right\} \\
&= P\{-\sqrt{y-1} \leqslant X \leqslant \sqrt{y-1}\} = \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} (1 - |x|)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\sqrt{y-1}} (1 - x)\mathrm{d}x = 1 - (1 - \sqrt{y-1})^2
\end{aligned}
$$

从而Y的分布函数

$$
F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 1 - (1 - \sqrt{y-1})^2, & 1 \leqslant y < 2 \\ 1, & y \geqslant 2 \end{cases}
$$

Y的概率密度函数为

$$
f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{y-1}} - 1, & 1 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
$$