计算机大类 2023--2024 学年第 2 学期《概率论与数理统计》期末考试试卷（A 卷）答案

一 、单项选择题（共 18 分，每小题 2 分）：

1-5：D A D B B　　6-9：C B C A

二 、填空（共 18 分，每小题 3 分）：

1. $0.8\times 0.2^{k-1}$，1/6
2. 1，-1。
3. $\frac{1}{5}$
4. 3，2。
5. $F(10,5)$
6. (39.51，40.49)

三、解答题（10 分）：

发报台分别以 0.6 和 0.4 发出信号“*”和“-”。由于通信系统受到干扰，当发出信号“*”时，收报台未必收到“*”，而是分别以 0.8 和 0.2 的概率收到信号“*”和“-”；同样，当发出信号“-”时，收报台分别以概率 0.9 和 0.1 收到信号“-”和“*”。求：

（1）收报台收到信号“*”的概率；

（2）当收到信号“*”时，发报台确实是发出信号“*”的概率。

解： 记 A 表示“发送信号*”，B 表示“接收到信号*”，依题意，有

$P(A)=0.6$，$P(B|A)=0.8$， $P(\overline{A})=0.4$，$P(B|\overline{A})=0.1$，

（1）由全概率公式可得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.6\times 0.8+0.4\times 0.1=0.52\text{。}$$

（2）由贝叶斯公式，可得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{0.48}{0.52}=\frac{12}{13}\approx 0.923\text{。}$$

四、解答题（10 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & 其他.\end{cases}$，求 $Y=\sin X$ 的概率密度。

解： X 在 $(0,\pi)$ 取值时 $Y=\sin X$ 在 $(0,1)$ 取值，故若 $y<0$ 或 $y>1$ 时，$f_Y(y)=0$。若 $0\le Y\le 1$，Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(0\le Y\le y)=P(0\le \sin X\le y)$$
$$=P\{(0\le X\le \arcsin y)\bigcup(\pi-\arcsin y\le X\le \pi)\}$$
$$=P(0\le X\le \arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\le X\le \pi)$$
$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx$$
$$=\frac{x^2}{\pi^2}\Big|_0^{\arcsin y}+\frac{x^2}{\pi^2}\Big|_{\pi-\arcsin y}^{\pi}=\frac{2\arcsin y}{\pi}.$$

所以当$0\le Y\le 1$时，$f_Y(y)=\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$。

因此，所求的概率密度为$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & else.\end{cases}$。

五、解答题（14 分）

设(X,Y)是二维变量，X的边缘概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$，在给定$X=x(0<x<1)$的条件下$Y$的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$。

（1）求(X,Y)的概率密度$f(x,y)$；

（2）求Y的边缘概率密度$f_Y(y)$；

（3）求$P\{X>2Y\}$。

解：（1）由已知得(X,Y)的概率密度$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$。——（5 分）

（2）Y的边缘概率密度$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx$。显然当$y<0$或$y>1$时，$f_Y(y)=0$。当$0\le Y\le 1$时，

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_y^1\dfrac{9y^2}{x}dx=-9y^2\ln y$，因此有$Y$的边缘概率密度$f_Y(y)=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（备注：写成$f_Y(y)=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$也没啥问题。）

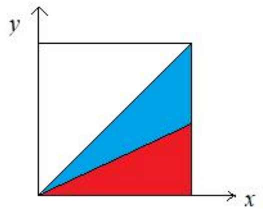
（3）$P\{X>2Y\}=\int_0^1\int_0^{x/2}\dfrac{9y^2}{x}dydx=\int_0^1\dfrac{3}{8}x^2dx=\dfrac{1}{8}x^3\Big|_0^1=\dfrac{1}{8}$。

六、解答题（10 分）

假设二维随机变量(X,Y)在矩形$G=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$上服从均匀分布，记

$U=\begin{cases}0, & 若X\le Y\\ 1, & 若X>Y\end{cases}$，　　$V=\begin{cases}0, & 若X\le 2Y\\ 1, & 若X>2Y\end{cases}$.

（1）求U 和V 的联合分布；（2）求U 和V 的相关系数ρ。

解：如图所示 

（1） $P(U=0,V=0)=P(0\le X\le Y\le 1)=\frac{1}{2}$， $P(U=0,V=1)=P(\ 0\le X\le Y\le 1\ \cap\ 1\ge X>2Y\ge 0\ )=0$，

$P(U=1,V=0)=P(\ 1\ge X>Y\ge 0\ \cap\ 0\le X\le 2Y\le 1\ )=\frac{1}{4}$，

$P(U=1,V=1)=P(\ 1\ge X>Y\ge 0\ \cap\ 1\ge X>2Y\ge 0\ )=\frac{1}{4}$。

因此U 和V 的联合分布为：

U \ V	0	1
0	1/2	0
1	1/4	1/4

（2）容易求得U 和V 的边缘分布分别为$P(U=0)=\frac{1}{2}$， $P(U=1)=\frac{1}{2}$。$P(V=0)=\frac{3}{4}$， $P(V=1)=\frac{1}{4}$。因此有$E(U)=\frac{1}{2}$，$D(U)=\frac{1}{4}$，$E(V)=\frac{1}{4}$，$D(V)=\frac{3}{16}$，$E(UV)=\frac{1}{4}$，$\operatorname{cov}(U,V)=E(UV)-E(U)E(V)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$，

故U 和V 的相关系数ρ $\rho=\frac{\operatorname{cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{1/8}{\sqrt{1/4}\sqrt{3/16}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

七、解答题（10 分）

设总体X 的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}x^{(1-\theta)/\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$，其中$0<\theta<\infty$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的简单随机样本。

（1）验证θ的最大似然估计量$\hat{\theta}=\frac{-1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$；

（2）证明$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量。

解：（1）设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应于样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的一个样本值，似然函数为$L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}x_i^{(1-\theta)/\theta}$，

$\ln L(\theta)=-n\ln\theta+\frac{1-\theta}{\theta}\ln\prod_{i=1}^{n}x_i$。令$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=-\frac{n}{\theta}+\left(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right)\left(\frac{-1}{\theta^2}\right)=0$，得$-n\theta=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$。于是得到$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$， θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$。

（2）因$E(-\ln X)=\int_0^1(-\ln x)\cdot\frac{1}{\theta}x^{\frac{1}{\theta}-1}dx=-x^{\frac{1}{\theta}}\ln x\Big|_0^1+\int_0^1\frac{1}{x}x^{\frac{1}{\theta}}dx=\theta$，从而知$E(\hat{\theta})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(-\ln X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\theta=\theta$，

故$\hat{\theta}$是θ的无偏估计。

八、解答题（10 分）

某灯泡厂在采用一种新工艺的前后，分别抽取 10 个灯泡进行寿命（单位：小时）检测，计算得到：采用新工艺前，灯泡寿命的样本均值为 2460，样本标准差为 56；采用新工艺后，灯泡寿命的样本均值为 2550，样本标准差为 48。设灯泡的寿命服从正态分布，是否可以认为采用新工艺后灯泡的平均寿命有显著提高(取显著性水平$\alpha = 0.01$)?

提示：1. 灯泡寿命的方差在采用新工艺的前后均未知，需先确定其关系。2. 部分可能用到的上α分位数见下表

$z_{0.01} = 2.33$	$z_{0.005} = 2.57$		
$t_{0.01}(10) = 2.76$	$t_{0.01}(9) = 2.92$	$t_{0.005}(10) = 3.17$	$t_{0.005}(9) = 3.25$
$t_{0.01}(20) = 2.53$	$t_{0.01}(18) = 2.55$	$t_{0.005}(20) = 2.85$	$t_{0.005}(18) = 2.88$
$\chi^2_{0.01}(10) = 23.21$	$\chi^2_{0.01}(9) = 21.67$	$\chi^2_{0.005}(10) = 25.19$	$\chi^2_{0.005}(9) = 23.59$
$\chi^2_{0.01}(20) = 37.57$	$\chi^2_{0.01}(18) = 37.16$	$\chi^2_{0.005}(20) = 40.00$	$\chi^2_{0.005}(18) = 37.16$
$F_{0.01}(10,10) = 4.85$	$F_{0.01}(9,9) = 5.35$	$F_{0.005}(10,10) = 5.85$	$F_{0.005}(9,9) = 6.54$

解：首先对于方差进行 F 检验，

假设 $H_{10}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$;　$H_{11}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

则

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{56^2}{48^2} = 1.361 \in \left(\frac{1}{F_{0.005}(9,9)}, F_{0.005}(9,9)\right) = (0.15, 6.54)$$

在接受域内，所以接受H_{10}，认为$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。

现在讨论μ_1, μ_2，根据前面假设，方差相等但未知，使用 T 检验，做如下单边假设

$$H_{20}: \mu_1 \geq \mu_2;\quad H_{21}: \mu_1 < \mu_2$$

定义统计量　$T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$,

其观测值为　$t = \dfrac{2460-2550}{\sqrt{\dfrac{9\cdot 56^2 + 9\cdot 48^2}{18}}\sqrt{\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}}} = \dfrac{-90}{4\sqrt{170}\sqrt{\dfrac{1}{5}}} \approx -3.86.$

由于$-t_{0.01}(18) = -2.55$，因此 $t < -t_{0.01}(18)$，在拒绝域内，所以拒绝原假设H_{20}，承认采用新工艺后灯泡的平均寿命有显著提高。