概率论第四章作业答案

1. 设随机变量 X 的概率密度为 f(x)=$\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$,x∈ $(-\infty,+\infty)$, 求 E[min(|X|,1)]

   解：E[min(|X|,1)]

   $=\int_{-\infty}^{+\infty}\min(|x|,1)f(x)\mathrm{d}x$
   $=\int_{|x|<1}|x|f(x)\mathrm{d}x+\int_{|x|\geqslant 1}f(x)\mathrm{d}x$
   $=2\int_0^1\frac{x}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x+2\int_1^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x$
   $=\frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1+\frac{2}{\pi}\arctan x\Big|_1^{+\infty}$
   $=\frac{1}{\pi}\ln 2+\frac{1}{2}$

2. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 在 [0,1] 上服从均匀分布，X_2 服从正态分布 $N(0,2^2)$,X_3 服从参数 λ=3 的泊松分布，求 $E[(X_1-2X_2+3X_3)^2]$.

   解: 因 X_1 在 [0，1] 上服从均匀分布，故

$$E\left(X_1\right)=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2},D\left(X_1\right)=\frac{(1-0)^2}{12}=\frac{1}{12}$$

   又因 $X_2\sim N\left(0,2^2\right),X_3\sim P(3)$, 于是

$$E\left(X_2\right)=0,D\left(X_2\right)=4,E\left(X_3\right)=3,D\left(X_3\right)=3$$

   根据期望的性质得

$$\begin{aligned}E\left(X_1-2X_2+3X_3\right)&=E\left(X_1\right)-2E\left(X_2\right)+3E\left(X_3\right)\\&=\frac{1}{2}-2\times 0+3\times 3=\frac{19}{2}\end{aligned}$$

   因 X_1,X_2,X_3 相互独立，故 $X_1,2X_2,3X_3$ 也相互独立，由方差的性质有

$$\begin{aligned}D\left(X_1-2X_2+3X_3\right)&=D\left(X_1\right)+4D\left(X_2\right)+9D\left(X_3\right)\\&=\frac{1}{12}+4\times 4+9\times 3=\frac{517}{12}\end{aligned}$$

   最后利用计算方差的简化公式得

$$\begin{aligned}E\left[\left(X_1-2X_2+3X_3\right)^2\right]&=D\left(X_1-2X_2+3X_3\right)+\left[E\left(X_1-2X_2+3X_3\right)\right]^2\\&=\frac{517}{12}+\left(\frac{19}{2}\right)^2=\frac{400}{3}\end{aligned}$$

3. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leq 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

   证明：X 和 Y 是不相关的，且 X 和 Y 不是相互独立的。

   证：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{x}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x\mathrm{d}x=0$$
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{y}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

而

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{xy}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}y\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x\mathrm{d}x=0$$

从而 E(XY) = E(X)E(Y)，所以 Cov(X,Y) = 0, 这表明 X，Y 是不相关的，又

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

同理有

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，因此，X，Y 不是相互独立的。

4. 设 E(X)=2, E(Y)=4, D(X)=4,D(Y)=9, ρ_{XY}=0.5, 求：
(1)$U=X^2-XY+Y^2-3$ 的数学期望 (2)$V=X-Y+5$ 的方差.
解：
(1)

$$\begin{aligned}E(U)&=E(X^2-XY+Y^2-3)\\&=E(X^2)-E(XY)+E(Y^2)-3\\&=[D(X)+E(X)^2]-[E(X)\bullet E(Y)+\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\bullet\sqrt{D(Y)}]+[D(Y)+E(Y)^2]-3\\&=19\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}D(V)=D(X-Y+5)&=D(X)+D(Y)-2\operatorname{cov}(X,Y)\\&=13-2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\bullet\sqrt{D(Y)}=7\end{aligned}$$

5. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且都服从数学期望为 1 的指数分布，求

$$Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$$

的数学期望和方差.

解：$X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=1-[1-F(z)]^n=\begin{cases}1-e^{-nz}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是

$$E(Z)=\int_0^{\infty}zne^{-nz}\mathrm{d}z=-ze^{-nz}|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-nz}\mathrm{d}z=\frac{1}{n}$$

而

$$E(Z^2) = \int_0^{\infty} z^2 n e^{-nz} \mathrm{d}z = \frac{2}{n^2}$$

于是

$$D(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{1}{n^2}$$

6. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 X, Y 相互独立，试求 $Z_1 = \alpha X + \beta Y$ 和 $Z_2 = \alpha X - \beta Y$ 的相关系数（其中 α, β 是不为零的常数）.

   解：$\mathrm{cov}(Z_1, Z_2) = \mathrm{cov}(\alpha X + \beta Y, \alpha X - \beta Y) = \alpha^2 \mathrm{cov}(X, X) - \beta^2 \mathrm{cov}(Y, Y) = \alpha^2 D(X) - \beta^2 D(Y) = (\alpha^2 - \beta^2)\sigma^2$

$$D(Z_1) = D(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) + 2\alpha\beta \mathrm{cov}(X, Y)$$

$$D(Z_2) = D(\alpha X - \beta Y) = \alpha^2 D(X) + \beta^2 D(Y) - 2\alpha\beta \mathrm{cov}(X, Y)$$

   因为 X，Y 相互独立所以 $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$，故：

$$D(Z_1) = D(Z_2) = (\alpha^2 + \beta^2)\sigma^2$$

   相关系数为

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{D(Z_1) D(Z_2)}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$$

7. 设随机变量 X 与 Y 的数学期望分布为-2 和 2，方差分布为 1 和 4，而相关系数为-0.5，根据切比雪夫不等式估计 $P\{|X + Y| \geqslant 6\}$

   解：$E(X) = -2$, $E(Y) = 2$, $D(X) = 1$, $D(Y) = 4$,

   $\rho_{X,Y} = -0.5$

   因为 $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 0$,

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\rho_{X,Y}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 3$$

   所以

$$P\{|X + Y| \geqslant 6\} \leqslant \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

8. 假设由自动线加工的某种零件的内径 X(以毫米计) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$. 已知销售每个零件的利润 L 与销售零件的内径 X 有如下关系：

$$L = \begin{cases} -1, & X < 10 \\ 20, & 10 \leq X \leq 12 \\ -5, & X > 12 \end{cases}$$

   问平均内径 μ 为何值时，销售一个零件的平均利润最大?

解：为求 E(L), 先求 L 的分布律，L 的可能取值为-1，20，-5. 注意到事件 L=-1，L=20，L=-5 分别与事件 $X < 10$,$10 \le X \le 12$，$X > 12$ 等价，而 $X \sim N(\mu, 1)$, 故 L 的分布律为

$$
\begin{aligned}
&P\{L=-1\} = P\{X<10\} = \Phi(10-\mu) \\
&P\{L=20\} = P\{10 \leqslant X \leqslant 12\} = \Phi(12-\mu) - \Phi(10-\mu) \\
&P\{L=-5\} = P\{X>12\} = 1-\Phi(12-\mu)
\end{aligned}
$$

其中 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t$ 是标准正态分布的分布函数

$$
\begin{aligned}
\text{故} \quad E(L) =&(-1) \times \Phi(10-\mu) + 20[\Phi(12-\mu) - \Phi(10-\mu)] \\
&+ (-5)[1-\Phi(12-\mu)] \\
=&25\Phi(12-\mu) - 21\Phi(10-\mu) - 5 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} E(L) =& 21\Phi'(10-\mu) - 25\Phi'(12-\mu) \left(\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\right) \\
=& \frac{21}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(10-\mu)^2/2} - \frac{25}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(12-\mu)^2/2}
\end{aligned}
$$

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu} E(L) = 0$, 即 $\frac{21}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(10-\mu)^2/2} - \frac{25}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(12-\mu)^2/2} = 0$, 解得

$$
\mu = 11 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{25}{21}\right)
$$

故当平均内径 $\mu = 11 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{25}{21}\right)$ (毫米) 时, 销售一个零件的平均利润最大.

9. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从参数为 p 的伯努利分布（即 $P(X=1) = p$，$P(X=0) = 1-p$）。定义 $Z = 2X - Y + 1$。

1. 求 $E(Z)$ 和 $\mathrm{Var}(Z)$；

2. 若 $p = 0.5$，求 $\mathrm{Cov}(X, Z)$。

解：1. $E(Z) = 2E(X) - E(Y) + 1 = 2p - p + 1 = p + 1$.

$\mathrm{Var}(Z) = 4\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 4p(1-p) + p(1-p) = 5p(1-p)$.

2. 协方差（当 $p = 0.5$）:

计算 $\mathrm{Cov}(X, Z) = E(XZ) - E(X)E(Z)$。

$E(XZ) = E(2X^2 - XY + X) = 2E(X^2) - E(XY) + E(X)$。

$E(X^2) = E(X) = 0.5$（因 $X^2 = X$）。$E(XY) = E(X)E(Y) = 0.25$（独立性）。故 $E(XZ) = 2 \times 0.5 - 0.25 + 0.5 = 1.25$。

$E(X)E(Z) = 0.5 \times (0.5 + 1) = 0.75$。

最终:

$$
\mathrm{Cov}(X, Z) = 1.25 - 0.75 = 0.5.
$$

10. 设随机变量 X 和 Y 的联合分布如下:

$$
P(X=0, Y=0) = 0.2, \quad P(X=0, Y=1) = 0.3, P(X=1, Y=0) = 0.1, \quad P(X=1, Y=1) = 0.4.
$$

1. 求 $\mathrm{Cov}(X, Y)$；

2. 判断 X 和 Y 是否独立，并说明理由。

解：1. 边缘分布：$P(X=0)=0.2+0.3=0.5, \quad P(X=1)=0.1+0.4=0.5,$

$P(Y=0)=0.2+0.1=0.3, \quad P(Y=1)=0.3+0.4=0.7.$

期望：$E(X)=0.5, \quad E(Y)=0\times 0.3+1\times 0.7=0.7.$

$E(XY)=\sum xyP(x,y)=0\times 0\times 0.2+0\times 1\times 0.3+1\times 0\times 0.1+1\times 1\times 0.4=0.4.$

协方差：$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.4-0.5\times 0.7=0.05.$

2. 检查 $P(X=1,Y=1)=0.4$ 是否等于 $P(X=1)P(Y=1)=0.5\times 0.7=0.35$。由于 $0.4\neq 0.35$，X 和 Y 不独立。