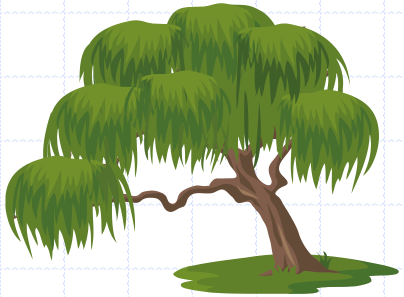
탐색트리

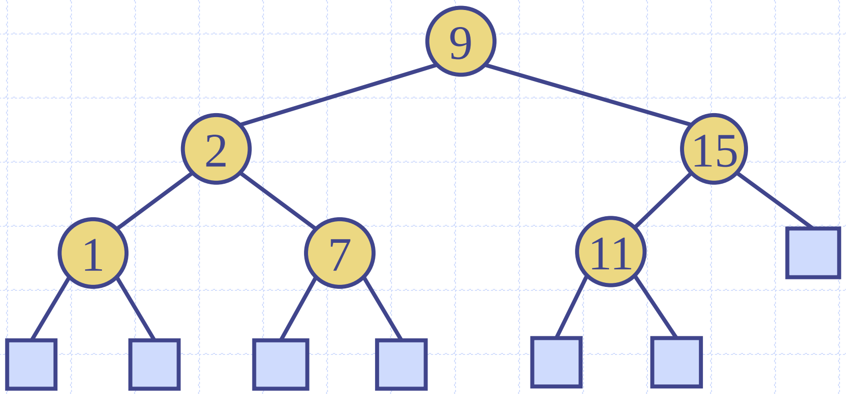
Outline

- 11.1 이진탐색트리
- 11.2 AVL 트리
- 11.3 스플레이 트리
- 11.4 응용문제

이진탐색트리

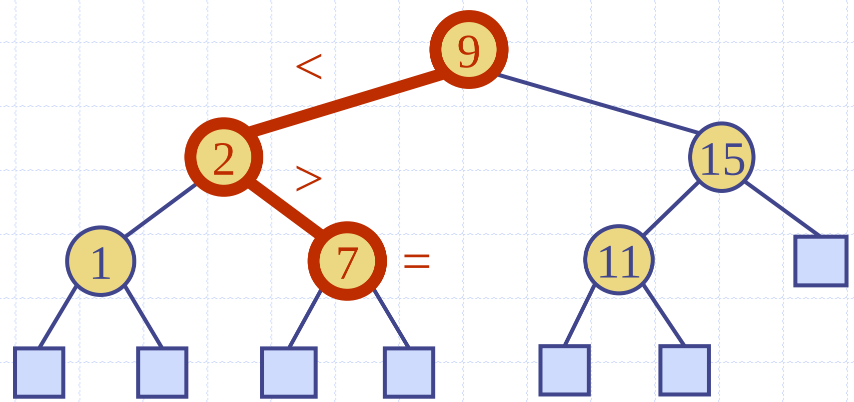


- **이진탐색트리**(binary search tree): 내부노드에 (**키, 원소**) **쌍**을 저장하며 다음의 성질을 만족하는 **이진트리**
  - ***u***, ***v***, ***w***는 모두 트리노드며 ***u***와 ***w***가 각각 ***v***의 왼쪽과 오른쪽 부트리에 존재할 때 다음이 성립
    $\boldsymbol{key}(\boldsymbol{u}) < \boldsymbol{key}(\boldsymbol{v}) \le \boldsymbol{key}(\boldsymbol{w})$
- **전제: 적정이진트리**로 구현
- **그림 표기:** 내부노드 내에 간단히 키만 표시
- 이진탐색트리를 **중위순회**(inorder traversal)하면 키가 증가하는 순서로 방문
- 이진탐색트리 **예:**



탐색

- 키 ***k***를 찾기 위해, 루트에서 출발하는 하향 경로를 추적
- 다음에 방문할 노드는 ***k***와 현재 노드의 키의 크기를 비교한 결과에 따라 결정
- 잎(즉, 외부노드)에 다다르면, 키 ***k***가 발견되지 않은 것이므로 ***NoSuchKey***를 반환
- **예**: findElement(7)



탐색 (conti.)

Alg ***findElement*(*k*)**
    input binary search tree ***T***, key ***k***
    output element with key ***k***

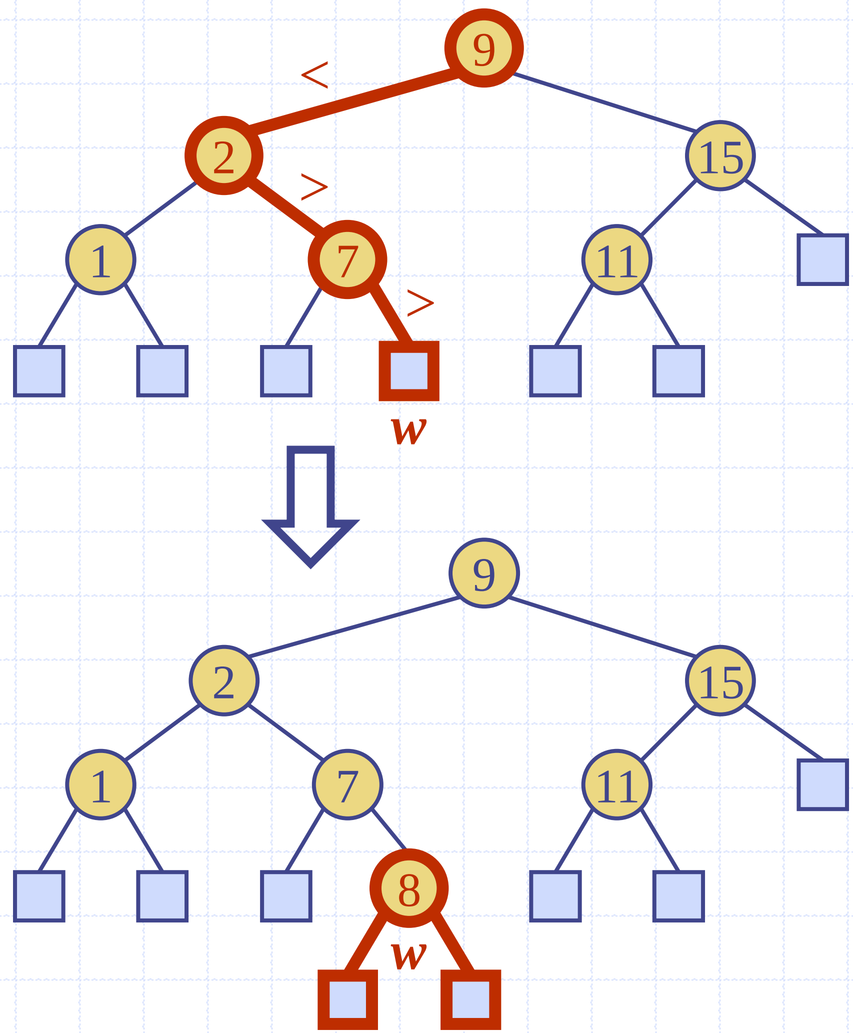
```
1. w ← treeSearch(root(), k)
2. if (isExternal(w))
        return NoSuchKey
   else
        return element(w)
```

Alg ***treeSearch*(*v*, *k*)** {generic}
    input node ***v*** of a binary search tree, key ***k***
    output node ***w***, s.t. either ***w*** is an internal node storing key ***k*** or ***w*** is the external node where key ***k*** would belong if it existed

```
1. if (isExternal(v))
        return v
2. if (k = key(v))
        return v
   elseif (k < key(v))
        return treeSearch(leftChild(v), k)
   else {k > key(v)}
        return treeSearch(rightChild(v), k)
```

삽입

- insertItem(k, e) 작업을 수행하기 위해, 우선 키 ***k***를 탐색
- ***k***가 트리에 존재하지 않을 경우, 탐색은 외부노드(***w***라 하자)에 도착
- 외부노드 ***w***에 ***k***를 삽입한 후 expandExternal(w) 작업을 사용하여 ***w***를 내부노드로 확장
- **예**: insertItem(8, e)

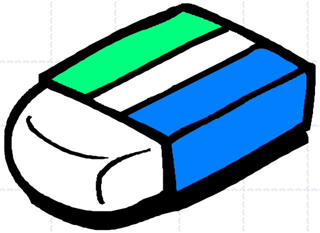


삽입 (conti.)

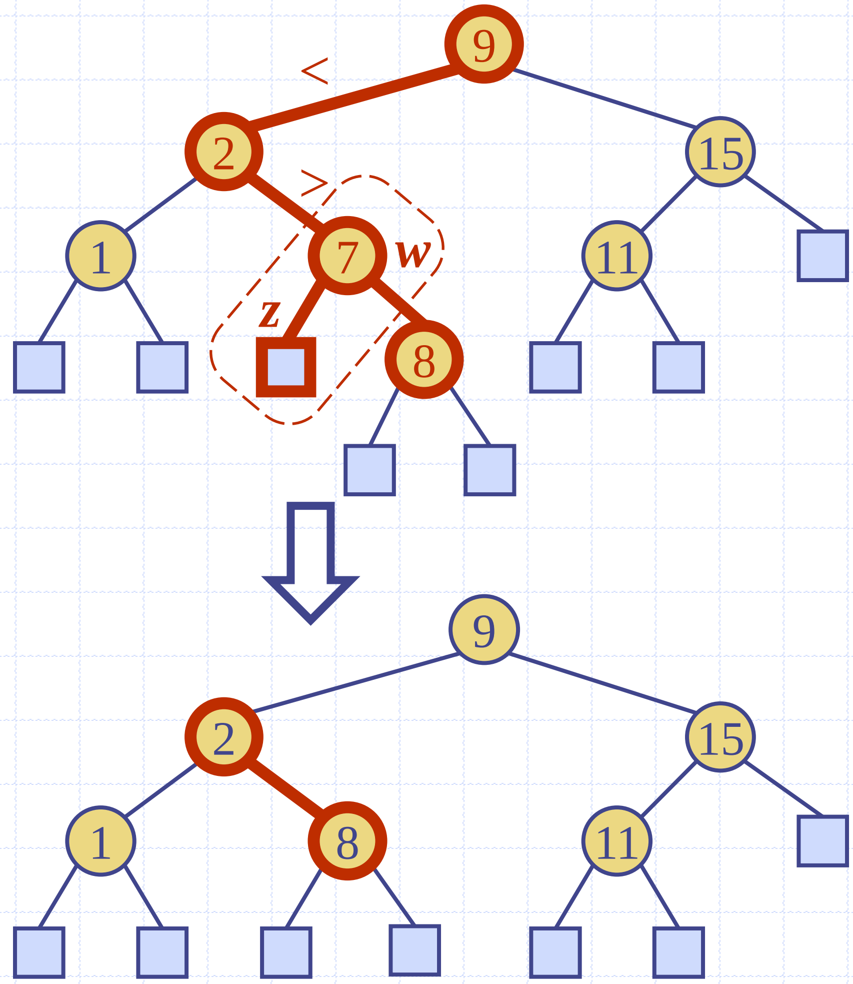
Alg ***insertItem*(*k*, *e*)**
input binary search tree ***T***, key ***k***,
element ***e***
output none

1. *w* ← ***treeSearch***(***root***(), ***k***)
2. **if** (***isInternal***(*w*))
    return
  else
    Set node ***w*** *to* (***k***, ***e***)
    expandExternal(*w*)
    return

삭제: Case 1



- removeElement(k) 작업을 수행하기 위해, 우선 키 ***k***를 탐색
- ***k***가 트리에 존재할 경우, 탐색은 ***k***를 저장하고 있는 노드(***w***라 하자)에 도착
- 노드 ***w***의 자식 중 하나가 외부노드(***z***라 하자)라면, reduceExternal(z) 작업을 사용하여 ***w***와 ***z***를 트리로부터 삭제
- **예:** removeElement(7)



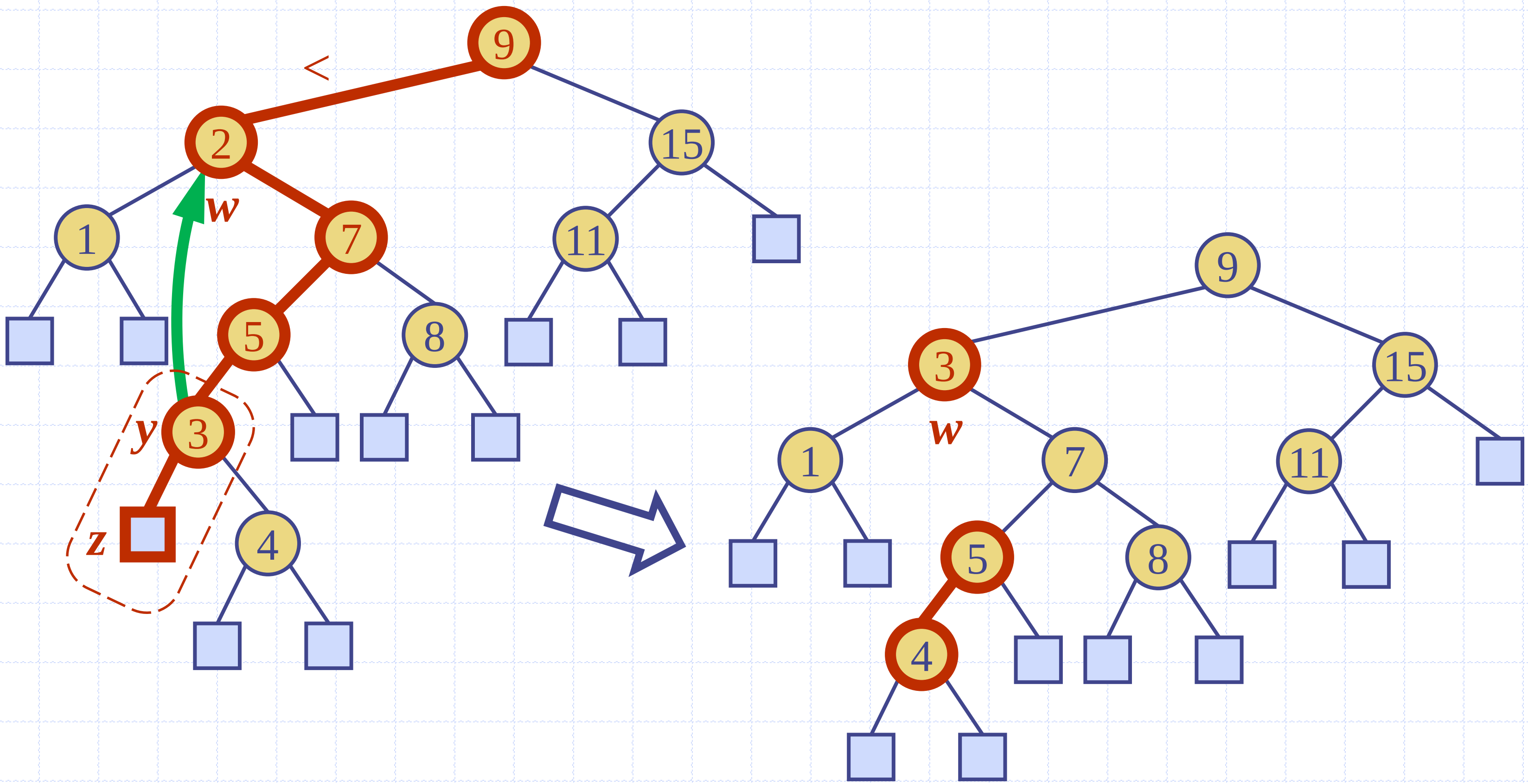
삭제: Case 2

- 삭제되어야 할 키 ***k***가 내부노드만을 자식들로 가지는 노드(***w***라 하자)에 저장되어 있다면 다음과 같이 처리

1. 트리 ***T***에 대해 ***w***의 **중위순회 계승자** ***y***와 그 자식노드 ***z***을 찾아낸다
   - 노드 ***y***는 우선 ***w***의 오른쪽 자식으로 이동한 후, 거기서부터 왼쪽 자식들만을 끝까지 따라 내려가면 도달하게 되는 마지막 내부노드며, 노드 ***z***은 ***y***의 왼쪽 자식인 외부노드
   - ***y***는 ***T***를 중위순회할 경우 노드 ***w*** 바로 다음에 방문하게 되는 내부노드이므로 ***w***의 **중위순회 계승자**(inorder successor)라 불린다
   - 따라서 ***y***는 ***w***의 오른쪽 부트리 내 노드 중 **가장 왼쪽으로 돌출된 내부노드**
2. ***y***의 내용을 ***w***에 복사
3. reduceExternal(z) 작업을 사용하여 노드 ***y***와 ***z***를 삭제

삭제: Case 2 (conti.)

- 예: removeElement(2)



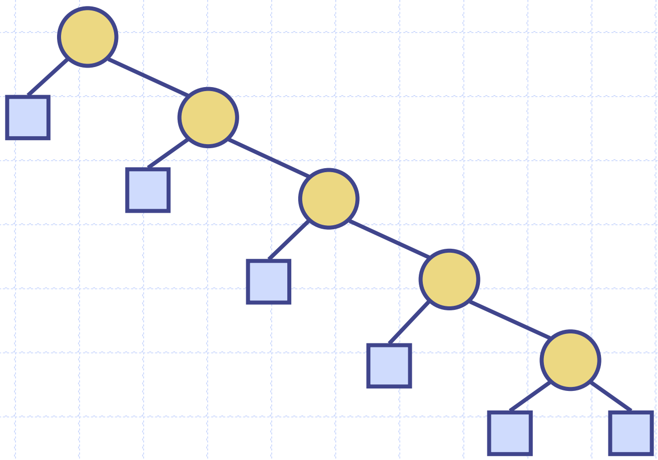
삭제 (conti.)

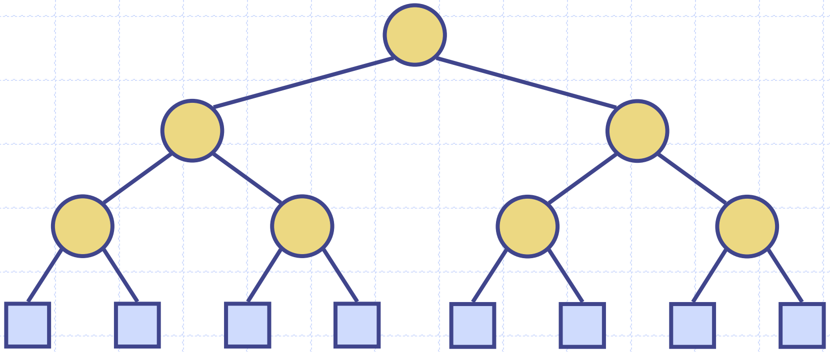
Alg ***removeElement***(*k*)
  input binary search tree ***T***,
    key ***k***
  output element with key ***k***

1. *w* ← ***treeSearch***(***root***(), ***k***)
2. **if** (***isExternal***(*w*))
    return *NoSuchKey*
3. ***e*** ← ***element***(*w*)
4. ***z*** ← ***leftChild***(*w*)
5. **if** (!***isExternal***(***z***))
    z ← ***rightChild***(*w*)
6. **if** (***isExternal***(***z***)) {case 1}
    reduceExternal(***z***)
  else {case 2}
    y ← ***inOrderSucc***(*w*)
    z ← ***leftChild***(***y***)
    Set node ***w*** *to* (***key***(***y***), ***element***(***y***))
    reduceExternal(***z***)
7. **return** ***e***

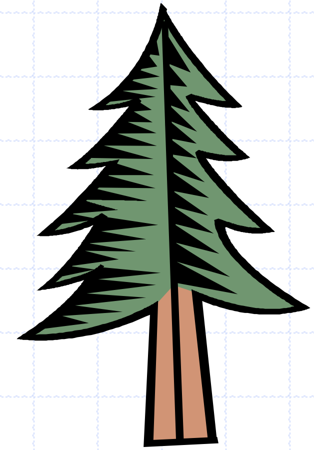
이진탐색트리의 성능

- 높이 h의 이진탐색트리를 사용하여 구현된 n항목의 사전을 가정하면:
  - $O(n)$ 공간 사용
  - findElement, insertItem, removeElement 작업 모두 $O(h)$ 시간에 수행
  - 높이 h는:
    - 최악의 경우 $O(n)$
    - 최선의 경우 $O(\log n)$



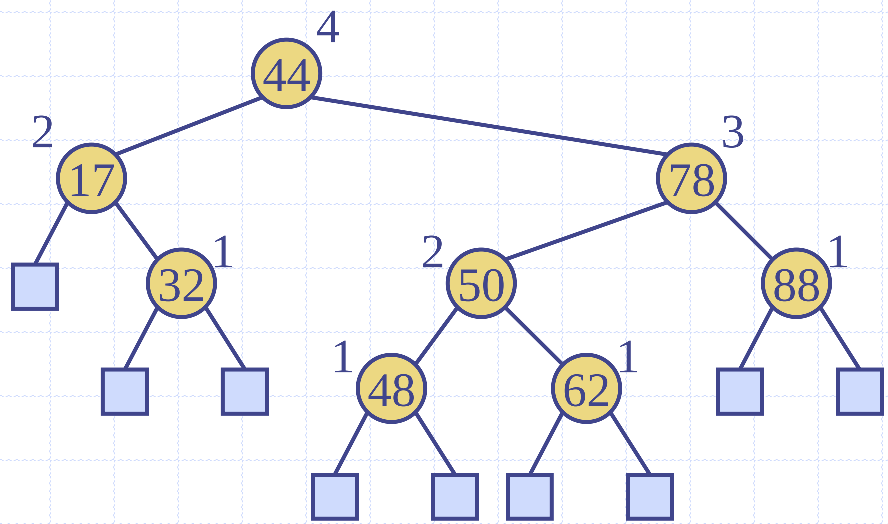


AVL 트리

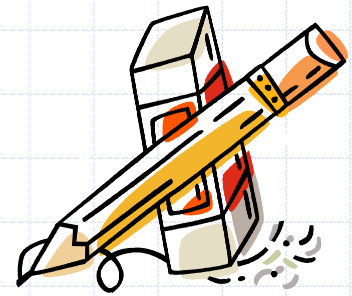


- **AVL 트리:** 트리 T의 모든 내부노드 v에 대해 v의 자식들의 좌우 높이 차이가 1을 넘지 않는 이진탐색트리 (즉, **높이균형 속성**, height-balance property)
  - AVL 트리의 부트리 역시 AVL 트리
  - 높이 (또는 균형) 정보는 각 내부노드에 저장
  - n개의 항목을 저장하는 AVL 트리의 높이: $\mathbf{O}(\log n)$
  - findElement 작업: $\mathbf{O}(\log n)$ 시간 소요

- AVL 트리 **예:**



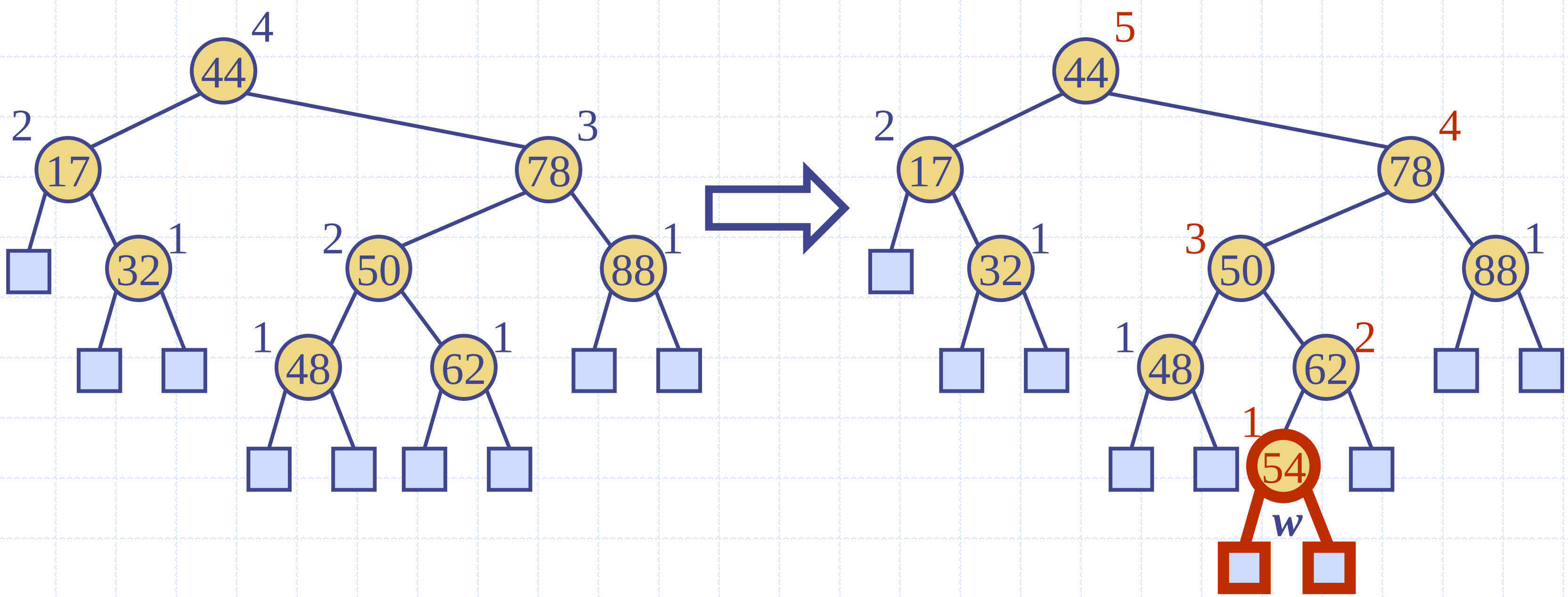
갱신 작업



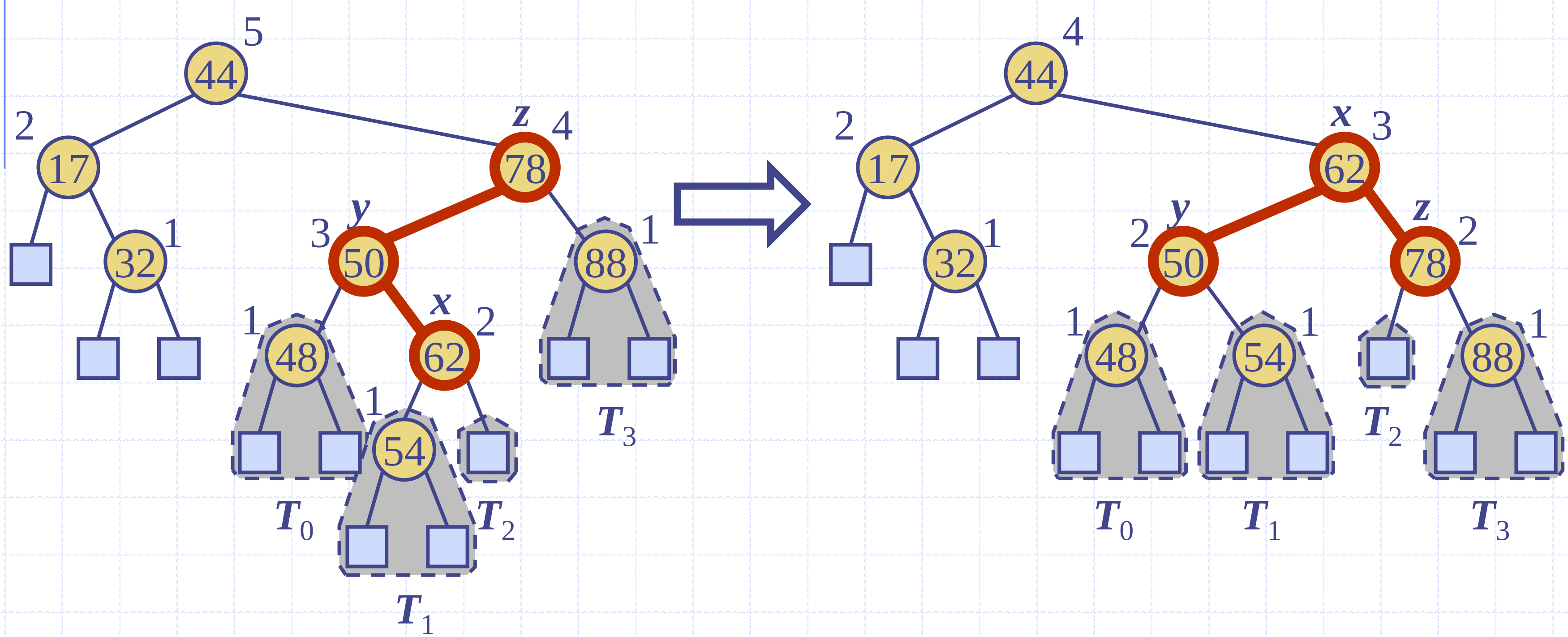
- AVL 트리에 대한 **삽입** 및 **삭제** 작업은 이진탐색트리에서의 삽입 및 삭제 작업과 유사
- 삽입이나 삭제 작업의 결과 AVL 트리의 **높이균형 속성**이 파괴될 수도 있다
- 그러므로 삽입이나 삭제 작업 후에는 혹시 생겼을지도 모를 불균형을 "**찾아서 수리**"해야 한다
  - **불균형 찾기:** 각 노드의 **균형검사**(balance check)를 통해 찾는다
  - **불균형 수리: 개조**(restructure)라 불리는 작업을 통해 트리의 높이균형 속성을 회복하기 위한 계산 작업을 수행

AVL 트리에서 삽입

- 삽입은 이진탐색트리에서와 동일하게 수행
- expandExternal 작업에 의해 확장된 노드 *w*(그리고 조상노드들)가 균형을 잃을 수 있다
- **예:** insertItem(54, e)



삽입 후 개조


5
44
2
17
1
32
z 4
78
3 y
50
1
48
x 2
62
1
54
1
88
T0
T1
T2
T3
4
44
2
17
1
32
x 3
62
2 y
50
z 2
78
1
48
1
54
1
88
T0
T1
T2
T3

삽입

```
Alg insertItem(k, e)
    input AVL tree T, key k, element e
    output none

1. w ← treeSearch(root(), k)
2. if (isInternal(w))
        return
    else
        Set node w to (k, e)
        expandExternal(w)
        searchAndFixAfterInsertion(w)
        return
```

삽입 (conti.)

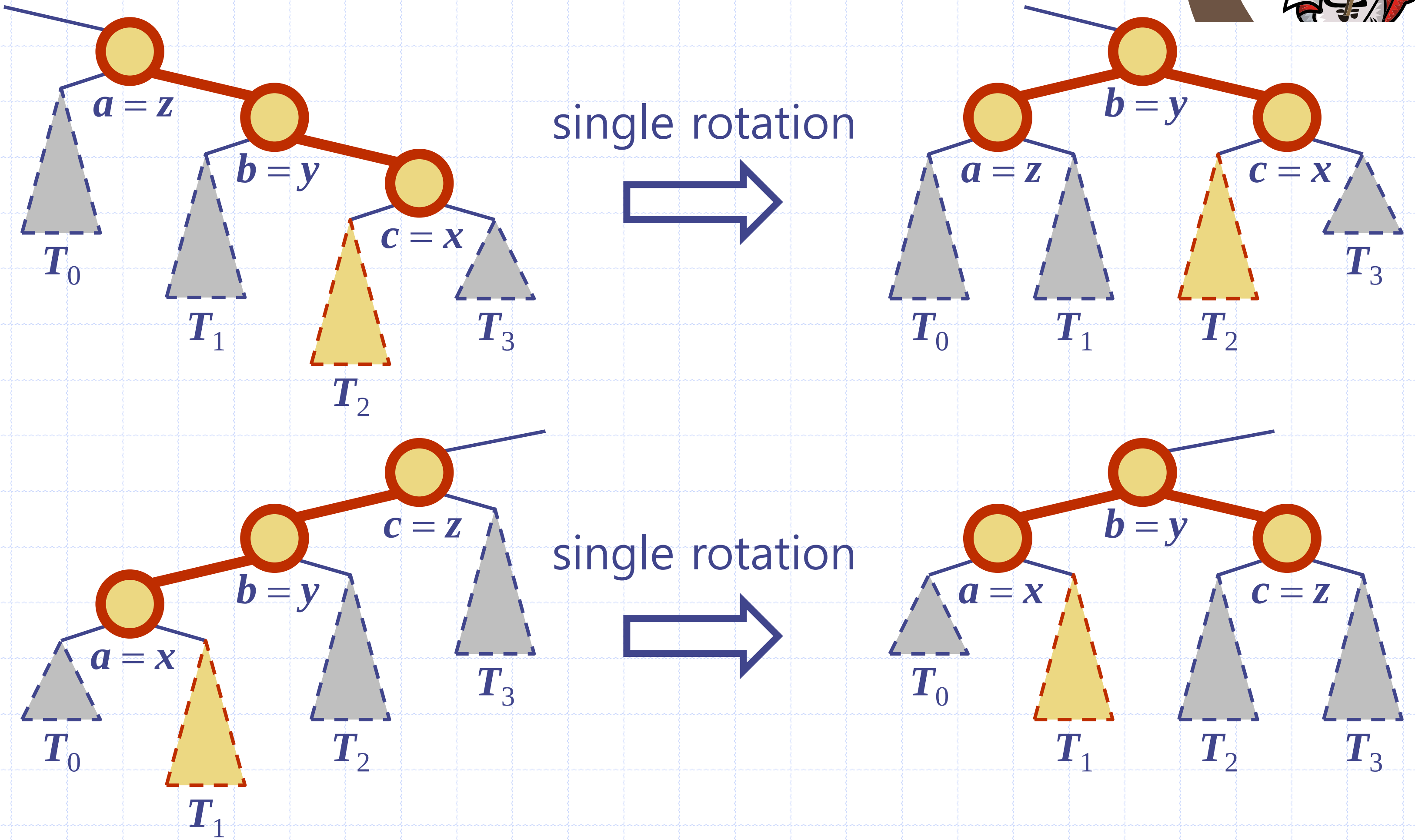
Alg ***searchAndFixAfterInsertion*(*w*)**
input internal node ***w***
output none

1. ***w***에서 ***T***의 루트로 향해 올라가다가 처음 만나는 불균형 노드를 ***z***이라 하자(그러한 ***z***이 없다면 **return**).
2. ***z***의 높은 자식을 ***y***라 하자.
   {수행 후, ***y***는 ***w***의 조상이 되는 것에 유의}
3. ***y***의 높은 자식을 ***x***라 하자.
   {수행 후, 노드 ***x***가 ***w***와 일치할 수도 있으며 ***x***가 ***z***의 손자임에 유의. ***y***의 높이는 그의 형제의 높이보다 2가 더 많다}
4. ***restructure***(***x***, ***y***, ***z***)
   {수행 후, 이제 ***b***를 루트로 하는 부트리의 모든 노드는 균형을 유지한다. 높이균형 속성은 노드 ***x***, ***y***, ***z***에서 *지역적*으로나 *전역적*으로나 모두 복구된다}
5. **return**

개조

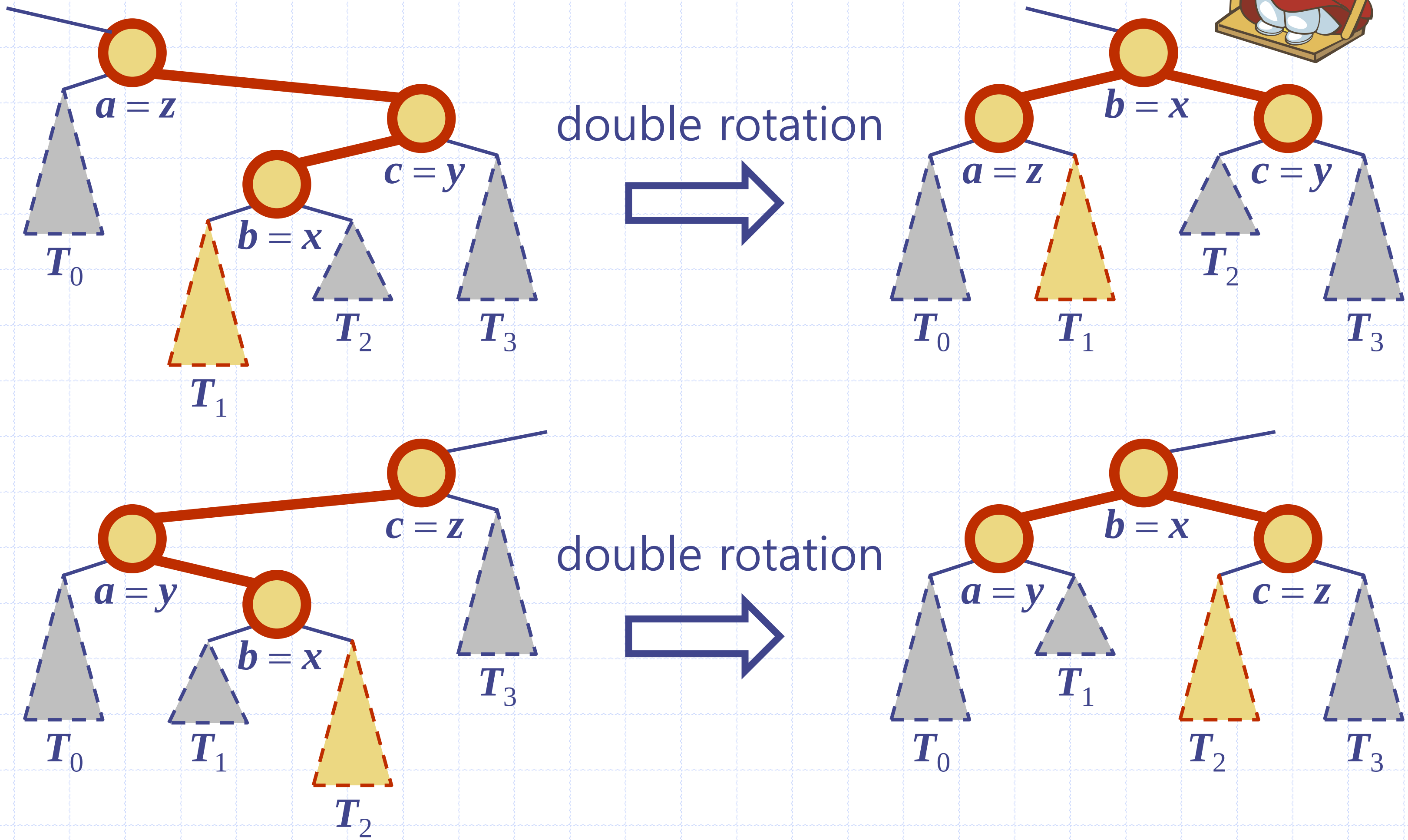
- 개조는 종종 "**회전**(rotation)"이라고도 불린다
- **3-노드 개조**(trinode restructure)
  - 3대의 직계 노드 x, y(x의 부모), z(y의 부모)의 **중위순회 순서** a, b, c를 회전축으로 하여 수행
- **단일회전**(single rotation)
  - 만약 $b = y$면, y를 중심으로 z을 회전
- **이중회전**(double rotation)
  - 만약 $b = x$면, x를 중심으로 y를 회전한 후, 다시 x를 중심으로 z을 회전
- 좌우대칭 포함하여 모두 4종류의 회전 유형 존재

단일회전에 의한 개조



a = z
b = y
c = x
T0
T1
T2
T3
single rotation
b = y
a = z
c = x
T0
T1
T2
T3
c = z
b = y
a = x
T0
T1
T2
T3
single rotation
b = y
a = x
c = z
T0
T1
T2
T3

이중회전에 의한 개조


a = z
c = y
b = x
T0
T1
T2
T3
double rotation
b = x
a = z
c = y
T0
T1
T2
T3
c = z
a = y
b = x
T0
T1
T2
T3
double rotation
b = x
a = y
c = z
T0
T1
T2
T3

개조를 위한 통합 알고리즘

- 4가지 유형의 회전 (대칭 모양에 대한 단일 및 이중회전)이 restructure 작업에 모두 반영되어 있다
- *T*의 모든 노드의 중위순회 순서는 **보존**
- *T*의 **O**(1)개 노드의 부모-자식 관계만 수정

개조

Alg ***restructure*(*x*, *y*, *z*)**

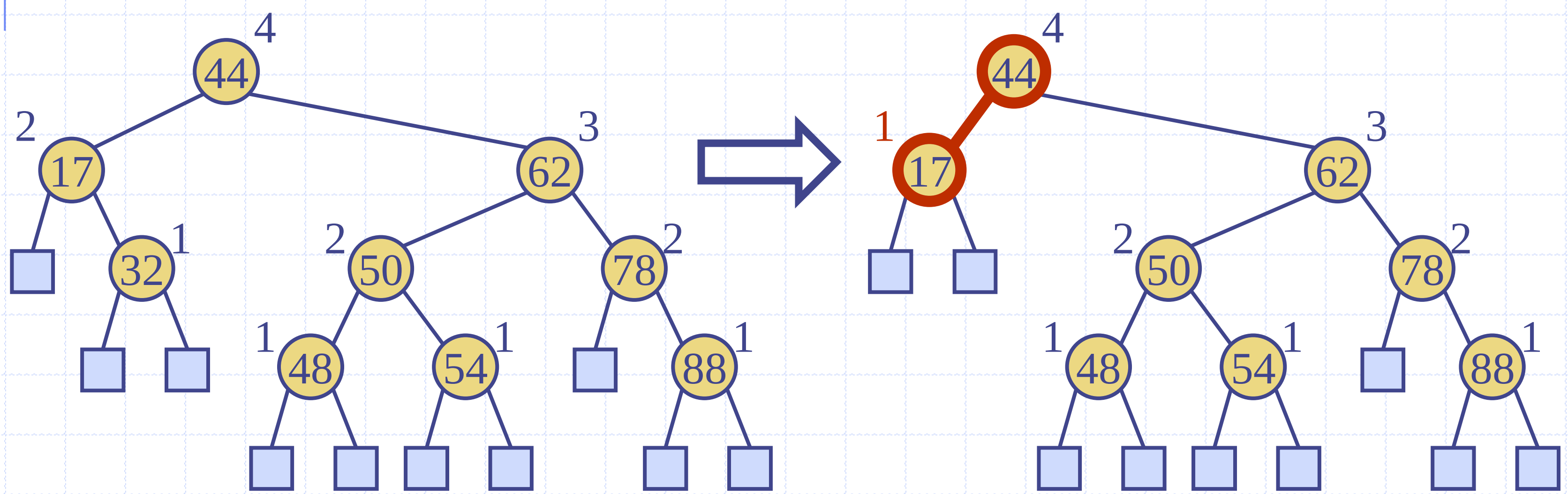
input a node x of a binary search tree T that has both a parent y and a grandparent z

output tree T after restructuring involving nodes x, y and z

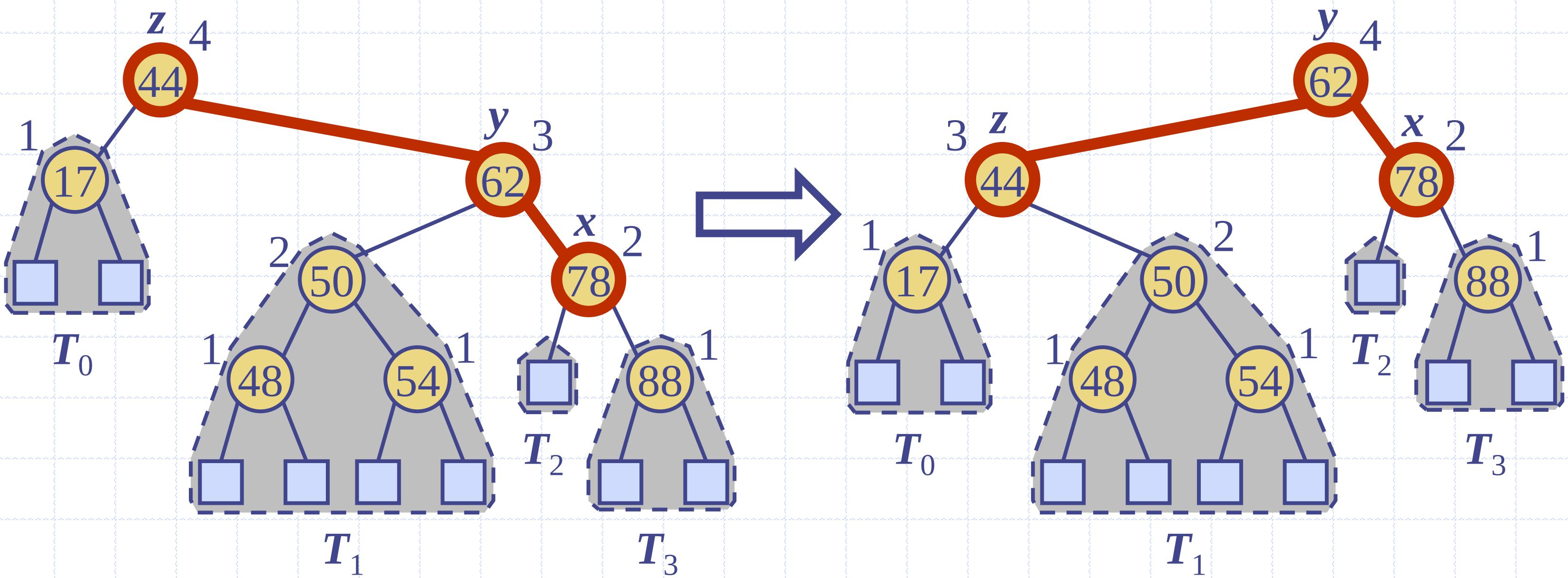
1. x, y, z의 중위순회 방문 순서의 나열을 (a, b, c)라 하자.
2. x, y, z의 부트리들 가운데 x, y, z를 루트로 하는 부트리를 제외한 4개의 부트리들의 중위순회 방문순서의 나열을 (T_0, T_1, T_2, T_3)라 하자.
3. z를 루트로 하는 부트리를 b를 루트로 하는 부트리로 대체.
4. T_0와 T_1을 각각 a의 왼쪽 및 오른쪽 부트리로 만든다.
5. T_2와 T_3를 각각 c의 왼쪽 및 오른쪽 부트리로 만든다.
6. a와 c를 각각 b의 왼쪽 및 오른쪽 자식으로 만든다.
7. **return** b

AVL 트리에서 삭제

- 삭제는 이진탐색트리에서와 동일하게 수행
- reduceExternal 작업에 의해 삭제된 노드의 부모노드 ***w***(그리고 조상노드들)가 불균형 상태일 수 있다
- **예**: removeElement(32)



삭제 후 개조



z
4
44
1
17
T0
y
3
62
2
50
1
48
1
54
T1
x
2
78
T2
1
88
T3
y
4
62
3
z
44
x
2
78
1
17
T0
2
50
1
48
1
54
T1
T2
1
88
T3

삭제

```
Alg removeElement(k)
    input AVL tree T, key k
    output element with key k

1. w ← treeSearch(root(), k)
2. if (isExternal(w))
        return NoSuchKey
3. e ← element(w)
4. z ← leftChild(w)
5. if (!isExternal(z))
        z ← rightChild(w)
6. if (isExternal(z))                          {case 1}
        zs ← reduceExternal(z)
   else                                        {case 2}
        y ← inOrderSucc(w)
        z ← leftChild(y)
        Set node w to (key(y), element(y))
        zs ← reduceExternal(z)
7. searchAndFixAfterRemoval(parent(zs))
8. return e
```

삭제 (conti.)

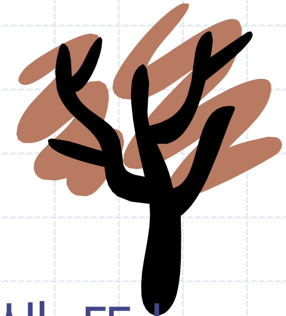
Alg ***searchAndFixAfterRemoval(w)***
input internal node ***w***
output none

1. ***w***에서 ***T***의 루트로 향해 올라가다가 처음 만나는 불균형 노드를 ***z***이라 하자(그러한 ***z***이 없다면 **return**).
2. ***z***의 높은 자식을 ***y***라 하자.
   {수행 후, ***y***는 ***w***의 조상이 아닌 ***z***의 자식이 되는 것에 유의}
3. 다음과 같이 하여 ***y***의 자식 중 하나를 ***x***라 하자. ***y***의 두 자식 중 어느 한쪽이 높으면 높은 자식을 ***x***라 하고, 두 자식의 높이가 같으면 둘 중 ***y***와 같은 쪽의 자식을 ***x***로 선택.
4. ***b*** ← ***restructure*(*x*, *y*, *z*)**
   {수행 후, 높이균형 속성은, 방금 전 ***z***를 루트로 했으나 이젠 변수 ***b***를 루트로 하는 부트리에서 *지역적*으로 복구된다. 하지만, 방금의 개조에 의해 ***b***를 루트로 하는 부트리의 높이가 1 줄어들 수 있으며 이때문에 ***b***의 조상이 균형을 잃을 수 있다. 즉, 삭제 후 1회의 개조만으로는 높이균형 속성을 *전역적*으로 복구하지 못할 수도 있다}
5. ***T***를 ***b***의 부모부터 루트까지 올라가면서 균형을 잃은 노드를 찾아 수리하는 것을 계속.

AVL 트리의 성능

- AVL 트리를 사용하여 구현된 n개의 항목으로 이루어진 **사전**을 전제하면
  - 공간사용량: $\mathbf{O}(n)$
  - 높이: $\mathbf{O}(\log n)$
  - **3-노드 개조**, 즉 한 번의 restructure: $\mathbf{O}(1)$
    - 연결 이진트리 사용을 전제
  - findElement: $\mathbf{O}(\log n)$
    - 개조 불필요
  - insertItem, removeElement: $\mathbf{O}(\log n)$
    - 초기의 treeSearch: $\mathbf{O}(\log n)$
    - 트리를 올라가면서 개조를 수행하여 높이균형을 회복: $\mathbf{O}(\log n)$

스플레이 트리

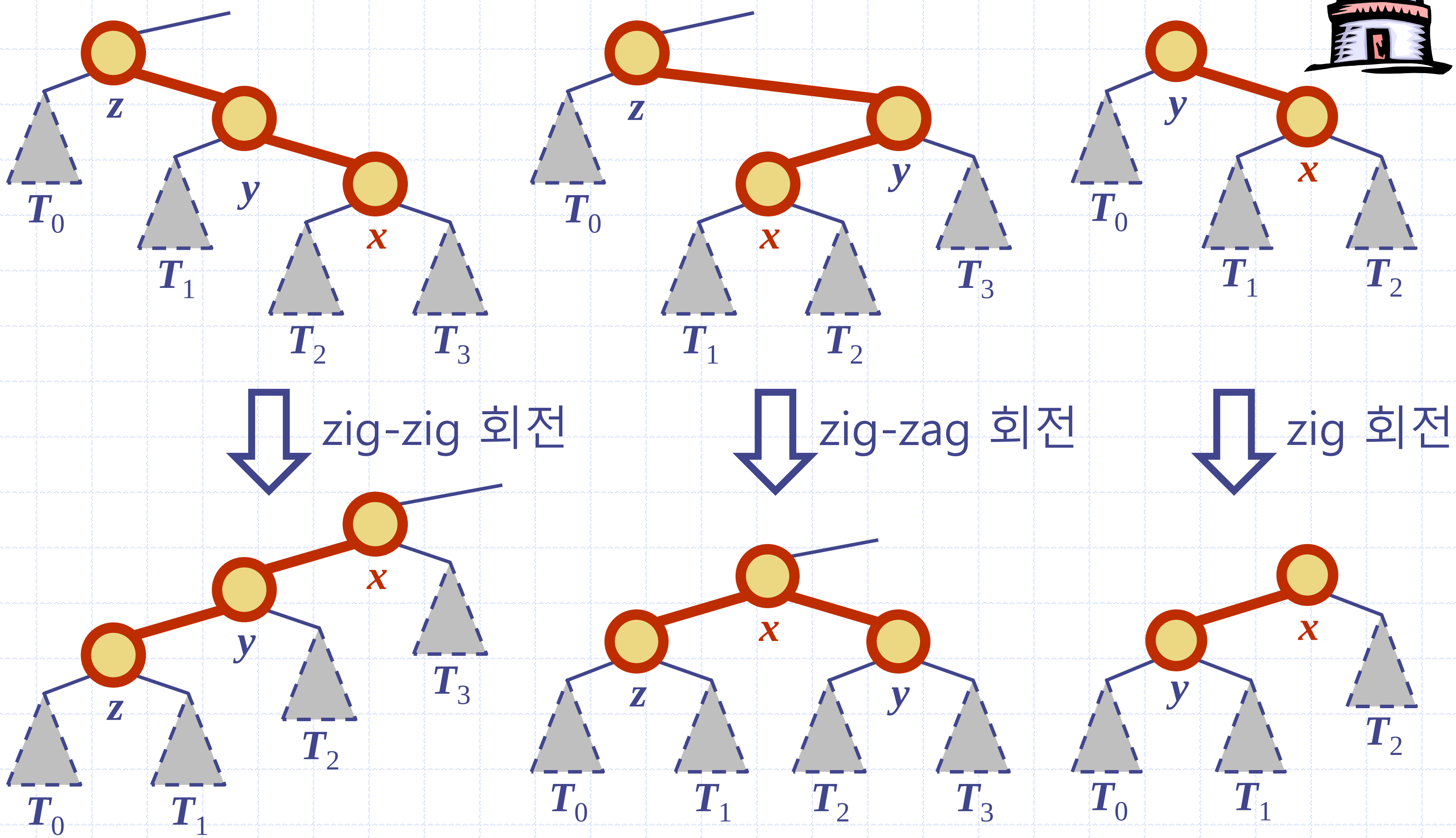


- **스플레이 트리**(splay tree): 트리의 노드가 (탐색 또는 갱신을 위해) 접근된 후 스플레이되는 이진탐색트리
  - "**노드 x를 스플레이**" = "연속적인 재구성을 통해 노드 x를 루트로 이동시킴"
  - 가장 깊은 내부노드를 스플레이
- 일종의 **자기조정**(self-adjusting) 이진탐색트리
- 이점
  - 비교적 단순: 높이균형을 유지하지 않으므로
  - 탐색, 삽입, 삭제: **O**($\log$ n) **상각실행시간**
  - 자기조정성: 각 항목에 대한 접근빈도가 균등하지 않은 사전에 사용하면 유리

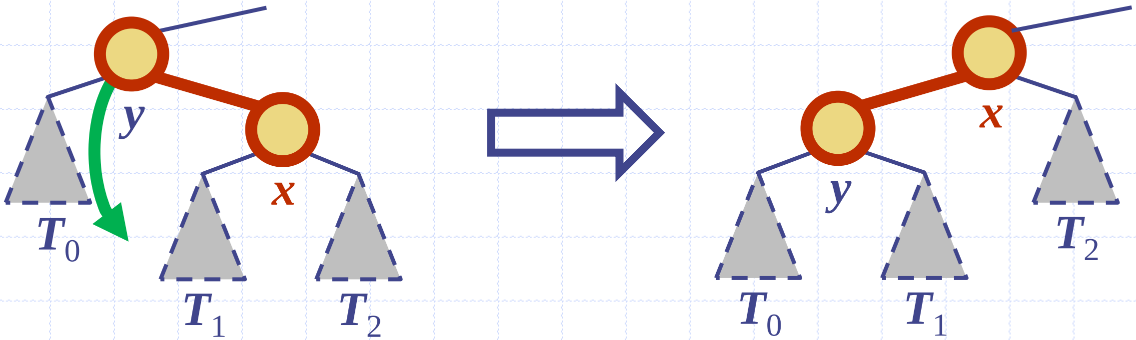
언제 무엇을 스플레이?

언제	어떤 노드를
탐색 시에	▪ 키가 어떤 내부노드에서 발견되면, 그 노드를 스플레이 ▪ 그렇지 않으면 탐색이 실패한 외부노드의 부모노드를 스플레이
삽입 시에	▪ 새로 삽입한 내부노드를 스플레이
삭제 시에	▪ 실제로 삭제된 내부노드의 부모노드를 스플레이

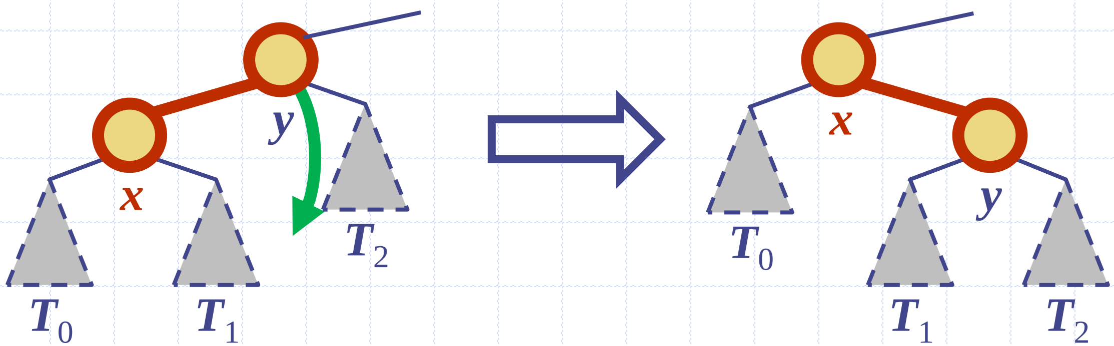
스플레이의 세 가지 경우



두 가지 기본 회전



(a) leftRotate(x, y)



(a) rightRotate(x, y)

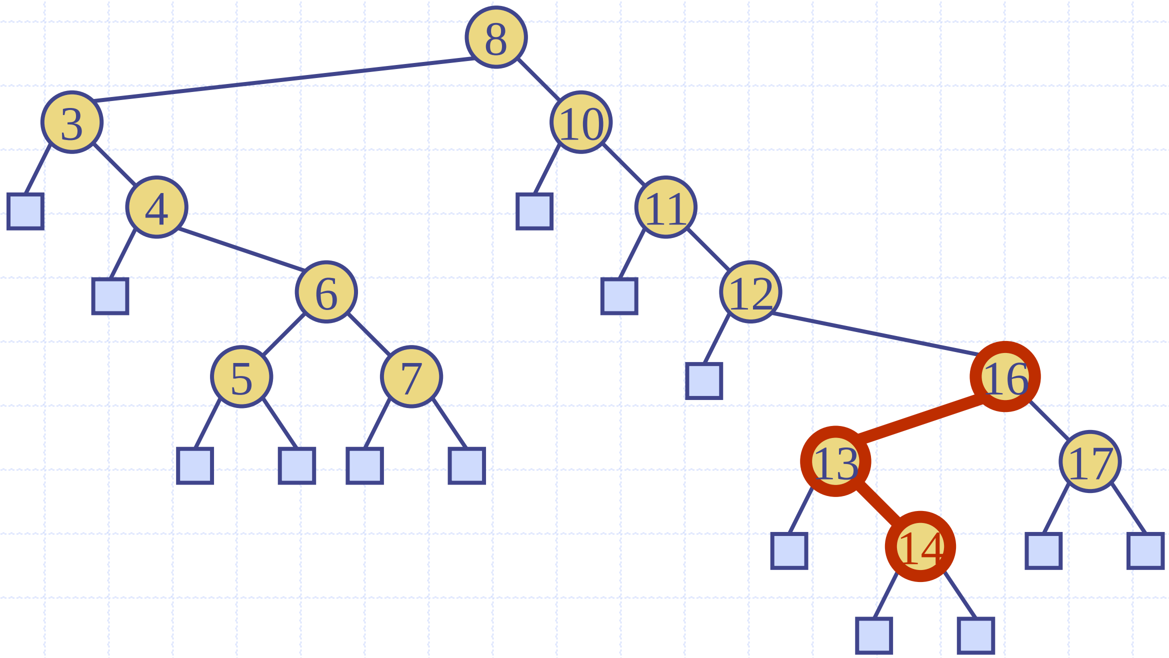
스플레이

```
Alg splay(x)
    input internal node x
    output none

1. if (isRoot(x))
       return
2. if (isRoot(parent(x)))          {zig}
       if (x = leftChild(root()))
           rightRotate(x, root())
       else
           leftRotate(x, root())
       return
3. p ← parent(x)
4. g ← parent(p)
5. if (x = leftChild(leftChild(g))) {zig-zig}
       rightRotate(p, g)
       rightRotate(x, p)
   elseif (x = rightChild(rightChild(g)))
                                    {zig-zig}
       leftRotate(p, g)
       leftRotate(x, p)
   elseif (x = leftChild(rightChild(g)))
                                    {zig-zag}
       rightRotate(x, p)
       leftRotate(x, g)
   else {x = rightChild(leftChild(g))}
                                    {zig-zag}
       leftRotate(x, p)
       rightRotate(x, g)
6. splay(x)
```

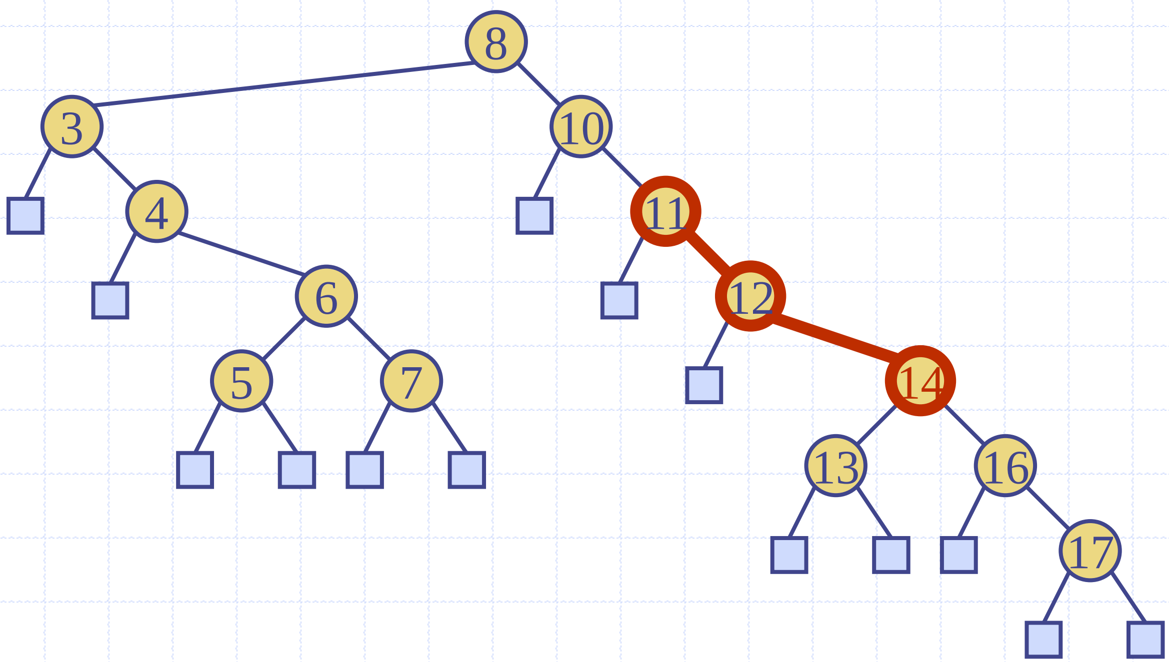
스플레이 예

- 주어진 스플레이 트리는 아래 셋 가운데 한 작업이 처리된 직후의 모습으로 전제
  - 키 14에 대한 성공적인 탐색, 또는 키 15에 대한 실패한 탐색
  - 키 14를 삽입
  - 키 14를 저장한 노드의 자식노드를 삭제
- 키 14를 저장한 노드에 대한 스플레이는 zig-zag으로 출발



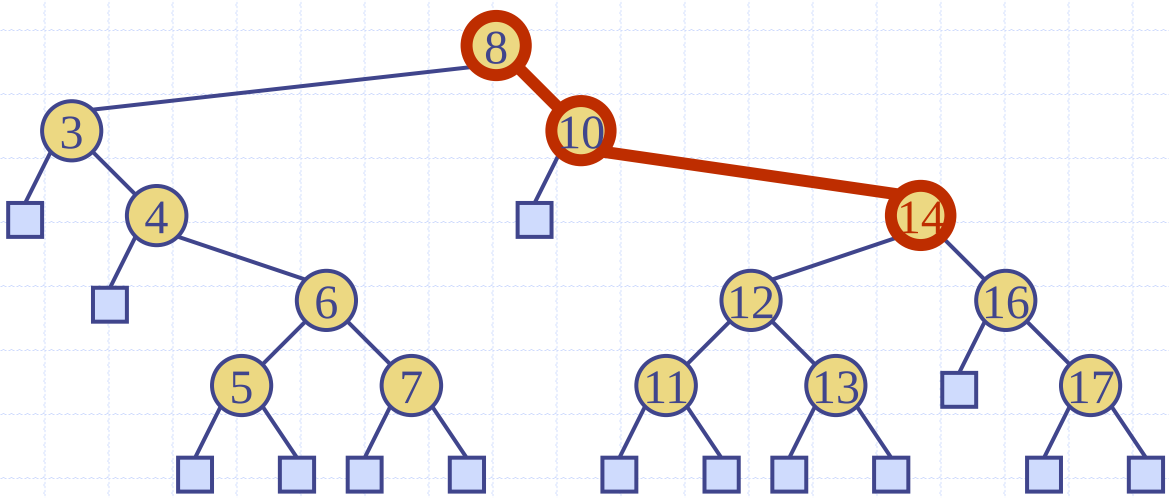
스플레이 예 (conti.)

- zig-zag 회전 다음은 zig-zig



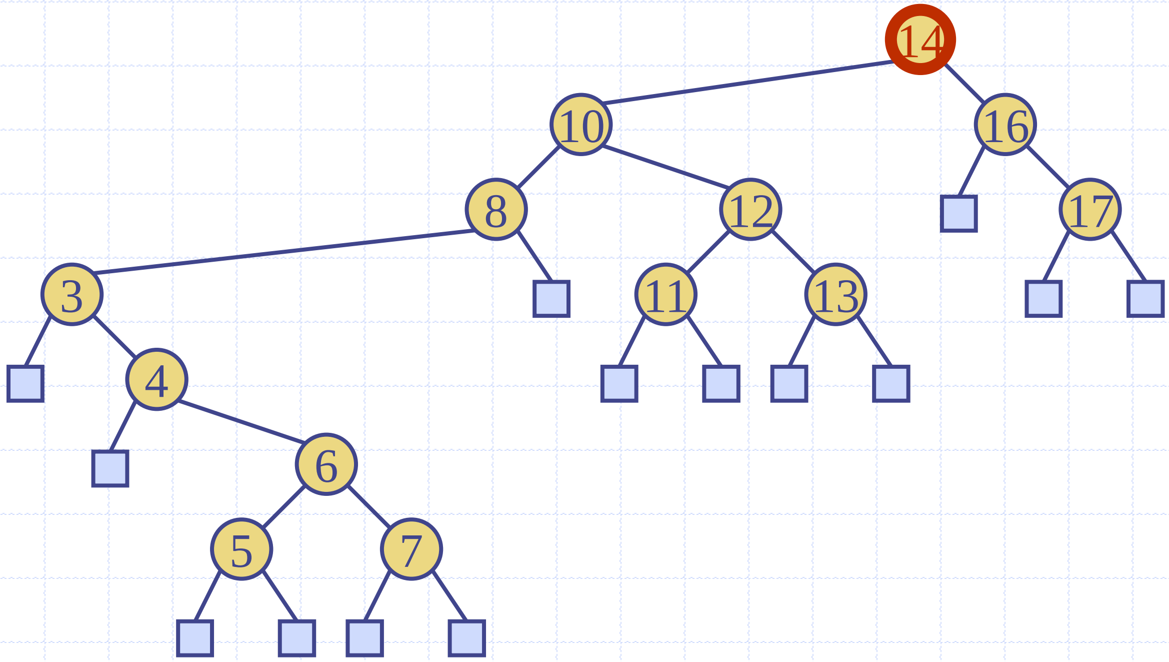
스플레이 예 (conti.)

- zig-zig 회전 다음은 또다시 zig-zig



스플레이 예 (conti.)

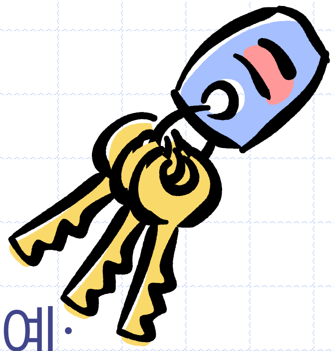
- zig-zig 회전으로 스플레이 완료



스플레이 트리의 성능

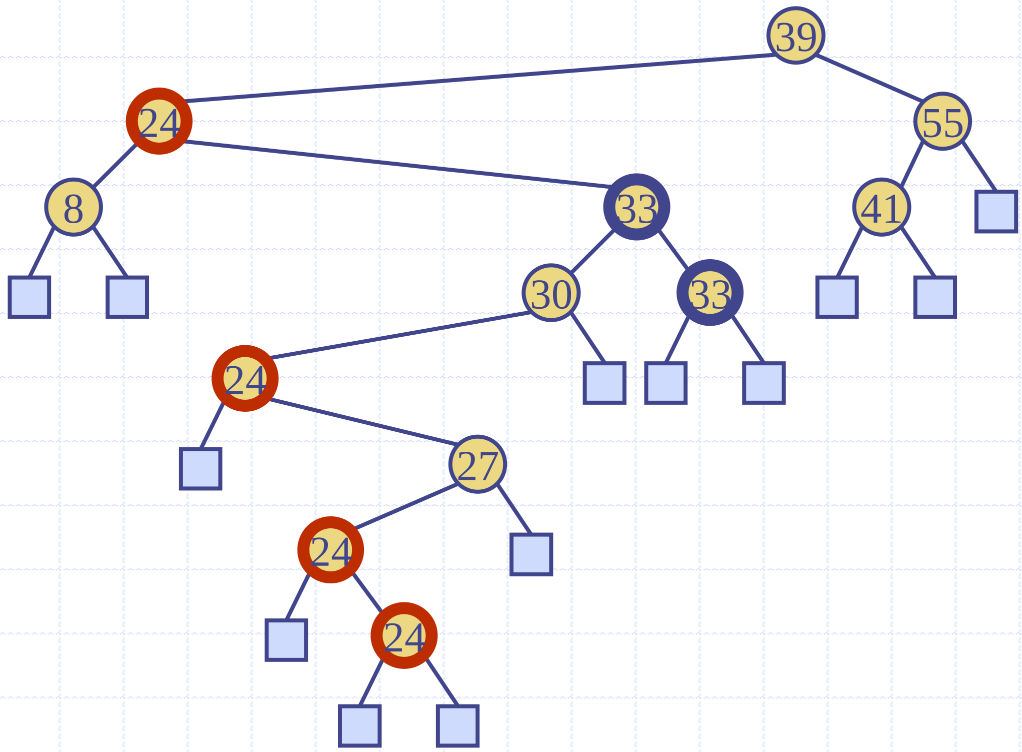
- 스플레이 실행시간: **O(*h*)**
  - 여기서 ***h***는 트리의 높이며, 최악의 경우 **O(*n*)**
- 스플레이 트리 유용성
  - AVL 트리보다 구현이 간단
    - AVL 트리보다 경우의 수가 작다
    - AVL 트리와는 달리 각 노드에 높이나 균형 정보 유지 불필요
  - 탐색, 삽입, 삭제: **O**(log ***n***) **상각실행시간**

응용문제: 중복 키를 가진 이진탐색트리 메쏘드



- **중복** 키가 존재 가능한 **이진탐색트리**다 – 즉,
  - *u*, *v*, *w* 세 개의 노드에 대해, *u*와 *w*가 각각 *v*의 왼쪽 및 오른쪽 부트리 내의 노드일 때 다음이 성립 $key(u) < key(v) \le key(w)$

- 이진탐색트리 예:



응용문제: 중복 키를 가진 이진탐색트리 메쏘드 (conti.)

A. 이진탐색트리 T를 사용하여 구현된 순서 사전에서 주어진 키 k를 갖는 모든 원소들을 반환하는 findAllElements(k) 작업을 수행할 알고리즘을 작성하라
B. 이진탐색트리 T를 사용하여 구현된 순서 사전에서 insertItem(k, e) 작업을 수행할 알고리즘을 작성하라
C. 이진탐색트리 T를 사용하여 구현된 순서 사전에서 주어진 키 k를 갖는 모든 항목을 삭제하고 해당 원소들을 반환하는 removeAllElements(k) 작업을 수행할 알고리즘을 작성하라

- **주의**
  - 모든 알고리즘은 $O(h + s)$ 시간에 수행하여야 한다 – 여기서 h는 T의 높이며 s는 반환되는 원소의 수
  - 원소들이 반환되는 순서는 중요하지 않다
  - treeSearch 사용 가능

해결

Alg ***findAllElements***(***k***)
  input binary search tree ***T***, key ***k***
  output elements with key ***k***

1. *L* ← *empty list*
2. ***w*** ← ***treeSearch***(***root***(), ***k***)
3. **while** (***isInternal***(***w***))
    L.***addLast***(***element***(***w***))
    w ← ***treeSearch***(***rightChild***(***w***), ***k***)
4. **return** ***L***.***elements***()

{Total **O**(***h*** + ***s***)}

Alg ***insertItem***(***k***, ***e***)
  input binary search tree ***T***, key ***k***,
    element ***e***
  output none

1. ***w*** ← ***treeSearch***(***root***(), ***k***)
2. **while** (***isInternal***(***w***))
    w ←
  treeSearch(***rightChild***(***w***), ***k***)
3. *Set node* ***w*** *to* (***k***, ***e***)
4. ***expandExternal***(***w***)
5. **return**

{Total **O**(***h*** + ***s***)}

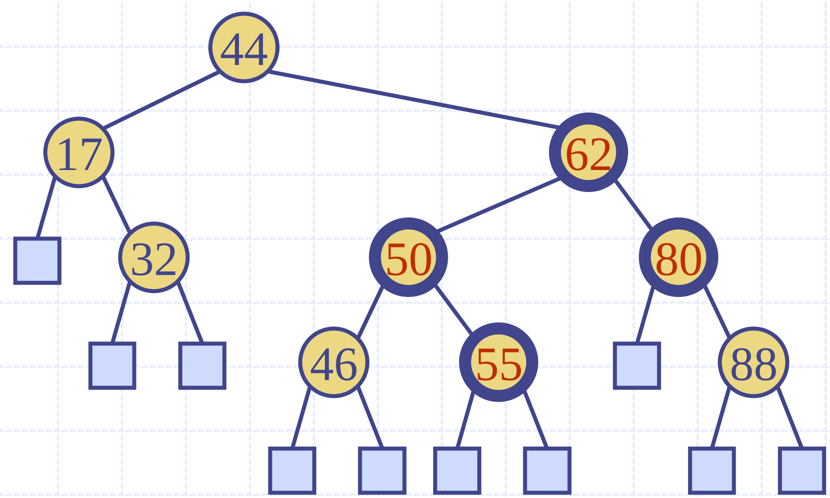
해결 (conti.)

```
Alg removeAllElements(k)
    input binary search tree T, key
        k
    output elements with key k

1. L ← empty list
2. w ← treeSearch(root(), k)
3. while (isInternal(w))
        L.addLast(element(w))
        z ← leftChild(w)
        if (!isExternal(z))
            z ← rightChild(w)
        if (isExternal(z))                      {case 1}
            w ← reduceExternal(z)
        else                                    {case 2}
            y ← inOrderSucc(w)
            x ← leftChild(y)
            Set node w to (key(y), element(y)))
            reduceExternal(x)
        w ← treeSearch(w, k)
4. return L.elements()
                                        {Total O(h + s)}
```

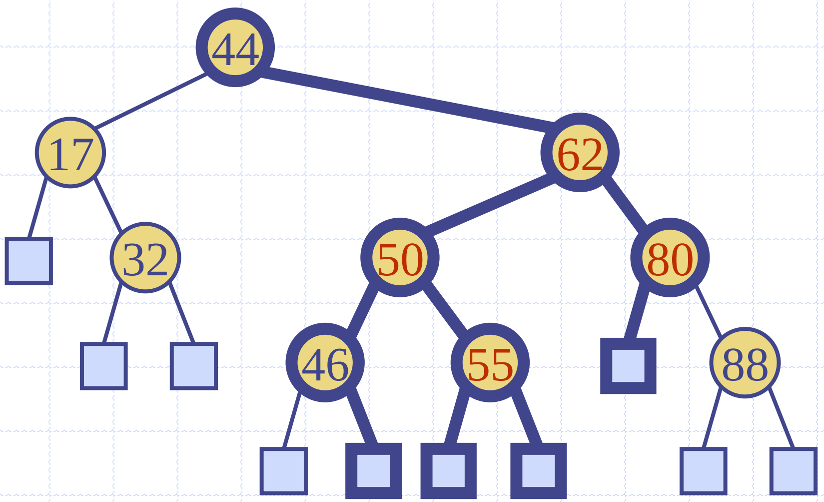
응용문제: 주어진 키 범위 내의 원소들

- **AVL 트리** T를 사용하여 구현된 **유일** 키로 이루어진 n항목의 순서사전이 있다
- T에서 $O(\log n + s)$ 시간에 수행하는 다음 메쏘드를 구현하라 – 여기서 s는 반환되는 원소의 수
  - findAllInRange(k_1, k_2): $k_1 \leq k \leq k_2$인 키 k를 가진 T의 모든 원소를 반환
- 원소들이 반환되는 순서는 중요하지 않다
- **예:** 오른쪽에 보인 AVL 트리 예에서, findAllInRange(48, 80)는 62, 50, 55, 80 키를 가진 원소들을 반환



해결

- AVL 트리 T의 각 내부노드 v에서 $k_1 \le key(v) \le k_2$면 노드 v의 원소 $element(v)$를 수집한 후, $key(v)$의 크기에 따라 다음 세 가지 경우로 나누어 좌우 부트리에 대한 탐색을 계속
  - $key(v) \le k_1$: 노드 v의 오른쪽 부트리에 대해 탐색을 계속
  - $k_2 \le key(v)$: 노드 v의 왼쪽 부트리에 대해 탐색을 계속
  - $k_1 < key(v) < k_2$: 노드 v의 좌우 부트리 모두에 대해 각각 탐색을 계속
- v가 외부노드인 경우 반환
- 원소들은 비어 있는 리스트 L을 초기화하여 수집
- 루트로부터 외부노드로 향하는 경로를 순회하며 s개의 노드를 방문하므로 $O(\log n + s)$ 시간에 수행
- **예:** 주어진 AVL 트리 예에서, findAllInRange(48, 80)이 방문하는 간선과 노드들을 굵은 선으로 표시



해결

Alg ***findAllInRange***(k_1, k_2) {distinct keys}

input AVL tree T, key k_1, k_2
output all elements with key k s.t. $k_1 \le k \le k_2$

1. $L \leftarrow$ *empty list*
2. ***rFAIR***(***root***(), k_1, k_2)
3. **return** *L.elements*()

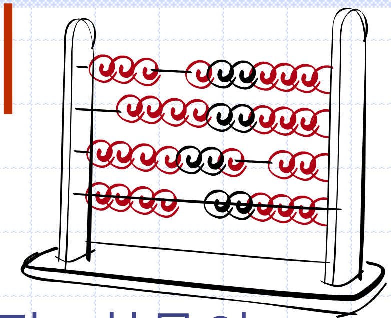
{Total $O(\log n + s)$}

Alg ***rFAIR***(v, k_1, k_2)

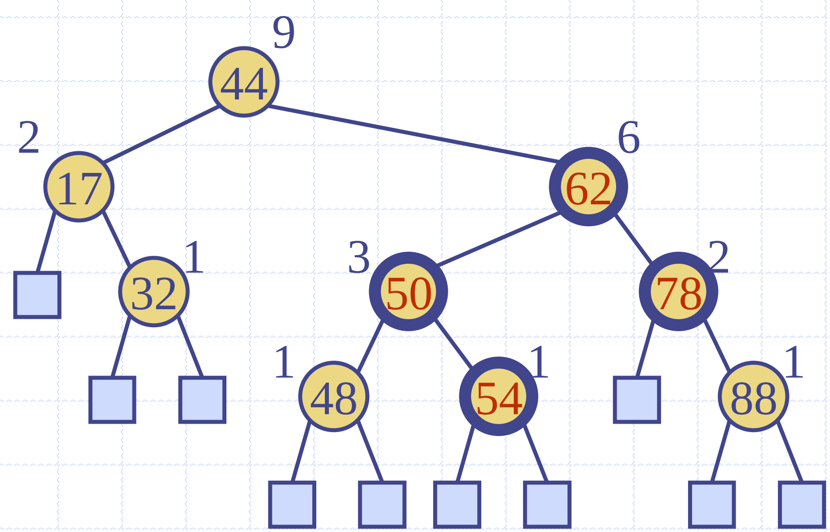
input list L, node v of an AVL tree T, key k_1, k_2
output list L of elements with key k s.t. $k_1 \le k \le k_2$

1. **if** (***isExternal***(v))
   return
2. **if** ($k_1 \le$ ***key***$(v) \le k_2$)
   L.addLast(*element*(v))
3. **if** (***key***$(v) \le k_1$)
   rFAIR(***rightChild***(v), k_1, k_2)
   elseif ($k_2 \le$ ***key***(v))
   rFAIR(***leftChild***(v), k_1, k_2)
   else {$k_1 <$ ***key***$(v) < k_2$}
   rFAIR(***leftChild***(v), k_1, k_2)
   rFAIR(***rightChild***(v), k_1, k_2)

응용문제: 주어진 키 범위 내의 원소 수

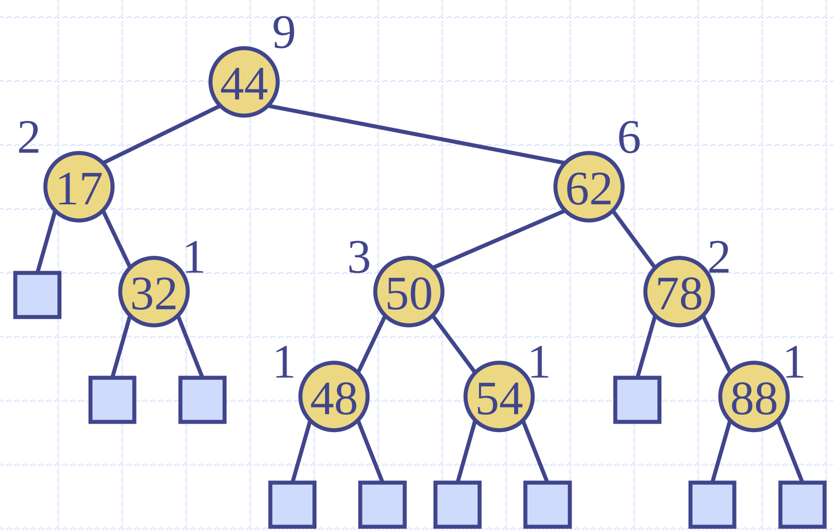


- **AVL 트리** T를 사용하여 구현된, **유일** 키로 이루어진 n항목의 순서사전이 있다
- T에서 $\mathbf{O}(\log n)$ 시간에 수행하는 다음 메쏘드를 구현하라
  - countAllInRange(k_1, k_2): AVL 트리 T의 $k_1 \le k \le k_2$인 키 k들의 수를 계산하여 반환
- **힌트:** AVL 트리의 데이터구조를 확장하여 각 내부노드에 새 라벨을 정의하고 트리가 갱신되면 이 라벨의 값도 갱신
- **예:** 오른쪽에 보인 AVL 트리 예에서, countAllInRange(50, 80)는 4를 반환



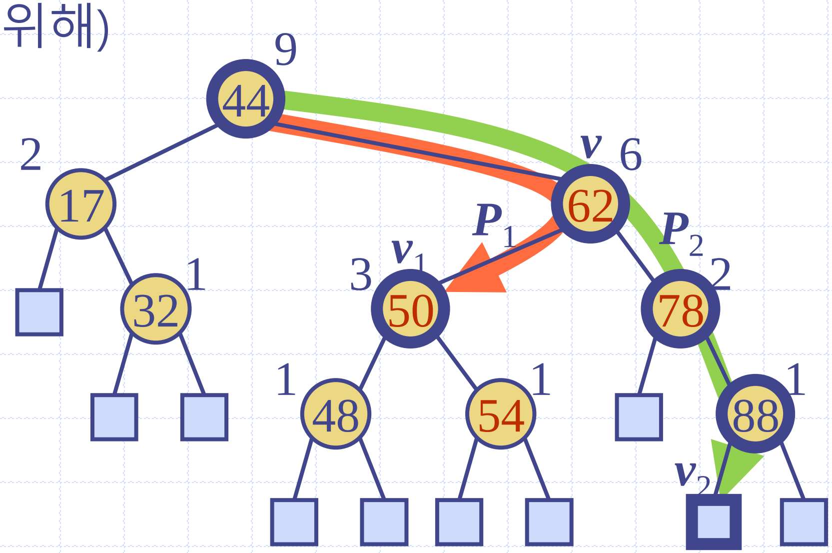
해결

- AVL 트리의 각 노드에 그 노드를 루트로 하는 부트리의 크기, 즉 부트리 내의 **내부노드** 수를 저장
- 트리 **갱신** 시에는 삽입이나 삭제가 수행된 경로의 노드들의 부트리의 크기를 증가시키거나 감소시킨다
- 특히, **3-노드 개조**를 수행할 때 세 노드(즉, 개조 알고리즘의 ***a***, ***b***, ***c*** 노드)를 루트로 하는 부트리의 크기를 올바르게 갱신
- 이런 방식으로 AVL 트리 ***T***의 데이터구조가 확장되어 ***T***의 각 노드 ***v***에 대해 ***v***를 루트로 하는 부트리의 크기를 반환하는 size(v) 메쏘드가 있다고 전제
- **예:** 이 방식으로 구현된 AVL 트리 – 각 노드 ***v***의 정수 라벨은 size(v) 값



해결 (conti.)

- (k_1, k_2) 키 쌍 범위 내 노드들의 수를 계산하기 위해 k_1과 k_2 모두를 탐색하여 각각의 탐색경로를 P_1과 P_2라 하고 각각의 탐색이 반환한 노드를 v_1과 v_2라 한다
- 두 경로에 공통된 마지막 노드를 v라 한다
- P_1 경로를 v로부터 v_1까지 순회
- 순회 도중 만나는 각 내부노드 $w \neq v$에 대해, w의 **오른쪽** 자식이 P_1에 존재하지 않는다면, 현재까지의 합에 그 오른쪽 자식의 부트리의 크기와 1을 더한다(w를 포함하기 위해)
- 마찬가지로, P_2 경로를 v로부터 v_2까지 순회
- 순회 도중 만나는 각 내부노드 $w \neq v$에 대해, w의 **왼쪽** 자식이 P_2에 존재하지 않는다면, 현재까지의 합에 그 왼쪽 자식의 부트리의 크기와 1을 더한다
- 마지막으로 v가 내부노드면 현재까지의 합에 1을 더한다



해결 (conti.)

- 알고리즘 treeSearch는 방문한 경로의 노드들을 반환하도록 수정한 버전을 사용
- 분석
  - 두 키에 대한 탐색은 각각 **O**(log ***n***) 시간 소요
  - 두 개의 탐색경로에 공통된 마지막 노드 ***v***를 찾는데 **O**(log ***n***) 시간 소요
  - 두 개의 탐색경로 각각에서 ***v***로부터의 부경로를 추출하는데 **O**(log ***n***) 시간 소요
  - 두 개의 탐색경로를 순회하는데 각각 **O**(log ***n***) 시간 소요
  - 그러므로 전체적으로 **O**(log ***n***) 시간에 수행

해결 (conti.)

Alg *countAllInRange*(k_1, k_2)
  input AVL tree T, key k_1, k_2
  output the number of items with key k, s.t. $k_1 \le k \le k_2$

1. P_1, P_2 ← *empty list*
2. v_1 ← ***treeSearch***(P_1, ***root***(), k_1) {**O**(log n))}
3. v_2 ← ***treeSearch***(P_2, ***root***(), k_2) {**O**(log n))}
4. v ← *last node common to* P_1 *and* P_2 {**O**(log n))}
5. S_1 ← *subpath of* P_1 *starting at* v
6. S_2 ← *subpath of* P_2 *starting at* v
7. c ← 0
8. **for each** $w \ne v \in S_1$.***elements***() {**O**(log n))}
    if (***isInternal***(w))
      u ← ***rightChild***(w)
      if ($u \notin S_1$)
        if (***isInternal***(u))
          c ← c + ***size***(u)
        c ← c + 1 {count w}
9. **for each** $w \ne v \in S_2$.***elements***() {**O**(log n))}
    if (***isInternal***(w))
      u ← ***leftChild***(w)
      if ($u \notin S_2$)
        if (***isInternal***(u))
          c ← c + ***size***(u)
        c ← c + 1 {count w}
10. **if** (***isInternal***(v))
    c ← c + 1 {count v}
11. **return** c

{Total **O**(log n)}

해결 (conti.)

Alg *treeSearch(L, v, k)*   {another version}

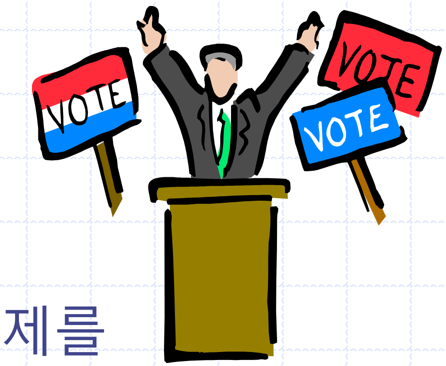
input list ***L***, node ***v*** of a binary search tree, key ***k***

output node ***w***, s.t. either ***w*** is an internal node storing key ***k*** or ***w*** is the external node where key ***k*** would belong if it existed, list ***L*** of nodes visited

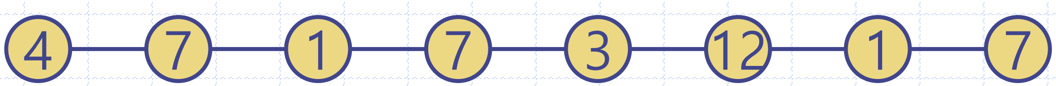
1. ***L.addLast***(***v***)
2. **if** (***isExternal***(***v***))
   return *v*
3. **if** (***k*** = ***key***(***v***))
   return *v*
   elseif (***k*** < ***key***(***v***))
   return *treeSearch*(***L***, ***leftChild***(***v***), ***k***)
   else {***k*** > ***key***(***v***)}
   return *treeSearch*(***L***, ***rightChild***(***v***), ***k***)

{Total **O**(log ***n***)}

응용문제: 투표



- **정렬 일반** 장의 **응용문제**에서 다루었던 투표 문제를 다시 생각해 보자
- n-원소 리스트 L이 주어졌다고 가정하자 – 여기서 L의 각 원소는 선거에서의 **투표**를 표현
- 각 투표는 선택된 후보자의 ID를 나타내는 **정수**로 주어진다
  - 기호들은 정수지만 빠진 번호가 있을 수도 있다
- 이번엔 출마한 후보자의 수 $k < n$ 를 **안다**고 가정
- 당선자를 찾아내는 $\mathbf{O}(n \log k)$-시간 메쏘드를 작성하라
- **전제:** 가장 많은 표를 획득한 후보자가 당선된다
- **예:** 아래 투표 리스트에서 기호 7이 당선자다



해결 (Ver. 1)

- 메쏘드 1 (**분할**을 이용)
  1. inPlacePartition의 중복 키가 존재하는 경우의 버전을 사용하여 리스트 L을 분할
  2. LT와 GT 부리스트에 대하여 분할을 반복
  3. 분할이 완료된 후 리스트를 스캔하면서 최대 득표자를 찾는다
- 실행시간
  - 1단계: $\mathbf{O}(n)$
  - 2단계: $\mathbf{O}(\log k)$회의 반복 소요
  - 3단계: $\mathbf{O}(n)$
  - 그러므로 총 $\mathbf{O}(n \log k)$ 시간

해결 (Ver. 2, 추천)

- 메쏘드 2 (**균형탐색트리**를 이용)
  1. 후보자의 ID를 AVL 트리와 같은 **균형탐색트리**에 저장 – 이 트리에서, 각 ID와 함께 해당 ID의 득표수를 저장
  2. 초기에는 득표수를 모두 0으로 설정
  3. 그 다음엔 투표 리스트를 순회하며, 각 투표의 ID에 해당하는 득표수를 증가시킨다
- 이 데이터구조는 k개의 원소를 저장하므로, 각 투표에 대한 탐색과 갱신은 $\mathbf{O}(\log k)$ 시간에 수행
- 그러므로 총 실행시간은 $\mathbf{O}(n \log k)$