

代数同构视角下的离散 Fourier 变换

多项式环、求值插值与相似对角化

sun123zxy

2024-05-13

- ① 1. 从 Fourier 变换到 DFT
- ② 2. DFT 与多项式环
 - 2.1 引例: $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
 - 2.2 整环上的推广
 - 2.3 唯一性的讨论
- ③ 3. DFT 与矩阵代数

1. 从 Fourier 变换到 DFT

2. DFT 与多项式环

- 2.1 引例: $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
- 2.2 整环上的推广
- 2.3 唯一性的讨论

3. DFT 与矩阵代数

Fourier 变换及其卷积性质

- Fourier 变换：将给定函数 f 映为函数 $\mathcal{F}[f]$:

$$\mathcal{F}[f](\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

- 定义函数 f 和 g 的卷积

$$(f * g)(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda - x) g(x) dx$$

则 Fourier 变换将两个函数的卷积化为逐点乘积，即

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]$$

复数域上的 DFT 及其卷积性质

- 离散 Fourier 变换 (Discrete Fourier Transform, DFT): 线性空间 $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ 上的线性变换 F , 将向量 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$ 映为 $F\mathbf{a}$, 其第 i 个分量如下所示

$$(F\mathbf{a})_i := \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{ik} a_k$$

这里分量下标从 0 开始计数, $\omega_n := e^{2\pi i/n}$ 是 \mathbb{C} 上的一个 n 次本原单位根.

- 相仿的卷积性: 两个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ 的循环卷积定义为

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})_k := \sum_{i+j=k \pmod{n}} a_i b_j$$

则 DFT 将两个向量的循环卷积化为逐项乘积 \times , 即

$$F(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = (F\mathbf{a}) \times (F\mathbf{b})$$

矩阵表示

在 \mathbb{C}^n 的自然基下, 变换 F 有矩阵表示

$$F = \left(\omega_n^{ij} \right)_{(i,j) \in n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

- 卷积性: 系数为全体复平面 n 次单位根的可逆 Vandermonde 矩阵
- 正交性: 适当单位化后为酉矩阵

问题¹

- DFT 化卷为乘的本质？
 - 我们给出一大类具备卷积性的线性映射的构造，DFT 将作为特例推出。
- 如何从代数角度理解 DFT？
 - 两个视角：多项式环、矩阵代数
 - 两种表现：求值插值、相似对角化
 - 一致观点：保加法、保数乘、保乘法的代数同构
- DFT 是否是唯一一类化卷为乘的变换？作为底层结构的 \mathbb{C} 是否可以放宽？
 - 工程上复数乘法运算较慢且具有浮点误差，更换底层代数结构具有实际意义。例如，被称为数论变换（number theoretic transforms, NTT）的 DFT 变种就将 \mathbb{C} 替换为有限域 \mathbb{F}_p 而同时保留了其卷积性质。
 - 我们将其 DFT 扩展至任意整环并证明特定含义下的唯一性。

¹Agarwal and Burrus [1]; Nicholson [2]; Fürer [3]; Amiot [4]; Baraquin and Ratier [5]

1. 从 Fourier 变换到 DFT

2. DFT 与多项式环

- 2.1 引例: $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
- 2.2 整环上的推广
- 2.3 唯一性的讨论

3. DFT 与矩阵代数

- ① 1. 从 Fourier 变换到 DFT
- ② 2. DFT 与多项式环
 - 2.1 引例: $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
 - 2.2 整环上的推广
 - 2.3 唯一性的讨论
- ③ 3. DFT 与矩阵代数

$\mathbb{C}[x]$ 与循环卷积

设不超过 $n-1$ 次的多项式 $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$.
二者的多项式乘积由 **Cauchy 乘积** 给出

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j = \sum_{k=0}^{2n-2} x^k \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

令 $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T$, $\mathbf{b} := (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})^T$, 回顾循环卷积定义

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})_k := \sum_{i+j=k \pmod{n}} a_i b_j$$

可见 Cauchy 乘积与循环卷积尚有区别. 稍加改动, 若在模 $x^n - 1$ 的意义下——即商环 $\mathbb{C}[x]/(x^n - 1)$ 中计算, 则二者相合:

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \sum_{i+j=k \pmod{n}} a_i b_j \pmod{x^n - 1}$$

$\mathbb{C}[x]$ 与复数域 DFT

DFT 亦有在 $\mathbb{C}[x]$ 上的表示. 给定 $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$, 其对应多项式 $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ 次数不超过 $n-1$ 次, 则

$$(F\mathbf{a})_i = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{ik} \mathbf{a}_k = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}_k (\omega_n^i)^k = f(\omega_n^i)$$

恰为 $f(x)$ 分别在 n 个 \mathbb{C} 上 n 次单位根处多点求值的结果.

- 可逆性: n 点唯一确定一个不超过 $n-1$ 次的多项式 (Lagrange 插值)
- 线性性: $(af + bg)(\omega_n^i) = af(\omega_n^i) + bg(\omega_n^i)$
- 卷积性: 将取模乘法化为点值逐项相乘, 再次与 \mathbb{C}^n 上的表现相合

$$F(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = (F\mathbf{a}) \times (F\mathbf{b})$$

$$(fg)(\omega_n^i) = f(\omega_n^i)g(\omega_n^i)$$

- \mathbb{C}^n 与 $\mathbb{C}[x]$ 视角下的 DFT:
 - \mathbb{C}^n : 作为以单位根为参数的 Vandermonde 矩阵, DFT 是 \mathbb{C}^n 上的可逆线性变换, 将向量间的循环卷积 $*$ 化为逐项乘积 \times .
 - $\mathbb{C}[x]$: 作为单位根处的多点求值插值, DFT 在全体不超过 $n-1$ 次的多项式和 \mathbb{C}^n 间建立起线性同构关系, 将多项式乘积化为函数值逐点乘积.
- 化卷为乘, 就是把多项式环上的取模乘法变为 \mathbb{C}^n 上的逐项乘积, DFT 保持了两个代数结构间的乘法.
 - $\mathbb{C}[x]$ 作为环结构乘法自然, 在多项式环上刻画 DFT 较在 \mathbb{C}^n 上强行定义循环卷积具有优越性.

① 1. 从 Fourier 变换到 DFT

② 2. DFT 与多项式环

- 2.1 引例: $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
- 2.2 整环上的推广
- 2.3 唯一性的讨论

③ 3. DFT 与矩阵代数

代数、代数同构与直积

- 整环：无零因子交换幺环
- 设 R 是一整环，若 $(A, +, \times)$ 为一环且配备了与乘法 \times 相容的 R -数乘 \cdot ，则称 A 是一 R -代数，不至混淆时简称代数。
 - 整环 R 自身也可视为一个代数.
- 我们将 R^n 理解为作为代数的 R 的直积，即 $R^n = R \times R \times \cdots \times R$. 直积的加法、数乘和乘法均在逐项意义下定义.
- 保持代数间加法、数乘和乘法的双射被称为代数同构.

几个观察与整环的优势

- 关于引例的若干观察：

- DFT 是 $\mathbb{C}[x]/(x^n - 1) \rightarrow R^n$ 的一个代数同构，具体做法是在单位根处多点求值插值
- 求值插值在任意 n 个不同位置进行即可，单位根不是本质要求
- 商环 $\mathbb{C}[x]/(x^n - 1)$ 带来了与循环卷积对应的多项式取模乘法，还蕴含着“不超过 $n - 1$ 次”为求值插值带来的单与满
- 第一同构定理**：设 $f: R \rightarrow S$ 是环同态，则 f 诱导出环同构 $R/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$

- 选取整环作为底层代数结构的理由：

- 交换：确保求值操作是同态
- 保留环上整除的结构和多项式根与因子的关系（带余除法、余式定理）
- 在唯一性证明中发挥作用

商环到直积的代数同构

下面固定 R 是一整环. 令 C 是 R 的一有限子集, 由若干不同一次多项式乘积 $\prod_{c \in C}(x - c)$ 生成的 $R[x]$ 上的理想记为 $(\prod_{c \in C}(x - c))$.

用记号 R^C 代表全体 C 上的 R 值函数构成的集合. R^C 与其上定义的函数逐点加法、数乘和乘法构成一个代数, 自然也与 R^n 代数同构.

命题 2.1

多项式商环 $R[x]/(\prod_{c \in C}(x - c))$ 与代数直积 R^C 代数同构.



图 1: 命题 2.1 构造示意图

考察 $R[x]$ 到 R^C 上的代数同态 $\varphi : f \mapsto (C \ni x \mapsto f(x))$, 其含义为在每一 $c \in C$ 处对多项式 f 进行求值.

- φ 的核:

$$\text{Ker } \varphi = \{f \in R[x] : f(C) = \{0\}\} = \left(\prod_{c \in C} (x - c) \right)$$

- φ 的像: 对每个 $c \in C$ 对应的理想 $(x - c)$ 应用中国剩余定理就有 $\text{Im } \varphi = R^C$.

故由第一同构定理, φ 诱导的

$$\bar{\varphi} : R[x] / \left(\prod_{c \in C} (x - c) \right) \rightarrow R^C$$

是一同构映射.

DFT: 代数同构的特例

作为上一定理的特例, DFT 在单位根处求值插值. 若 ω_n 为内嵌于 R 的某一 n 阶循环 (乘法) 群的生成元, 则称其为 R 上的 n 次本原单位根.

推论 2.1

若 R 上存在 n 次本原单位根 ω_n , 则多项式

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \omega_n^k)$$

故 $R[x]/(x^n - 1)$ 与 R^n 代数同构. 我们便称二者间的代数同构为 R 上的 n 点 DFT.

1. 从 Fourier 变换到 DFT

2. DFT 与多项式环

- 2.1 引例: $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
- 2.2 整环上的推广
- 2.3 唯一性的讨论

3. DFT 与矩阵代数

全体代数同构的结构

$$R[x]/(m(x)) \xrightarrow{\bar{\varphi}} R^n$$


图 2

已经建立 $R[x]/(m(x)) \rightarrow R^n$ 的同构关系, 这里 $m(x)$ 是若干不同一次因式的乘积. 但这种同构或不只一种. 为研究其是否在某种意义下具有唯一性, 需研究全体同构 $\text{Iso}(R[x]/(m(x)), R^n)$ 的结构. 该问题化归为研究 R^n 上全体自同构 $\text{Aut}(R^n)$ 的结构.

命题 2.2

设 \mathcal{A} 是一与 R^n 同构的任一代数. 固定代数同构 $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow R^n$, 则任一 $\mathcal{A} \rightarrow R^n$ 的代数同构 f 都具有形式 $f = p\varphi$, 这里 $p \in \text{Aut}(R^n)$.

R^n 上的自同构

设 e_1, \dots, e_n 是 R^n 上的自然基, 设 $\sigma \in S_n$ 是有限集 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 上的一个置换. 定义 R^n 上由置换 σ 诱导的模自同构

$$P_\sigma : e_k \mapsto e_{\sigma(k)}$$

容易验证 P_σ 保持逐项乘法, 因此它也是 R^n 上的代数自同构.

下面的引理刻画了 R^n 上代数自同构的形式.

引理 2.1

全体 P_σ 构成 R^n 上全体代数自同构, 即

$$\text{Aut}(R^n) = \{P_\sigma : \sigma \in S_n\}$$

只需证对任意 R^n 上任意代数自同构 P , 其都可被某一置换 $\sigma \in S_n$ 诱导得到. 不妨考察 P 在 R^n 自然基下的矩阵表示 $(p_{i,j})_{(i,j) \in n \times n}$. 则

$$P(\mathbf{e}_i) \times P(\mathbf{e}_i) = P(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i) = P(\mathbf{e}_i)$$

可分行写为对 $k = 0, 1, \dots, n-1$, 都有 $p_{k,i}^2 = p_{k,i}$, 因为 R 是整环, 故 $p_{k,i}$ 为 0 或 1, 即矩阵各元素只能取 0 或 1. 又对 $i \neq j$ 将

$$P(\mathbf{e}_i) \times P(\mathbf{e}_j) = P(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = P(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

分行写开, 得对 $k = 0, 1, \dots, n-1$, 都有 $p_{k,i}p_{k,j} = 0$. 于是 (由 R 是整环) 矩阵任一行至多只能由一个 1. 假如存在第 k 行全为 0, 则 $\mathbf{e}_k \notin \text{Im } P$, 与 P 作为自同构的满性矛盾, 故 P 的矩阵表示每行有且只有一个 1, 其余为 0. P 的某两行亦不能完全相同, 否则 (由鸽巢原理) 矩阵某列一定全为 0, 与 P 作为自同构的单性矛盾. 因此 P 的矩阵表示是一个置换矩阵, 即 P 由一置换诱导.

推论 2.2

设 f 是任一 R 上的 n 点 DFT, 则任何 R 上的 n 点 DFT g 都具有形式 $g = P_{\sigma}f$, 这里 f 是一事先固定的 n 点 DFT.

作为推论, n 点 DFT 共有 $n!$ 种. 这一结果的显著性在于, 只要不计求值得到的 n 个点值在 R^n 上的排列顺序, DFT 是唯一满足卷积性质的可逆线性映射.

① 1. 从 Fourier 变换到 DFT

② 2. DFT 与多项式环

- 2.1 引例： $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
- 2.2 整环上的推广
- 2.3 唯一性的讨论

③ 3. DFT 与矩阵代数

第二个视角：矩阵代数

我们建立了

$$R[x]/(m(x)) \xrightarrow{\bar{\varphi}} R^n \curvearrowright^{P_\sigma}$$

图 3

这一交换图可以继续扩展. 将视角从多项式环转向矩阵代数, 我们将看到, DFT 不仅是多项式环上的求值插值, 更体现为矩阵代数上的相似对角化.

简单起见, 下面只考察代数闭域的情况, 并用域的常用记号 K 替代 R .

相似对角化

设 C 是域 K 上的 n 阶可对角化矩阵, 特征值两两不同. 设其特征多项式 (或最小多项式) 为 $m(x)$, Λ 为其对角化得到的矩阵. $K[C]$ 和 $K[\Lambda]$ 分别是矩阵 C 和 Λ 在 $K^{n \times n}$ 上生成的代数.

$$\begin{array}{ccc} K[x]/(m(x)) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & K^n \\ \downarrow ? & & \downarrow \text{diag} \\ K[C] & \xrightarrow{\text{diagonalization}} & K[\Lambda] \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright P_\sigma \end{array}$$

图 4

对角化 C 的矩阵也同时对角化了 $K[C]$ 中的任意矩阵. 若设这一对角化矩阵为 F , 则 $A \mapsto F^{-1}AF$ 便规定了一个 $K[C] \rightarrow K[\Lambda]$ 的代数同构. K^n 与 $K[\Lambda]$ 的代数同构是平凡的. 下面来建立 $K[x]/m(x)$ 与 $K[C]$ 间的联系.

命题 3.1

设 C 是域 K 上的 n 阶矩阵, $m(x)$ 是其最小多项式, 则 $K[x]/m(x)$ 与 $K[C]$ 代数同构.

仍然考察 $K[x] \rightarrow K[C]$ 自然的“代入” $\psi: f \mapsto f(C)$. C 的全体零化多项式恰为 $m(x)$ 生成的 $K[x]$ 上的理想, 因此 $\text{Ker } \psi = (m(x))$. ψ 的满射性平凡. 用第一同构定理就得到结论.

$$\begin{array}{ccc} K[x] & \xrightarrow{\psi} & K[C] \\ \downarrow & \searrow \bar{\psi} & \\ K[x]/(m(x)) & & \end{array}$$

图 5: 命题 3.1 证明示意图

为显式刻画上述对角化过程，我们选取一类特殊的矩阵²作为 C 进行研究：

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

C 被称为首一多项式 $m(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$ 的友矩阵 (companion matrix).

- 直接计算， C 的特征多项式恰为 $m(x)$.
- 直接验证， $(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})^T$ 是其特征值 λ 的一个特征向量.

²这类矩阵在高阶常系数线性 ODE 和常系数齐次线性递推中也有重要应用.

友矩阵的最小多项式

命题 3.2

C 的最小多项式也恰为 $m(x)$. 等价地, 友矩阵的特征多项式与最小多项式相同.

等价地, 我们研究 C^T 的最小多项式. 注意到如下事实:

$$C^T \mathbf{e}_i = \begin{cases} \mathbf{e}_{i+1} & i = 0, 1, \dots, n-2 \\ -\sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathbf{e}_k & i = n-1 \end{cases}$$

考察任意不超过 $n-1$ 次的 C^T 的零化多项式 $f(x) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, 有

$$\mathbf{0} = f(C^T) \mathbf{e}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (C^T)^k \mathbf{e}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathbf{e}_k$$

因此 $a_k = 0$ 对所有 k 成立, 即 $f = 0$. 这说明 C^T 的 (非零) 零化多项式次数至少为 n . 再用零化多项式和最小多项式的整除关系就得到结论.

上述命题的逆命题在相似意义下成立.

命题 3.3

若矩阵的特征多项式与最小多项式相同, 则它与其特征多项式对应的友矩阵相似.

可在 Jordan 标准型下理解. 此时每个特征值对应的 Jordan 块有且只有一个.

当友矩阵 C 可对角化时, 其最小多项式可分解为不同一次因式的乘积. 又其最小多项式与特征多项式相同, 故其必有 n 个两两不同的特征值 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. 结合上述命题可以看到, 我们特殊地取 C 为友矩阵做研究是不失一般性的.

友矩阵对角化的显式表达

前面已经得到友矩阵特征向量的形式, 因此 Vandermonde 矩阵

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^{n-1} & \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

正是将 C 对角化的矩阵.

$$F^{-1}CF = \Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$$

注意到 $K[C]$ 也被对角化 C 的矩阵同时对角化, 故 $A \mapsto F^{-1}AF$ 确为 $K[C] \rightarrow K[\Lambda]$ 的代数同构, 与先前的关于对角化的讨论结果一致.

循环矩阵的对角化

特别地，若取

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

它是基本循环矩阵，对应最小多项式 $m(x) = x^n - 1$. C 生成的代数 $K[C]$ 即 $K^{n \times n}$ 上的全体循环矩阵. 此时 DFT 体现为利用 DFT 矩阵

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

对循环矩阵进行对角化的过程.

结语

以刻画 DFT 的卷积性质为目标, 以代数同构为构造手段, 我们为理解 DFT 的代数含义提供了两个视角:

- DFT 是多项式商环上的多点求值插值
- DFT 是矩阵代数上的相似对角化

可见 DFT 背后的代数理论非常丰富, 不失为联系起本科阶段代数课程的有趣实例, 亦体现出代数工具与视角在工程实践中的强大效用.

$$\begin{array}{ccc} K[x]/(m(x)) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & K^n \curvearrowright^{P_\sigma} \\ \downarrow \bar{\psi} & & \downarrow \text{diag} \\ K[C] & \xrightarrow{\text{diagonalization}} & K[\Lambda] \end{array}$$

图 6

- [1] R. Agarwal and C. Burrus, “Number theoretic transforms to implement fast digital convolution,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 63, no. 4, pp. 550–560, Apr. 1975, ISSN: 1558-2256. DOI: [10.1109/PROC.1975.9791](https://doi.org/10.1109/PROC.1975.9791).
- [2] P. J. Nicholson, “Algebraic theory of finite fourier transforms,” *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 5, no. 5, pp. 524–547, Oct. 1971, ISSN: 0022-0000. DOI: [10.1016/S0022-0000\(71\)80014-4](https://doi.org/10.1016/S0022-0000(71)80014-4).
- [3] M. Fürer, “Faster Integer Multiplication,” *SIAM Journal on Computing*, vol. 39, no. 3, pp. 979–1005, Jan. 2009, ISSN: 0097-5397. DOI: [10.1137/070711761](https://doi.org/10.1137/070711761).

- [4] E. Amiot, *Music Through Fourier Space* (Computational Music Science). Cham: Springer International Publishing, 2016, ISBN: 978-3-319-45580-8 978-3-319-45581-5. DOI: [10.1007/978-3-319-45581-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-45581-5).
- [5] I. Baraquin and N. Ratier, “Uniqueness of the discrete Fourier transform,” *Signal Processing*, vol. 209, p. 109 041, Aug. 2023, ISSN: 0165-1684. DOI: [10.1016/j.sigpro.2023.109041](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2023.109041).