一元多项式的 Delta 判别式

sun123zxy

2023-10-18[1]

[1]最后更新于 2024-10-26.

目录

目录

目录

整数分拆

设非负整数数列 $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ 只有有限项非零且（不严格）单调递减．定义长度 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda})$ 为其非零项元素个数；定义 $\mathcal{S}(\boldsymbol{\lambda})$ 为其非零项元素之和．此时称 $\boldsymbol{\lambda}$ 是整数 $\mathcal{S}(\boldsymbol{\lambda})$ 的一个长度为 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda})$ 的分拆.

由于分拆只有有限项非零，对大于等于 $\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda})$ 的非负整数 k，我们也常省略从第 $k+1$ 项开始的全为 0 的项，将 $\boldsymbol{\lambda}$ 直接记为长度为 k 的非负整数数组 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$.

Ferrers diagram 和 Young diagram 是图示分拆的常见方法.

通过沿主对角线翻转分拆的 Ferrers diagram 或 Young diagram，可以定义分拆的转置．分拆 λ 的转置记为 λ^{T}．转置后分拆的长度变为原分拆的首项，而首项变为原分拆的长度.

目录

单项对称多项式

设 n 是正整数，K 是一个域. 记 $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_n)$. 设 $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ 是长度不超过 n 的一个分拆.

定义 n 元多项式环 $K[\boldsymbol{x}]$ 上的关于分拆 $\boldsymbol{\lambda}$ 的单项对称多项式 (monomial symmetric polynomial) $m_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{x})$ 为各项系数为 1 的含有单项式 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\lambda}} := x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$ 的项数最少的对称多项式.

- $m_{(2,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$
- $m_{(2,2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2$

易见 $m_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{x})$ 是次数为 $\mathcal{S}(\boldsymbol{\lambda})$ 的齐次 (homogeneous) 多项式. 全体单项对称多项式构成 n 元对称多项式环 $\Lambda_n \subset K[\boldsymbol{x}]$ 作为 K 上线性空间的一组基底.

习题 1.1

对一给定的长度不超过 n 的分拆 $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$，$n$ 元单项对称多项式 $m_\lambda(\boldsymbol{x})$ 共有多少项？

在计数时根据分拆中重复项的分布情况进行消序.

习题 1.2

n 元 d 次单项对称多项式共有多少种可能的构型？设 $\Lambda_n^{(d)} \subset \Lambda_n$ 由全体至多 d 次的 n 元对称多项式构成，其作为 K 上线性空间的维数是多少？

该问题等价于求满足 $\mathcal{S}(\boldsymbol{\lambda}) = d$，$\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}) \leq n$ 的所有可能分拆 $\boldsymbol{\lambda}$ 的数量，也即 “将 d 个无标号球放入 n 个可空置的无标号盒” 的可行方案数.

目录

基本对称多项式

n 元多项式环 $K[\mathbf{x}]$ 上的 n 个基本对称多项式（elementary symmetric polynomial）定义为

$$e_k(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{1 \le i_1 < i_2 \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

使用单项对称多项式的记号，也可记为

$$e_k(\boldsymbol{x}) := m_{\boldsymbol{\lambda}_k}(\boldsymbol{x})$$

其中分拆 $\boldsymbol{\lambda}_k := (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ 的前 k 项为 1，其余项皆为 0.

方便起见，定义 $\mathbf{e}_0 = 1$，定义 $k > n$ 和 $k < 0$ 的 $e_k = 0$. 设分拆 $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ 满足 $\lambda_i \le n, \quad \forall i \in \mathbb{N}_+$. 我们记 $e_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{x}) := e_{\lambda_1}(\boldsymbol{x}) e_{\lambda_2}(\boldsymbol{x}) \ldots e_{\lambda_{\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda})}}(\boldsymbol{x})$.

生成函数

基本对称多项式有生成函数

$$E(s) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k s^k = \prod_{i=1}^{m}(1 + x_i s)$$

对称多项式基本定理

定理 1.1 (对称多项式基本定理)

设 $f(\mathbf{x})$ 是域 K 上的 n 元对称多项式，则存在唯一的 $g(\mathbf{x}) \in K[\mathbf{x}]$，使得

$$f(\mathbf{x}) = g(e_1(\mathbf{x}), \ldots, e_n(\mathbf{x}))$$

该定理对交换环上的对称多项式仍然成立. 这意味着若 f 是整系数对称多项式，则 g 也是整系数多项式.

在定理的存在性证明中，为消去首项对应的单项对称多项式 $m_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})$，我们构造的若干个基本对称多项式的乘积恰为 $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}}$.

考察全体满足 $\lambda_i \le n, \quad \forall i \in \mathbb{N}_+$ 的分拆 $\boldsymbol{\lambda}$ 对应的 $e_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x})$，它们构成了 n 元对称多项式环 Λ_n 作为 K 上线性空间的另一组基底.

目录

幂和对称多项式

n 元多项式环 $K[\mathbf{x}]$ 上的幂和对称多项式（power sum symmetric polynomial）定义为

$$p_k(x_1,\ldots,x_n) := x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, \quad k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$$

使用单项对称多项式的记号，也可记为

$$p_k(\mathbf{x}) := m_{(k,0,0,\ldots)}$$

特别的，$p_0(\mathbf{x}) = n$. 方便起见，定义 $k < 0$ 的 $p_k = 0$.

定理 1.2

设 $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{C}$ 是数域，设 $f(\mathbf{x})$ 是域 K 上的 n 元对称多项式，则存在唯一的 $g(\mathbf{x}) \in K[\mathbf{x}]$，使得 $f(\mathbf{x}) = g(p_1(\mathbf{x}),\ldots,p_n(\mathbf{x}))$.

一般地，结论对特征为 0 的域 K 也成立.

生成函数

幂和对称多项式有生成函数

$$P(s) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \sum_{i=1}^{m} x_i^k = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{+\infty} (x_i s)^k = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - x_i s}$$

Newton 公式

以下定理递推地给出了幂和对称多项式 $p_1, \ldots, p_n$ 与基本对称多项式 $e_1, \ldots, e_n$ 间的关系. 定理 1.2 的存在性部分可由这一定理给出.

定理 1.3 (Newton's Identities)

$$
\begin{aligned}
p_k &= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} e_i p_{k-i} + (-1)^{k-1} k e_k && k = 1, 2, \ldots, n \\
p_k &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} e_i p_{k-i} && k > n \\
k e_k &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} p_i e_{k-i} && k = 1, 2, \ldots, n \\
0 &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} p_i e_{k-i} && k > n
\end{aligned}
$$

更简单的写法

$$\sum_{i+j=k} (-1)^i e_i p_j = 0, \quad k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$$

但在求和中“认为” $p_0 = k$.

一个基于生成函数的证明

$$\frac{sE'(s)}{E(s)} = s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\ln E(s)) = \sum_{i=1}^{m}\frac{x_i s}{1+x_i s} = m - \sum_{i=1}^{m}\frac{1}{1+x_i s} = m - P(-s)$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty} k e_k s^k = sE'(s) = E(s)(m - P(-s)) = E(s)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}p_k$$

对比各项即得 Newton 公式.

目录

其它基底

完全齐次对称多项式（Complete homogeneous symmetric polynomials）、Schur 多项式……

本节主要参考 [1]–[4].

目录

定理 2.1 (Vieta's formulas)

设数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上 n 次首一多项式（*monic polynomial*）

$$A(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_n)$$

其 n 个复根分别为 $\boldsymbol{c} := (c_1, c_2, \ldots, c_n)$，则 $A(x)$ 的系数可由关于根的 n 个 n 元基本对称多项式表示

$$a_{n-k} = e_k(-\boldsymbol{c}) = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_k}$$

其中 $k = 1, 2, \ldots, n$. 特别的

$$\begin{aligned} a_0 &= e_n(-\boldsymbol{c}) = (-1)^n c_1 c_2 \ldots c_n \\ a_{n-1} &= e_1(-\boldsymbol{c}) = -(c_1 + c_2 + \cdots + c_n) \end{aligned}$$

Vieta 定理与对称多项式基本定理

- 即使尚未获知多项式 n 个复根 $c_1, \ldots, c_n$ 的具体取值，我们也能通过已知的多项式系数 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ 获知 n 个 n 元基本对称多项式在根处的取值.
- 对称多项式基本定理指出，任何对称多项式都可被（唯一）表示为关于 n 个基本对称多项式的一个多项式.
- 仅需知晓多项式的系数，就可获得任意给定对称多项式在根处的取值.
- 目标：构造一个（数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上的）n 元对称多项式，使得能通过代入求值的方式，快速检测 n 个复数是否两两不同.

Vandermonde 行列式

考察作为（数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上）n 元多项式的 Vandermonde 行列式

$$\det V := \det \left(x_j^{i-1}\right)_{i=1,j=1}^{n,n}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

它是否可用于判定重根？它是对称多项式吗？

注记

$\det V$ 是一个斜对称多项式． 事实上，$\det V$ 与所有对称多项式的乘积构成了全体斜对称多项式（alternating polynomials）.

判别式

设（数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上的）n 元对称多项式

$$D(x_1, \ldots, x_n) := (\det V)^2 = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)^2$$

称其为（数域 K 上）一元 n 次首一多项式的判别式（Discriminant）．当代入的 $\boldsymbol{x} := (x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbb{C}$ 互不相同时，$D(\boldsymbol{x}) \neq 0$；否则 $D(\boldsymbol{x}) = 0$.

根据对称多项式基本定理，存在唯一数域 K 上的 n 元多项式 d，使得 $d(e_1(\boldsymbol{x}), \ldots, e_n(\boldsymbol{x})) = D(\boldsymbol{x})$.

命题 2.1

数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上的 n 次首一多项式 $f(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 在复数域中有重根的充分必要条件是 $d(a_{n-1}, \ldots, a_0) = 0$.

这是因为 $f(x)$ 的 n 个复根 $\boldsymbol{c} := (c_1, \ldots, c_n)$ 满足

$$D(-\boldsymbol{c}) = d(e_1(-\boldsymbol{c}), \ldots, e_n(-\boldsymbol{c})) = d(a_{n-1}, \ldots, a_0)$$

习题 2.1

写出数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上一元二次多项式 $x^2 + bx + c$ 的判别式.

对次数更高的方程，直接使用消首项方法求解判别式 $D(\boldsymbol{x})$ 在基本对称多项式下的表示 $d(e_1, \ldots, e_n)$ 将变得相当繁琐. 下面利用判别式与 Vandermonde 行列式的关系得到另一种分解方法.

另一分解方法

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{x}) &= (\det V)^2 = \det(VV^T) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right) \\
&= \det \begin{pmatrix} n & p_1(\boldsymbol{x}) & \dots & p_{n-1}(\boldsymbol{x}) \\ p_1(\boldsymbol{x}) & p_2(\boldsymbol{x}) & \dots & p_n(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1}(\boldsymbol{x}) & p_n(\boldsymbol{x}) & \dots & p_{2n-2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \det \left(p_{i+j-2}(\boldsymbol{x})\right)_{i=1,j=1}^{n,n}
\end{aligned}
$$

而由 Newton's Identities，幂和对称多项式 $p_k(\boldsymbol{x})$ 可较容易地递推分解为基本对称多项式的多项式组合，故我们找到了分解 $D(\boldsymbol{x})$ 的一种更易操作的方法.

另一分解方法

习题 2.2

写出数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上不完全三次多项式 $x^3 + bx + c$ 的判别式.

本节主要参考 [5]–[8].

[1] Wikipedia, *Symmetric polynomial*, https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_polynomial.

[2] Wikipedia, *Elementary symmetric polynomial*, https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_symmetric_polynomial.

[3] Wikipedia, *Power sum symmetric polynomial*, https://en.wikipedia.org/wiki/Power_sum_symmetric_polynomial.

[4] Wikipedia, *Newton's identities*, https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_identities.

[5] 丘维声, “高等代数 下册,” in 3rd ed. 北京: 高等教育出版社, 2015, ch. 多项式环, pp. 57–66, ISBN: 978-7-04-042235-1.

[6] 蓝以中, “高等代数简明教程 (下册),” in 2nd ed. 北京: 北京大学出版社, 2007, ch. 多元多项式环, pp. 213–217, ISBN: 978-7-301-05579-3.

参考文献 II

[7] Wikipedia, *Partition (number theory)*, https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_(number_theory).

[8] Wikipedia, *Alternating polynomial*, https://en.wikipedia.org/wiki/Alternating_polynomial.