

# 代数同构视角下的离散 Fourier 变换

## 多项式环、求值插值与相似对角化

sun123zxy

2024-05-13

- ① 1. 从 Fourier 变换到 DFT
- ② 2. DFT 与多项式环
  - 2.1 引例:  $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
  - 2.2 整环上的推广
  - 2.3 唯一性的讨论
- ③ 3. DFT 与矩阵代数

## 1 1. 从 Fourier 变换到 DFT

## 2 2. DFT 与多项式环

- 2.1 引例:  $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
- 2.2 整环上的推广
- 2.3 唯一性的讨论

## 3 3. DFT 与矩阵代数

# Fourier 变换及其卷积性质

- Fourier 变换：将给定函数  $f$  映为函数  $\mathcal{F}[f]$ :

$$\mathcal{F}[f](\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

- 定义函数  $f$  和  $g$  的卷积

$$(f * g)(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda - x) g(x) dx$$

则 Fourier 变换将两个函数的卷积化为逐点乘积，即

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]$$

# 复数域上的 DFT 及其卷积性质

- 离散 *Fourier* 变换 (Discrete Fourier Transform, DFT): 线性空间  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  上的线性变换  $F$ , 将向量  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$  映为  $F\mathbf{a}$ , 其第  $i$  个分量如下所示

$$(F\mathbf{a})_i := \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{ik} a_k$$

这里分量下标从 0 开始计数,  $\omega_n := e^{2\pi i/n}$  是  $\mathbb{C}$  上的一个  $n$  次本原单位根.

- 相仿的卷积性: 两个向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$  的循环卷积定义为

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})_k := \sum_{i+j=k \pmod{n}} a_i b_j$$

则 DFT 将两个向量的循环卷积化为逐项乘积  $\times$ , 即

$$F(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = (F\mathbf{a}) \times (F\mathbf{b})$$

# 矩阵表示

在  $\mathbb{C}^n$  的自然基下, 变换  $F$  有矩阵表示

$$F = \left( \omega_n^{ij} \right)_{(i,j) \in n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

- 卷积性: 系数为全体复平面  $n$  次单位根的可逆 Vandermonde 矩阵
- 正交性: 适当单位化后为酉矩阵

# 问题<sup>1</sup>

- DFT 化卷为乘的本质？
  - 我们给出一大类具备卷积性的线性映射的构造，DFT 将作为特例推出.
- 如何从代数角度理解 DFT？
  - 两个视角：多项式环、矩阵代数
  - 两种表现：求值插值、相似对角化
  - 一致观点：保加法、保数乘、保乘法的代数同构
- DFT 是否是唯一一类化卷为乘的变换？作为底层结构的  $\mathbb{C}$  是否可以放宽？
  - 工程上复数乘法运算较慢且具有浮点误差，更换底层代数结构具有实际意义. 例如，被称为数论变换 (number theoretic transforms, NTT) 的 DFT 变种就将  $\mathbb{C}$  替换为有限域  $\mathbb{F}_p$  而同时保留了其卷积性质.
  - 我们将其 DFT 扩展至任意整环并证明特定含义下的唯一性.

---

<sup>1</sup>Agarwal and Burrus [AB75]; Nicholson [Nic71]; Fürer [Für09]; Amiot [Ami16]; Baraquin and Ratier [BR23]

## 1 1. 从 Fourier 变换到 DFT

## 2 2. DFT 与多项式环

- 2.1 引例:  $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
- 2.2 整环上的推广
- 2.3 唯一性的讨论

## 3 3. DFT 与矩阵代数



## ① 1. 从 Fourier 变换到 DFT

## ② 2. DFT 与多项式环

- 2.1 引例:  $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
- 2.2 整环上的推广
- 2.3 唯一性的讨论

## ③ 3. DFT 与矩阵代数

# $\mathbb{C}[x]$ 与循环卷积

设不超过  $n-1$  次的多项式  $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ ,  $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ .  
二者的多项式乘积由 **Cauchy 乘积** 给出

$$f(x)g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j = \sum_{k=0}^{2n-2} x^k \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

令  $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T$ ,  $\mathbf{b} := (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})^T$ , 回顾循环卷积定义

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})_k := \sum_{i+j=k \pmod{n}} a_i b_j$$

可见 Cauchy 乘积与循环卷积尚有区别. 稍加改动, 若在模  $x^n - 1$  的意义下——即商环  $\mathbb{C}[x]/(x^n - 1)$  中计算, 则二者相合:

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \sum_{i+j=k \pmod{n}} a_i b_j \pmod{x^n - 1}$$

# $\mathbb{C}[x]$ 与复数域 DFT

DFT 亦有在  $\mathbb{C}[x]$  上的表示. 给定  $\mathbf{a} := (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$ , 其对应多项式  $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$  次数不超过  $n-1$  次, 则

$$(F\mathbf{a})_i = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{ik} \mathbf{a}_k = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{a}_k (\omega_n^i)^k = f(\omega_n^i)$$

恰为  $f(x)$  分别在  $n$  个  $\mathbb{C}$  上  $n$  次单位根处多点求值的结果.

- 可逆性:  $n$  点唯一确定一个不超过  $n-1$  次的多项式 (*Lagrange 插值*)
- 线性性:  $(af + bg)(\omega_n^i) = af(\omega_n^i) + bg(\omega_n^i)$
- 卷积性: 将取模乘法化为点值逐项相乘, 再次与  $\mathbb{C}^n$  上的表现相合

$$F(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = (F\mathbf{a}) \times (F\mathbf{b})$$

$$(fg)(\omega_n^i) = f(\omega_n^i)g(\omega_n^i)$$

- $\mathbb{C}^n$  与  $\mathbb{C}[x]$  视角下的 DFT:
  - $\mathbb{C}^n$ : 作为以单位根为参数的 Vandermonde 矩阵, DFT 是  $\mathbb{C}^n$  上的可逆线性变换, 将向量间的循环卷积  $*$  化为逐项乘积  $\times$ .
  - $\mathbb{C}[x]$ : 作为单位根处的多点求值插值, DFT 在全体不超过  $n-1$  次的多项式和  $\mathbb{C}^n$  间建立起线性同构关系, 将多项式乘积化为函数值逐点乘积.
- 化卷为乘, 就是把多项式环上的取模乘法变为  $\mathbb{C}^n$  上的逐项乘积, DFT 保持了两个代数结构间的乘法.
  - $\mathbb{C}[x]$  作为环结构乘法自然, 在多项式环上刻画 DFT 较在  $\mathbb{C}^n$  上强行定义循环卷积具有优越性.

## ① 1. 从 Fourier 变换到 DFT

## ② 2. DFT 与多项式环

- 2.1 引例： $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
- 2.2 整环上的推广
- 2.3 唯一性的讨论

## ③ 3. DFT 与矩阵代数

# 代数、代数同构与直积

- 整环：无零因子交换幺环
- 设  $R$  是一整环，若  $(A, +, \times)$  为一环且配备了与乘法  $\times$  相容的  $R$ -数乘  $\cdot$ ，则称  $A$  是一  $R$ -代数，不至混淆时简称代数。
  - 整环  $R$  自身也可视为一个代数.
- 我们将  $R^n$  理解为作为代数的  $R$  的直积，即  $R^n = R \times R \times \cdots \times R$ . 直积的加法、数乘和乘法均在逐项意义下定义.
- 保持代数间加法、数乘和乘法的双射被称为代数同构.

# 几个观察与整环的优势

## ● 关于引例的若干观察：

- DFT 是  $\mathbb{C}[x]/(x^n - 1) \rightarrow R^n$  的一个代数同构，具体做法是在单位根处多点求值插值
- 求值插值在任意  $n$  个不同位置进行即可，单位根不是本质要求
- 商环  $\mathbb{C}[x]/(x^n - 1)$  带来了与循环卷积对应的多项式取模乘法，还蕴含着“不超过  $n - 1$  次”为求值插值带来的单与满
- **第一同构定理**：设  $f: R \rightarrow S$  是环同态，则  $f$  诱导出环同构  $R/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$

## ● 选取整环作为底层代数结构的理由：

- 交换：确保求值操作是同态
- 保留环上整除的结构和多项式根与因子的关系（带余除法、余式定理）
- 在唯一性证明中发挥作用

# 商环到直积的代数同构

下面固定  $R$  是一整环. 令  $C$  是  $R$  的一有限子集, 由若干不同一次多项式乘积  $\prod_{c \in C}(x - c)$  生成的  $R[x]$  上的理想记为  $(\prod_{c \in C}(x - c))$ .

用记号  $R^C$  代表全体  $C$  上的  $R$  值函数构成的集合.  $R^C$  与其上定义的函数逐点加法、数乘和乘法构成一个代数, 自然也与  $R^n$  代数同构.

## 命题 2.1

多项式商环  $R[x]/(\prod_{c \in C}(x - c))$  与代数直积  $R^C$  代数同构.



图 1: 命题 2.1 构造示意图



# 构造

考察  $R[x]$  到  $R^C$  上的代数同态  $\varphi : f \mapsto (C \ni x \mapsto f(x))$ , 其含义为在每一  $c \in C$  处对多项式  $f$  进行求值.

- $\varphi$  的核:

$$\text{Ker } \varphi = \{f \in R[x] : f(C) = \{0\}\} = \left( \prod_{c \in C} (x - c) \right)$$

- $\varphi$  的像: 对每个  $c \in C$  对应的理想  $(x - c)$  应用中国剩余定理就有  $\text{Im } \varphi = R^C$ .

故由第一同构定理,  $\varphi$  诱导的

$$\bar{\varphi} : R[x] / \left( \prod_{c \in C} (x - c) \right) \rightarrow R^C$$

是一同构映射.

# DFT: 代数同构的特例

作为上一定理的特例, DFT 在单位根处求值插值. 若  $\omega_n$  为内嵌于  $R$  的某一  $n$  阶循环 (乘法) 群的生成元, 则称其为  $R$  上的  $n$  次本原单位根.

## 推论 2.1

若  $R$  上存在  $n$  次本原单位根  $\omega_n$ , 则多项式

$$x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \omega_n^k)$$

故  $R[x]/(x^n - 1)$  与  $R^n$  代数同构. 我们便称二者间的代数同构为  $R$  上的  $n$  点 DFT.

## ① 1. 从 Fourier 变换到 DFT

## ② 2. DFT 与多项式环

- 2.1 引例： $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
- 2.2 整环上的推广
- 2.3 唯一性的讨论

## ③ 3. DFT 与矩阵代数

# 全体代数同构的结构


$$R[x]/(m(x)) \xrightarrow{\bar{\varphi}} R^n$$


图 2

已经建立  $R[x]/(m(x)) \rightarrow R^n$  的同构关系, 这里  $m(x)$  是若干不同一次因式的乘积. 但这种同构或不只一种. 为研究其是否在某种意义下具有唯一性, 需研究全体同构  $\text{Iso}(R[x]/(m(x)), R^n)$  的结构. 该问题化归为研究  $R^n$  上全体自同构  $\text{Aut}(R^n)$  的结构.

## 命题 2.2

设  $\mathcal{A}$  是一与  $R^n$  同构的任一代数. 固定代数同构  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow R^n$ , 则任一  $\mathcal{A} \rightarrow R^n$  的代数同构  $f$  都具有形式  $f = p\varphi$ , 这里  $p \in \text{Aut}(R^n)$ .

# $R^n$ 上的自同构

设  $e_1, \dots, e_n$  是  $R^n$  上的自然基, 设  $\sigma \in S_n$  是有限集  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  上的一个置换. 定义  $R^n$  上由置换  $\sigma$  诱导的模自同构

$$P_\sigma : e_k \mapsto e_{\sigma(k)}$$

容易验证  $P_\sigma$  保持逐项乘法, 因此它也是  $R^n$  上的代数自同构.

下面的引理刻画了  $R^n$  上代数自同构的形式.

## 引理 2.1

全体  $P_\sigma$  构成  $R^n$  上全体代数自同构, 即

$$\text{Aut}(R^n) = \{P_\sigma : \sigma \in S_n\}$$

只需证对任意  $R^n$  上任意代数自同构  $P$ , 其都可被某一置换  $\sigma \in S_n$  诱导得到. 不妨考察  $P$  在  $R^n$  自然基下的矩阵表示  $(p_{i,j})_{(i,j) \in n \times n}$ . 则

$$P(\mathbf{e}_i) \times P(\mathbf{e}_i) = P(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_i) = P(\mathbf{e}_i)$$

可分行写为对  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , 都有  $p_{k,i}^2 = p_{k,i}$ , 因为  $R$  是整环, 故  $p_{k,i}$  为 0 或 1, 即矩阵各元素只能取 0 或 1. 又对  $i \neq j$  将

$$P(\mathbf{e}_i) \times P(\mathbf{e}_j) = P(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = P(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

分行写开, 得对  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , 都有  $p_{k,i}p_{k,j} = 0$ . 于是 (由  $R$  是整环) 矩阵任一行至多只能由一个 1. 假如存在第  $k$  行全为 0, 则  $\mathbf{e}_k \notin \text{Im } P$ , 与  $P$  作为自同构的满性矛盾, 故  $P$  的矩阵表示每行有且只有一个 1, 其余为 0.  $P$  的某两行亦不能完全相同, 否则 (由鸽巢原理) 矩阵某列一定全为 0, 与  $P$  作为自同构的单性矛盾. 因此  $P$  的矩阵表示是一个置换矩阵, 即  $P$  由一置换诱导.

# DFT 的唯一性

## 推论 2.2

设  $f$  是任一  $R$  上的  $n$  点 DFT, 则任何  $R$  上的  $n$  点 DFT  $g$  都具有形式  $g = P_{\sigma}f$ , 这里  $f$  是一事先固定的  $n$  点 DFT.

作为推论,  $n$  点 DFT 共有  $n!$  种. 这一结果的显著性在于, 只要不计求值得到的  $n$  个点值在  $R^n$  上的排列顺序, DFT 是唯一满足卷积性质的可逆线性映射.

## ① 1. 从 Fourier 变换到 DFT

## ② 2. DFT 与多项式环

- 2.1 引例： $\mathbb{C}[x]$ 、求值插值与复数域 DFT
- 2.2 整环上的推广
- 2.3 唯一性的讨论

## ③ 3. DFT 与矩阵代数



## 第二个视角：矩阵代数

我们建立了

$$R[x]/(m(x)) \xrightarrow{\bar{\varphi}} R^n \curvearrowright^{P_\sigma}$$

图 3

这一交换图可以继续扩展. 将视角从多项式环转向矩阵代数, 我们将看到, DFT 不仅是多项式环上的求值插值, 更体现为矩阵代数上的相似对角化.

简单起见, 下面只考察代数闭域的情况, 并用域的常用记号  $K$  替代  $R$ .

# 相似对角化

设  $C$  是域  $K$  上的  $n$  阶可对角化矩阵, 特征值两两不同. 设其特征多项式 (或最小多项式) 为  $m(x)$ ,  $\Lambda$  为其对角化得到的矩阵.  $K[C]$  和  $K[\Lambda]$  分别是矩阵  $C$  和  $\Lambda$  在  $K^{n \times n}$  上生成的代数.

$$\begin{array}{ccc} K[x]/(m(x)) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & K^n \quad \curvearrowright^{P_\sigma} \\ \downarrow \text{?} & & \downarrow \text{diag} \\ K[C] & \xrightarrow{\text{diagonalization}} & K[\Lambda] \end{array}$$

图 4

对角化  $C$  的矩阵也同时对角化了  $K[C]$  中的任意矩阵. 若设这一对角化矩阵为  $F$ , 则  $A \mapsto F^{-1}AF$  便规定了一个  $K[C] \rightarrow K[\Lambda]$  的代数同构.  $K^n$  与  $K[\Lambda]$  的代数同构是平凡的. 下面来建立  $K[x]/m(x)$  与  $K[C]$  间的联系.

### 命题 3.1

设  $C$  是域  $K$  上的  $n$  阶矩阵,  $m(x)$  是其最小多项式, 则  $K[x]/m(x)$  与  $K[C]$  代数同构.

仍然考察  $K[x] \rightarrow K[C]$  自然的“代入”  $\psi: f \mapsto f(C)$ .  $C$  的全体零化多项式恰为  $m(x)$  生成的  $K[x]$  上的理想, 因此  $\text{Ker } \psi = (m(x))$ .  $\psi$  的满射性平凡. 用第一同构定理就得到结论.

$$\begin{array}{ccc} K[x] & \xrightarrow{\psi} & K[C] \\ \downarrow & \searrow \bar{\psi} & \\ K[x]/(m(x)) & & \end{array}$$

图 5: 命题 3.1 证明示意图

# 友矩阵

为显式刻画上述对角化过程，我们选取一类特殊的矩阵<sup>2</sup>作为  $C$  进行研究：

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

$C$  被称为首一多项式  $m(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0$  的友矩阵 (companion matrix).

- 直接计算， $C$  的特征多项式恰为  $m(x)$ .
- 直接验证， $(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})^T$  是其特征值  $\lambda$  的一个特征向量.

<sup>2</sup>这类矩阵在高阶常系数线性 ODE 和常系数齐次线性递推中也有重要应用.

# 友矩阵的最小多项式

## 命题 3.2

$C$  的最小多项式也恰为  $m(x)$ . 等价地, 友矩阵的特征多项式与最小多项式相同.

等价地, 我们研究  $C^T$  的最小多项式. 注意到如下事实:

$$C^T \mathbf{e}_i = \begin{cases} \mathbf{e}_{i+1} & i = 0, 1, \dots, n-2 \\ -\sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathbf{e}_k & i = n-1 \end{cases}$$

考察任意不超过  $n-1$  次的  $C^T$  的零化多项式  $f(x) := \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ , 有

$$\mathbf{0} = f(C^T) \mathbf{e}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (C^T)^k \mathbf{e}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathbf{e}_k$$

因此  $a_k = 0$  对所有  $k$  成立, 即  $f = 0$ . 这说明  $C^T$  的 (非零) 零化多项式次数至少为  $n$ . 再用零化多项式和最小多项式的整除关系就得到结论.

上述命题的逆命题在相似意义下成立.

### 命题 3.3

若矩阵的特征多项式与最小多项式相同, 则它与其特征多项式对应的友矩阵相似.

可在 Jordan 标准型下理解. 此时每个特征值对应的 Jordan 块有且只有一个.

当友矩阵  $C$  可对角化时, 其最小多项式可分解为不同一次因式的乘积. 又其最小多项式与特征多项式相同, 故其必有  $n$  个两两不同的特征值  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ . 结合上述命题可以看到, 我们特殊地取  $C$  为友矩阵做研究是不失一般性的.

# 友矩阵对角化的显式表达

前面已经得到友矩阵特征向量的形式, 因此 Vandermonde 矩阵

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^{n-1} & \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

正是将  $C$  对角化的矩阵.

$$F^{-1}CF = \Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$$

注意到  $K[C]$  也被对角化  $C$  的矩阵同时对角化, 故  $A \mapsto F^{-1}AF$  确为  $K[C] \rightarrow K[\Lambda]$  的代数同构, 与先前的关于对角化的讨论结果一致.

# 循环矩阵的对角化

特别地，若取

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

它是基本循环矩阵，对应最小多项式  $m(x) = x^n - 1$ .  $C$  生成的代数  $K[C]$  即  $K^{n \times n}$  上的全体循环矩阵. 此时 DFT 体现为利用 DFT 矩阵

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

对循环矩阵进行对角化的过程.



# 结语

以刻画 DFT 的卷积性质为目标, 以代数同构为构造手段, 我们为理解 DFT 的代数含义提供了两个视角:

- DFT 是多项式商环上的多点求值插值
- DFT 是矩阵代数上的相似对角化

可见 DFT 背后的代数理论非常丰富, 不失为联系起本科阶段代数课程的有趣实例, 亦体现出代数工具与视角在工程实践中的强大效用.

$$\begin{array}{ccc} K[x]/(m(x)) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & K^n \curvearrowright^{P_\sigma} \\ \downarrow \bar{\psi} & & \downarrow \text{diag} \\ K[C] & \xrightarrow{\text{diagonalization}} & K[\Lambda] \end{array}$$

图 6

- [AB75] R.C. Agarwal and C.S. Burrus. “Number theoretic transforms to implement fast digital convolution”. In: *Proceedings of the IEEE* 63.4 (Apr. 1975), pp. 550–560. ISSN: 1558-2256. DOI: [10.1109/PROC.1975.9791](https://doi.org/10.1109/PROC.1975.9791).
- [Ami16] Emmanuel Amiot. *Music Through Fourier Space*. Computational Music Science. Cham: Springer International Publishing, 2016. ISBN: 978-3-319-45580-8 978-3-319-45581-5. DOI: [10.1007/978-3-319-45581-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-45581-5).
- [BR23] Isabelle Baraquin and Nicolas Ratier. “Uniqueness of the discrete Fourier transform”. In: *Signal Processing* 209 (Aug. 2023), p. 109041. ISSN: 0165-1684. DOI: [10.1016/j.sigpro.2023.109041](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2023.109041).

- [Für09] Martin Fürer. “Faster Integer Multiplication”. In: *SIAM Journal on Computing* 39.3 (Jan. 2009), pp. 979–1005. ISSN: 0097-5397. DOI: [10.1137/070711761](https://doi.org/10.1137/070711761).
- [Nic71] Peter J. Nicholson. “Algebraic theory of finite fourier transforms”. In: *Journal of Computer and System Sciences* 5.5 (Oct. 1971), pp. 524–547. ISSN: 0022-0000. DOI: [10.1016/S0022-0000\(71\)80014-4](https://doi.org/10.1016/S0022-0000(71)80014-4).