

# 算法 & 数学碎碎念

sun123zxy

2023-06-21\*

## 摘要

现场赛公式模板库，亦可作为小而精的总结性学习材料参考。无需单独成文或暂不完善的内容会放在这里。

## 目录

<b>1 数论</b>	<b>2</b>
1.1 ExGCD . . . . .	2
1.2 CRT . . . . .	3
1.3 BSGS . . . . .	3
1.4 Miller-Rabin 【TODO】 . . . . .	3
1.5 Pollard-Rho 【TODO】 . . . . .	3
1.6 原根、Euler 定理等 . . . . .	3
1.7 Lucas 定理 . . . . .	4
1.8 Legendre 公式和 Kummer 定理 . . . . .	4
1.9 扩展 Euler 定理 . . . . .	5
1.10 Lagrange 定理 . . . . .	5
1.11 Wilson 定理 . . . . .	5
1.12 线性预处理 . . . . .	6
<b>2 积性函数</b>	<b>6</b>
2.1 整除分块 . . . . .	6
2.2 杜教筛 . . . . .	7
2.3 杂式 . . . . .	8
<b>3 组合</b>	<b>8</b>
3.1 容斥 / 二项式反演 . . . . .	8
3.2 球盒问题 . . . . .	10
3.3 第二类 Stirling 数 . . . . .	11
3.4 分拆数 【TODO】 . . . . .	13
3.5 背包计数 . . . . .	13
3.6 各种图计数 . . . . .	14

\*最后更新于 2025-02-21.

3.7 矩阵树定理 . . . . .	16
3.8 Polya 计数 . . . . .	18
3.9 杂数选提 . . . . .	18
3.10 代数组合【TODO】 . . . . .	19
<b>4 多项式</b>	<b>19</b>
4.1 通用 . . . . .	19
4.2 FFT / FNTT / 卷积 . . . . .	19
4.3 多项式方程求解 (Newton 迭代法)【TODO】 . . . . .	20
4.4 多项式求逆 . . . . .	20
4.5 多项式开方【TODO】 . . . . .	21
4.6 多项式 ln . . . . .	22
4.7 多项式 exp【TODO】 . . . . .	22
4.8 多项式快速幂 . . . . .	22
<b>5 集合幂级数【TODO】</b>	<b>23</b>
<b>6 矩阵</b>	<b>23</b>
6.1 矩阵乘法 . . . . .	23
6.2 矩阵快速幂 . . . . .	23
6.3 行列式 . . . . .	23
<b>7 字符串 / 自动机</b>	<b>23</b>
<b>8 图论【TODO】</b>	<b>23</b>
8.1 最短路 . . . . .	23
8.2 强连通分量 . . . . .	23
8.3 网络流 . . . . .	23
<b>9 杂项</b>	<b>23</b>
9.1 表 . . . . .	23
9.2 对拍 . . . . .	25
9.3 模板 . . . . .	26

前半部分主要为公式、推导、证明等速成提纲，大部分实现、模板、表格放在文末。

# 1 数论

## 1.1 ExGCD

**定理 1.1.1 (ExGCD)** 给定线性方程组  $ax + by = \gcd(a, b)$ ，其解可递归地由下式求得

$$ay_1 + b \left( x_1 - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor y_1 \right) = \gcd(b, a \bmod b)$$

其中  $x_1, y_1$  是  $bx + (a \bmod b)y = \gcd(b, a \bmod b)$  的一组解。

## 1.2 CRT

**定理 1.2.1 (CRT)** 给定  $n$  个同余方程

$$x \equiv a_i \pmod{m_i} \quad (i = 1, \dots, n)$$

其中各  $m_i$  两两互质，则上式等价于

$$x \equiv \sum_{i=1}^n a_i M_i \text{inv}_{m_i}(M_i) \pmod{M}$$

其中  $M = \prod_{i=1}^n m_i$ ,  $M_i = \frac{M}{m_i}$ .

注记

$$M_i \text{inv}_{m_i}(M_i) \pmod{m_j} = [i = j]$$

## ExCRT

对一般的情况，考虑合并两个同余方程。给定 2 个同余方程

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

考虑化为不定方程形式

$$x = k_1 m_1 + a_1$$

$$x = k_2 m_2 + a_2$$

合并得到

$$k_1 m_1 + a_1 = k_2 m_2 + a_2$$

即

$$k_1 m_1 - k_2 m_2 = a_2 - a_1$$

此即关于  $k_1, k_2$  的不定方程。若  $\gcd(m_1, m_2) \mid a_2 - a_1$ ，则可应用 ExGCD 求得方程的一组解，带回即得

$$x \equiv k_1 m_1 + a_1 \pmod{\text{lcm}(m_1, m_2)}$$

否则同余方程组无解。

注记 若一组同余方程两两可合并，则全部均可合并。当判断大规模同余方程组是否有解时可能用到。

## 1.3 BSGS

求  $a^x \equiv b \pmod{m}$  的一个特解，其中  $\gcd(a, m) = 1$ 。

实质是非常暴力的根号分治。根据 Euler 定理，只需检测连续  $\varphi(m)$  个  $x$  就可判定是否有解。令  $x = q \lceil \sqrt{m} \rceil - r$ ，其中  $q, r \in [1, \lceil \sqrt{m} \rceil]$ ，于是  $x \in [0, \lceil \sqrt{m} \rceil^2)$ 。代入原方程移项即得  $a^{q \lceil \sqrt{m} \rceil} \equiv b a^r \pmod{m}$ ，右边使用 map 提前存下即可。时间复杂度  $O(\sqrt{m})$ 。

## 1.4 Miller-Rabin 【TODO】

## 1.5 Pollard-Rho 【TODO】

## 1.6 原根、Euler 定理等

见 FFT/NTT 讲稿。

### 1.7 Lucas 定理

**定理 1.7.1 (Lucas 定理)**

$$\binom{n}{m} \equiv \prod_i \binom{n_i}{m_i} \equiv \binom{\lfloor n/p \rfloor}{\lfloor m/p \rfloor} \binom{n \bmod p}{n \bmod p} \pmod{p}$$

其中  $p$  是质数,  $n_i$  和  $m_i$  是  $n$  和  $m$  的  $p$  进制表示下的各数位.

证明的要点有二: 一是  $\binom{p^i}{m} \bmod p = [m = 0 \wedge m = p^i]$ , 即  $(1+x)^{p^i} \equiv 1 + x^{p^i} \pmod{p}$ ; 二是 Vandermonde 卷积按  $p$  进制拆分. 生成函数食用风味更佳.

参考:

- Lucas's theorem - Wikipedia
- 卢卡斯定理 - OI Wiki

### 1.8 Legendre 公式和 Kummer 定理

**定理 1.8.1 (Legendre 公式)**

$$\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \frac{n - S_p(n)}{p - 1}$$

其中  $p$  是质数,  $S_p(n)$  是  $n$  在  $p$  进制下各数位数字之和.  $\nu_p(n!)$  为  $n!$  中质因子  $p$  的含量, 即所谓的  $p$ -adic valuation of  $n!$ .

左侧显然, 按和式统计贡献即证. 对于右侧,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} n_{k+i} p^k \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} n_j \sum_{k=0}^{j-1} p^k \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} n_j \frac{p^j - 1}{p - 1} \\ &= \frac{1}{p - 1} \left( \sum_{j=1}^{+\infty} n_j p^j - \sum_{j=1}^{+\infty} n_j \right) \\ &= \frac{1}{p - 1} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} n_j p^j - \sum_{j=0}^{+\infty} n_j \right) \\ &= \frac{n - S_p(n)}{p - 1} \end{aligned}$$

**定理 1.8.2 (Kummer 定理)**  $\binom{a+b}{a}$  中质因子  $p$  的含量等于  $p$  进制下加法  $a+b$  发生的进位次数, 也可表示为

$$\nu_p \left( \binom{a+b}{a} \right) = \frac{S_p(a) + S_p(b) - S_p(a+b)}{p - 1}$$

大力使用定理 1.8.1 考察  $\binom{a+b}{a}$  的含  $p$  量:

$$\begin{aligned} \nu_p \left( \binom{a+b}{a} \right) &= \nu_p((a+b)! - \nu_p(a!) - \nu_p(b!)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left\lfloor \frac{a+b}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{b}{p^k} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

该公式恰好对  $a + b$  在  $p$  进制计算过程中每一位发生的进位进行了求和. 定理的  $S_p$  形式容易通过定理 1.8.1 的另一形式得到.

研究该定理  $a + b = p^m$  的特例. 用下降阶乘幂形式考虑二项式系数中  $k$  递增的过程, 注意到  $\nu_p(p^m - k) = \nu_p(k)$ , 可以发现分子新增的  $n - k + 1$  和分母新增的  $k$  恰好错一位, 于是

$$\nu_p\left(\binom{p^m}{k}\right) = m - \nu_p(k), \quad k = 1, 2, \dots, p^m$$

作为 Kummer 定理和上述特殊情况的推论, 我们有

$$\gcd_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = \begin{cases} p & n = p^m \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中  $p$  是某一质数. 这符合 Kummer 定理的直观描述. 得到  $p^m$  的加法必然会出现进位, 在加法  $p^{m-1} + (p-1)p^{m-1}$  时达到最小进位次数 1; 否则在任一质数进制  $p$  下, 都可以取加法  $\text{lowbit}_p(n) + (n - \text{lowbit}_p(n))$  使得不发生进位.

参考:

- Legendre's formula - Wikipedia
- Kummer's theorem - Wikipedia

## 1.9 扩展 Euler 定理

$$a^b \equiv a^{b \bmod \varphi(m)+\varphi(m)} \pmod{m}$$

进入循环所需步骤其实很少, 一定小于  $\varphi(m)$ . (疑似量级在  $\log m$  以下, 存疑, 见 FFT 讲稿)

## 1.10 Lagrange 定理

**定理 1.10.1 (Lagrange 定理)** 设  $p$  是质数,  $A(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ . 同余方程  $A(x) \equiv 0 \pmod{p}$  只有至多  $\deg A(x)$  个模  $p$  意义下不同的整数解, 除非这多项式的系数在模  $p$  意义下全为零.

这是域上的多项式理论在模  $p$  整数域上的应用.

## 1.11 Wilson 定理

**定理 1.11.1 (Wilson 定理)** 对质数  $p$ ,

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

$p = 2$  容易特判证明. 现在只考虑  $p$  是奇质数的情况.

$(p-1)!$  中, 互为逆元的数相互抵消, 仅剩下逆元为自身的数  $\pm 1$ , 立得上述定理.

另一种证法注意到  $x^{p-1} - 1 = \prod_{k=1}^{p-1} (x - k)$ . 这是因为 Fermat 小定理指出 1 至  $p-1$  的所有数的  $p-1$  次幂均为 1, 而 Lagrange 定理又保证了多项式点值到系数映射的唯一性. 随后代入  $x = 0$  立得结论.

参见 Wilson's theorem - Wikipedia.

### 1.12 线性预处理

#### 线性求逆元

现欲求出  $a$  模质数  $p$  意义下的逆元  $a^{-1}$ . 用  $a$  对  $p$  做带余除法,  $p = qa + r$ , 于是  $-qa \equiv r \pmod{p}$ . 两侧同时乘  $r$  的逆元  $r^{-1}$  得  $-qr^{-1}a \equiv 1 \pmod{p}$ , 故

$$a^{-1} = -qr^{-1} = -\left\lfloor \frac{p}{a} \right\rfloor \cdot (p \bmod a)^{-1}$$

#### 线性阶乘逆

$$\frac{1}{n!} = (n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)!}$$

## 2 积性函数

### 2.1 整除分块

```
ll ans=0;
for(ll l=1,r,d;l<=N;l=r+1){
    d=N/l, r=N/d;
    ans+=(S_mu(r)-S_mu(l-1))*d;
}
```

此  $O(\sqrt{n})$  较满, 极大劣于因子个数的  $O(\sqrt{n})$ .

另有变种枚举  $\lfloor \frac{n}{d^2} \rfloor$  的整除分块如下, 复杂度为  $O(n^{1/3})$ .

```
ll ans=0;
for(ll l=1,r,d;l*l<=N;l=r+1){
    d=N/(l*l),r=sqrt(N/d);
    ans+=(S_mu(r)-S_mu(l-1))*d;
}
```

#### 上取整整除分块

```
ll cdiv(ll a,ll b){ //ceil(a/b)
    return (a<0||a%b==0)?a/b:a/b+1;
}
ll ans=0;
for(ll l,r=N,d;r>=1;r=l-1){
    d=cdiv(N,r), l=cdiv(N,d);
    ans+=(S_mu(r)-S_mu(l-1))*d;
}
```

## 2.2 杜教筛

设  $f$  为一数论函数，我们希望快速求得其前缀和  $\hat{f}(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$ . 考虑数论函数  $g$  和  $h = g * f$ ,

$$h(n) = \sum_{d|n} g(d)f\left(\frac{n}{d}\right)$$

两端做前缀和得

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \sum_{i=1}^n h(i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} g(d)f\left(\frac{i}{d}\right) \\ &= \sum_{d=1}^n g(d) \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} f(i) \\ &= \sum_{d=1}^n g(d)\hat{f}\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right) \\ &= g(1)\hat{f}(n) + \sum_{d=2}^n g(d)\hat{f}\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right) \end{aligned}$$

因此

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{g(1)} \left( \hat{h}(n) - \sum_{d=2}^n g(d)\hat{f}\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right) \right)$$

故若  $g, h$  的前缀和可  $O(1)$  算得，根据上式整除分块即可递归地计算出  $f$  的前缀和。预处理前  $O(n^{2/3})$  项并记忆化得到的时间复杂度为  $O(n^{2/3})$ . 外层整除分块不会增加时间复杂度。

关于时间复杂度证明可参考 sun123zxy's blog - OI 数论中的上界估计与时间复杂度证明 # 杜教筛.

$$\begin{aligned} f &= \mu, g = I, h = \varepsilon \\ f &= \varphi, g = I, h = \text{id} \\ f &= \text{id}^k \mu, g = \text{id}^k, h = \varepsilon \\ f &= \text{id}^k \varphi, g = \text{id}^k, h = \text{id}^{k+1} \end{aligned}$$

**注记** 杜教筛的这种化法事实上也是 Eratosthenes 筛法的应用。一般的我们有

$$\sum_{d=1}^n f(d)\hat{g}\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} f(d)g\left(\frac{i}{d}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{d|i} f\left(\frac{i}{d}\right)g(d) = \sum_{d=1}^n g(d)\hat{f}\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right)$$

```
unordered_map<ll, ll> s_mu;
ll s_mu(ll n){
    if(n<=MXG){
        return mu[n]; // already accumulated
    }else if(s_mu.count(n)){
        return s_mu[n];
    }
    ll ans=0;
    for(ll l=2,r,d;l<=n;l=r+1){
        ans+=l*f(l);
        r+=l;
        d=l;
        while(r<=n&&d<=r){
            ans+=d*f(d);
            r+=d;
            d+=l;
        }
    }
    return ans;
}
```

```

d=n/l,r=n/d;
ans+=S_mu(d)*(r-l+1);
}
return s_mu[n]=1-ans;
}

```

### 2.3 杂式

无平方因子数计数:

$$\sum_{i=1}^n \mu^2(i) = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(i) \left\lfloor \frac{n}{i^2} \right\rfloor$$

约数个数函数的一个性质:

$$d(ab) = \sum_{x|a} \sum_{y|b} [\gcd(x, y) = 1]$$

$$d(abc) = \sum_{x|a} \sum_{y|b} \sum_{z|c} [\gcd(x, y) = 1][\gcd(y, z) = 1][\gcd(x, z) = 1]$$

广义约数个数函数性质扩展:

$$\sigma_k(ab) = \sum_{x|a} \sum_{y|b} [\gcd(x, y) = 1] \left(x \frac{b}{y}\right)^k = \sum_{x|a} \sum_{y|b} [\gcd(x, \frac{b}{y}) = 1] (xy)^k$$

$$\sigma_k(abc) = \sum_{x|a} \sum_{y|b} \sum_{z|c} [\gcd(x, \frac{b}{y}) = 1][\gcd(y, \frac{c}{z}) = 1][\gcd(x, \frac{c}{z}) = 1] (xyz)^k$$

## 3 组合

### 3.1 容斥 / 二项式反演

形式一

容斥原理的第一种形式给出了“子集和变换”的逆变换.

**定理 3.1.1 (容斥原理, 形式一, 集合)**

$$g(S) = \sum_{T \subset S} f(T) \iff f(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|S|-|T|} g(T)$$

证明的关键是  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = [n=0]$ .

**定理 3.1.2 (容斥原理, 形式一, 二项式反演)**

$$g(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(k) \iff f(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k)$$

若设  $F(x)$  和  $G(x)$  分别为  $f(n)$  和  $g(n)$  的指数生成函数 (EGF), 则结论可等价地表示为

$$G(x) = e^x F(x) \iff F(x) = e^{-x} G(x)$$

生成函数的形式使我们可在  $O(n \log n)$  的优秀时间复杂度之内在  $f(n)$  和  $g(n)$  间做出变换.

## 形式二

形式一的补集形式，给出了全集  $U$  下“超集和变换”的逆变换.

**定理 3.1.3 (容斥原理, 形式二, 集合)**

$$g(S) = \sum_{S \subset T \subset U} f(T) \iff f(S) = \sum_{S \subset T \subset U} (-1)^{|T|-|S|} g(T)$$

**定理 3.1.4 (容斥原理, 形式二, 二项式反演)**

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-n} \binom{N-n}{k} f(n+k) \iff f(n) = \sum_{k=0}^{N-n} (-1)^k \binom{N-n}{k} g(n+k)$$

## 应用

**例 3.1.5 (不太常见的“容斥原理”)** 满足全部性质的元素数量可容斥地通过下式计算

$$\begin{aligned} \text{card} \left( \bigcap_{i \in U} A_i \right) &= \sum_{k=0}^{|U|} (-1)^{|U|-k} \sum_{|S|=k} \text{card} \left( A - \bigcup_{i \in U-S} A_i \right) \\ &= \sum_{k=0}^{|U|} (-1)^{|U|-k} \sum_{|S|=k} \text{card} \left( \bigcup_{i \in S} A_i \right) \\ &= \sum_{k=0}^{|U|} (-1)^{|U|-k} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \text{card} (A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}) \end{aligned}$$

其中  $A$  代表全集,  $A_i$  代表满足第  $i$  个性质的元素构成的集合,  $U$  是非空有限的性质指标集.

**证明** 令  $f(S)$  为恰好只满足  $S$  中各性质的元素数量,  $g(S)$  为至多只满足  $S$  中各性质的元素数量, 即

$$\begin{aligned} f(S) &:= \text{card} \left( \left( A \cap \bigcap_{i \in S} A_i \right) - \bigcup_{i \in U-S} A_i \right) \\ g(S) &:= \text{card} \left( A - \bigcup_{i \in U-S} A_i \right) = \text{card} \left( A - \bigcup_{i \in U} A_i \right) + \text{card} \left( \bigcup_{i \in S} A_i \right) \end{aligned}$$

取  $S = U$  代入定理 3.1.1 右侧就得到结论第一行的等式. 继续化简

$$\begin{aligned} \text{card} \left( \bigcap_{i \in U} A_i \right) &= \sum_{k=0}^{|U|} (-1)^{|U|-k} \sum_{|S|=k} \text{card} \left( A - \bigcup_{i \in U-S} A_i \right) \\ &= \sum_{k=0}^{|U|} (-1)^{|U|-k} \sum_{|S|=k} \left( \text{card} \left( A - \bigcup_{i \in U} A_i \right) + \text{card} \left( \bigcup_{i \in S} A_i \right) \right) \\ &= \text{card} \left( A - \bigcup_{i \in U} A_i \right) \sum_{k=0}^{|U|} (-1)^{|U|-k} \binom{|U|}{k} + \sum_{k=0}^{|U|} (-1)^{|U|-k} \sum_{|S|=k} \text{card} \left( \bigcup_{i \in S} A_i \right) \end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{k=0}^{|U|} (-1)^{|U|-k} \binom{|U|}{k} = [|U| = 0]$$

而  $U \neq \emptyset$ , 故上式左项为 0, 即得结论式第二行.  $\square$

**例 3.1.6 (有点常见的“容斥原理”)** 不满足任何性质的元素数量可容斥地通过下式计算

$$\begin{aligned}\text{card} \left( A - \bigcup_{i \in U} A_i \right) &= \sum_{k=0}^{|U|} (-1)^k \sum_{|S|=k} \text{card} \left( A \cap \bigcap_{i \in S} A_i \right) \\ &= \text{card } A + \sum_{k=1}^{|U|} (-1)^k \sum_{|S|=k} \text{card} \left( \bigcap_{i \in S} A_i \right) \\ &= \text{card } A + \sum_{k=1}^{|U|} (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} \text{card} (A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})\end{aligned}$$

其中  $A$  代表全集,  $A_i$  代表满足第  $i$  个性质的元素构成的集合,  $U$  是非空有限的性质指标集.

**证明** 令  $f(S)$  为恰好只满足  $S$  中各性质的元素数量,  $g(S)$  为至少满足  $S$  中各性质的元素数量, 即

$$\begin{aligned}f(S) &:= \text{card} \left( \left( A \cap \bigcap_{i \in S} A_i \right) - \bigcup_{i \in U-S} A_i \right) \\ g(S) &:= \text{card} \left( A \cap \bigcap_{i \in S} A_i \right) = \begin{cases} \text{card } A & S = \emptyset \\ \text{card} (\bigcap_{i \in S} A_i) & \text{otherwise} \end{cases}\end{aligned}$$

取  $S = \emptyset$  代入定理 3.1.3 右侧就得到结论.  $\square$

**习题 3.1.7 (错排)** 计算  $n$  元错排的数量.

**解** 设  $A_i$  表示第  $i$  个位置配对正确的置换构成的集合. 直接应用例 3.1.6 立得

$$\begin{aligned}\text{card} \left( A - \bigcup_{i \in U} A_i \right) &= \sum_{k=0}^{|U|} (-1)^k \sum_{|S|=k} \text{card} \left( A \cap \bigcap_{i \in S} A_i \right) \\ &= \sum_{k=0}^{|U|} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! \\ &= n! \sum_{k=0}^{|U|} (-1)^k \frac{1}{k!} \sim \frac{n!}{e}\end{aligned}$$

这说明随机取一排列, 其错排的概率趋近于  $\frac{1}{e}$ .

**例 3.1.8 (常见的“容斥原理”)** 满足至少 1 个性质的元素数量可容斥地通过下式计算

$$\begin{aligned}\text{card} \left( \bigcup_{i \in U} A_i \right) &= \sum_{k=1}^{|U|} (-1)^{k-1} \sum_{|S|=k} \text{card} \left( \bigcap_{i \in S} A_i \right) \\ &= \sum_{k=1}^{|U|} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} \text{card} (A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})\end{aligned}$$

其中  $A_i$  代表满足第  $i$  个性质的元素构成的集合,  $i \in U$ .

**证明** 对例 3.1.6 做简单移项即得.  $\square$

## 3.2 球盒问题

组合数学的万恶之源.

以后我们约定:

- 形如  $\text{BB}_{1,1,0}$  的记号表示代号 1, 1, 0 对应球盒问题的方案数;
- 形如  $\text{EGF}_n^{1,1,0}(x)$  代表代号 1, 1, 0 对应  $n$  球球盒问题的指数生成函数;
- 形如  $\text{EGF}_r^{1,1,0}(x)$  代表代号 1, 1, 0 对应  $r$  球球盒问题的指数生成函数;
- 普通生成函数  $\text{OGF}_r^{1,1,0}(x)$  同理.

在不至混淆的情况下，也可省略下标或上标上的代号.

### 通用性质

#### 命题 3.2.1 (非空盒数量不限制)

$$\begin{aligned}\text{BB}_{*,*/\Sigma,1}(n) &= \sum_{k=0}^n \text{BB}_{*,*,1}(n, k) \\ \text{EGF}^{*,*/\Sigma,1}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \text{EGF}_{r=k}^{*,*,1}(x)\end{aligned}$$

#### 命题 3.2.2 (有标号盒空置)

$$\begin{aligned}\text{BB}_{*,1,0}(n, r) &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \text{BB}_{*,1,1}(n, k) \\ \text{EGF}_n^{*,1,0}(x) &= e^x \text{EGF}_n^{*,1,1}(x)\end{aligned}$$

对有标号盒的二项式反演. 在 1, 1, 0-球盒问题中，上式体现为第二类 Stirling 数的通项公式；在 0, 1, 0-球盒问题中，上式体现为 Vandermonde 卷积.

#### 命题 3.2.3 (无标号盒空置)

$$\begin{aligned}\text{BB}_{*,0,0}(n, r) &= \sum_{k=0}^r \text{BB}_{*,0,1}(n, k) \\ \text{OGF}_n^{*,0,0}(x) &= \frac{1}{1-x} \text{OGF}_n^{*,0,1}(x)\end{aligned}$$

对无标号盒，直接求和即可.

### 3.3 第二类 Stirling 数

第二类 Stirling 数的组合定义即 1, 0, 1-球盒问题的方案数  $\text{BB}_{1,0,1}(n, r) = \left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\}$ ，亦作将  $n$  个元素划分入  $r$  个集合的方案数.

### 递推

由组合意义，考虑在已有  $n$  个球时加入新球，此时面临将其放入原有的  $r$  个集合或新开辟一个集合的两种选择，由此得递推式

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ r \end{matrix} \right\} = r \left\{ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ r-1 \end{matrix} \right\}$$

边界在

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = [n=0], \quad \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1$$

**第二类 Stirling 数同行计算:**  $\text{OGF}_n^{1,0,1}(x)$  或  $\text{EGF}_n^{1,1,1}(x)$

来考虑用两种方法得到 1, 1, 1-球盒问题的方案数.

我们的第一种方法注意到, 上述问题的方案数恰好是 1, 0, 1-球盒问题方案数  $r!$  倍——这是对后者的盒进行标号的结果. 我们得到

$$\text{BB}_{1,1,1}(n, r) = r! \text{BB}_{1,0,1}(n, r) = r! \begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}$$

第二种方法考虑用容斥非空盒的方法与 1, 1, 0-球盒问题  $\text{BB}_{1,1,0}(n, r) = r^n$  建立联系. 我们有

$$\text{BB}_{1,1,0}(n, r) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \text{BB}_{1,1,1}(n, k)$$

即

$$r^n = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} k! \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

二项式反演即得

$$r! \begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} k^n$$

即

$$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^r \frac{(-1)^{r-k} k^n}{k! (r-k)!} = \sum_{k=0}^r \frac{k^n}{k!} \cdot \frac{(-1)^{r-k}}{(r-k)!}$$

这正是第二类 Stirling 数的通项公式. 注意到其具有卷积的形式, 由此可快速计算出同一行的第二类 Stirling 数. 事实上, 二项式反演的生成函数形式已向我们道尽一切

$$\text{OGF}_n^{1,0,1}(x) = \text{EGF}_n^{1,1,1}(x) = e^{-x} \text{EGF}_n^{1,1,0}(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{+\infty} k^n \frac{x^k}{k!}$$

**第二类 Stirling 数同列计算:**  $\text{EGF}_r^{1,0,1}(x)$ ,  $\text{EGF}_r^{1,1,0}(x)$  与  $\text{EGF}^{1,0/\Sigma,1}(x)$

为快速计算同一列的第二类 Stirling 数, 考虑用生成函数的思路构造 1, 1, 0-球盒问题和 1, 0, 1-球盒问题的方案数. 前者将大小为  $n$  的有标号集合划分为  $r$  个有标号等价类, 这相当于有序拼接  $r$  个非空有标号集合; 后者则是前者除掉  $r!$  消序的版本. 写成生成函数即

$$\begin{aligned} \text{EGF}_r^{1,1,0}(x) &= (e^x - 1)^r \\ \text{EGF}_r^{1,0,1}(x) &= \frac{(e^x - 1)^r}{r!} \end{aligned} \tag{1}$$

## Bell 数

Bell 数  $B(n)$  的组合定义即 1, 0/ $\Sigma$ , 1-球盒问题的方案数  $\text{BB}_{1,0/\Sigma,1}$ , 亦可描述为  $n$  元集合上等价关系 (划分) 的数量.

注意到 1, 0, 1-球盒问题和 1, 0/ $\Sigma$ , 1-球盒问题的关系

$$\text{BB}_{1,0/\Sigma,1}(n) = \sum_{r=0}^n \text{BB}_{1,0,1}(n, r) = \sum_{r=0}^{+\infty} \text{BB}_{1,0,1}(n, r)$$

我们首先有

$$B(n) = \sum_{r=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}$$

其次，根据式 1 写出此关系的 EGF 形式就有

$$\text{EGF}^{1,0/\Sigma,1}(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} \text{EGF}_r^{1,0,1}(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(e^x - 1)^r}{r!} = e^{e^x - 1}$$

我们得到 Bell 数的可用于快速计算的 EGF.

**注记** 有标号集合的无序划分是指数型生成函数的一类重要应用. 例如, 有标号连通图计数可视为对有标号一般图的无序划分, 故有标号连通图的 EGF  $G(x)$  和有标号一般图的 EGF  $F(x)$  间有着  $e^{G(x)} = F(x)$  的关系.

Bell 数还有递推形式

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k)$$

边界  $B(0) = 1$ . 组合的解释是, 枚举第  $n+1$  个元素被放入的集合的大小, 再对除该集合之外的元素进行划分. 从指数生成函数的角度来看, 设  $B(n)$  的 EGF 为  $F(x)$ , 由 EGF 的移位性质和二项式反演的 EGF 形式, 上式等价于  $F'(x) = e^x F(x)$ , 解此微分方程也能得到 Bell 数的生成函数.

### 第一类 Stirling 数、Stirling 数与阶乘幂 【TODO】

更多参考:

- Stirling number - Wikipedia
- 斯特林数 - OI Wiki

### 3.4 分拆数 【TODO】

关于  $k$  部分拆数,

By taking conjugates, the number  $p_k(n)$  of partitions of  $n$  into exactly  $k$  parts is equal to the number of partitions of  $n$  in which the largest part has size  $k$ .

- Partition (number theory) - Wikipedia
- 分拆数 - OI Wiki
- 组合数学 (2) 分拆数 - 知乎

### 3.5 背包计数

通式:

$$\prod_{i=1}^n (1 + s_i x^{v_i})^{m_i} = \exp \sum_{i=1}^n m_i \ln(1 + s_i x^{v_i}) = \exp \sum_{i=1}^n m_i \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{s_i^k}{k} x^{kv_i}$$

其中  $v_i$  互不相同 (相同者体现在  $m_i$  上). 后者可以埃筛调和级数计算贡献 + 多项式  $\exp$  地在  $O(t \log t)$  (这里的  $t$  指我们所关心的体积上限) 内快速计算.

下面问题的 OGF 都可化归至通式, 从而  $O(t \log t)$  地得到计算.

设有  $n$  种可区分的物品, 体积分别为  $v_i$ . 当每种物品只有一件时, 方案数 OGF 为

$$\prod_{i=1}^n (1 + x^{v_i})$$

当每种物品有无限件时，方案数 OGF 为

$$\prod_{i=1}^n (1 + x^{v_i} + x^{2v_i} + \dots) = \prod_{i=1}^n (1 - x^{v_i})^{-1}$$

当每种物品分别有  $c_i$  件时，方案数 OGF 为

$$\prod_{i=1}^n (1 + x^{v_i} + x^{2v_i} + \dots + x^{c_i v_i}) = \prod_{i=1}^n \frac{1 - x^{(c_i+1)v_i}}{1 - x^{v_i}} = \prod_{i=1}^n (1 - x^{(c_i+1)v_i}) \prod_{i=1}^n (1 - x^{v_i})^{-1}$$

ex: 普通的最优化背包也有卷积视角的理解，见 Knapsack, Subset Sum and the  $(\max, +)$  Convolution - Codeforces.

### 3.6 各种图计数

**有（无）标号有（无）根树计数【TODO】**

**有标号 DAG 计数**

$$f_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} 2^{i(n-i)} f_{n-i}$$

思路是对 DAG 的入度为零的点做容斥。进一步推导可拆出卷积形式，再用类似分治 FFT 的生成函数方法可得封闭形式。

- Wikipedia
- OEIS
- OI-Wiki
- cjyyb 题解

**有标号偏序图计数**

问得好，但这是个著名的 open problem. 各种类型的偏序图计数参考 Partially ordered set - Wikipedia # Number of partial orders.

- Stack Exchange
- OEIS
- Erné, M., Stege, K. Counting finite posets and topologies. Order 8, 247–265 (1991) (内有研究历史综述)

**有标号连通图计数**

标准的有标号无序划分. EGF 是有标号一般图计数 EGF 的 ln.

**竞赛图**

强连通的竞赛图一定存在 Hamilton 回路 (归纳证明)；无环的竞赛图是全序图. 两者结合可推出竞赛图一定存在 Hamilton 路径. 同时，强连通竞赛图中存在所有大小的环路.

### 有标号划分为 $k$ 个全序图

Lah 数

$$L(n, k) = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}$$

思路是先  $n!$  排个大序，再无标号球入非空有标号桶，再除  $k!$  给桶消序。

生成函数的思路是，考虑非空全序计数的 EGF 为  $\frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$ ,  $k$  次有序拼接再消序即得

$$\sum_{n \geq k} L(n, k) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left( \frac{x}{1-x} \right)^k$$

更多信息参考 Wikipedia.

### 特殊 DAG 的拓扑序计数（有根树 / Young Tableaux）

对一般 DAG 上拓扑序计数，其本质上是偏序上线性扩张的计数问题，这被证明是 #P-complete 的问题（总之就是很困难）。

- How many topological orderings exist for a graph? - Mathematics Stack Exchange
- Topological sorting - Wikipedia # Relation to partial orders
- Linear extension - Wikipedia

一些具有较好性质的 DAG 的拓扑序计数问题具有较好的封闭形式。

**有根树** 对于外向树：

$$\frac{n!}{\prod_{u \in V} \text{size}(u)}$$

其中  $V$  是所有节点的集合， $n$  是树大小， $\text{size}(u)$  是以  $u$  为根的子树大小。

这里提供若干种理解或证明方法。

- 树形 DP 风格的归纳证明是可以的。
- 下面的链接中提供了一个有趣的组合理解。考虑依深度由叶到根递归，每次确定当前节点  $u$  对应子树内的相对顺序。在尚未要求  $u$  满足拓扑序（在其子树内排位第一）时，由于  $u$  的各子节点  $v$  对应子树内的相对顺序已经确定，故事实上只需确定  $u$  在其对应子树内的相对排位——这恰有  $\text{size}(u)$  种选择——故除掉此数消序以确保  $u$  在其子树内排位第一。

[Insight] Number of Topological Orderings of a Directed Tree - Codeforces

- 简化上述组合理解后得到的概率风格证明：每个节点在其对应子树中排位第一的概率恰为  $1/\text{size}(u)$ ，而这些事件相互独立。

题目常见要求对每个节点作为根节点求出方案数，换根 DP 即可。

注意到每个合法的外向树拓扑序 reverse 后立刻与内向树拓扑序形成一一对应，故内向树拓扑序计数与外向树相同。

**Young tableaux** 特定形状 Young tableau 的计数问题也是 DAG 拓扑序计数的一个特例. 对形状为  $\lambda$  (一个整数分拆) 的全体 Young tableau 计数, 我们有著名的钩长公式 (hook length formula):

$$\frac{n!}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h_\lambda(i,j)}$$

简单而并不平凡, 且与有根树拓扑序计数相似的公式似乎意味着类似的组合解释——其被称为 Knuth's heuristic argument. 可惜在 Young tableau 中, 相对顺序的确定并不相互独立, 故更严谨的论证还需多费些口舌 (详见 Wikipedia).

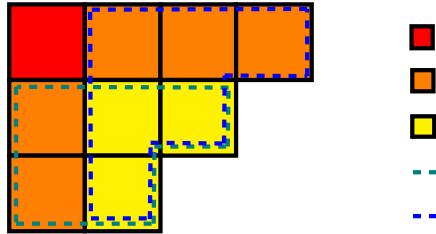


图 1: hook length formula 的组合直觉

### 无向图的色多项式 (chromatic polynomial) 和无环定向 (acyclic orientations)

色多项式是对图的  $k$ -colorings 的数量在  $k = 0, 1, \dots, n$  进行 Lagrange 插值后得到的多项式.  $k > n$  的  $k$ -colorings 的数量也可通过在色多项式的  $x = k$  处求值得到. 这一证明主要依赖所谓的 deletion-contraction 递推关系式.

对一般的图而言, 色多项式的大部分系数和求值问题都是“NP”相关的, 但在一些特殊的图上有好的形式:

- 完全图  $K_n$ :  $x^n$  (下降阶乘幂)
- 无边图  $\bar{K}_n$ :  $x^n$
- 链 / 树:  $P_n$ :  $x(x-1)^{n-1}$
- 环:  $(x-1)^n + (-1)^n(x-1)$

多个连通分量拼接时, 色多项式满足乘法性.

关于图的无环定向的方案数, Richard Stanley 在一篇 1973 年的论文中证明其恰为图的色多项式在  $-1$  处的取值.

- Chromatic Polynomial - from Wolfram MathWorld
- Chromatic polynomial - Wikipedia
- Orientation (graph theory) - Wikipedia
- Stanley, R. P. “Acyclic Orientations of Graphs.” Disc. Math. 5, 171-178, 1973.

### 3.7 矩阵树定理

#### 无向图的情形

对无向图, 度数矩阵  $D = \text{diag}\{\deg(i)\}$ , 邻接矩阵  $A$  定义为

$$A_{i,j} = \begin{cases} 0 & i = j \\ e(i,j) & i \neq j \end{cases}$$

其中  $e(i, j)$  表示点  $i$  到点  $j$  的边的数量 (对无向图,  $e(i, j) = e(j, i)$ ).

定义 Laplace 矩阵 (Kirchhoff 矩阵)  $L = D - A$ .

Laplace 矩阵有性质  $L = BB^T$ , 其中关联矩阵  $B$  按如下方式定义

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{node } i \text{ is the ID-smaller endpoint of edge } j \\ -1 & \text{node } i \text{ is the ID-larger endpoint of edge } j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

这里 1 与 -1 的引入完成了一种对边的“手动定向”, 其用途将在后文介绍.

**定理 3.7.1 (矩阵树定理, 无向图)**  $n$  点无向图的生成树的个数与该图的 Laplace 矩阵  $L$  的任意主子式的值相等. 其也与  $L$  所有  $n - 1$  个非零特征值乘积的  $\frac{1}{n}$  倍相等.

Laplace 矩阵同行的代数余子式均相等 (这性质由行和为 0 得到), 因此去掉任意一行一列均可得到正确的无向图生成树计数. 此外, 由于  $L = BB^T$  至少半正定,  $L$  的所有特征值非负.

证明的要点在于对  $L = BB^T$  的某个主子式 (一般选择去掉第一行第一列) 应用 Cauchy-Binet 公式, 随后说明行列式的组合意义中, 环的情况一定相互抵消. 关于特征值的结论可从特征多项式、各  $n - 1$  阶主子式与韦达定理的关系中得到 (依此方法能进一步得到有关  $k$ -生成森林的一些结论).

事实上, 去掉第  $i$  行第  $i$  列, 即是统计以  $i$  为根的根向生成树的数量. 先前定义关联矩阵  $B$  时“手动定向”, 是为了使换向过程中环的情况相互抵消, 只留下树的唯一一种情况. 当然, 因为是无向图, 这里树的朝向和根的具体位置并不重要.

### 有向图的情形

对有向图, 我们明确统计的对象为根向 (或叶向) 生成树的数量. 根向树形图与出度 Laplace 矩阵相关,  $L^{out} = D^{out} - A$ , 其中  $D^{out}$  是出度矩阵.

为体现有向图的要求, 出度 Laplace 矩阵对应的关联矩阵需要一些修改. 令矩阵  $B$  满足

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{node } i \text{ is the head of edge } j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

矩阵  $C$  满足

$$C_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{node } i \text{ is the head of edge } j \\ -1 & \text{node } i \text{ is the tail of edge } j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

则出度 Laplace 矩阵满足性质  $L^{out} = BC^T$ . 我们构造的矩阵  $B$  体现了对出边方向的要求, 在此基础上矩阵  $C$  进一步完成了“手动定向”的工作.

**定理 3.7.2 (矩阵树定理, 根向树形图)**  $n$  点有向图以  $i$  为根的生成根向树形图的数量与该图出度 Laplace 矩阵  $L^{out}$  去掉第  $i$  行第  $i$  列的  $n - 1$  阶主子式的值相等. 该有向图的所有生成根向树形图的数量也与  $L^{out}$  的所有  $n - 1$  个非零特征值的乘积相等.

由于  $L^{out}$  的行和仍为 0, 其同行代数余子式仍然相等.

关于叶向树形图, 我们有类似的结论:

**定理 3.7.3 (矩阵树定理, 叶向树形图)**  $n$  点有向图以  $i$  为根的生成叶向树形图的数量与该图入度 Laplace 矩阵  $L^{in}$  去掉第  $i$  行第  $i$  列的  $n-1$  阶主子式的值相等. 该有向图的所有生成根向树形图的数量也与  $L^{in}$  的所有  $n-1$  个非零特征值的乘积相等.

由于  $L^{in}$  的列和 (而非行和) 为 0, 其同列 (而非同行) 代数余子式均相等.

更多内容, 参考

- Laplacian matrix - Wikipedia
- 矩阵树定理 - OI Wiki
- Kirchhoff's theorem - Wikipedia

### 3.8 Polya 计数

**定理 3.8.1 (Burnside)**

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |C(f)|$$

其中  $G$  是等价操作群,  $C(f)$  是操作  $f$  下的不动点集合.

### 3.9 杂数选提

#### Catalan 数

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \prod_{k=2}^n \frac{n+k}{k}$$

Segner's recurrence relation:

$$C_0 = 1; \quad C_{n+1} = \sum_{i=0}^n C_i C_{n-i}$$

OGF:

$$A(z) = 1 + zA^2(z) \implies A(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

注意下面组合意义间的前后逻辑顺序.

- number of full binary tree with  $n$  interior nodes /  $n+1$  leaves /  $2n+1$  nodes  
在数内点意义下可以导出 Catalan 数的生成函数.
- number of ways of associating  $n$  binary operators / parenthesizing  $n+1$  factors completely
- number of proper parenthesis sequences with  $n$  pairs of parentheses  
【TODO】暂时不知道怎么从上面推过来的. 另一种理解是长度为  $n$  的出栈序列的数量.
- number of ordered trees with  $n+1$  vertices  
最外层要补一对括号.
- number of binary trees with  $n$  vertices  
by left-child right-sibling encoding of ordered trees. 最后删去只有左儿子的根.  
该组合意义可以导出 Catalan 数的生成函数.

Catalan 数的组合意义并不止如此几种. cf. Wikipedia

### 3.10 代数组合【TODO】

*q-analog*

有限域上的线性空间

有限群构型计数

## 4 多项式

此部分详细介绍请移步 FFT/NTT 讲稿.

### 4.1 通用

#### 4.2 FFT / FNTT / 卷积

- DFT: (本原) 单位根构造  $\omega_n = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ .
- NTT:  $P = 998244353 = 7 \times 17 \times 2^{23} + 1$ , PR = 3 是它的一个原根. (本原) 单位根构造  $\omega_n = PR^{\frac{P-1}{n}} \pmod{P}$ .
- $P = 1004535809 = 479 \times 2^{21} + 1$ , PR = 3
- $P = 469762049 = 7 \times 2^{26} + 1$ , PR = 3

考虑将待变换多项式

$$A(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k x^k$$

奇偶分项为两个多项式

$$A(x) = A_0(x^2) + x A_1(x^2)$$

其中

$$\begin{aligned} A_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} x^k \\ A_1(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} x^k \end{aligned}$$

代入  $x = \omega_{2n}^k$  ( $k = 0, \dots, 2n-1$ ), 用单位根消去 / 折半性质 ( $\omega_{2n}^{2k} = \omega_n^k$ )

$$A(\omega_{2n}^k) = A_0(\omega_n^k) + \omega_{2n}^k A_1(\omega_n^k)$$

用  $\omega_{2n}^{n+k} = -\omega_{2n}^k$

$$\begin{aligned} A(\omega_{2n}^k) &= A_0(\omega_n^k) + \omega_{2n}^k A_1(\omega_n^k) \\ A(\omega_{2n}^{n+k}) &= A_0(\omega_n^k) - \omega_{2n}^k A_1(\omega_n^k) \end{aligned} \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

即得 FFT/FNTT 递归算法. 用单位根求和性质

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{ik} = [i \mid n]$$

可知 DFT/NTT 变换矩阵  $F = (\omega_n^{ij})_{(i,j) \in n \times n}$  满足  $FF^H = F^H F = nI_n$ , 故  $F^{-1} = \frac{1}{n}F^H = (\frac{1}{n}\omega_n^{-ij})_{(i,j) \in n \times n}$ , 此即 DFT/NTT 逆变换矩阵.

## 蝶形运算与迭代算法

为使用迭代算法，需要快速得到递归算法向下深入过程中  $\{a_n\}$  置换后的最终结果。观察知该置换是位逆序置换，可按如下方法线性求出。

```
rev[0]=0; for(ll i=1;i<(1<<n);i++) rev[i]=(rev[i>>1]>>1)+((i&1)<<(n-1));
```

## 4.3 多项式方程求解 (Newton 迭代法) 【TODO】

给定一多项式  $A(x)$ ，求解满足  $A(B(x)) = 0 \pmod{x^n}$  的多项式  $B(x)$ 。

显然  $B(x)$  只有前  $n$  项有效。目前我们尚不清楚解的存在性、唯一性等性质，但注意到

$$A(B(x)) = 0 \pmod{x^{2n}} \implies A(B(x)) = 0 \pmod{x^n}$$

故考虑递推求解。首先，边界条件  $A(b_0) = 0$  需要单独求解。在确定某一  $b_0$  的基础上，我们开始递推。考虑已经获得  $A(B(x)) = 0 \pmod{x^n}$  的一个解  $B(x) = B_0(x)$ ，下面尝试得到方程  $A(B(x)) = 0 \pmod{x^{2n}}$  的解。

将待求解方程  $A(B(x)) = 0 \pmod{x^{2n}}$  左式多项式  $A$  在  $B_0$  处 Taylor 展开

$$\begin{aligned} A(B(x)) &= A(B_0(x)) + A'(B_0(x))(B(x) - B_0(x)) \\ &\quad + \frac{A''(B_0(x))}{2!}(B(x) - B_0(x))^2 + \dots = 0 \pmod{x^{2n}} \end{aligned}$$

假若  $B(x) - B_0(x) = 0 \pmod{x^n}$ ，那么模  $x^{2n}$  意义下二次方以上的项可以舍去，上式等价于

$$A(B_0(x)) + A'(B_0(x))(B(x) - B_0(x)) = 0 \pmod{x^{2n}}$$

移项即可解出待求  $B(x)$

$$B(x) = B_0(x) - \frac{A(B_0(x))}{A'(B_0(x))} \pmod{x^{2n}}$$

这里要求  $A'(B_0(x))$  需在  $x^{2n}$  意义下可逆，即

$$\begin{aligned} [x^0]A'(B_0(x)) &= [x^0]A'(b_0) = \sum_{k=0}^{\infty} ([x^k]A') b_0^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}b_0^k \neq 0 \pmod{x^{2n}} \end{aligned}$$

注意到  $B(x) - B_0(x) = -\frac{A(B_0(x))}{A'(B_0(x))} = 0 \pmod{x^n}$ ，故满足上述“假若”的解存在且唯一。然而，若不要求这一“假若”成立，则每步迭代解的唯一性无法得到保证。考虑到边界条件  $b_0$  的解亦不一定唯一，故一般的 Newton 迭代法解唯一性的讨论较为复杂。当然，上述推导至少为我们提供了一种寻找特解的方法。

Newton 迭代法作为通用求解框架，可涵盖几乎所有多项式初等运算。【TODO】

## 4.4 多项式求逆

给定一多项式  $A(x)$ ，求解满足  $A(x)B(x) = 1 \pmod{x^n}$  的多项式  $B(x)$ 。

多项式逆元存在的充分必要条件是其常数项非零（这是因为边界条件  $b_0 = \frac{1}{a_0}$ ），若存在则在模意义下一定唯一。这结论可直接由下述求解方法得到。不失一般性，我们只研究  $A(x)$  的次数为奇数  $2n-1$  的情况。设

$$A(x) = A_0(x) + x^n A_1(x)$$

$$B(x) = B_0(x) + x^n B_1(x)$$

下述两种方法均递归地在已知

$$A(x)B_0(x) = A_0(x)B_0(x) = 1 \pmod{x^n}$$

的基础上求解  $A(x)$  的逆元. 时间复杂度均为

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n \log n) = O(n \log n)$$

以下简记  $A(x)$  为  $A$ , 其它多项式同理.

### 倍增法一 (原创)

$$\begin{aligned} AB &= 1 \pmod{x^{2n}} \\ \iff (A_0 + x^n A_1)(B_0 + x^n B_1) &= 1 \pmod{x^{2n}} \\ \iff x^n(A_1 B_0 + A_0 B_1) + A_0 B_0 &= 1 \pmod{x^{2n}} \\ \iff A_1 B_0 + A_0 B_1 + \left\lfloor \frac{A_0 B_0}{x^n} \right\rfloor &= 0 \pmod{x^n} \\ \iff A_0 B_1 &= -\left\lfloor \frac{A_0 B_0}{x^n} \right\rfloor - A_1 B_0 \pmod{x^n} \\ \iff B_1 &= -B_0 \left( \left\lfloor \frac{A_0 B_0}{x^n} \right\rfloor + A_1 B_0 \right) \pmod{x^n} \end{aligned}$$

常数偏大, 这里就不放代码了.

### 倍增法二

注意到

$$\begin{cases} AB_0 = 1 \pmod{x^n} \\ AB = 1 \pmod{x^n} \end{cases} \implies A(B - B_0) = 0 \pmod{x^n}$$

由于  $A$  的常数项非零, 故

$$B - B_0 = 0 \pmod{x^n}$$

(这证明了逆元在不同模数下的前缀保持一致)

两边平方得

$$B^2 - 2BB_0 + B_0^2 = 0 \pmod{x^{2n}}$$

两侧同乘  $A$  并移项得

$$B = 2B_0 - AB_0^2 \pmod{x^{2n}}$$

### 4.5 多项式开方【TODO】

和多项式求逆类似的推导可得递推方程

$$B = \frac{1}{2} \left( \frac{A}{B_0} + B_0 \right) \pmod{x^{2n}}$$

有一些和 Newton 法一样麻烦的边界条件讨论, 也会出现复杂的多解情况.  $a_0 = 1$  时  $b_0 = \pm 1$ , 按  $b_0 = 1$  的实现如下.

亦可  $\sqrt{A} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln A\right)$ , 此法可处理多项式任意幂指数运算.

#### 4.6 多项式 $\ln$

给定一多项式  $A(x)$ , 求解满足  $B(x) = \ln A(x) \pmod{x^n}$  的多项式  $B(x)$ .

次数为  $+\infty$  的多项式  $\ln$  存在的充分必要条件为其常数项非零 (这是因为边界条件  $b_0 = \ln a_0$ ), 同样一旦存在则唯一. 注意到仅整数  $a_0 = 1$  时,  $\ln a_0$  可取得整数, 故合理的  $a_0$  只能是 1. 另一种解释参见多项式初等函数 - OI Wiki # 多项式对数函数 & 指数函数.

推导是容易的. 方程两侧同时求导得

$$B'(x) = \frac{A'(x)}{A(x)} \pmod{x^{n-1}}$$

两侧再积分得

$$B(x) = \int \frac{A'(x)}{A(x)} dx + C \pmod{x^n}$$

其中  $C = \ln a_0$ . 多项式求逆、求导、积分即可. 时间复杂度  $O(n \log n)$ .

#### 4.7 多项式 $\exp$ 【TODO】

Newton 迭代法可推出

$$B = B(1 - \ln B_0 + A) \pmod{x^{2n}}$$

时间复杂度

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n \log n) = O(n \log n)$$

存在的充要条件是  $a_0 = 0$ . 唯一性证明暂不明确.

#### 4.8 多项式快速幂

普通的多项式快速幂实现当然是  $O(n \log n \log k)$  的. 下面介绍基于指对数性质的  $O(n \log n)$  求法.

对常数项  $a_0 = 1$  的  $n - 1$  次多项式  $A(x)$ ,

$$A^k(x) = e^{k \ln A(x)}$$

我们指出, 在系数对质数  $p$  取模的意义下, 当我们关心的多项式长度  $n \leq p$  时, 有

$$A^p(x) \equiv a_0 \equiv 1 \pmod{p}$$

这是因为

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$$

故

$$A^p(x) = (a_0 + xA_1(x))^p \equiv a_0^p + x^p A_1^p(x) \pmod{p}$$

由费马小定理,  $a_0^p = a_0$ , 而  $n \leq p$  表明  $x^p A_1^p(x)$  一项可被忽略, 故上述结论得到证明. 这些讨论可用于处理幂指数  $k \geq p$  的情况.

一般的, 当常数项非 1 时, 为满足多项式  $\ln$  的要求, 设多项式  $A(x)$  的最低次项为  $a_t x^t$ , 则

$$A^k(x) = (a_t x^t)^k \left( \frac{A(x)}{a_t x^t} \right)^k$$

右侧的多项式常数项归一, 故可再应用上述方法计算.

关于多项式, 更代数的内容参考 Formal power series - Wikipedia

## 5 集合幂级数【TODO】

## 6 矩阵

### 6.1 矩阵乘法

普通的  $O(n^3)$  实现.

### 6.2 矩阵快速幂

普通的  $O(n^3 \log k)$  实现.

### 6.3 行列式

普通的实现是使用逆元进行高斯消元，可用于域上的线性空间。若求解逆元的时间复杂度为  $O(\log p)$ ，则时间复杂度为  $O(n^3 + n^2 \log p)$ .

这里给出另一种做法。该做法在消去时使用辗转相除法，可用于任意 Euclid 整环 (Euclidean domain，有带余除法的无零因子的交换幺环) 上的模（环上的线性空间），且时间复杂度不会增加。一个常见的应用是模  $m$  整数环  $\mathbb{Z}_m$  上的行列式求值，其中  $m$  不是质数。

消去各目标行第  $c$  列元素时，以第  $c$  行的  $a_{c,c}$  为除数与目标行的第  $c$  列元素辗转相除，最终使  $a_{c,c}$  变为 0，再做一次行交换将其换至目标行，就完成了一次行消去过程。注意到当  $a_{c,c}$  非零时，一次行消去操作结束后  $a_{c,c}$  单调不增，且过程中  $a_{c,c}$  不会从非零变为零，故辗转相除带来的  $\log p$  次额外操作开销被分摊到整轮对第  $c$  列的消去过程中，因此时间复杂度仍为  $O(n^3 + n^2 \log p)$ 。

## 7 字符串 / 自动机

基于 DFA 理论，OI-Wiki 上有对 KMP / AC 自动机，SAM / GSAM 和 PAM 简明扼要的概括。OI-Wiki 的后缀自动机讲解亦值得参考。

## 8 图论【TODO】

### 8.1 最短路

### 8.2 强连通分量

### 8.3 网络流

## 9 杂项

### 9.1 表

#### 质数表

1e2	1e3	1e4	1e5	1e6
101	1009	10007	100003	1000003
1e7	1e8	1e9	1e10	1e11
10000019	100000007	1000000007	10000000019	100000000003

```
1e12           1e13           1e14           1e15
1000000000039 1000000000037 10000000000031 100000000000037

1e16           1e17           1e18
100000000000061 1000000000000003 10000000000000003
```

## 典列

index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Catalan	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16796
Bell	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975
partition	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
group	0	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2

**binomial**

x	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

**Stirling I**

x	0	1	2	3	4	5
0	1					
1		1				
2		1	1			
3		2	3	1		
4		6	11	6	1	
5		24	50	355	10	1

**Stirling II**

x	0	1	2	3	4	5
0	1					
1		1				
2		1	1			
3		1	3	1		
4		1	7	6	1	
5		1	15	25	10	1

**Lah**

```

x  0   1   2   3   4   5
0 | 1
1 |
2 |      1
3 |      2   1
4 |      6   6   1
5 |      24  36  12  1
                         1

```

k-partition

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1		1				
2		1	1			
3		1	1	1		
4		1	2	1	1	
5		1	2	2	1	1

## 9.2 对拍

### Windows Batch

```

:loop
gen.exe>dat.in
my.exe<dat.in>my.out
std.exe<dat.in>std.out
fc my.out std.out
if not errorlevel 1 goto loop
pause

```

### Linux Shell

```

while true; do
    ./gen>dat.in
    ./std<dat.in>std.out
    ./my<dat.in>my.out
    if diff std.out my.out; then
        printf OK
    else
        printf DIFF
        exit 0
    fi
done

```

### 9.3 模板

见 model.cpp, model\_temp.cpp.

#### model.cpp

```
#include<bits/stdc++.h>

using namespace std;
typedef unsigned int uint;
typedef long long ll;
typedef unsigned long long ull;
typedef double db;
typedef long double ldb;

// --- read ---
template<typename T=ll>
T rd(){ // for bigint read
    T ans=0; bool sgn=0; char c=getchar();
    while(c<'0'||c>'9'){if(c=='-') sgn=1; c=getchar();}
    while(c>='0'&&c<='9'){ans=ans*10+T{c-'0'};c=getchar();}
    if(sgn) ans=-ans;
    return ans;
}

// --- variable mod ---
const int MOD=998244353,PR=3;
#define pmod_m(x,mod) ((x)<(mod)?(x):(x)-(mod))
#define nmod_m(x,mod) ((x)<0?(x)+(mod):(x))
#define hmod_m(x,mod) nmod_m((x)%(mod),(mod)) // slow!
#define pmod(x) pmod_m(x,MOD)
#define nmod(x) nmod_m(x,MOD)
#define hmod(x) hmod_m(x,MOD)
template<typename T=int,typename U=ll>
T qpow(U x,ll up,T mod){
    x=hmod_m(x,mod); T ans=1;
    for(;up;up>>=1,x=U(x)*x%mod) if(up&1) ans=U(ans)*x%mod;
    return ans;
}
template<typename T=int,typename U=ll>
ll inv(T x,T mod){return qpow<T,U>(x,mod-2);} // assume mod prime

// --- Number Theory ---
ll gcd(ll a,ll b){return b==0?a:gcd(b,a%b);}
```

```

ll lcm(ll a,ll b){return a*b/gcd(a,b);}

tuple<ll, ll, ll> exgcd(ll a,ll b){ // capable of +/- integers
    if(b==0) return {1,0,a};
    ll x1,y1,d; tie(x1,y1,d)=exgcd(b,a%b);
    return {y1,x1-(a/b)*y1,d};
}

ll inv(ll a,ll m){
    ll x,y,d; tie(x,y,d)=exgcd(a,m);
    return d==1?hmod_m(x,m):0;
}

tuple<ll, ll, bool> solve_equ(ll a,ll b,ll c){ // return solution with min non-negative x
    ll x,y,d; tie(x,y,d)=exgcd(a,b);
    if(d==0) return {0,0,c==0}; // !!!
    if(c%d!=0) return {0,0,false};
    x*=c/d; y*=c/d; ll dx=b/d,dy=-a/d;
    if(dx<0) dx=-dx,dy=-dy; // ensure dx positive
    ll t=(hmod_m(x,dx)-x)/dx; x+=t*dx; y+=t*dy;
    return {x,y,true};
}

// CAUTION __int128
pair<ll, ll> excrt(pair<ll, ll> p1,pair<ll, ll> p2){ // merge (a1,m1) (a2,m2)
    ll a1,m1,a2,m2; tie(a1,m1)=p1; tie(a2,m2)=p2;
    ll x,y; bool ok; tie(x,y,ok)=solve_equ(m1,m2,a2-a1);
    if(!ok) return {0,0};
    ll l=lcm(m1,m2); return {hmod_m(x*m1+a1,l),l};
}

ll bsgs(ll a,ll b,ll m){ // solve a^x=b mod m, gcd(a,m)=1
    unordered_map<ll,bool> mp; ll sqrtM=ceil(sqrt(m));
    ll cur=1;
    for(ll r=1;r<=sqrtM;r++){
        cur=cur*a%m;
        mp[b*cur%m]=r;
    }
    ll nw=cur;
    for(ll q=1;q<=sqrtM;q++){
        if(mp[nw]) return q*sqrtM-mp[nw];
        nw=nw*cur%m;
    }
    return -1;
}

// --- CAUTION uncensored / __int128 / rand() ---
bool is_prime(ll n){ // miller rabin

```

```

if(n<=2||n%2==0) return n==2;
ll u=n-1,t=0; while(u%2==0) u/=2,t++;
ll test_time=10; while(test_time--){
    ll a=rand()%n+2,v=qpow<ll,__int128>(a,u,n);
    if(v==1) continue;
    bool ok=0;
    for(ll s=0;s<t;s++){
        if(v==n-1){ok=1;break;}
        v=__int128(v)*v%n;
    } if(!ok) return false;
} return true;
}
// --- CAUTION uncensored __int128 rand() ---
ll pollard_rho(ll n) {
    auto f=[&](ll x,ll c)->ll{return (__int128(x)*x+c)%n;};
    ll c=rand()%n+1;
    ll t=f(0,c);
    ll r=f(f(0,c),c);
    while (t!=r) {
        ll d=gcd(abs(t-r),n);
        if(d>1) return d;
        t=f(t,c);
        r=f(f(r,c),c);
    } return n;
} ll get_factor(ll n){
    if(n==1||is_prime(n)) return 0;
    if(n==4) return 2;
    ll d=n; while(d==n) d=pollard_rho(n);
    return d;
}
void _prime_test(){
    srand(time(0));
    ll N=rd();
    cout<<(is_prime(N)?"YES":"NO")<<" "<<get_factor(N);
}

// --- constant mod, can be modified to be variable ---
template<typename T,typename U>
class ModInt{public:
    static inline ModInt uroot(T n){return qpow(ModInt(PR),(MOD-1)/n);}
    T dat; ModInt():dat{0}{}}

```

```

ModInt(initializer_list<T> lst):dat{*lst.begin()}{} // for mod-free number, use this
ModInt(U dat):dat{T(hmod(dat))}{} // implicit conversion, slow!
explicit operator T const(){return dat;}
friend ostream& operator << (ostream &out,const ModInt& mi){out<<mi.dat; return out;}
// negative number version
// friend ostream& operator << (ostream &out,const ModInt& mi){out<<(mi.dat+mi.dat<MOD?mi.dat:mi.dat-2*mi.dat);}
friend ModInt operator + (const ModInt a,const ModInt b){return {pmmod(a.dat+b.dat)};}
friend ModInt operator - (const ModInt a){return {nmod(-a.dat)};}
friend ModInt operator - (const ModInt a,const ModInt b){return {nmod(a.dat-b.dat)};}
friend ModInt operator * (const ModInt a,const ModInt b){return {T(U{a.dat}*b.dat%MOD)};}
friend ModInt operator / (const ModInt a,const ModInt b){return {a.dat/b.dat};} // Euclidean division
friend ModInt operator % (const ModInt a,const ModInt b){return {a.dat%b.dat};} // Euclidean division
friend ModInt qpow(ModInt x,ll up){
    ModInt ans=1; for(;up;up>>=1,x=x*x) if(up&1) ans=ans*x; return ans;
} friend inline ModInt inv(ModInt a){return {qpow(a,MOD-2)};} // assume MOD is prime
void operator += (const ModInt other){*this=*this+other;}
void operator -= (const ModInt other){*this=*this-other;}
void operator *= (const ModInt other){*this=*this*other;}
void operator /= (const ModInt other){*this=*this/other;}
void operator %= (const ModInt other){*this=*this%other;}
friend bool operator == (const ModInt a,const ModInt b){return a.dat==b.dat;}
friend bool operator != (const ModInt a,const ModInt b){return a.dat!=b.dat;}
};

typedef ModInt<int,ll> MI;

// --- linear init ---
vector<MI> fac,facinv,inv_s;
void linear_init(int n){
    fac.resize(n+1); facinv.resize(n+1); inv_s.resize(n+1);
    inv_s[1]=1; for(int i=1;i<=n;i++) inv_s[i]=-(MOD/i)*inv_s[MOD%i];
    fac[0]=1; for(int i=1;i<=n;i++) fac[i]=fac[i-1]*i;
    facinv[n]=inv(MI(fac[n])); for(int i=n-1;i>=0;i--) facinv[i]=facinv[i+1]*(i+1);
}

// --- polynomial ---
int log2ceil(int n){int cnt=0; for(int t=1;t<n;t<<=1) cnt++; return cnt;}
vector<int> rev;
void spawn_rev(int n){ // n=log2ceil(N)
    rev.resize(1<<n); rev[0]=0;
    for(int i=1;i<(1<<n);i++) rev[i]=(rev[i>>1]>>1)+((i&1)<<(n-1));
}
class Poly : public vector<MI>{ public:

```

```

using vector<MI>::vector;
inline int len() const {return size();} // to avoid strange glitches caused by size_t
Poly subpoly(int l,int r) const { // [l,r), zero padded (support negative number)
    Poly B; for(int i=l;i<r;i++) B.push_back(i>=0&&i<len()?at(i):0); return B;
}
friend ostream& operator << (ostream &out,const Poly& A){for(int i=0;i<A.len();i++) out<<A[i]<<' ';
friend Poly operator + (Poly A,const Poly& B){
    int n=max(A.len(),B.len()); A.resize(n);
    for(int i=0;i<n;i++) A[i]+=i<B.len()?B[i]:0; return A;
}
friend Poly operator - (Poly A){for(int i=0;i<A.len();i++) A[i]=-A[i]; return A;}
friend Poly operator - (const Poly& A,const Poly &B){return A+(-B);}
friend Poly operator * (Poly A,MI c){for(int i=0;i<A.len();i++) A[i]=A[i]*c; return A;}
void DFT(int typ){ // to be called by opt() only (with proper length and rev array)
    int n=len();
    for(int i=0;i<n;i++) if(i<rev[i]) std::swap(at(i),at(rev[i]));
    for(int hf=1;hf<n;hf<<=1){
        MI w=MI::uroot(hf<<1); if(typ===-1) w=inv(w);
        for(int i=0;i<n;i+=hf<<1){
            MI wk=1;
            for(int k=0;k<hf;k++){
                MI x=at(i+k),y=wk*at(i+hf+k);
                at(i+k)=x+y; at(i+hf+k)=x-y;
                wk*=w;
            }
        }
    }
    if(typ===-1){MI inv_n=inv(MI{n}); for(int i=0;i<n;i++) at(i)=at(i)*inv_n;}
}
friend Poly opt(Poly A,Poly B,int len,function<MI(MI a,MI b)> func){
    int n=log2ceil(len); spawn_rev(n); n=1<<n;
    A.resize(n); A.DFT(n); B.resize(n); B.DFT(n);
    Poly C(n); for(ll i=0;i<n;i++) C[i]=func(A[i],B[i]);
    C.DFT(-1); C.resize(len); return C;
}
friend Poly operator * (const Poly& A,const Poly& B){
    return opt(A,B,A.len()+B.len()-1,[](MI a,MI b){return a*b;});
}
friend Poly inv(const Poly &A){
    int n=A.len(); Poly B={inv(A[0])};
    for(int hf=1;hf<n;hf<<=1){
        B=opt(A.subpoly(0,hf*2),B,hf*4,[](MI a,MI b){return (2-a*b)*b;});
    }
}

```

```

        B.resize(hf*2);
    } B.resize(n); return B;
}

friend Poly sqrt(const Poly &A){
    int n=A.len(); Poly B={1}; // assume a_0 = 1 and b_0 positive
    for(int hf=1;hf<n;hf<<=1){
        B=(A.subpoly(0,2*hf)*inv(B.subpoly(0,2*hf))+B)*inv(MI{2});
        B.resize(hf*2);
    } B.resize(n); return B;
}

friend Poly drv(Poly A){ // derivative
    for(int i=0;i<A.len();i++) A[i]=(i+1)*A[i+1];
    A.pop_back(); return A;
}

friend Poly itg(Poly A,MI c){ // integral
    A.push_back(0); for(int i=A.len()-1;i>=1;i--) A[i]=A[i-1]*inv(MI{i});
    A[0]=c; return A;
}

friend inline Poly ln(const Poly &A){
    return itg((drv(A)*inv(A)).subpoly(0,A.len()-1),0/*log(A[0])*);*/
}

friend Poly exp(const Poly &A){
    int n=A.len(); Poly B={1/*exp(A[0])*()};
    for(int hf=1;hf<n;hf<<=1){
        B=B*(Poly{1}-ln(B.subpoly(0,hf*2))+A.subpoly(0,hf*2)); B.resize(hf*2);
    } B.resize(n);
    return B;
}

friend inline Poly qpow(const Poly &A,MI up){return exp(ln(A)*up);} // assume a_0 = 1

static void _test(){
    ll N=rd()+1,M=rd()+1;
    Poly A(N),B(M);
    for(ll i=0;i<N;i++) A[i]=rd();
    for(ll i=0;i<M;i++) B[i]=rd();
    Poly C=A*B; cout<<C;
    /*ll N=rd(); Poly A(N);
    for(ll i=0;i<N;i++) A[i]=rd();
    A=inv(A); cout<<A;*/
}

};

namespace divntt{

```

```

Poly A,B,C;
void divntt(ll l,ll r){ // capable of non-negative [l,r), "i<j" order
    if(l+1==r) return;
    ll mid=(l+r)/2;
    Poly T=A.subpoly(l,mid)*B.subpoly(mid,r);
    for(ll k=0;k<T.len()&&l+mid+k<C.len();k++){ // CAUTION: time complexity
        C[l+mid+k]+=T[k];
    }
    divntt(l,mid); divntt(mid,r);
}

// --- matrix ---
class Matrix : public vector<MI>{public:
    static Matrix I(int n){
        Matrix A(n,n); for(int i=0;i<n;i++) A(i,i)=1;
        return A;
    }
    int row,col;
    template<typename... Args>
    Matrix(int row,int col,Args... args) : row{row},col{col},vector<MI>(row*col,args...){}
    Matrix(int row,int col,initializer_list<MI> lst) : row{row},col{col},vector<MI>(lst){}
    MI& at(int i,int j){return vector<MI>::at(i*col+j);}
    MI cat(int i,int j) const{return *(cbegin() + i*col+j);}
    MI& operator () (int i,int j){return at(i,j);}
    Matrix submat(int sr,int sc,int tr,int tc){
        Matrix A(tr-sr,tc-sc,{});
        for(int i=sr;i<tr;i++) for(int j=sc;j<tc;j++) A(i-sr,j-sc)=at(i,j);
        return A;
    }
    friend ostream& operator << (ostream &out,const Matrix& A){
        for(int i=0;i<A.row;i++){for(int j=0;j<A.col;j++) cout<<A.cat(i,j)<<' ';cout<<'\n';} return out;
    }

    friend Matrix operator * (const Matrix &A,const Matrix &B){
        Matrix C(A.row,B.col); if(A.col!=B.row) return Matrix(0,0);
        for(int i=0;i<A.row;i++)
            for(int j=0;j<B.col;j++)
                for(int k=0;k<A.col;k++)
                    C(i,j)+=A.cat(i,k)*B.cat(k,j);
        return C;
    }
}

```

```

friend Matrix qpow(Matrix X,ll up){
    Matrix A=Matrix::I(X.row); if(X.row!=X.col) return Matrix(0,0);
    for(;up;up>>=1,X=X*X) if(up&1) A=A*X; return A;
}

bool stair(){ // row reduce to upper stair matrix, return swap time % 2. capable of any ring
    bool swp=0;
    for(int c=0,p=0;c<min(row,col);c++){
        auto swpl=[&](int a,int b){
            swp^=1; for(int k=c;k<col;k++) std::swap(at(a,k),at(b,k));
        };
        for(int r=p+1;r<row;r++){
            while(at(p,c)!=0){
                MI factor=at(r,c)/at(p,c);
                for(int k=c;k<col;k++) at(r,k)-=at(p,k)*factor;
                swpl(p,r);
            } swpl(p,r);
            if(at(p,c)!=0) p++;
        }
        return swp;
    }
}

friend MI det(Matrix A){
    int n=A.row; if(A.row!=A.col) return 0;
    bool opt=A.stair();
    MI ans=1; for(int c=0;c<n;c++) ans*=A(c,c);
    return opt?-ans:ans;
}

friend int rk(Matrix A){ // rank (confuse with std::rank)
    A.stair();
    for(int r=A.row-1;r>=0;r--)
        for(int c=0;c<A.col;c++)
            if(A(r,c)!=0) return r+1;
    return 0;
}

static void _test(){
    ll N=rd(),M=rd(); Matrix A(N,M,{});
    for(ll i=0;i<N;i++) for(ll j=0;j<M;j++) A.push_back(rd());
    A.stair(); cout<<A;
}
};

// --- automata ---
template <int PTN,int STRN,int CHAR,char OFFSET>

```

```
class ACAutomation{public: // id: 0 is null, 1 is start
    struct Vtx{
        int fail;
        array<int,CHAR> ch;
    }vtx[PTN];
    int last[STRN];
    int vn,sn;
    ACAutomation(){
        sn=0; vn=0; vtx[++vn]={0};
        for(int c=0;c<CHAR;c++) vtx[0].ch[c]=1;
    }
    void insert(string s){
        int p=1;
        for(char c : s){ c-=OFFSET;
            if(!vtx[p].ch[c]) vtx[p].ch[c]=++vn;
            p=vtx[p].ch[c];
        } last[++sn]=p;
    }
    void buildFail(){
        queue<int> que; que.push(1);
        while(!que.empty()){
            int p=que.front(),f=vtx[p].fail; que.pop();
            for(int c=0;c<CHAR;c++){ int q=vtx[p].ch[c];
                if(q) vtx[q].fail=vtx[f].ch[c],que.push(q);
                else vtx[p].ch[c]=vtx[f].ch[c];
            }
        }
    }
    // below: subject to problem Lugou P5357
    int cnt[PTN];
    void match(string s){
        for(int i=1;i<=vn;i++) cnt[i]=0;
        int p=1;
        for(char c : s){ c-=OFFSET;
            p=vtx[p].ch[c];
            cnt[p]++;
        }
    }
    vector<int> edge[PTN];
    void buildTree(){ // fail tree
        for(int u=1;u<=vn;u++) edge[u].clear();
        for(int u=2;u<=vn;u++) edge[vtx[u].fail].push_back(u);
    }
}
```

```

function<void(int)> dfs=[&](int u){
    for(int v : edge[u]) dfs(v),cnt[u]+=cnt[v];
}; dfs(1);
}

void answer(){
    for(int i=1;i<=sn;i++) cout<<cnt[last[i]]<<'\n';
}

};

typedef ACAutomation<int(1E6+5),int(1E6+5),26,'a'> ACAM;

template<int PTN> // 2 * length of string suffices
class SuffixAutomation{public: // id: 0 is null, 1 is start
    struct Vtx{
        int fa,len; bool real;
        map<char,int> ch; // feel free to modify to array<int,26>
    }vtx[PTN];
    int n,last;
    SuffixAutomation(){n=last=0; vtx[++n]={0,0,true}; last=n;}
    void insert(char c){
        int p=last,cur=++n; vtx[cur]={0,vtx[last].len+1,true};
        for(;p&&!vtx[p].ch[c];p=vtx[p].fa) vtx[p].ch[c]=cur;
        int q=vtx[p].ch[c];
        if(!p) vtx[cur].fa=1;
        else if(vtx[q].len==vtx[p].len+1) vtx[cur].fa=q;
        else{ // vtx[q].len>vtx[p].len+1, partition needed
            vtx[++n]=vtx[q]; vtx[n].real=false; vtx[n].len=vtx[p].len+1;
            for(;p&&vtx[p].ch[c]==q;p=vtx[p].fa) vtx[p].ch[c]=n;
            vtx[cur].fa=vtx[q].fa=n;
        }
        last=cur;
    }
    ll LCSWith(string s){ // as an example of matching
        ll p=1, ll ans=0,cnt=0;
        for(char c : s){
            if(vtx[p].ch[c]) cnt++;
            else{
                for(;p&&!vtx[p].ch[c];p=vtx[p].fa);
                cnt=p?vtx[p].len+1:0;
            } ans=max(ans,cnt);
            p=p?vtx[p].ch[c]:1;
        } return ans;
    }
}

```

```

// below: subject to problem Luogu P3804
vector<int> edge[PTN]; int sz[PTN];
void buildTree(){
    for(int u=1;u<=n;u++) edge[u].clear();
    for(int u=2;u<=n;u++) edge[vtx[u].fa].push_back(u);
    function<void(int)> dfs=[&](int u){
        sz[u]=vtx[u].real;
        for(int v : edge[u]) dfs(v),sz[u]+=sz[v];
    }; dfs(1);
}
ll answer(){
    ll ans=0;
    for(ll u=1;u<=n;u++) if(sz[u]>1) ans=max(ans,1LL*sz[u]*vtx[u].len);
    return ans;
}
};

typedef SuffixAutomation<int(2E6+5)> SAM;

template <int PTN>
class PalindromicAutomation{public: // id: 1 is odd root, 0 is even root (as fallback)
    struct Vtx{
        int fail,len;
        map<char,int> ch; // feel free to modify to array<int,26>
    }vtx[PTN];
    int vn,sn,last; char s[PTN];
    int cnt[PTN]; // subject to problem Luogu P5496
    PalindromicAutomation(){
        vn=1; vtx[0]={1,0}; vtx[1]={0,-1}; // fail[even]=odd, fail[odd]=even
        last=0; sn=0;
    }
    int getValid(int p){ // even is never valid, odd is always valid
        for(;s[sn-vtx[p].len-1]!=s[sn];p=vtx[p].fail);
        return p;
    }
    void insert(char c){
        s[++sn]=c; int p=getValid(last);
        if(!vtx[p].ch[c]){
            int f=getValid(vtx[p].fail); // when p=odd, fail[p]=even, then f is still odd
            vtx[++vn]={vtx[f].ch[c],vtx[p].len+2}; // len[odd]=-1 useful here
                                            // vtx[f].ch[c]=0 only happens when p=odd
                                            // for s[sn-vtx[p].len-1..sn] is already a palindrome
            vtx[p].ch[c]=vn;
        }
    }
};

```

```

        cnt[vn]=cnt[vtx[vn].fail]+1; // subject...
    } last=vtx[p].ch[c];
    cout<<cnt[last]<<" "; // subject...
}
};

typedef PalindromicAutomation<int(1E6+5)> PAM;

void entry(){

}

int main(){
//freopen("t1.in","r",stdin);
//freopen("t1.out","w",stdout);
//ll T=rd(); while(T--){
    entry();
//}
    return 0;
}

```

**model\_temp.cpp**

```

#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
// --- CAUTION uncensored ---
namespace MaxFlow{
    const int INF=999999999;
    const int PTN=20005,EDN=400005;
    struct Edge{
        int u,v,w,int nxt;
    }edge[EDN];
    int graM,graM,last[PTN];
    void GraphInit(){graM=0;for(int i=0;i<PTN;i++) last[i]=0;}
    void AddBscEdge(int u,int v,int w){
        edge[++graM]=(Edge){u,v,w,last[u]};
        last[u]=graM;
    }
    void AddNetEdge(int u,int v,int w){
        AddBscEdge(u,v,w);AddBscEdge(v,u,0);
    }
    int Un(int x){if(x%2==0) return x-1;else return x+1;}
}

```

```

int ST,ED;int dis[PTN],gap[PTN],cur[PTN];
bool bomb;
int Send(int u,int ret){
    if(u==ED) return ret;
    int gone=0;
    for(int& i=cur[u];i!=0;i=edge[i].nxt){
        int v=edge[i].v,w=edge[i].w;
        if(w==0||dis[u]-1!=dis[v]) continue;
        int tmp=Send(v,min(ret,w));
        edge[i].w-=tmp;
        edge[Un(i)].w+=tmp;
        ret-=tmp;gone+=tmp;
        if(ret==0||bomb) return gone;
    }
    if(--gap[dis[u]]==0) bomb=1;
    gap[++dis[u]]++;
    return gone;
}
int ISAP(int st,int ed){
    ST=st;ED=ed;
    for(int i=1;i<=graN;i++) dis[i]=0,gap[i]=0;
    gap[0]=graN;
    bomb=0;int mxFlow=0;
    while(!bomb){
        for(int i=1;i<=graN;i++) cur[i]=last[i];
        mxFlow+=Send(ST,INF);
    }
    return mxFlow;
}
namespace CostFlow{
    const int INF=999999999;
    const int PTN=10005,EDN=200005;
    struct Edge{
        int u,v,w,c;int nxt;
    }edge[EDN];
    int graN,graM,last[PTN];
    void GraphInit(){graM=0;for(int i=0;i<PTN;i++) last[i]=0;}
    void AddBscEdge(int u,int v,int w,int c){
        edge[++graM]=(Edge){u,v,w,c,last[u]};
        last[u]=graM;
    }
}

```

```

void AddNetEdge(int u,int v,int w,int c){
    AddBscEdge(u,v,w,c);AddBscEdge(v,u,0,-c);
}

int Un(int x){if(x%2==0) return x-1;else return x+1;}

int mxFlow,miCost,ST,ED;
int dis[PTN],isQ[PTN],pre[PTN];
int Q[10*PTN],hd,tl;
bool SPFA(){
    for(int i=1;i<=graN;i++) dis[i]=INF,isQ[i]=0;
    hd=1;tl=0;
    dis[ST]=0;isQ[ST]=1;Q[++tl]=ST;
    while(hd<=tl){
        int u=Q[hd++];isQ[u]=0;
        for(int i=last[u];i!=0;i=edge[i].nxt){
            int v=edge[i].v,w=edge[i].w,c=edge[i].c;
            if(w==0) continue;
            if(dis[v]>dis[u]+c){
                dis[v]=dis[u]+c;pre[v]=i;
                if(!isQ[v]){
                    isQ[v]=1;
                    Q[++tl]=v;
                }
            }
        }
    }
    if(dis[ED]>=INF) return 0;
    return 1;
}

void Adjust(){
    int dlt=INF;
    for(int v=ED;v!=ST;v=edge[pre[v]].u)
        dlt=min(dlt,edge[pre[v]].w);
    for(int v=ED;v!=ST;v=edge[pre[v]].u){
        edge[pre[v]].w-=dlt;
        edge[Un(pre[v])].w+=dlt;
    }
    mxFlow+=dlt;miCost+=dlt*dis[ED];
}

void EK(int st,int ed){
    ST=st,ED=ed;
    mxFlow=miCost=0;
}

```

```

        while(SPFA()) Adjust();
    }

}

namespace Tarjan{
    const ll PTN=1E6+5,EDN=2E6+5;
    ll N;
    struct Edge{ll u,v;bool w;ll nxt;};
    Edge edge[EDN];
    ll graM,last[PTN];
    void GraphInit(){graM=0;for(ll i=0;i<PTN;i++) last[i]=0;}
    void AddBscEdge(ll u,ll v,bool w){
        edge[++graM]=(Edge){u,v,w,last[u]};
        last[u]=graM;
    }
    ll bel[PTN],cN,rps[PTN]; //belong, number of components, representative vertax of the component
    ll dfn[PTN],low[PTN],dN;
    ll stk[PTN],tp;bool isI[PTN];
    void Tarjan(ll u){
        dfn[u]=low[u]=++dN;
        stk[++tp]=u;isI[u]=1;
        for(ll i=last[u];i!=0;i=edge[i].nxt){
            ll v=edge[i].v;
            if(isI[v]){
                low[u]=min(low[u],dfn[v]);
            }else if(!dfn[v]){
                Tarjan(v);
                low[u]=min(low[u],low[v]);
            }
        }
        if(dfn[u]==low[u]){
            rps[++cN]=u;ll t;
            do{
                t=stk[tp--];
                isI[t]=0;bel[t]=cN;
            }while(t!=u);
        }
    }
}

```