

一元多项式的 Delta 判别式

sun123zxy

2023-10-18¹

¹最后更新于 2024-10-26.

- 1 1. e -基、 m -基与 p -基
 - 1.1 整数分拆
 - 1.2 单项对称多项式
 - 1.3 基本对称多项式
 - 1.4 幂和对称多项式
 - 1.5 其它基底

- 2 2. Delta 判别式

- 1 1. e -基、 m -基与 p -基
 - 1.1 整数分拆
 - 1.2 单项对称多项式
 - 1.3 基本对称多项式
 - 1.4 幂和对称多项式
 - 1.5 其它基底
- 2 2. Delta 判别式

- 1 1. e -基、 m -基与 p -基
 - 1.1 整数分拆
 - 1.2 单项对称多项式
 - 1.3 基本对称多项式
 - 1.4 幂和对称多项式
 - 1.5 其它基底
- 2 2. Delta 判别式

整数分拆

设非负整数数列 $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ 只有有限项非零且（不严格）单调递减. 定义长度 $\mathcal{L}(\lambda)$ 为其非零项元素个数; 定义 $S(\lambda)$ 为其非零项元素之和. 此时称 λ 是整数 $S(\lambda)$ 的一个长度为 $\mathcal{L}(\lambda)$ 的分拆.

由于分拆只有有限项非零, 对大于等于 $\mathcal{L}(\lambda)$ 的非负整数 k , 我们也常省略从第 $k+1$ 项开始的全为 0 的项, 将 λ 直接记为长度为 k 的非负整数数组 $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$.

Ferrers diagram 和 Young diagram 是图示分拆的常见方法.

通过沿主对角线翻转分拆的 Ferrers diagram 或 Young diagram, 可以定义分拆的转置. 分拆 λ 的转置记为 λ^T . 转置后分拆的长度变为原分拆的首项, 而首项变为原分拆的长度.

- 1 1. e -基、 m -基与 p -基
 - 1.1 整数分拆
 - 1.2 单项对称多项式
 - 1.3 基本对称多项式
 - 1.4 幂和对称多项式
 - 1.5 其它基底

- 2 2. Delta 判别式

单项对称多项式

设 n 是正整数, K 是一个域. 记 $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)$. 设 $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 是长度不超过 n 的一个分拆.

定义 n 元多项式环 $K[\mathbf{x}]$ 上的关于分拆 λ 的**单项对称多项式** (monomial symmetric polynomial) $m_\lambda(\mathbf{x})$ 为各项系数为 1 的含有单项式 $\mathbf{x}^\lambda := x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}$ 的项数最少的对称多项式.

- $m_{(2,1,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$
- $m_{(2,2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2 x_3^2$

易见 $m_\lambda(\mathbf{x})$ 是次数为 $|\mathcal{S}(\lambda)|$ 的齐次 (homogeneous) 多项式. 全体单项对称多项式构成 n 元对称多项式环 $\Lambda_n \subset K[\mathbf{x}]$ 作为 K 上线性空间的一组基底.

习题 1.1

对一给定的长度不超过 n 的分拆 $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, n 元单项对称多项式 $m_\lambda(x)$ 共有多少项?

在计数时根据分拆中重复项的分布情况进行消序.

习题 1.2

n 元 d 次单项对称多项式共有多少种可能的构型? 设 $\Lambda_n^{(d)} \subset \Lambda_n$ 由全体至多 d 次的 n 元对称多项式构成, 其作为 K 上线性空间的维数是多少?

该问题等价于求满足 $S(\lambda) = d$, $\mathcal{L}(\lambda) \leq n$ 的所有可能分拆 λ 的数量, 也即“将 d 个无标号球放入 n 个可空置的无标号盒”的可行方案数.

- 1 1. e -基、 m -基与 p -基
 - 1.1 整数分拆
 - 1.2 单项对称多项式
 - 1.3 基本对称多项式
 - 1.4 幂和对称多项式
 - 1.5 其它基底

- 2 2. Delta 判别式

基本对称多项式

n 元多项式环 $K[\mathbf{x}]$ 上的 n 个基本对称多项式 (elementary symmetric polynomial) 定义为

$$e_k(x_1, \dots, x_n) := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

使用单项对称多项式的记号, 也可记为

$$e_k(\mathbf{x}) := m_{\lambda_k}(\mathbf{x})$$

其中分拆 $\lambda_k := (1, \dots, 1, 0, \dots)$ 的前 k 项为 1, 其余项皆为 0.

方便起见, 定义 $e_0 = 1$, 定义 $k > n$ 和 $k < 0$ 的 $e_k = 0$. 设分拆 $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ 满足 $\lambda_i \leq n, \quad \forall i \in \mathbb{N}_+$. 我们记
$$e_{\lambda}(\mathbf{x}) := e_{\lambda_1}(\mathbf{x}) e_{\lambda_2}(\mathbf{x}) \dots e_{\lambda_{\mathcal{L}(\lambda)}}(\mathbf{x}).$$

基本对称多项式有生成函数

$$E(s) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k s^k = \prod_{i=1}^m (1 + x_i s)$$

对称多项式基本定理

定理 1.1 (对称多项式基本定理)

设 $f(\mathbf{x})$ 是域 K 上的 n 元对称多项式, 则存在唯一的 $g(\mathbf{x}) \in K[\mathbf{x}]$, 使得

$$f(\mathbf{x}) = g(e_1(\mathbf{x}), \dots, e_n(\mathbf{x}))$$

该定理对交换环上的对称多项式仍然成立. 这意味着若 f 是整系数对称多项式, 则 g 也是整系数多项式.

在定理的存在性证明中, 为消去首项对应的单项对称多项式 $m_\lambda(\mathbf{x})$, 我们构造的若干个基本对称多项式的乘积恰为 e_λ .

考察全体满足 $\lambda_i \leq n, \quad \forall i \in \mathbb{N}_+$ 的分拆 λ 对应的 $e_\lambda(\mathbf{x})$, 它们构成了 n 元对称多项式环 Λ_n 作为 K 上线性空间的另一组基底.

- 1 1. e -基、 m -基与 p -基
 - 1.1 整数分拆
 - 1.2 单项对称多项式
 - 1.3 基本对称多项式
 - 1.4 幂和对称多项式
 - 1.5 其它基底

- 2 2. Delta 判别式

幂和对称多项式

n 元多项式环 $K[x]$ 上的**幂和对称多项式** (power sum symmetric polynomial) 定义为

$$p_k(x_1, \dots, x_n) := x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, \quad k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$$

使用单项对称多项式的记号, 也可记为

$$p_k(\mathbf{x}) := m_{(k, 0, 0, \dots)}$$

特别的, $p_0(\mathbf{x}) = n$. 方便起见, 定义 $k < 0$ 的 $p_k = 0$.

定理 1.2

设 $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{C}$ 是数域, 设 $f(\mathbf{x})$ 是域 K 上的 n 元对称多项式, 则存在唯一的 $g(\mathbf{x}) \in K[x]$, 使得 $f(\mathbf{x}) = g(p_1(\mathbf{x}), \dots, p_n(\mathbf{x}))$.

一般地, 结论对特征为 0 的域 K 也成立.

幂和对称多项式有生成函数

$$P(s) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k s^k = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \sum_{i=1}^m x_i^k = \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{+\infty} (x_i s)^k = \sum_{i=1}^m \frac{1}{1 - x_i s}$$

Newton 公式

以下定理递推地给出了幂和对称多项式 p_1, \dots, p_n 与基本对称多项式 e_1, \dots, e_n 间的关系. 定理 1.2 的存在性部分可由这一定理给出.

定理 1.3 (Newton's Identities)

$$p_k = \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} e_i p_{k-i} + (-1)^{k-1} k e_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$p_k = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} e_i p_{k-i} \quad k > n$$

$$k e_k = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} p_i e_{k-i} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$0 = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} p_i e_{k-i} \quad k > n$$

更简单的写法

$$\sum_{i+j=k} (-1)^i e_i p_j = 0, \quad k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$$

但在求和中“认为” $p_0 = k$.

一个基于生成函数的证明

$$\frac{sE'(s)}{E(s)} = s \frac{d}{ds} (\ln E(s)) = \sum_{i=1}^m \frac{x_i s}{1 + x_i s} = m - \sum_{i=1}^m \frac{1}{1 + x_i s} = m - P(-s)$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty} k e_k s^k = sE'(s) = E(s)(m - P(-s)) = E(s) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k$$

对比各项即得 Newton 公式.

- 1 1. e -基、 m -基与 p -基
 - 1.1 整数分拆
 - 1.2 单项对称多项式
 - 1.3 基本对称多项式
 - 1.4 幂和对称多项式
 - 1.5 其它基底

- 2 2. Delta 判别式

完全齐次对称多项式 (Complete homogeneous symmetric polynomials)、Schur 多项式.....

本节主要参考 [1], [2], [3], [4].

- ① 1. e -基、 m -基与 p -基
 - 1.1 整数分拆
 - 1.2 单项对称多项式
 - 1.3 基本对称多项式
 - 1.4 幂和对称多项式
 - 1.5 其它基底

- ② 2. Delta 判别式

Vieta's formulas

定理 2.1 (Vieta's formulas)

设数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上 n 次首一多项式 (*monic polynomial*)

$$A(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

其 n 个复根分别为 $\mathbf{c} := (c_1, c_2, \dots, c_n)$, 则 $A(x)$ 的系数可由关于根的 n 个 n 元基本对称多项式表示

$$a_{n-k} = e_k(-\mathbf{c}) = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} c_{i_1} c_{i_2} \cdots c_{i_k}$$

其中 $k = 1, 2, \dots, n$. 特别的

$$a_0 = e_n(-\mathbf{c}) = (-1)^n c_1 c_2 \cdots c_n$$

$$a_{n-1} = e_1(-\mathbf{c}) = -(c_1 + c_2 + \cdots + c_n)$$

Vieta 定理与对称多项式基本定理

- 即使尚未获知多项式 n 个复根 c_1, \dots, c_n 的具体取值, 我们也能通过已知的多项式系数 a_0, \dots, a_{n-1} 获知 n 个 n 元基本对称多项式在根处的取值.
- 对称多项式基本定理指出, 任何对称多项式都可被 (唯一) 表示为关于 n 个基本对称多项式的一个多项式.
- 仅需知晓多项式的系数, 就可获得任意给定对称多项式在根处的取值.
- 目标: 构造一个 (数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上的) n 元对称多项式, 使得能通过代入求值的方式, 快速检测 n 个复数是否两两不同.

Vandermonde 行列式

考察作为（数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上） n 元多项式的 Vandermonde 行列式

$$\begin{aligned}\det V &:= \det \left(x_j^{i-1} \right)_{i=1, j=1}^{n, n} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)\end{aligned}$$

它是否可用于判定重根？它是对称多项式吗？

注记

$\det V$ 是一个斜对称多项式。事实上， $\det V$ 与所有对称多项式的乘积构成了全体斜对称多项式（alternating polynomials）。

判别式

设 (数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上的) n 元对称多项式

$$D(x_1, \dots, x_n) := (\det V)^2 = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)^2$$

称其为 (数域 K 上) 一元 n 次首一多项式的**判别式** (Discriminant). 当代入的 $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{C}$ 互不相同, $D(\mathbf{x}) \neq 0$; 否则 $D(\mathbf{x}) = 0$.

根据对称多项式基本定理, 存在唯一数域 K 上的 n 元多项式 d , 使得 $d(e_1(\mathbf{x}), \dots, e_n(\mathbf{x})) = D(\mathbf{x})$.

命题 2.1

数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上的 n 次首一多项式 $f(x) := x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ 在复数域中有重根的充分必要条件是 $d(a_{n-1}, \dots, a_0) = 0$.

这是因为 $f(x)$ 的 n 个复根 $\mathbf{c} := (c_1, \dots, c_n)$ 满足

$$D(-\mathbf{c}) = d(e_1(-\mathbf{c}), \dots, e_n(-\mathbf{c})) = d(a_{n-1}, \dots, a_0)$$

习题 2.1

写出数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上一元二次多项式 $x^2 + bx + c$ 的判别式.

对次数更高的方程, 直接使用消首项方法求解判别式 $D(x)$ 在基本对称多项式下的表示 $d(e_1, \dots, e_n)$ 将变得相当繁琐. 下面利用判别式与 Vandermonde 行列式的关系得到另一种分解方法.

另一分解方法

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}) &= (\det V)^2 = \det(VV^T) \\ &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} n & p_1(\mathbf{x}) & \dots & p_{n-1}(\mathbf{x}) \\ p_1(\mathbf{x}) & p_2(\mathbf{x}) & \dots & p_n(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1}(\mathbf{x}) & p_n(\mathbf{x}) & \dots & p_{2n-2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \det(p_{i+j-2}(\mathbf{x}))_{i=1,j=1}^{n,n} \end{aligned}$$

而由 Newton's Identities, 幂和对称多项式 $p_k(\mathbf{x})$ 可较容易地递推分解为基本对称多项式的多项式组合, 故我们找到了分解 $D(\mathbf{x})$ 的一种更易操作的方法.

习题 2.2

写出数域 $K \subset \mathbb{C}$ 上不完全三次多项式 $x^3 + bx + c$ 的判别式.

本节主要参考 [5], [6], [7], [8].

参考文献 I

- [1] Wikipedia, *Symmetric polynomial*,
https://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_polynomial.
- [2] Wikipedia, *Elementary symmetric polynomial*, https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_symmetric_polynomial.
- [3] Wikipedia, *Power sum symmetric polynomial*, https://en.wikipedia.org/wiki/Power_sum_symmetric_polynomial.
- [4] Wikipedia, *Newton's identities*,
https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_identities.
- [5] 丘维声, “高等代数 下册,” in 3rd ed. 北京: 高等教育出版社, 2015, ch. 多项式环, pp. 57–66, ISBN: 978-7-04-042235-1.
- [6] 蓝以中, “高等代数简明教程 (下册),” in 2nd ed. 北京: 北京大学出版社, 2007, ch. 多元多项式环, pp. 213–217, ISBN: 978-7-301-05579-3.

- [7] Wikipedia, *Partition (number theory)*,
[https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_\(number_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Partition_(number_theory)).
- [8] Wikipedia, *Alternating polynomial*,
https://en.wikipedia.org/wiki/Alternating_polynomial.