Wallis 公式、Stirling 公式与正态分布

数学分析 II 第十周研讨课讲稿

钟星宇

2023-04-23

参考:

- 张筑生《数学分析新讲》第二册[1]
- 张颢《概率论》[2]
- Wikipedia, Math StackExchange, etc.

1 Warm up

例 1.1 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\cdots\times2n}$$

解 用放缩

$$2k>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$$

拆分母即得

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\sim0$$

例 1.2（中心二项式系数） 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$$

解

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=\frac{(2n)!}{(2^nn!)^2}=\frac{(2n)!}{(2n!!)^2}=\frac{(2n-1)!!}{2n!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\sim0$$

上两例有没有更精确的渐进估计？这便是我们马上要研究的问题.

2 Wallis 公式

引理 2.1（Wallis 积分公式） 定积分系列

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

满足

$$J_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$J_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\cdot1$$

证明 我们的思路是：先把一个 $\sin x$ 放进微分中，然后分部积分得到递推式.

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}\cos x \\
&= \left[-\sin^{n-1} x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}\sin^{n-1} x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n
\end{aligned}$$

故

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

边界条件

$$\begin{aligned}
J_0 &= \frac{\pi}{2} \\
J_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = 1
\end{aligned}$$

代入递推式求解就得到了要证的结论.

□

定理 2.2（Wallis 公式）

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

证明 注意到在积分区间上，$\sin^n x \geq \sin^{n+1} x$，由积分的单调性，$J_n$ 随 n 单调递减，故 $J_{2n+1} \leq J_{2n} \leq J_{2n-1}$ 成立. 代入引理 2.1 中得到的结果

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

移项得

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n}$$

现在只需说明 RHS 与 LHS 的差是一个无穷小.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) &= \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\left(\frac{1}{2n(2n+1)}\right) \\
&= \left(\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{2n}{(2n+1)}
\end{aligned}$$

由例 1.1 ，$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} = 0$，故上式确为一个无穷小，定理得证.

□

Wallis 公式还有其它表现形式：

$$\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\pi n} \quad (n \to \infty)$$

这里 Wallis 公式反映为对例 1.1 和例 1.2 的渐进估计.

习题 2.1 对 Catalan 数

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

做出渐进估计.

解 注意到

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

用 Wallis 公式计算即得

$$C_n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi} n^{\frac{3}{2}}}$$

Wallis 公式的另一种表现形式是

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right)$$

这表达式也被称为 Wallis product，用于近似计算 π.

注记 这和我们在例 1.1 中使用的放缩技巧……

3 Stirling 公式

引理 3.1

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

这是《数学分析 I》中大家所熟知的.

定理 3.2

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < \frac{n!}{e} < n\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

证明 将引理 3.1 写成

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < e < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$$

对 $k = 1, 2, \ldots, n-1$ 做连乘

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^k}{k^k} < e^{n-1} < \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^{k+1}}{k^{k+1}}$$

注意到乘积的相邻两项中，前一项的分子与后一项的分母可以约分，中间每项只余下 $\frac{1}{k}$，故上式可化为

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!}$$

两端再同乘 $\frac{n!}{e^n}$ 就得到

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < \frac{n!}{e} < n\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

□

定理 3.3（Stirling 公式）

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \to \infty)$$

完整证明较复杂，这里介绍证明最后一步：已知 $n! \sim a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$，用 Wallis 公式对 $2^{2n}/\binom{2n}{n}$ 的渐进估计确定系数 a.

$$\sqrt{\pi n} \sim \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{2^{2n}(a\sqrt{n}n^n e^{-n})^2}{a\sqrt{2n}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}a$$

因此 $a = \sqrt{2\pi}$.

例 3.1 当 $n \to \infty$，$k \to \infty$ 时，用 Stirling 公式渐进估计 $\binom{n}{k}$.

解

$$\binom{n}{k} \sim \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$$

4 Poisson 分布

描述单位时间平均发生次数恒定的随机事件的概率分布.

定义 4.1（Poisson 分布） 若离散随机变量 X 满足

$$P(X = k) = \frac{\lambda}{k!}e^{-\lambda}$$

其中 $\lambda > 0$ 是确定的常数，则随机变量 X 服从 Poisson 分布.

4.1 从二项分布的推导

在 $np = \lambda$ 的条件下，取 $P(X_n = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ 在 $n \to \infty$ 在 $n \to \infty$ 上的逐点极限.

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \lambda^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\
&\sim \lambda^k e^{-\lambda}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\
&= \lambda^k e^{-\lambda}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!n^k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot 1\cdot(1-\frac{1}{n})\dots(1-\frac{k-1}{n}) \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

4.2 归一性验证

$$\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1$$

5 正态分布

与 Poisson 分布不同，（标准）正态分布是在 $n \to \infty$ 的过程中假定 p 不变的情况下，对归一化（即假定期望和方差不变）后的 X_n 取逐点极限得到的.

定义 5.1（正态分布） 若连续随机变量 X 的期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma$，且其概率分布函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

则变量 X 服从正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

特别的，当 $\mu=0$，$\sigma=1$ 时，变量 X 服从标准正态分布

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

5.1 从二项分布的推导（de Moivre-Laplace 定理）

设随机变量 $X_n\sim B(n,p)$. 方便起见，令 $q=1-p$. 众所周知，二项分布的期望与方差满足 $E(X_n)=np$，$D(X_n)=npq$.

对随机变量 X_n 做归一化：

$$\bar{X}_n=\frac{X_n-E(X_n)}{\sqrt{D(X_n)}}=\frac{X_n-np}{\sqrt{npq}}$$

考虑到

$$P(\bar{X}_n=x)=P(X_n=np+x\sqrt{npq})$$

令 $k=np+x\sqrt{npq}$，则

$$P(\bar{X}_n=x)=P(X_n=k)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

此时 n,k 均趋于无穷大，故可应用例 3.1 对二项式系数做出估计

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}&\sim\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}p^kq^{n-k}\\&=\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}\\&=\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\exp\left(k\ln\frac{np}{k}+(n-k)\ln\frac{nq}{n-k}\right)\end{aligned}$$

下面分别处理 $k\ln\frac{np}{k}$ 和 $(n-k)\ln\frac{nq}{n-k}$.

$$\begin{aligned}k\ln\frac{np}{k}&=-(np+x\sqrt{npq})\ln\frac{np+x\sqrt{npq}}{np}\\&=-(np+x\sqrt{npq})\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\\&=-(np+x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{x^2q}{2np}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\&=-x\sqrt{npq}+\frac{1}{2}x^2q-x^2q+o(1)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(n-k)\ln\frac{nq}{n-k} &= -(nq-x\sqrt{npq})\ln\frac{nq-x\sqrt{npq}}{nq} \\
&= -(nq-x\sqrt{npq})\ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \\
&= (nq-x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{p}{nq}}+\frac{x^2p}{2nq}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= x\sqrt{npq}+\frac{1}{2}x^2p-x^2p+o(1)
\end{aligned}
$$

因此

$$
k\ln\frac{np}{k}+(n-k)\ln\frac{nq}{n-k} = -\frac{1}{2}x^2(p+q)+o(1) = -\frac{1}{2}x^2+o(1)
$$

下面处理 $\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}$.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} &= \sqrt{\frac{n}{2\pi(np+x\sqrt{npq})(nq-x\sqrt{npq})}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi(p+x\sqrt{\frac{pq}{n}})(q-x\sqrt{\frac{pq}{n}})}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\pi npq+o(1)}}
\end{aligned}
$$

将上述结果代回，我们就得到

$$
\binom{n}{k}p^kq^{n-k} = \sqrt{\frac{1}{2\pi npq+o(1)}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2+o(1)\right)
$$

即

$$
P(\bar{X}_n=x)=P(X_n=k)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right)
$$

这正是我们想要的.

注记 细心的同学可能会对式子前边的系数仍是 $n\to\infty$ 的一个无穷小产生疑问. 事实上，在将 X_n 归一化为 $\bar{X}_n$ 的过程中，我们将整个变量“压缩”至原来的 $\frac{1}{\sqrt{npq}}$，因此前面的系数可以理解为一种类似 $\mathrm{d}x$ 的存在. 况且，连续性随机变量落在某一点的概率也确应为 0.

6 Challenge

选讲或留作课后讨论.

6.1 正态分布的归一性验证

这将涉及到多元积分学的内容.

6.2 Wallis 公式视角下三阶乘与中心三项式系数的渐进估计

习题 6.1 求

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-2)!!!}{(3n)!!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times4\times7\times\cdots\times(3n-2)}{3\times6\times9\times\cdots\times3n}
$$

并对其做出渐进估计.

习题 6.2 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-1)!!!}{(3n)!!!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times5\times8\times\cdots\times(3n-1)}{3\times6\times9\times\cdots\times3n}$$

并对其做出渐进估计.

习题 6.3 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n)!/(n!)^3}{3^{3n}}$$

并对其做出渐进估计.

用 Stirling 公式计算得到的结果是

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi n}$$

但在 Wallis 公式的视角下如何获得?

参考文献

[1] 张筑生. 数学分析新讲（重排本）（第二册）[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2021.

[2] 张颢. 概率论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.