방학 5주차

금융 속 수학

수나로움

금융공학이란

금융공학 : 경제활동에 있어서 필수적인 자금에 관련된 문제를 대상으로 함

자금의 잉여주체와 부족주체 사이 대차관계에서 발생하는 여러 문제들, 특히 위험의 평가와 관리에 관한 문제에 대해서 경제학 · 경영학 그리고 수리적 지식을 동원해서 문제해결을 도모함

사기업의 선택 문제

운영, 투자, 사업 등을 하기 위해서는 많은 자금을 필요로 함

자기자금 이용, 금융기관으로부터의 차입, 금융자산 발행 등으로 자금 조달

사기업의 선택 문제

고전적 기업재무론 vs 현실시장

고전적 기업재무론 : 거래비용과 세금이 없으며 자금의 대차에 제한이 없는 가상적 시장인 마찰이 없는 시장에서는 Modigliani-Miller 정리를 인용함

현실 시장 : 현실 시장에서는 '마찰이 없는 시장'의 조건을 만족하는 경우가 없으므로 최적의 자본구성이나 그것에 동반하는 자본비용이 중요함

Modigliani-Miller 정리 (모딜리아니-밀러 정리)

이 정리는 완전자본시장을 가정으로 함

제1명제 : 기업의 가치는 자본구조가 아니라 기업에 유입되는 현금흐름이 결정짓는다.
제2명제 : 자기자본 비용은 부채비율과 선형적으로 증가한다

투자자의 의사결정 문제

어떤 금융 자산에 얼마를 언제 투자해야 하는가?

Neumann & Morgenstern (1944)에 의하면, 불확실성 하에서 합리적 의사결정은 기대효용이론에 입각해야 한다고 함

금융경제학이란

금융공학을 제대로 공부하기 위해서는 금융경제학을 알아야 함

금융경제학은 기대효용이론에 따라서 최적화(optimization), 균형(equilibrium), 그리고 재정(arbitrage)을 주축으로 구성되어 있음

금융경제학의 의의와 한계

이상적 시장인 완전자본시장에서는 나름대로 설득력 있는 이론체계를 형성하고 있음

현실에서는 완전자본시장 조건이 만족된다고 할 수 없으며, 기대효용이론이 절대적 법칙이라고는 볼 수 없음

금융자산

무위험자산(안전자산)과 위험자산

안전자산 : 현금, 은행예금, 할인채와 같이 현재시점에서 그 미래가치를 확실히 규정할 수 있는 자산

위험자산 : 주식이나 금융 파생상품 등 시간이 경과함에 따라 가격이나 수익률이 확률적으로 변동하기에 현금흐름이 불확실한 자산

무위험자산

금융자산의 가치를 확률변수로 표현했을 때 상수가 됨

무위험자산의 가치를 평가하기 위해서는 이자를 계산하는 것이 중요함

무위험자산과 이자

케인즈 경제학에서는 이자를 현금이 갖는 유동성을 희생하는 담보의 대가라고 지칭함

무위험자산에서는 불확실성을 포함하지 않는 확정적인 현금흐름을 제공하는 고정이자를 제공함.
ex) 정기예금, 무이표채

이자 계산하기 - 단리 (Simple Interest)

연이자율이 r이고, 원금이 P, 예금 기간이 t년

t년후 예금자는 원리금 P *(1+rt) 를 받음

이자 계산하기 – 복리 (Compound Interest)

연이자율이 r이고, 원금이 P, 예금 기간이 t년, 1년을 M개로 나누기

t년후 예금자는 원리금 P *(1+rt/M)^M 를 받음

이자 계산하기 - 시점에 따라 변화하는 이자

시점이 t, 이자율이 r_t, h가 충분이 작은 값

시점 t일 때 원금 P를 저금하면 시점 t+h에 대하여 원리금이 P(1+hr_t)에 근사함.

여기서 이자율 r_t를 (순간적) 현물이자율이라고 함.

할인 계산하기

연이자율이 r이고, 원금이 P, 예금 기간이 t년, 1년을 M개로 나누기

연속복리예금에서 미래 시점에 원리금 P를 얻으려면 현재 시점에서 Pe^(-rt)를 넣어야 함.

여기서 e^(-rt)를 할인인자라 하고, 이 과정을 미래 가치를 현재 가치로 환산하기 위한 할인이라고 함

일드 곡선 (Yield Curve)

시점 0에서 원금 1을 예금했을 때, 시점 t에서의 원리금을 D_t

충분히 작은 h에 대해 $D_{(t+h)}$는 $D_t(1+h(r_t))$에 근사함.

이 근사식을 바탕으로 $d(D_t)/dt = d_t * r_t$를 유도할 수 있음.

일드 곡선 (Yield Curve)

시점 0에서 원금 1을 예금했을 때, 시점 t에서의 원리금을 D_t

유도된 식을 기반으로 정리하면 D_t = exp(integral from 0 to t (r_s) ds) 라고 할 수 있음.

이를 기반으로 r_t를 시간구간 [0, t]에서 평균현물이자율이라고 했을 때,
bar r_t = 1/t integral 0 to t r_s ds 가 되고, 이 함수의 음이 아닌 부분을 일드 곡선이라고 함

일드 곡선 (Yield Curve)

시점 0에서 원금 1을 예금했을 때, 시점 t에서의 원리금을 D_t

유도된 식을 기반으로 정리하면 D_t = exp(integral from 0 to t (r_s) ds) 라고 할 수 있음.

이를 기반으로 r_t를 시간구간 [0, t]에서 평균현물이자율이라고 했을 때,
bar r_t = 1/t integral 0 to t r_s ds 가 되고, 이 함수의 음이 아닌 부분을 일드 곡선이라고 함

자산 배분

일반투자자들은 위험성을 적게 가져가는 것을 선호하는 경향이 있음

고전적 재무이론에서는 포트폴리오를 활용하여 재산 배분을 하는 것을 권장하고 있음

자산 배분 문제

포트폴리오 : 투자대상이 되는 금융자산들의 조합

포트폴리오를 구성할 때 수중에 있는 자금을 어떻게 배분할지 결정하는 문제임

포트폴리오 무게 (Portfolio Weight)

자산총액에 대한 개별자산 투자액의 비율

자산 1억원 중 A에 4천만원을, B에 6천만원을 투자하면 포트폴리오 무게는 각각 0.4와 0.6임.

투자되지 않은 개별자산의 포트폴리오무게는 0이며, 음이 될 수도 있음.
포트폴리오 무게의 합은 항상 1임.

수익률

가격이나 수익률을 수리적으로 표혀하기 위해 확률변수를 사용함

금융공학에서 사용하는 확률은 진짜 확률보다는
Axiomatic Probabilty의 정의를 따르는 합성확률임

Axiomatic Probability (공리적 확률)

고전적 확률은 각 원소의 발생 가능성을 동일한 것으로 보기에 적용하기 어려움

수학자 콜모고로프가 세 공리를 만족하는 공리적 확률을 정의함.

(1) 확률 P(A)는 0 이상 1 이하다.
(2) 전체집합의 크기는 1이다
(3) 모든 사건은 서로 배반이다

금융자산가격의 확률모형 구축 – Naive Method

자연스러운 발상법은 '금융자산가격' 자체를 확률변수로 나타내기

확률변수의 존재를 암묵적으로 가정하고, 확률변수 y의 확률분포함수 F(y)를 고찰대상으로 함.

이에 따라 확률분포함수 F(y)의 구체적인 형태와 모수들은 통계적 수법을 통해
과거 데이터로부터 추정함.

Naive Method의 의의와 한계점

취급이 비교적 간단하다는 장점이 있음

F(y)를 확률분포함수로 하는 확률변수가 존재한다는 보증이 없다는 한계가 있음.

금융자산가격의 확률모형 구축 - Theoretical Method

수학자들이 선호하는 방법

이론적으로 확률변수와 확률공간을 이론적으로 구성함

Theoretical Method의 의의와 한계점

이론을 전개해서 얻은 결과가 옳은지 여부를 검증할 수 있음

다만, 이론적 구성을 기반으로 하므로 이 확률변수가 현실적 모형으로 적당한지 조사해야 함.

자본 이득

매도가에서 매입가를 뺀 값

투자의 주된 목적은 자본 이득을 얻는 것이므로, 투자의 효율성 차원에서 투자금액을 고려할 필요가 있음

예를 들어 주식을 10에 구입하여 20에 매각하면 자본이득은 10이 됨

수익률 (Return Rate)

자본이득을 투자액으로 나눈 값으로, 투자의 효율성을 나타내는 척도

현재 시점 t=0에서 금융자산 가격이 s0고, 미래 시점 t=1에서 금융자산가격이 S1일 때

자본 이득 : S1-s0
금융자산의 수익률 : R = (S1-s0) / s0

일반화된 수익률

t 시점에서 s_t로 매입하고, 배당 D가 들어왔을 때 시점 t+k에서 가격 S_(t+k)에서 매각하기

수익률 R_t(k) : (S_(t+k)+D(t+k)-s_t)/s_t

k의 단위시간은 1일, 1개월, 1년 등이 될 수 있으며 각각 일별/월별/연별 수익률이 됨

이 때 1+R_t(j) = PI s=0 to k-1 (1+R_(t+s)(1))라는 식이 성립함

과제

경제, 투자에서 쓰이는 다른 수학적 개념들 찾아보기

수나로움

THANK YOU