



高考数学提升讲义

——实战经验和思维提升

作者：孙宇轩

时间：December 14, 2022

版本：1.3



这个人很懒，假装什么也没留下

前言

The content of introduction

目录

第 1 章 自然的解题流程	1
1.1 简洁优美的解法来自哪里	1
1.2 示例	2
第 2 章 解题的最后一招	4
2.1 几何：坐标系与向量语言	4
2.2 代数：函数与导数语言	4
2.3 逻辑：	4
第 3 章 题目中的控制关系	5
3.1 函数形式的控制关系	5
3.2 几何形式的控制关系	5
3.3 变量可求的判断	5
第 4 章 题目中的自由变量	6
4.1 赋予自由度	6
4.2 自由变量的选取	6
4.3 无关自由变量	6

第1章 自然的解题流程

导言

在系列开始，我希望依靠具体题目的分析先给出整个体系的概览。我选取了2022年全国乙卷中部分题目作为例题，在旅程的最开始就攀登上最困难的高峰，可以给我们一种“一览众山小”的信心。在本章中我不会使用任何二级结论，仅通过定义与对自然语言的理解解题。

1.1 简洁优美的解法来自哪里

例题 1.1 嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星，为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列 $\{b_n\}$: $b_1 = 1 + \frac{1}{\alpha_1}, b_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}, b_3 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3}}}$, 依此类推，其中 $\alpha_k \in \mathbb{N}^* (k = 1, 2, \dots)$. 则

- A. $b_1 < b_5$ B. $b_3 < b_8$ C. $b_6 < b_2$ D. $b_4 < b_7$

解： $\forall i = 2k + 1, n > i, (n, k \in \mathbb{N})$,

$$b_n = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_n}}} = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i + \beta_n}}} \text{ (奇数个分数线)} < \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_i}}} = b_i \quad (\beta_n > 0)$$

同理, $\forall i = 2k, n > i, (n, k \in \mathbb{N})$, $b_i < b_n$, 所以选 C。

1.1.1 思路分析

直接接触这个答案可能会有些突兀，原因是用温习写出来的答案都是思考的结果，想要真正提高能力，需要的是思考的过程，下面我将尽力展示这一过程：

1.1.1.1 从题目要求出发

题目要求比较 b_n 的大小 \rightarrow 试图确定 $b_n \xrightarrow{\text{难以准确计算}} \text{理解生成过程} \xrightarrow{\text{分类讨论}} \text{得出大小关系}$

如此解题需要的经验和能力：

- 目标明确
- 熟悉分式比较大小
- 理解数列的递推思想

这种解法对题目的理解要求较高，更加节省时间，更加严谨。

1.1.1.2 从题目条件出发

题目的障碍主要来自两个数列难以控制，所以可以从这两个条件入手：

a_n 限制条件单一 \rightarrow 不影响比较大小 $\xrightarrow{\text{令 } a_n=1 \text{ 观察}}$ 确定 b_n 的大致形态 \rightarrow 得出结果

如此解题需要的经验和能力：

- 能够分析题目中的控制关系
- 能够从特殊结论中找到一般解法

适用于无法一眼看出解法的题目，为确保严谨性，通常在找到思路后用前一种方式推理一遍，这样也能提高下次遇到同种题目直接想到解法的概率。

1.1.2 总结

实际上，能够在考试中灵活运用第一种解法，依靠的是第二种解法的不断训练。只有经过了各种错误的试探，体会各种概念间的关系，才能在多种不同的路径中准确选出快速解题的路径。而在面对一时超出认知的新题时，第二种方法仍然是唯一的路径。

1.2 示例

1.2.1 运用经验快速解题的示例

例题 1.2 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立。已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1, p_2, p_3 ，且 $p_3 > p_2 > p_1 > 0$ 。记该棋手连胜两盘的概率为 p ，则

A. p 与该棋手和甲、乙、丙比赛次序无关 B. 该棋手在第二盘与甲比赛， p 最大

C. 该棋手在第二盘与乙比赛， p 最大 D. 该棋手在第二盘与丙比赛， p 最大

解： 分析题目可知，第二场胜率与结果唯一正相关，因此选 B。

分析： 连续获胜两局的情况有两种，第一、二场或第二、三场获胜。由于、三场的对称性，能够影响最终概率的只有第二场的胜率，这也和选项的提示一致。

此时实际上可以选出选项，A 必然不对，CD 必然同对或同错，单选题中必然同错，所以选 B。

关于这一答案的严谨推理可以用假设实验：补全对称性，如果第一、三场获胜也可以称为连胜的话，三场完全对称，与选择无关，设为 p' 。因此原始状态下连胜的概率是 p' 减去一、三场获胜，第二场败的概率 p_0 。想要让 p_0 最小，显然应该让第二场胜率最大。

有些参考书中会列出六种情况再比较大小，实际上是忽略了对称关系而导致问题复杂化，即使想不到假设实验的做法，至少要看出一三场对称，减少一半的计算量。

注 关于对称性的利用将会在后文详细讲解，本题主要是用于感受经验对做题速度的影响。

1.2.2 分析问题找出思路的示例

例题 1.3 已知 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别是函数 $f(x) = 2a^x - ex^2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的极小值点和极大值点. 若 $x_1 < x_2$, 则 a 的取值范围是

解: 对 $f(x)$ 求导得

$$f'(x) = 2a^x \ln a - 2ex, \quad f''(x) = 2a^x \ln^2 a - 2e$$

则 $f'(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 且 $x \in (x_1, x_2)$ 时 $f'(x) > 0$

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ f''(x_0) = 0 \\ f'(x_0) > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} t := \ln a < 0 \\ 2\frac{e}{t} - \frac{2e(1-2\ln(-t))}{t} > 0 \end{cases} \implies a \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$$

分析: 条件中对函数共有两种描述: 几何上给出了极大值点和极小值点的位置关系, 代数上给出了函数带一个参数的解析式。

分析几何描述, 函数的整体趋势大致是 (考虑到其形式较为简单, 实际上一定是) 减 \rightarrow 增 \rightarrow 减 (见 1.1)。

分析解析式, 对其求导, 发现 $f'(x)$ 是指数函数减去正比例函数的形式, 定性的分析, 其图像有四种情况, 1.2 和 1.3 中画出的两种和二者分别对应的直线与曲线不相交的情形。考虑到几何描述, 显然只有 1.3 对应的情况符合题意, 因此题目对 a 的限制条件就能总结为

$$\begin{cases} 0 < a < 1 \\ f'(x) \text{ 有两个零点} \iff \exists x_1, s.t. f'(x_1) > 0 \iff \max f'(x) > 0 \iff \begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ f'(x_0) > 0 \end{cases} \end{cases}$$

$0 < a < 1$ 这一条件保证了在 1.2 和 1.3 中只能选择 1.3, 另一条件保证 $f(x)$ 只能选择 1.2 和 1.3 中的一个。关于第二个条件可以通过对 a 赋予自由度作临界分析简化运算, 将在【4: 题目中的自由变量】一章中详细介绍, 此处我们用最直接的方法, 只要找到一个函数值大于 0 的点, 即可确定函数有两个零点, (这是由于排除了 $a > 1$ 情况的干扰)。

注 在这道题中, 我们将两个不同的条件统一到图像上, 再进一步列出了方程。

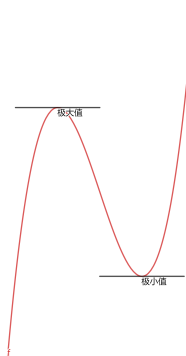


图 1.1: 减 \rightarrow 增 \rightarrow 减

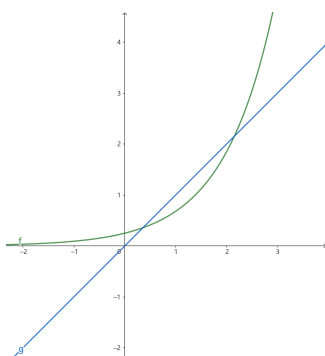


图 1.2: $a > 1$

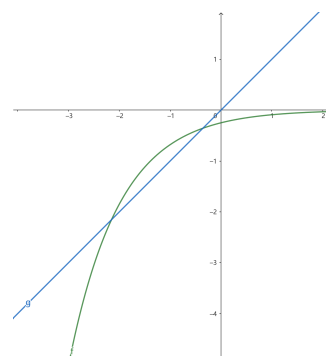


图 1.3: $0 < a < 1$

第 2 章 解题的最后一招

导言

第二章的核心目的是搭建起一个信念：题目一定是可以解出来的。这并不是一句废话，我的意思是，不论题目出的有多新颖离奇，我们都有这样一种方法，尽管有可能非常繁琐，我们知道通过这样的方法一定能解出这道题目，考试时只要基于此再对方法进行一定的优化，而不会陷入无头苍蝇乱撞的情境中。而通常这也是我面对一道题目时，最先想到的解法。

2.1 几何：坐标系与向量语言

2.2 代数：函数与导数语言

2.3 逻辑：

第 3 章 题目中的控制关系

3.1 函数形式的控制关系

3.2 几何形式的控制关系

3.3 变量可求的判断

第 4 章 题目中的自由变量

4.1 赋予自由度

4.2 自由变量的选取

4.3 无关自由变量

4.3.1 对称、全等和相似

4.3.2 * 仿射变换

4.3.3 * 射影变换