

$$\mathcal{H}\hat{\mathbb{J}}\mathcal{H}_n\mathcal{K}\mathbb{D}\{f, g\} \frac{1}{i\hbar} [A, B] \hbar \text{Tr } A < x, y >$$

1 Общие определения

В классической механике [1] представлены пары (\mathcal{H}, E) - где E - вещественное или комплексное векторное пространство четной вещественной размерности, называемое фазовым, \mathcal{H} - алгебра бесконечно дифференцируемых действительнозначных функций на E , с операцией умножения определенной как перемножение функций. Алгебра \mathcal{H} называется алгеброй наблюдаемых и снабжается дополнительной операцией - скобкой Пуассона, определяющей динамику наблюдаемых.

Определение 1.1 Скобкой Пуассона на алгебре \mathcal{H} называется операция, удовлетворяющая следующим свойствам

1. Антисимметричность

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

2. Линейность по первому аргументу

$$\{\alpha g + \beta h, f\} = \alpha\{g, f\} + \beta\{h, f\}$$

3. Правило Лейбница

$$\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$$

4. Тождество Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

для любых $f, g, h \in \mathcal{H}$.

В случае если фазовое пространство E - бесконечномерное локально-выпуклое пространство, очевидным способом определения скобки Пуассона является введение на E симплектической структуры[2].

Определение 1.2 Симплектическим локально выпуклым пространством называется пара (E, \mathbb{J}) , где E - локально выпуклое пространство, $\mathbb{J}: E' \rightarrow E$ - непрерывное линейное отображение, такое что выполняются равенства $\mathbb{J}^* = -\mathbb{J}$.

Пусть \mathcal{H} снабжена слабой локально выпуклой топологией, в которой оператор взятия производной непрерывен, тогда положим:

$$\{f, g\} = \langle f', \mathbb{J}g' \rangle$$

Скобка Пуассона будет корректно определена, например, в случае, например, когда топология на \mathcal{H} задается системой полунорм:

$$p_{C,n}(f) = \max_{x \in C} |f^{(n)}(x)|$$

где C - компакт в E . Алгебру наблюдаемых, снабженную операцией скобки Пуассона будем называть Пуассоновой алгеброй.

Определение 1.3 Системой Гамильтона-Дирака на фазовом пространстве E это набор $(E, \mathbb{J}, \mathcal{H}, h, \Phi)$, где (E, \mathbb{J}) - образуют симплектическое локально выпуклое пространство, \mathcal{H} - алгебра Пуассона с выделенным элементом h -Гамильтонианом, $\Phi: E \rightarrow E_\Phi$ - функцией связей.

Множество $\Gamma_\Phi = \{x \in E, \Phi(x) = 0\}$ будем называть поверхностью связей. Для системы $(E, \mathbb{J}, \mathcal{H}, h, \Phi)$ рассмотрим расширение гамильтониана:

$$h(x, \lambda)_\lambda = h(x) + \langle \Phi(x), \lambda \rangle$$

2 Динамика систем Гамильтона-Дирака

Пусть дана система Гамильтона-Дирака $(E, \mathbb{J}, \mathcal{H}, h, \Phi)$. Её динамику можно задать двумя различными способами. В первом случае рассматривается эволюция наблюдаемых системы:

$$\dot{f}(t) = \{f(t), h_\lambda\}, \quad f \in \mathcal{H}$$

Во втором случае рассматриваются траектории на фазовом пространстве. Будем говорить, что $x(t)$ - задает траекторию системы гамильтона дирака, если найдется $\lambda: E'_\Phi \rightarrow \mathbb{R}$, что выполняется система уравнений Гамильтона-Дирака:

$$\dot{x}(t) = \mathbb{J}h'_\lambda(x(t), \lambda(t)), \quad \Phi(x(t)) = 0$$

В этом уравнении состояние системы в каждый момент времени описывается вектором $(x(t), \lambda(t))$ из $E \times E'_\Phi$. Можно ввести понятие обобщенного состояния описываемого элементом \mathcal{H}' .

Определение 2.1 Сопряженное к \mathcal{H} как к векторному пространству, будем называть множеством состояний системы Гамильтона-Дирака. Обращение $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}'$ будем называть обобщенной траекторией системы Гамильтона-Дирака.

Эволюцию обобщенной траектории определим уравнением, двойственным к уравнению эволюции наблюдаемых. Зададим оператор дифференцирования $D_{h_\lambda}: \mathcal{H} \times E'_\Phi \rightarrow \mathcal{H}$ по формуле:

$$D_{h_\lambda}(\lambda)f(x) = \{f'(x), h'_\lambda(x, \lambda)\} = \langle f'(x), \mathbb{J}h'_\lambda(x, \lambda) \rangle$$

тогда эволюция наблюдаемых описывается уравнением

$$\dot{f} = D_{h_\lambda}f$$

Определение 2.2 Обобщенным уравнением Гамильтона-Дирака будем называть следующее:

$$\dot{\psi}(t) = D_{h_\lambda}^*(\lambda)\psi(t) \quad \psi(t) \in \mathcal{H}'$$

где $D_{h_\lambda}^*$ сопряженное к D_{h_λ} линейное отображение.

Применяя естественное вложение E в \mathcal{H}' , получаем из обобщенного уравнения Гамильтона-Дирака траекторное уравнение Гамильтона-Дирака.

3 Квантование топологических пуасоновых алгебр

Для задания процедуры квантования пары (\mathcal{H}, E) необходимо определить следующие объекты и их свойства:

1. (I, \leq) - множество индексов с определенным на нем отношением предпорядка
2. $\hat{\mathcal{H}}_n$ - набор топологических алгебр, проиндексированных элементами $n \in I$. Причём все $\hat{\mathcal{H}}_n$ как векторные пространства обладают слабой топологией.
3. $\mathcal{K}_n: \mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_n$, $n \in I$ - непрерывные линейные сюръекции, называемые частичными квантованиями. \mathcal{K}_n не обязательно является гомоморфизмом алгебр, но выполняется следующее:

$$\mathcal{K}_n\{f, g\} = \frac{1}{i\hbar}[\mathcal{K}_nf, \mathcal{K}_ng]$$

где $f, g \in \mathcal{H}$, \hbar - действительная константа, а $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор элементов $\hat{\mathcal{H}}_n$

4. $\mathbb{I}_{n,m}: \hat{\mathcal{H}}_n \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_m$, $n \leq m$, $n, m \in I$ - набор гомоморфизмов алгебр, причём:

$$\mathbb{I}_{m,n} \circ \mathbb{I}_{n,k} = \mathbb{I}_{m,k}$$

для любых $n, m, k \in I$, таких что $m \leq n \leq k$.

5. $\mathbb{D}_{n,m}: \hat{\mathcal{H}}_n \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_m$, $n \geq m$, $n, m \in I$ - набор гомоморфизмов алгебр, таких что:

$$\mathbb{D}_{m,n} \circ \mathbb{D}_{n,k} = \mathbb{D}_{m,k}$$

для любых $n, m, k \in I$, таких что $m \geq n \geq k$.

6. Для любых $n, m \in I$ выполняется:

$$\mathbb{D}_{n,m} \circ \mathbb{I}_{m,n} = \mathbb{I}_{n,m} \circ \mathbb{D}_{m,n} = \text{Id}_{\hat{\mathcal{H}}_n}$$

Гомоморфизмы $\mathbb{I}_n, \mathbb{D}_n$ и сопряженные как отображения линейных пространств к ним непрерывные линейные операторы $\mathbb{I}'_n, \mathbb{D}'_n$ задают структуры, используя их становится возможным взятие проективного (\varprojlim) и индуктивного (\varinjlim) предела алгебр $\hat{\mathcal{H}}_n$ и пространств состояний $\hat{\mathcal{H}}'_n$.

Определение 3.1 Квантованием (\mathcal{H}, E) называется пара $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{E})$, где $\hat{\mathcal{H}}$ определяется как проективный предел алгебр $\hat{\mathcal{H}} = \varprojlim \hat{\mathcal{H}}_n$, а \hat{E} определяется как индуктивный предел $\hat{E} = \varinjlim \hat{\mathcal{H}}'_n$.

Из определения проективного и индуктивных пределов следует, что существует непрерывное вложение фазового пространства \hat{E} в пространство обобщенных состояний $\hat{\mathcal{H}}'$. Будем рассматривать $\hat{\mathcal{H}}$ как функции над \hat{E} , вычисляемые по закону

$$\hat{F}(\hat{x}) = \langle \hat{x}, \hat{F} \rangle, \quad \hat{x} \in \hat{E}.$$

4 Мера Вигнера и уравнения Мoyal-Дирака

Пусть $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{E})$ результат квантования пары (\mathcal{H}, E) .

Определение 4.1 Мерой Вигнера, сопоставленной элементу фазового пространства $\hat{x} \in \hat{E}$ называется такой $W_x \in \mathcal{H}'$, что

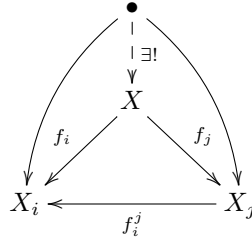
$$\langle \hat{F}, \hat{x} \rangle = \langle F, W_x \rangle$$

где \hat{F} - результат квантования наблюдаемой F , $\hat{F} = \mathcal{K}F$.

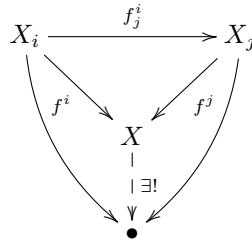
Далее описывается динамика меры Вигнера для квантовых систем Гамильтона - Дирака.

5 Пример: квантование по Вейлю конечномерной гамильтоновой системы

inverse limit,
projective limit,
 \varprojlim ,
обратный предел,
проективный предел



direct limit,
injective limit,
 \varinjlim ,
прямой предел,
инъективный предел



Список литературы

- [1] В.И. Арнольд *Математические методы классической механики*, 5-354-00341-5, 2003 г.

- [2] Т.С. Ратбю , О.Г. Смолянов *КВАНТОВАНИЕ ПО ВИГНЕРУ СИСТЕМ ГАМИЛЬТОНА–ДИРАКА*. ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2015, том 460, No 5, с. 525–528