$$\mathcal{H}\hat{\mathbb{J}}\hat{\mathcal{H}}_n\mathcal{K}\mathbb{ID}\{f,g\}\frac{1}{i\hbar}[A,B]\hbar\,\mathrm{Tr}\,A<x,y>$$

1 Общие определения

В класической механнике [1] представленны пары $(\mathcal{H}, E)$ - где E - вещественное или комплексное векторное пространство четной вещественной размерности, называемое фазовым, $\mathcal{H}$ - алгебра бесконечно дифференцируемых действительнозначных функций на E, с операцией умножения определенной как перемножение функций. Алгебра $\mathcal{H}$ называется алгеброй наблюдаемых и снабженнается дополнительной операцией - скобкой Пуассона, определяющей динамику наблюдаемых.

Определение 1.1 *Скобкой Пуасона на алгебре $\mathcal{H}$ называется операция, удволетворяющая следующим свойствам*

1. *Антисимметричность*

$$\{f,g\} = -\{g,f\}$$

2. *Линейность по первому аргументу*

$$\{\alpha g + \beta h, f\} = \alpha\{g,f\} + \beta\{h,f\}$$

3. *Правило Лейбница*

$$\{fg,h\} = \{f,h\}g + f\{g,h\}$$

4. *Тождество Якоби*

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\}$$

для любых $f, g, h \in \mathcal{H}$.

В случае если фазовое пространство E - бесконечномерное локально-выпуклое пространство, очевидным способом определения скобки Пуасона является введение на E симплектической структуры[2].

Определение 1.2 *Симплектическим локально выпуклым пространством называется пара $(E, \mathbb{J})$, где E - локально выпуклое пространство, $\mathbb{J}\colon E' \to E$ - непрерывное линейное отображение, такое что выполнятся равенство $\mathbb{J}^* = -\mathbb{J}$.*

Пусть $\mathcal{H}$ снабжена слабой локально выпуклой топологией, в которой оператор взятия производной непрерывен, тогда положим:

$$\{f,g\} =< f', \mathbb{J}g' >$$

Скобка Пуасона будет корректно определена, например, в случае, например,когда топология на $\mathcal{H}$ задается системой полунорм:

$$p_{C,n}(f) = \max_{x\in C} |f^{(n)}(x)|$$

где C - компакт в E. Алгебру наблюдаемых, снабженную операцией скобки Пуасона будем называть Пуасоновой алгеброй.

Определение 1.3 *Системой Гамильтона-Дирака на фазовом пространстве E это набор $(E, \mathbb{J}, \mathcal{H}, h, \Phi)$, где $(E, \mathbb{J})$ - образуют симплектическое локально выпуклое пространство, $\mathcal{H}$ - агебра Пуасона с выделенным элементом h-Гамильтонианом, $\Phi\colon E \to E_\Phi$ - функцией связей.*

Множество $\Gamma_\Phi = \{x \in E, \Phi(x) = 0\}$ будем называть поверхностью связей. Для системы $(E, \mathbb{J}, \mathcal{H}, h, \Phi)$ рассмотрим расширенние гамильтониана:

$$h(x, \lambda)_\lambda = h(x) + < \Phi(x), \lambda >$$

2 Динамика систем Гамильтона-Дирака

Пусть дана система Гамильтона-Дирака $(E, \mathbb{J}, \mathcal{H}, h, \Phi)$. Её динамику можно задать двумя различными способами. В первом случае рассматривается эволюция наблюдаемых системы:

$$\dot{f(t)} = \{f(t), h_\lambda\}, \qquad f \in \mathcal{H}$$

Во втором случае рассматриваются траетории на фазовом пространстве. Будем говорить, что $x(t)$ - задает траекторию системы гамильтона дирака, если найдется $\lambda\colon E'_\Phi \to \mathbb{R}$, что выполняется система уравнений Гамильтона-Дирака:

$$\dot{x}(t) = \mathbb{J}h'_\lambda(x(t), \lambda(t)), \qquad \Phi(x(t)) = 0$$

В этом уранении состояние системы в каждый момент времени описывается вектором $(x(t), \lambda(t))$ из $E \times E'_\Phi$. Можно ввести понятие обобщенного состояния описываемого элементом $\mathcal{H}'$.

Определение 2.1 *Сопряженное к $\mathcal{H}$ как к векторному пространству, будем называть множеством состояний системы Гамильтона-Дирака. Отображение $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathcal{H}'$ будем называть обобщенной траекторией системы Гамильтона-Дирака.*

Эволюцию обощенной траектории определим уравнением, двойственным к уравнению эволюции наблюдаемых. Зададим оператор дифференцирования $D_{h_\lambda}\colon \mathcal{H} \times E'_\Phi \to \mathcal{H}$ по формуле:

$$D_{h_\lambda}(\lambda)f(x) = \{f'(x), h'_\lambda(x, \lambda)\} =< f'(x), \mathbb{J}h'_\lambda(x, \lambda) >$$

тогда эволюция наблюдаемых описывается уравнением

$$\dot{f} = D_{h_\lambda} f$$

Определение 2.2 *Обобщенным уравнением Гамильтона-Дирака будем называть следуещее:*

$$\psi(t) = {D_{h_\lambda}}^*(\lambda)\psi(t) \qquad \psi(t) \in \mathcal{H}'$$

где ${D_{h_\lambda}}^*$ сопряженное к D_{h_λ} линейное отображение.

Применяя естественное вложение E в $\mathcal{H}'$, получаем из обобщенного уравнения Гамильтона-Дирака траекторное уравнеие Гамильтона-Дирака.

3 Квантование топологических пуасоновых алгебр

Для задания процедуры квантования пары $(\mathcal{H}, E)$ необходимо определить следующие объекты и их свойства:

1. $(\mathrm{I}, \leq)$ - множество индексов с определенным на нем отношением предпорядка

2. $\hat{\mathcal{H}}_n$ - набор топологических алгебр, проиндексированных элементами $n \in \mathbb{I}$. Причём все $\hat{\mathcal{H}}_n$ как векторые пространства обладают слабой топологией.

3. $\mathcal{K}_n \colon \mathcal{H} \to \hat{\mathcal{H}}_n,\ n \in \mathrm{I}$ - непрерывные линенйные сюрьекции, называемые частичными квантованиями. $\mathcal{K}_n$ не обязательно является гомоморфизмом алгебр, но выполняется следуещее:

$$\mathcal{K}_n\{f, g\} = \frac{1}{i\hbar}[\mathcal{K}_n f, \mathcal{K}_n g]$$

   где $f, g \in \mathcal{H}$, $\hbar$ - действительная константа, а $[\cdot, \cdot]$ обозночает коммутатор элементов $\hat{\mathcal{H}}_n$

4. $\mathbb{I}_{n,m} \colon \hat{\mathcal{H}}_n \to \hat{\mathcal{H}}_m,\ n \leq m,\ n, m \in \mathrm{I}$ - набор гомоморфизмов алгебр, причём:

$$\mathbb{I}_{m,n} \circ \mathbb{I}_{n,k} = \mathbb{I}_{m,k}$$

   для любых $n, m, k \in \mathrm{I}$, таких что $m \leq n \leq k$.

5. $\mathbb{D}_{n,m} \colon \hat{\mathcal{H}}_n \to \hat{\mathcal{H}}_m,\ n \geq m,\ n, m \in \mathrm{I}$ - набор гомоморфизмов алгебр, таких что:

$$\mathbb{D}_{m,n} \circ \mathbb{D}_{n,k} = \mathbb{D}_{m,k}$$

   для любых $n, m, k \in \mathrm{I}$, таких что $m \geq n \geq k$.

6. Для любых $n, m \in \mathrm{I}$ выполняется:

$$\mathbb{D}_{n,m} \circ \mathbb{I}_{m,n} = \mathbb{I}_{n,m} \circ \mathbb{D}_{m,n} = \mathrm{Id}_{\hat{\mathcal{H}}_n}$$

Гомоморфизмы $\mathbb{I}_n, \mathbb{D}_n$ и сопряженные как отоброжения линейных пространств к ним непрерывные линейные операторы $\mathbb{I}'_n$, $\mathbb{D}'_n$ задают структуры, используя их становится возможным взятие проективного ($\varprojlim$) и индуктивного ($\varinjlim$) предела алгебр $\hat{\mathcal{H}}_n$ и пространств сосояний $\hat{\mathcal{H}}'_n$.

Определение 3.1 *Квантованием $(\mathcal{H}, E)$ называется пара $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{E})$, где $\hat{\mathcal{H}}$ определяется как проективный предел алгебр $\hat{\mathcal{H}} = \varprojlim \hat{\mathcal{H}}_n$, а $\hat{E}$ определяется как индуктивнsq предел $\hat{E} = \varinjlim \hat{\mathcal{H}}'_n$.*

Из определения проективного и индуктивных пределов следует, что существует непрерывое вложение фазового пространства $\hat{E}$ в пространство обобщеных состояний $\hat{\mathcal{H}}'$. Будем рассматривать $\hat{\mathcal{H}}$ как функции над $\hat{E}$, вычисляемые по закону

$$\hat{F}(\hat{x}) = < \hat{x}, \hat{F} >, \qquad \hat{x} \in \hat{E}.$$

4 Мера Вигнера и уравнения Мояла-Дирака

Пусть $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{E})$ результат квантования пары $(\mathcal{H}, E)$.

Определение 4.1 *Мерой Вигнера, сопоставленной элементу фазового пространства $\hat{x} \in \hat{E}$ называется такой $W_x \in \mathcal{H}'$, что*

$$< \hat{F}, \hat{x} >=< F, W_x >$$

где $\hat{F}$ - результат квантования наблюдаемой F, $\hat{F} = \mathcal{K}F$.

Далее описывается динамика меры Вигнера для квантовых систем Гамильтона - Дирака.

5 Пример: квантование по Вейлю конечномерной гамильтоновой системы

inverse limit,
projective limit,
$\varprojlim$,
обратный предел,
проективный предел

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & X \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
X_i & & X_j \arrow[ll, "f_i^j"]
\end{tikzcd}$$

direct limit,
injective limit,
$\varinjlim$,
прямой предел,
инъективный предел

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f_j^i"] \arrow[dr, "f^i"'] \arrow[ddr, bend right] & & X_j \arrow[dl, "f^j"] \arrow[ddl, bend left] \\
 & X \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\
 & \bullet &
\end{tikzcd}$$

Список литературы

[1] В.И. Арнольд *Математические методы классической механики*, 5-354-00341-5 , 2003 г.

[2] Т.С. Ратью , О.Г. Смолянов *КВАНТОВАНИЕ ПО ВИГНЕРУ СИСТЕМ ГАМИЛЬТОНА–ДИРАКА.* ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2015, том 460, No 5, с. 525–528