我眼中的傅里叶变换（三）

目录

前程提要

- 由第一节的内容我们已知，对于一个周期为2π的函数f(x)，它可以进行傅里叶级数的展开

$$f(x+2\pi)=f(x)\text{，}\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ \text{，其中}$$

$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx \\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)cosnxdx, n\neq 0 \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)sinnxdx, n\neq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

- 第二节呢，我们不再满足周期为2π，而是将它扩展到一般的周期函数f(x) = f(x+2L)

$$f(x+2L)=f(x)\text{，}\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ \text{,其中}$$

$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(t)dt \\ a_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(t)cosn\frac{\pi}{L}dt, n\neq 0 \\ b_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(t)sinn\frac{\pi}{L}dt, n\neq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

(2)式看起来不够简洁，所以我们使用欧拉公式进行重写，得到如下的简单表示形式：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{in\omega t} \qquad \text{，其中}$$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \qquad (3)$$

傅里叶变换

傅里叶级数展开本质上就使用三角函数集来表示一个周期函数，并且形式都是一样的。

$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{in\omega t}$ ，f(t)表示任何周期函数，对于每个函数来说， $e^{in\omega t}$ 也是一样的。区别每个函数展开的，就是系数Cn。

没错，每个函数都可以被分解，分解的材料都是一样的（三角函数集和），只不过不同的函数使用每个材料的份量是不一样的（系数）。这不正是世间万物的常态吗？组成我们每个人、每个动物、每个物品的原子都是一样的，只不过“系数”不一样罢了。

哦，说的有点远了，让我们回到傅里叶变换。

我们看式（3）中的 ω ，你还记得它是怎么来的吗？第二节我们聊到了，它其实是我们中学就学过的知识，在此重申一下：

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

因为（3）式谈论的是周期函数，所以T是一个常数，所以 ω 也是一个常数。**为了更好的提示我们 ω 是常数**，我们稍微改写一下式（3），令 $\omega_0=\omega$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_ne^{in\omega_0 t}$$
$$C_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega_0 t}dt \qquad (4)$$

上面说周期函数可以进行傅里叶级数展开，现实世界中，很多函数都是没有周期的。对于没有周期的函数，我们还可以这么理解：

> 无周期的函数，它的周期为无穷大

也就是说，当 $T->+\infty$ 式（4）会发生何种的变化？

接下来就需要大家发挥一下想象力。没错，想象力，而且这也是我认为的理科与工科的不同。

> 理科讲究的是严谨，工科讲究的是能用就行，又不是不能用。

我们首先把式（4）展开：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega_0 t}dt)e^{in\omega_0 t} \qquad (5)$$

拆解来看

$$f(t)=...+C_{-2}e^{-i-2\omega_0 t}+C_{-1}e^{-i-1\omega_0 t}+C_0e^{-i0\omega_0 t}+C_1e^{-i1\omega_0 t}+C_2e^{-i2\omega_0 t}+...$$

这是一堆零散的点，我们观察到，这是 $n\omega_0$ 的离散罗列。

$$\Delta\omega=(n+1)\omega_0-n\omega_0=\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

当 $T->+\infty$ ， $\Delta\omega$ 变得越来越小，原来 $n\omega_0$ 表示的离散点变成了连续的线

ps：这里地方太小了，放不下一张图。开玩笑，后面补充一张图~

好了，万事俱备，让我们对式（5）开始进行替换：

- $n\omega_0$ 表示的离散点变成了连续的线，用数学语言来说就是

$\omega=n\omega_0$ ，其中 ω 是一个连续的变量，而不是一个常量了

- $\frac{1}{T}$ 的替换

$\frac{1}{T}=\frac{\Delta\omega}{2\pi}$

- 内层积分 $\int_0^T dt$ 的替换

$\int_0^T dt=\int_{-\infty}^{+\infty} dt$ ，有人可能会有疑问，为啥不是 $\int_0^T dt=\int_0^{+\infty} dt$ ，从0到正无穷？哦，事情是这样的，我有两种解释：

1. $\int_0^T dt=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt=\int_{-\infty}^{+\infty} dt$ ，没错吧

2.因为函数f(t)是无周期函数，t是在负无穷到正无穷之间的

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}$

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Delta\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega$

综上，将其带入到式子（5）中，我们有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt)e^{i\omega t}d\omega \qquad (6)$$

其中内层的积分便是大名鼎鼎的傅里叶变换！

$$F(\omega)=(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt) \qquad (7)$$

究其本质，傅里叶变换和傅里叶级数没什么不同，它们求的都是系数！

后记

本文姑且算作傅里叶变换第一季的最后一文（也不知道会不会有第二季，哈哈）。

行文至此，我想回答一下这个问题：

> 在实际工作中，并不需要我们手动推导傅里叶变换。而这个系列文章从头到尾的数学公式，还有意义吗？

我觉得有，我想到以下两条：

1.傅里叶变换在工科领域是如此的常见，几乎你学习每一项知识都会有它的身影。如果只是在感性上认识它，总觉缺少了灵魂。就像街头大爷张口闭口谈论国际形势，太虚了~

2.最重要的在于，整个推导的过程中，其实用到的数学知识并没有那么遥不可及深不可测，基本都是理工科大二高等数学的水平。不过三角函数、积分而已，相信自己，跟随文章的内容，自己一定可以跟着推导下来~

我很喜欢齐民友先生在《重温微积分》中的一句话：

> “数学懂得越多，从直觉里得到益处也越多，至少是受‘严格性不足’危害越少。……越往后走，越深入数学和物理学，您会得到越大的‘自由’”

希望本系列文章能够让你掌握傅里叶变换的精髓。如果能让你以后的人生旅途中，对数学减少一点点点点恐惧，我就心满意足了。

是什么契机，让我写出该系列文章呢？

在于研究PDF文档的压缩。它最重要的步骤在于JPEG图片格式压缩，而JPEG压缩最核心的思想在于离散余弦变换DCT。DCT只不过是一种特殊的傅里叶变换。

文中讨论的内容可以表示为一维傅里叶变换：每个函数可以被基准三角函数（三角函数集）解构，傅里叶变换的核心在于找到这些三角函数各自的系数。而离散余弦变换DCT是一种二维傅里叶变换：每个图像可以被多个基准图像表示，同样的，DCT的核心在于找到这些基准图像的系数。系数定了，图像解构就实现了。

是什么参考资料，给予我莫大的帮助呢？

当然网上有非常多的资料，但要说对我帮助最大的，莫过于B站up主「DR_CAN」。他的系列视频看了许多遍，跟着推导了也有两三遍，最终能够一鼓作气的完成每一篇。在此之前，我也没想到我可以原原本本的推导出