我眼中的傅里叶变换（一）

目录

创作背景

最近调研压缩pdf中的图片时，深入研究了一下JPEG图片格式的压缩原理。了解到在压缩过程中起关键作用的是DCT（Discrete cosine Transformer，离散余弦变换），而**DCT本身只是一种特殊的傅里叶变换**。这再次引起了我对傅里叶变换的兴趣。

傅里叶变换几乎是每个工科生必学的内容，究其根本，实在是它的应用太广了，从图像处理、音视频处理、电子信号处理等等，到处都有它的身影。同时它的表达式实在是抽象，很难让人一目了然，所以几乎每个工科生兜曾受其折磨。

> 将一门知识讲复杂了很容易，但是讲容易了的确是非常难的，这需要极高的学识和深刻的理解。

市面上讨论傅里叶变换的文章很多：有的是纯科普角度，没有数学推导为基础的‘软文’看起来不免有种隔靴挠痒之感；有的虽然有公式推导，但是跨度较大，很多东西没有讲细，没能讲清来龙去脉。本文力求从较基础的微积分知识出发，一步步的推导出结果，希望看后能有收获。

我尽我所能。

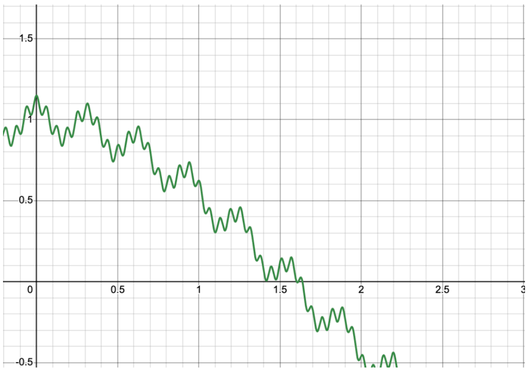
到底什么是傅里叶变换

用专业一点的语言来说，傅里叶变换的核心是「**从时域到频域的变换**」。

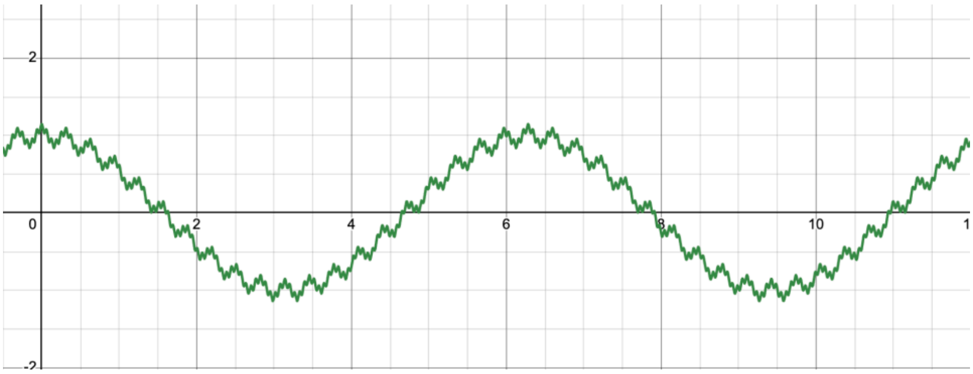
那么问题来了，为什么从时域变换到频域呢?

因为有些事情吧，在时域很不好处理的。

让我们看一个具体的例子，下图所示为函数f(x)的图像



局部细节



整体效果

我们大致能观察到f(x)是一个周期函数，它有大的波峰波谷。同时它每一时刻也在小范围的波动，如左图局部细节所示。

如果我们想要处理这个f(x)，比如让它忽略掉小的波动变化，能够表现出大的周期变化即可。

- 我们该怎么做呢?

很不好处理吧，因为此时我们是在时域的角度处理问题。

所谓的时域，就是随着x的变化导致f的变化，是我们之前的生活中遇到最常见的表现形式，也是我们最容易理解的方式。

但容易理解的形式，并不是代表容易处理。

傅里叶级数厉害的地方在于：**所有周期函数都可以分解成一堆不同频率的三角函数的组合。**

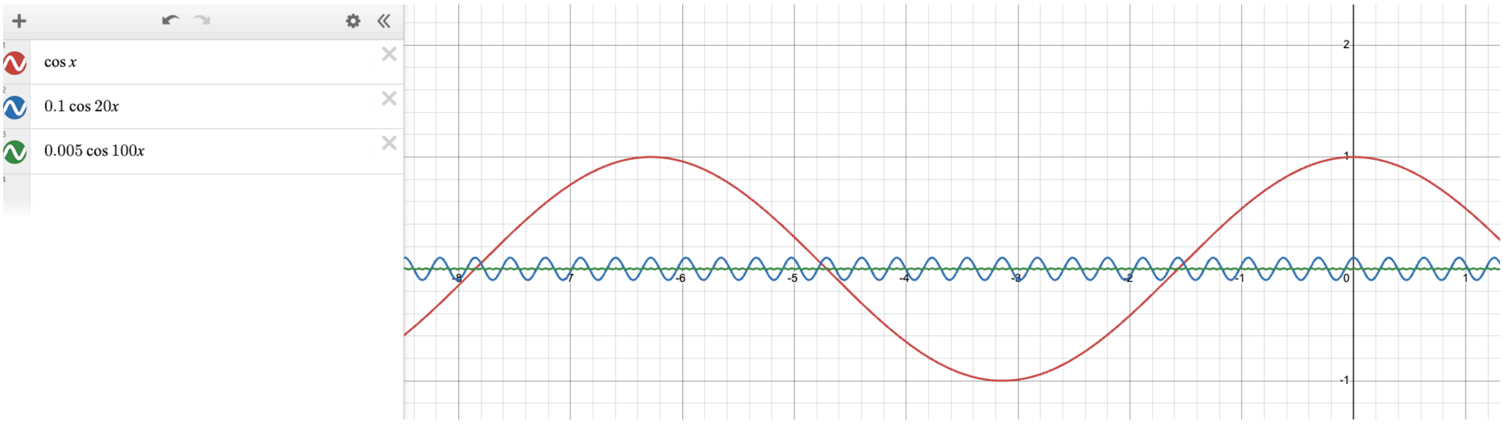
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

不要被式子吓到，它表达的其实就是：f(x)可以被一堆三角函数表示（a0是常数，可以理解成a0*cos0x)。

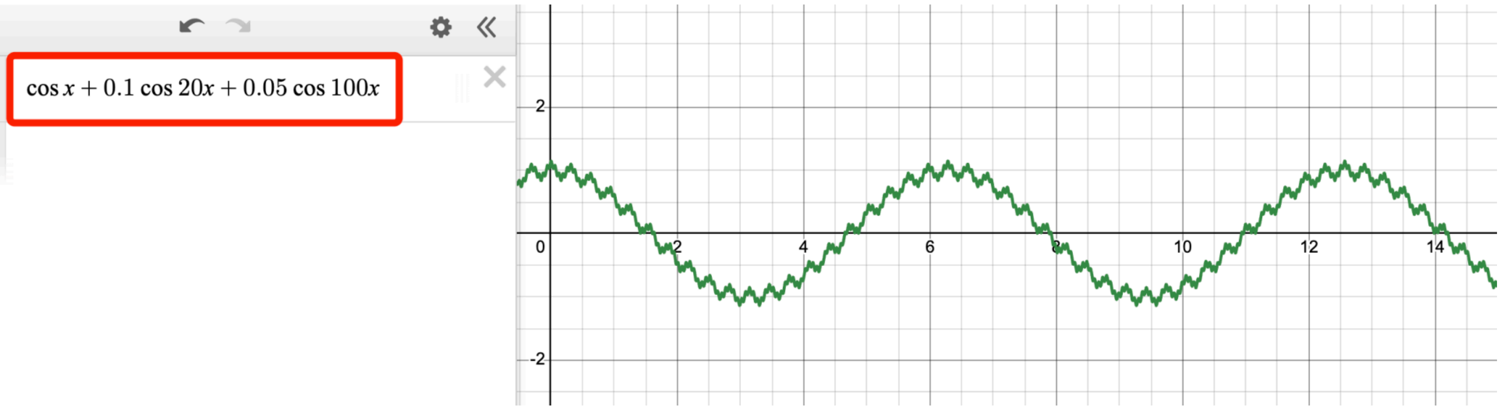
不同频率的三角函数就好比一块块积木，最终拼成了函数f(x)。

为了拼成f(x)，我们用cosx、cos20x、cos100x这样的积木，当然更重要的是需要关注**每个‘积木’前的系数，没有出现的三角函数，它的系数为0**。

ps：此时不要用时域的角度看这些三角函数，而是将它们每个作为一个整体



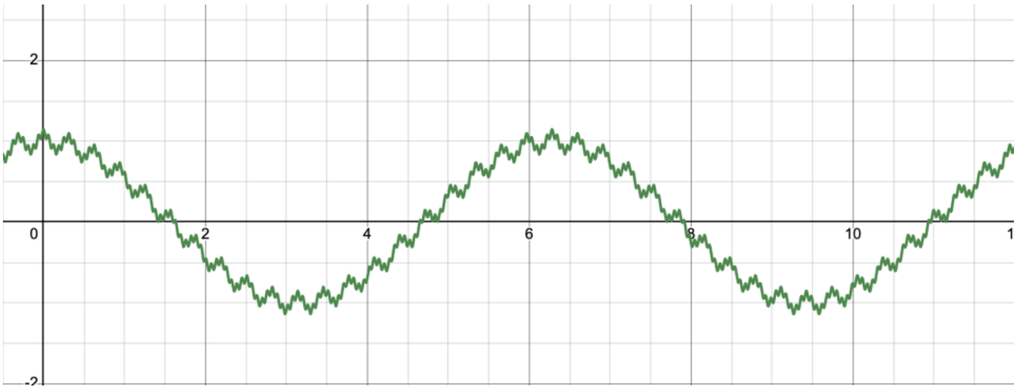
把它们一组合就变成了f(x)了~



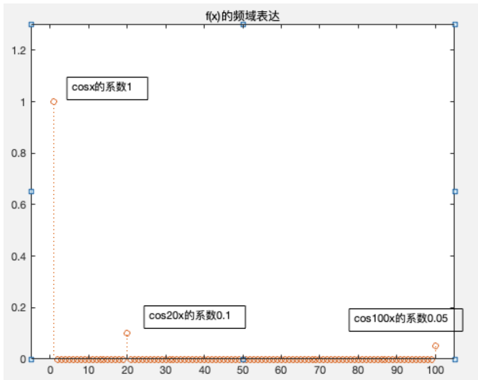
f(x)的时域和频域表达对比：

时域突出的是随着x的变化，f(x)是如何变化的

频域突出的是这个f(x)都由那些频率的三角函数组成，它们各自的系数是多少

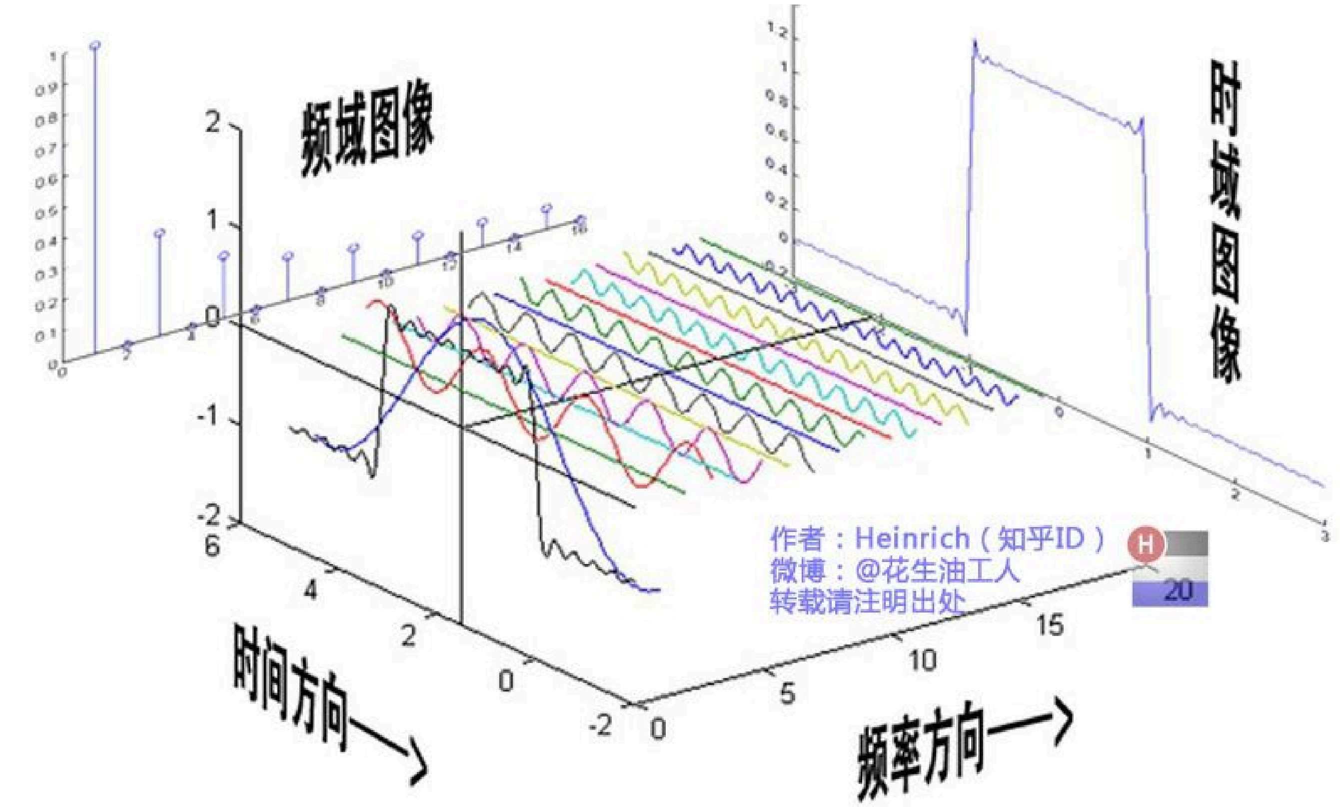


f(x)的时域表达



f(x)的频域表达

再来一张知乎大佬的画图：

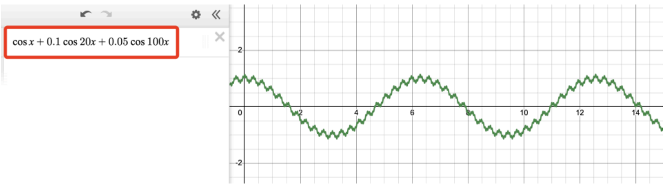


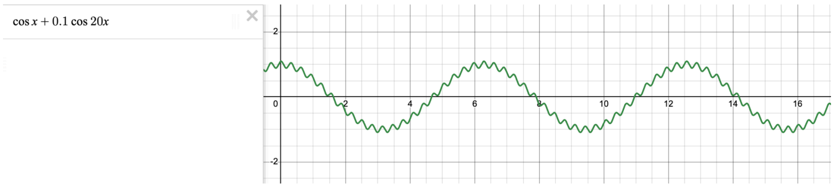
好了，让我们回到最开始的问题「**如果我们想要处理这个f(x)，比如让它忽略掉小的波动变化，能够表现出大的周期变化即可**」

既然我们知道f(x)的傅里叶级数展开之后为：

$$f(x) = cosx + 0.1cos20x + 0.05cos100x$$

将cos100x这个高频率的积木去掉，你看函数图是不是变得眉清目秀多了~





以上就是一个**简单的低通滤波器**（去掉高频）。

傅里叶级数最厉害的地方在于，它告诉我们几乎所有的周期函数都可以被分解成一堆不同频率的三角函数。

傅里叶级数推导

若函数f(x)是一个周期为2π的周期函数，那么f(x)可以被分解为傅里叶级数的形式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

不要被上面的式子吓到，冷静一下，其实这个式子表达的意思就是周期函数f(x)能够被一堆三角函数来表示。这和上一节说的一样。

而所谓的傅里叶级数展开，最重要的就是求各个三角函数前的系数。**因为所有周期函数的傅里叶级数展开都是这种形式，不同的地方在于系数。**

系数怎么确定呢？那么就让我们开启一段美妙的数学推导之旅。

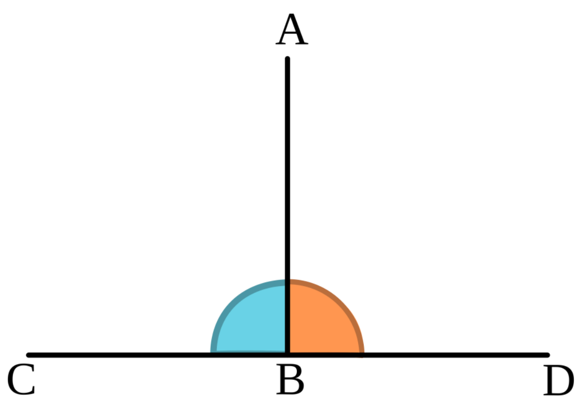
三角函数的正交性

正交-几何视角

在几何的世界，正交还有个别名——垂直。没错就是小学就学过的垂直。

如何判断两个直线垂直呢？

相交的角度为90°



垂直=正交

若∠ABD=90°，我们说线段AB垂直（正交）于CD。

正交-向量内积视角

我们学过，若两个向量的内积为0，说明这两条向量是正交的。

> 若$a=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$，则两向量内积为：$a*b=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

而我们知道，向量内积=0，说明两向量正交。

学习数学要注意模式。比如上面这种「相乘再相加」的模式，如果留心，可以想到这种模式在别处也出现过，比如卷积，比如积分。

下面自然而然就可以将正交的概念引入到微积分中。

正交-积分视角

函数正交的定义，若两函数满足如下条件：

> $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$，那么我们说函数**f(x)**与**g(x)**在区间**[a,b]**上是正交的。

ps：不要被积分符号给吓到，积分积分说到底就是求和，∫本身就是sum的意思。

- 积分怎么表现为求和sum?

todo

三角函数集的正交性证明

本小结标题为三角函数集的正交性证明，那么什么是**三角函数集**呢？喏，就是下面这样的集和：

$$\{sin0x, cos0x, sin1x, cos1x, sin2x, cos2x, sin3x, cos3x, ...sinnx, cosnx, ...\}$$

因为sin0x=0， cos0x=1，上述也可记为

$$\{0, 1, sin1x, cos1x, sin2x, cos2x, sin3x, cos3x, ...sinnx, cosnx, ...\}$$

三角函数的正交性说的是，**任意**从上述集和中**选择两个不同的三角函数**，它们两个在**[0, 2π]上的积分等于0**。翻译成数学语言就是：

$$\int_0^{2\pi} sinmxsinnxdx = 0, m \neq n \qquad (1)$$

$$\int_0^{2\pi} cosmxcosnxdx = 0, m \neq n \qquad (2)$$

$$\int_0^{2\pi} sinmxcosnxdx = 0 \qquad (3)$$

- 下面证明 $\int_0^{2\pi} sinmxsinnxdx = 0, m \neq n$ ，利用三角函数的和差化积公式

$$cos(m+n)x = cosmx * cosnx - sinmx * sinnx$$
$$cos(m-n)x = cosmx * cosnx + sinmx * sinnx$$

所以

$$sinmx * sinnx = \frac{cos(m-n)x - cos(m+n)x}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} sinmxsinnxdx = \int_0^{2\pi} \frac{cos(m-n)x - cos(m+n)x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2} * [\int_0^{2\pi} cos(m-n)xdx - \int_0^{2\pi} cos(m+n)xdx]$$

单看第一项

$$\int_0^{2\pi} cos(m-n)xdx$$

$$= -\frac{1}{m-n} * sin(m-n)x|_0^{2\pi}$$

因为m和n都是整数，所以m-n也是整数（m+n）亦是如此

$$= -\frac{1}{m-n} * [sin(m-n)2\pi - sin0]$$

$$= -\frac{1}{m-n} * [0-0]$$

$$= 0$$

所以 $\int_0^{2\pi} sin(m+n)xdx = 0$ ，而sin(m-n)x亦是如此，即 $\int_0^{2\pi} sin(m-n)xdx = 0$

✅ 那么 $\int_0^{2\pi} sinmxsinnxdx = 0, m \neq n$ 证毕。

✅ • 同理可证 $\int_0^{2\pi} cosmxcosnxdx = 0, m \neq n$ 。

- 下面证明 $\int_0^{2\pi} sinmxcosnxdx = 0$ ，利用三角函数的和差化积公式

$$sin(m+n)x = sinmx * cosnx + cosmx * sinnx$$
$$sin(m-n)x = sinmx * cosnx - cosmx * sinnx$$

所以

$$sinmx * cosnx = \frac{sin(m+n)x + sin(m-n)x}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} sinmxcosnxdx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{sin(m+n)x + sin(m-x)}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}[\int_0^{2\pi} sin(m+n)xdx + [\int_0^{2\pi} sin(m-n)xdx]$$

我们先来看前一项

$$\int_0^{2\pi} sin(m+n)xdx$$

$$= \frac{1}{m+n} * cos(m+n)x|_0^{2\pi}$$

因为m和n都是整数，所以m+n也是整数（m-n）亦是如此

$$= \frac{1}{m+n} * [cos(m+n)2\pi - cos0]$$

$$= \frac{1}{m+n} * [1-1]$$

$$= 0$$

所以 $\int_0^{2\pi} sin(m+n)xdx = 0$ ，而sin(m-n)x亦是如此，即 $\int_0^{2\pi} sin(m-n)xdx = 0$

那么 $\int_0^{2\pi} sinmxcosnxdx = 0$ 证毕。

- 综上所述

三角函数集 $\{0, 1, sin1x, cos1x, sin2x, cos2x, sin3x, cos3x, ...sinnx, cosnx, ...\}$ 任意不同的两个[0, 2π]上的积分=0。

傅里叶级数推导

万事俱备，只欠东风。我们目前已知：

1.若函数f(x)是一个周期为2π的周期函数，那么f(x)可以被分解为傅里叶级数的形式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

2.三角函数集 $\{sin0x, cos0x, sin1x, cos1x, sin2x, cos2x, sin3x, cos3x, ...sinnx, cosnx, ...\}$ 是两两正交的

现在的问题在于如何求的各个三角函数前的系数，系数确定了，函数f(x)就完成了傅里叶级数的展开。

确定系数a0

- 为了求得 a_0 ，两边乘以cos0x，并在[0, 2π]上求积分

等式左边为：

$$\int_0^{2\pi} f(x)cos0xdx = \int_0^{2\pi} f(x)dx$$ ，因为cos0x=1

至于等式右面：

利用三角函数集的正交性，我们可以得出以下结论：

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) * cos0xdx &= \int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nxcos0x + b_n \sin nxcos0x)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_0^{2\pi} \cos nxcos0xdx + b_n \int_0^{2\pi} \sin nxcos0xdx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n * 0 + b_n * 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

利用三角函数的正交性，那一大坨消失了。所以等式右面变成了：

$$\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}cos0xdx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} 1dx = \frac{a_0}{2} * 2\pi = a_0\pi$$

我们简化了等式的左边和右边，现在是时候放到一起了：

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = a_0\pi$$ ，可得a0为

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$

确定系数an

- 为了求得 a_n （n=1,2,3,4,5,6......），两边乘以cosmx（m=1,2,3,4,5,6......），并在[0, 2π]上求积分

等式左边为：

$$\int_0^{2\pi} f(x)cosmxdx$$

至于等式右面：

首先看常数部分

$$\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}cosmxdx = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} cosmxdx == \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} cosmxcos0xdx = 0$$

然后看累加部分

$$\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) * cosmxdx = \int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nxcosmx + b_n\sin nxcosmx)dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_0^{2\pi}\cos nxcosmxdx + b_n\int_0^{2\pi}\sin nxcosmxdx)$$

再次根据三角函数的正交性：

$$\int_0^{2\pi}\sin nxcosmxdx = 0$$

$$\int_0^{2\pi}\cos nxcosmxdx = 0, m \neq n$$

所以等式右面最终只剩下

$$a_n\int_0^{2\pi}\cos nxcosmxdx, m = n$$

当m=n时，等式可以写作

$$\int_0^{2\pi} f(x)cosmxdx = a_n\int_0^{2\pi} cosnxcosmxdx, m = n$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)cosnxdx = a_n\int_0^{2\pi} cos^2nxdx$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)cosnxdx = a_n\int_0^{2\pi} \frac{cos(n+n)x + cos(n-n)x}{2}dx$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)cosnxdx = a_n \int_0^{2\pi} \frac{cos2nx+1}{2}dx$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)cosnxdx = a_n \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}dx$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)cosnxdx = a_n\pi$$

最终得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cosnxdx, n \neq 0$$

确定系数bn

- 为了求得 b_n （n=1,2,3,4,5,6......），两边乘以sinmx（m=1,2,3,4,5,6......），并在[0, 2π]上求积分，同理可得

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sinnxdx, n \neq 0$$

这里和求an的过程是类似，大家可以自己尝试推到一下。

周期为2π的函数傅里叶级数展开完整版

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$ ，其中

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)cosnxdx, n \neq 0 \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)sinnxdx, n \neq 0 \end{cases}$$

傅里叶级数简单应用

检波

查看信号中是否包含某一频率的信息。

- 怎么检查呢?

若函数f(x)的周期为2π，若想要知道是否包含cosnx这一频率的信号，那么直接对f(x)和cosnx做积分即可：

$$\int_0^{2\pi} f(x)cosnxdx，若结果=0，说明f(x)不包含cosnx这一频率信息$$

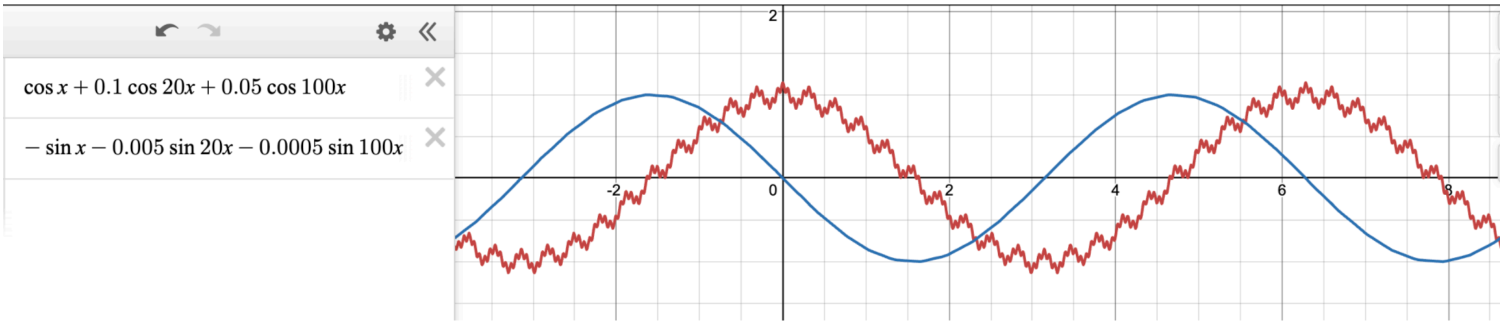
滤波

比如想要过滤高频信息，怎么做？一个简单的方法，就是直接对函数求导。

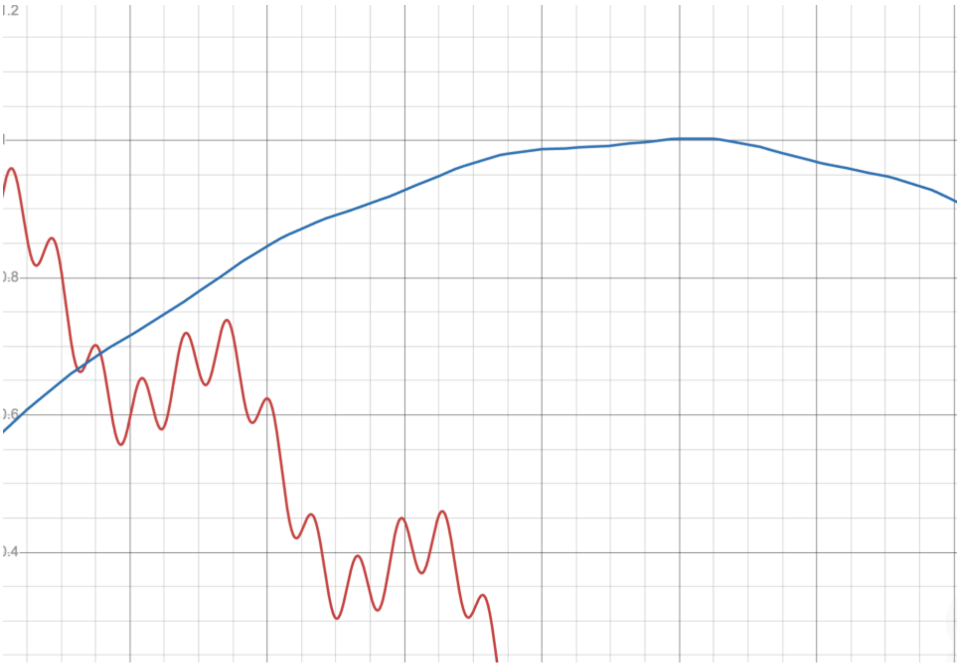
拿本文一开始的例子来说明：

$$f(x) = cosx + 0.1cos20x + 0.05cos100x$$

$$f'(x) = sinx + 0.1 * \frac{1}{20}sin20x + 0.05 * \frac{1}{100}sin100x = -sinx - 0.005sin20x - 0.0005sin100x$$



蓝色线就是求导之后的函数图像，确实高频信息被过滤掉了许多



波形大的规律保持一致（虽然差了点相位）。

原因在于求导之后高频的三角函数的系数除以了自身的角速度。

总结与展望

傅里叶变换的本质：傅里叶变换的核心是从时域到频域的变换。时域和频域表达的是同一种信息，只是表现方式不同。我想这就是「横看成岭侧成峰，远近高低各不同」吧~

本文完成了周期为2π的傅里叶级数展开，那么你可能回想，如果周期不是2π的函数，还能够进行傅里叶级数展开吗？当然是可以的。下一篇文章我们会进行这一方面的讨论。然后应用欧拉公式这个世界上最漂亮的恒等式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

我们进入复平面的世界，将傅里叶级数展开式变得更加优雅。

参考

B站-纯干货数学推导_傅里叶级数与傅里叶变换

知乎-傅里叶分析之掐死教程（完整版