我眼中的傅里叶变换（二）

目录

引言

由上一节的内容，我们已知，若f(x)是一个周期函数，那么它可以进行傅里叶级数展开。特别的，当f(x)的周期为2π时，它的展开式如下：

$$f(x+2\pi)=f(x)，\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ ，\text{其中}$$

$$\begin{cases} a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx \\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)cosnxdx, n\neq 0 \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)sinnxdx, n\neq 0 \end{cases}$$

难道f(x)的周期不是2π，我们就无法使用傅里叶级数展开这个'核武器'了吗？那必然不是啊，下面就让我们开始推导一般周期函数的傅里叶级数展开。

周期为2L函数的傅里叶级数展开

ps：所谓的周期为2L就是将周期一般化，不仅仅限定为2π。

> $f(t+2L)=f(t)$ ，函数f(t)是一个周期为2L的函数

- 那么f(t)的傅里叶级数展开是怎样的?

其实很简单，这个就是数学中常用的变换。

t是以2L为周期的变量，那么我们假设x是以2π为周期的变量。

令$xL = t\pi$ （*缺什么补什么，x缺L，t缺π*）

$x = \frac{\pi}{L}t$ ，所以有 $f(t) = f(\frac{L}{\pi}x)$

令 $g(x) = f(\frac{L}{\pi}x)$，因为x是以2π为周期的变量，所以我们可以对$g(x)$进行傅里叶展开

$$g(x+2\pi) = g(x)\text{，} g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)cosnxdx, n \neq 0 \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)sinnxdx, n \neq 0 \end{cases}$$

根据上述代换，我们已知：

$g(x) = f(t)$

$x = \frac{\pi}{L}t$

$dx = \frac{\pi}{L}dt$

$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2L} \frac{\pi}{L}dt = \frac{1}{L}\int_0^{2L} dt$

我们将其带入到上述式（1）中，我们得到

$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\frac{\pi}{L}t + b_n \sin n\frac{\pi}{L}t)$

$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)dt \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)cosnxdx = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)cosn\frac{\pi}{L}dt, n \neq 0 \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)sinnxdx = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(t)sinn\frac{\pi}{L}dt, n \neq 0 \end{cases}$

所以周期为2L函数的傅里叶级数展开式如下：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\frac{\pi}{L}t+b_n\sin n\frac{\pi}{L}t)$$
$$\begin{cases}a_0=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(t)dt\\ a_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(t)cosn\frac{\pi}{L}dt,n\neq 0\\ b_n=\frac{1}{L}\int_0^{2L}f(t)sinn\frac{\pi}{L}dt,n\neq 0\end{cases}\tag{2}$$

虽然我们整理出来，但是我们看到这里面有很多分数 $\frac{\pi}{L}$ ，我们可以把它们去掉。

周期为2L，即T=2L，其中T表示周期（这是数学中常用的约定符号~）

角速度 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2L}=\frac{\pi}{L}$ ，所以上述式（2）可以表示为

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$$
$$\begin{cases}a_0=\frac{2}{T}\int_0^{T}f(t)dt\\ a_n=\frac{2}{T}\int_0^{T}f(t)cosn\omega dt,n\neq 0\\ b_n=\frac{2}{T}\int_0^{T}f(t)sinn\omega dt,n\neq 0\end{cases}\tag{3}$$

欧拉公式视角下函数的傅里叶级数展开

欧拉公式

- 什么是欧拉公式?

它的表达式非常简单： $e^{ix}=\cos x+i\sin x \tag{4}$

说一句题话外，你将x=π带入上式

$e^{i\pi}=-1+0$ ，欧拉公式一下子把自然数1、0、自然指数e、常见的无理数π，集合到了一起。美哉欧拉~

三角函数的复指数表示

在式（3）中，我们看到了 $\cos n\omega t$和$\sin n\omega t$ 的表达式，我们想用复指数进行表示。

根据欧拉公式

$e^{ix}=\cos x+i\sin x$ ，我们有

$$e^{in\omega t} = \cos n\omega t + i\sin n\omega t$$
$$e^{-in\omega t} = \cos n\omega t - i\sin n\omega t$$

则

$$cosn\omega t = \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} \qquad (5)$$

$$sinn\omega t = \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} = \frac{e^{-in\omega t} - ie^{in\omega t}}{2} \qquad (6)$$

出来吧

万事具备，只欠带入。 将式（5）（6）带入到式（3）中

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + b_n\frac{e^{-in\omega t} - ie^{in\omega t}}{2})$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}e^{in\omega t}(\frac{a_n - ib_n}{2}) + e^{-in\omega t}(\frac{a_n + ib_n}{2})$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}e^{in\omega t}(\frac{a_n - ib_n}{2}) + \sum_{n=1}^{\infty}e^{-in\omega t}(\frac{a_n + ib_n}{2}) \qquad (7)$$

算到此处，先停一下，观察式（3）：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t)$$
$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt \\ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)cosn\omega dt, n \neq 0 \\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)sinn\omega dt, n \neq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)cosn\omega dt = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)cos(-n\omega)dt = a_{-n}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)sinn\omega dt = -\frac{2}{T}\int_0^T f(t)sin(-n\omega)dt = -b_{-n}$$

令n = -n,带入式（7）的第三部分：

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\omega t}(\frac{a_n+ib_n}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{-i(-n)\omega t}(\frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{in\omega t}(\frac{a_n-ib_n}{2})$$

你发现了没，如此一来式（7）中的第二项和第三项就可以合到一起了

$$\sum_{n=1}^{\infty}+\sum_{n=-\infty}^{-1}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}$$

等等，不对，还差了一个n=0的情况！

我们将n=0带入 $e^{in\omega t}(\frac{a_n-ib_n}{2})$

$$e^{i*0*\omega t}(\frac{a_0-ib_0}{2}) = e^0\frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2}$$

我去！正好等于式（7）的第一项。真是巧了！

那么我们完全可以简写式（7）

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{in\omega t}(\frac{a_n-ib_n}{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\omega t}(\frac{a_n+ib_n}{2})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t}(\frac{a_n-ib_n}{2})$$

因此，周期为任意的函数傅里叶级数展开可以写成

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t} \text{ ,其中}$$
$$C_n = \frac{a_n-ib_n}{2}$$

$$C_n = \frac{a_n-ib_n}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{2}{T}\int_0^T f(t)cosn\omega tdt - i\frac{2}{T}\int_0^T f(t)sinn\omega tdt)$$

$$= \frac{1}{T}(\int_0^T f(t)cosn\omega tdt - i\int_0^T f(t)sinn\omega tdt)$$

$$= \frac{1}{T}(\int_0^T f(t)(cosn\omega t - isinn\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt$$

综上所述，欧拉公式整理之后的一般周期函数的傅里叶级数展开为：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\omega t}$$
$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt \qquad (8)$$

是不是简洁多了~

总结

这一篇，我们从周期为2π函数的傅里叶级数展开拓展到一般周期函数。不过大家有没有想过：

- 周期不再局限于2π，但是假如函数根本没有周期呢（没有周期我们可以认为周期为无穷大）？难道就不能进行傅里叶级数展开？

- 我的两篇文章都叫做傅里叶变换，但是文中全都是傅里叶级数，除了题目根本没有提过傅里叶变换。难道我是挂着羊头卖狗肉？

敬请期待下一篇，傅里叶变换将露出它的真面目~

附录

一种简单的欧拉公式证明

欧拉公式： $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

解：

$$令f(x) = \frac{e^{ix}}{cosx + isinx}，求f'(x)$$

$$已知(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(e^{ix})' * (cosx + isinx) - e^{ix} * (cosx + isinx)'}{(cosx + isinx)^2}$$

$$= \frac{ie^{ix} * (cosx + isinx) - e^{ix} * (-sinx + icosx)}{(cosx + isinx)^2}$$

$$= \frac{e^{ix} * (icosx + i^2 sinx) - e^{ix} * (-sinx + icosx)}{(cosx + isinx)^2}$$

$$= \frac{e^{ix} * (icosx - sinx) + e^{ix} * (sinx - icosx)}{(cosx + isinx)^2}$$

我们观察到分子部分的和为0。

即 $f'(x) = 0$

当一个函数的导数=0，说明这个函数是一个常数函数。

- 到底f(x)等于多少呢?

我们随便带入一个值即可，这里带入简单的x=0

$$f(x)_{x=0} = \frac{e^{ix}}{cosx + isinx}|_{x=0} = \frac{e^0}{cos0 + isin0} = \frac{1}{1+0} = 1$$

f(x)=1，说明 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 证毕

参考