拉氏变换及反变换公式

1. 拉氏变换的基本性质

1	线性定理	齐次性	$L[af(t)] = aF(s)$
		叠加性	$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$
2	微分定理	一般形式	$L[\frac{df(t)}{dt}] = sF(s) - f(0)$ $L[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$ $\vdots$ $L[\frac{d^n f(t)}{dt^n}] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$ $f^{(k-1)}(t) = \frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}}$
		初始条件为 0 时	$L[\frac{d^n f(t)}{dt^n}] = s^n F(s)$
3	积分定理	一般形式	$L[\int f(t)dt] = \frac{F(s)}{s} + \frac{[\int f(t)dt]_{t=0}}{s}$ $L[\iint f(t)(dt)^2] = \frac{F(s)}{s^2} + \frac{[\int f(t)dt]_{t=0}}{s^2} + \frac{[\iint f(t)(dt)^2]_{t=0}}{s}$ $\vdots$ $L[\overbrace{\int \cdots \int}^{共n个} f(t)(dt)^n] = \frac{F(s)}{s^n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^{n-k+1}} [\overbrace{\int \cdots \int}^{共n个} f(t)(dt)^n]_{t=0}$
		初始条件为 0 时	$L[\overbrace{\int \cdots \int}^{共n个} f(t)(dt)^n] = \frac{F(s)}{s^n}$
4	延迟定理（或称 t 域平移定理）		$L[f(t-T)1(t-T)] = e^{-Ts} F(s)$
5	衰减定理（或称 s 域平移定理）		$L[f(t)e^{-at}] = F(s+a)$
6	终值定理		$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$
7	初值定理		$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$

8	卷积定理	$L[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau]=L[\int_0^t f_1(t)f_2(t-\tau)d\tau]=F_1(s)F_2(s)$

2. 常用函数的拉氏变换和 z 变换表

序号	拉氏变换 E(s)	时间函数 e(t)	Z 变换 E(z)
1	1	δ (t)	1
*2	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{z}{z-1}$
*3	$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\lim\limits_{a\to 0}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}(\frac{z}{z-e^{-aT}})$
*7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
*8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
9	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
10	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{z}{z-e^{-bT}}$
11	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
12	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
13	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
14	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$

15	$\frac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$a^{t/T}$	$\frac{z}{z-a}$

比例： $G_{(s)}=K$ **；惯性（RC）：** $\frac{1}{1+T\cdot s}$ **；微分：** s **；积分：** $\frac{1}{s}$ **；延迟：** $e^{-\tau\cdot s}$ **；**

反拉氏变换： $u(s)\cdot s \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{du(t)}{d(t)}$

3． 用查表法进行拉氏反变换

用查表法进行拉氏反变换的关键在于将变换式进行部分分式展开，然后逐项查表进行反变换。设 $F(s)$ 是 s 的有理真分式

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \qquad （n>m）$$

式中系数 $a_0,a_1,...,a_{n-1},a_n$， $b_0,b_1,\cdots b_{m-1},b_m$ 都是实常数；m,n 是正整数。按代数定理可将 $F(s)$ 展开为部分分式。分以下两种情况讨论。

① $A(s)=0$ 无重根

这时，F(s)可展开为 n 个简单的部分分式之和的形式。

$$F(s)=\frac{c_1}{s-s_1}+\frac{c_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{c_i}{s-s_i}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-s_i}$$

式中，$s_1,s_2,\cdots,s_n$ 是特征方程 A(s)＝0 的根。c_i 为待定常数，称为 F(s)在 s_i 处的留数，可按下式计算：

$$c_i=\lim_{s\to s_i}(s-s_i)F(s)$$

或

$$c_i=\left.\frac{B(s)}{A'(s)}\right|_{s=s_i}$$

式中，$A'(s)$ 为 $A(s)$ 对 s 的一阶导数。根据拉氏变换的性质，从式（F-1）可求得原函数

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=L^{-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{s-s_i}\right]=\sum_{i=1}^{n}c_i e^{-s_i t}$$

② $A(s)=0$ 有重根

设 $A(s)=0$ 有 r 重根 s_1，F(s)可写为

$$F(s)=\frac{B(s)}{(s-s_1)^r(s-s_{r+1})\cdots(s-s_n)}$$

$$=\frac{c_r}{(s-s_1)^r}+\frac{c_{r-1}}{(s-s_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{c_1}{(s-s_1)}+\frac{c_{r+1}}{s-s_{r+1}}+\cdots+\frac{c_i}{s-s_i}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n}$$

式中，s_1 为 F(s)的 r 重根，s_{r+1}，…，s_n 为 F(s)的 n-r 个单根；

其中，c_{r+1}，…，c_n 仍按式(F-2)或(F-3)计算，c_r，c_{r-1}，…，c_1 则按下式计算：

$$\begin{cases} c_r=\lim\limits_{s\to s_1}(s-s_1)^r F(s) \\ c_{r-1}=\lim\limits_{s\to s_1}\dfrac{d}{ds}[(s-s_1)^r F(s)] \\ \quad\vdots \\ c_{r-j}=\dfrac{1}{j!}\lim\limits_{s\to s_1}\dfrac{d^{(j)}}{ds^{(j)}}(s-s_1)^r F(s) \\ \quad\vdots \\ c_1=\dfrac{1}{(r-1)!}\lim\limits_{s\to s_1}\dfrac{d^{(r-1)}}{ds^{(r-1)}}(s-s_1)^r F(s) \end{cases} \tag{F-5}$$

原函数 $f(t)$ 为

$$f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]$$

$$=L^{-1}\left[\frac{c_r}{(s-s_1)^r}+\frac{c_{r-1}}{(s-s_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{c_1}{(s-s_1)}+\frac{c_{r+1}}{s-s_{r+1}}+\cdots+\frac{c_i}{s-s_i}+\cdots+\frac{c_n}{s-s_n}\right]$$

$$=\left[\frac{c_r}{(r-1)!}t^{r-1}+\frac{c_{r-1}}{(r-2)!}t^{r-2}+\cdots+c_2t+c_1\right]e^{s_1t}+\sum_{i=r+1}^{n}c_ie^{s_it} \tag{F-6}$$