

多旋翼中的加速度计浅析

邓恒 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院 博士生

全权 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院 副教授

加速度计是伴随着惯性导航技术发展起来的，主要用于测量载体的线运动信息，它结合陀螺仪提供的角运动信息，可以解算出载体的姿态角、速度及位置等信息。加速度计与陀螺仪构成了惯性测量单元(Inertial Measurement Unit, IMU)的主要部分，使得惯性导航系统成为可能。现如今，多旋翼由于其结构简单、可操控性强、重量轻、小尺寸、可垂直起降、可靠性高、勤务性强等优点被广泛应用，这其中就少不了加速度计的作用。多旋翼通常使用低成本的基于微机电系统(Micro-Electro-Mechanical System, MEMS)的加速度计。本文主要针对多旋翼中的加速度计，阐明其测量原理以及基于气动阻力模型的姿态估计方法。

加速度计测量原理[1]

加速度是载体运动的一种状态，加速度计作为一种惯性传感器，主要是通过测量加速度产生的惯性力来获得加速度信息。因此，加速度计实质上是测力计。假设载体相对于惯性坐标系下的加速度为 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ，其质量为 m ， $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^3$ 为该载体受到的合外力，包括两部分：一部分是引力，在地球表面附近其主要是地球引力，表示为 $\mathbf{F}_g \in \mathbb{R}^3$ ；另一部分是作用在该载体的其它力，统称为非引力部分，表示为 $\mathbf{F}_e \in \mathbb{R}^3$ 。则根据牛顿第二定律得到：

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e}{m} \quad (1)$$

在这里，我们关心的是载体的绝对加速度 \mathbf{a} ，根据式(1)，若能够测得引力 \mathbf{F}_g 和非引力 \mathbf{F}_e ，就很容易求得加速度。但是需要注意的是，载体的引力实际上是无法直接测量的，我们可以通过一定得方法测得非引力部分。在这里，赋予单位质量物体受到的非引力部分一个名词--比力(specific force)，表示为 \mathbf{f}_s ，则有

$$\mathbf{f}_s = \frac{\mathbf{F}_e}{m} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{F}_g}{m} = \mathbf{a} - \mathbf{g} \quad (2)$$

其中， \mathbf{g} 为重力加速度。从式(2)中可以看出，比力其实不是一种力，而是一种加速度的表示，它是物体受到非引力部分产生的加速度。更加确切地表示是，比力向量为绝对加速度与重力加速度向量之差。

实际上，加速度计无法直接测量出载体的绝对加速度 \mathbf{a} ，它只能测量出非引力部分，即比力 \mathbf{f}_s 。图1是一维加速度计内部结构的直观示意图，从中可以清楚地明白加速度计的基本原理。这种结构的加速度计也称为线加速度计，我们以简单的一维来示意，其它大部分的加速度计原理类似。它一般由敏感质量 m 、支承弹簧、电位计和壳体组成。敏感质量借助弹簧和阻尼器支承在壳体内部，只能沿着弹簧所在的敏感轴做线位移，这个轴也是加速度计的输入轴。敏感质量随着壳体一起运动，由于加速度的变化引起的位移变换量可以通过电位计感知得到。

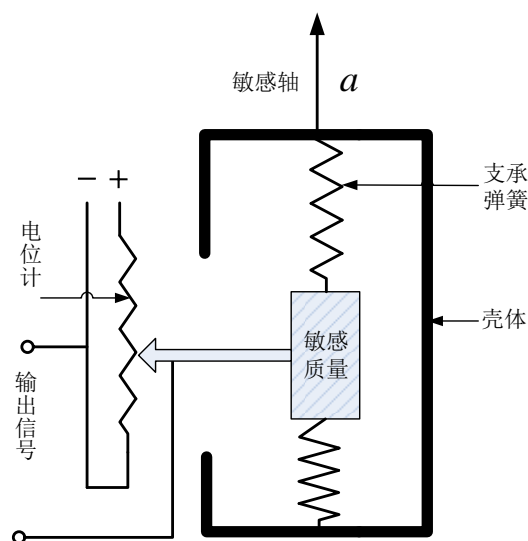


图 1 加速度计基本结构示意图

(1) 当敏感质量和壳体一起作自由落体运动时，整体的绝对加速度 $a = g$ ，此时加速度计处于失重状态，弹簧长度不会发生变化，也就是弹簧输出力为零，即 $f_s = a - g = 0$ ，加速度计输出为零，说明加速度计对于重力加速度的影响不敏感，它感知的是非引力部分的力，即式(2)的比力。

(2) 当敏感质量和壳体静止于地面时，整体的绝对加速度 $a = 0$ ，此时弹簧会产生一个力来平衡重力，则加速度计有输出，为 $f_s = a - g = -g$ 。

上述分析是针对一轴加速度计的，但是我们常用的三轴加速度计的三个轴向一般都是相互正交的，其加速度互不干扰。则该分析方法也适用于三轴加速度计，对于 MEMS 三轴加速度计也适用。由此，可以总结三轴加速度计的输出模型为

$$\mathbf{a}_m = \frac{\mathbf{F} - \mathbf{F}_g}{m} \quad (3)$$

其中， $\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^3$ 是加速度测量值。该式表明要想仅仅测量重力的作用，其合外力必须为零，即 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ 。

多旋翼气动阻力模型[2]

在分析多旋翼上加速度计的姿态估计之前，我们还得了解多旋翼气动阻力模型。多旋翼除了受到自身的重力和螺旋桨的升力之外，还存在气动阻力，该作用是由于“桨叶挥舞”

(Blade flapping) 效应引起[3]，形象地说，桨叶是有柔性的，在运动过程中会上下拍动，如图 2 所示。则多旋翼的气动阻力模型如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{x_b} \\ \dot{v}_{y_b} \\ \dot{v}_{z_b} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_e^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{y_b} \omega_{z_b} - v_{z_b} \omega_{y_b} \\ v_{z_b} \omega_{x_b} - v_{x_b} \omega_{z_b} \\ v_{x_b} \omega_{y_b} - v_{y_b} \omega_{x_b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T/m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} \\ \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

上式左边是整体加速度，即绝对加速度；右边第一项是重力影响，第二项是旋转引起的科里奥利力 (Coriolis force)，可以忽略不计，第三项是螺旋桨的升力影响，方向与桨盘平面垂直

向上，最后一项是在机体 x, y 方向上的气动阻力，分别与机体速度成正比， k_{drag} 为阻力系数，可以通过一定方法辨识得到。

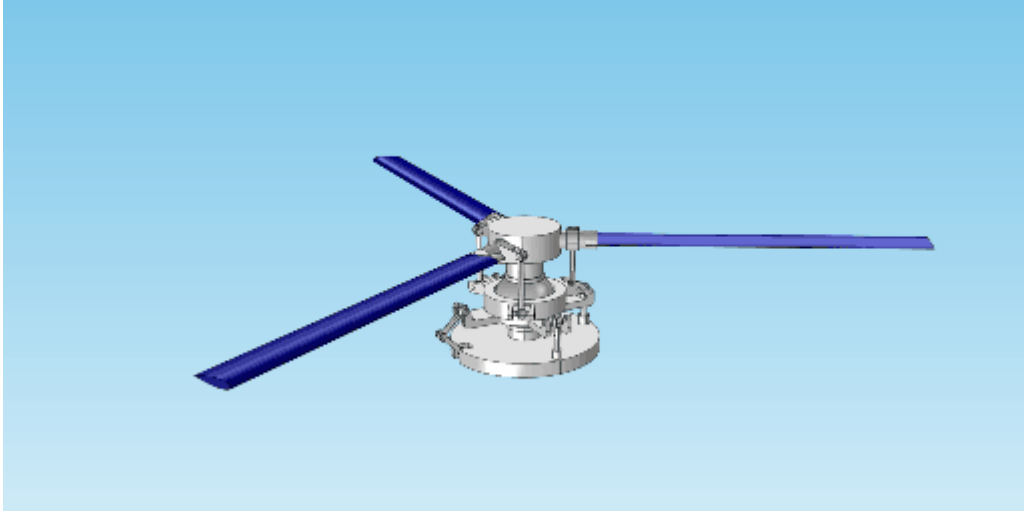


图 2 桨叶挥舞效应示意图

对式(4)展开得到具体形式如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{x_b} \\ \dot{v}_{y_b} \\ \dot{v}_{z_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin \theta + (v_{y_b} \omega_{z_b} - v_{z_b} \omega_{y_b}) - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} \\ g \sin \phi \cos \theta + (v_{z_b} \omega_{x_b} - v_{x_b} \omega_{z_b}) - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} \\ g \cos \phi \cos \theta + (v_{x_b} \omega_{y_b} - v_{y_b} \omega_{x_b}) - \frac{T}{m} \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中，式(5)中的科里奥利力部分可以忽略不计，接着，结合式(3)，加速度计观测模型可以写成：

$$\begin{bmatrix} a_{x_b,m} \\ a_{y_b,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{x_b} + g \sin \theta \\ \dot{v}_{y_b} - g \sin \phi \cos \theta \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -\frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} \\ -\frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中， $a_{x_b,m}, a_{y_b,m}$ 为加速度计输出值的前两个分量，为比力部分。

基于加速度计的姿态估计[2]

根据式(5)，忽略科里奥利力的影响，得到：

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_{x_b} \\ \dot{v}_{y_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \sin \theta - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{x_b} \\ g \sin \phi \cos \theta - \frac{k_{\text{drag}}}{m} v_{y_b} \end{bmatrix} \quad (7)$$

对上式左右两边分别进行拉氏变换，并结合式(6)，得到加速度 $a_{x_b,m}, a_{y_b,m}$ 的拉氏变换：

$$\begin{bmatrix} a_{x_b m}(s) \\ a_{y_b m}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gH(s)(\sin \theta)(s) \\ -gH(s)(\sin \phi \cos \theta)(s) \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中, $H(s) = \frac{k_{\text{drag}}}{m} \bigg/ \left(s + \frac{k_{\text{drag}}}{m} \right)$ 为低通滤波器, 且 $H(0) = 1$ 。则在低频的条件下, 对式(8)进行

反拉氏变换, 得到低频下的比力 $a_{x_b m}(s), a_{y_b m}(s)$ 为

$$\begin{bmatrix} a_{x_b m} \\ a_{y_b m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \sin \theta \\ -g \sin \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

则低频的俯仰角和滚转角可以由加速度计读数近似获得, 表示如下

$$\begin{aligned} \theta_m &= \arcsin \left(\frac{a_{x_b m}}{g} \right) \\ \phi_m &= -\arcsin \left(\frac{a_{y_b m}}{g \cos \theta_m} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

根据式(10), 可以直接由加速度计输出值直接估计出俯仰角和滚转角信息, 但是有一个前提: 低频, 即角度变化很小, 可以近似认为不变, 也就是多旋翼处于静力平衡状态, 即 $\dot{v}_{x_b} = \dot{v}_{y_b} = 0$, 此时, 对于式(6), 同样可以得到式(9)的结论。

关于由加速度计求解姿态角, 有如下说明:

- (1) 为了得到更加精确的角度信息, 需要消除加速度计的慢时变漂移。这种漂移在处理中视为常量, 可以通过实验辨识出来, 进而达到消除的目的。
- (2) 加速度计是一种测力计, 因此受到振动的影响很大。如果机体振动很大, 那么加速度计输出将被噪声严重污染。这样得到的俯仰角和滚转角就不准确了, 因此, 机体的减震很重要。
- (3) 在式(10)的推导过程中考虑到 $H(0) = 1$, 因此只能得到低频的俯仰角和滚转角。文

献[2]表明, 对于一个质量为 $m = 2.75\text{kg}$ 的四旋翼, 其阻力系数为 $k_{\text{drag}} = 0.77$, 利用式(10)加速度计估计姿态角需要 10 秒才能达到稳态的 95%, 这么慢的姿态角更新速率无法满足控制器的需求, 可见该方法无法适用于大角度变化。因此很多情况下, 该方法得到的姿态角信息仅仅是为了服务于更高层的观测器, 来得到更加精确的姿态角信息。比如常见的线性互补滤波、非线性互补滤波以及卡尔曼滤波方法。

小结

本文详细地介绍了加速度计的测量原理, 弄明白了加速度计实质上测的是“比力”, 即非引力部分。这个是在实际中经常忽略的。同时, 加速度计在俯仰角和滚转角的估计方法在很多商业级多旋翼中使用。只有在姿态角估计精确之后, 速度估计也会精确。另一方面, 本文介绍了基于气动阻力模型, 加入了桨叶挥舞效应产生的气动阻力影响, 虽然在多旋翼大多数的控制中该阻力被忽略不计, 但是它对于状态估计有着重要的作用。

更正

本公众号之前发布的关于《多旋翼飞行器设计与控制》课程第九讲多旋翼的运动信息估计里面关于加速度计估计姿态部分的内容有误，现已更正，以本文的结论为准，若有错误，请及时提出。

参考文献

- [1] Titterton D H, Weston J L. *Strapdown Inertial Navigation Technology*. London: The Institution of Engineering and Technology. 2005, 10.
- [2] Leishman R C, Macdonald J C, Beard R W, Timothy W M. Quadrotors and accelerometers: state estimation with an improved dynamic model. *IEEE Control Systems*, 2014, 34(1): 28-41.
- [3] Blade flapping [Online], available: <http://www.dynamicflight.com/aerodynamics/flapping/>, January 22, 2016