



多旋翼飞行器设计与控制

第十讲 多旋翼的稳定性与可控性

全权 副教授

qq_buaa@buaa.edu.cn

自动化科学与电气工程学院

北京航空航天大学

2016年5月12日 北航主南401



北航可靠飞行控制研究组

BUAA Reliable Flight Control Group



前言

东方哲理：中国古人很早观察到了稳定性的现象。唐代诗人韦应物的《滁州西涧》：“春潮带雨晚来急，野渡无人舟自横。”宋代诗人寇准的《春日登楼怀归》“野水无人渡，孤舟尽日横”。两首诗都描绘了郊野的渡口拴着无人的小船，横在水里，随波荡漾。为什么在河中荡漾的船总是要横在河里呢？这里有一个流体力学问题。由于流体运动时对物体产生的合力和合力矩，计算起来比较复杂，所以要得到在运动流体中物体平衡稳定性的精确分析，需要艰苦细致的工作积累；经过了许多力学家的持续努力，直到19世纪末、20世纪初才得到解决。



图片来源<http://www.ctps.cn/PhotoNet/product.asp?proid=1426944>



前言

如何判断多旋翼在当前控制器下是否稳定？在有电机停机后是否可控？





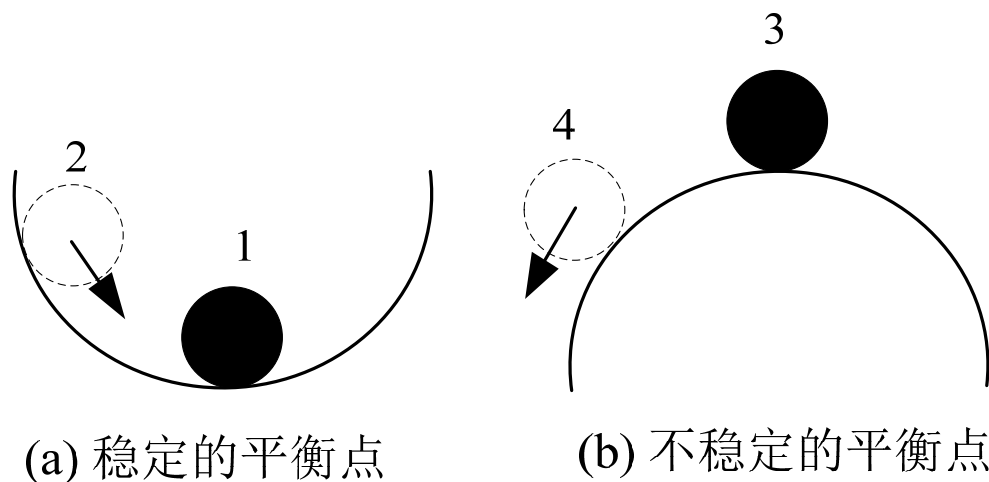
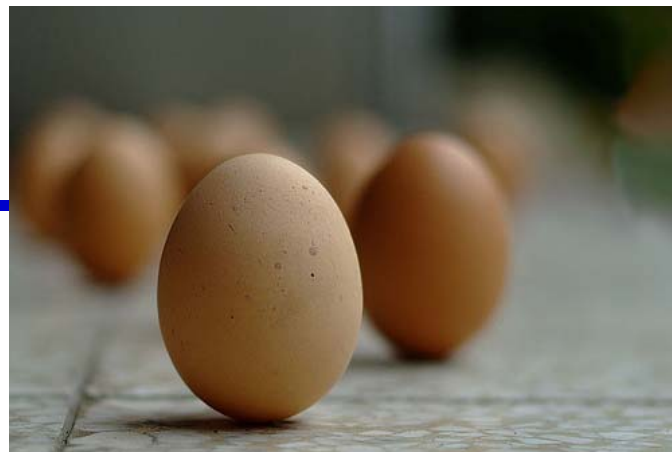
大纲

1. 稳定性的定义
2. 稳定性判据
3. 可控性的基本概念
4. 多旋翼飞行器的可控性
5. 总结
6. 作业
7. 下周预告



1. 稳定性的定义

□ 一个例子



(a) 稳定的平衡点

(b) 不稳定的平衡点

图. 稳定性的例子

稳态位置1和3处的小球受到小的扰动后，是否依然处于稳态？

讨论稳定首先需要明确的是被讨论对象是动态系统，其次要明确该动态系统的平衡点。图中1和3处是平衡点，2和4处不是平衡点，因此我们只讨论1和3位置处的稳定性



1. 稳定性的定义

□ 标准形式

这里用微分方程来描述动态系统。一个带输入的非线性动力系统通常可以用如下的非线性微分方程描述

$$\begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) & \xrightarrow{\quad} & \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{g}(t, \mathbf{x})) \\ + & & \triangleq \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{0} = \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}^*) & \xrightarrow{\quad} & \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{f}}_c(t, \tilde{\mathbf{x}}) \\ \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* & & \tilde{\mathbf{f}}_c(t, \tilde{\mathbf{x}}) \triangleq \mathbf{f}_c(t, \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^*) - \mathbf{f}_c(t, \mathbf{x}^*) \end{array}$$

转化后的系统
平衡点是0

其中 \mathbf{x} 是状态，而 \mathbf{u} 表示控制输入是状态与时间的函数。因此，不失一般性，而且仅考虑线性时不变系统，

对动态系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，假设其平衡点为0，以此讨论稳定性



1. 稳定性的定义

□ 三种稳定性定义

对动态系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，假设其平衡点为 $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n \times 1}$ 。以下定义参考[1]：

定义10.1. 如果 $\forall R \in \mathbb{R}_+, \exists r \in \mathbb{R}_+, \|\mathbf{x}(0)\| < r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < R, t \in \mathbb{R}_+$ ，则平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n \times 1}$ 是**稳定的**（李雅普诺夫稳定）。

定义10.2. 如果 $\exists r \in \mathbb{R}_+, \|\mathbf{x}(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ ，则平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n \times 1}$ 是**渐进稳定的**。

定义10.3. 如果 $\exists \alpha, \lambda, r \in \mathbb{R}_+$ ，使得 $\forall t \in \mathbb{R}_+, \|\mathbf{x}(t)\| \leq \alpha \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\lambda t}, \mathbf{x}(0) \in B(\mathbf{0}, r)$ ，则平衡点 $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{n \times 1}$ **指数稳定的**。

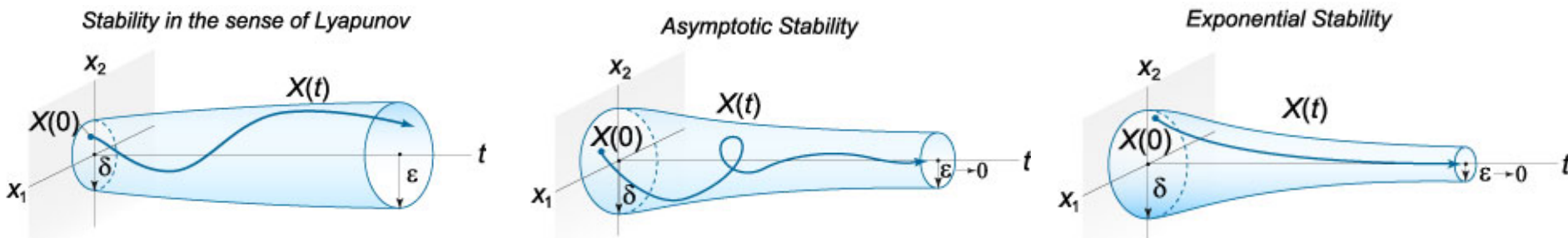


图. 不同的稳定性 图片来源<http://www.math24.net/basic-concepts-of-stability-theory.html>

[1] Slotine J-J, Li W. Applied Nonlinear Control. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1991



2. 稳定性判据

□ 多旋翼是否静稳定的？

考虑第六章中模型的简化形式，不考虑 $-{}^b\omega \times (J^b \omega) + G_a$ 等：

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= {}^b\omega \\ {}^b\dot{\omega} &= J^{-1}\tau \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\Theta} &= {}^b\omega \\ {}^b\dot{\omega} &= \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{aligned}$$

归纳为状态方程形式：

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

其中：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \Theta \\ {}^b\omega \end{bmatrix}$$

状态方程的解为：

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}(0)$$

固定翼主要不仅受到螺旋桨的拉力和重力，还受到空气的阻力和升力，其中升力跟自身的姿态是相关的。它会因固定翼姿态的变化而变化，因此**可以形成一种反馈调节姿态**。这就是为什么多旋翼需要自驾仪才能够使飞机易于受控，而对于固定翼航模，则不需要自驾仪。

基于Jordan标准型去分解矩阵指数函数，可知解是不稳定的（特征根都为零）。



2. 稳定性判据

□ 不变集原理[1]

(1) 定义

如果从集合 S 中一个点出发的系统轨线永远停留在 S 中，那么称这一个集合 S 称为一个动态系统的**不变集**。

(2) 局部不变集定理

考虑自治非线性系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，其中 \mathbf{f} 是连续的。如果存在具有一阶连续偏导数的标量函数 $V(\mathbf{x})$ ，使得：

- 1) 对于任意的 $l \in \mathbb{R}_+$ ，由 $V(\mathbf{x}) < l$ 定义的 Ω_l 是一个有界区域；
- 2) $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{x} \in \Omega_l$

假设 R 为 Ω_l 内使 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ 的所有点集合， M 为 R 中的最大不变集，那么当时间 $t \rightarrow \infty$ 时，从 Ω_l 出发的每一个解都趋于 M



2. 稳定性判据

□ 不变集原理

(3) 全局不变集定理

考虑自治非线性系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ，其中 \mathbf{f} 是连续的。如果存在具有一阶连续偏导数的标量函数 $V(\mathbf{x})$ ，使得：

1) $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$

V不需要为正数

2) $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

假设 R 状态空间内使 $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ 的所有点集合， M 为 R 中的最大不变集，那么当时间 $t \rightarrow \infty$ 时，所有的解都全局渐进收敛于 M 。

如果 M 中只包含平衡点 $\mathbf{0}$ ，会有什么结论？



2. 稳定性判据

□ 一个简单系统的稳定性

考虑如下的二阶动态系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{u}$$

假设 $\mathbf{u} = -k_1(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d) - k_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)$ 为PD控制器，则系统可以整理为

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \\ \mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ -k_2 \mathbf{I}_n & -k_1 \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

定理: 如果 $k_1, k_2 > 0$ 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t)\| = 0$. 进一步的, $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$ 全局指数稳定。

证明Tips: $\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}(0)$, \mathbf{A} 的特征值均有负实部, 基于Jordan标准型去分解矩阵指数函数, 可以得到定理中的结论。



2. 稳定性判据

□ 一个带饱和系统的稳定性

考虑如下的二阶动态系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{u}, a)$$

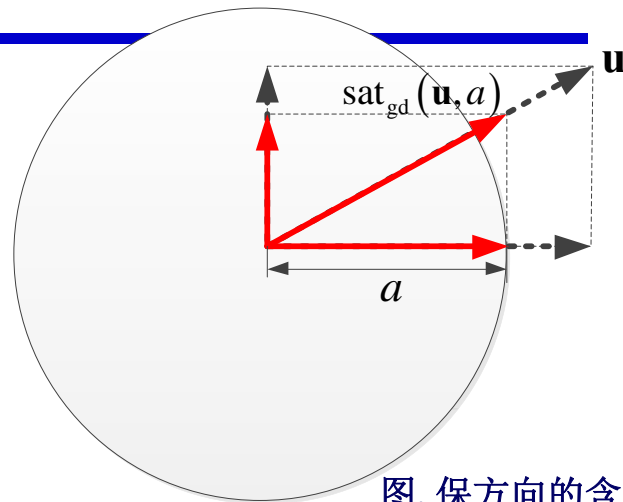


图. 保方向的含义

假设 $\mathbf{u} = -k_1(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d) - k_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)$ 为PD控制器, 并且 $\text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{u}, a) = \kappa_a(\mathbf{u})\mathbf{u}$,

$$\kappa_a(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1, & \|\mathbf{u}\|_{\infty} \leq a \\ \frac{a}{\|\mathbf{u}\|_{\infty}}, & \|\mathbf{u}\|_{\infty} > a \end{cases}, a \in \mathbb{R}_+$$

其中 $\mathbf{u} = [u_1 \ \cdots \ u_n]^T \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{u}\|_{\infty} \triangleq \max(|u_1|, \dots, |u_n|)$

一些开源自驾仪,
如PX4, 采用了保
方向饱和函数,
其与 \mathbf{u} 方向一致,
好处是什么?



2. 稳定性判据

□ 一个带饱和系统的稳定性

定理：

如果 $k_1, k_2 > 0$ 那么 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0$. 进一步的, $z = \mathbf{0}_{2n \times 1}$ 局部指数稳定。

证明：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \text{sat}_{\text{gd}}(\mathbf{u}, a) \\ \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d \\ \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{v}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \kappa_a(\mathbf{u})\mathbf{u} \end{cases}$$

指数稳定一般要求李雅普诺夫函数满足类似形式

$$V(\mathbf{x}) \geq 0$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\lambda V(\mathbf{x}), \lambda \in \mathbb{R}_+$$

以下不满足指数稳定条件！

定义李雅普诺夫函数，并求导

$$V = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{v}} + \frac{1}{k_2} \int_{C_u} \kappa_a(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T d\mathbf{u} \Rightarrow \dot{V} = \tilde{\mathbf{v}}^T \dot{\tilde{\mathbf{v}}} + \frac{1}{k_2} \kappa_a(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} = -\frac{k_1}{k_2} \kappa_a^2(\mathbf{u}) \mathbf{u}^T \mathbf{u} \leq 0$$

求助不变集原理！





2. 稳定性判据

□ 一个带饱和系统的稳定性

(1) 最大不变集。 $\dot{V} = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}_{n \times 1} \Rightarrow -k_1 \tilde{\mathbf{v}} - k_2 \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1} \Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{k_1}{k_2} \tilde{\mathbf{x}}$

只有一个稳定的平衡点： $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$ ，因此 $-k_1 \tilde{\mathbf{v}} - k_2 \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1} \Rightarrow \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$

换句话说最大不变集M中只包含一个点：

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_{n \times 1}, \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}_{n \times 1}$$

(2) 稳定性。根据局部不变集定理， $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$ 局部渐进稳定。由

于 $\|V\| \rightarrow \infty \Rightarrow \|\mathbf{z}\| \rightarrow \infty$ ，因此 $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$ 也全局渐进稳定。

在系统原点 $\mathbf{z} = \mathbf{0}_{2n \times 1}$ 的邻域内，控制量u不受约束，因此根据上一个例子可知系统原点局部指数稳定。



3. 可控性的基本概念



1983年5月1日，以色列国防军空军的两架F-15鹰式战斗机和四架A-4N“天鹰”战机在以色列和巴勒斯坦边境地区的内盖夫沙漠上空进行了一次模拟空战格斗训练。其中一架机号为957的F-15战机被用于新飞行员的适应性训练，在训练中与一架A-4N相撞，A-4N当场起火爆炸，飞行员弹射逃生。F-15失去一侧机翼，但并未坠毁，飞行员坚持将单翼的战机飞回基地并成功降落，成为航空史上的奇迹。

- 飞行员牛
- 姿态可控

还能飞回来！



3. 可控性的基本概念

□ 经典可控性[2]

考虑如下的线性时不变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$$

(1) 定义

如果对任意的 $\mathbf{x}(t_0)$ ，存在定义在时间区间 $[t_0, t_1]$ 上的 $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$ 可以将 $\mathbf{x}(t_0)$ 控制到原点，则称系统可控。反之，系统不可控。

(2) 经典可控性判据：可控性矩阵满秩

可控性矩阵定义为： $C(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$

系统可控的充要条件是： $\text{rank} C(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = n$

[2] Chen C-T. Linear System Theory and Design (Third Edition). New York, USA: Oxford University Press, 1999



3. 可控性的基本概念

□ 一个简单的例子

考虑如下的线性时不变系统，其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此， (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 组成的系统不可控，但是

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{x}(0)$$

趋近于0，**那这是否引出矛盾了呢？** 答案是否定的！因为虽然系统的解最后趋于零，但收敛时间是无限的，因此系统在有限时间内并不可控。

因此，离散时间系统除了可控性，还有可达性。



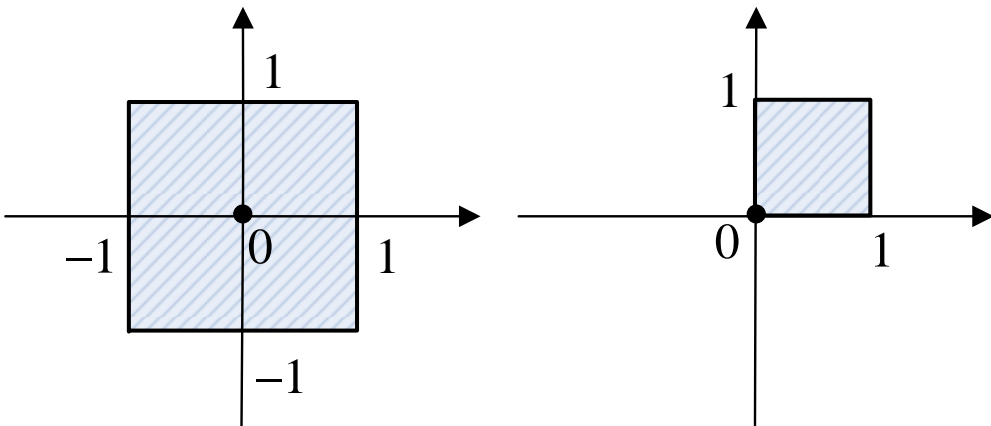
3. 可控性的基本概念

□ 经典可控性的局限性

考虑如下的线性时不变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{u} \in \Omega$$

经典可控性判据要求控制量的零点为控制量约束集的**内点**。



(a) 零点是内点

(a) 零点不是内点

图. 内点示意图

经典可控性局限性例子（控制量零点非内点）

$$\dot{x} = x + u, u \leq 0$$

可控性矩阵满秩，经典可控性成立。
然而，如果系统初始状态无论离从负实轴原点多么近，比如：-0.0000001，无论哪种控制量会将系统控制到负无穷远处！不可控！



3. 可控性的基本概念

□ 正可控性

考虑如下的线性时不变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbf{u} \in \Omega$$

(1) 对约束集作限制, 可控性的定义不变

如果对任意的 $\mathbf{x}(t_0)$, 存在定义在时间区间 $[t_0, t_1]$ 上的容许控制 $\mathbf{u}_{[t_0, t_1]}$ 可以将 $\mathbf{x}(t_0)$ 控制到原点, 则称系统可控。反之, 系统不可控。

(2) 可控性判定定理 (充分必要条件) [3]

1) 可控性矩阵 $C(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 满秩;

2) 不存在 \mathbf{A}^T 的实特征向量 \mathbf{v} 使得 $\mathbf{v}^T \mathbf{B}\mathbf{u} \leq 0$ 对所有的 $\mathbf{u} \in \Omega$ 成立

物理
意义?

[3] Brammer R F. Controllability in linear Autonomous systems with positive controllers. SIAM Journal on Control, 1972, 10(2):779-805





3. 可控性的基本概念

□ 正可控性

(3) 条件2)的必要性解释

不存在 A^T 的实特征向量 v 使得 $v^T B u \leq 0$ 对所有的 $u \in \Omega$ 成立

举个反例（**以上条件为假-》不可控**）：

存在 A^T 的实特征向量 v 使得 $v^T B u \leq 0$ 对所有的 $u \in \Omega$ 成立

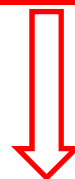
$$\begin{array}{ccc} & y = v^T x & \\ \text{那么} & v^T \dot{x} = v^T A x + v^T B u & \longrightarrow \dot{y} = \lambda y + v^T B u \end{array}$$

如果 $\lambda > 0, v^T B u \leq 0$ ，则系统状态会趋于负无穷，不可控。



4. 多旋翼飞行器的可控性[4]

单方向升力



□ 多旋翼模型

(1) 悬停模型

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\underbrace{\mathbf{F} - \mathbf{G}}_{\mathbf{u}})$$

(2) 状态与系数矩阵

$$\mathbf{x} = [h \quad \phi \quad \theta \quad \psi \quad v_z \quad \omega_{x_b} \quad \omega_{y_b} \quad \omega_{z_b}]^T \in \mathbb{R}^8$$

$$\mathbf{F} = [f \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T \in \mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{G} = [mg \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \in \mathbb{R}^4$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbf{I}_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_f^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 4}$$

$$\mathbf{J}_f = \text{diag}(-m, J_{xx}, J_{yy}, J_{zz}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

(3) 控制量约束

所有旋翼的升力向量:

$$\mathbf{f} = [T_1 \quad \cdots \quad T_{n_r}]^T, \mathbf{f} = U_f = \prod_{i=1}^{n_r} [0, K_i]$$

机体力和力矩向量:

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}_f \mathbf{f}, \Omega = \{\mathbf{F} \mid \mathbf{F} = \mathbf{B}_f \mathbf{f}, \mathbf{f} \in U_f\}$$

系统控制输入向量:

$$U = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{G}, \mathbf{F} \in \Omega\}$$

[4] Du G-X, Quan Q, Yang B, Cai K-Y. Controllability analysis for multirotor helicopter rotor degradation and failure. AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 38(5): 978-984





4. 多旋翼飞行器的可控性

□ 经典可控性判定方法[5]

基于经典可控性判据判断多旋翼的可控性

第一步，重力分配到所有旋翼上： $\mathbf{G} = \mathbf{B}_f \bar{\mathbf{f}}, \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{B}_f^T (\mathbf{B}_f \mathbf{B}_f^T)^{-1} \mathbf{G}$

第二步，得到抵消重力后每个旋翼的控制力及其约束：

$$\mathbf{f}_u = \mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}$$

$$\mathbf{f}_u \in U_{f_u} = \prod_{i=1}^{n_r} [-\bar{f}_i, K_i - \bar{f}_i]$$

若控制量
零点为内点



$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{B}_f \mathbf{f} - \mathbf{G}) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{B}_f \mathbf{f} - \mathbf{B}_f \bar{\mathbf{f}}) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{f}_u \end{aligned}$$

缺点：

(1) 依赖于控制分配，控制分配会压缩控制量的可行区间

(2) 三个步骤判断可控性，难以量化

第三步，判断可控性矩阵 $C(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{B}})$ 是否满秩，其中 $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\mathbf{B}_f \in \mathbb{R}^{8 \times n_r}$

[5] 杜光勋. 多旋翼系统可控性度量问题研究. 北京航空航天大学博士学位论文, 2015.



4. 多旋翼飞行器的可控性

□ 正可控性判定方法

控制能力指标定义（**可控度**）：

$$\rho(\mathbf{G}, \partial\Omega) = \min \{\|\mathbf{G} - \mathbf{F}\|, \mathbf{F} \in \partial\Omega\}$$

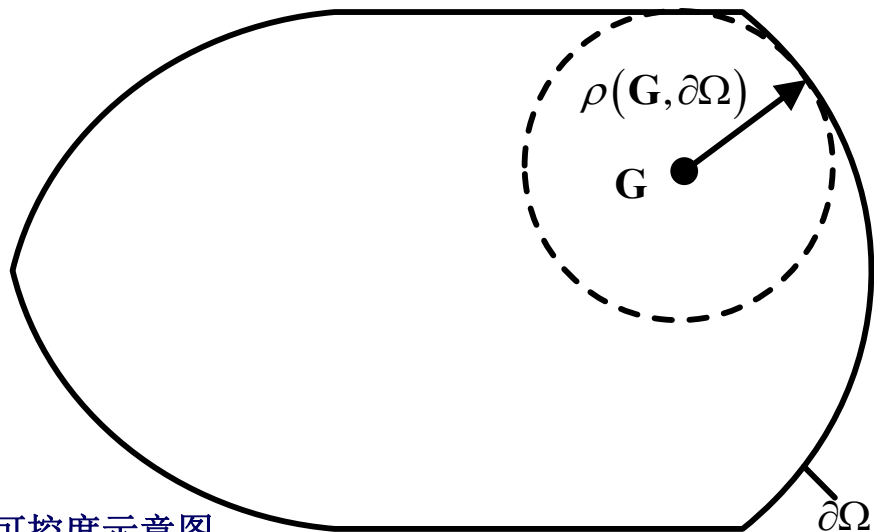


图. 可控度示意图

悬停模型

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\underbrace{\mathbf{F} - \mathbf{G}}_{\mathbf{u}})$$

如果 $\rho(\mathbf{G}, \partial\Omega) > 0$,
说明 \mathbf{G} 是约束集 Ω 的
内点



4. 多旋翼飞行器的可控性

□ 正可控性判定方法

下列三个条件等价[4]:

- 1) $\rho(G, \partial\Omega) > 0$
- 2) 不存在 A^T 的实特征向量 v 使得 $v^T B u \leq 0$ 对所有的 $u \in \Omega$ 成立
- 3) G 是 Ω 的内点

多旋翼的悬停模态可控性矩阵 $C(A, B)$ 满秩, 那么
多旋翼的可控性判定条件为

$$\rho(G, \partial\Omega) > 0$$

计算工具箱参考:

A Matlab Toolbox for Calculating an Available Control Authority Index of Multicopters.

<http://rfly.buaa.edu.cn/resources/>





4. 多旋翼飞行器的可控性



□ PNPNP与PPNNPN构型六旋翼可控性

判定下列构型六旋翼有一个旋翼停机时的可控性

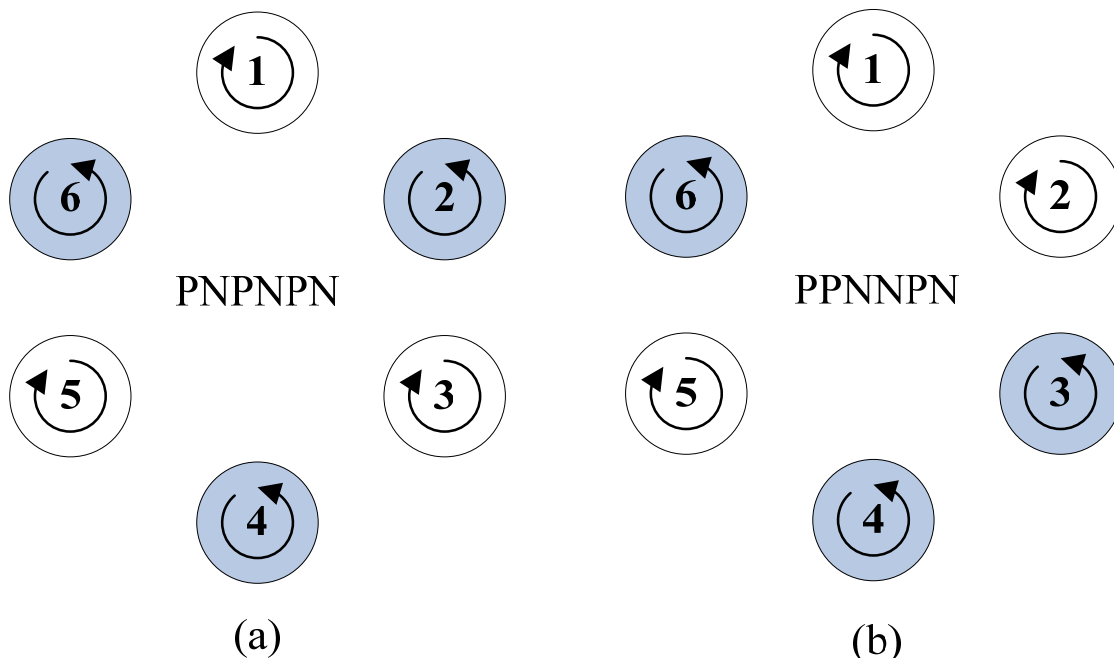


图. 两种构型六旋翼

其中P表示旋翼顺时针旋转，而N表示旋翼逆时针旋转

参数 [◦]	数值 [◦]	单位 [◦]
m_a	1.535	Kg
g	9.80	m/s ²
d	0.275	m
$K_i, i = 1, \dots, 6$	6.125	N
J_x	0.0411	kg · m ²
J_y	0.0478	kg · m ²
J_z	0.0599	kg · m
k_μ	0.1	--



4. 多旋翼飞行器的可控性

□ PNPNP与PPNNPN构型六旋翼可控性

Rotor failure	Rank of $C(A,B)$	PNPNPN		PPNNPN	
		ACAI	Controllability	ACAI	Controllability
No wear/failure	8	1.4861	controllable	1.1295	controllable
$\eta_1 = 0$	8	0	uncontrollable	0.7221	controllable
$\eta_2 = 0$	8	0	uncontrollable	0.4510	controllable
$\eta_3 = 0$	8	0	uncontrollable	0.4510	controllable
$\eta_4 = 0$	8	0	uncontrollable	0.7221	controllable
$\eta_5 = 0$	8	0	uncontrollable	0	uncontrollable
$\eta_6 = 0$	8	0	uncontrollable	0	uncontrollable

一个电机停转，无法定点定姿悬停！该结论有些反常理。

不可控

不可控



4. 多旋翼飞行器的可控性

□ PNPNP与PPNNPN构型六旋翼可控性

简单的物理解释：是否能构成基本的四旋翼

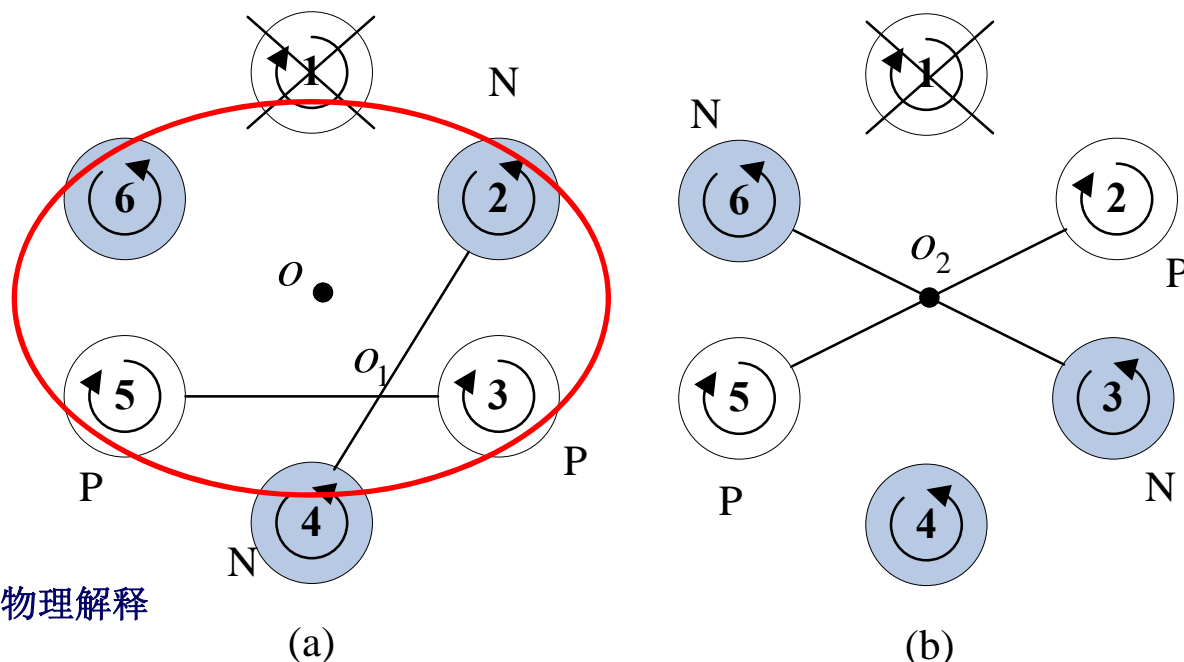


图. 多旋翼可控性物理解释

PNPNPN不能构成基本的四旋翼

PPNNPN能构成基本的四旋翼



4. 多旋翼飞行器的可控性[6]



原状态不可控怎么办？

降级控制！

Plane miraculously landing with one wing. <https://www.youtube.com/watch?v=297hIcJ43r8>



4. 多旋翼飞行器的可控性[6]

□ 放弃偏航的可控性

(1) 降级的悬停模型

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}} \underbrace{(\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{G}})}_{\bar{\mathbf{u}}}$$

去掉了偏航状态

(2) 状态与系数矩阵

$$\bar{\mathbf{x}} = [h \quad \phi \quad \theta \quad v_h \quad p \quad q]^T \in \mathbb{R}^6,$$

$$\bar{\mathbf{F}} = [f \quad \tau_x \quad \tau_y]^T \in \mathbb{R}^3,$$

$$\bar{\mathbf{G}} = [mg \quad 0 \quad 0]^T \in \mathbb{R}^3,$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \bar{\mathbf{J}}_f^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3},$$

$$\bar{\mathbf{J}}_f = \text{diag}(-m, J_{xx}, J_{yy})$$

(3) 控制量约束

所有旋翼的升力向量:

$$\mathbf{f} = [T_1 \quad \cdots \quad T_{n_r}]^T, \mathbf{f} = U_f = \prod_{i=1}^{n_r} [0, K_i]$$

机体力和力矩向量:

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{B}}_f \mathbf{f}, \bar{\Omega} = \{ \bar{\mathbf{F}} \mid \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{B}}_f \mathbf{f}, \mathbf{f} \in U_f \}$$

[6] Du G.-X., Quan Q., and Cai K.-Y. Controllability Analysis and Degraded Control for a Class of Hexacopters Subject to Rotor Failures [J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2015, 78(1): 143-157





4. 多旋翼飞行器的可控性

□ PNPNP六旋翼放弃偏航

不可控

γ	$\rho(\bar{\mathbf{G}}, \partial\bar{\Omega})$	γ	$\rho(\bar{\mathbf{G}}, \partial\bar{\Omega})$
0.05	0.1791	0.55	1.9704
0.10	-0.3583	0.60	2.0491
0.15	-0.1025	0.65	2.0491
0.20	0	0.70	2.0491
0.25	2.2204e-16	0.75	2.0491
0.30	0.4098	0.80	2.0491
0.35	0.8197	0.85	2.0491
0.40	1.2295	0.90	2.0491
0.45	1.6122	0.95	2.0491
0.50	1.7913	1.00	2.0491

假设每个旋翼最大升力为 $K = \gamma m_a g, \gamma \in [0, 1]$

两个结论：

1) $\gamma < 0.3$ 时，即使总升力可以抵消重力，六旋翼降级模型不可控；这与[5]中给出的 5/18 近似；

2) $\gamma \geq 0.6$ 时，重力一定的情况下增大升力，对于已经给指标来说，已没有增加；



4. 多旋翼飞行器的可控性



DJI-专业级多轴飞控新增X6 多旋翼保护功能（2013年左右）





4. 多旋翼飞行器的可控性

六旋翼有一个旋翼停机时的降级策略

Hexacopter Flight Test with Rotor Failure

Guang-Xun Du, Quan Quan
Binxian Yang, Kai-Yuan Cai



北航可靠飞行控制研究组
BUAA Reliable Flight Control Group

rfly.buaa.edu.cn

2012年关于降级策略已经申请专利





4. 多旋翼飞行器的可控性

□ 进一步说明

(1) 除了与多旋翼构型相关，可控性（度）还与旋翼能提供的升力相关。在文献[6]中，PNPNPN型六旋翼飞行器放弃偏航后，剩下五个旋翼每个旋翼的最大升力需要满足，可以够保证多旋翼自旋下降。因此，这也告诉我们设计的时候，油门需要留有一定的裕度。

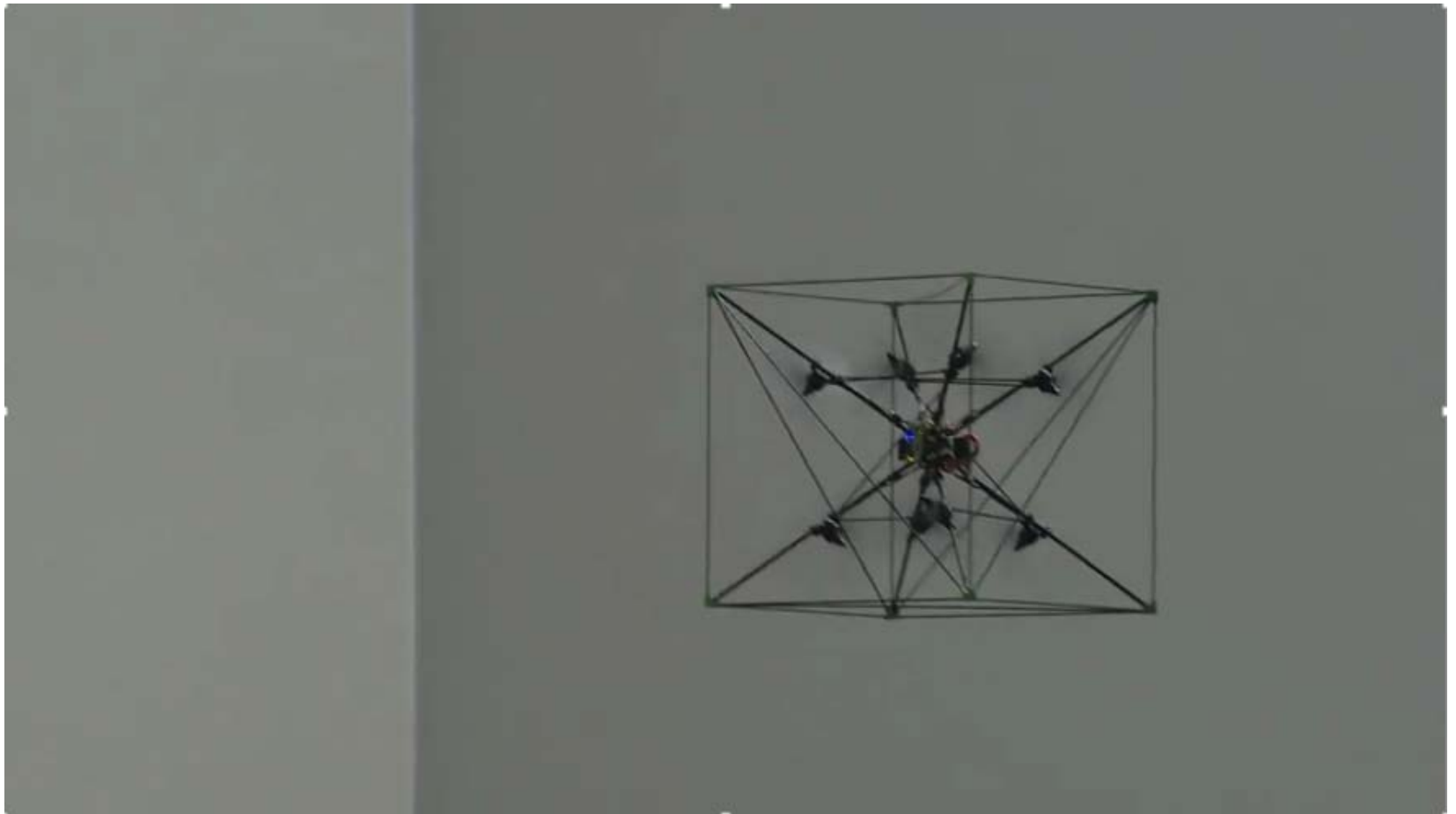
(2) 有研究者针对四旋翼[7]进行了一些极限情况下的控制，比如令四旋翼分别停机一到三个螺旋桨。按以上的可控性分析，是不可控的，也就是四旋翼不能定点悬停。这并不能说明，四旋翼不能停在空中。文章[7]设计了新的平衡状态，比如做圆周运动等。在新的平衡状态下，四旋翼的运动模型发生了改变。通过可控性分析，得出在新的平衡状态下是可控的。因此，这再次说明，讨论可控性一定要明确平衡态。

[7] Mark W. Mueller, and Raffaello D'Andrea. Stability and control of a quadrocopter despite the complete loss of one, two, or three propellers [C]. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2014: 73-105.





4. 多旋翼飞行器的可控性



Raffaello D'Andrea: Meet the dazzling flying machines of the future, Feb, 2016



4. 多旋翼飞行器的可控性

□ 可控度的应用

(1) 健康评估（在线）

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{F} - \mathbf{G} + \mathbf{d})$$

基本思路：将不确定、缓慢失效集总考虑成干扰 \mathbf{d} ，然后评价之后系统的可控程度。

【发明公布】一种多旋翼飞行器控制能力评估指标的计算方法

申请公布号：CN103901780A

申请公布日：2014.07.02

申请号：2014101294892

申请日：2014.04.02

申请人：北京航空航天大学

发明人：全权

地址：100191北京市海淀区学院路37号

分类号：G05B17/02(2006.01)I 全部

摘要：一种多旋翼飞行器控制能力评估指标的计算方法，该指标的计算过程有三大步骤：步骤一：多旋翼飞行器基本物理参数确定；步骤二：中间变量的计算；步骤三：多旋翼飞行器控制能力评估指标计算。发明的多旋翼飞行器控制能力的评估指标为飞行器重力距离控制量可达集边界最小值 全部

【发明专利申请】 事务数据

[8]刘斌,赵峙尧,杨斌先,全权,蔡开元. 一种四旋翼飞行控制能力实时评估方法[C]. 2014年第三十三届中国控制会议(CCC 2014). 2014:3112-3117

(2) 多旋翼设计评估（离线）

- 动力系统动态太慢？
- 气动布局与动力系统设计是否能够抗风？

...



类似复合设计，四旋翼能里是否足够抗风？





5. 总结

1. 可控性是基础，只有系统可控才能设计控制器来稳定系统的状态；
2. 经典可控性判据在判定多旋翼可控性时具有局限性；
 - (1) 依赖于控制分配，控制分配会压缩控制量的可行区间
 - (2) 三个步骤判断可控性，难以量化
3. 正可控性判定定理可以得到一些有趣的结论，使得多旋翼的可控性与一个指标是否大于零等价。
 - (1) 不依赖于控制分配
 - (2) 可以基于附件判定条件定义可控性指标，量化可控性
4. 控制能力指标可以用来定量化描述系统的可控性，也可以用来表征飞行器的安全性。可控度进一步知识可参考文献[9]。

[9] 杜光勋, 全权. 输入受限系统的可控度及其在飞行控制中的应用. 系统科学与数学, 2014, 34(12): 1578-1594.



6. 作业

选做一题：

1. 利用正可控性定理分析下列系统的可控性

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, u \in [0, +\infty), \lambda \in \mathbb{R}_+$$

2. 自拟一道与本章节内容相关的题，并回答。（难度与上面题目相当，不能抄袭其他书籍）



7. 下周预告

控制是一门使能科学，它的精髓是反馈。它通过传感器的感知和多旋翼本体联系起来，使不稳定的多旋翼变得稳定。有了稳定还是不够的，我们还需要控制效果能够快速和无超调，能够容忍不确定等等。因此，可以说控制很重要。对于多旋翼控制来说，传统的PID方法基本解决了其控制的大部分问题。因此，本章节主要介绍了PID方法在位置控制、姿态控制、控制分配和电机控制中的应用。针对不同的姿态表示，还分别介绍了基于欧拉角、旋转矩阵和四元数的姿态控制方法，不同的方法有着其自身的优势。本章拟回答的问题是：

给定期望的位置，如何控制多旋翼的电机使其能够飞到目标位置？

本节课将从多旋翼底层控制框架和模型化简，位置控制，姿态控制，控制分配和电机控制等五个方面展开论述，并最终通过综合仿真验证控制算法的有效性。



资源

- (1) 课程中心 (课件、资料、作业等)
- (2) 可靠飞行控制研究组主页 (课件等)

<http://rfly.buaa.edu.cn/resources/>

- (3) 关注可靠飞行控制研究组公众号 buaarfly(课件等)
- (4) 多旋翼设计与控制交流QQ群 183613048





谢谢！

感谢 **杜光勋**、**戴训华**为本节课课件准备做出的贡献。

如课件有错误之处，请反馈到邮箱 **qq_buaa@buaa.edu.cn**

