

제20회 이과대학 재학생 연구프로젝트 결과 보고서

연구 제목	고차원의 일반화 나이트 투어 문제에 대해 높은 정확도를 보이는 Warnsdorff's Rule 기반 휴리스틱 해법 제시 A High-Accuracy Warnsdorff's Rule-Based Heuristic Solution for the Higher-Dimensional Generalized Knight's Tour Problem
발표자 성명 및 학번	성준영 (2024110437)(팀장) (한컴바탕, 12포인트로 작성) (총 1 명)
제출방법	○ 제출방법 : 이메일(cns@dongguk.edu)로 스캔본 제출 ※ 이메일제목: 연구프로젝트 결과보고서 제출 ※ 발표파일 PPT(자유양식)도 반드시 첨부하여 이메일 제출
<목차>	
1. 연구개요 2	
1) Knight's Tour[1][2] 2	
2) WARNSDORFF'S RULE[20] 2	
2. 연구의 필요성 4	
1) 기존 연구에서의 Knight's tour 존재 조건 4	
3. 연구목표 6	
4. 연구 결과 및 고찰 8	
1) 기존 휴리스틱 해법을 사용한 고차원에서의 정확도 9	
가. (2,1,0,...,0) 이동 규칙 9	
나. (1,2,2,...,2) 이동 규칙 12	
다. (3,2,0,...,0) 이동 규칙 13	
라. (4,1,0,...,0) 이동 규칙 14	
마. (4,3,0,...,0) 이동 규칙 14	
2) 새로운 동점 처리 규칙을 사용한 AW, AW+방식의 정확도 15	
가. (3,2,0,...,0) 이동 규칙 15	
나. (4,1,0,...,0) 이동 규칙 16	
다. (4,3,0,...,0) 이동 규칙 18	
3) AW과 AW+을 혼합한 휴리스틱 해법 18	
가. (3,2,0,...,0) 이동 규칙 19	
4) 2차원 그래프 기반의 일반화 19	
5. 결론 및 요약 20	
6. 학문분야 연계성 기술(해당하는 경우 작성) 22	
7. 참고문헌 23	

1. 연구개요

o 본 연구는 일반화 나이트 투어 문제(GKTP)와 고차원으로 확장한 조건에서 Warnsdorff's rule을 적용했으며, 이로 인해 생기는 낮은 정확도를 새로운 동점 처리 규칙(tiebreak rule)을 제시해 휴리스틱의 정확도를 높였다. 가장 좋은 데이터의 경우 정확도가 40%를 넘지 못하는 경우에서 새로운 무작위 동점 처리 규칙을 적용했을 때 95%이상의 정확도를 보였다. 또한, 기존 연구에서 찾지 못한 새로운 조건에서의 나이트 투어 경로를 찾아내었다.

1) Knight's Tour^{[1][2]}

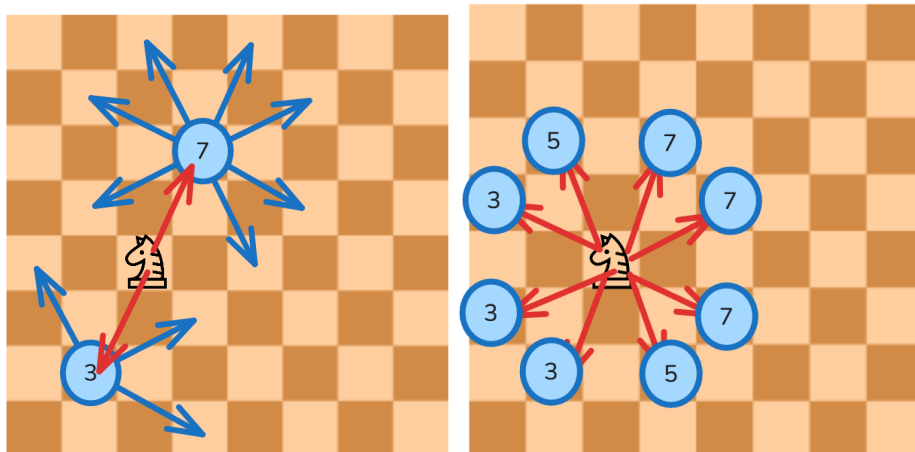
o 나이트 투어(knight's tour) 문제는 1000년이 넘는 역사를 가지고 있다. 나이트 투어란, 체스말 나이트가 체스판 칸을 한 번씩만 밟아 모든 칸을 방문하는 경로를 의미한다. 나이트 투어가 마지막 칸에서 시작 칸으로 돌아올 수 있으면 폐쇄 투어(closed tour)라고 하고, 그렇지 않으면 개방 투어(open tour)라고 한다. 체스 역사학자 H. J. R. Murray^[3]는 바그다드에서 840년과 900년경에 살았던 Shatranj 플레이어 al-Adli와 as-Suli가 8×8 체스판에서 폐쇄 나이트 투어를 수행한 기록이 있다고 한다. 이후 나이트 투어 문제는 아마추어와 전문 수학자 모두에게 계속해서 흥미로운 주제가 되어왔다.

o 수학자 A.T. Vandermonde^[4]는 처음으로 $4 \times 4 \times 4$ 입체 큐브에서 3차원 나이트 투어를 구성하였으며, 이를 1771년에 발표하였다. 그 후 여러 3차원 예제가 Schubert^[5], Gibbins^[6], Stewart^[7], Jelliss^[8], Petkovic^[9], DeMaio^[10] 등에 의해 만들어져 왔다.

o 나이트 투어 문제(KTP)는 흥미로운 수학적 문제로, 그 역사는 Euler와 De Moivre^[11]까지 거슬러 올라간다. 이후 나이트 투어 문제는 많은 관심을 받았다^{[12][13][14][15][16][17]}. 최근 Chia와 Ong^[18]은 일반화 나이트 투어 문제(GKTP)를 연구하기 시작했는데, 이는 기존의 (1,2) 이동 대신 보다 일반적인 (a,b) 이동을 고려한 문제이다. 또한 ^{[19][20]}에서는 나이트 투어 문제를 3차원 상황으로 일반화하여 여전히 (1,2) 이동을 사용하는 연구가 진행되었다.

2) WARNSDORFF'S RULE^[20]

1823년, Warnsdorff^[21]는 나이트 투어를 찾기 위한 간단한 휴리스틱을 제안하였다.



[그림 1] 차수 계산을 시각화한 그림

Warnsdorff's Rule : 한 점에서 이동할 수 있는 칸 들 중에서, 해당 칸이 갈 수 있는 또다른 칸이 몇 개인지 센다. 이미 한 번 방문한 칸은 갈 수 있는 칸이 아니기 때문에 세지 않는다. 이런 규칙으로 센 칸의 개수를 차수(degree)라 한다. 이때 차수가 가장 적은 칸을 선택해 이동한다. 해당 그림에 따르면 갈 수 있는 칸이 3인 칸들로 이동한다.

o 수학적인 보장이 없는 직관적인 해법이다. 차수가 낮은 칸은 나아갈 수 있는 칸이 적기 때문에 이후 경로에서 그 칸을 방문할 기회가 줄어들게 된다. 특히 차수가 0인 칸은 반드시 규칙을 따라 먼저 방문해야 하며, 그렇지 않으면 결코 도달할 수 없다. 비슷하게, 차수가 1인 칸을 제때 방문하지 못하면 이후에는 단 한 번만 방문할 수 있는 기회가 남게 되며, 해당 칸은 반드시 투어의 마지막 칸이어야 한다. 또한 어떤 투어도 마지막 몇 수에서는 Warnsdorff의 규칙에서 벗어날 수 없는데, 이는 직관적으로 덜 명확하다. 핵심 아이디어는, 경로 초반에 규칙에서 벗어나더라도 이후 “실수”를 만회할 기회가 많지만, 끝으로 갈수록 실패를 피할 기회가 줄어든다는 것이다. 이와 같은 “엔드게임 효과(endgame effect)”는 이 휴리스틱의 직관적 설득력의 핵심이다.

o 1996년 REU 논문에서 Squirrel^[22]은 이 알고리즘을 체스 판의 한 변의 길이가 5인 상황부터 400인 상황까지 각각 100회 시도하였다. 결론은 작은 보드에서는 해당 휴리스틱이 상당히 성공적이었지만, 보드 크기가 커질수록 성공률이 급격히 떨어진다는 것이었다. 대부분의 보드에서 한 변의 길이가 50보다 작은 경우 85% 이상의 성공률을 보였으며, 100보다 작은 상황에서는 절반 이상 성공하였다. 그러나 200보다 클 경우 성공률은 5% 미만으로 떨어졌으며, 325보다 큰 상황에서는 성공 사례가 전혀 없었다. 해당 연구는 보드 크기가 커질수록 Warnsdorff의 무작위 휴리스틱의 성공률이 0에 가까워짐을 보였다.

o Roth^[23]는 문제의 원인이 Warnsdorff의 무작위 동점 처리 규칙(random tiebreak rule)에 있다고 판단하였다. [그림 1]과 같이 가장 작은 차수가 여러개인 상황에서는 마땅한 규칙이 없다는 점에서 문제점이 있을 수 있다고 판단했다. 그는 “체스판의 중심으로부터의 유클리드 거리가 가장 큰 칸을 선택한다”라는 방식으로 같은 차수에서 추가적으로 우선순위를 선택하는 방식을 제안했다. 즉, [그림 1]에서는 차수가 3인 칸들 중 가장 구석에 있는 칸을 선택하게 된다. 다만 차수가 같고 칸이 동일한 거리를 갖는 경우를 어떻게 처리할지는 명확히 밝히지 않았다. Roth의 방식을 추가했을 때 그의 휴리스틱이 처음 실패한 경우가 428행 짜리 보드였으며, 2000행 미만의 모든 보드에서 실패 확률이 1% 미만으로 떨어졌다.

2. 연구의 필요성

o 기존의 연구에서는 Warnsdorff's rule의 적용을 2차원 체스보드나 제한된 3차원에서 적용하는 수준에 그쳤다. 이때 Roth^[23]가 제시한 무작위 동점 처리 규칙은 정사각형의 체스보드에서 실험이 이루어졌으며, 2024년 Edvard Olsen, Tatiana Babicheva^[24]의 연구에서는 직사각형의 체스보드에서 실험이 이루어졌다. 2019년 John R. Gerlach, Scott M. Gerlach^[25]의 연구에서는 3차원 체스보드에서 Warnsdorff's rule을 적용했지만, $4 \times 8 \times 8$ 크기의 제한된 환경에서의 실험이었다. Roth가 제시한 방식은 2차원 정사각형의 체스보드에서는 행이 2000 미만은 보드에서 실패 확률이 1% 미만이었지만, 2차원 직사각형의 체스보드에서는 특정 환경에서는 60%의 성공확률을 보였고, 3차원 $4 \times 8 \times 8$ 체스보드에서는

46.9%의 정확도를 보였다. 다소 제한적인 환경에서 Warnsdorff's rule이 적용되었기에 다양한 환경에서의 Warnsdorff's rule의 적용이 필요하다.

o Warnsdorff's rule은 고전적인 (2,1)이동 방식에 적용되었지만, (a,b)이동 방식을 다루는 일반화 나이트 투어 문제에는 적용되지 않았다. 또한, Warnsdorff's rule은 제한된 3차원에서 적용되었지만 4차원 5차원과 같은 고차원에서 적용되지 않았다. (a,b)이동 방식을 다루는 일반화 나이트 투어 문제또한 고차원으로 확장한 환경에서 적용이 되지 않았다는 점에서 추가적인 연구가 필요하다.

o 기존 연구에서 나이트 투어 경로를 찾는 방식은 국소적인 부분에서 폐쇄 투어를 만들고, 폐쇄 투어를 구성하는 작은 체스판끼리 이어 전체적인 나이트 투어를 만들어내는 방식만을 사용했다. 이때 지금까지 알려진 고차원 나이트투어의 조건은 체스 보드의 한 변이 짝수인 경우에만 보장이 되었는데, 한 변이 짝수라는 제한 조건은 폐쇄 투어를 이어붙히는 방식으로 인한 흔적이다. 해당 제한 조건이 없는 새로운 체스보드에서 나이트 투어를 찾는 방식또한 추가적인 연구가 필요하다.

1) 기존 연구에서의 Knight's tour 존재 조건

(2,1,0,.....,0) 이동 규칙		
	폐쇄 회로	개방 회로
2차원	$^{[25]}N \times M$ ($N \geq M$) 체스보드에서의 필요충분 조건 1) N or M is even, 2) $M \notin \{1, 2, 4\}$, 3) $(N,M) \notin (4, 3), (6, 3)$ or $(8, 3)$.	$^{[17]}N \times M$ ($N \geq M$) 체스보드에서의 충분 조건 (i) $M = 1$ or 2 , (ii) $M = 3$ and $N = 3, 5, 6$, or (iii) $M = 4$ and $N = 4$. $^{[17]}N \times M$ ($N \geq M$) 체스보드에서의 필요충분 조건 (1) $M = 3$ and ($N = 4$ or $N \geq 7$), or (2) $M \geq 4$ and $N \geq 5$.
3차원	$^{[25]}N \times M \times L$ ($N \geq M \geq L$) 체스보드에서의 필요충분 조건 1) N, M or L is even, 2) $N \geq 4$, 3) $M \geq 3$.	—
고차원	$^{[25]}3$ 이상의 r 에 대해 $N_1 \times N_2 \dots \times N_r$ ($N_1 \geq N_2 \dots \geq N_r$) 체스보드에서의 필요충분 조건 1) Some N_i is even;	—

	2) $N_1 \geq 4$; 3) $N_2 \geq 3$.	
(a,b,c,...,z) 이동 규칙		
	폐쇄 회로	개방 회로
2차원	^[17] $N \times M$ ($N \geq M$) 체스보드에서의 충분 조건 (i) $a + b$ is odd, (ii) N or M is even, (iii) $N \geq a + b$, and (iv) $M \geq b$.	—
3차원	^[26] $N \times M \times L$ ($N \geq M \geq L$) 체스 보드에서의 충분 조건 ($a < b < c$) (i) $a + b + c$ is odd and not all of a, b, c are equal; (ii) L or M or N is even; (iii) $N \geq a + b$; (iv) $L \geq 2c$.	—
고차원	^[26] (1, b) 움직임에 대해 $N \times M$ 체 스보드에서 나이트 투어 경로가 있다 면 ($N > 2b + 1$) $N \times M \times N_1 \times$ $N_2 \times \dots \times N_r$ 체스보드에서 존재 ^[26] 충분히 큰 N 과 M 에 대해 $N \times M$ 체스보드에서 나이트 투어 경로가 있 다면 $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r$ 체스보드에서 존재 (이때 N_1 가 짝수).	—

<표 1> knight's tour 존재 조건

3. 연구목표

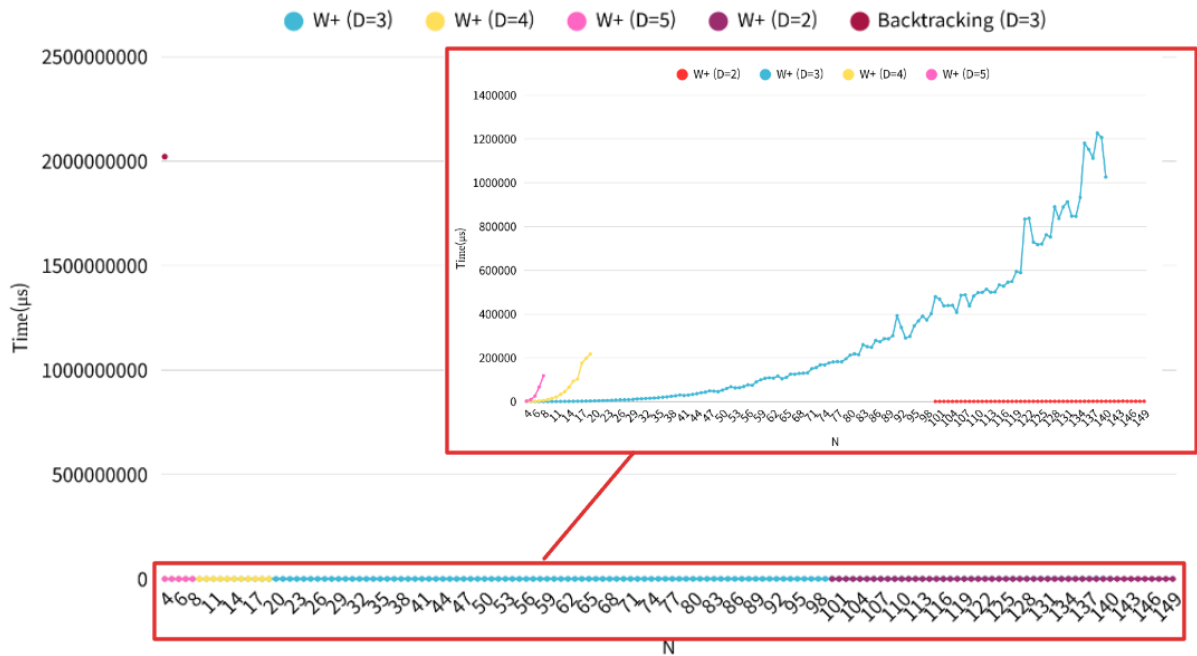
o 기존의 연구에서는 Warnsdorff's rule의 적용을 2차원 체스보드나 제한된 3차원에서 적용하는 수준에 그쳤다는 점에서, 고차원으로 확장한 체스보드에서 Warnsdorff's rule을 적용하려 한다.

o Warnsdorff's rule은 고전적인 (2,1)이동 규칙에 적용되었지만, (a,b)이동 규칙을 다루는 일반화 나이트 투어 문제(GKTP)에는 적용되지 않았다. 이에, 본 연구에서는 (a,b)이동 규칙을 다루는 일반화 나이트 투어 문제(GKTP)에서 Warnsdorff's rule을 적용하고, 높은 정확도를 찾는 방법을 제시하려 한다.

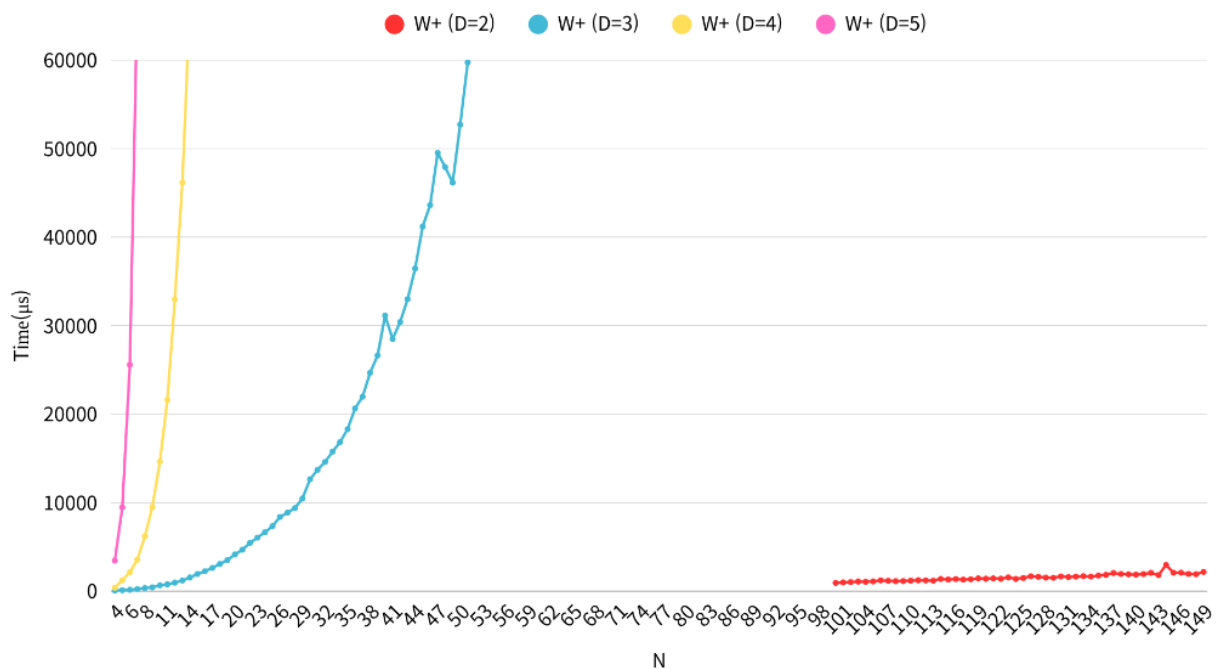
- o Warnsdorff's rule은 제한된 3차원에서 적용되었지만 4차원 5차원과 같은 고차원에서 적용되지 않았다는 점에서, (2,1) 이동 규칙인 나이트 투어 문제(KTP)를 고차원으로 확장해 Warnsdorff's rule을 적용하려 하고, (a,b)이동 규칙을 다루는 일반화 나이트 투어 문제(GKTP)또한 고차원으로 확장해 Warnsdorff's rule을 적용하려 한다.
- o 이때 다양한 환경에서 Warnsdorff's rule을 적용했을 때 정확도가 낮아진다면, 정확도를 끌어올릴 동점 처리 규칙을 새롭게 제시하려 한다.
- o 지금까지 알려진 고차원 나이트투어의 조건은 체스 보드의 한 변이 짝수인 경우에만 보장이 되었는데, 한 변이 짝수라는 제한 조건은 폐쇄 투어를 이어붙히는 방식으로 인한 흔적이다. Warnsdorff's rule을 통한 개방 투어로 해당 고차원에서 모든 변이 홀수인 경우에도 충분히 나이트 투어 경로를 찾을 수 있음을 보이려 한다.
- o 나이트 투어의 경로를 찾기 위해 평범한 Backtracking 방식의 알고리즘을 사용한다면 100%의 정확도를 제공하지만 지수의 시간복잡도를 가져 느린 속도를 보인다. Warnsdorff's rule의 휴리스틱을 따른다면 정확도가 조금은 떨어지더라도 시간 복잡도를 다항 시간으로 낮출 수 있다. $4 \times 4 \times 4$ 체스보드에서 Backtracking 방식은 2021621083.00(μ s)의 수행시간을 보였지만 Warnsdorff's rule을 따르면 61.45(μ s)의 수행시간을 보인다. 본 연구는 Warnsdorff's rule에 새로운 동점 처리 방식을 추가하여, 빠른 수행시간을 유지하면서도 보다 높은 정확도를 확보하는 것을 목표로 한다. 나아가, 제안된 방법이 다양한 이동 규칙과 고차원 환경에서도 적용 가능한 범용성을 갖추도록 하는 데 연구의 초점을 둔다.
- o 차원은 D(Dimension), 한 변의 길이는 N으로 표시한다.

Algorithm	Dimension	N	Big-O	Time(μ s)
Backtracking	3	4	$O(24^{N \times N})$	2021621083.00
W	3	4	$O(24 \times N^3)$	61.45
W	3	140	$O(24 \times N^3)$	1026137.20
W	4	19	$O(96 \times N^4)$	217589.31
W	5	8	$O(240 \times N^5)$	118630.52

<표 2> Backtracking 방식과 Warnsdorff's rule방식의 수행시간



<표 3> Backtracking 방식과 Warnsdorff's rule 방식의 수행시간



<표 4> Warnsdorff's rule 방식 알고리즘의 수행시간

4. 연구 결과 및 고찰

o Roth의 해법에서는 무작위 동점 처리 문제를 해결한 것처럼 보이지만, 차수가 같고 칸이 동일한 거리를 갖는 경우를 어떻게 처리할지는 명확히 밝히지 않았다. 즉 이러한 경우에

서도 동점 처리를 무작위로 해야한다는 한계가 있다. ㄴ 만약 어떤 점에 대해서 주변 칸의 차수를 구할 때 내부적으로 순서를

((+2,+1),(+2,-1),(-2,+1),(-2,-1),(+1,+2),(+1,-2),(-1,+2),(-1,-2))

와 같이 설정하고 Warnsdorff's rule을 따랐을 때 경로를 찾는 데에 실패한다면,

((+2,-1),(-2,+1),(-2,-1),(+1,+2),(+1,-2),(-1,+2),(-1,-2),(+2,+1))

의 순서로 다시 재설정해 Warnsdorff's rule을 따른다. 만약 임의의 점 (x,y)에 대해서, (x+2,y+1),(x-1,y-2)가 차수가 같고 중심으로부터 동일한 거리를 가지고 있다면, 첫 번째 경우에는 (x+2,y+1)을 선택하고 두 번째 경우에는 (x-1,y-2)을 선택한다. 즉 무작위 동점 처리 문제를 해결하기 위해 선제적으로 우선순위를 정해둔 뒤 Warnsdorff's rule을 따르고, 실패할 때마다 가장 첫 번째의 우선순위를 가장 마지막의 우선순위로 변경하는 작업을 반복한다. 이를 실제 구현 코드의 일부분을 가져오자면 다음과 같다.

```
int dx[8] = {2, 2, -2, -2, 1, 1, -1, -1};
int dy[8] = {1, -1, 1, -1, 2, -2, 2, -2};
//
int main(int argc, char* argv[]) {
    bool is_success = knight_tour(sx, sy);
    for(int i=0;i<8 and !is_success;i++){
        for(int j=0;j<8-1;j++)swap(dx[j],dx[j+1]);
        for(int j=0;j<8-1;j++)swap(dy[j],dy[j+1]);
        init_degree();
        is_success = knight_tour(sx, sy);
    }
}
```

o 기존의 연구에서 Warnsdorff's rule을 따른 알고리즘을 'W(Warnsdorff's rule)방식', Warnsdorff's rule에 Roth가 제안한 것과 같이 중심으로부터의 거리로 동점처리한 방식을 'W+(Warnsdorff's rule + Roth's proposition)방식'이라 한다. 본 연구에서 제시한 동점 처리 방식을 첨가한 휴리스틱을 'AW(Additional Warnsdorff's rule)방식'과 'AW+(Additional Warnsdorff's rule + Roth's proposition)방식'이라 한다. 기존 휴리스틱 해법으로 다양한 이동 규칙과 고차원에서의 정확도를 먼저 실험을 한 뒤, 본 연구에서 제시한 AW, AW+방식을 적용해 정확도와 소요 시간을 보이며 한다. (2,1,0,...0) 이동 규칙이 아닌 (a,b,0,...0) 이동 규칙과 같은 상황에서는 W, W+방식이 약 40%를 넘지 못하는 경우에서 AW+방식은 90%를 상회하는 정확도를 보인다.

o 본 연구에서는 고차원 정 하이퍼큐브 격자(regular hypercube lattice/grid)에서 실험했다. 즉 차원이 5로 설정되어 있고 N이 5라는 상황은 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ 체스보드에서

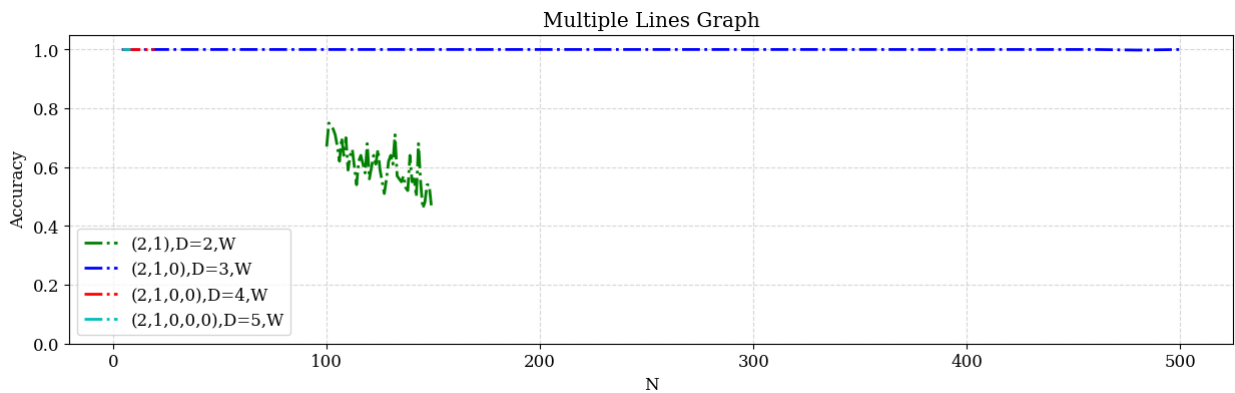
실험했음을 시사한다. 정확도의 측정 방식은 무작위의 지점에서 시작했을 때 나이트 투어 경로를 찾았으면 성공으로 보았고, 각 N마다 100개의 무작위 시작 지점을 골라 성공의 개수를 100으로 나누었다. 이때 수학적으로 open path가 존재하지 않음에도 경로를 찾지 못했을 때 해당 알고리즘은 실패로 기록된다.

o N이 홀수일 때 시작 지점의 원소들의 합은 홀수이도록 했다. 이유는 체스판의 흑과 백 칸의 개수 관계에 따라 쉽게 알 수 있다.

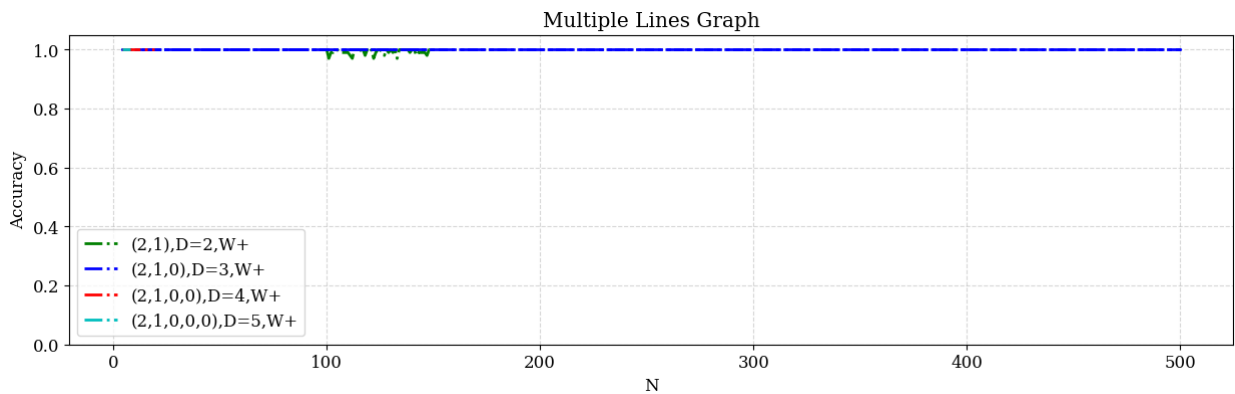
o 실험은 Intel Core i5-7400 CPU (3.00 GHz), 24 GB RAM, NVIDIA GeForce GTX 1050 Ti GPU (4 GB), Samsung SSD 850 EVO (250 GB)와 1.14 TB HDD가 장착된 Windows 64비트 운영체제 환경에서 수행되었다.

1) 기존 휴리스틱 해법을 사용한 고차원에서의 정확도

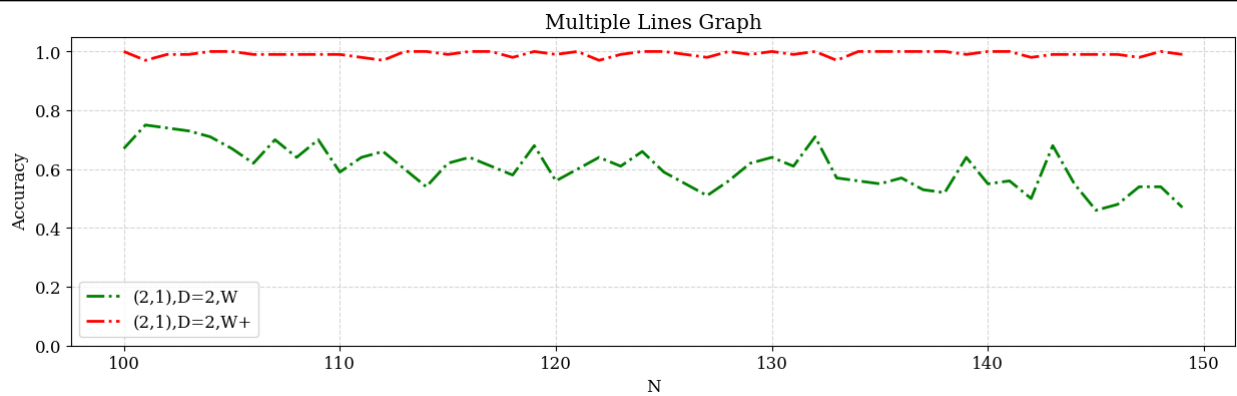
가. (2,1,0,...,0) 이동 규칙



<표 5> W방식의 차원 차이에 따른 정확도



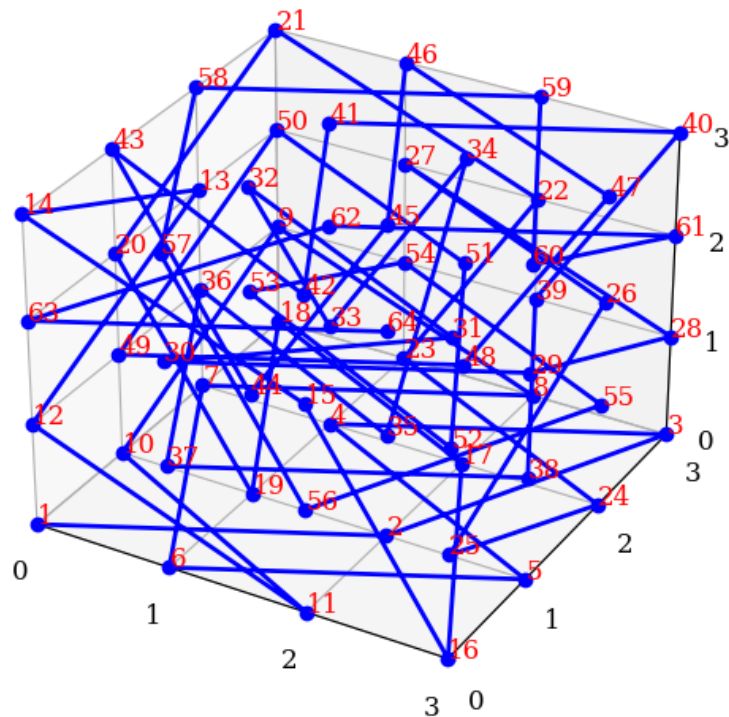
<표 6> W+방식의 차원 차이에 따른 정확도



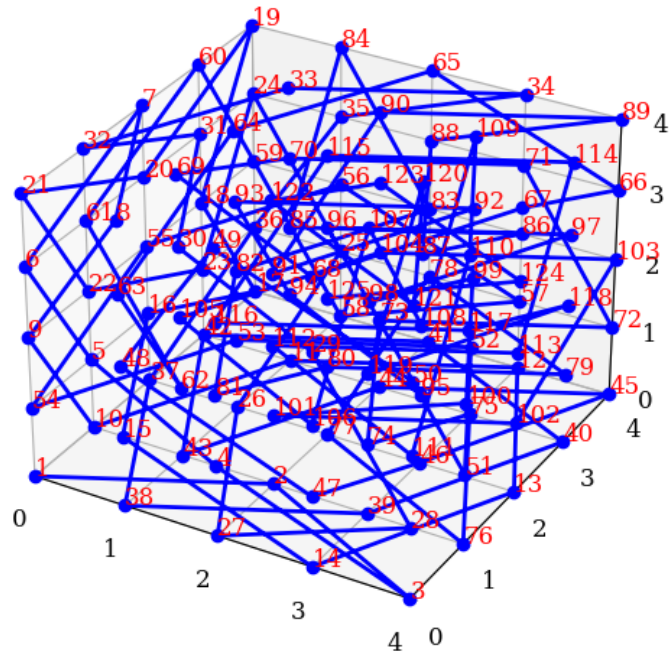
<표 7> 2차원에서 W와 W+의 정확도

o 두 방식은 2차원의 환경에서 연구된 바 있다^[22]. 2차원에서는 N이 1000 이상이 되는 경우에서 W는 정확도가 40%이하로 떨어지는 반면, W+ 방식은 90%를 상회하는 정확도를 보장한다.

o 이때 새롭게 구성한 고차원의 환경에서는 W방식이 95% 이상의 높은 정확도로 경로를 찾았다.



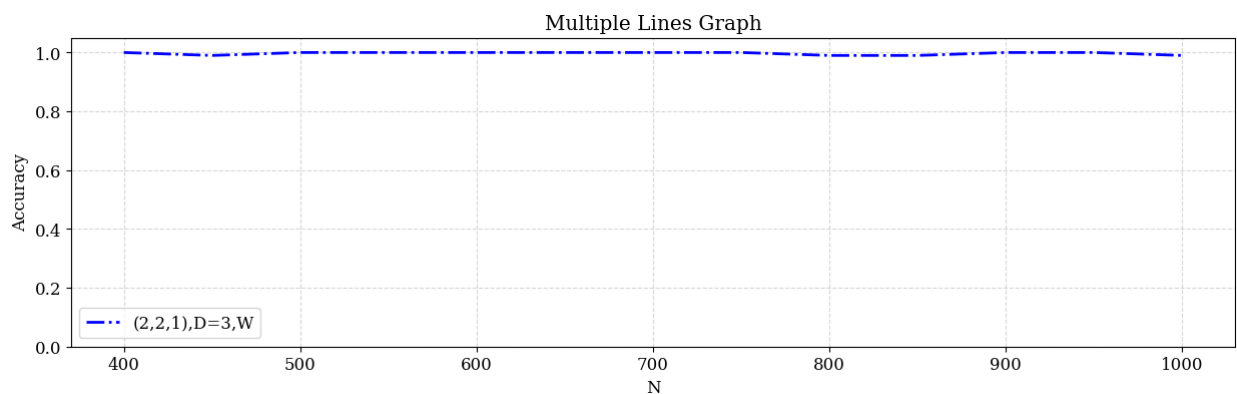
[그림 2] $4 \times 4 \times 4 \times 4$ 에서의 나이트 투어 경로



[그림 3] $5 \times 5 \times 5 \times 5$ 에서의 나이트 투어 경로

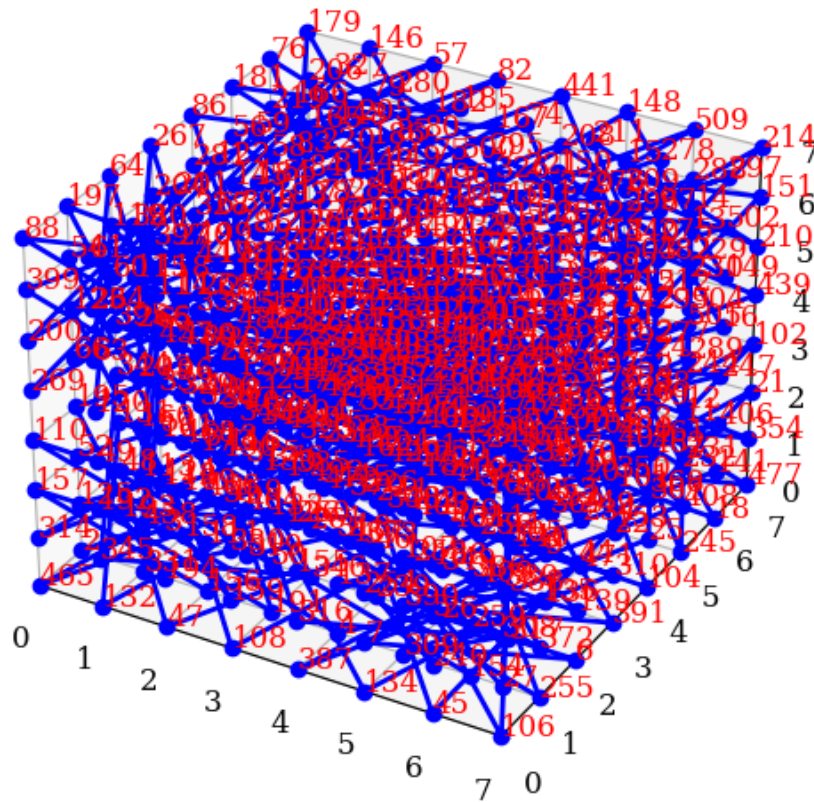
o [그림 2]과 [그림 3]은 각각 N 이 4일 때, 5일 때 W방식을 적용하여 찾은 경로를 시각화한 것이다. 체스보드가 $N \times N \times N \times \dots$ 일 때 기존 연구에 따르면 한 변의 길이가 짝수일 때는 나이트 투어 경로가 존재함이 증명되었는데, 이번 새로운 연구에 따르면 모든 변이 홀수일 때도 충분히 나이트 투어 경로가 존재함을 보이고 있다.

나. $(1,2,2,\dots,2)$ 이동 규칙



<표 8> 3차원에서 W방식의 정확도

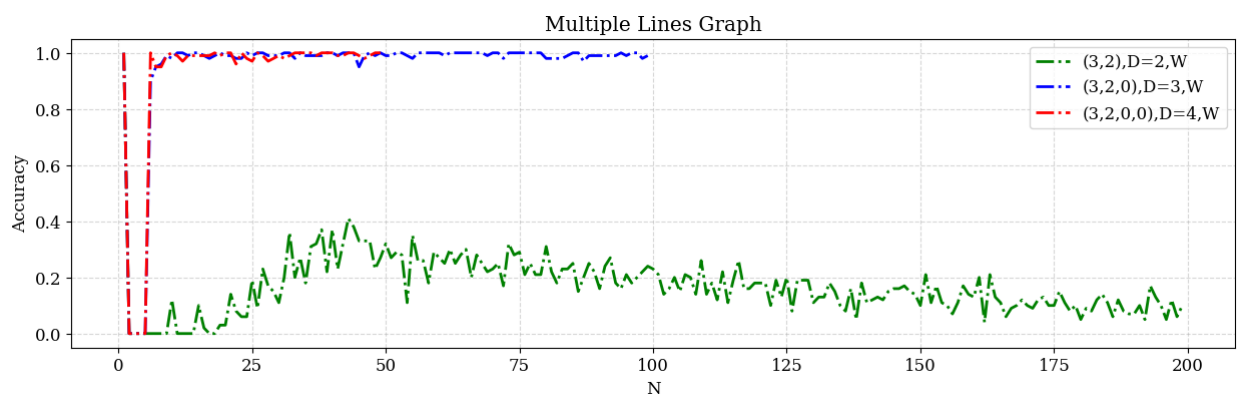
o 이때 특이하게 $(1,2,2)$ 이동 규칙을 부여했을 때 3차원에서 W방식을 따랐을 때 N 이 400부터 1000으로 큰 상황에서도 높은 정확도를 보였다.



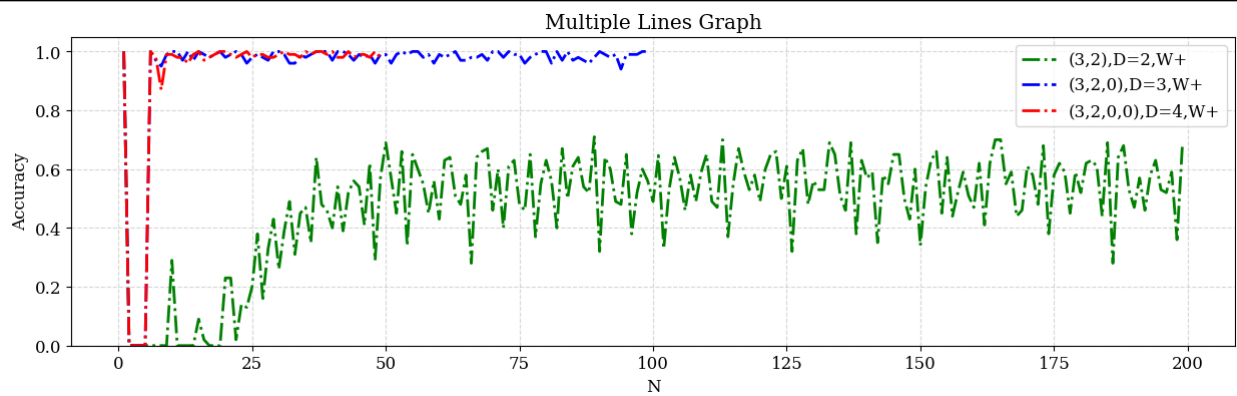
[그림 4] $8 \times 8 \times 8$ 에서의 나이트 투어 경로

o [그림 4]은 해당 이동 규칙에서 N이 8일 때 W방식을 적용하여 찾아낸 경로를 시각화한 것이다.

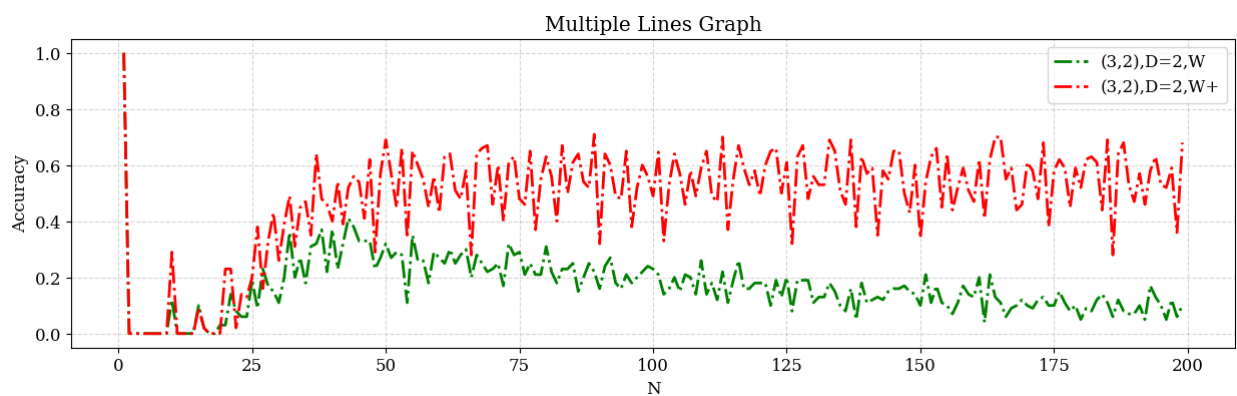
다. $(3,2,0,...,0)$ 이동 규칙



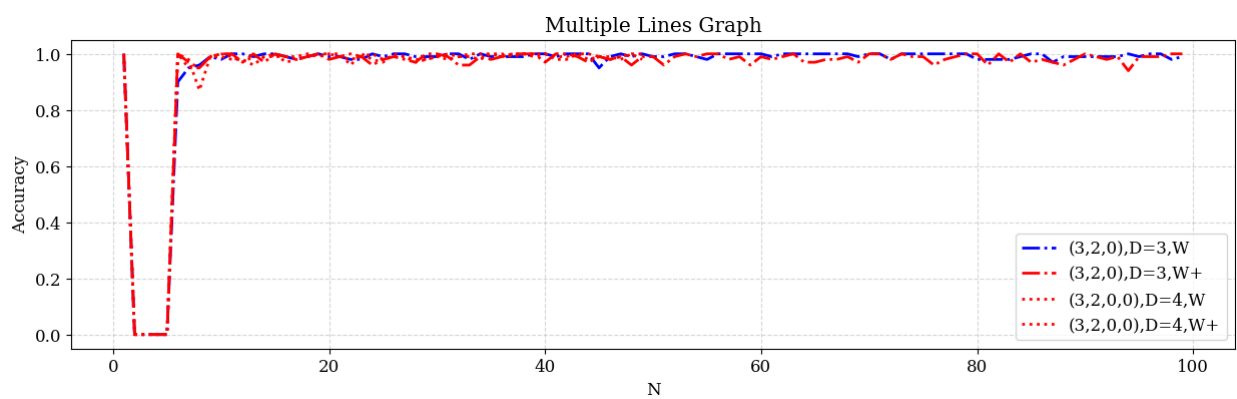
<표 9> W방식의 차원 차이에 따른 정확도



<표 10> W+방식의 차원 차이에 따른 정확도

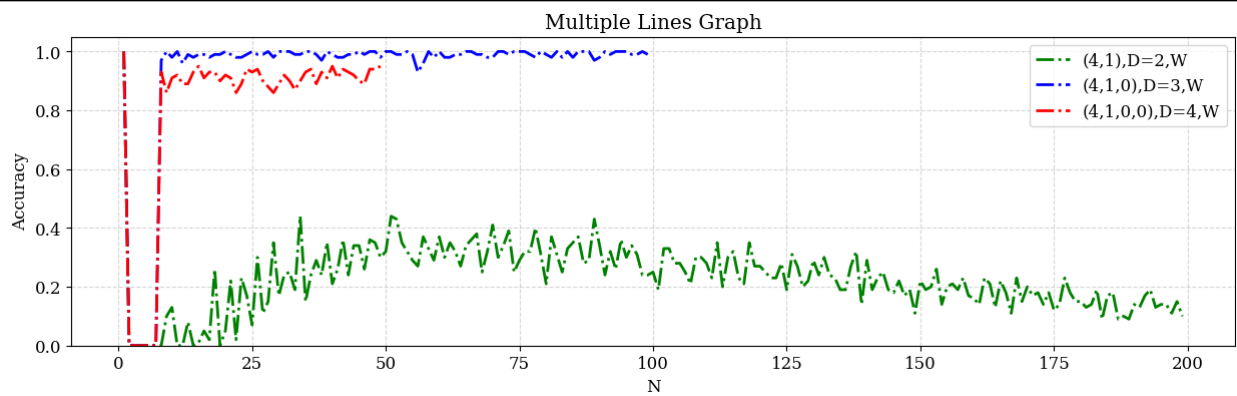


<표 11> 2차원에서 W와 W+의 정확도

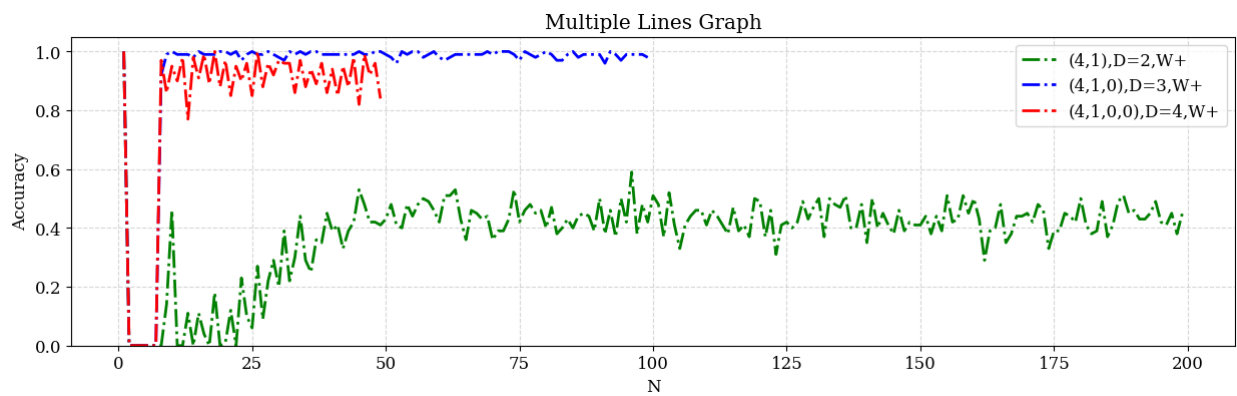


<표 12> 3차원, 4차원에서 W와 W+의 정확도

라. (4,1,0,...,0) 이동 규칙

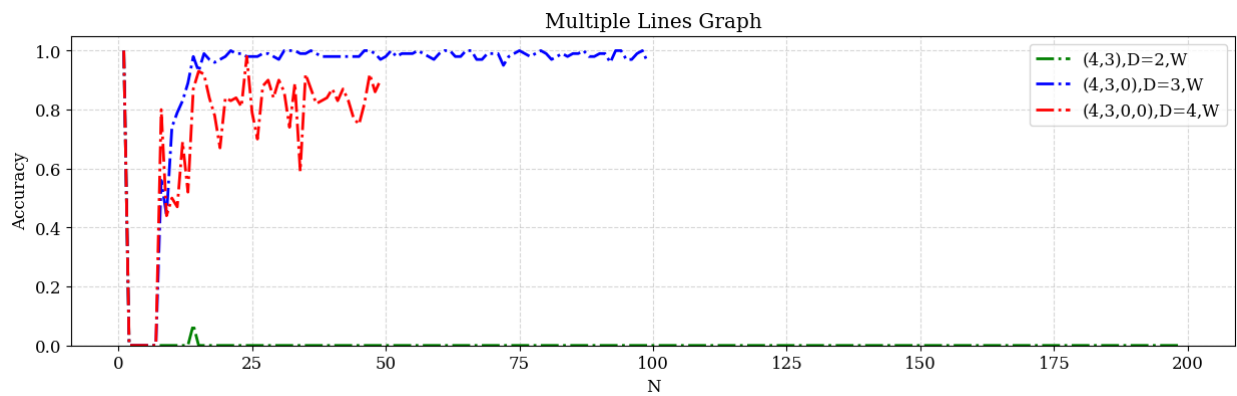


<표 13> W방식의 차원 차이에 따른 정확도



<표 14> W+방식의 차원 차이에 따른 정확도

마. (4,3,0,...,0) 이동 규칙

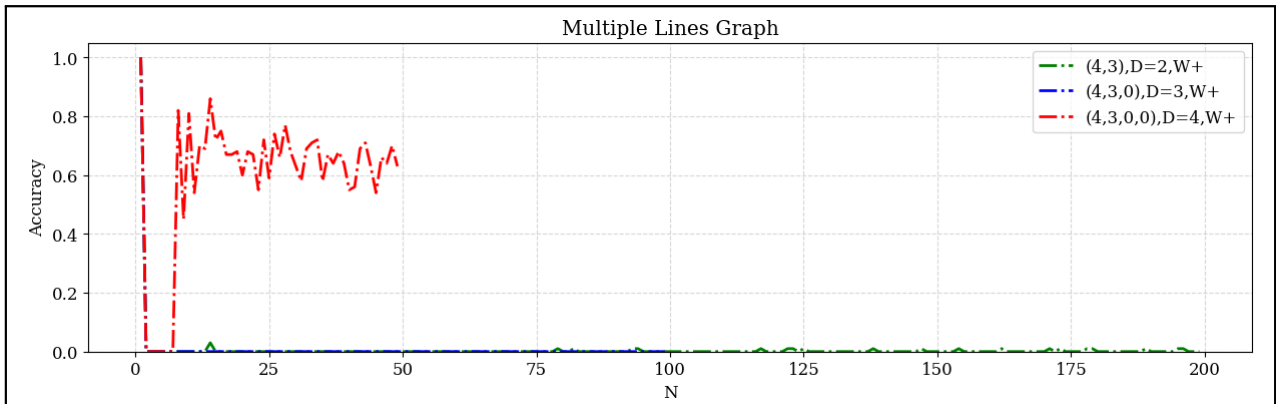


<표 15> W방식의 차원 차이에 따른 정확도

<표 16> W+방식의 차원 차이에 따른 정확도

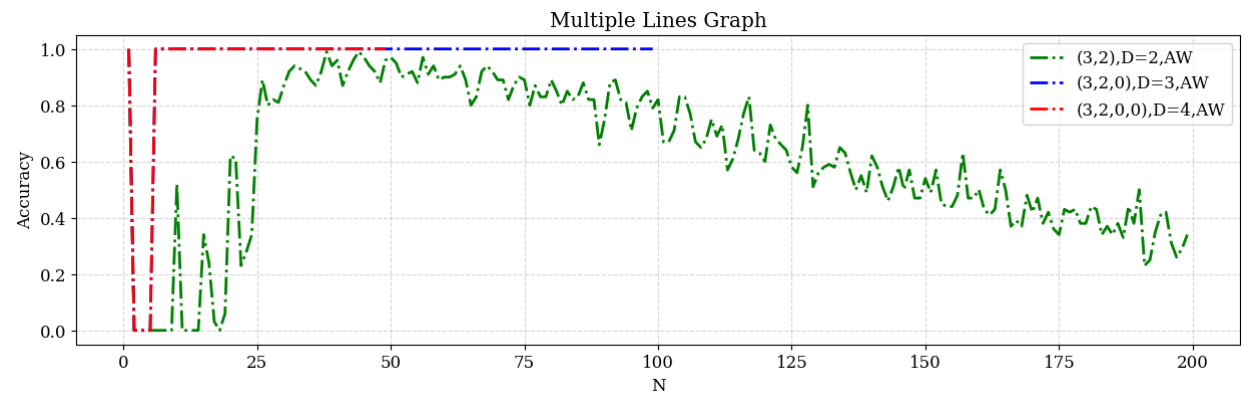
2) 새로운 동점 처리 규칙을 사용한 AW, AW+방식의 정확도

o 다양한 이동 규칙에 AW, AW+을 적용해 봤을 때의 정확도를 측정했다. 이때 특히 W, W+, AW방식은 N이 커지면서 정확도가 떨어지는 모습을 보였지만, AW+방식은 떨어지는

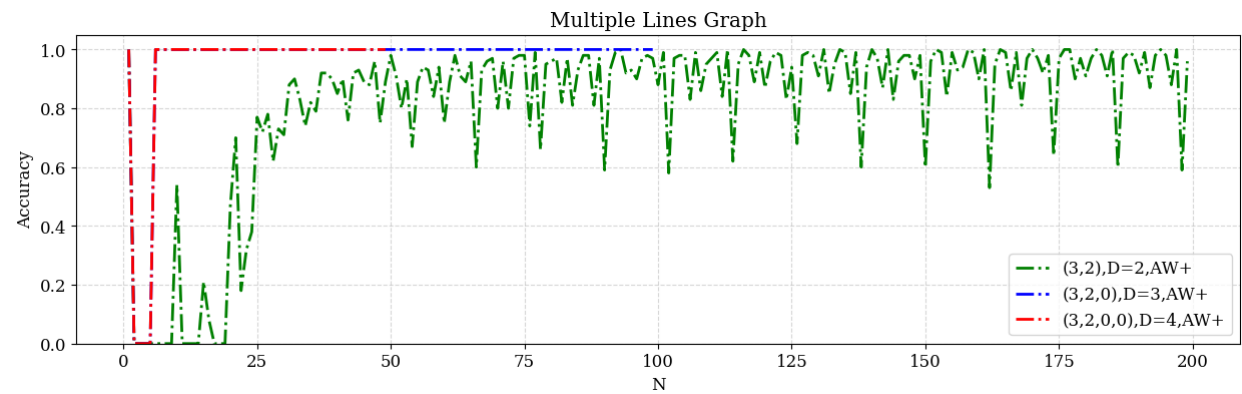


정확도를 높고 안정적인 수준으로 올려주는 모습을 확인할 수 있다.

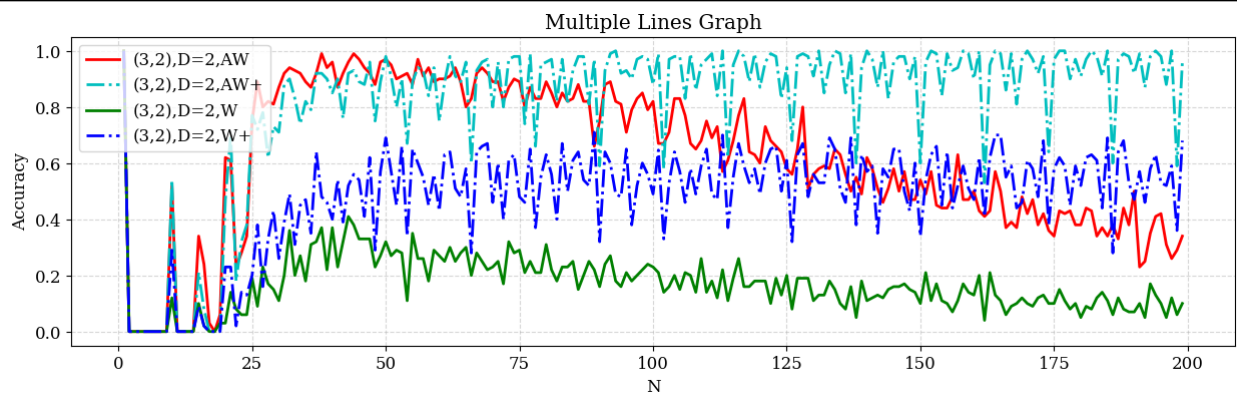
가. (3,2,0,...,0) 이동 규칙



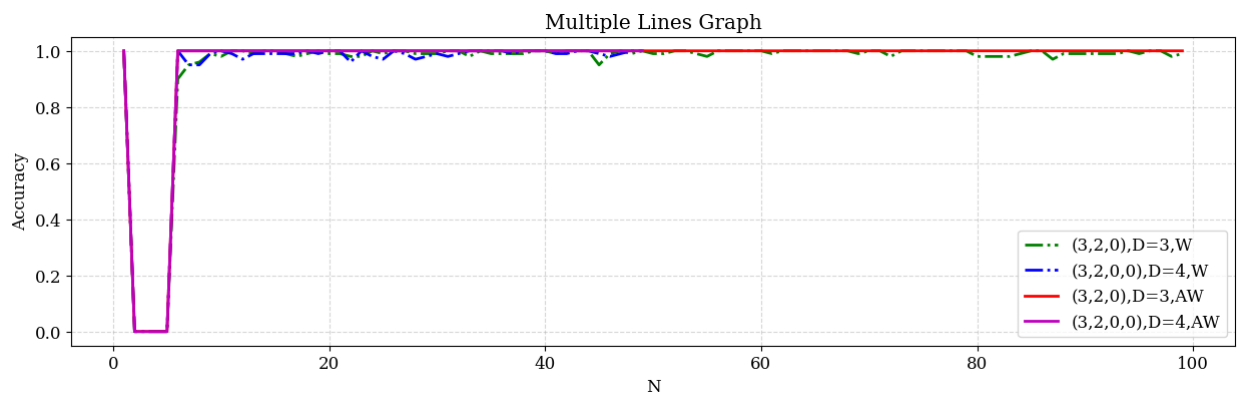
<표 17> AW방식의 차원 차이에 따른 정확도



<표 18> AW+방식의 차원 차이에 따른 정확도

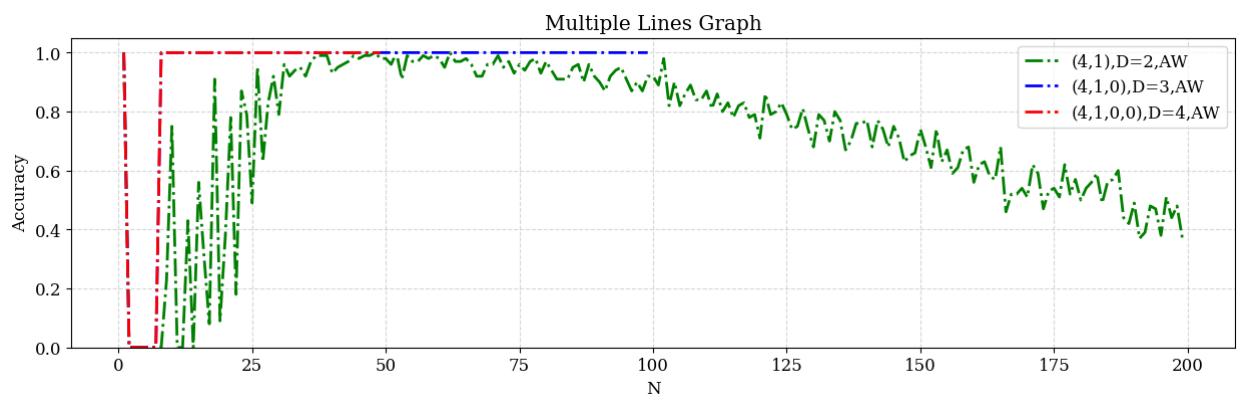


<표 19> 2차원에서 W와 W+, AW, AW+의 정확도

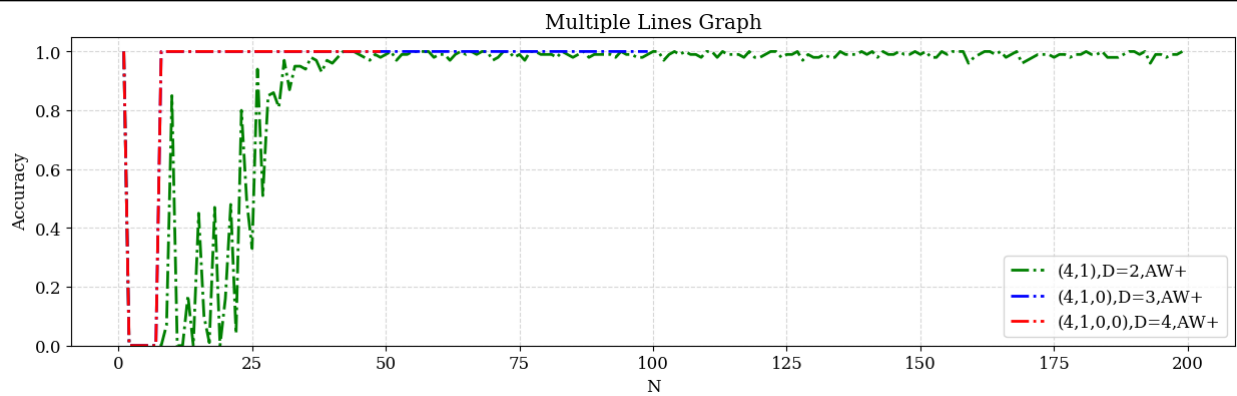


<표 20> 3차원, 4차원에서 W와 AW의 정확도

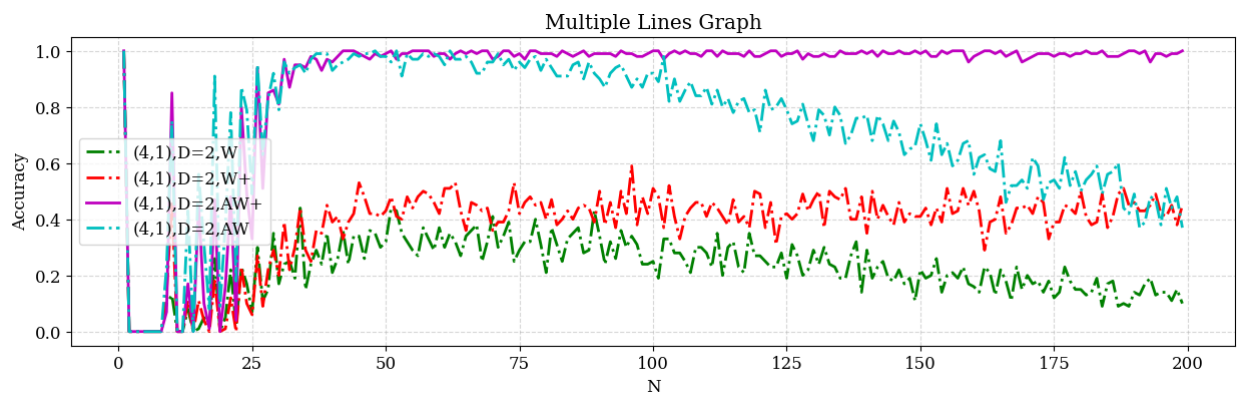
나. (4,1,0,...,0) 이동 규칙



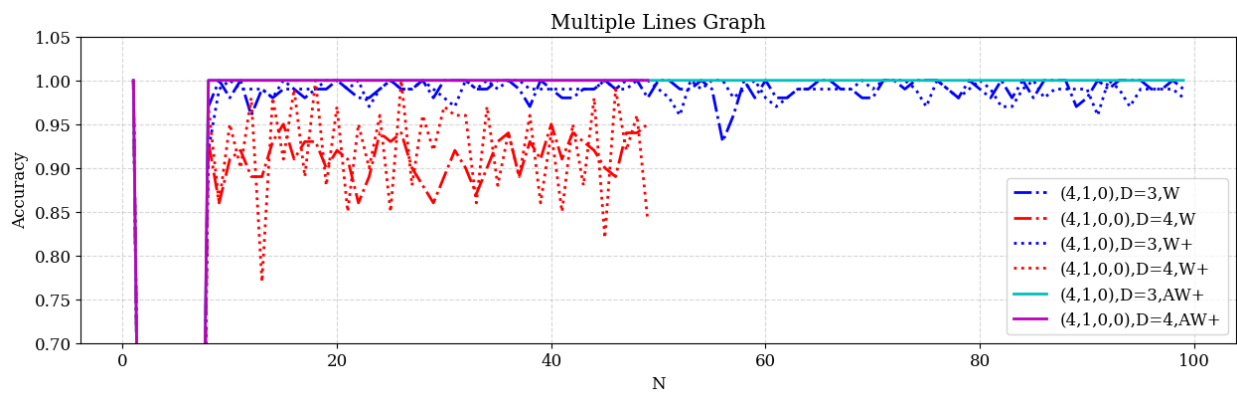
<표 21> AW방식의 차원 차이에 따른 정확도



<표 22> AW+방식의 차원 차이에 따른 정확도

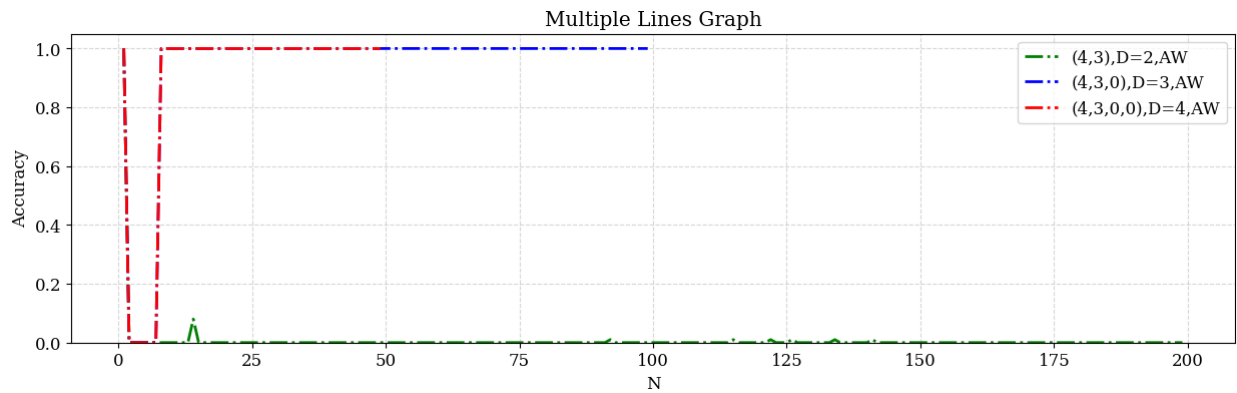


<표 23> 2차원에서 W와 W+, AW, AW+의 정확도

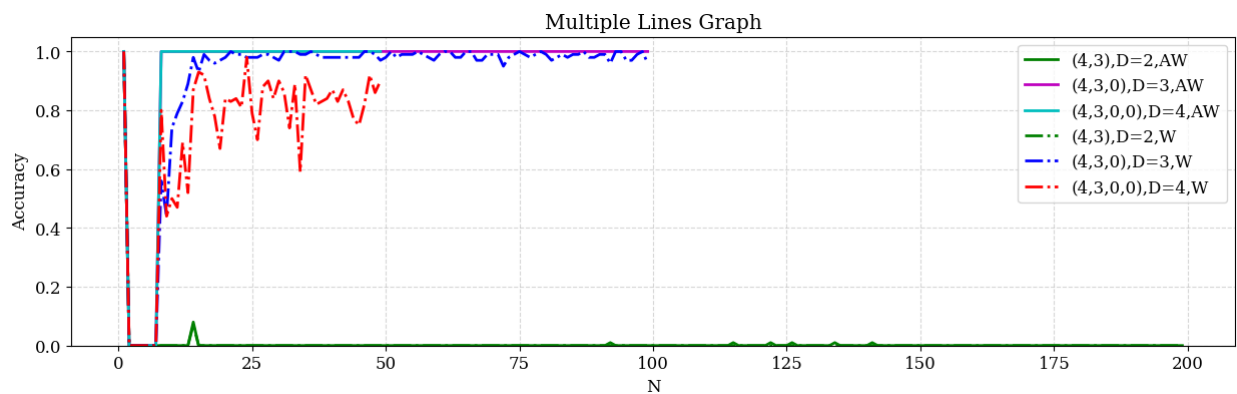


<표 24> 3차원, 4차원에서 W와 W+, AW+의 정확도

다. (4,3,0,...,0) 이동 규칙



<표 25> AW방식의 차원 차이에 따른 정확도

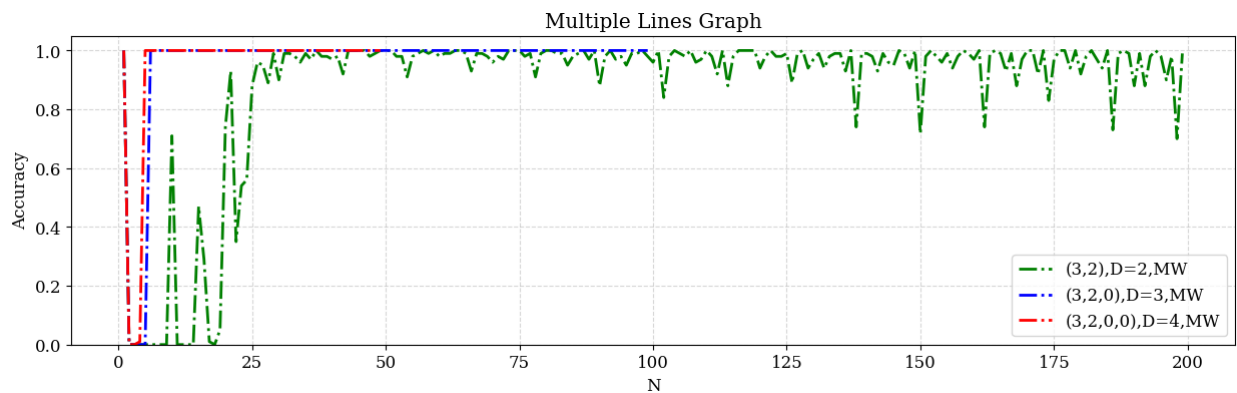


<표 26> AW방식과 W방식의 정확도 비교

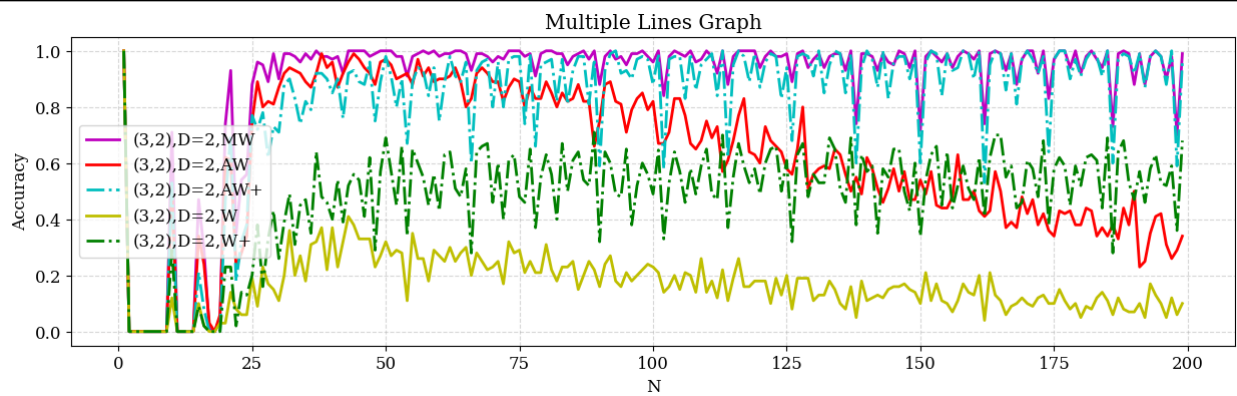
3) AW과 AW+을 혼합한 휴리스틱 해법

o 새로운 동점 처리 방식에 따라 우선 순위를 결정했을 때, W 방식과 W+의 함수를 동시에 실행했을 때를 MW(Mixed Warnsdorff's rule)방식이라 하고 정확도와 수행시간을 측정했다.

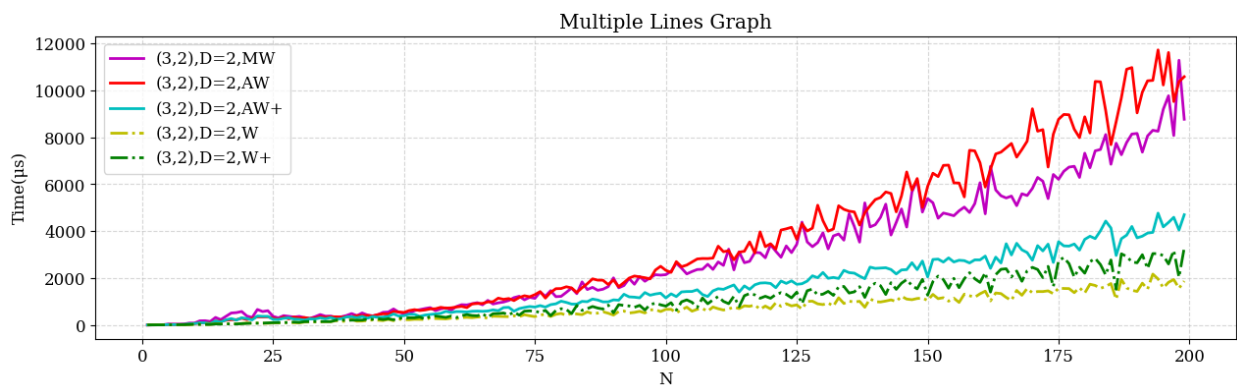
가. (3,2,0,...,0) 이동 규칙



<표 27> MW방식의 차원 차이에 따른 정확도



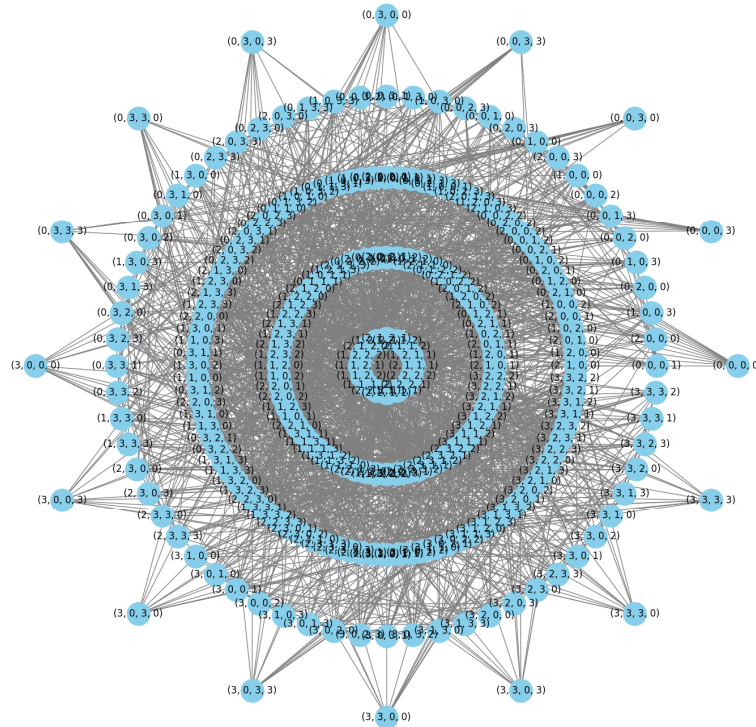
<표 28> 각종 방식의 2차원 정확도 비교



<표 29> 각종 방식의 2차원 수행시간 비교

o 기존 W방식은 정확도가 20%를 하회하는 모습을 보이고, AW+방식은 상대적으로 80%를 상회하는 정확도를 보여준다. 이때 수행시간은 AW+방식이 W방식의 대략 두 배의 시간을 가진다. MW는 어느 방식보다 높은 정확도와 안정성을 보이지만, W 방식의 5배 정도의 수행시간을 보여준다.

4) 2차원 그래프 기반의 일반화



[그림 5] 사차원 $4 \times 4 \times 4 \times 4$ 하이퍼 큐브를 2차원 그래프로 일반화한 그림

o 각 그림들에서 노드들은 체스판에서의 위치이며, 엣지는 (2,1,0,...,0)이동 규칙으로 갈 수 있음을 나타낸다. 원형의 모양에서 바깥에서 안쪽으로 갈수록 각 노드에 대해 연결되어 있는 엣지들이 많다. 가장 바깥의 껍질의 노드들은 체스판에서 가장 구석에 해당되는 점들이다. N이 늘어날수록 최외각 껍질을 제외한 다른 노드들이 증가된다.

o 정 하이퍼큐브 격자(regular hypercube lattice/grid)에서 노드 기반의 2차원 그래프로 일반화한 모습이다. 각 노드들의 대하여 엣지들의 개수 분포를 알 수 있고, 이를 그래프 이론 및 조합론의 관점에서 재해석할 가능성을 제시한다.

5. 결론 및 요약

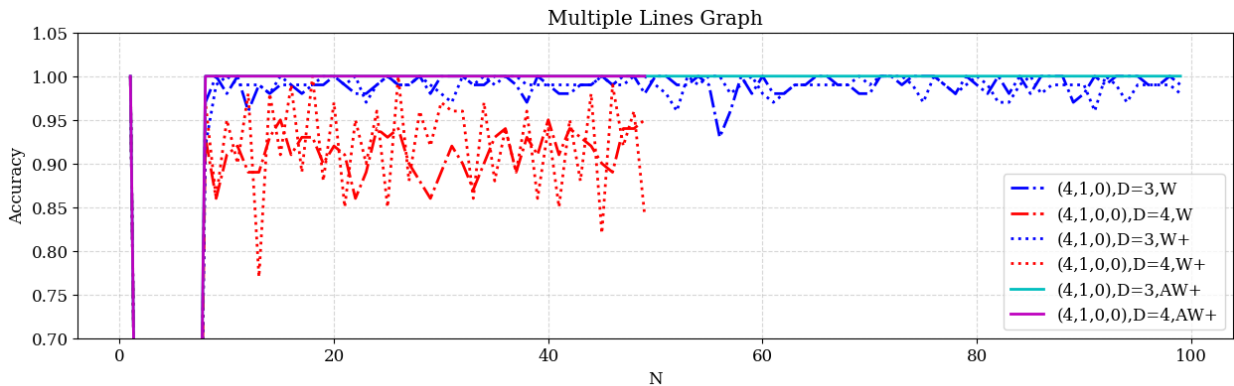
o 본 연구는 일반화 나이트 투어 문제(GKTP)와 고차원으로 확장한 조건에서 Warnsdorff's rule을 적용했으며, 이로 인해 생기는 낮은 정확도를 새로운 동점 처리 규칙(tiebreak rule)을 제시해 휴리스틱의 정확도를 높였다. 본 연구에서 제시하는 동점 처리 문제는 기존과 같이 차수가 같을 때 추가적인 우선순위를 부여하는 방식이 아니다. 내부적으로 정해진 우선순위로 Warnsdorff's rule을 따랐을 때 경로를 찾는 데에 실패한다면, 해당 우선순위에서 첫번째로 우선되는 방향을 가장 마지막의 우선순위로 변경해 다시금 Warnsdorff's rule을 따른다. 제시한 새로운 동점 처리 규칙은 기존의 무작위 동점 처리 규칙에서 특정 경우에 차수가 같은 경우에는 어떻게 처리할 것인지 제대로 규칙을 정해주

지 않았다는 점에서 좋은 대안점이 된다. 가장 좋은 데이터의 경우 정확도가 40%를 넘지 못하는 경우에서 새로운 무작위 동점 처리 규칙을 적용했을 때 95%이상의 정확도를 보였다.

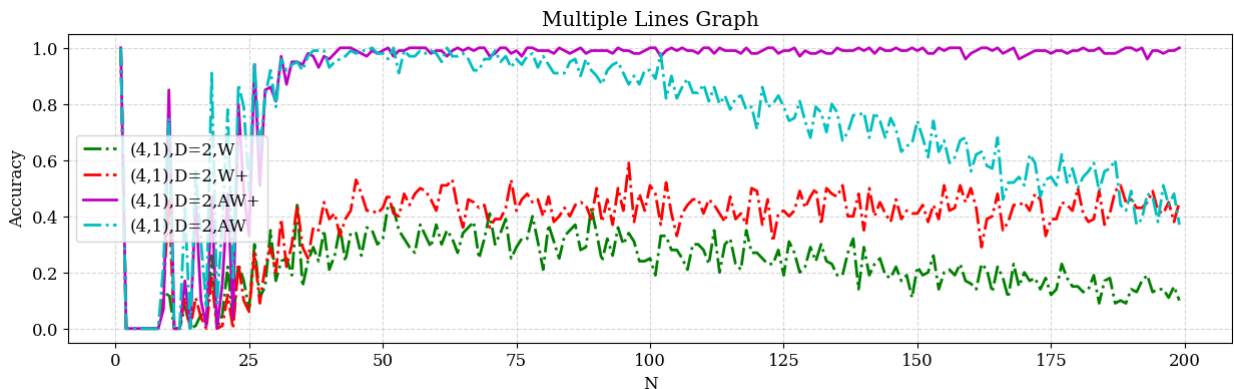
o 기존 연구에서 찾지 못한 새로운 조건에서의 나이트 투어 경로를 찾아내었다. 지금까지 알려진 고차원 나이트투어의 조건은 체스 보드의 한 변이 짝수인 경우에만 보장이 되었는데, 한 변이 짝수라는 제한 조건은 패쇄 투어를 이어붙히는 방식으로 인한 흔적이다. Warnsdorff's rule을 통한 개방 투어로 고차원에서 모든 변이 홀수인 체스 보드의 경우에도 충분히 나이트 투어 경로를 찾을 수 있음을 보였다.

o 대체적으로 정확도는 $W < W+ < AW < AW+ < MW$ 으로 구성됐다. 하지만 수행 시간은 MW이 AW와 AW+사이의 값을 보이고 AW의 수행시간이 AW+ 방식에 비해 컸다. 본 연구에서 제시한 AW, AW+, MW 방식을 대체로 90%의 정확도를 보장하는 모습을 보였다. 하지만, (4,3)이동 규칙의 2차원에서는 휴리스틱 기법의 정확도가 0%로 수렴되는 한계가 있다. 이는 W방식과 W+방식이 정확도가 0%로 급격하게 수렴하는 모습을 보인다면, 필연적으로 생기는 한계였다.

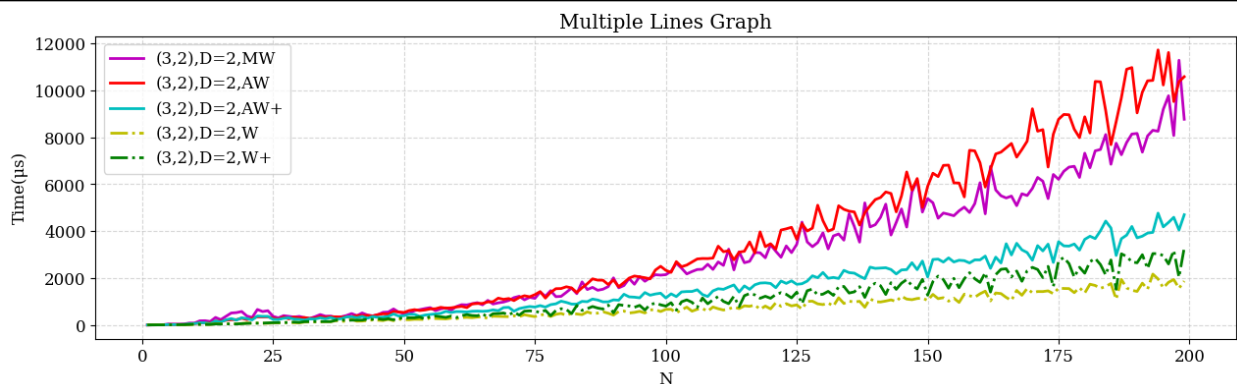
o 보편화된 휴리스틱을 기반으로 정 하이퍼큐브 격자(regular hypercube lattice/grid)에서 Knight's Tour를 구현했다. 그러나 비정규(non-regular) 하이퍼큐브 격자, 즉 변의 길이가 제각각인 경우에 대한 휴리스틱을 고안하는 것은 연구 가치가 있다.



<표 30> 고차원에서 다양한 방식의 정확도



<표 31> 2차원에서 W와 W+, AW, AW+의 정확도



<표 32> 각종 방식의 2차원 수행시간 비교

6. 학문분야 연계성 기술(해당하는 경우 작성)

o 본 연구 주제인 고차원 일반화 나이트 투어 문제와 Warnsdorff's Rule 기반 휴리스틱 해법은 순수수학, 응용수학, 컴퓨터과학, 인공지능 등 여러 학문분야와 밀접한 연계성을 지닌다.

o 수학적 연계에 가능성이 있다. 본 문제는 본질적으로 그래프 이론(Graph Theory)과 조합론(Combinatorics)의 고전적 응용으로, 체스판을 정점과 간선으로 이루어진 그래프로 해석하여 경로 탐색 문제로 모델링할 수 있다. 또한 고차원으로 확장된 나이트 투어는 격자 그래프(lattice graph)와 하이퍼큐브(hypercube)연구와도 직결되며, 수학적 구조와 경로 존재성에 관한 새로운 증명 가능성을 제시한다.

o 계산 이론적 연계에 가능성이 있다. 나이트 투어 문제는 특정 조건에서 NP 난제와 유사한 성격을 지니며, 탐색 공간의 지수적 폭발로 인해 계산 복잡도가 급격히 증가한다. 본 연구에서 제안한 Warnsdorff's Rule 기반의 개선된 휴리스틱 해법은 문제를 다항 시간 내에 근사적으로 해결할 수 있게 하여 계산 복잡도 이론(Computational Complexity Theory) 및 근사 알고리즘 연구(Approximation Algorithms)와 학문적으로 연결된다.

o 컴퓨터과학 및 인공지능적 연계에 가능성이 있다. 본 연구에서 제안한 동점 처리 규칙은 휴리스틱 탐색 기법(Heuristic Search Methods)과 직접적으로 관련되며, 탐색 효율성을 향상시키는 전략으로 평가될 수 있다. 이는 인공지능 분야의 강화학습(Reinforcement Learning), 경로 탐색 알고리즘(Pathfinding Algorithms), 최적화(Optimization) 연구와 접목될 수 있어, 단순 퍼즐 문제를 넘어 실제 인공지능 탐색 모델의 성능 개선에도 기여할 수 있다.

o 고성능 계산 및 시뮬레이션(High-Performance Computing & Simulation) 분야와의 연계에 가능성이 있다. 다차원 체스보드에서의 나이트 투어 문제는 방대한 탐색 공간을 필요로 하므로, 병렬 처리(parallel computing) 및 대규모 시뮬레이션 기법이 요구된다. 이는 과학·공학 응용에서 흔히 등장하는 고차원 탐색 및 최적화 문제와 직접적으로 연결될 수 있다.

o 응용 및 융합 연구적 연계에 가능성이 있다. 나이트 투어 문제는 본래 체스라는 게임에서 유래한 고전적 수학 퍼즐로, 레크리에이션 수학(Recreational Mathematics)과 게임 이론

(Game Theory)의 연구 주제이기도 하다. 따라서 본 연구 성과는 교육용 알고리즘 시각화 도구, 게임 설계 및 학습 보조 콘텐츠 개발 등 다양한 응용 가능성을 가진다.

o 결론적으로, 본 연구는 수학적 이론과 계산 복잡도 연구에 기초를 두면서, 동시에 인공 지능, 최적화, 시뮬레이션, 게임 연구 등 폭넓은 학문분야와 상호 연계성을 갖는다. 이러한 융합적 특성은 본 연구가 단순한 퍼즐 해결을 넘어, 다양한 학문 영역에서의 응용 및 확장을 가능하게 하는 기반이 됨을 보여준다.

7. 참고문헌

- [1] Kumar, A. (2012). Magic Knight's Tours in Higher Dimensions. arXiv:1201.0458v1.
- [2] Erde, J. (2012). Knight's Tours in Higher Dimensions. arXiv:1202.5548v1.
- [3] H. J. R. Murray, History of Chess, Oxford, 1913, pp.579-582, 589.
- [4] A. T. Vandermonde, Remarques sur les Problemes de Situation, Mémoires de l'Académie des Sciences, 1771.
- [5] H. Schubert, Mathematische Mussestunden Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur, Leipzig, 1904, pp.235-238.
- [6] N. M. Gibbins, Chess in 3 and 4 Dimensions, Mathematical Gazette, May 1944, pp.46-50.
- [7] J. Stewart, Solid Knight's Tours, Journal of Recreational Mathematics, Vol.4(1), January 1971, p.1.
- [8] G. P. Jelliss and T. W. Marlow, 3D Tours, Chessics 2(29/30), 1987, p.162.
- [9] M. Petkovic, Mathematics and Chess, Dover Publications, New York, 1997, p.65.
- [10] J. DeMaio, Which Chessboards have a Closed Knight's Tour within the Cube?, The Electronic Journal of Combinatorics, 14 (2007) R32.
- [11] W. W. R. Ball, H. S. M. Coxeter, Mathematical Recreations and Essays, University of Toronto Press, Toronto, 1974, pp.175-186.
- [12] A. J. Schwenk, Which Rectangular Chessboards have a Knight's Tour?, Mathematics Magazine, 64 (1991), 325-332.
- [13] I. Parberry, An Efficient Algorithm for the Knight's Tour Problem, Discrete Applied Mathematics, 73 (1997), 251-260.
- [14] O. Kyek, I. Parberry, T. Wegener, Bounds on the Number of Knight's Tours, Discrete Applied Mathematics, 74 (1997), 171-181.
- [15] K.-C. Lee, Y. Takefuji, Finding Knight's Tours on an $M \times N$ Chessboard with $O(MN)$ Hysteresis McCulloch-Pitts Neurons, IEEE Transactions on Systems.
- [16] S.-S. Lin, C.-L. Wei, Optimal Algorithms for Constructing Knight's Tours on Arbitrary $n \times m$ Chessboards, Discrete Applied Mathematics, 146 (2005), 219-232.
- [17] G. L. Chia, Siew-Hui Ong, Generalized Knight's Tours on Rectangular

Chessboards, *Discrete Applied Mathematics*, 150 (2005), 80–89.

[18] Y. Qing, J. J. Watkins, Knight's Tours for Cubes and Boxes, *Congressus Numerantium*, 181 (2006), 41–48.

[19] A. Kumar, Studies in Tours of the Knight in Three Dimensions, *The Games and Puzzles Journal* (43), 2006.

[20] Ganzfried, S. (2004). A Simple Algorithm for Knight's Tours. REU paper, Oregon State University.

[21] H. C. Warnsdorff, Des Rösselsprunges Einfachste und Allgemeinste Lösung, *Schmalkalden*, 1823.

[22] Douglas Squirrel, Paul Cull, A Warnsdorff–Rule Algorithm for Knight's Tours on Square Chessboards, Oregon State REU Program, 1996.

[23] Arnd Roth, The Problem of the Knight, <http://sun0.mpimf-heidelberg.mpg.de/people/roth/Mma/Knight.html>

[24] Edvard Olsen, & Tatiana Babicheva. (2024). On the Convergence of the Warnsdorff's Algorithm on the Rectangular Boards. *Procedia Computer Science*, 242, 722–728. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2024.08.153>

[25] John R. Gerlach and Scott M. Gerlach, The Knight's Tour in 3–Dimensional Chess, *PharmaSUG 2019 Conference Proceedings*, Paper BP–141 (Philadelphia, PA: PharmaSUG, 2019).

[26] Bai, S., Yang, X.–F., Zhu, G.–B., Jiang, D.–L., & Huang, J. (2010). Generalized Knight's Tour on 3D Chessboards. *Discrete Applied Mathematics*, 158(16), 1727–1731.

[27] Erde, J., Golénia, B., & Golénia, S. (2012). The closed knight tour problem in higher dimensions. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 19(4), #P9.

[28] Keen, M. R. (2000). The Knight's Tour. Retrieved from <https://www.markkeen.com/knight/>

[29] Kumar, A. (2008). Non–crossing Knight's Tour in 3–Dimension. *arXiv:0803.4259v1*.

[30] Ripà, M. (2024). Proving the existence of Euclidean knight's tours on $n \times n \times \dots \times n$ chessboards for $n < 4$. *arXiv:2309.09639v2*.

[31] Besa, J. J., Johnson, T., Mamano, N., & Osegueda, M. C. (2021). Taming the Knight's Tour: Minimizing Turns and Crossings. In 10th International Conference on Fun with Algorithms (FUN 2021) (Article No. 4). *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*.

[32] Firstein, M., Fischer, A., & Hungerländer, P. (n.d.). Closed Almost Knight's Tours on 2D and 3D Chessboards.

[33] Gerlach, J. R. (2015). The Knight's Tour in Chess – Implementing a Heuristic Solution. Paper 3060–2015, *SAS Global Forum*.

[34] Tim. (2022, May 29). Knight's Yarn: three dimensional knight tours. Medium.
Retrieved from <https://tkunt.medium.com/knights-yarn-83c13dde220b>