

## 제20회 이과대학 재학생 연구프로젝트 결과 보고서

연구 제목	고차원 체스보드에서의 나이트 투어 문제, 그리고 일반화된 이동 규칙에 대해 높은 정확도를 보이는 휴리스틱 제시 On Knight's Tours in Higher Dimensions and High-Accuracy Heuristics for Generalized Leaper Moves
발표자 성명 및 학번	성준영 ( 2024110437 )(팀장) (한컴바탕, 12포인트로 작성) (총 1명)
제출방법	○ 제출방법 : 이메일( <a href="mailto:cns@dongguk.edu">cns@dongguk.edu</a> )로 스캔본 제출 ※ 이메일제목: 연구프로젝트 결과보고서 제출 ※ 발표파일 PPT(자유양식)도 반드시 첨부하여 이메일 제출

(한컴바탕, 11포인트, 줄 간격 160%)

### 1. 연구개요

○ 본 연구는 knight's tour가 존재함을 넘어, 시작 지점이 정해진 상태에서 knight's tour의 open path를 찾는 알고리즘을 다룬다. 기존의 연구에서 Warnsdorff's rule을 따른 알고리즘을 W, Warnsdorff's rule에 tiebreaker를 중심과의 거리로 둔 것을 W+라 한다. 기존의 방식은 2차원에서의 knight's tour에 Warnsdorff's rule을 적용해 왔다. 3차원에서의 Warnsdorff's rule을 적용하는 연구가 있었지만, 아주 제한된 경우에서만 실험을 진행했다. 본 연구에서는 r차원 하이퍼큐브 격자(hypercube lattice/grid)에서 Warnsdorff's rule을 적용한다.

○ 이때 Warnsdorff's rule기반으로 더욱 일반화된 상황에서 적용할 수 있는 새로운 알고리즘 W++을 제시한다. (2,1,0,...0) movement가 아닌 (a,b,0,...0) movement와 같은 상황에서 높은 정확도를 가진다. 기존의 알고리즘은 약 50%의 정확도를 보이는 반면 새로 제시하는 알고리즘은 85%를 상회하는 정확도를 보인다.

○ r차원의 기하의 관점에서 2차원의 그래프 기반으로 일반화 하는 방법을 제시하여 Warnsdorff's rule이 그래프 기반 및 조합론의 관점에서 증명될 가능성을 제시한다.

(2,1,0,...,0) move		
	close move	open move
2 - Demen sion	An $n \times m$ ( $n \geq m$ ) tour exists if and only if the following conditions hold: 1) $n$ or $m$ is even;	The $m \times n$ chessboard with $m \leq n$ admits an open knight's tour unless one or more of the following conditions holds:

	<p>2) <math>m \notin \{1, 2, 4\}</math>;  3) <math>(n,m) \notin (4, 3), (6, 3) \text{ or } (8, 3)</math>.</p>	<p>(i) <math>m = 1 \text{ or } 2</math>;  (ii) <math>m = 3 \text{ and } n = 3, 5, 6</math>; or  (iii) <math>m = 4 \text{ and } n = 4</math>.</p> <p>There exists an open knight's tour on an <math>n \times m</math> board, <math>n \leq m</math>, if and only if  (1) <math>n = 3 \text{ and } (m = 4 \text{ or } m \geq 7)</math>, or  (2) <math>n \geq 4 \text{ and } m \geq 5</math>.</p>
3 - Demen sion	<p>A <math>p \times q \times r</math> (<math>p \geq q \geq r</math>) tour exists if and only if the following conditions hold:  1) <math>p, q</math> or <math>r</math> is even;  2) <math>p \geq 4</math>;  3) <math>q \geq 3</math>.</p>	-
Higher Demen sion	<p>For <math>r \geq 3</math> an <math>n_1 \times n_2 \dots \times n_r</math> (<math>n_1 \geq n_2 \dots \geq n_r</math>) tour exists if and only if the following conditions hold:  1) Some <math>n_i</math> is even;  2) <math>n_1 \geq 4</math>;  3) <math>n_2 \geq 3</math>.</p> <p>For <math>r \geq 3</math> an <math>n_1 \times n_2 \dots \times n_r</math> (<math>n_1 \geq n_2 \dots \geq n_r</math>) tour exists if and only if the following conditions hold:  1) There exists an <math>i</math> such that <math>n_i</math> is even;  2) <math>n_1 \geq 4</math>;  3) <math>n_2 \geq 3</math>.</p>	-
(a,b,c,....,z) move		
	close move	open move
2 - Demen	Suppose them $\times n$ chessboard admit a closed (a, b)-knight's tour,	-

sion	<p>where <math>a &lt; b</math> and <math>m \geq n</math>. Then (i) <math>a + b</math> is odd; (ii) <math>m</math> or <math>n</math> is even; (iii) <math>m \geq a + b</math>; and (iv) <math>n \geq b</math>.</p> <p>Suppose <math>m = a + b + 2t + 1</math> where <math>0 \geq t \geq a - 1</math>. Then the <math>m \times n</math> chessboard admits no closed <math>(a, b)</math>-knight's tour.</p> <p>Suppose <math>m = a(k + 2l)</math> where <math>1 \geq l \geq k/2</math>. Then the <math>m \times n</math> chessboard admits no closed <math>(a, ak)</math>-knight's tour, where <math>a</math> is odd and <math>k</math> is even.</p>	
3 - Demen sion	<p>Suppose the <math>L \geq M \geq N</math> chessboard admits a closed <math>(a, b, c)</math>-knight's tour, where <math>a &lt; b &lt; c</math> and <math>L, M, N</math>. Then: (i) <math>a + b + c</math> is odd and not all of <math>a, b, c</math> are equal; (ii) <math>L</math> or <math>M</math> or <math>N</math> is even; (iii) <math>L \geq a + b</math>; (iv) <math>N \geq 2c</math>.</p> <p>Suppose <math>c &gt; 1</math>. Then no closed <math>(1, c, c)</math>-knight's tour on the <math>(c + 1) \times M \times N</math> chessboard is possible, where <math>M = 2c + 1, 2c + 2, \dots, 3c, 3c + 1, \dots, 4c - 1</math>.</p>	<p>Suppose <math>1 &lt; a &lt; b &lt; c</math>. Then no open <math>(a, b, c)</math>-knight's tour on the <math>(a + 1) \times (a + b + 1) \times (c + 1)</math> chessboard is possible, where <math>a, b</math> and <math>c</math> are positive integers.</p> <p>Suppose <math>c &gt; 1</math>. Then no open <math>(1, c, c)</math>-knight's tour on the <math>(c + 1) \times M \times N</math> chessboard is possible, where <math>N &lt; 3c + 1</math>.</p>
Higher Demen sion	-	-

<표> knight's tour 존재 조건

## 2. 연구의 필요성

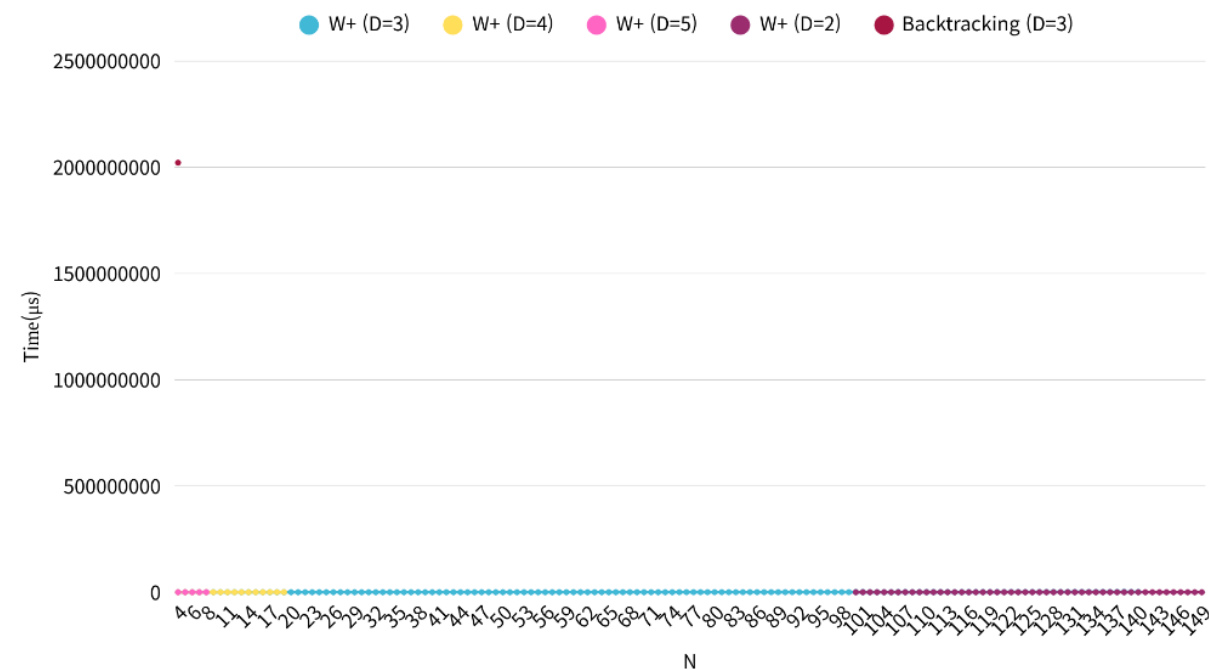
0

## 3. 연구목표

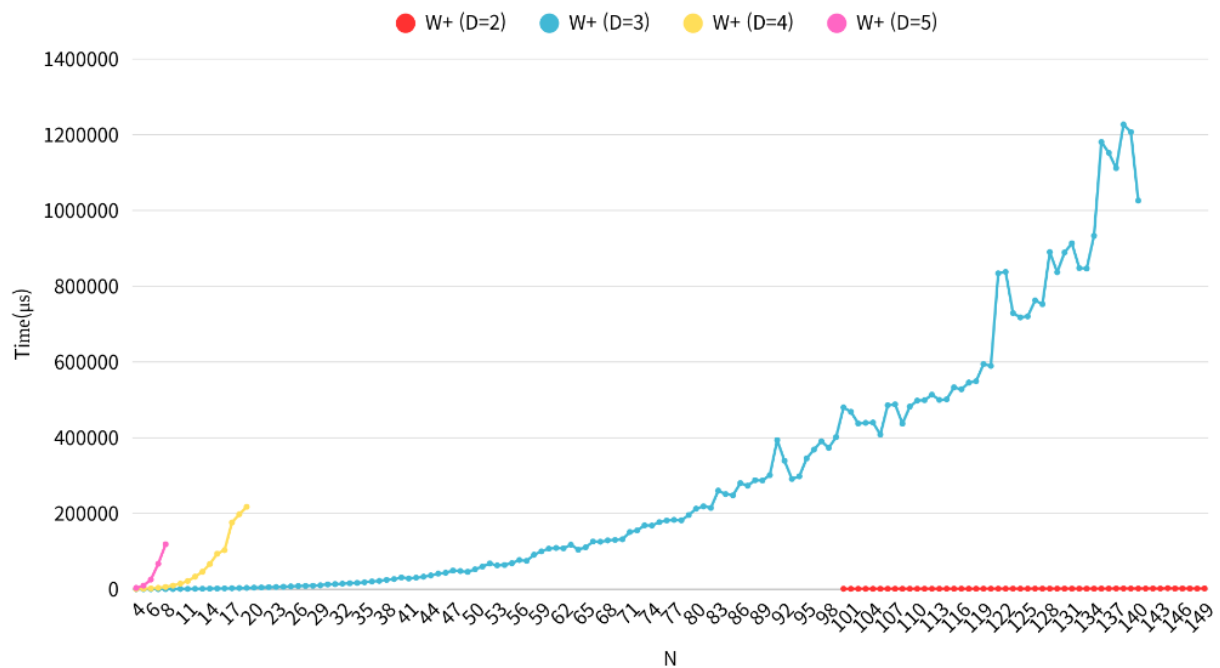
본 연구에서는 knight's tour가 존재함을 넘어, 시작 지점이 정해진 상태에서 knight's tour의 open path를 찾는 알고리즘에 관한 연구이다. 정확도는 무작위의 시작 지점 100개에 관해서 open path를 찾았음을 기준으로 측정했다. 이때 수학적으로 open path가 존재하지 않음에도 알고리즘에 따라 경로를 찾지 못했더라도 알고리즘의 실패로 간주한다.

Algorithm	Demension	N	Big-O	Time(μs)
Backtracking	3	4	$O(24^{N \times N})$	2021621083.00
W	3	4	$O(24 \times N^3)$	61.45
W	3	140	$O(24 \times N^3)$	1026137.20
W	4	19	$O(96 \times N^4)$	217589.31
W	5	8	$O(240 \times N^5)$	118630.52

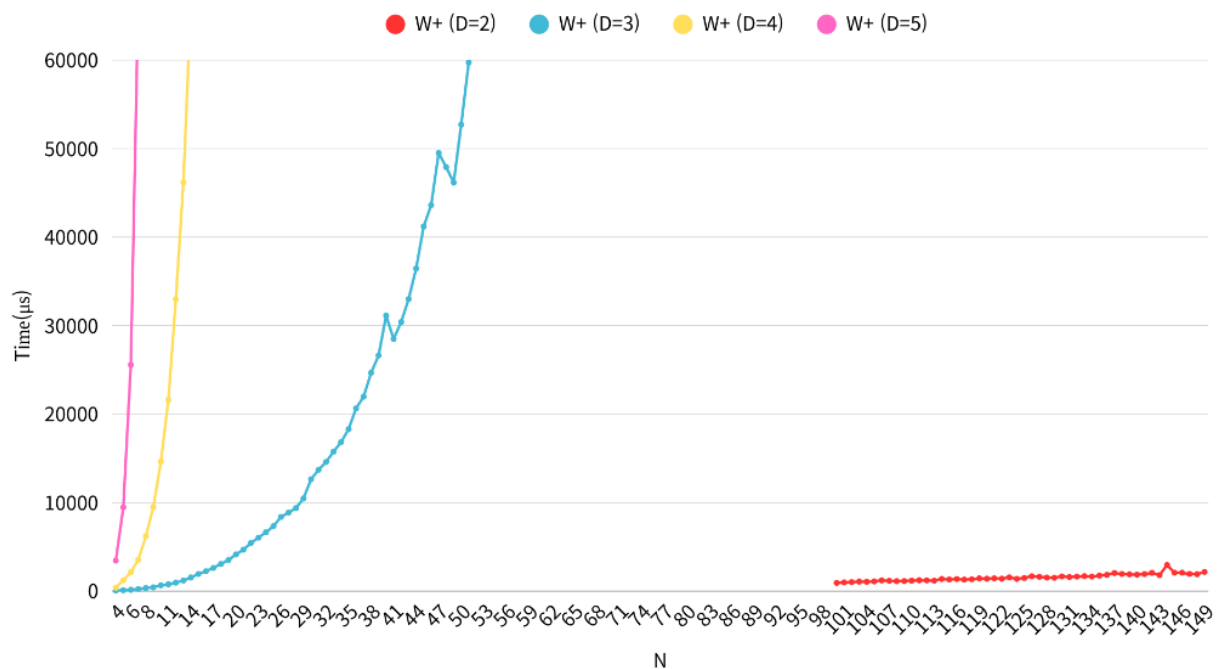
<표> 일반적인 방식과 Warnsdorff's rule방식의 시간 복잡도



<표> 일반적인 방식과 Warnsdorff's rule방식의 수행시간



<표> Warnsdorff's rule 방식 알고리즘의 dimension 차이에 따른 수행시간



<표> Warnsdorff's rule 방식 알고리즘의 dimension 차이에 따른 수행시간

평범하고 100%의 정확도를 제공하는 Backtracking 방식의 알고리즘은 지수의 시간복잡도를 가져 느린 속도를 보인다. Warnsdorff's rule를 따른다면 정확도가 조금은 떨어지더라도 시간 복잡도를 다항 시간으로 낮출 수 있다. 이때 Warnsdorff's rule 기반의 변형 휴리스틱으로 빠른 수행시간을 보장하지만 더 높은 정확도를 찾는 것이 본 연구의 목적이다.

#### 4. 연구 결과 및 고찰

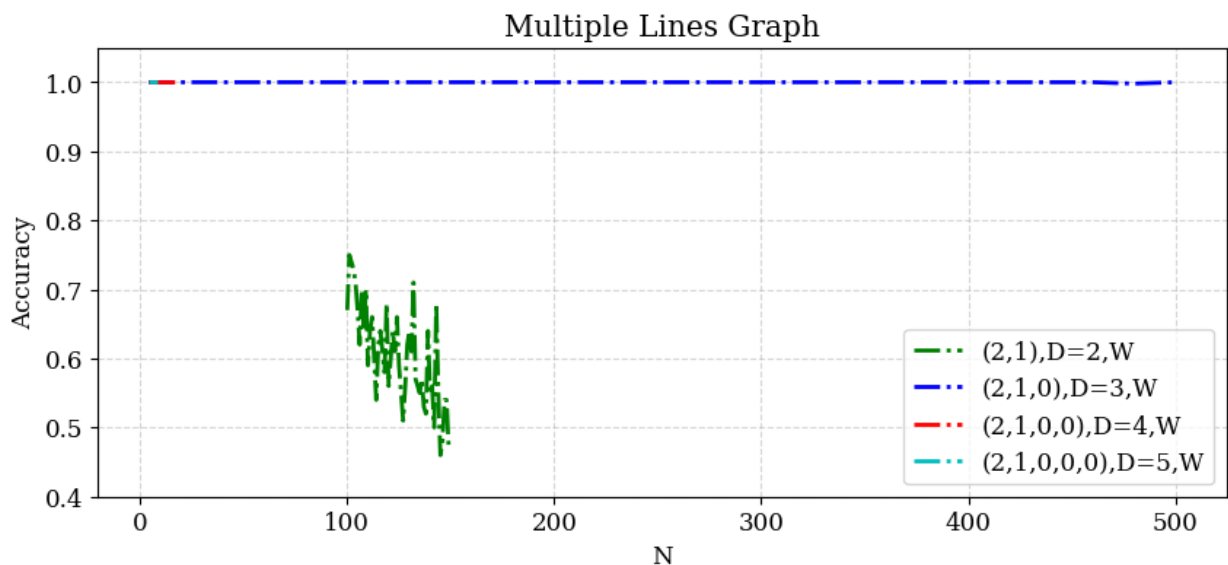
Lemma 1. For  $r \geq 3$  in an  $N \times N \times \cdots \times N$  chess board, a  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ -movement tour does not exist if the following condition holds:

-  $N$  is odd, and the sum  $a_1 + a_2 + \cdots + a_r$  is odd, and the sum of the starting coordinates  $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)$  is odd.

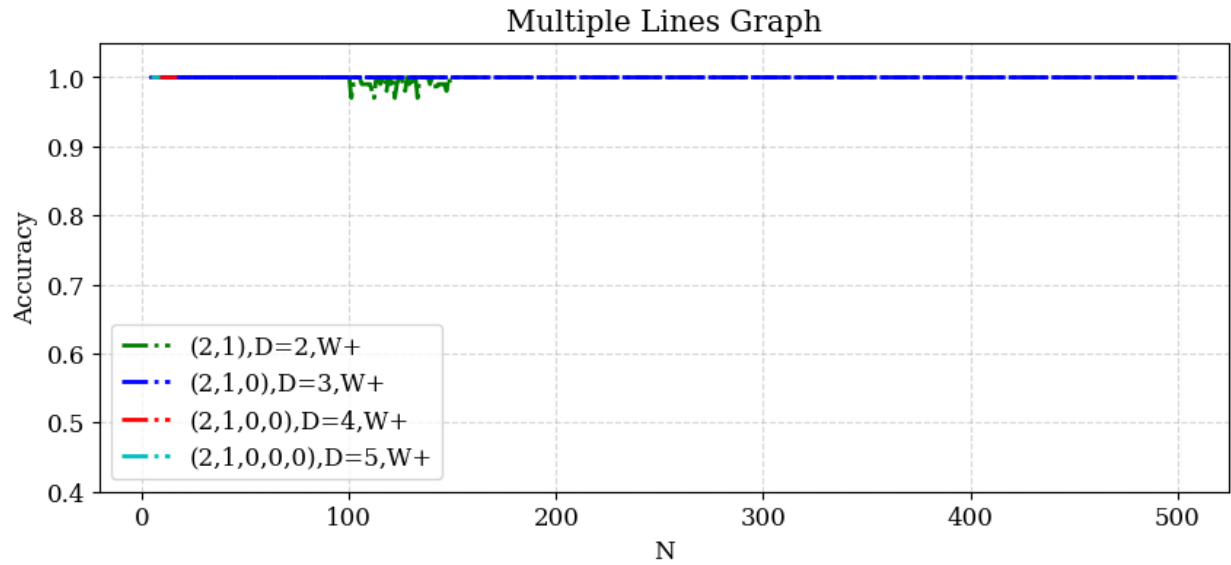
체스판이 하얀색 칸과 검은색 칸으로 나누어져 있다고 하자.  $N$ 이 홀수라면 하얀색 칸이 검은색 칸보다 한 칸 더 많다. 이때 movement의 원소들의 합이 홀수이면 무조건 검은색 칸과 하얀색 칸을 번갈아 움직여야한다. 만약 하얀색 칸에서 시작하면  $W \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow \dots \rightarrow W$ 로 경로를 찾을 수 있는데, 검은색 칸에서 시작하면  $B \rightarrow W \rightarrow B \rightarrow W \rightarrow \dots \rightarrow W \rightarrow W$ 으로 하얀색을 연속으로 두 번 밟아야 경로가 존재한다. 검은색 칸과 하얀색 칸을 번갈아 움직여야 하는 조건을 맞추지 못한다. (나중에 더 정확하게 서술하는 방식으로 바꾸겠습니다)

기존의 연구에서 Warnsdorff's rule을 따른 알고리즘을 W, Warnsdorff's rule에 tiebreaker를 중심과의 거리로 둔 것을 W+라 한다. W++은 본 연구에서 새롭게 제시하는 알고리즘 방식이다.

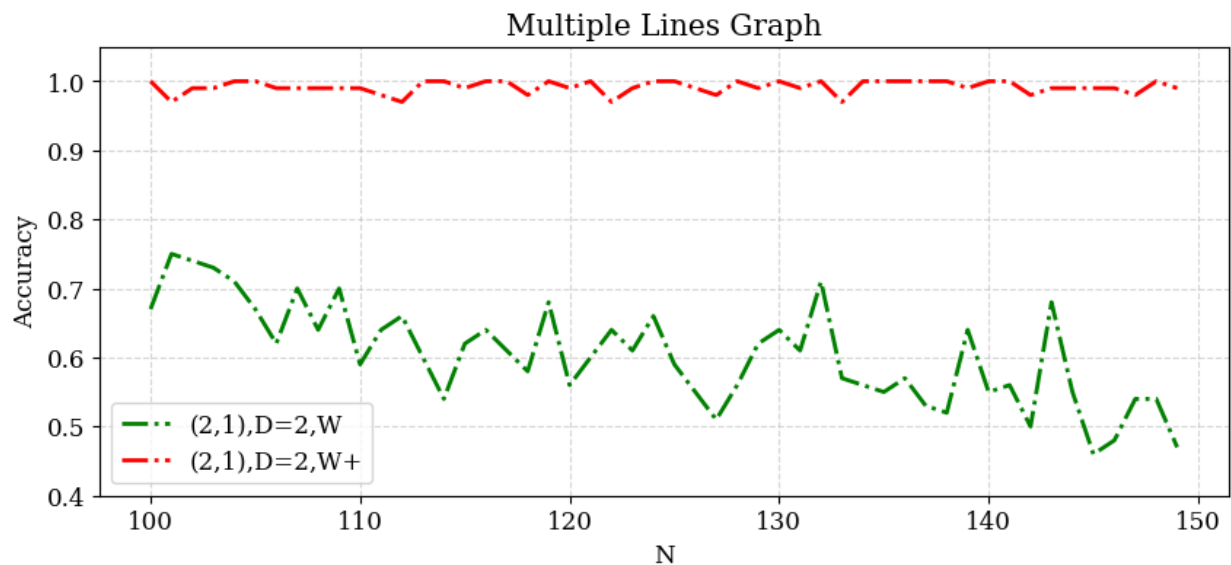
1.  $(2, 1, 0, \dots, 0)$  movement



<표> W방식의 demension 차이에 따른 정확도



<표> W+방식의 dimension 차이에 따른 정확도

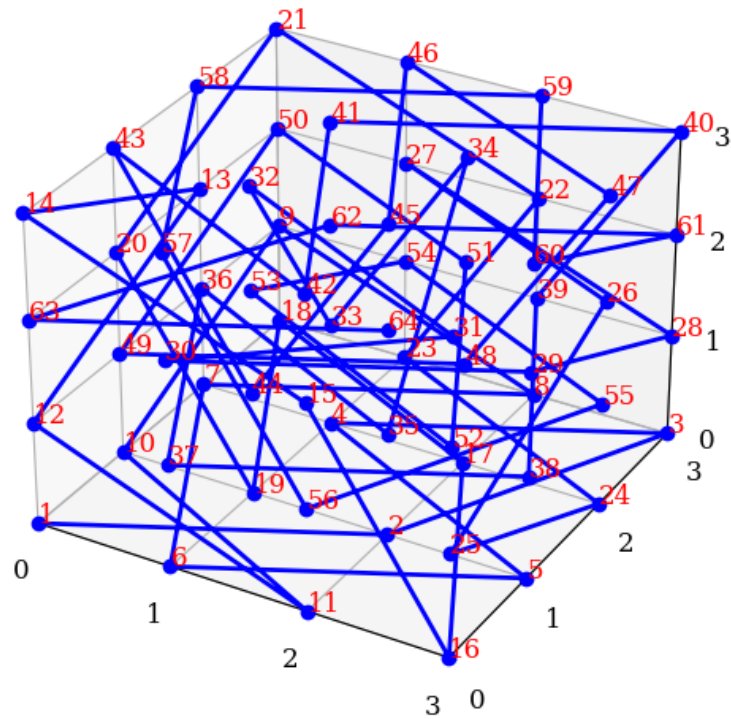


<표> 2D에서 W와 W+의 정확도

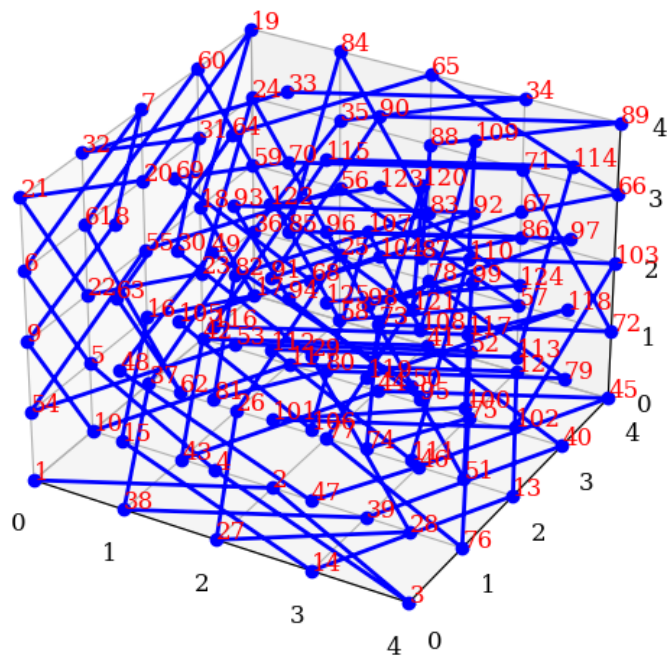
두 알고리즘은 기존의 연구에서 연구된 바 있다. 2D에서는 N이 1000 이상이 되는 경우에서 W는 정확도가 40%이하로 떨어지는 반면, W+ 방식은 90%를 상회하는 정확도를 보장한다.

3D에서는 r차원 하이퍼큐브 격자(hypercube lattice/grid)에 관해서 연구된 바가 없다.  $N \times N \times M$ 의 형태로 연구된 결과에서는 Warnsdorff's rule을 적용했을 때 약 50%의 정확도를 기록했다. 다만, N의 크기가 8로 고정되어 있고 M은 4이하의 자연수라는 점에서 한계가 있었다.

적어도 r이 3이상 5이하의 하이퍼큐브 격자(hypercube lattice/grid)에서는 W방식이 95% 이상의 높은 정확도로 경로를 찾았다.



[그림] N=4 D=3 에서의 knight's tour open path



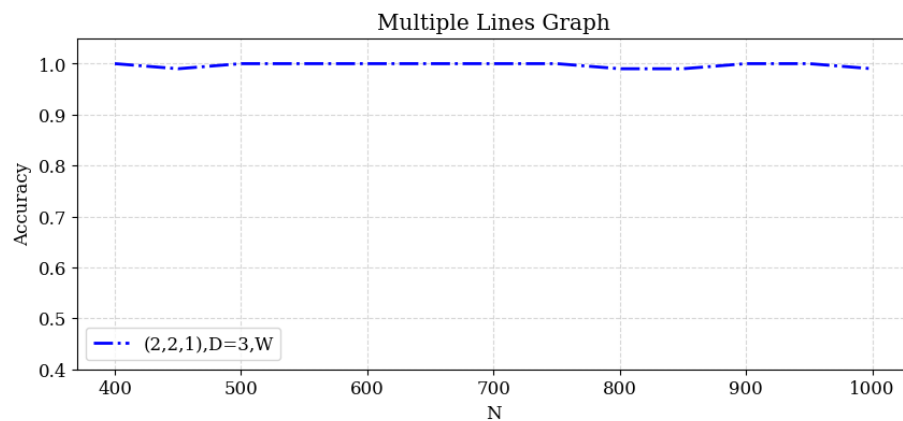
[그림] N=5 D=3 에서의 knight's tour open path

[그림]과 [그림]은 각각 N이 4일 때, 5일 때 W방식을 적용하여 찾은 경로를 시각화한 것이



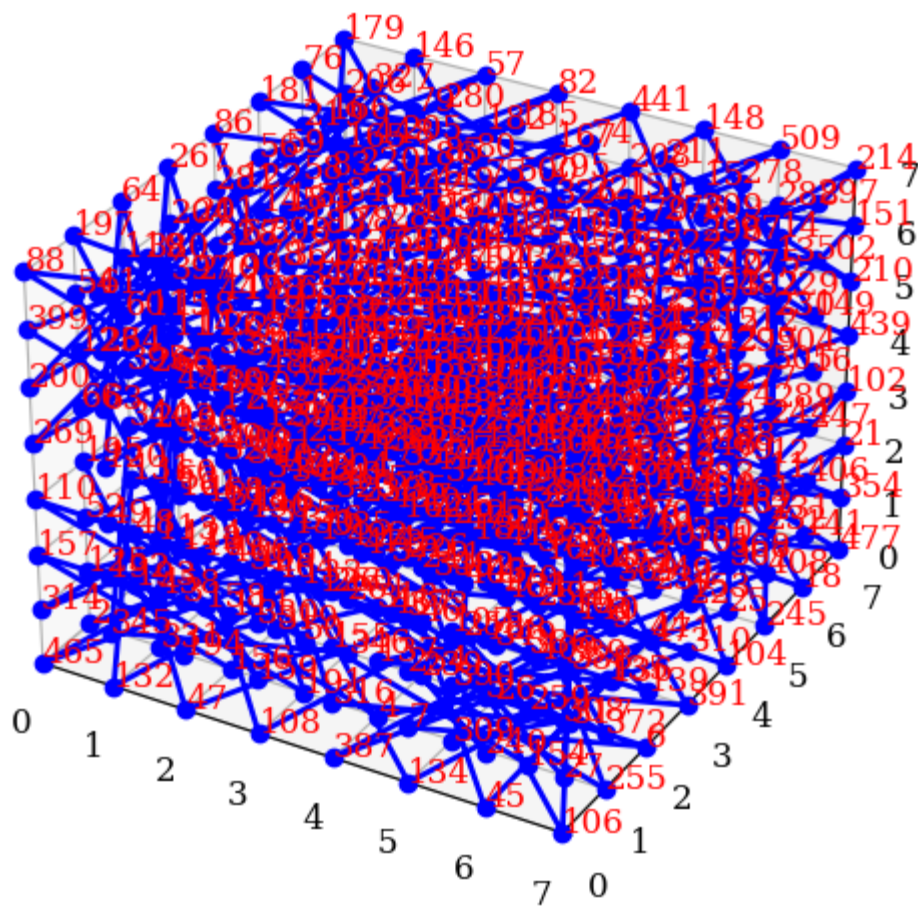
다.

## 2. (1,2,2,...,2) movement



<표> 3D에서 W방식의 정확도

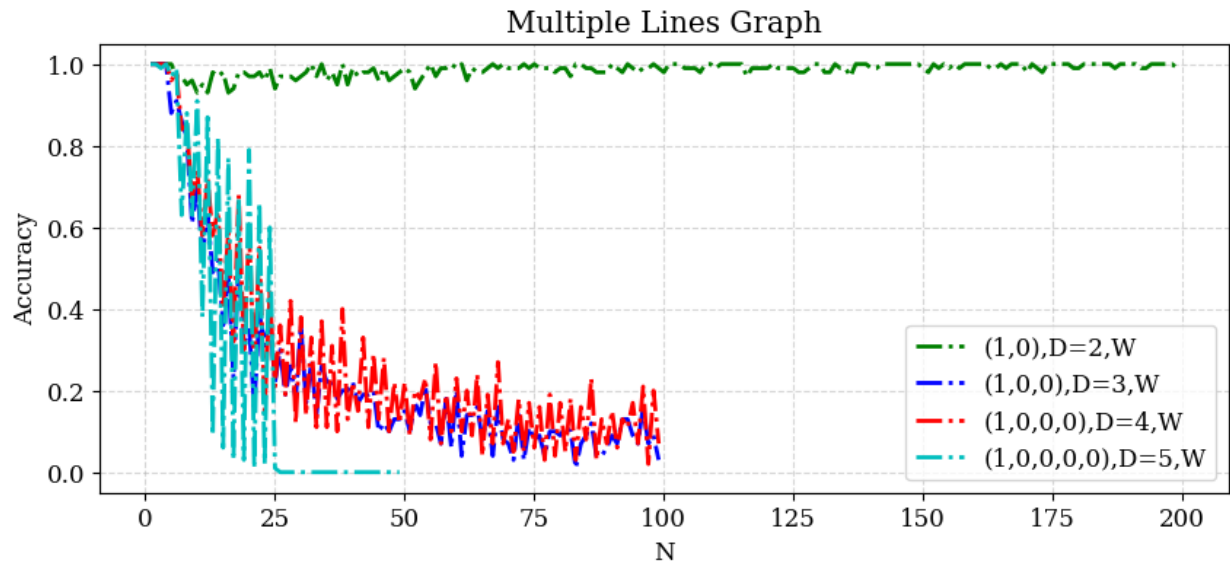
(1,2,2)movement가 3D에서 W방식을 따랐을 때 N이 400부터 1000으로 큰 상황에서도 높은 정확도를 보였다.



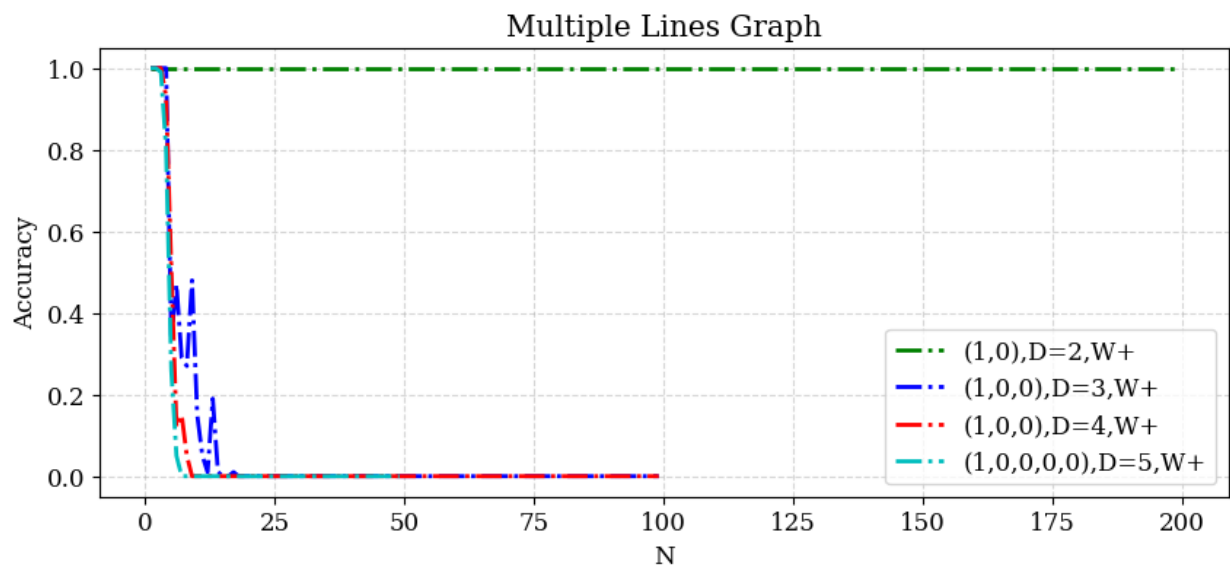
[그림] N=8 D=3 에서의 knight's tour open path

[그림]은 해당 movement에서 N이 8일 때 W방식을 적용하여 찾아낸 경로를 시각화한 것이다.

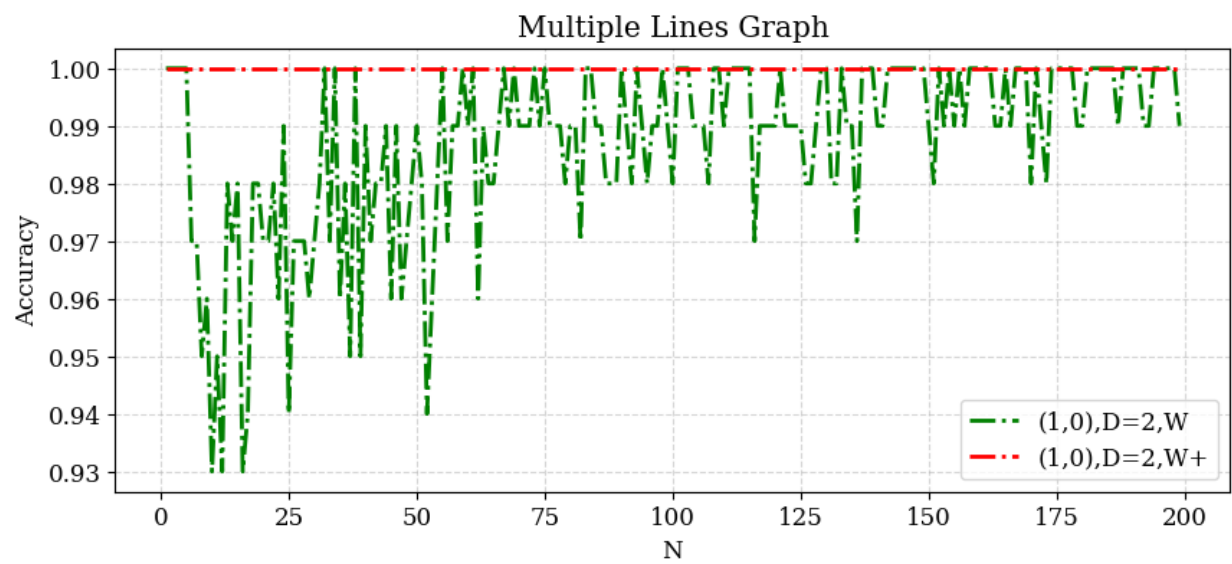
### 3. (1,0,...,0) movement



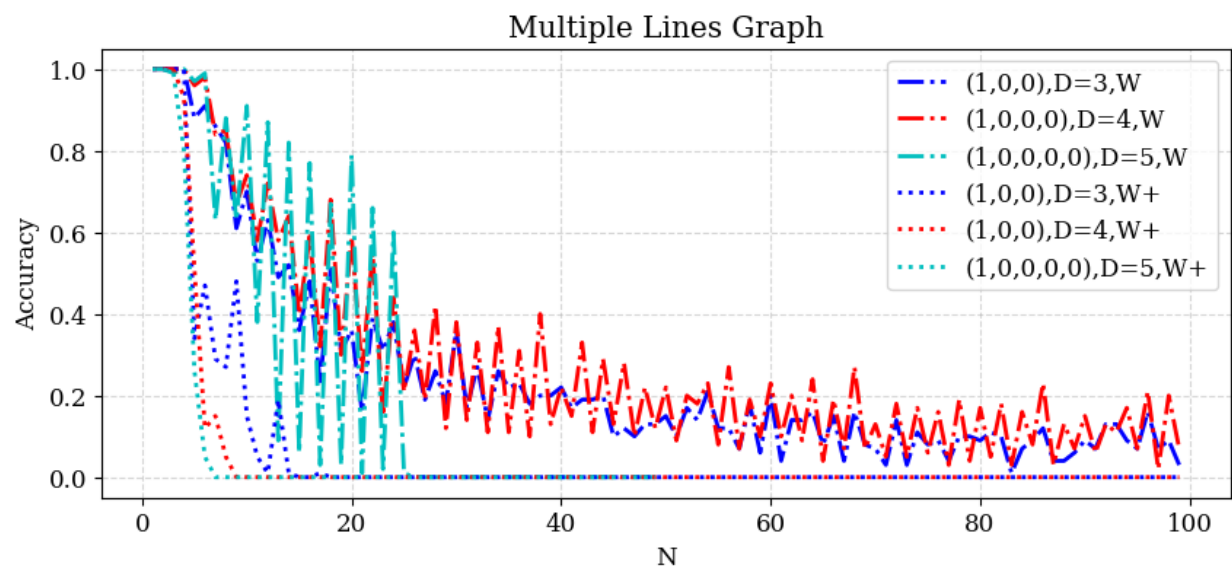
<표> W방식의 demension 차이에 따른 정확도



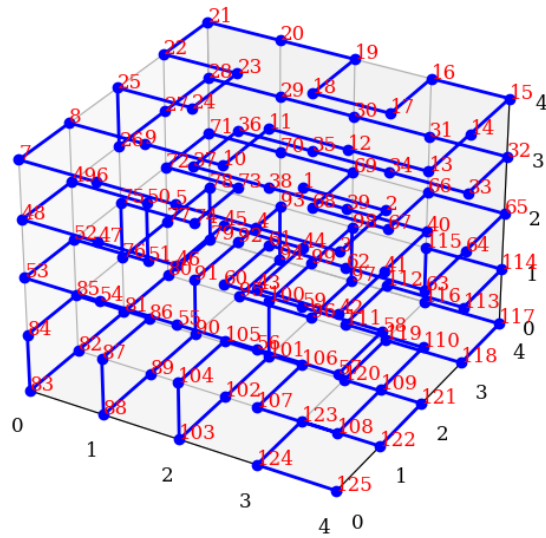
<표> W+방식의 demension 차이에 따른 정확도



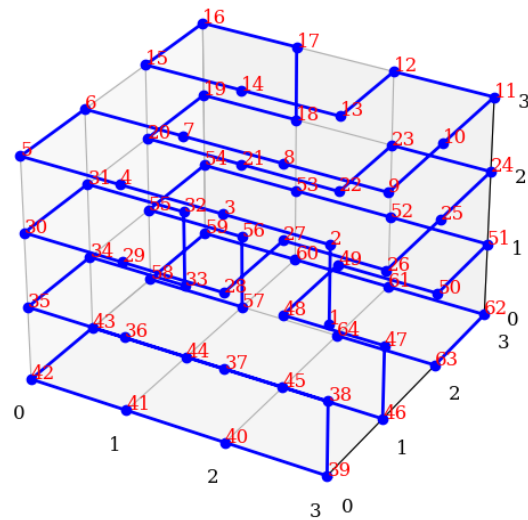
〈표〉 2D에서 W와 W+의 정확도



〈표〉 3D, 4D, 5D에서 W와 W+의 정확도



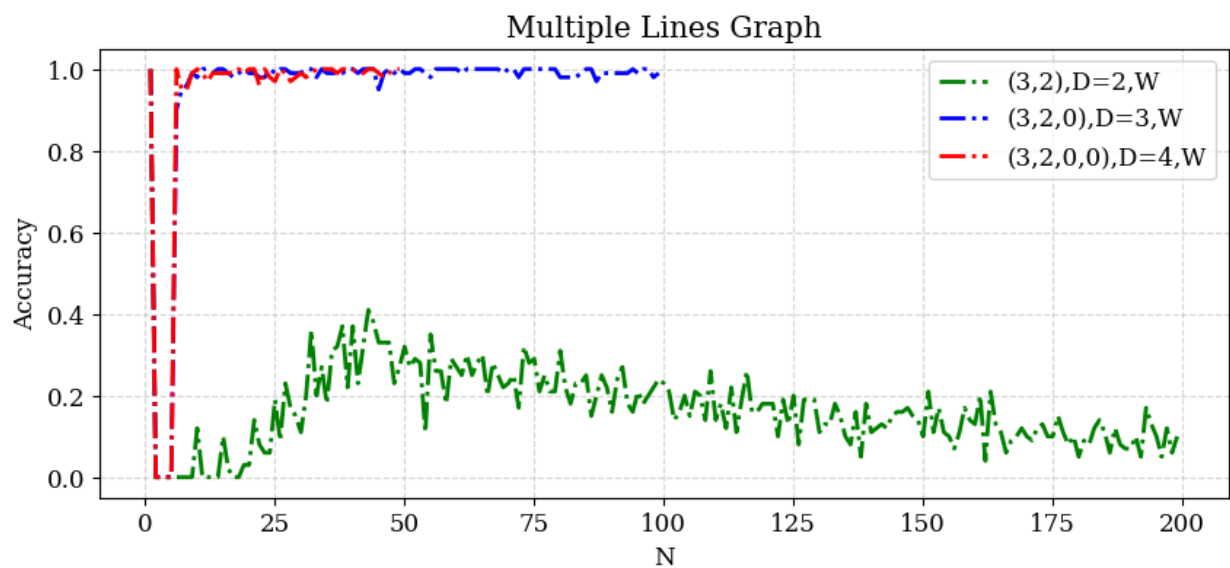
[그림] N=5 D=3 에서의 knight's tour open path



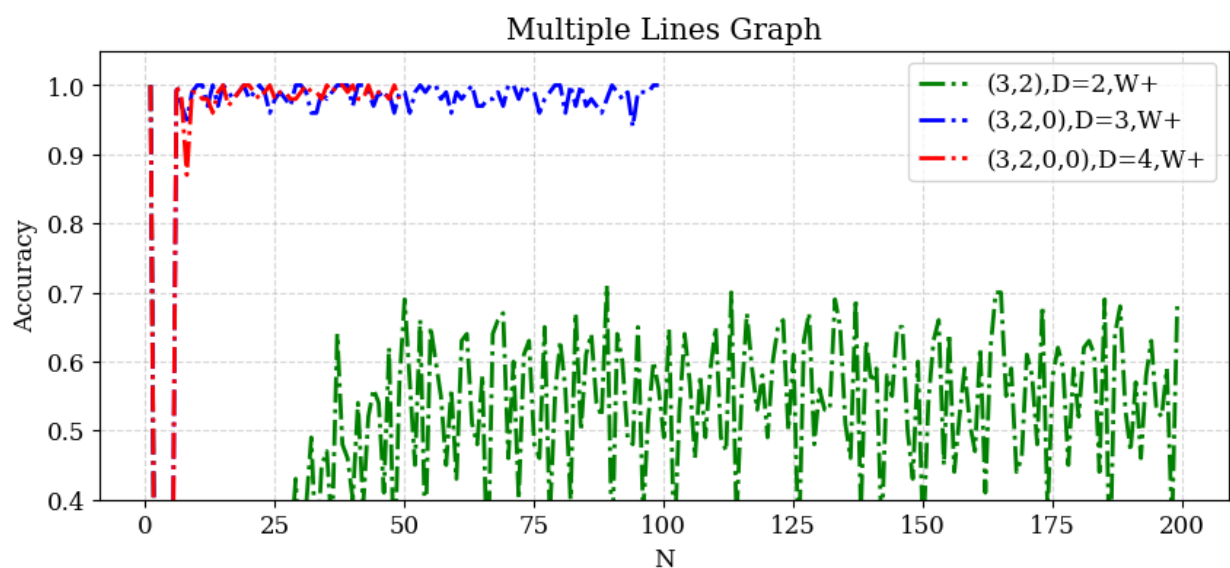
[그림] N=5 D=3 에서의 knight's tour open path

일반적인 상황에서는 W+가 W보다 더 높은 정확도를 보여준다. (1,0,0,...0) movement의 W+ 방식은 2D에서 높은 정확도와 안정성을 보장한다. 하지만, (1,0,0,...0) movement에서는 W+방식은 매우 낮은 정확도를 보여준다.

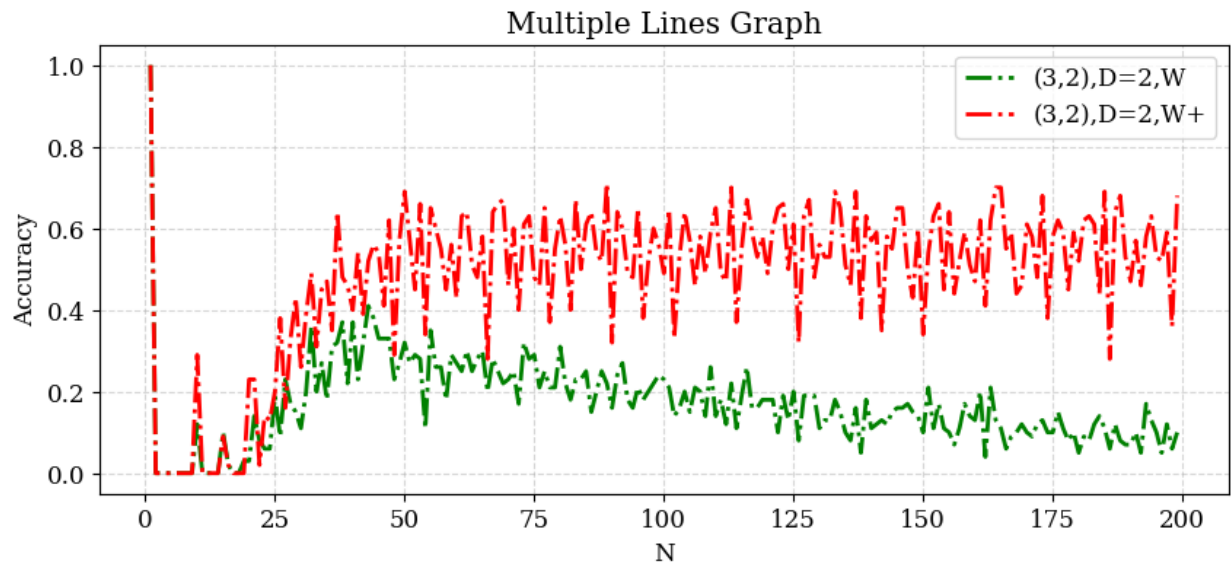
4. (3,2,0,...0) movement



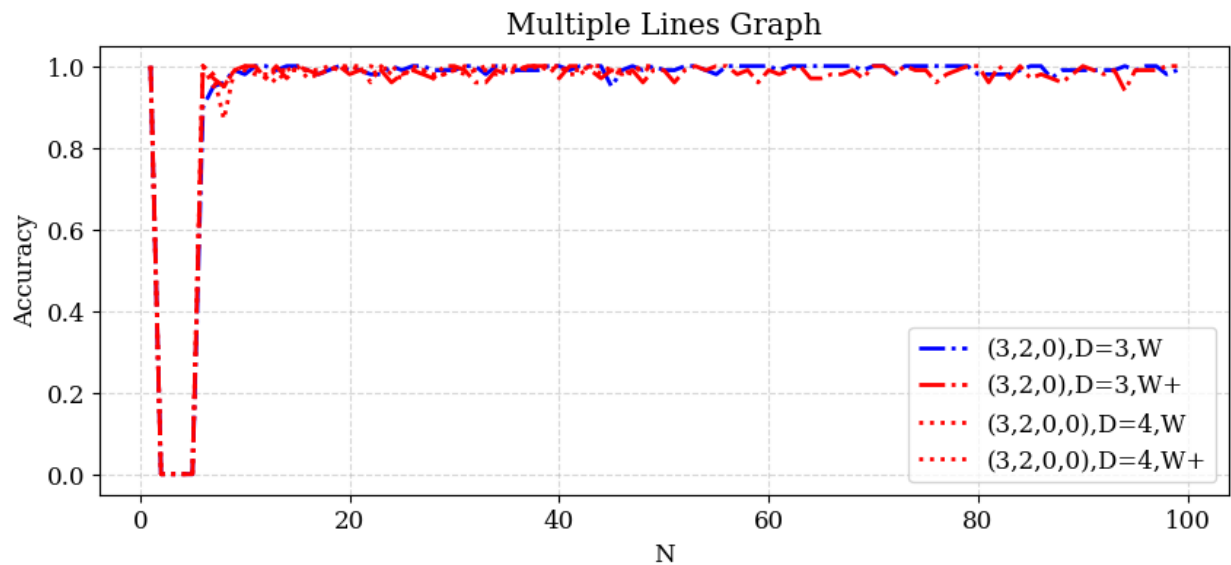
<표> W방식의 demension 차이에 따른 정확도



<표> W+방식의 demension 차이에 따른 정확도



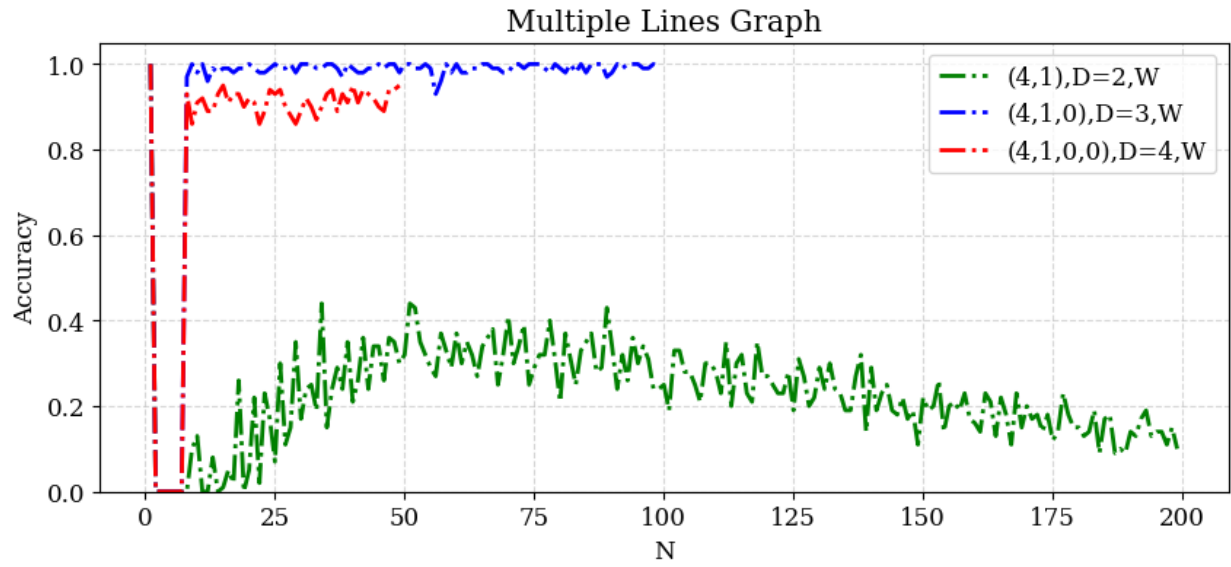
<표> 2D에서 W와 W+의 정확도



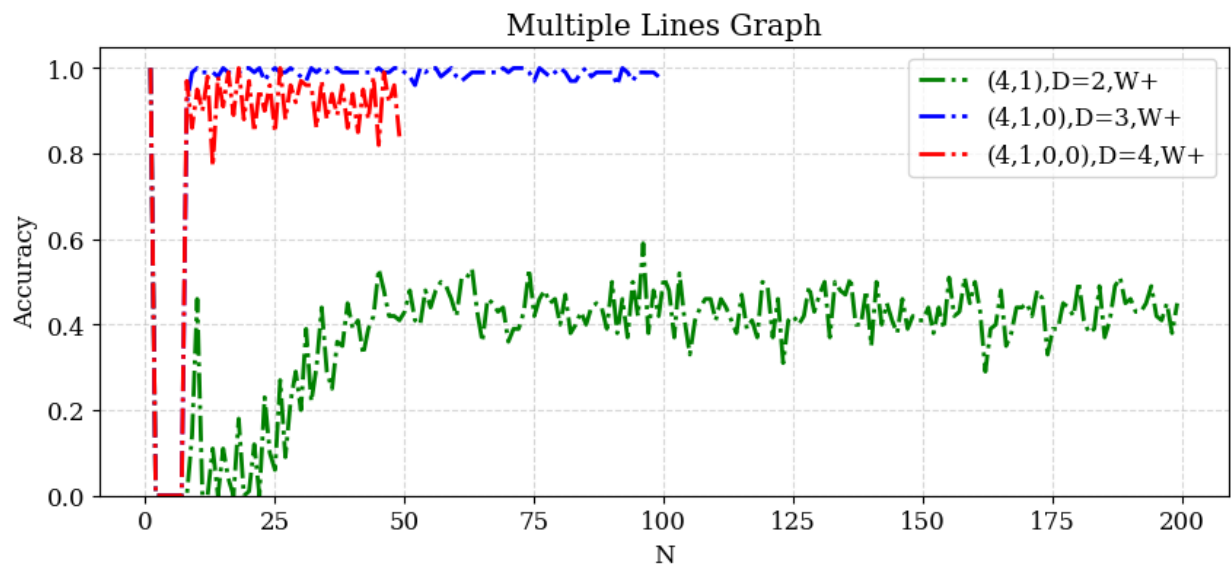
<표> 3D, 4D에서 W와 W+의 정확도

아직 (3,2,0,...,0)movement에서는 새로운 알고리즘을 적용하지 않았습니다. 빠른 시일 안에 채워 넣겠습니다.

5. (4,1,0,...,0) movement

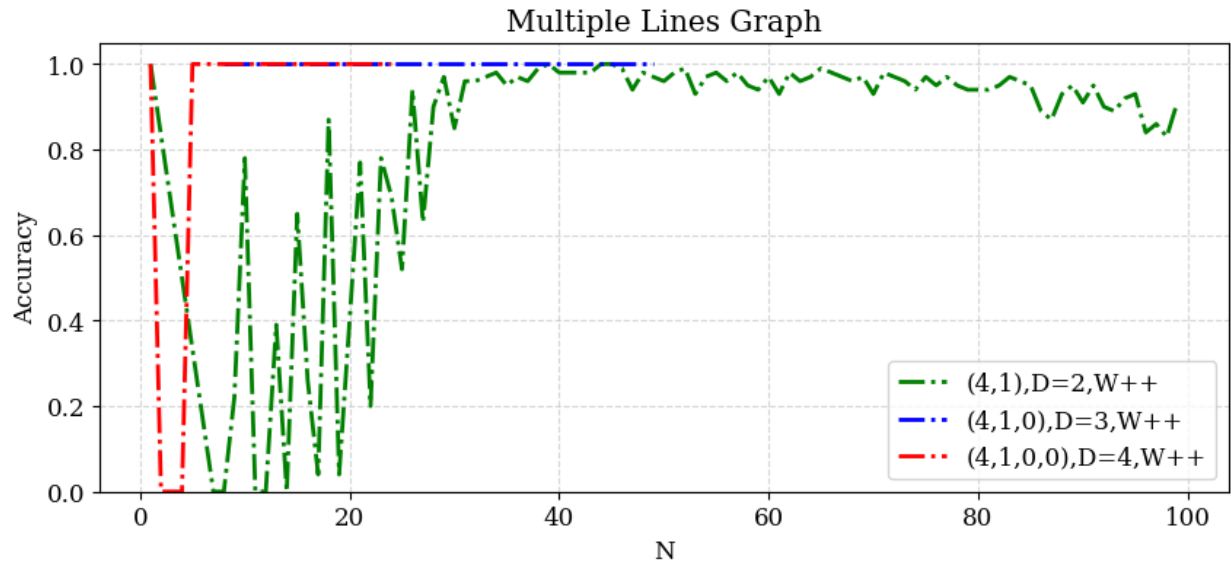


<표> W방식의 demension 차이에 따른 정확도

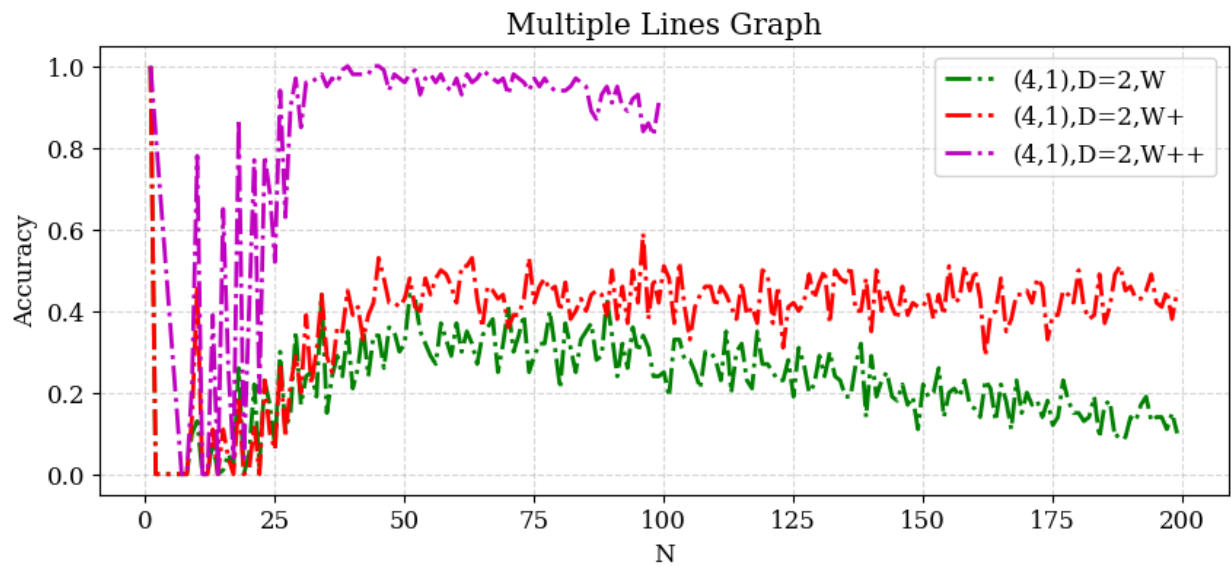


<표> W+방식의 demension 차이에 따른 정확도



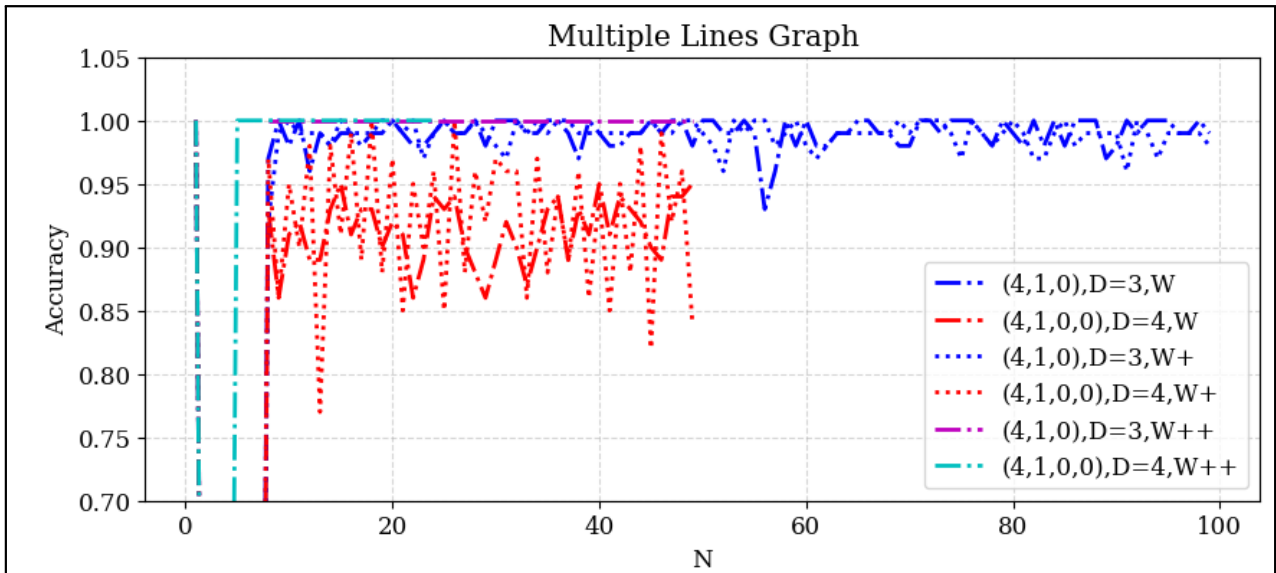


<표> W++방식의 dimension 차이에 따른 정확도



<표> 2D에서 W와 W+, W++의 정확도

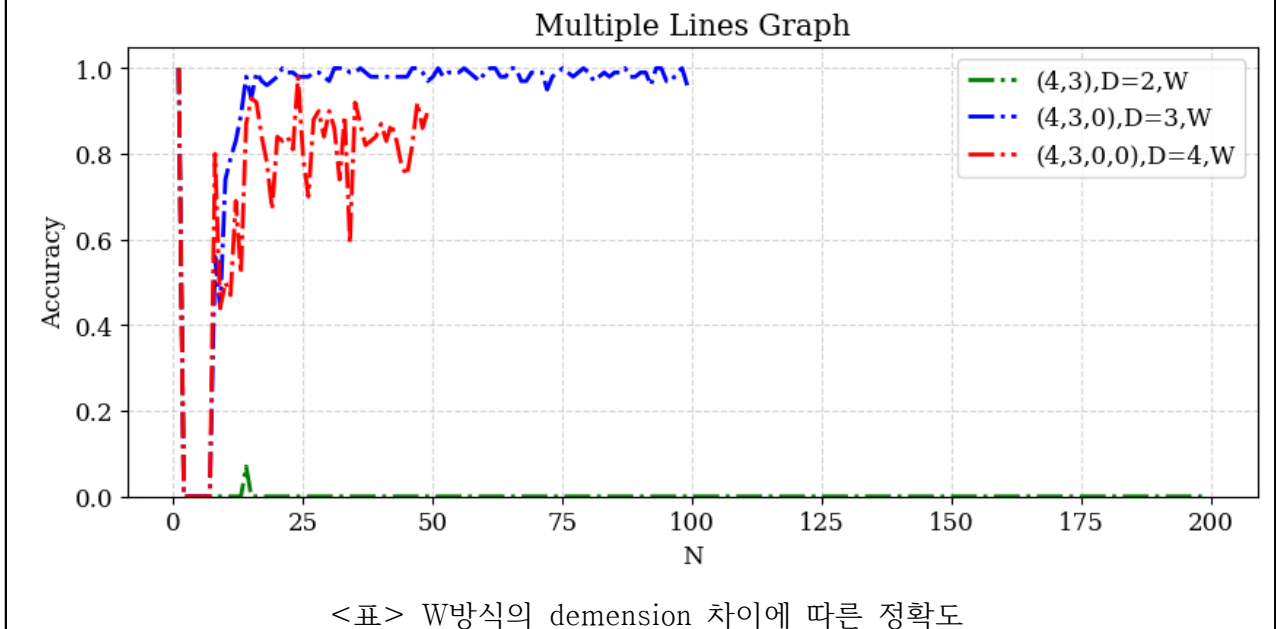




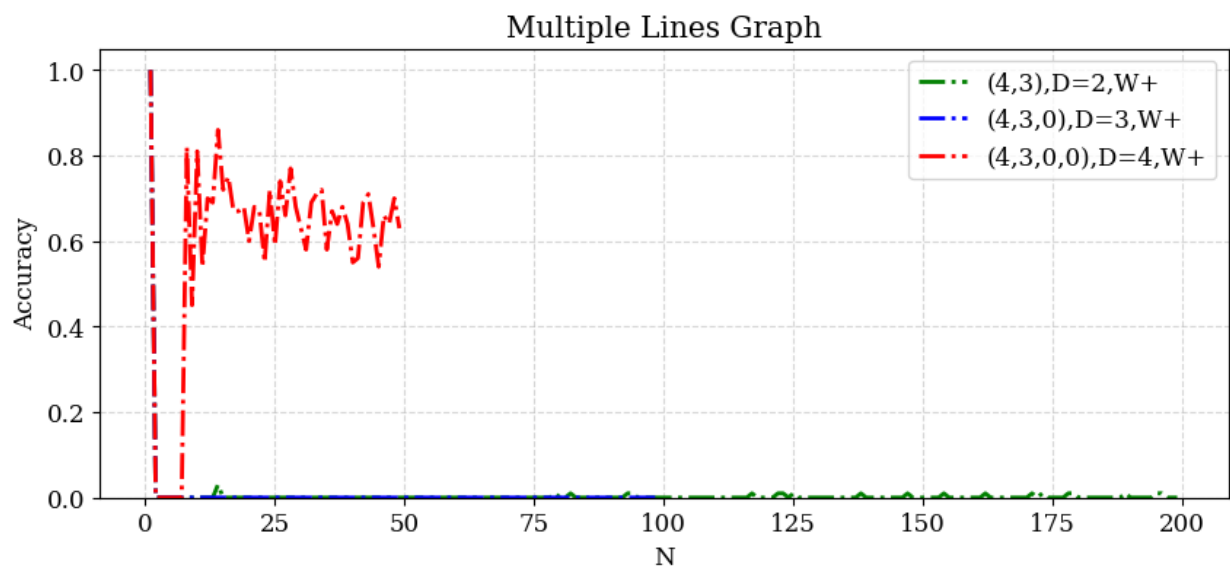
<표> 3D, 4D에서 W와 W+, W++의 정확도

W++은 W, W+방식에 비하여 높은 정확도와 안정성을 보인다. 특히 2D에서의 W++ 방식은 W, W+방식에 비해 매우 높은 정확도를 보장하며, 3D와 4D에서는 높은 안정성을 보인다. 라는 특징이 있다.

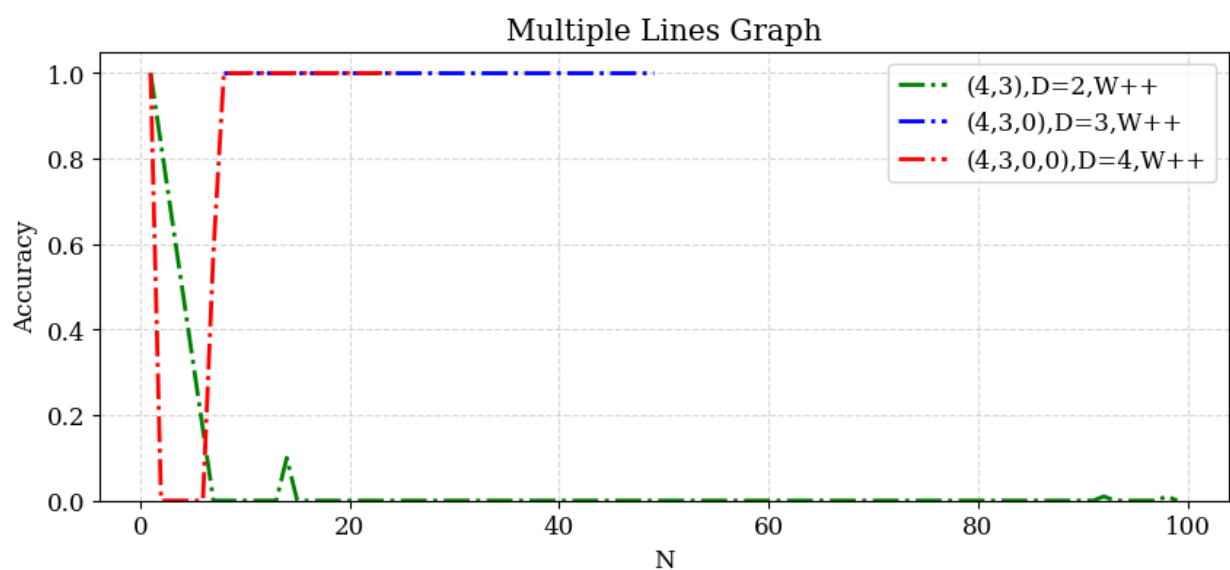
#### 6. (4,3,0,...,0) movement



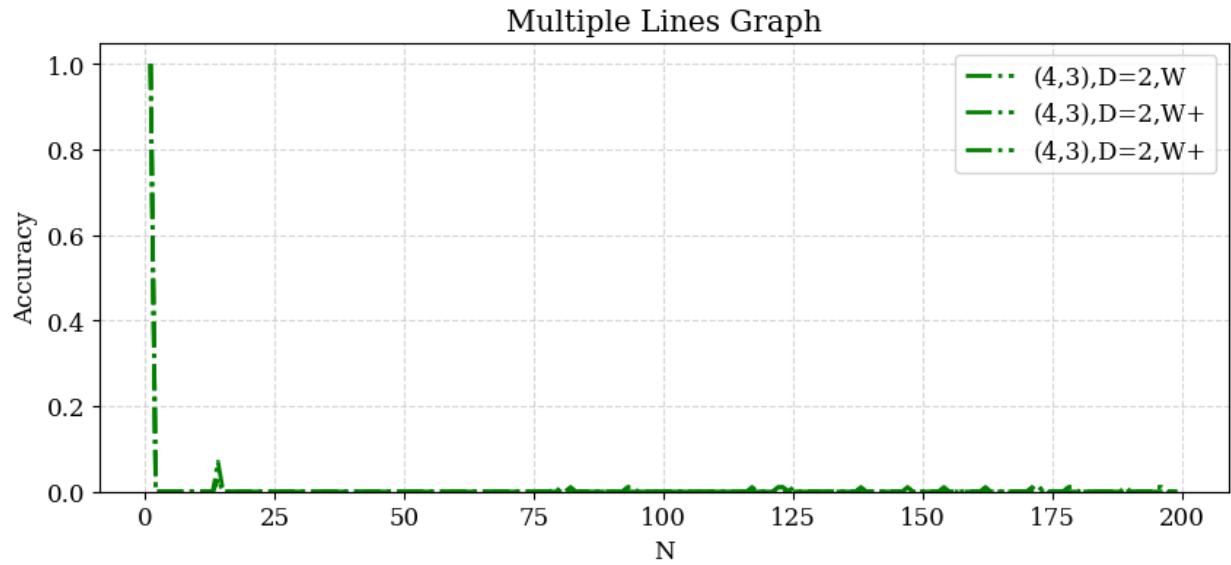
<표> W방식의 demension 차이에 따른 정확도



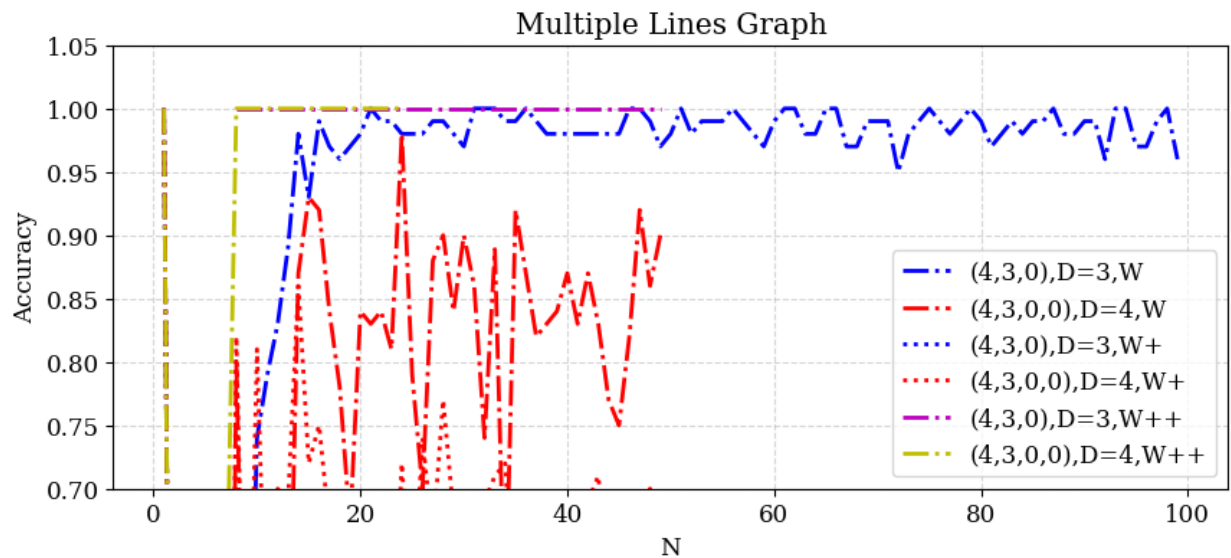
<표> W+방식의 dimension 차이에 따른 정확도



<표> W++방식의 dimension 차이에 따른 정확도



<표> 2D에서 W와 W+, W++의 정확도

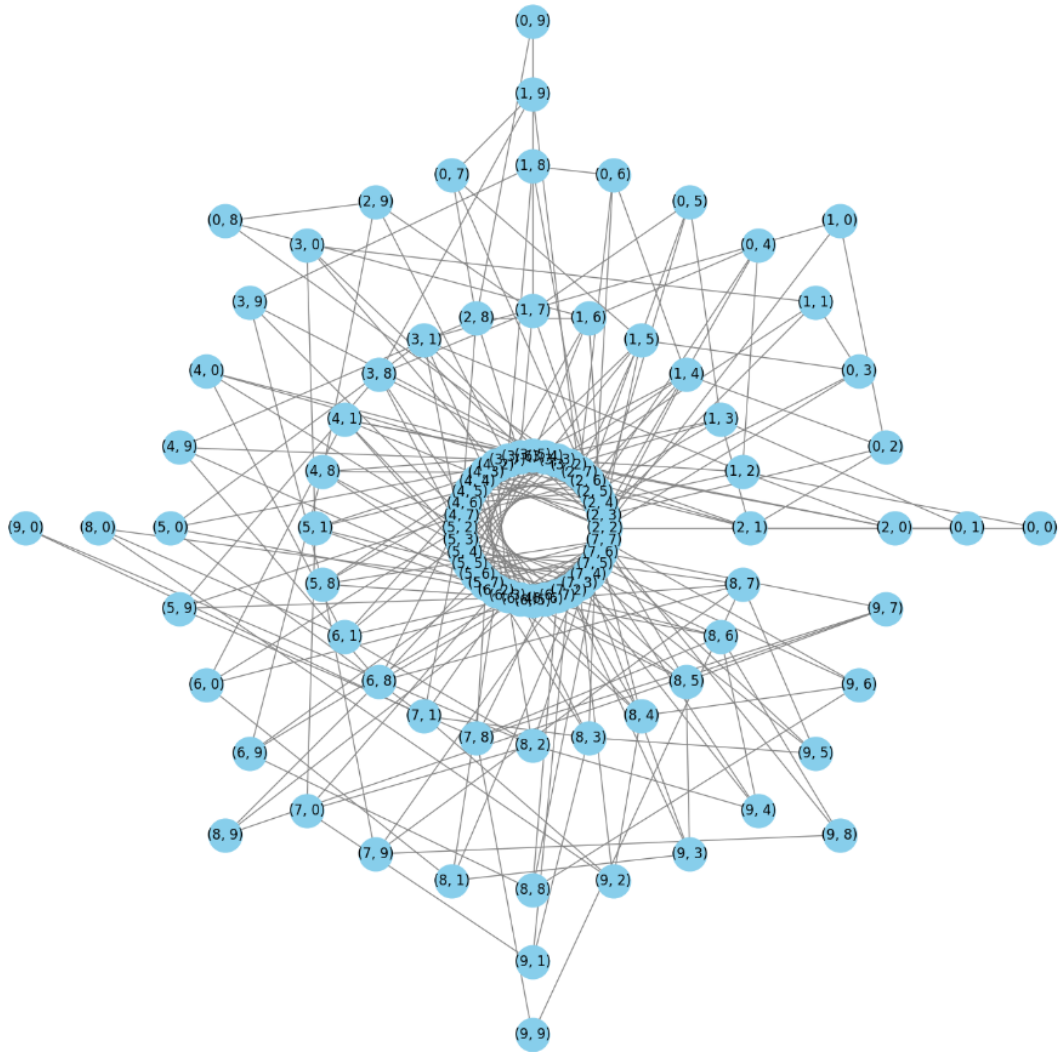


<표> 3D, 4D에서 W와 W+, W++의 정확도

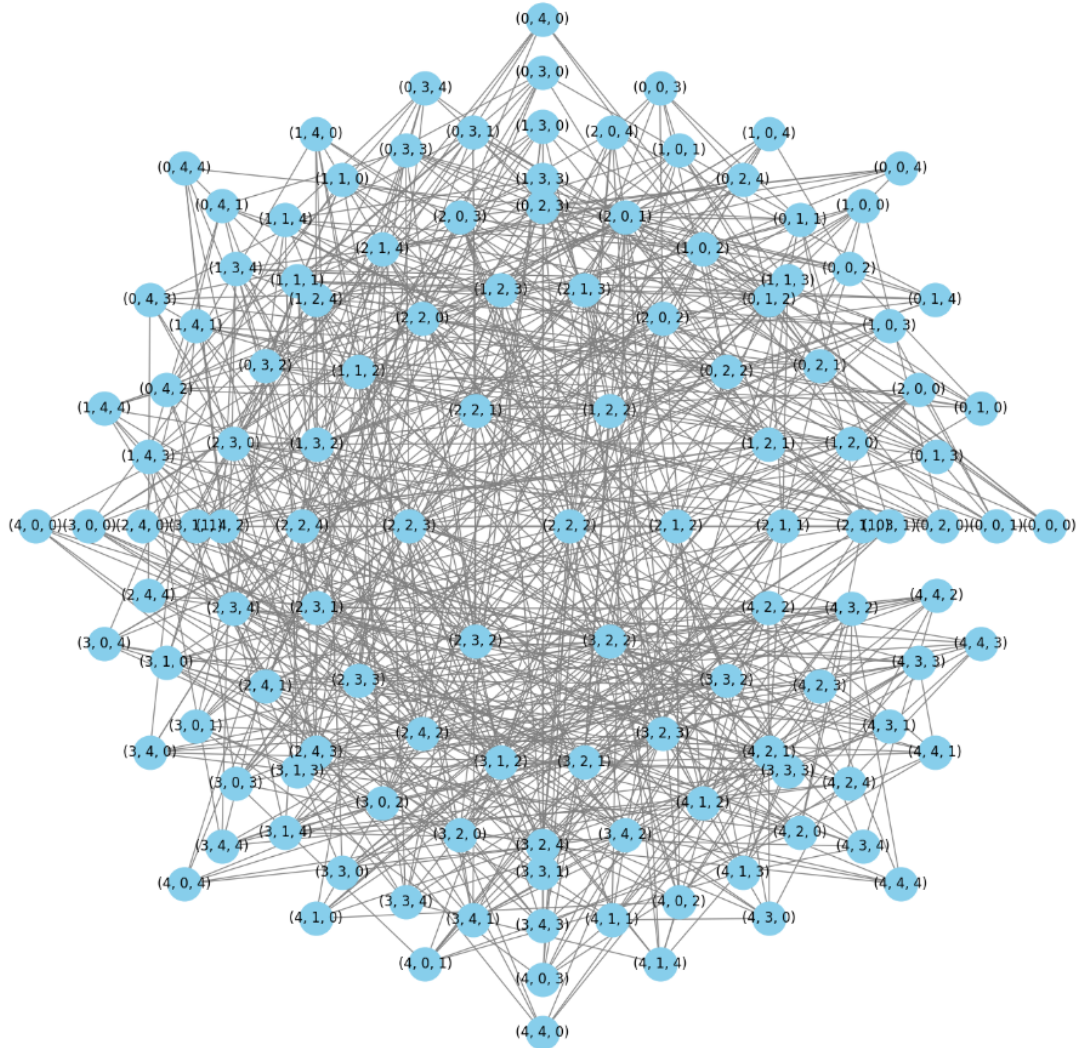
(4,3,0,...,0)movement에서도 W++은 여전히 유효하다. 3D와 4D에서 높은 정확도와 안정성을 보인다.

이때 2D에서는 매우 낮은 정확도를 보인다.

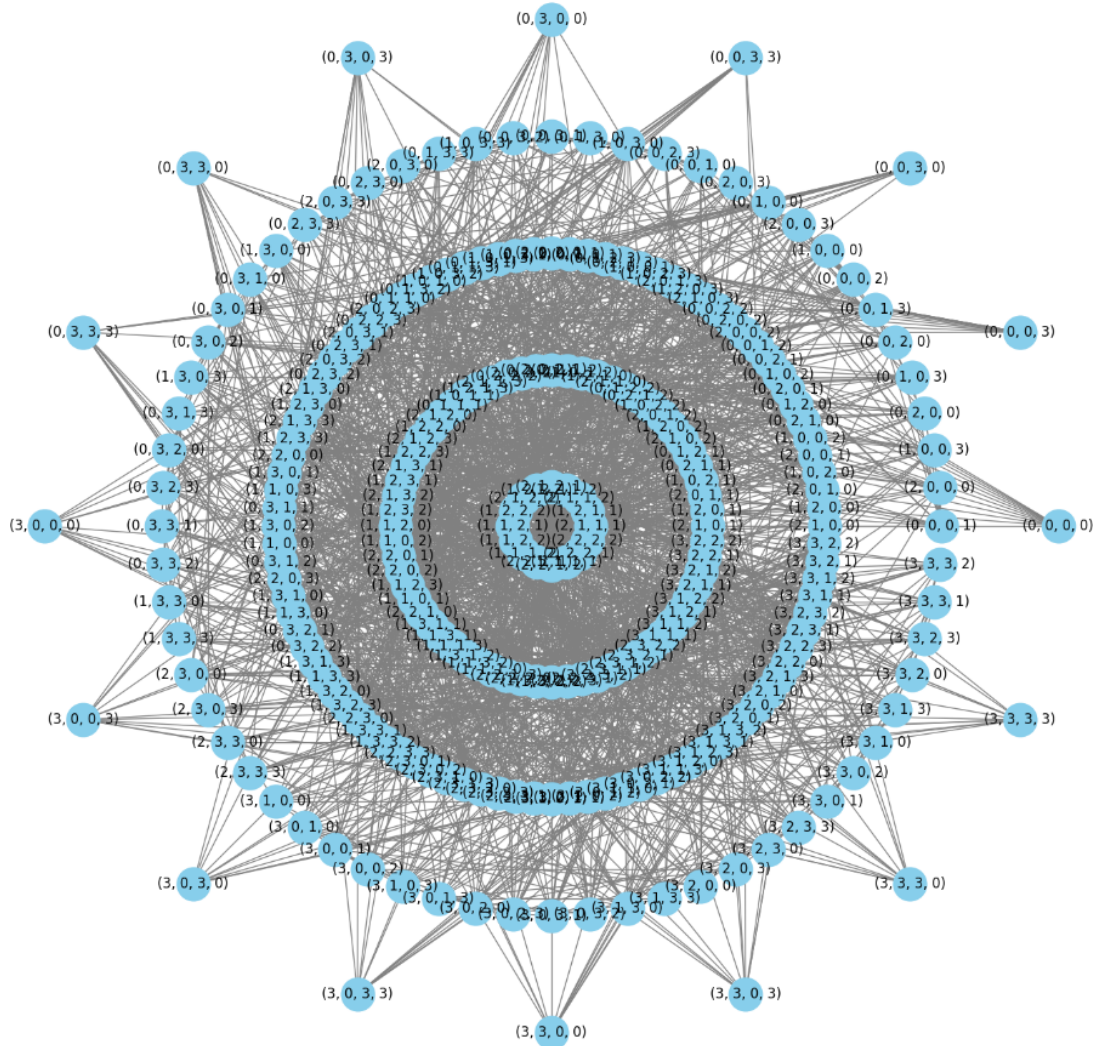
## 7. 2차원 그래프 기반의 일반화



[그림]  $D=2$   $N=10$



[그림] D=3 N=5



[그림] D=4 N=4

각 그림들에서 노드들은 체스판에서의 위치이며, 엣지는 (2,1,0,...,0)movement로 갈 수 있음을 나타낸다. 원형의 모양에서 바깥에서 안쪽으로 갈수록 각 노드에 대해 연결되어있는 엣지들이 많다. 가장 바깥의 껍질의 노드들은 체스판에서 가장 구석에 해당되는 점들이다. N이 늘어날수록 최외각 껍질을 제외한 다른 노드들이 증가된다.

r차원 하이퍼큐브 격자(hypercube lattice/grid)에서 노드 기반의 2차원 그래프로 일반화한 모습이다. 각 노드들의 대하여 엣지들의 개수 분포를 알 수 있고, 이를 그래프 이론 및 조합론의 관점에서 재해석할 수 있다.

## 5. 결론 및 요약

6. 학문분야 연계성 기술(해당하는 경우 작성)

7. 참고문헌

※ 내용 추가시 별도 용지 사용 가능