CHAPTER 03

이산 시스템의 시간 영역 해석

Time Domain Analysis of Discrete systems

온성권
전자통신공학과

23-2학기

Contents

시간 영역 해석

이산 시스템의 시간 영역 해석

- 입/출력 신호를 시간 함수로 표현하여 시스템의 표현식을 구하고, 이를 이용하여 시스템의 특성을 해석하는 것

- 시스템 입출력 관계

: 차분 방정식 또는 컨벌루션 합의 형태로 표현됨

고유 응답과 강제 응답

- **고유응답 - Natural Response**
  - 시스템의 특성을 반영하는 응답
  - 시스템 모드들로만 구성됨

- **강제응답 - Forced Response**
  - 외부 입력의 특성을 반영하는 응답

영입력 응답과 영상태 응답

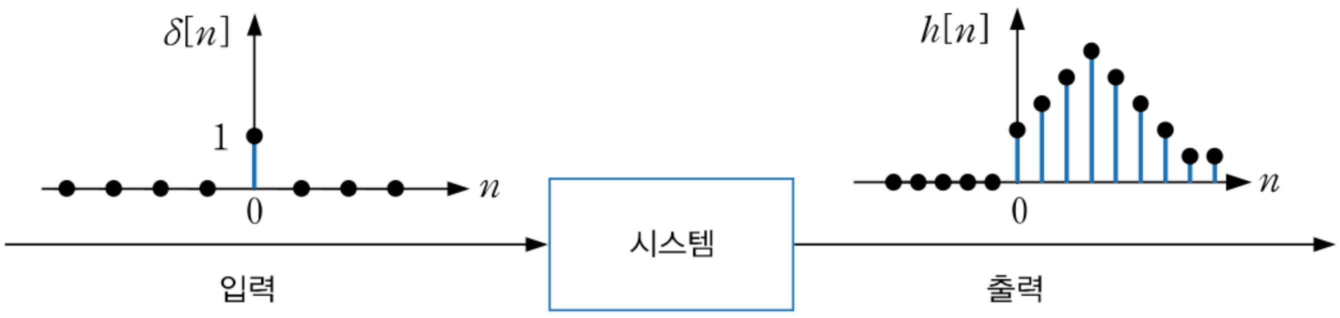
- **영입력 응답 - Zero Input Response**
  - 초기 조건에 의한 응답 성분
  - 외부 입력에 독립적(입력=0)인 시스템 자체의 내부 조건에 대한 응답
  - 시스템의 여러 본질적 특성을 파악 가능

- **영상태 응답 - Zero State Response**
  - 외부에서 넣어주는 입력만에 대한 응답
  - 시스템 내부 조건과는 무관하게(초기 조건=0) 외부 입력에 대한 반응
  - 원하는 결과를 얻기 위한 입력의 제어 방법 습득 가능

임펄스 응답 - Impulse Response

- **임펄스 응답 - Impulse Response**
  - 시스템의 입력이 임펄스 함수일 때의 응답
  - 모든 초기 조건은 0으로 가정

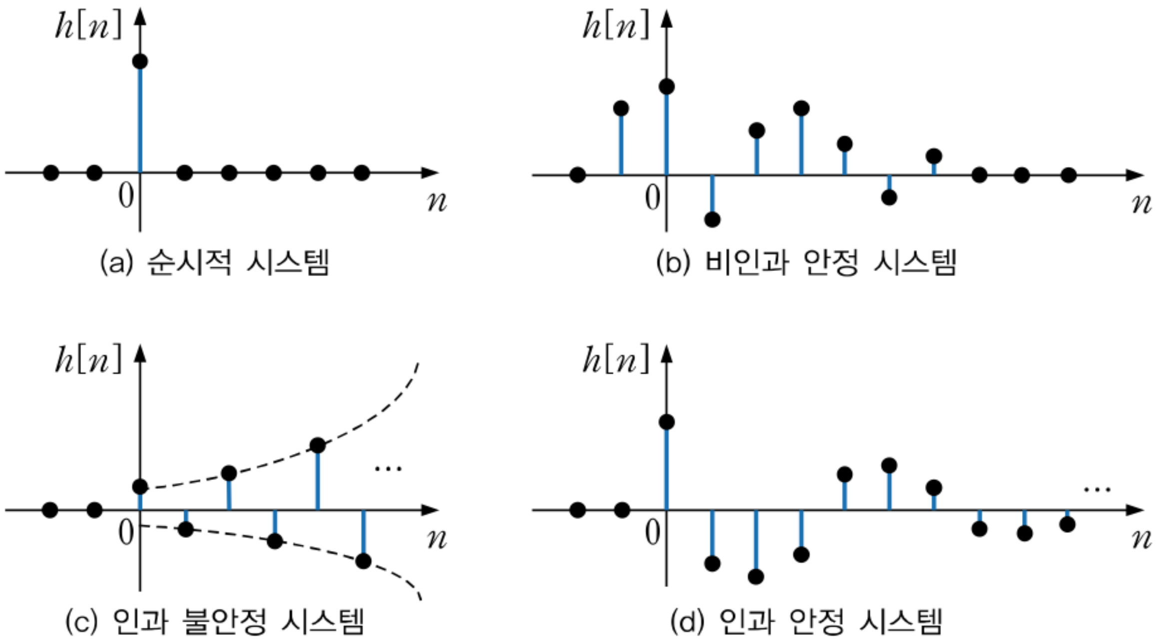
$$h[n] = L\{\delta[n]\}$$



[그림 3-1] 시스템 임펄스 응답의 발생

임펄스 응답 - Impulse Response

임펄스 응답



[그림 3-2] 여러 시스템의 임펄스 응답

FIR 시스템과 IIR 시스템

- **유한 임펄스 응답(Finite Impulse System - FIR) 시스템**
  - 임펄스 응답의 샘플 수가 유한한 시스템
  - 시스템 차분 방정식이 MA항들로만 이루어짐
  - Eg, $y[n] = ax[n] + bx[n-1]$
- **무한 임펄스 응답(Infinite Impulse System - IIR) 시스템**
  - 임플스 응답의 샘플 수가 무한한 시스템
  - 시스템 차분 방정식이 AR항을 반드시 포함함
  - Eg, $y[n] + ay[n-1] = bx[n]$

FIR 시스템과 IIR 시스템

예제 3-1

다음의 차분 방정식으로 표현되는 이산 시스템의 임펄스 응답을 구하라.

(a) $y[n] = ax[n] + bx[n-1]$ (b) $y[n] + ay[n-1] = bx[n]$

풀이

(a) 임펄스 응답 : 시스템 차분 방정식에 $x[n] = \delta[n]$을 대입

$$h[n] = a\delta[n] + b\delta[n-1]$$

$$\begin{aligned} n = 0\text{일 때}, &\quad h[0] = a\delta[0] + b\delta[-1] = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a \\ n = 1\text{일 때}, &\quad h[1] = a\delta[1] + b\delta[0] = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b \\ n = 2\text{일 때}, &\quad h[2] = a\delta[2] + b\delta[1] = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0 \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

→ 따라서 이 시스템은 FIR 시스템이다.

FIR 시스템과 IIR 시스템

예제 3-1

풀이

(b) $h[n] = -ah[n-1] + b\delta[n]$에 반복하여 대입법을 적용한다.

이때 $h[-1] = y[-1]$이므로

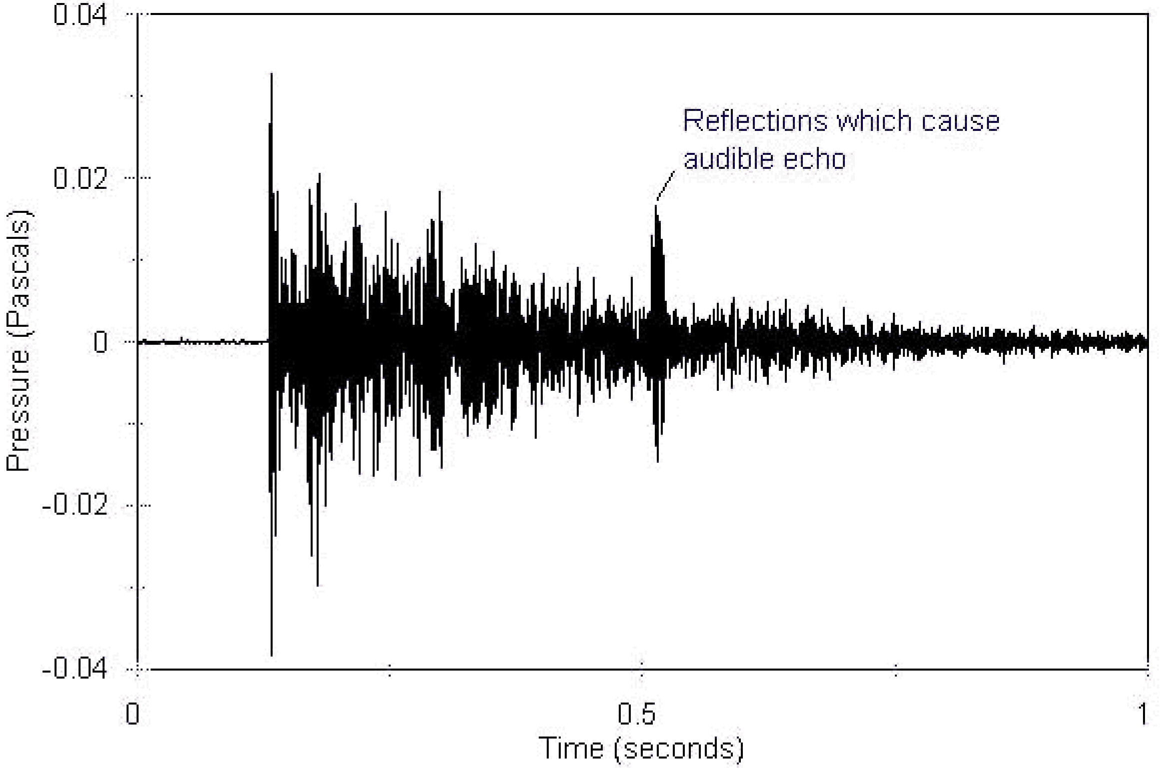
$$n=0\text{일 때,}\quad h[0] = -ah[-1] + b\delta[0] = (-a)\cdot 0 + b\cdot 1 = b$$
$$n=1\text{일 때,}\quad h[1] = -ah[0] + b\delta[1] = (-a)\cdot b + b\cdot 0 = (-a)b$$
$$n=2\text{일 때,}\quad h[2] = -ah[1] + b\delta[2] = (-a)\cdot(-a)b + b\cdot 0 = (-a)^2 b$$
$$\vdots$$
$$n=k\text{일 때,}\quad h[k] = -ah[k-1] + b\delta[k] = (-a)\cdot(-a)^{k-1}b + b\cdot 0 = (-a)^k b$$
$$\vdots$$

$$\boxed{h[n] = (-a)^n b, \quad n \geq 0}$$

→ 따라서 이 시스템은 IIR 시스템이다.

쉽게 생각해보기!

쉽게 생각해보기!


0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
Pressure (Pascals)
0
0.5
1
Time (seconds)
Reflections which cause
audible echo

이산 LTI 시스템의 영상태 응답의 컨벌루션 표현

- **신호의 임펄스 표현과 선형성 및 시불변성을 이용**

  - 이산 신호의 임펄스 표현 :

$$\begin{aligned} x[n] &= \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + \cdots + x[k]\delta[n-k] + \cdots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \end{aligned}$$

  - 가산성 : $y[n] = L\{x[n]\} = \cdots + L\{x[0]\delta[n]\} + \cdots + L\{x[k]\delta[n-k]\} + \cdots$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} L\{x[k]\delta[n-k]\}$$

이산 LTI 시스템의 영상태 응답의 컨벌루션 표현

- 동차성 : $y[n] = \cdots + x[0]L\{\delta[n]\} + \cdots + x[k]L\{\delta[n-k]\} + \cdots$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, L\{\delta[n-k]\}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]\, h[n-k]$$

- 시불변성 : $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$

- 이산 LTI 시스템의 출력 : 입력과 임펄스 응답의 컨벌루션 합이 됨

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = x[n] * h[n]$$

→ 만약 $x[n] = 0,\ n < 0$ & $h[n] = 0,\ n < 0$이면, $y[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$

쉽게 생각해보기

$$y[n] = f(x[n], h[n])$$

The function, f, is what we call the convolution operator!

Convolution = Calculation of accumulated reaction

LTI 베개

Impulse 손가락

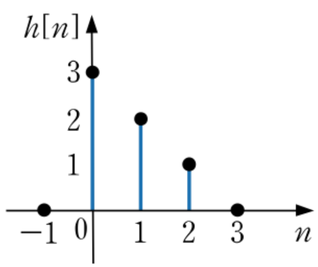
이산 LTI 시스템의 영상태 응답의 컨벌루션 표현

[표 3-1] 이산 LTI 시스템의 영상태 응답 표현을 구하는 과정

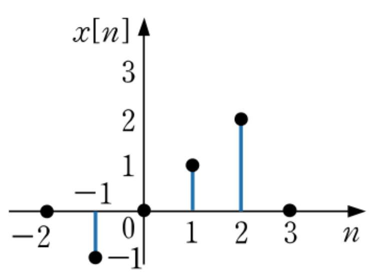
입력	출력	적용 원리
$\delta[n]$	$h[n]$	임펄스 응답
$\delta[n-k]$	$h[n-k]$	시불변성
$x[k]\delta[n-k]$	$x[k]h[n-k]$	선형성(동차성)
$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$	$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$	선형성(가산성)

예제 3-2

다음 그림은 이산 LTI 시스템의 임펄스 응답 $h[n]$과 입력 신호 $x[n]$을 나타낸 것이다. 이 입력에 대한 시스템의 출력을 구하라.



(a) 임펄스 응답



(b) 입력 신호

이산 LTI 시스템의 영상태 응답의 컨벌루션 표현

예제 3-2

풀이

임펄스의 합을 나타내면

$$\begin{aligned} x[n] &= -1\cdot\delta[n+1]+0\cdot\delta[n]+1\cdot\delta[n-1]+2\cdot\delta[n-2] \\ &= x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+x[2]\delta[n-2] \\ &= \sum_{k=-1}^{2} x[k]\,\delta[n-k] \end{aligned}$$

$x[n]$을 쪼갠 뒤, 중첩의 원리를 적용하여 각 임펄스 성분 $x[k]\delta[n-k]$에 대한 시스템 응답을 모두 더하면 시스템의 출력을 얻게 된다.

$$y[n] = \sum_{k=-1}^{2} x[k]\,h[n-k]$$

컨벌루션 합의 계산

미끄럼 방식 컨벌루션 계산법

- 컨벌루션 : 한 신호를 뒤집어 시간축의 좌측 끝부터 미끄러뜨려 끌고 오면서 매 순간 고정된 신호와 곱한 결과를 더하는 연산
- 총합은 시간 변수에 대해서 수행되는 것이 아니라 k에 대해서 수행

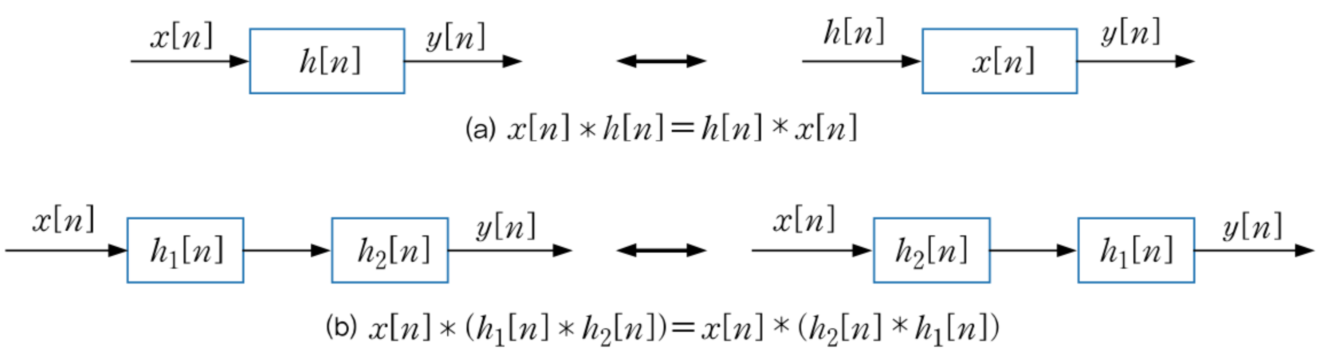
미끄럼 방식에 의한 컨벌루션 계산 알고리즘

- 1단계 : 두 신호의 시간축을 변환한다($n \rightarrow k$).
- 2단계 : 신호 하나($x[k]$)를 고정시키고 다른 하나($h[k]$)를 시간 반전한다($h[-k]$).
- 3단계 : 시간 반전된 $h[-k]$를 k축에서 n_0만큼 이동시켜 $h[n_0-k]$를 구한다.
- 4단계 : $h[n_0-k]$와 $x[k]$를 곱하여 얻은 결과의 샘플 값들을 모두 더해 $n=n_0$ 순간의 컨벌루션 값 $y[n_0]$를 얻는다.
- 5단계 : $-\infty$에서 $+\infty$까지 모든 n에 대해 이를 반복하여 얻은 결과를 시간축 n에 대해 그려 최종 컨벌루션 결과($y[n]$)를 얻는다.

컨벌루션 합의 성질

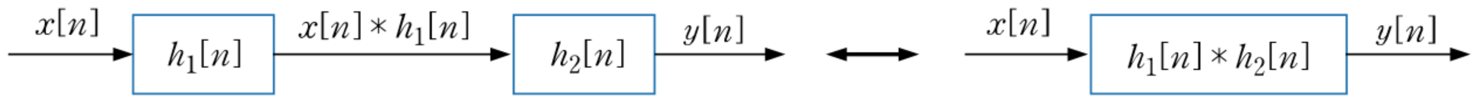
[표 3-3] 컨벌루션 합의 성질

성질	표현식
교환법칙	$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$
결합법칙	$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$
배분법칙	$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$
이동 성질	$y[n-n_0] = x[n-n_0] * h[n]$
길이와 끝	$x[n] = 0,\ n < n_1\ \&\ n > n_2,\ \ h[n] = 0,\ n < n_3\ \&\ n > n_4$ $\rightarrow\ \ y[n] = x[n] * h[n] = 0,\ n < n_1 + n_3\ \&\ n > n_2 + n_4$

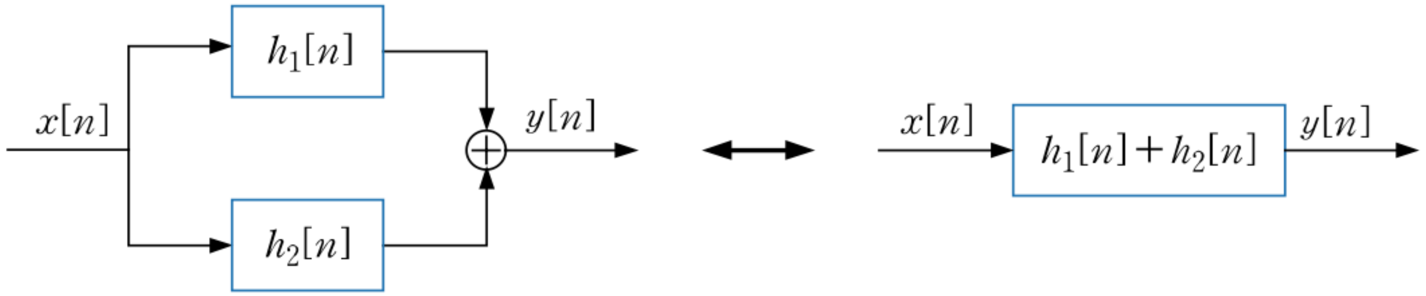


[그림 3-6] 컨벌루션의 교환법칙의 물리적 의미

컨벌루션 합의 성질



[그림 3-7] 컨벌루션의 결합법칙의 물리적 의미

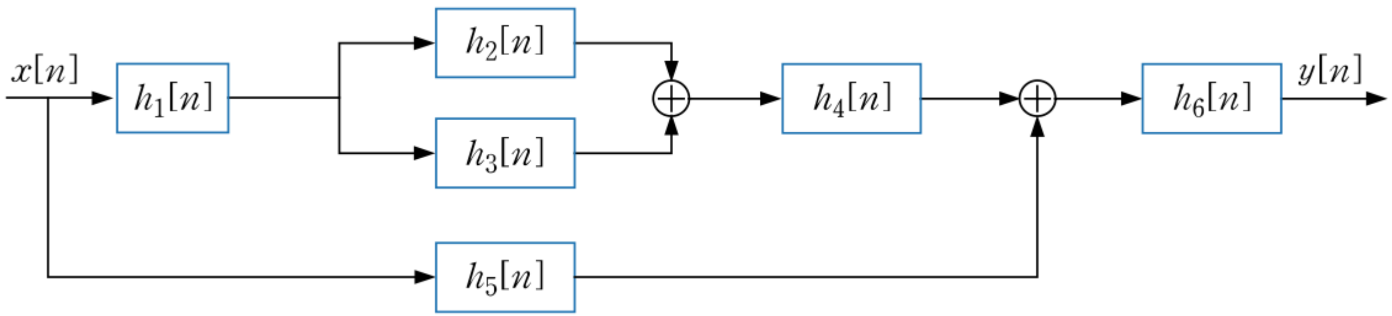


[그림 3-8] 컨벌루션의 배분법칙의 물리적 의미

컨벌루션 합의 성질

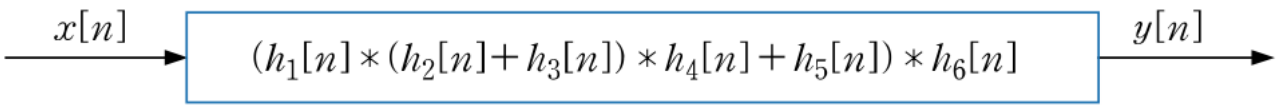
예제 3-4

다음과 같이 여러 개의 부시스템이 상호 연결된 시스템의 임펄스 응답을 구하라.



풀이

전체 시스템의 등가 단일 시스템을 나타내면 다음과 같다.



차분방정식에 의한 이산 LTI시스템의 표현

입출력 관계가 상수 계수의 차분 방정식으로 표현

$$y[n]+a_1y[n-1]+\cdots+a_py[n-p]=b_0x[n]+\cdots+b_qx[n-q]$$

예제 3-4

임펄스 응답이 $h[n]=(0.5)^nu[n]$인 이산 인과 LTI 시스템의 차분 방정식 표현을 구하라

풀이

이 시스템은 IIR시스템이다. 입출력 관계를 컨벌루션 합으로 나타내면

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty}(0.5)^kx[n-k] \qquad ❶$$

$$=x[n]+0.5x[n-1]+0.5^2x[n-2]+\cdots+0.5^kx[n-k]+\cdots$$

차분방정식에 의한 이산 LTI시스템의 표현

예제 3-4

풀이

$y[n-1]$에 대해 다시 쓰면

$$y[n-1]=\sum_{k=0}^{\infty}(0.5)^k x[n-1-k]$$

$$=x[n-1]+0.5x[n-2]+\cdots+0.5^{k-1}x[n-k]+\cdots$$

$y[n]$에서 $0.5y[n-1]$을 빼면

$$y[n]-0.5y[n-1]=x[n] \qquad ❷$$

→ 식 ❶ : 무한개의 시간 지연기, 곱셈기, 덧셈기가 필요

→ 식 ❷ : 시간 지연기, 곱셈기, 덧셈기가 하나씩만 있으면 구현 가능

차분 방정식의 풀이 - 반복 대입법

반복 대입에 의한 차분 방정식의 풀이

- 미분 방정식에는 없는 손쉽고 간단한 풀이 방법
- 반복해서 직전 단계 결과를 대입해 순차적으로 차분 방정식 해를 구함
- 일반적으로 닫힌 꼴의 해를 제공 않음

  → 그러나 컴퓨터에 의한 수치적 계산에 매우 적합함

반복 대입법에 의한 차분 방정식 풀이

- 1단계 : 차분 방정식의 좌변에 $y[n]$만 남기고 우변으로 넘겨 정리한다.
- 2단계 : 시작 시점 $n=i$에서 주어진 초기 조건 $y[i-1]$, ⋯, $y[i-k]$와 이미 알고 있는 입력 값들을 대입하여 $y[i]$를 계산한다.
- 3단계 : 차분 방정식에서 n을 1 증가시켜 직전에 구한 $y[i]$와 이미 알고 있는 과거 출력 및 입력 값들을 대입하여 $y[i+1]$을 계산한다.
- 4단계 : 3단계의 과정을 반복한다.

반복 대입에 의한 차분 방정식의 풀이

예제 3-5

어떤 사람이 은행에 계좌를 개설하여 월이율 r로 매월 초에 정기적으로 예금을 하면 통장에 이자를 포함한 계좌의 총 잔고가 바로 표시된다고 한다. 매월 초에 예금한 직후의 계좌 잔고를 나타내는 차분 방정식을 구하라. 그리고 매월 예금액이 10만 원이고 월이율이 1% 인 경우에 대해 구해진 차분 방정식을 이용하여 처음 몇 개월의 계좌 잔고를 계산하라.

풀이

x[n] : n번째 월 초에 불입하는 예금액

y[n] : 예금액이 입금된 직후에 계산된 총 잔액

총 잔액 = 직전 월 총 잔액 + 한 달 동안의 이자 수입 + 입금한 예금액

$$y[n] = y[n-1] + ry[n-1] + x[n] = (1+r)y[n-1] + x[n]$$

$$n=0\text{일 때,}\quad y[0] = 1.01y[-1] + x[0] = 1.01(0) + 10 = 10$$
$$n=1\text{일 때,}\quad y[1] = 1.01y[0] + x[1] = 1.01(10) + 10 = 20.1$$
$$n=2\text{일 때,}\quad y[2] = 1.01y[1] + x[2] = 1.01(20.1) + 10 = 30.301$$
$$n=3\text{일 때,}\quad y[3] = 1.01y[2] + x[3] = 1.01(30.301) + 10 = 40.604$$
$$\vdots$$

차분 방정식의 고전적 해법

차분 방정식의 고전적 해법

- 1단계 : 차분 방정식으로부터 특성 방정식과 특성근 $\{\gamma_i\}$를 구한다.
- 2단계 : 특성근을 이용하여 동차해의 형태를 $y_h[n] = \sum_{i=1}^{p} c_i(\gamma_i)^n$ 으로 둔다.
- 3단계 : 입력과 같은 형태로 특이해 $y_p[n]$을 설정하고, 이를 차분 방정식에 대입하여 완전히 결정한다.
- 4단계 : $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$이라 두고, 입력이 인가된 후의 초기 조건을 대입하여 동차해의 계수를 구함으로써 차분 방정식의 유일해를 확정한다.

※ 차분 방정식의 풀이는 z변환을 이용하는 것이 편리함

차분 방정식의 고전적 해법

- **차분 방정식의 해 = 동차해 + 특이해**

$$\boxed{y[n] = y_h[n] + y_p[n]}$$

- **동차해**
  - 동차 차분 방정식(입력항=0)의 해
  - 시스템 모드들만의 선형결합으로 주어지는 응답 = 고유 응답
  - 시스템의 고유한 특성과 관련됨

차분 방정식의 고전적 해법

동차해의 구득

- 동차 차분 방정식 : $y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_p y[n-p] = 0$
- 동차해 $y_h[n]$: $c\gamma^n$꼴의 항(시스템 모드)들로 구성

→ c는 초기(경계) 조건으로 결정

특성방정식

- 동차 차분 방정식에 $y_h[n] = c\gamma^n$을 대입

$$\gamma^p + a_1\gamma^{p-1} + \cdots + a_{p-1}\gamma + a_p = (\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)\cdots(\gamma - \gamma_p) = 0$$

차분 방정식의 고전적 해법

- **특성방정식의 근이 서로 다른 경우**

$$y_h[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + \cdots + c_p\gamma_p^n$$

- **특성방정식의 m-중근인 경우**

$$y_h[n] = c_1\gamma_1^n + c_2 n\gamma_1^n + \cdots + c_m n^{m-1}\gamma_1^n + c_{m+1}\gamma_{m+1}^n + \cdots + c_p\gamma_p^n$$

$$= (c_1 + c_2 n + \cdots + c_m n^{m-1})\gamma_1^n + c_{m+1}\gamma_{m+1}^n + \cdots + c_p\gamma_p^n$$

차분 방정식의 고전적 해법

예제 3-8

다음과 같은 차분 방정식의 동차해를 구하라.

$$y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=x[n-1]-5x[n-2]$$

풀이

이 차분 방정식의 특성 방정식을 구하면

$$\gamma^2-5\gamma+6=(\gamma-2)(\gamma-3)=0$$

이므로, 특성근은 $\gamma_1=2$, $\gamma_2=3$이 된다. 따라서 동차해는 다음과 같다.

$$y_h[n]=c_1(2)^n+c_2(3)^n$$

차분 방정식의 고전적 해법

예제 3-9

다음과 같은 차분 방정식의 동차해를 구하라.

$$y[n]+6y[n-1]+12y[n-2]+8y[n-3]=x[n]$$

풀이

이 차분 방정식의 특성 방정식을 구하면

$$\gamma^3+6\gamma^2+12\gamma+8=(\gamma+2)^3=0$$

이므로, 특성근은 $\gamma=-2$가 된다. 따라서 동차해는 다음과 같다.

$$y_h[n]=(c_1n^2+c_2n+c_3)(-2)^n$$

차분 방정식의 고전적 해법

특이해

- 시스템 외부 입력의 형태에 의해 결정되는 응답 = 강제 응답
- 시스템 고유 특성과는 무관하고 입력의 닮은 꼴
- 고전적인 차분 방정식의 해법에서 얻어지는 특이해

[표 3-4] 입력 형태에 따른 차분 방정식의 특이해

입력 형태	특이해	
$au[n]$	$cu[n]$	
$\cos(\Omega_0 n+\theta)$	$c_1\cos(\Omega_0 n+\theta)+c_2\sin(\Omega_0 n+\theta)$ $=c\cos(\Omega_0 n+\phi)$	
n^m	$c_m n^m+c_{m-1}n^{m-1}+\cdots+c_1 n+c_0$	
r^n	$r\neq$특성근	cr^n
	$r=$특성근	cnr^n
	$r=m$ 중 특성근	$cn^m r^n$
$(a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0)r^n$	$(c_m n^m+c_{m-1}n^{m-1}+\cdots+c_1 n+c_0)r^n$	

차분 방정식의 고전적 해법

예제 3-10

[예제 3−8]의 식 (3.22)와 같은 차분 방정식에서 입력 $x[n]=(3n+5)u[n]$에 대한 특이해를 구하라.

풀이

특이해를 $y_p[n]=c_1n+c_0$라 두고, 이를 차분 방정식에 대입하면

$$\{c_1n+c_0\}-5\{c_1(n-1)+c_0\}+6\{c_1(n-2)+c_0\}$$
$$=\{3(n-1)+5\}-5\{3(n-2)+5\}$$

가 된다. 이를 정리하면 다음과 같다.

$$2c_1n-7c_1+2c_0=-12n+7$$

위 식의 양변을 비교하여 다음을 얻는다.

$$c_1=-6,\quad c_0=-17.5$$

따라서 입력 $x[n]$에 대한 차분 방정식의 특이해는 다음과 같다.

$$y_p[n]=-6n-17.5$$

차분 방정식의 고전적 해법

완전해

- $n \leq 0$에서의 초기(경계) 조건을 사용하여 동차해의 계수를 결정
- 입력에 의한 응답 성분 포함

→ 입력 인가 이후의 초기 조건이 필요

예제 3-11

[예제 3-8]의 차분 방정식에서 입력이 $x[n]=(3n+5)u[n]$, 초기 조건이 $y[-1]=2$, $y[-2]=1$로 주어질 때, 완전한 해를 구하라.

풀이

주어진 차분방정식의 해는 $n \geq 0$ 에서

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=c_1(2)^n+c_2(3)^n-6n-17.5$$

차분 방정식의 고전적 해법

예제 3-11

풀이

주어진 초기 조건은 $n < 0$에서의 값 → 반복 대입법 이용해 $n \geq 0$ 에서의 초기 조건을 구함

$$y[n] = 5y[n-1] - 6y[n-2] + x[n-1] - 5x[n-2]$$

$$y[0] = 5y[-1] - 6y[-2] + x[-1] - 5x[-2] = 10 - 6 + 0 - 0 = 4$$
$$y[1] = 5y[0] - 6y[-1] + x[0] - 5x[-1] = 20 - 12 + 5 - 0 = 13$$

구한 초기 조건을 대입하면

$$y[0] = c_1(2)^0 + c_2(3)^0 - 6(0) - 17.5 = 4$$
$$y[1] = c_1(2)^1 + c_2(3)^1 - 6(1) - 17.5 = 13$$

이므로, $c_1 = 28$, $c_2 = -6.5$를 얻는다. 따라서 완전해는 다음과 같이 된다.

$$\boxed{y[n] = [\,28(2)^n - 6.5(3)^n\,] + [\,-6n - 17.5\,]}$$

차분 방정식의 고전적 해법

예제 3-11

풀이

만일 동차해의 계수를 결정할 때 초기 조건을 입력이 인가되기 이전의 값인 $y[-1]=2,\ y[-2]=1$을 사용하면 어떻게 될까? 이 초기 조건을 식 (3.23)에 대입하면

$$y[-1]=c_1(2)^{-1}+c_2(3)^{-1}-6(-1)-17.5=2$$
$$y[-2]=c_1(2)^{-2}+c_2(3)^{-2}-6(-2)-17.5=1$$

이다. 이를 c_1과 c_2에 대해 연립하여 풀면 다음을 얻는다.

$$c_1=24,\ c_2=4.5$$

이 경우 차분 방정식의 해는 다음과 같이 된다.

$$y[n]=24(2)^n+4.5(3)^n-6n-17.5$$

→ 앞에서 구한 차분 방정식의 완전해와는 전혀 다른 결과!

차분 방정식의 고전적 해법

예제 3-12

[예제 3−11]에 대해 고유 응답과 강제 응답이 영입력 응답과 영상태 응답과는 어떻게 다른지 살펴보기 위해 영입력 응답과 영상태 응답을 구하라.

풀이

영입력 응답 $y_s[n]$: 입력이 0일 때 초기 조건만으로 얻는 출력

→ 동차해에 $n<0$에서의 초기 조건을 대입

$$y_s[-1] = c_1(2)^{-1} + c_2(3)^{-1} = 2$$

$$y_s[-2] = c_1(2)^{-2} + c_2(3)^{-2} = 1$$

$$c_1 = 4, \quad c_2 = 0$$

따라서 영입력 응답은 다음과 같다.

$$y_s[n] = 4(2)^n$$

차분 방정식의 고전적 해법

예제 3-12

풀이

영상태 응답 $y_i[n]$: 초기 조건이 0일 때의 입력으로만 얻는 시스템 응답

→ $y[-1]=y[-2]=0$으로 두고 $y[0]$과 $y[1]$을 계산

$$y[0]=5y[-1]-6y[-2]+x[-1]-5x[-2]=0-0+0-0=0$$

$$y[1]=5y[0]-6y[-1]+x[0]-5x[-1]=0-0+5-0=5$$

초기 조건을 대입하면

$$y[0]=c_1(2)^0+c_2(3)^0-6(0)-17.5=0$$
$$y[1]=c_1(2)^1+c_2(3)^1-6(1)-17.5=5$$
$$c_1=24,\ \ c_2=-6.5$$

따라서 영상태 응답은 다음과 같다.

$$y_i[n]=[24(2)^n-6.5(3)^n]\ +\ [-6n-17.5]$$

∴ **완전해 :** $y[n]=y_s[n]+y_i[n]=[\,4(2)^n\,]+[\,24(2)^n-6.5(3)^n-6n-17.5\,]$

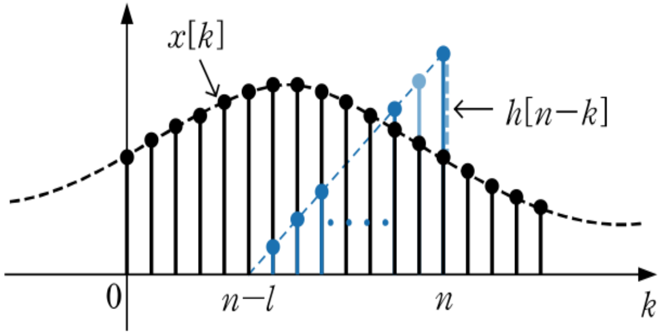
임펄스 응답의 물리적 의미

- **과거 입력 값들이 현재 출력에 기여하는 정도를 알려줌**
  - 시각 n에서의 출력을 구성하는 과거 입력들에 대한 가중치의 의미

- **임펄스 입력 인가는 새로운 초기 조건을 부여하는 동작으로 간주 가능**
  - $n > 0$에서의 응답은 외부 입력이 아닌 시스템의 자체 특성 반영

→ 시스템의 특성에 관한 정보를 임펄스 응답으로부터 알아낼 수 있다.

- **임펄스 함수는 모든 주파수 성분을 지님**
  - 임펄스 응답은 시스템의 모든 주파수에 대한 응답 특성을 보여줌



[그림 3-11] 임펄스 응답의 물리적 의미

임펄스 응답과 시스템의 특성

- **기억성 :** $h[n] = \alpha\delta[n]$이면 순시적(무기억) 시스템
  $h[n] \neq \alpha\delta[n]$이면 동적(기억) 시스템

- **인과성:** $h[n] = 0, n < 0$ 이면 인과적 시스템

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- **안정성 :** $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$이면 BIBO 안정 → 시스템 모드 $|\gamma_i| < 1$

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$$

$$\leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

임펄스 응답과 시스템의 특성

예제 3-14

[예제 2−6]에서 다음과 같은 누산기의 안정도 문제를 개념적으로 살펴보았는데, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$ 의 조건을 이용하여 안정도를 판별하라.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

풀이

시스템의 출력을 입력과 임펄스 응답의 컨벌루션으로 나타내면 다음과 같다.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

두 식을 비교하면 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$h[n-k] = \begin{cases} 1, & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

따라서 누산기의 임펄스 응답은 다음과 같이 된다.

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n \ge 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

→ 누산기는 BIBO 불안정