CHAPTER 05

주파수 영역 해석의 기초

Fundamentals of Frequency Domain Analysis

온성권
전자통신공학과

22-2학기

Contents

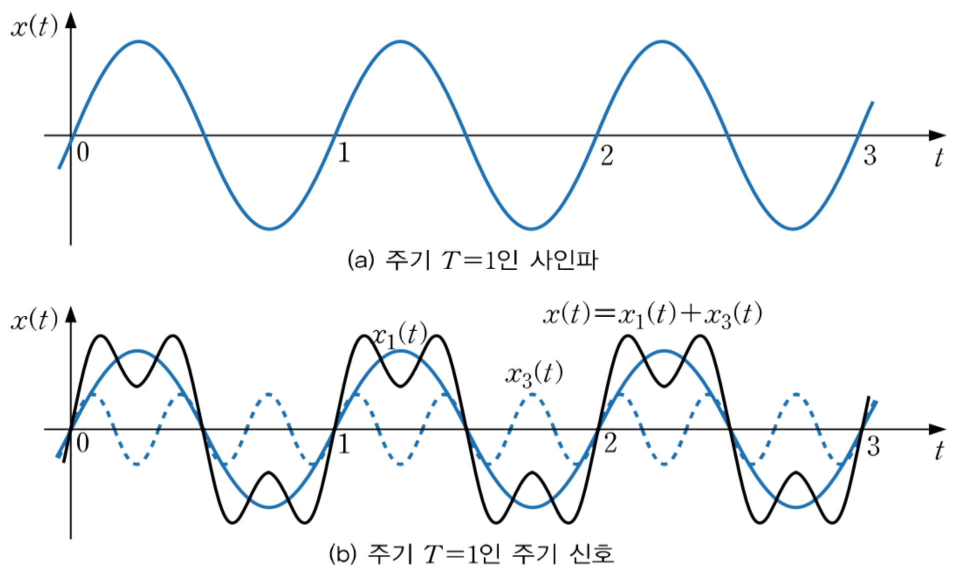
(주파수) 스펙트럼

- **(주파수) 스펙트럼**
  - 신호가 지닌 진동 특성을 하나 하나의 성분별로 나누어 늘어놓은 것
  - 신호의 주파수 별 에너지 분포의 개념

  (예) 햇빛과 프리즘

  → 신호를 시간이 아닌 주파수의 관점에서 살펴보는 것이 매우 유용하다.
  → 신호를 보다 기본적인 신호들로 쪼갤 수 있다.

  (예) 같은 주기를 갖는 두 신호



[그림 5-1] 같은 주기를 가지는 두 주기 신호

신호의 표현

신호의 표현

- 신호를 간단한 기본신호(basis)들의 일차 결합으로 표현할 수 있음

  → 신호의 표현을 구하는 것은 계수 c_i를 구하는 문제

$$x(t) = \sum_i c_i \psi_i(t)$$

- 기본신호들은 다음의 성질을 갖는 것이 바람직함

  ❶ 형태가 단순하고, 신호의 표현을 구하기 쉬워야 한다.

  ❷ 다양하고 폭넓은 신호들을 표현할 수 있어야 한다.

  ❸ 표현된 신호에 대한 시스템의 응답을 편리하게 표기할 수 있어야 한다.

  ❹ 한 주파수에 대해 오직 하나의 기본 신호만 존재(일대일 대응)해야 한다.

정현파와 (주파수) 스펙트럼

- **정현파와 (주파수) 스펙트럼**

  - 정현파는 가장 바람직한 기본 신호의 하나임

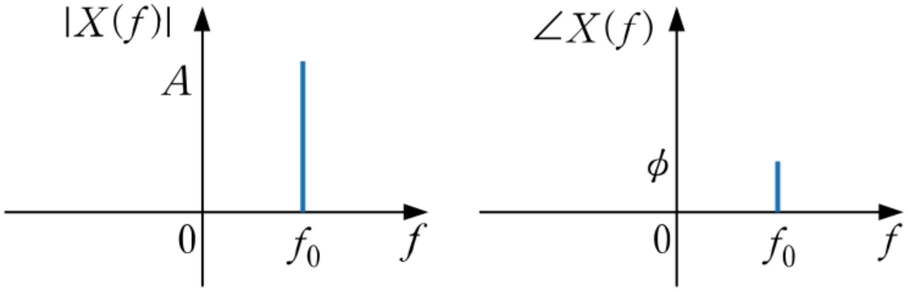
    → 오직 하나의 주파수만 가짐(4번 성질)
    → 파형이 단순하고 직교성을 지님(1번 성질)
    → 푸리에 급수/변환에 의해 광범위한 신호들 표현 가능(2번 성질)
    → 정현파 입력에 대한 출력은 그 크기와 위상만 달라짐(3번 성질)

  - **(주파수) 스펙트럼은 정현파를 주파수의 함수로 취급하여 주파수 축 상에 그 진폭과 위상을 나타낸 것**

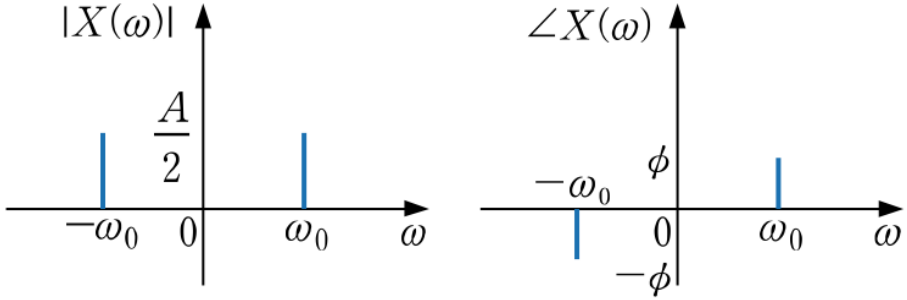
$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$x(t) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j2\pi f_0 t}$$

정현파와 (주파수) 스펙트럼



(a) 정현파의 진폭 및 위상 스펙트럼



(b) 복소 정현파의 진폭 및 위상 스펙트럼

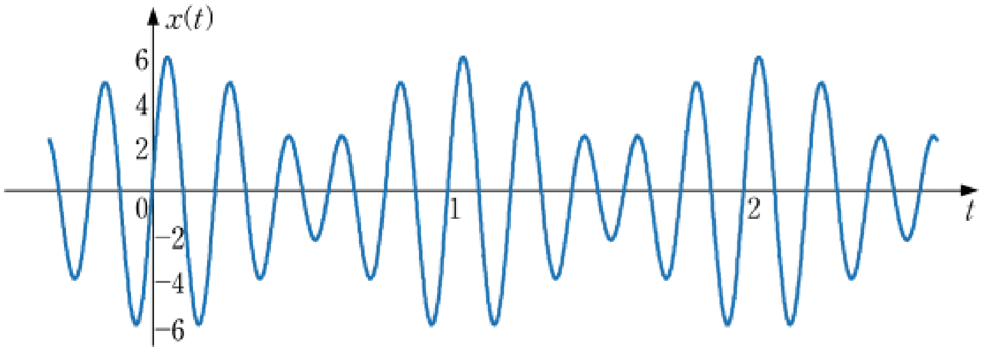
[그림 5-2] **정현파의 스펙트럼 표현**

정현파와 (주파수) 스펙트럼

예제 5-1

[그림 5-3]의 신호 $x(t)$는 다음과 같이 주파수가 다른 두 개의 정현파를 더해 얻은 것이다. 이 신호의 스펙트럼을 그려라.

$$x(t) = 2\cos(8\pi t - 72^\circ) + 4\cos(10\pi t - 90^\circ)$$



[그림 5-3] [예제 5-1]의 신호 $x(t)$

주기 신호와 푸리에 급수

- **푸리에 급수 : 주기 신호($x(t) = x(t+T)$)에 대한 주파수 영역 표현**

  - 주기 신호를 직교함수 기저((복소) 정현파)로 표현한 것

    → $\{\sin k\omega_0 t,\ \cos k\omega_0 t\}$, $\{e^{j\omega_0 t}\}$에 의해 시간 신호를 주파수와 연관시킴

  - 무한 급수 형태가 되므로 수렴 조건에 관한 고려가 반드시 필요함

  - 주기 신호는 같은 주기를 갖는 정현파(기본파)와 이 정현파의 정수배 주파수를 갖는 정현파(고조파)들의 합으로 표현 가능

$$x(t) = \text{직류}(DC) + \text{기본파}(\cos\text{항} + \sin\text{항}) + \text{고조파들}(\cos\text{항} + \sin\text{항})$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

주기 신호와 푸리에 급수

기본파, 고조파, 푸리에 급수

- 기본파 : 주기 신호와 같은 주기를 갖는 정현파
- 고조파 : 기본파의 주파수(기본 주파수)의 정수배 주파수를 갖는 정현파
- 푸리에 급수 : 주기 신호를 기본파와 고조파들의 합으로 나타낸 것

푸리에 급수의 세가지 표현

- **푸리에 급수 표현**
  - ▶ 삼각함수형

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t$$

푸리에 급수의 세가지 표현

푸리에 급수 표현

▶ 간결형 삼각함수형

- 삼각함수 합성을 이용하여 삼각함수형을 변형

$$a_k\cos k\omega_0 t + b_k\sin k\omega_0 t$$

$$= \sqrt{a_k^2+b_k^2}\left(\frac{a_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}\cos k\omega_0 t + \frac{b_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}\sin k\omega_0 t\right)$$

$$= \sqrt{a_k^2+b_k^2}\,(\cos(-\phi_k)\cos k\omega_0 t + \sin(-\phi_k)\sin k\omega_0 t)$$

$$= c_k\cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

$$\boxed{x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\cos(k\omega_0 t + \phi_k)}$$

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_k = \sqrt{a_k^2+b_k^2}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \\ \phi_k = -\tan^{-1}\dfrac{b_k}{a_k}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

푸리에 급수의 세가지 표현

푸리에 급수 표현

▶ 지수함수형

- Euler 공식을 이용, 삼각함수형의 삼각함수를 복소 지수함수로 치환

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \frac{e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}}{2} + b_k \frac{e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}}{2j}\right)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega_0 t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega_0 t}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$X_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - jb_k), & k > 0 \\ a_0, & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_k + jb_k), & k < 0 \end{cases}$$

푸리에 급수의 세가지 표현

[표 5-1] 주기 신호의 푸리에 급수 표현

형식	푸리에 급수	계수 계산	변환 공식
삼각함수	$x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin k\omega_0 t$	$a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt$ $a_k=\frac{2}{T}\int_T x(t)\cos k\omega_0 t\,dt$ $b_k=\frac{2}{T}\int_T x(t)\sin k\omega_0 t\,dt$	$a_0=c_0=X_0$ $a_k=c_k\cos\phi_k=X_k+X_{-k}$ $b_k=-c_k\sin\phi_k=j(X_k-X_{-k})$
간결형 삼각함수	$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cos(k\omega_0 t+\phi_k)$	$c_0=a_0,\ \ \phi_0=0$ $c_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$ $\phi_k=-\tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$	$c_0=X_0$ $c_k=2\lvert X_k\rvert$ $\phi_k=\angle X_k$
지수함수	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_k e^{jk\omega_0 t}$	$X_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$	$X_0=a_0=c_0$ $X_k=\frac{c_k}{2}e^{j\phi_k}=\frac{1}{2}(a_k-jb_k)$ $X_{-k}=X_k^*$

푸리에 급수의 수렴 조건

푸리에 급수의 수렴 조건 ⇒ Dirichlet 조건

❶ 신호의 한 주기 내에서 $x(t)$는 절대 적분 가능[absolutely integrable] 해야 한다.

$$\int_T |x(t)|\, dt < \infty$$

❷ 신호의 한 주기 내에 존재하는 극대 · 극소점의 수는 유한해야 한다.

❸ 신호의 한 주기 내에 존재하는 불연속점의 수는 유한해야 한다.

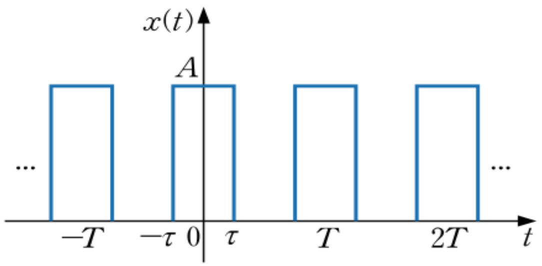
푸리에 급수의 수렴 조건

예제 5-2

[그림 5-5]의 사각 펄스 주기 신호에 대해 다음의 푸리에 급수 표현을 구하라.

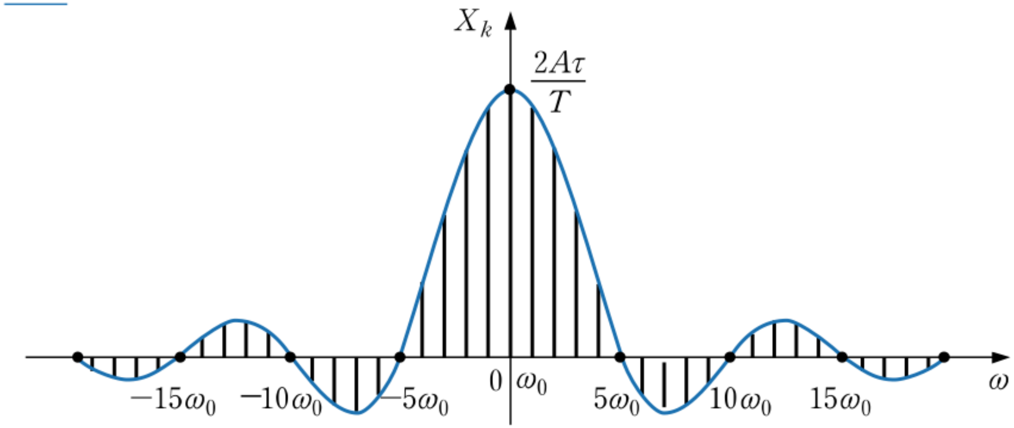
(a) 삼각함수 형식의 푸리에 급수

(b) 지수함수 형식의 푸리에 급수



[그림 5-5] [예제 5-2]의 사각 펄스 주기 신호

풀이

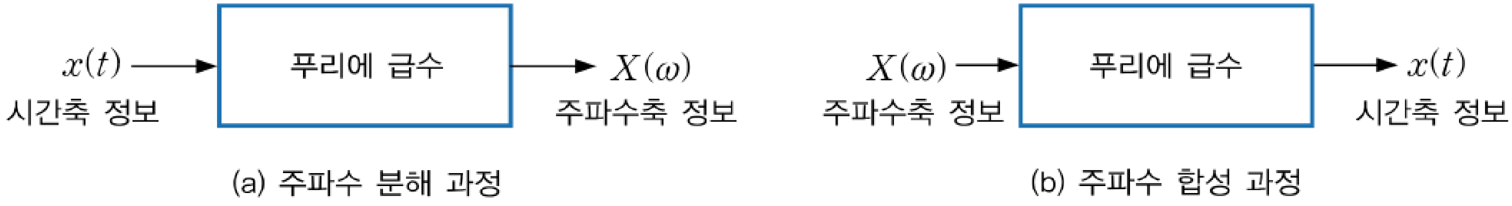


[그림 5-6] 사각 펄스 주기 신호의 푸리에 계수(스펙트럼) $\left(\tau = \frac{T}{5}\right)$

푸리에 급수와 스펙트럼

푸리에 급수와 스펙트럼

- 주기 신호의 진폭과 위상에 관한 주파수 정보를 표현
- **진폭스펙트럼 :** 주파수 ω에 대해 진폭(c_k 또는$|X_k|$)을 표시한 그래프
- **위상스펙트럼 :** 주파수 ω에 대해 위상(θ_k 또는 $\angle X_k$)을 표시한 그래프
- **주파수 분해 :** 푸리에 급수에 의해 시간 신호로부터 스펙트럼을 구하는 과정
- **주파수 합성 :** 스펙트럼으로부터 푸리에 급수에 의해 정현파들을 합하여 주기 신호 를 만들어내는(복원하는) 과정

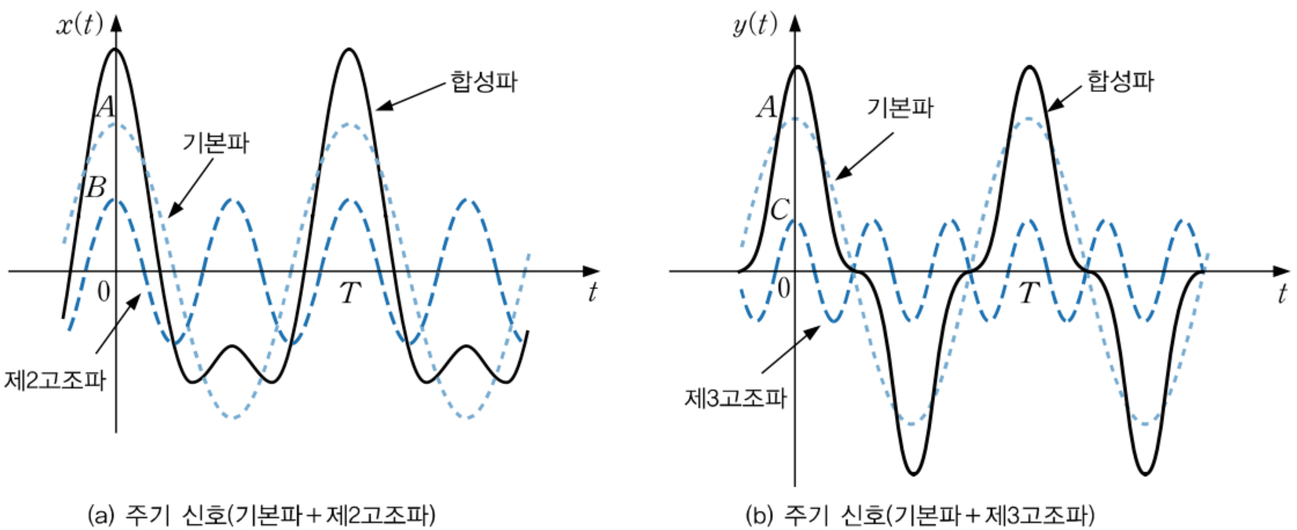


[그림 5-7] 푸리에 급수에 의한 주파수 분해 및 합성

푸리에 급수와 스펙트럼

예제 5-3

[그림 5-8]의 두 주기 신호 $x(t)$와 $y(t)$의 스펙트럼을 구하라.



[그림 5-8] [예제 5-3]의 주기 신호

푸리에 급수와 스펙트럼

진폭스펙트럼의 의미와 역할

- 신호가 갖는 다양한 주파수 성분의 양(정현파의 진폭)을 표시
- 파형의 시간적 변화가 완만한 신호는 진폭 스펙트럼의 감쇠가 급격함

→ 고조파의 기여도가 약함
→ 조파합성시 적은 개수의 항만으로도 충분히 근사화됨

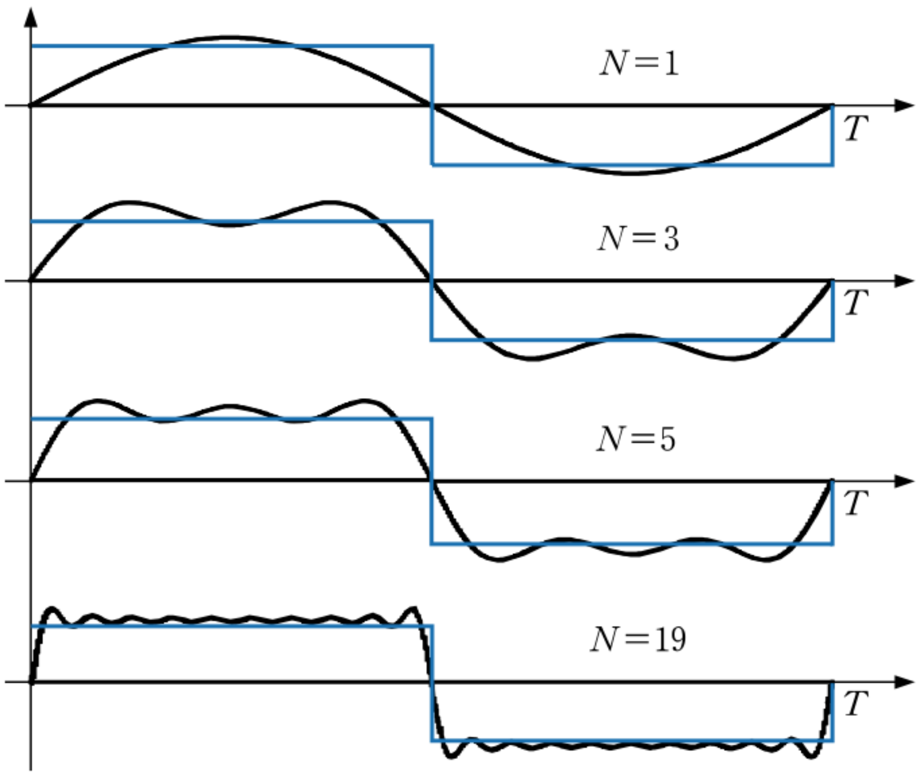
- 시간적으로 급격히 변화하는 신호는 진폭 스펙트럼의 감쇠가 완만함

→ 고조파의 기여도가 큼
→ 조파합성시 많은 개수의 항을 이용해야만 충분히 근사화됨

푸리에 급수와 스펙트럼

- **Gibbs 현상**

  - 조파합성시 고조파의 수를 아무리 늘려도 불연속점 근처에서 항상 불연속 크기의 약 9%의 오버슈트가 생기며, 고조파 수에 비례하여 진동도 더 빨라지는 현상



[그림 5-10] 주파수 합성에 의한 사각 펄스 신호의 근사화

푸리에 급수와 스펙트럼

- **위상스펙트럼의 역할**

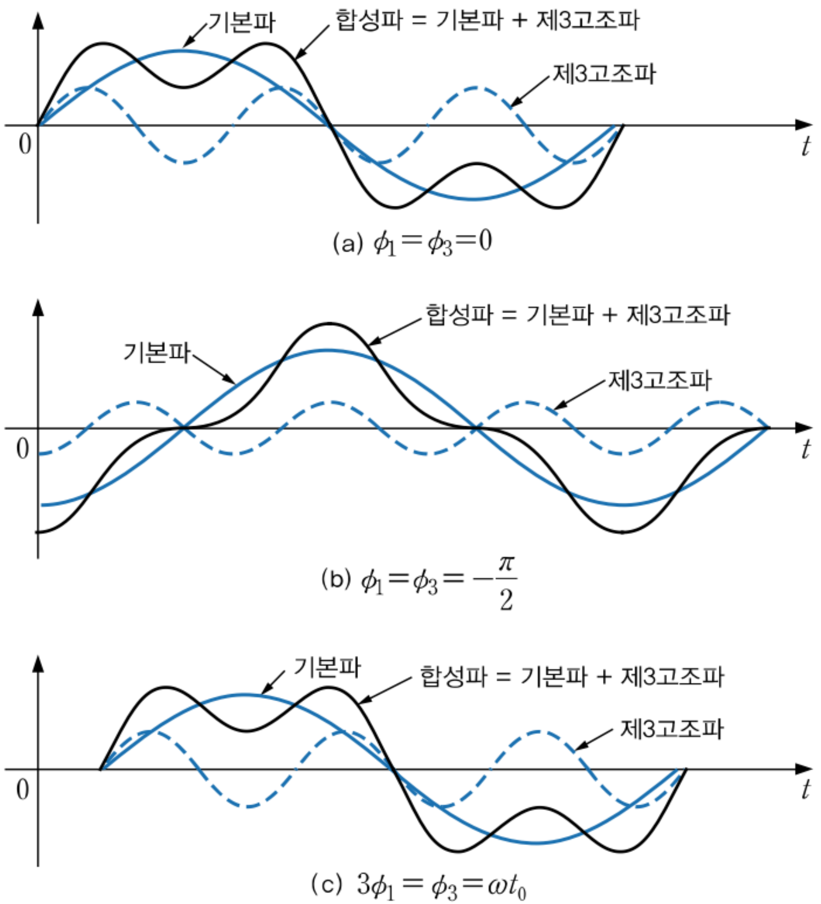
  - 진폭스펙트럼이 같아도 위상스펙트럼이 달라지면 신호 파형이 달라짐

  - 모든 주파수 성분이 시간축상을 같은 시간 간격으로 이동해야만 신호의 파형이 그대로 유지됨
  → 각 고조파가 주파수에 비례하는 위상각만큼 달라지면 됨(선형위상)

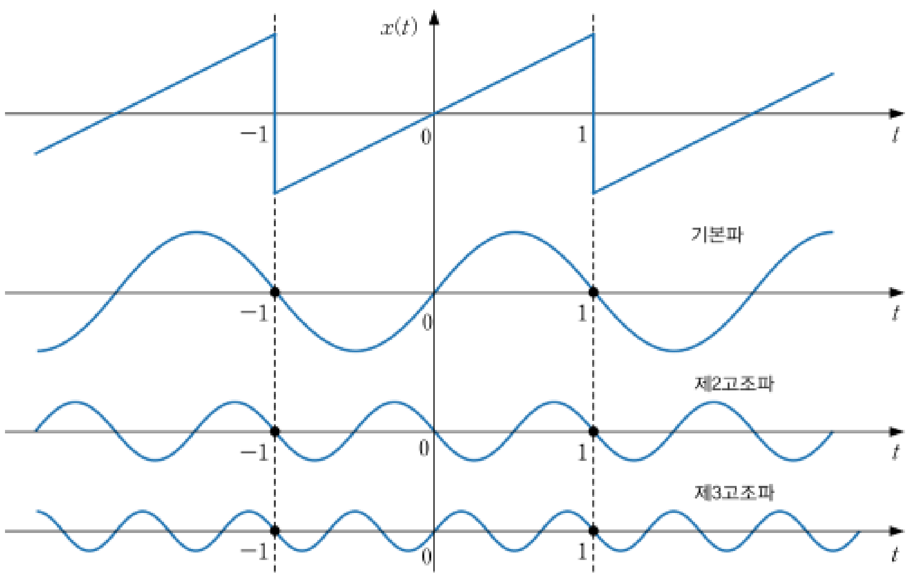
  - 점프 불연속점과 같은 급격한 변화가 있는 신호의 경우 불연속점에서 모든 고조파 성분이 동일한 부호 변화를 보이며 0점을 통과하도록 위상이 일치해야 함

푸리에 급수와 스펙트럼

위상스펙트럼의 영향



[그림 5-11] 신호 파형에 대한 위상 스펙트럼의 영향



[그림 5-12] 불연속점과 위상 스펙트럼의 영향

푸리에 급수의 주요 성질

- **신호를 시간 축에 대해 상하 이동시킬 경우(DC 오프셋의 변화)**

  - DC 항만 달라짐 & 기본파 및 고조파의 진폭 및 위상은 불변

$$x'(t) = x(t) + \alpha = \alpha + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k)$$

- **신호를 시간 축에 대해 좌우 이동시킬 경우 (시간 선행 또는 시간 지연)**

  - 진폭 스펙트럼은 불변 & 위상 스펙트럼은 시간이동 값에 비례해 변화

$$x'(t) = x(t - t_0) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 (t - t_0) + \phi_k)$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k - k\omega_0 t_0)$$

푸리에 급수의 주요 성질

파스발(Parseval) 정리

- 시간영역에서 구한 신호 전력 = 주파수영역에서 구한 신호 전력
- 푸리에 급수에서 서로 다른 주파수 성분 간에는 전력을 만들지 않는다!

$$P = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_T \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m^* e^{-jm\omega_0 t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_T \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_k X_m^* e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k X_k^* T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2$$

$$P = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c_k}{\sqrt{2}}\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k^{\,2} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

푸리에 급수의 주요 성질

예제 5-5

다음과 같이 푸리에 급수로 나타낸 주기 신호 $x(t)$의 전력을 계산하라.

$$x(t) = 4 + 3\sqrt{2}\cos(2\pi t) + 2\sqrt{2}\cos(4\pi t) + \sqrt{2}\cos(6\pi t)$$

푸리에 변환의 개요

- **푸리에 변환 : 비주기 신호에 대한 주파수 영역 표현**

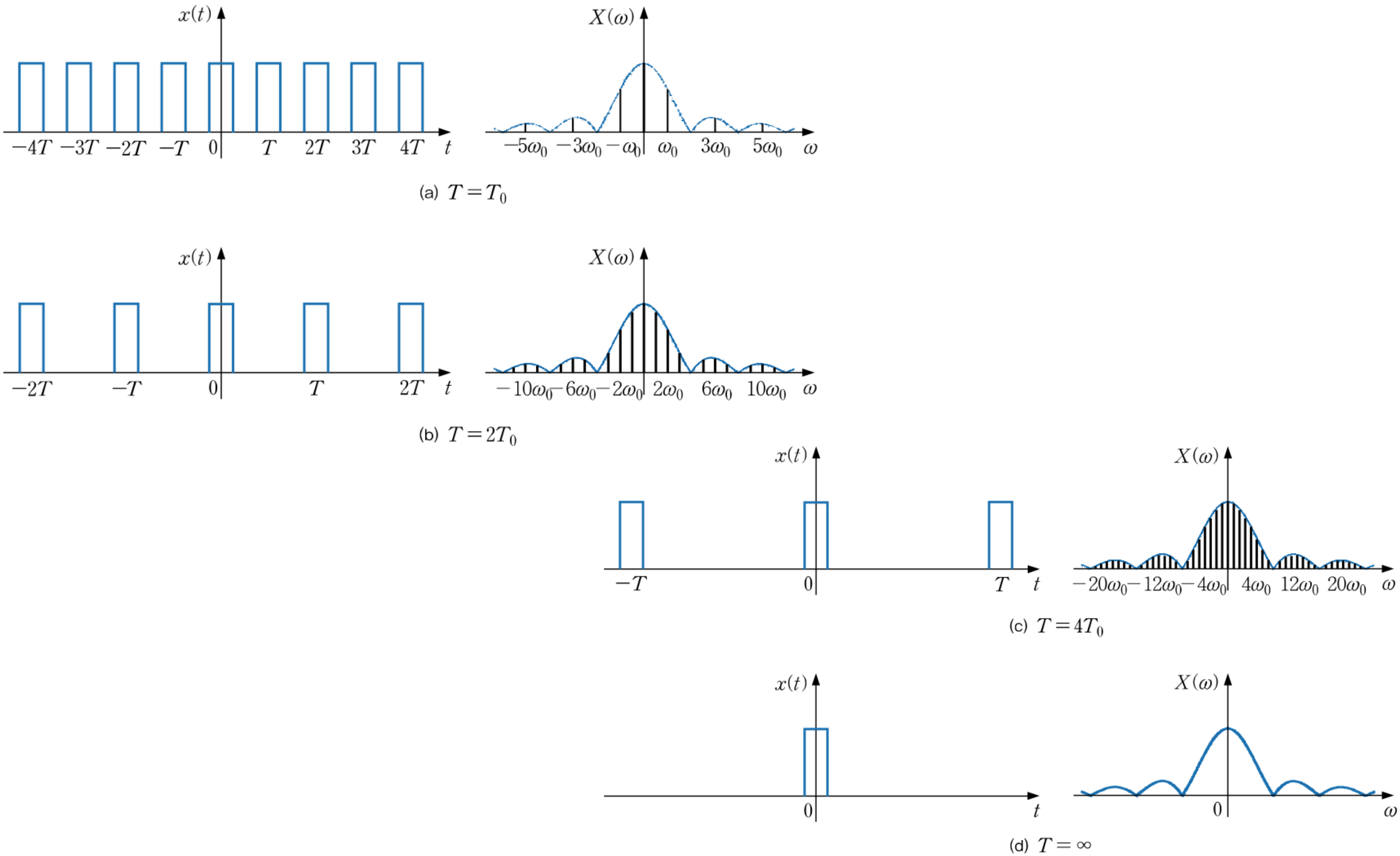
  - 비주기 신호를 주기 $T=\infty$인 주기 신호로 취급 → 푸리에 급수 확장

$$x(t)=\lim_{T\to\infty} x_T(t)$$

  - 주기 T 가 커질수록 스펙트럼은 소밀해짐 → $T=\infty$ 면 연속 파형이 됨

    ⇒ 푸리에 표현은 급수 전개에서 적분 형태로 바뀜 → 푸리에 변환

푸리에 변환의 개요



[그림 5-14] 주기에 따른 스펙트럼의 변화

푸리에 변환의 개요

푸리에 변환의 유도

- 주기 신호의 푸리에 급수 전개에서

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \right) e^{jk\omega_0 t}$$

- $T \to \infty, \omega_0 \to d\omega, n\omega_0 \to \omega, \sum \to \int$ 로 치환하면

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt \right] e^{j\omega t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt \right] e^{j\omega t}\, d\omega$$

푸리에 변환의 개요

푸리에 변환의 정의

- 비주기 신호를 연속적인 주파수를 갖는 복소 정현파 $e^{j\omega t}$의 성분별로 표시한 것

푸리에 변환 : $$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

역 푸리에 변환 : $$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t}\, d\omega$$

푸리에 변환의 개요

푸리에 변환의 수렴조건

- 비주기 신호 대상이므로 Dirichlet 조건에서 주기성이 삭제되어 바뀜

❶ 전 시간 구간에 대해 $x(t)$는 절대 적분 가능해야 한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$$

❷ 어떤 유한한 시간 구간에서 신호의 극대·극소점의 수는 유한해야 한다.

❸ 어떤 유한한 시간 구간에서 신호의 불연속점의 수는 유한해야 한다.

- 에너지 신호는 푸리에 변환의 수렴 조건 만족함
- 전력신호(예 : 계단신호, 주기신호)는 푸리에 변환 수렴 조건 만족 않음
  - → 특별히 푸리에 변환이 존재하는 것으로 취급
  - → 전력 신호의 푸리에 변환은 주파수 영역에서 임펄스 함수를 포함

푸리에 변환의 개요

예제 5-6

주파수 스펙트럼이 임펄스로 표현되는 $X(\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$의 시간 신호 $x(t)$를 구하여 푸리에 변환쌍으로 나타내라.

풀이

임펄스 함수의 체거르기 성질에 의해

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}\,d\omega=e^{j\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

정현파에 대한 푸리에 변환쌍

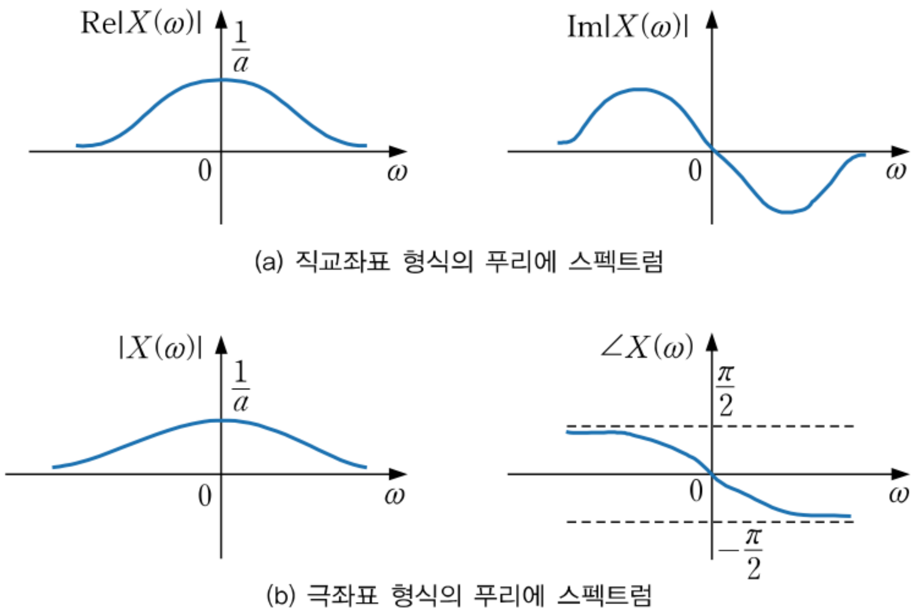
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} &= \mathcal{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} \\ &= \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \cos\omega_0 t \Leftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

푸리에 변환의 개요

예제 5-7

실수 지수 신호 $x(t)=e^{-at}u(t)$의 푸리에 변환을 구하여 푸리에 변환쌍으로 나타내라.

풀이



[그림 5-15] 실수 지수 신호와 푸리에 스펙트럼

⇒ 실수신호 스펙트럼 :

실수부 우함수대칭,
허수부 기함수대칭
진폭스펙트럼 우함수대칭,
위상스펙트럼 기함수 대칭

주기 신호의 푸리에 변환

주기 신호의 푸리에 변환

- X_k는 $X(\omega)$를 $\frac{1}{T}$배하여 고조파 주파수 에서 샘플링한 값
- $X_T(\omega)$ 는 $X(\omega)$ 를 ω_0배하여 고조파 수파수 에서 임펄스 샘플링한 것

$$X_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} \right) e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{jk\omega_0 t}\right) e^{-j\omega t}\, dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

주기 신호의 푸리에 변환

주기 신호의 푸리에 변환

- 그런데 $x(t) = \begin{cases} x_T(t), & -T/2 \leqq t \leqq T/2 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases}$ 이므로

$$X_k = \frac{1}{T}\int_T x_T(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}X(k\omega_0)$$

$$X_T(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\delta(\omega - k\omega_0)$$

⇒ 주기 신호 스펙트럼 : 비주기 신호의 스펙트럼을 샘플링한 이산 함수
선스펙트럼의 간격은 기본 주파수 $\boldsymbol{\omega_0}$임

푸리에 변환의 성질

- **시간-주파수 쌍대성**

  - 변환과 역변환 연산의 수식 구조가 동일

  → 시간 변수와 주파수 변수를 서로 바꾸어도 변환쌍 관계가 유효함

-푸리에 변환쌍에 $\omega \to t, t \to -\omega$로 치환하면

$$X(t) = \int_{\infty}^{-\infty} x(-\omega) e^{-jt(-\omega)} (-d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{jt(-\omega)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$$

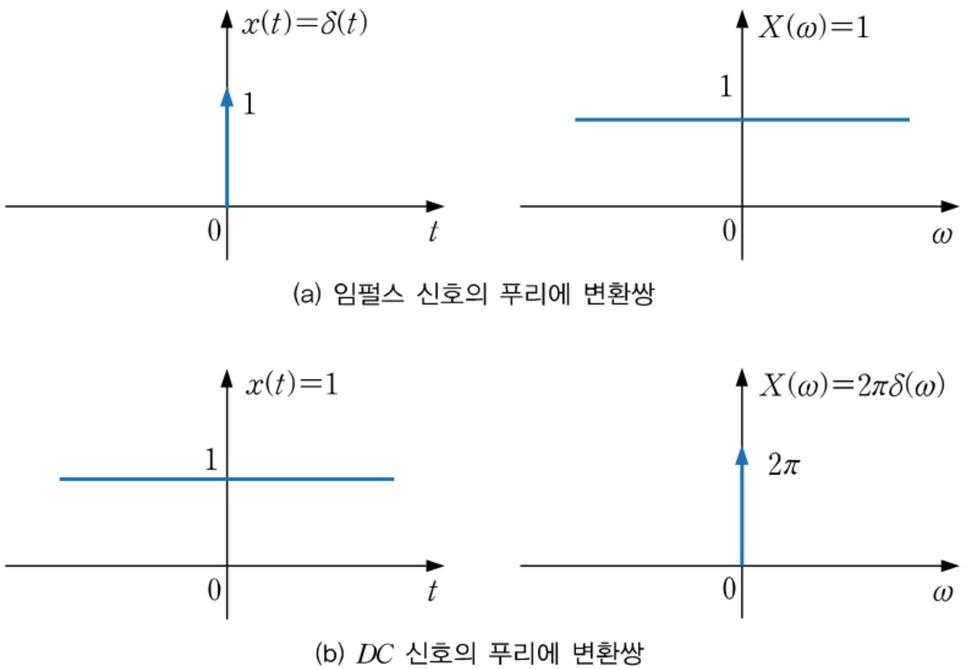
$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$이면 $X(t) \Leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$가 성립한다.

푸리에 변환의 성질

예제 5-8

임펄스와 직류의 푸리에 변환쌍을 구하여 시간-주파수 쌍대성을 확인하라.

풀이



[그림 5-17] 임펄스와 직류(DC)의 푸리에 변환쌍

푸리에 변환의 성질

- **진폭 변조**

  - 신호 $x(t)$에 정현파 $cos\,\omega_0$를 곱하여 정현파의 진폭을 변조

  → 신호의 주파수 대역 이동에 사용

$$\mathcal{F}\{x(t)\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x(t)(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})\right]e^{-j\omega t}\,dt$$

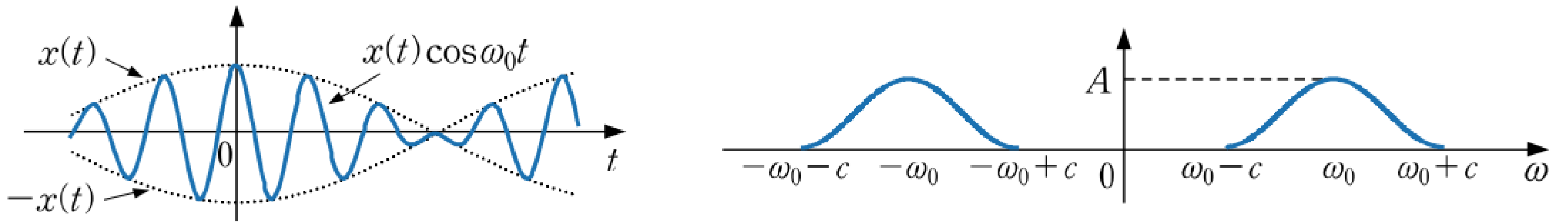
$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j(\omega+\omega_0)t}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right)$$

푸리에 변환의 성질

진폭 변조

(a) 변조할 신호와 스펙트럼



(b) 변조된 신호와 스펙트럼

[그림 5-16] 신호의 진폭 변조와 스펙트럼의 이동

푸리에 변환의 성질

[표 5–2] 푸리에 변환(FT)의 주요 성질

	성질	푸리에 변환쌍
1	선형성	$\alpha x(t)+\beta y(t) \Leftrightarrow \alpha X(\omega)+\beta Y(\omega)$
2	시간 척도 변화	$x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
3	시간 반전	$x(-t) \Leftrightarrow X(-\omega)$
4	파스발의 정리	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$
5	쌍대성	$X(t) \Leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$
6	시간 이동	$x(t-t_0) \Leftrightarrow X(\omega)e^{-jt_0\omega}$
7	주파수 이동	$x(t)e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$
8	변조	$x(t)\cos\omega_0 t \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right]$
9	시간 미분	$\frac{d^m x(t)}{dt^m} \Leftrightarrow (j\omega)^m X(\omega),\quad m=1, 2, \cdots$

푸리에 변환의 성질

10	시간 적분	$\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)d\lambda \Leftrightarrow \frac{1}{(j\omega)}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
11	주파수 미분	$-jtx(t) \Leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$
12	시간 컨벌루션	$x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(\omega)Y(\omega)$
13	주파수 컨벌루션	$x(t)y(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega)$
14	대칭성	$X^*(\omega) = X(-\omega),\quad x(t)$는 실수
		$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\omega)\}, & x(t)\text{는 실수} \\ \mathrm{Im}\{X(\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\omega)\}, & x(t)\text{는 실수} \end{cases}$
		$\begin{cases} \lvert X(\omega)\rvert = \lvert X(-\omega)\rvert, & x(t)\text{는 실수} \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega), & x(t)\text{는 실수} \end{cases}$
		$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\omega)\}, & x(t)\text{는 실수 우함수} \\ \mathrm{Im}\{X(\omega)\} = 0, & x(t)\text{는 실수 우함수} \end{cases}$
		$\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(\omega)\} = 0, & x(t)\text{는 실수 기함수} \\ \mathrm{Im}\{X(\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\omega)\}, & x(t)\text{는 실수 기함수} \end{cases}$

푸리에 변환의 성질

예제 5-9

사각 펄스 신호 $p_\tau(t)$ 의 푸리에 변환쌍이 다음과 같이 주어졌다.

$$p_\tau(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \dfrac{\tau}{2} \\ 0, & \text{그 외} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \tau \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

이때 다음 신호들에 대해 푸리에 변환을 직접 계산하지 말고, 위의 푸리에 변환쌍과 푸리에 변환의 성질을 적용하여 구하라.