CHAPTER 02

이산 신호와 시스템

Discrete Signal and System

온성권
전자통신공학과

23-2학기

Contents

2.1 Discrete Signal - 이산 신호

2.2 Basis of Discrete Signal - 기본 이산 신호

2.3 Basic Arithmetic for Discrete Signal - 이산 신호에 대한 기본 연산

2.4 Discrete System - 이산 시스템

2.5 Classifications of Discrete System - 이산 시스템의 분류

Definition of Discrete Signal - 이산 신호의 정의

- **Discrete Signal - 이산 신호**

  - 관심의 대상이 되는 값(숫자)들을 순서대로 늘어놓은 수열

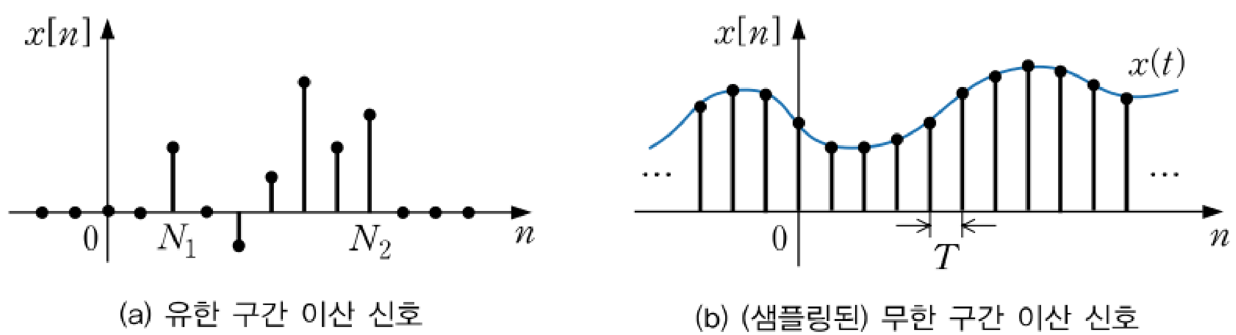
    (예) {… 0.9, −0.2, 1.0, 2.1, 0.5, −1.3, 2.8 …}

    $\rightarrow\ x[-2]=0.9,\ x[-1]=-0.2,\ x[0]=1.0,\ x[1]=2.1,\ x[2]=0.5,\ \cdots$

  - 이산 신호의 Sample(샘플) : $x[0],\ x[1],\ \cdots$

  - Continuous(연속) 신호의 샘플링에 의한 이산 신호:

$$x[n]=x(t)|_{t=nT}=x(nT), \qquad n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$$



[그림 2-1] 두 종류의 이산 신호

Finite/Infinite duration - 유한 구간 및 무한 구간 이산 신호

- **이산 신호의 길이**
  - 신호를 이루는 샘플의 개수 N

$$x[n]=0, \quad n<N_1,\ n>N_2 \quad \rightarrow \quad N=N_2-N_1+1$$

- **Finite duration/length(유한 구간) 이산 신호**
  - 유한한 개수의 샘플로 이루어진 이산 신호 ([그림 2-1(a)])
  - 유한한 구간 내에서만 신호 값이 존재

- **Infinite duration/length(무한 구간) 이산 신호**
  - 무한개의 샘플로 이루어진 신호 ([그림 2-1(b)])

이산 신호의 분류

- 신호의 에너지는 신호의 특성에 따라 유한하거나 무한할 수 있다.
- **Energy Signal - 에너지 신호 :** 에너지가 유한한 신호

$$E = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

  - 전력 신호보다 더 엄격한 조건을 충족시키는 신호
  - 유한 크기 샘플들로 이루어진 유한 구간 이산 신호는 에너지 신호임
  - 무한 구간 이산 신호 중에도 에너지 신호 많이 있음
- **Power Signal - 전력 신호 :** 전력이 유한한 신호

✓ 에너지 신호도 전력 신호도 아닌 신호

: 램프 신호 $x[n] = n,\ n \geq 0$

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

  - 무한 에너지 갖는 대부분의 신호들은 전력 신호

이산 신호의 분류

예제 2-1

'다음 물음에 답하라.
(a) 다음과 같은 무한 구간 지수 신호의 전력을 구하라.

$$x[n] = \begin{cases} (0.5)^n, & n \geq 0 \\ (2)^n, & n < 0 \end{cases}$$

(b) 단위 계단 신호의 에너지와 전력을 구하라.

풀이

(a) $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} (2)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^{2n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (0.25)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (0.25)^n = \frac{0.25}{1-0.25} + \frac{1}{1-0.25} = \frac{5}{3}$ → 에너지가 유한한 에너지 신호

(b) $P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} (u[n])^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$ → 에너지가 무한
전력이 유한한 전력 신호

이산 신호의 분류

- **Periodic Signal - 주기 신호 :** 파형이 계속해서 일정하게 반복되는 신호

$$x[n+kN] = x[n], \quad k = \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots$$

- 일반적으로 전력 신호 → **한 주기 에너지는 유한, 총 에너지는 무한**
- **반대의 개념은 aperiodic signal(비주기 신호)**

- **Deterministic Signal - 확정 신호**
  : 시간에 대해 정해진 형태를 갖는 신호

  - 수식이나 표 또는 다른 규칙에 의해 명확하게 표현될 수 있는 신호

  (예) 계단 신호, 정현파, 클럭 펄스 등

- **Random Signal - 불규칙 신호**

  : 신호의 값을 예측할 수는 없지만 일정한 통계적 특성을 가지는 신호

  (예) 동전이나 주사위 이어 던지기, 반도체 열 잡음, 통신 잡음 등

Unit Impulse Signal - 단위 임펄스 신호

- **Unit Impulse Signal - 단위 임펄스 신호 $\delta[n]$**

- 단위 샘플 신호 또는 크로네커 델타(Kronecker delta) 라고도 함

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- 이산 신호는 임펄스 신호의 가중합 형태로 나타낼 수 있음

$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + \cdots + x[k]\delta[n-k] + \cdots$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

→ 임펄스 함수의 체거르기(sifting) 또는 샘플링 성질
신호 값 중에서 특정 시각(n)의 신호 값($x[n]$)만 취하는 것으로 해석

Unit Step Signal - 단위 계단 신호

- **Unit Step Signal - 단위 계단 신호 $u[n]$**

  - $n \geq 0$에서 값이 일정(=1)한 직류 신호

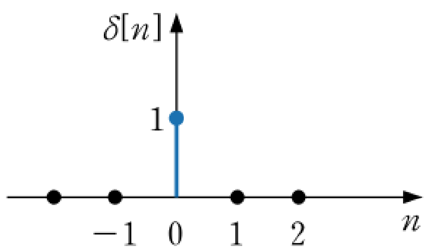
$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

  - 다른 신호에 대한 on-off 스위치 역할 → 신호의 표현에 이용

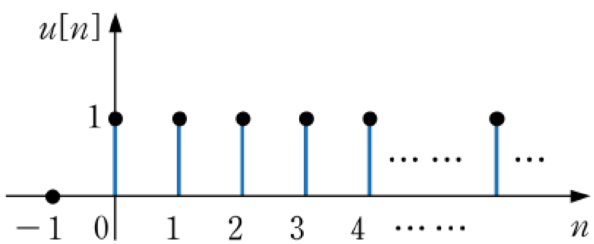
  - $\delta[n]$과 $u[n]$의 관계

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$



[그림 2-2] 이산 단위 임펄스 신호

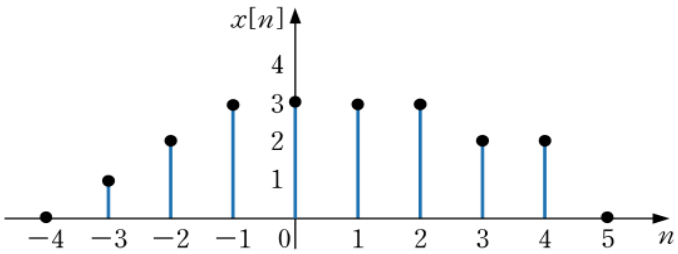


[그림 2-3] 이산 단위 계단 신호

단위 계단 신호

예제 2-3

다음 그림과 같은 이산 신호를 임펄스 신호와 계단 신호를 이용하여 나타내라.



[그림 2-4] [예제 2-3]의 이산 신호 $x[n]$

풀이

▶ 단위 임펄스 함수를 이용한 표현 $x[n]=\delta[n+3]+2\delta[n+2]+3\delta[n+1]+3\delta[n]$

$$+3\delta[n-1]+3\delta[n-2]+2\delta[n-3]+\delta[n-4]$$

▶ 단위 계단 함수를 이용한 표현

① 기울기 1인 램프 신호($-4 \le n \le -1$)　② 크기 3인 사각형 펄스($0 \le n \le 2$)

③ 크기 2인 사각형 펄스($3 \le n \le 4$)

$$x[n]=(n+4)(u[n+4]-u[n])+3(u[n]-u[n-3])+2(u[n-3]-u[n-5])$$

$$=(n+4)u[n+4]-(n+1)u[n]-u[n-3]-2u[n-5]$$

Exponential Signal - 지수 신호

- **Exponential Signal - 지수 신호**

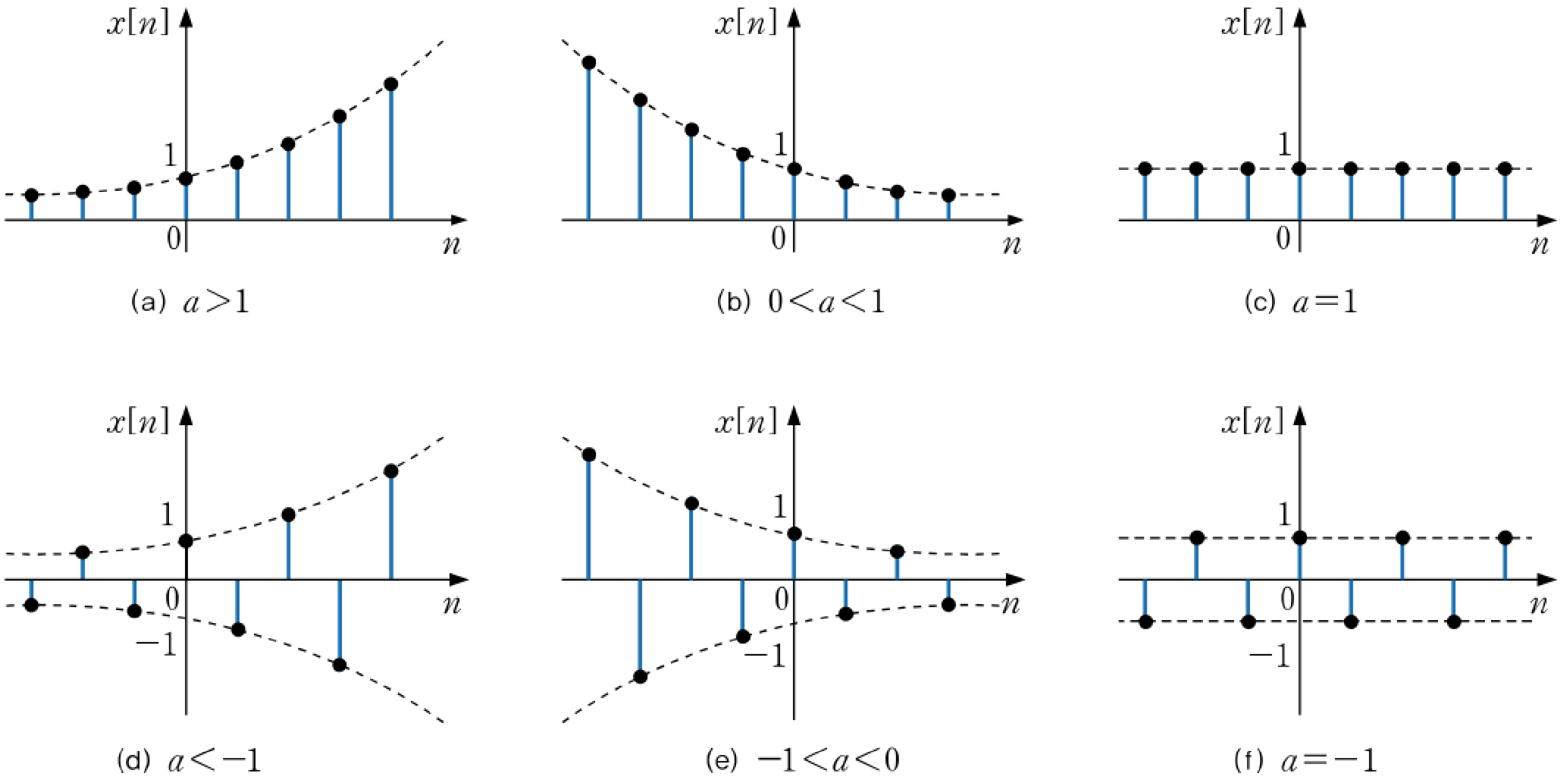
  - 밑수 a가 실수인 경우와 복소수인 경우로 구분

$$x[n] = a^n$$

  - Real(실수) 지수 함수
    : $a < 0$이면 샘플값의 부호가 번갈아가면서 바뀜

지수 신호

지수 신호



[그림 2-6] 이산 실수 지수 함수

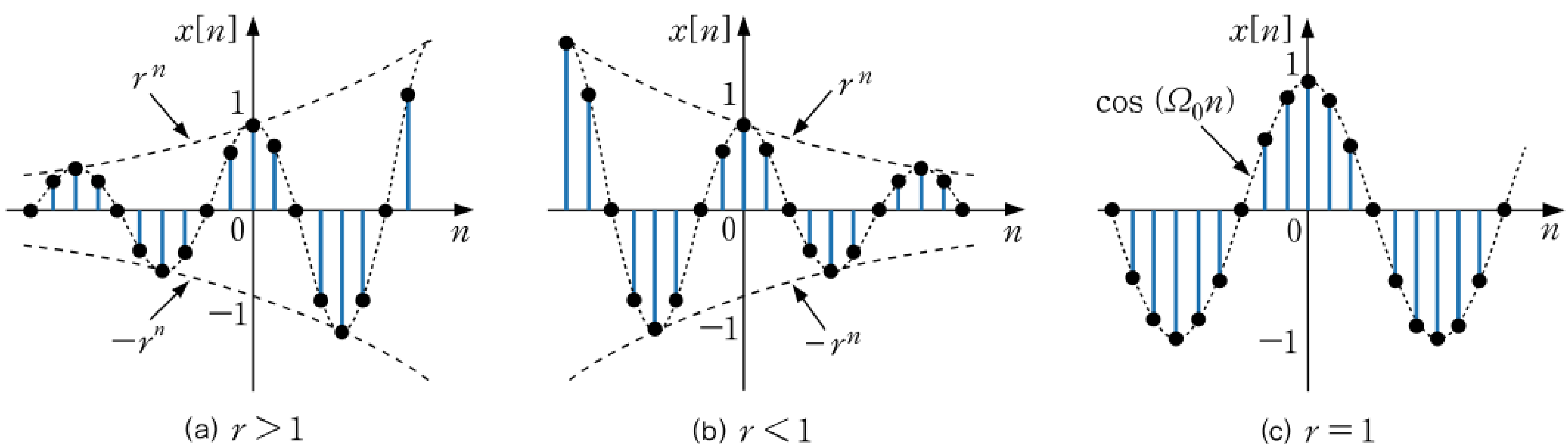
지수 신호

지수 신호

- Complex(복소) 지수 함수 : 진폭이 지수적으로 증가/감소하면서 정현적으로 진동

$$x[n] = \left(re^{j\Omega_0}\right)^n = r^n e^{j\Omega_0 n}$$

$$= r^n\left[\cos(\Omega_0 n) + j\sin(\Omega_0 n)\right]$$



[그림 2-7] 이산 복소 지수 함수의 실수부

Sinusoidal Signal - 정현파 신호

- **복소 정현파 신호 : 복소 지수 함수에서 $|a| = r = 1$인 경우**

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} = \cos(\Omega_0 n) + j\sin(\Omega_0 n)$$

- 실수 정현파는 복소 정현파로부터 실수부나 허수부를 취하여 표현

- 이산 정현파의 주기성 : **디지털 주파수가 유리수가 되어야만 주기 신호**

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = F_0 = \frac{k}{N}, \qquad k,\ N\text{은 정수}$$

- 2π의 정수배만큼 떨어진 주파수를 갖는 신호들은 구분되지 않음

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n} e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega_0 n}$$

이산 신호에 대한 기본 연산

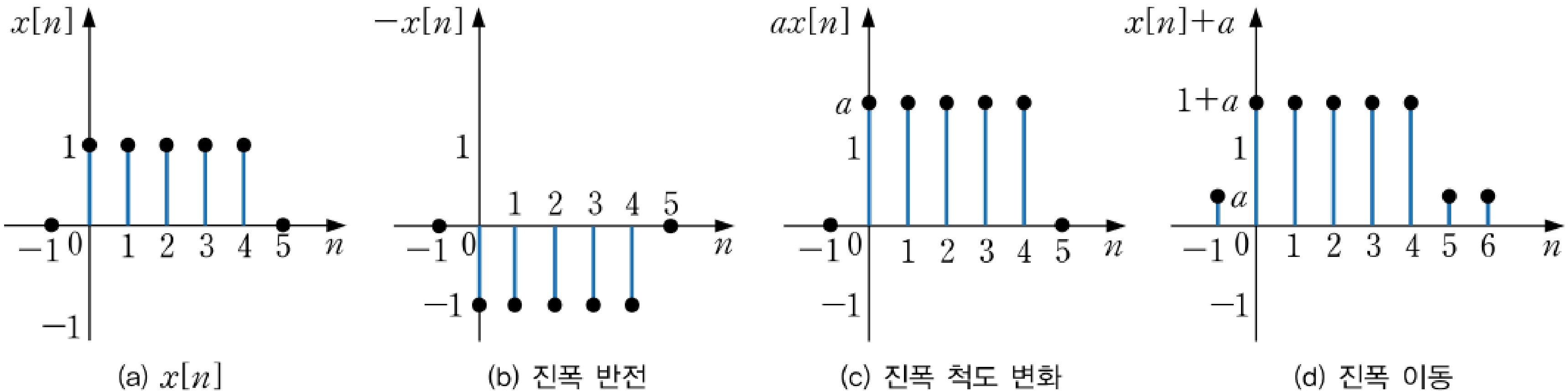
- 신호는 크기(진폭)를 갖는 시간의 함수
  → 시간과 진폭에 대한 연산이 기본

- 복잡한 신호도 단순한 신호에 기본 연산의 조합을 수행해 얻을 수 있음

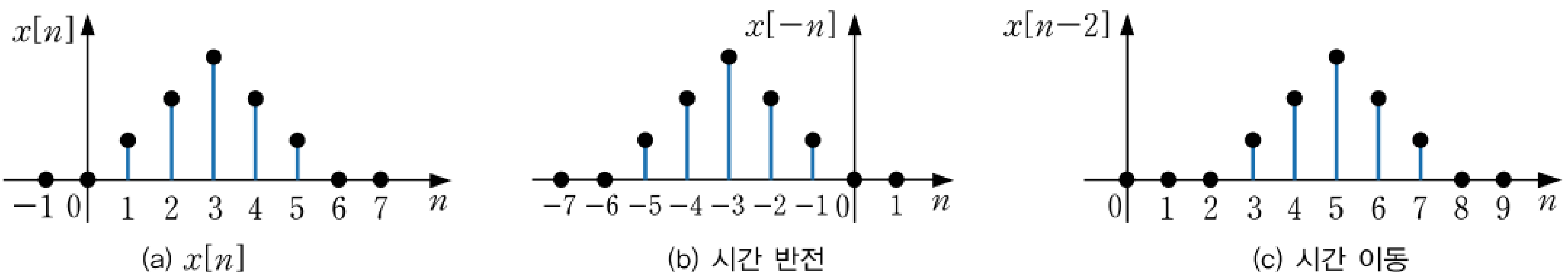
[표 2-1] 이산 신호에 대한 기본 연산

연산	표현식	시스템/기능
합	$y[n]=s[n]+x[n]$	덧셈기
곱	$y[n]=x[n]\,p[n]$	곱셈기
총합	$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	누산기
차분	$y[n]=\Delta x[n]=x[n+1]-x[n]$	전향 차분
	$y[n]=\nabla x[n]=x[n]-x[n-1]$	후향 차분
진폭 척도 변화	$y[n]=ax[n],\ a>1$	증폭기
	$y[n]=ax[n],\ a<1$	감쇠기
진폭 반전	$y[n]=-x[n]$	인버터
진폭 이동	$y[n]=x[n]+a$	오프셋
시간 척도 변화	$y[n]=x[an],\ a>1$인 정수	솎음
	$y[n]=x[an],\ \frac{1}{a}>1$인 정수	보간
시간 이동	$y[n]=x[n-n_0],\ n_0>0$	지연기
	$y[n]=x[n+n_0],\ n_0>0$	예측기
시간 반전	$y[n]=x[-n]$	반사기

이산 신호에 대한 기본 연산



[그림 2-9] 이산 신호의 진폭 변환 연산의 예



[그림 2-10] 이산 신호의 시간 반전과 시간 이동의 예

시간 척도 변화

- **시간 척도 변화 - 솎음과 보간**

$$y[n] = x[an]$$

- **Decimation(솎음)**

  - 시간축 압축(contraction)에 해당($a > 1$ 인 정수)
  - 샘플 중 a의 배수(an) 시간의 샘플만 남기고 나머지는 버리는 동작
  - 신호 샘플(데이터 또는 정보)에 대한 소실 발생

  (예) [그림 2-11(b)]

  $a = 2$ → 하나씩 건너뛰며 $x[1]$, $x[3]$, $x[5]$, ... 신호 샘플을 솎아냄

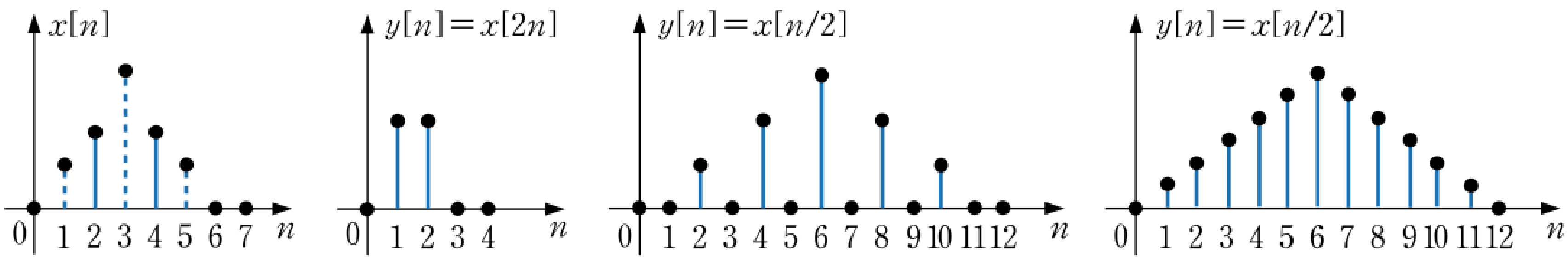
  $y[0] = x[0]$, $y[1] = x[2]$, $y[2] = x[4]$, $\cdots$

시간 척도 변화

- **Interpolation - 보간**
  - 시간축 늘이기(stretching)에 해당 ($a < 1$, $1/a$ 이 정수여야 함)
  - 원 신호 샘플 사이에 새로운 샘플을 끼워 넣는 동작
  - 끼워 넣어야 할 샘플에 대한 정보 없음
    → 신호를 크게 왜곡하지 않는 범위 내에서 적당한 값을 선택
    → 0을 끼워 넣거나 앞뒤 샘플의 평균으로 대체하는 것이 일반적임

  (예) [그림 2-11(c), (d)]
  $\boldsymbol{a = 1/2}$ → 원 신호 샘플 $\boldsymbol{x}[1]$, $\boldsymbol{x}[2]$, $\boldsymbol{x}[3]$, ... 사이에 샘플을 끼워 넣음

  $y[0] = x[0],\ y[2] = x[1],\ y[4] = x[2],\ \cdots$



(a) $x[n]$ (b) 솎음 (c) 보간(0 삽입) (d) 보간(선형 보간)

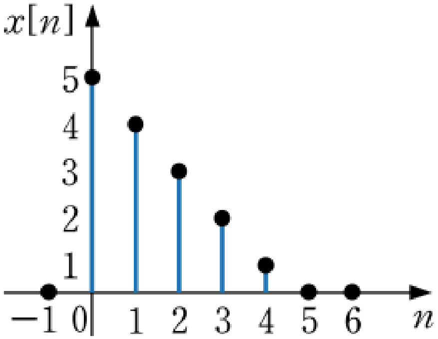
[그림 2-11] 이산 신호의 시간 척도 변화의 예 – 솎음과 보간

시간 척도 변화

예제 2-4

[그림 2-12]의 $x[n]$에 대해 다음을 구하라.

(a) $y[n] = x[2n-4]$를 그려라.



[그림 2-12] [예제 2-4]의 이산 신호 $x[n]$

이산 시스템

이산 시스템

- 이산 신호(입력)를 받아들여 다른 이산 신호(출력)를 만들어내는 장치
- 이산 시스템 표현

→ 블록선도를 이용 시스템 구성을 시각적으로 묘사

→ 시스템 동작 규칙을 정형화하여 수식으로 표현

이산 시스템의 차분 방정식 표현

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_p y[n-p] = b_0 x[n] + \cdots + b_q x[n-q]$$

Discrete System - 이산 시스템

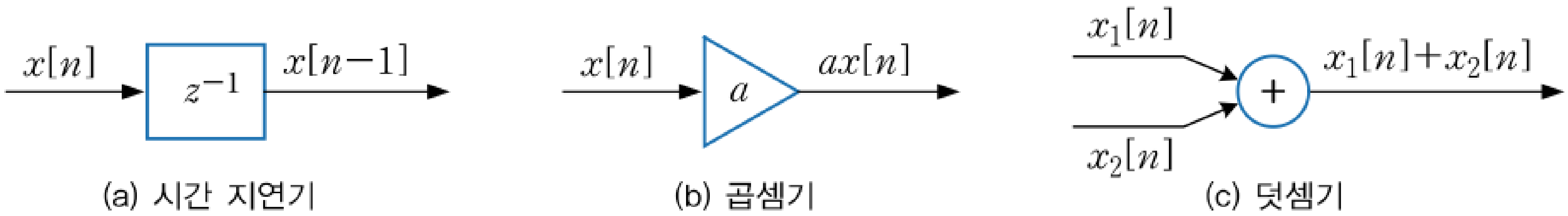
차분 방정식으로 표현된 이산 시스템의 블록 선도

- 시간 지연기, 곱셈기, 덧셈기로 이산 시스템을 구성할 수 있음

▶**시간 지연기** : 입력 신호를 한 스텝 지연시키는 요소 $y[n] = x[n-1]$

▶**곱셈기** : 신호에 상수 값을 곱하는 요소 $y[n] = ax[n]$

▶**덧셈기** : 신호를 더해 다른 신호를 만드는 요소 $y[n] = x_1[n]+x_2[n]$



[그림 2-15] 이산 시스템의 기본 구성 요소

Discrete System - 이산 시스템

- **차분 방정식으로 표현된 이산 시스템의 블록 선도**

  - 기본적으로 탭부 지연기열(tapped delay line) 구조를 이루고 있음

  - 출력을 형성하는 항들의 형태에 따라 3가지 경우로 구분 가능

▶**이동평균(MA) 모델 :** 출력이 입력 신호의 이동 평균

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_q x[n-q]$$

▶**자기 회귀(AR) 모델 :** 출력이 과거 출력 신호의 자기 회귀항

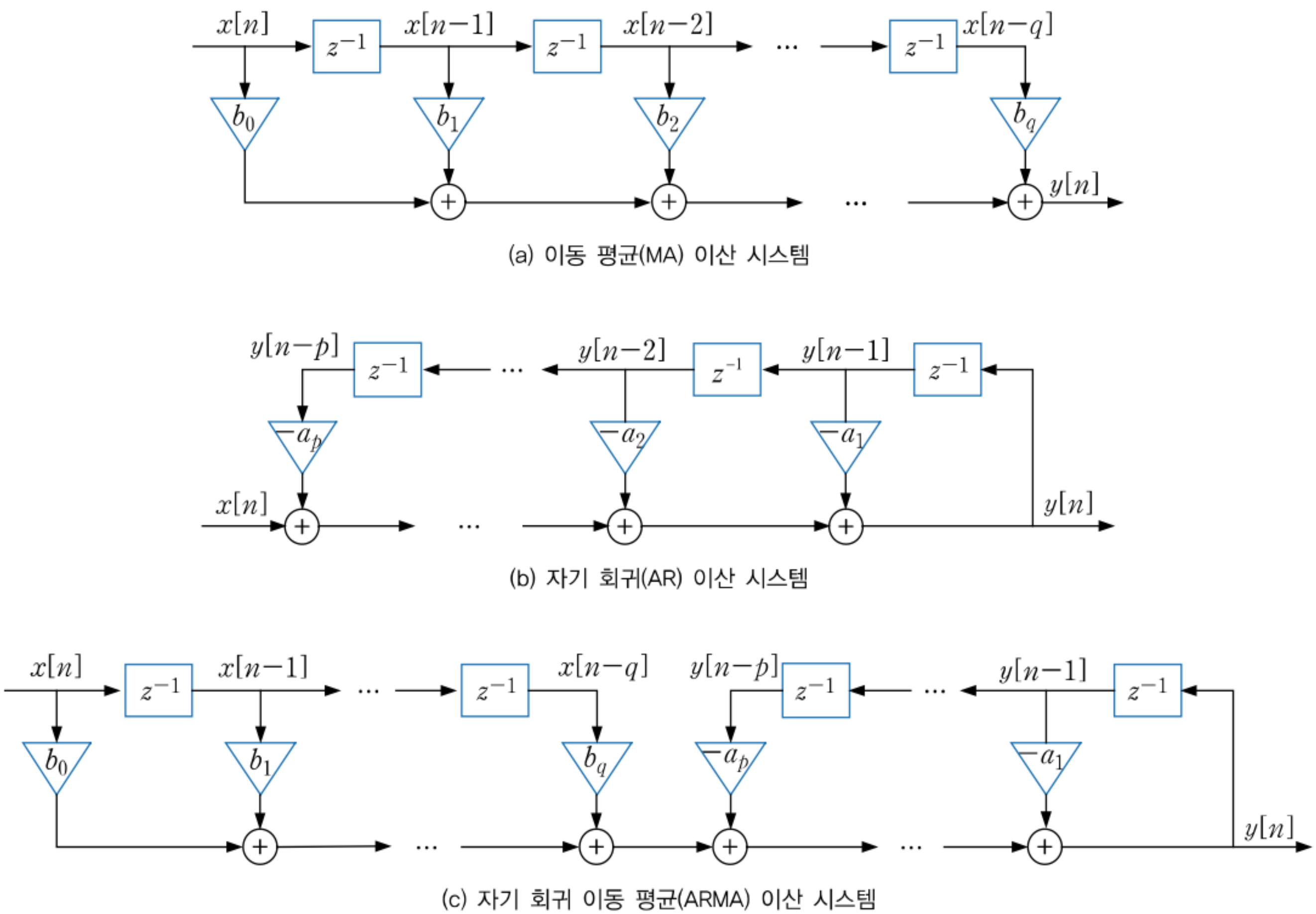
$$y[n] = -a_1 y[n-1] - \cdots - a_p y[n-p] + x[n]$$

▶**자기 회귀 이동 평균(ARMA) 모델 :** AR + MA

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_p y[n-p] = b_0 x[n] + \cdots + b_q x[n-q]$$

Discrete System - 이산 시스템

차분 방정식으로 표현된 이산 시스템의 블록 선도

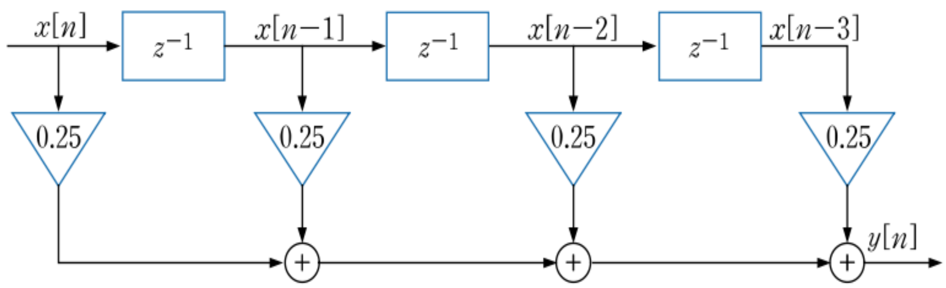


[그림 2-16] 차분 방정식으로 표현된 이산 시스템의 블록선도

Discrete System - 이산 시스템

예제 2-5

[그림 2-17]의 비순환 구조(MA) 이산 시스템을 순환 구조로 바꾸어 표현하라.



[그림 2-17] [예제 2-5]의 비순환 구조(MA) 이산 시스템

풀이

▶ 비순환 구조 : $y[n] = \frac{1}{4}(x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3])$

▶ 순환 구조 : $y[n] = \frac{1}{4}\{(x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4]) + x[n] - x[n-4]\}$

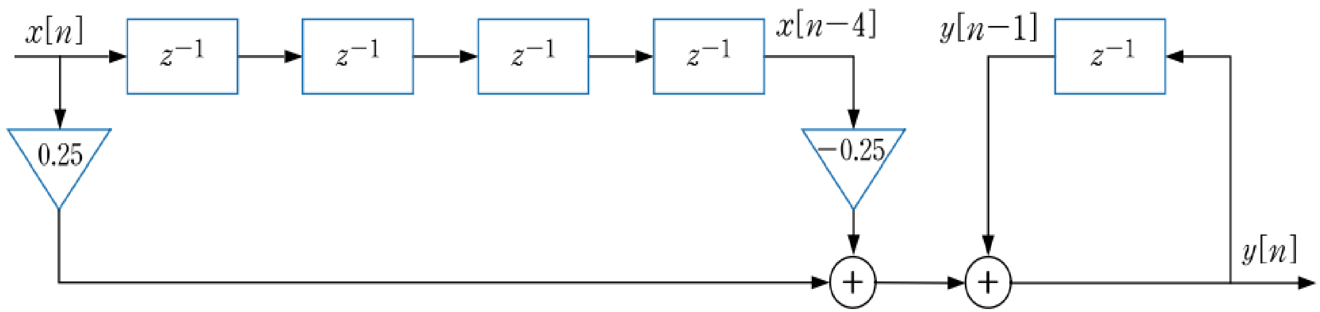
$$= y[n-1] + \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{4}x[n-4]$$

Discrete System - 이산 시스템

예제 2-5

풀이

계산면에서 순환 구조가 훨씬 효율적이고, 데이터 수가 클수록 효과도 크다.



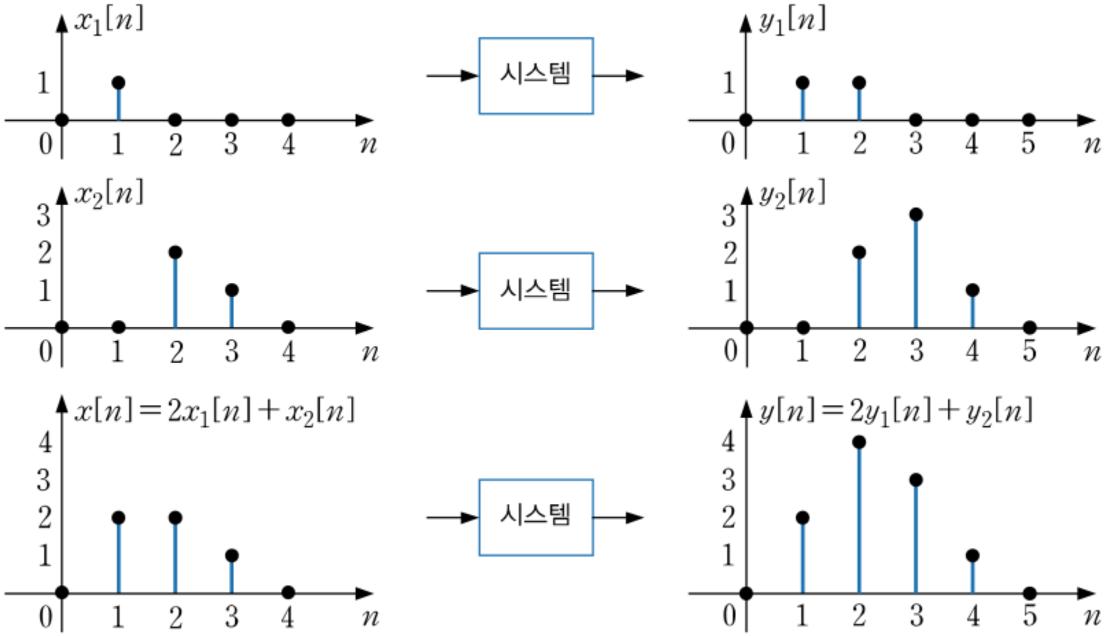
[그림 2-18] [예제 2-5] 시스템의 순환 구조(ARMA) 구현

Linear & Non-Linear System - 선형 시스템과 비선형 시스템

- **Linear(선형) 시스템 :** 입출력 관계가 선형으로 주어지는 시스템
  - 선형성(=중첩의 원리) : 가산성(additivity) + 동차성(homogeneity)

$$L\{\alpha x_1 + \beta x_2\} = \alpha L\{x_1\} + \beta L\{x_2\} = \alpha y_1 + \beta y_2$$

- **Non-Linear(비선형) 시스템 :** 선형성을 불만족하는 시스템



[그림 2-19] 시스템의 선형성

Linear & Non-Linear System - 선형 시스템과 비선형 시스템

예제 2-6

다음과 같은 시스템이 선형 시스템인지 판별하고, 정현파 입력 $x[n] = \cos(\Omega n)$에 대한 출력을 구하라.

(a) 입력에 비례하는 출력을 내는 시스템 $y[n] = L\{x[n]\} = a\,x[n]$

(b) 입력의 제곱을 출력으로 내는 시스템 $y[n] = x^2[n]$

풀이

(a) $L\{x_1[n] + x_2[n]\} = a(x_1[n] + x_2[n]) = ax_1[n] + ax_2[n] = y_1[n] + y_2[n]$ → 선형 시스템

$y[n] = a\cos(\Omega n)$ → 출력의 주파수 = 입력의 주파수

(b) $L\{x_1[n] + x_2[n]\} = \{x_1[n] + x_2[n]\}^2$

$$= x_1^2[n] + x_2^2[n] + 2x_1[n]x_2[n] \neq y_1[n] + y_2[n]$$ → 비선형 시스템

$$y[n] = \cos^2(\Omega n) = \frac{1}{2}\{1 + \cos(2\Omega n)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\Omega n)$$

→ 출력의 주파수 ≠ 입력의 주파수

Time invariant & varying - 시불변 시스템과 시변 시스템

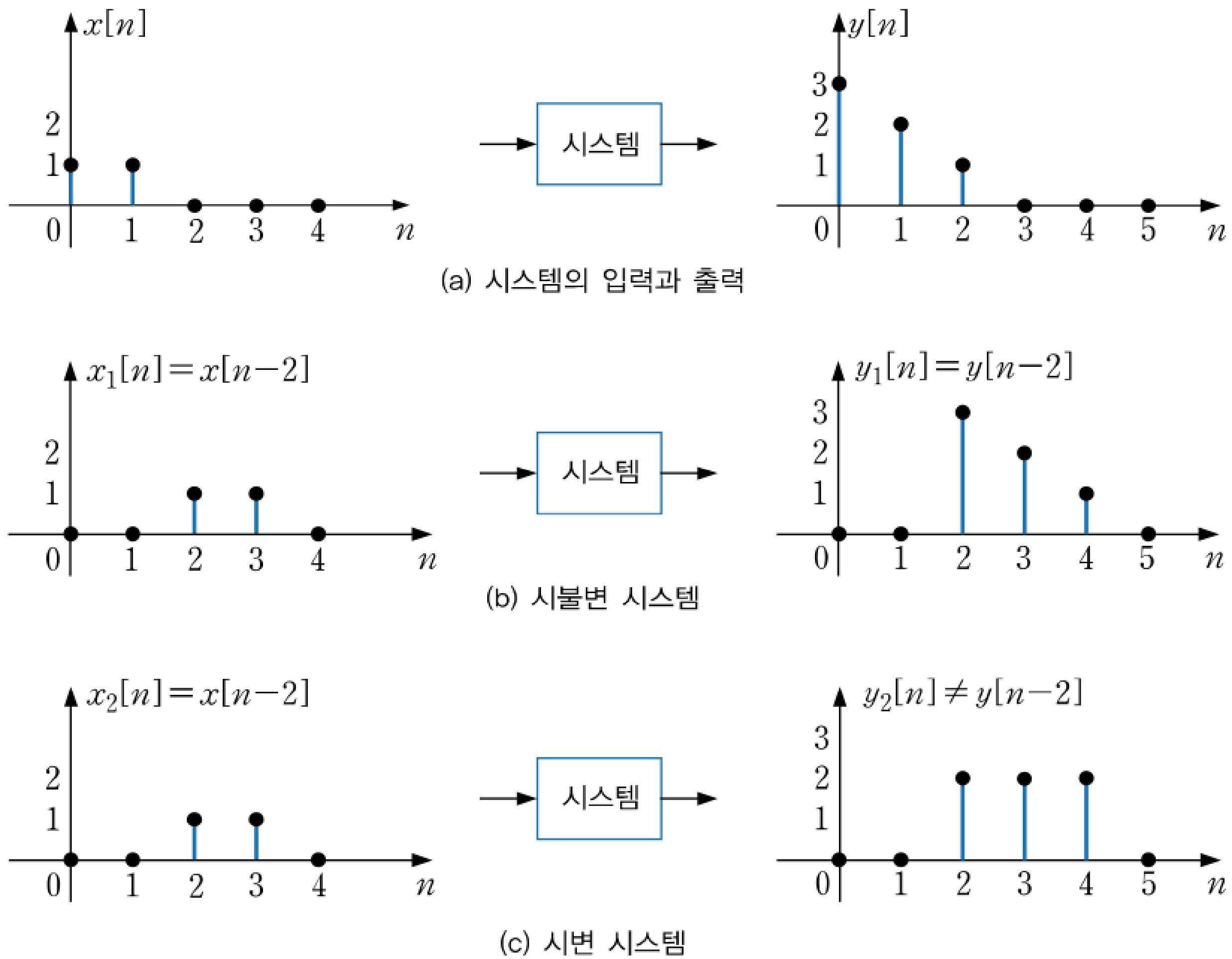
- **Time invariant(시불변) 시스템**
  : 시간에 상관없이 같은 입력에 대해 항상 같은 반응을 보이는 시스템

$$L\{x[n]\} = y[n] \text{ 일 때, } L\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0]$$

  - 시스템 특성(파라미터)이 시간에 따라 불변
  - 차분 방정식의 계수가 상수 계수

- **Time varying(시변) 시스템**
  : 입력이 들어오는 시간에 따라 출력이 달라지는 시스템
  - 시스템 특성(파라미터)이 시간에 따라 변함
  - 차분 방정식의 계수가 시간 함수

Time invariant & varying - 시불변 시스템과 시변 시스템



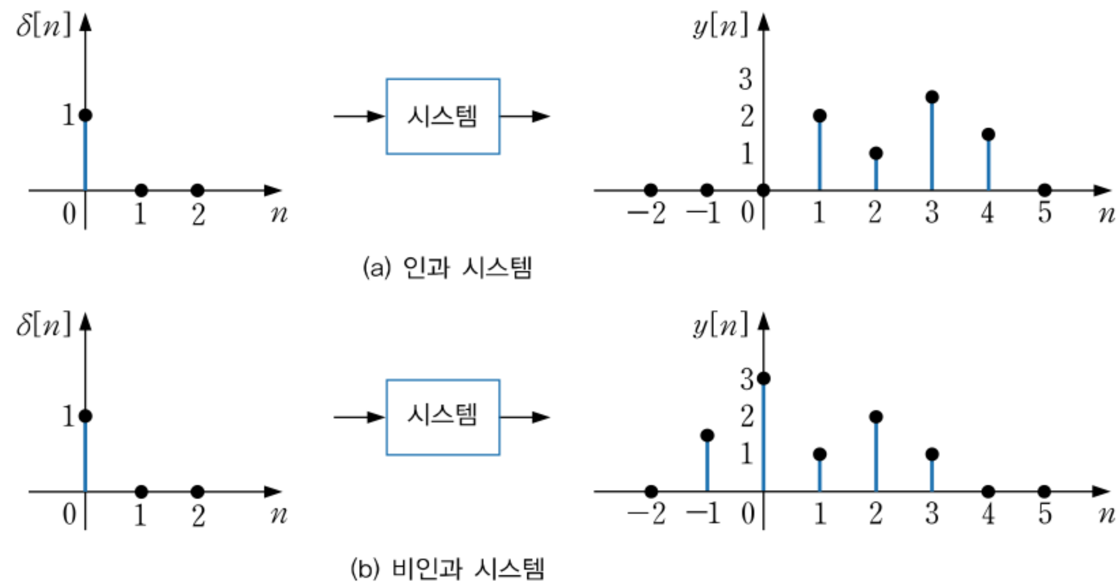
[그림 2-20] **시불변 시스템과 시변 시스템**

Causality - 인과 시스템과 비인과 시스템

- **Causal(인과) 시스템 :** 인과성을 만족하는 시스템
  - 인과성(causality) : **미래의 입력이 현재의 출력에는 영향을 주지 못함**
    즉 n_0에서의 출력이 에서의 입력에만 의존

$$x[n] = 0,\ \ n \leq n_0 \text{일 때},\ \ y[n] = 0,\ \ n \leq n_0$$

- **Noncausal(비인과) 시스템**
  : 인과성을 불만족



[그림 2–21] 인과 시스템과 비인과 시스템

안정 시스템과 불안정 시스템

- **BIBO(Bounded Input Bounded Output) 안정도**

  입력 크기가 유한하면 출력의 크기도 반드시 유한하게 보장되는 성질

$$|x[n]| \leq M_x < \infty \text{ 일 때, } |y[n]| \leq M_y < \infty$$

- **Stable(안정) 시스템**

  : 유한한 크기의 입력에 대해 유한한 크기의 출력이 나오는 시스템

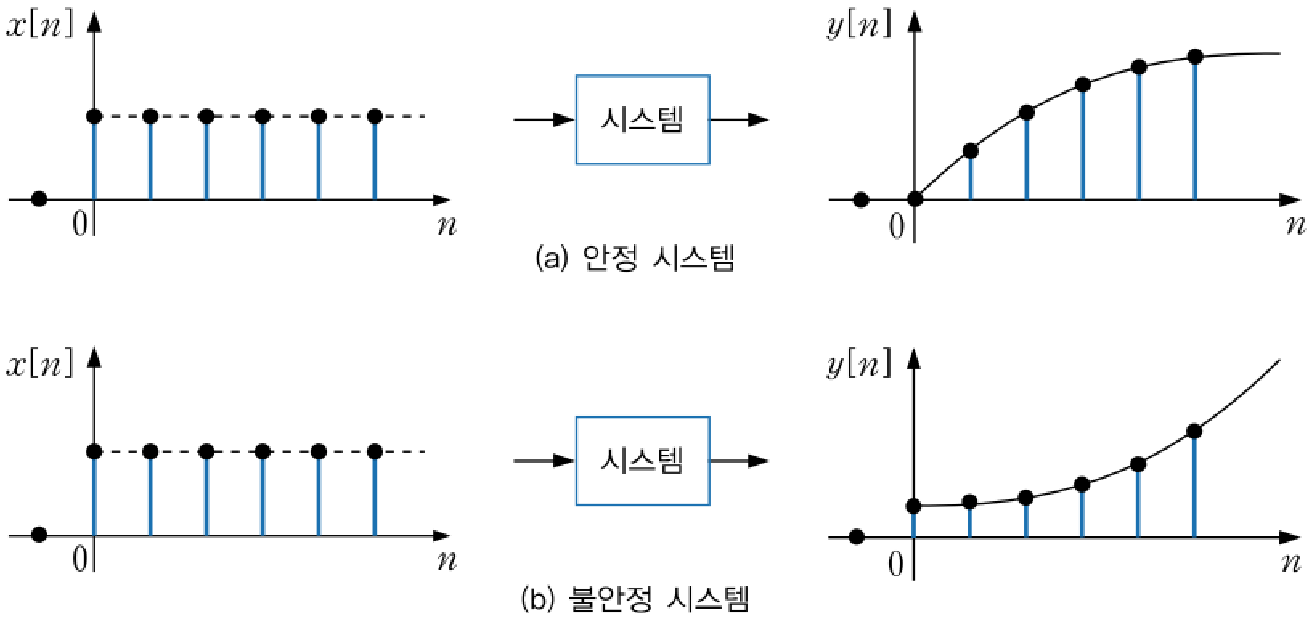
  - 물리적으로 시스템의 지속적 작동이 보장됨

- **Unstable(불안정) 시스템**

  : 유한한 크기의 입력에 대해 무한한 크기의 출력이 나오는 시스템

  - 궁극적으로 시스템은 파괴됨

안정 시스템과 불안정 시스템



[그림 2-22] 안정 시스템과 불안정 시스템

동적(기억) 시스템과 순시적(무기억) 시스템

- **Dynamic(동적(기억)) 시스템**
  - 출력이 현재 입력 외에 과거의 입력에도 영향 받음 : 기억 기능 보유
  - 입출력 관계가 차분 방정식의 형태

  (예) 적분기, L 또는 C 회로, 순차 논리 회로 등

- **Instantaneous(순시적(무기억)) 시스템**
  - 출력이 현재의 입력만으로 결정
  - 입출력 관계가 대수 방정식으로 표현

  (예) R 회로, 조합 논리 회로 등

동적(기억) 시스템과 순시적(무기억) 시스템

예제 2-7

다음과 같이 입력 값을 누적하여 더한 결과를 출력으로 내는 누산기에 대해 선형성, 시불변성, 인과성, 안정성, 그리고 기억성에 대한 만족 여부를 판별하라.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

풀이

- 선형성 : 만족 $L\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{n} (\alpha x_1[k] + \beta x_2[k]) = \alpha \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] + \beta \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]$

$$= \alpha L\{x_1[n]\} + \beta L\{x_2[n]\} = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

- 시불변성 : 만족 $L\{x[n-n_0]\} = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0] = \sum_{i=-\infty}^{n-n_0} x[i] = y[n-n_0]$

- 인과성 : 만족 / - 안정성 : 불만족
- 기억성 : 만족