KALMAN FILTER

BAYES FILTER ALGORITHM

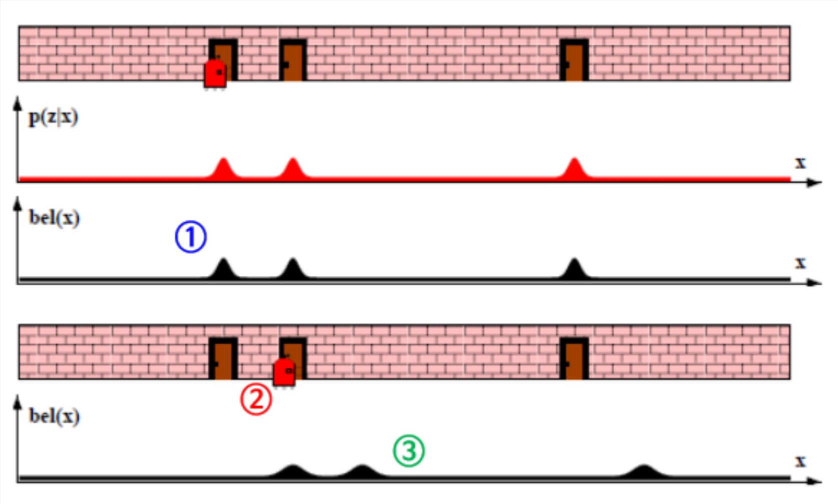
1: **Algorithm Bayes_filter**($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$):
2: for all x_t do
3: ③ $\overline{bel}(x_t) = \int \overset{②}{p(x_t \mid u_t, x_{t-1})}\ \overset{①}{bel(x_{t-1})}\ dx$
4: ⑤ $bel(x_t) = \eta\ \underset{④}{p(z_t \mid x_t)}\ \underset{③}{bel(x_t)}$
5: endfor
6: return $bel(x_t)$

3行目 ③control update, prediction

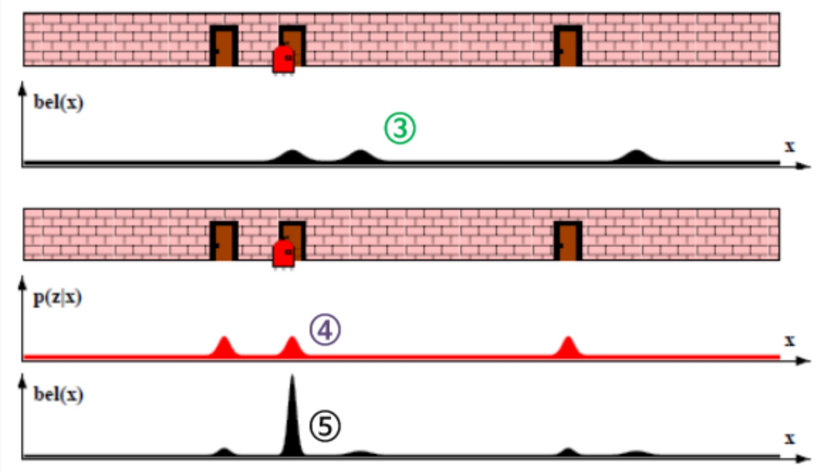
・物理モデルを用いた予測に該当
・物理モデルと制御値を用いて現在状態を予測
※②：前の状態と制御値が与えられた時、現在状態の確率分布

4行目 ⑤measurement update, correction

・センサ観測値を用いて上記の予測を補正
※④：現在状態のセンサ観測値の確率分布



Control update



Measurement update

BAYES FILTERの限界とKALMAN FILTER

積分演算問題

・Σを使う離散値に比べて、 連続値を計算するには積分が必要

・計算が複雑な多峰性関数(multimodal function)の積分問題をどう解決するか？

Algorithm Bayes_filter$(bel(x_{t-1}), u_t, z_t)$**:**

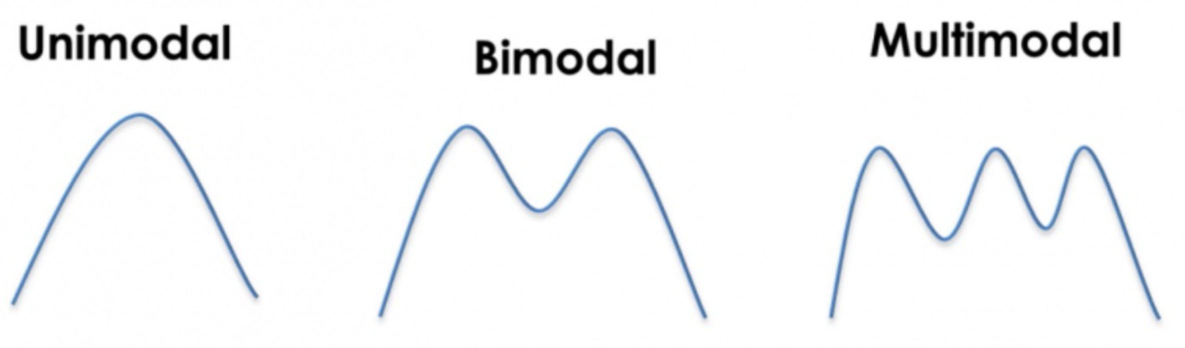
for all x_t do

$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1})\, bel(x_{t-1})\, dx$

$bel(x_t) = \eta\, p(z_t \mid x_t)\, \overline{bel}(x_t)$

endfor

return $bel(x_t)$



Kalman Filterの解決方法

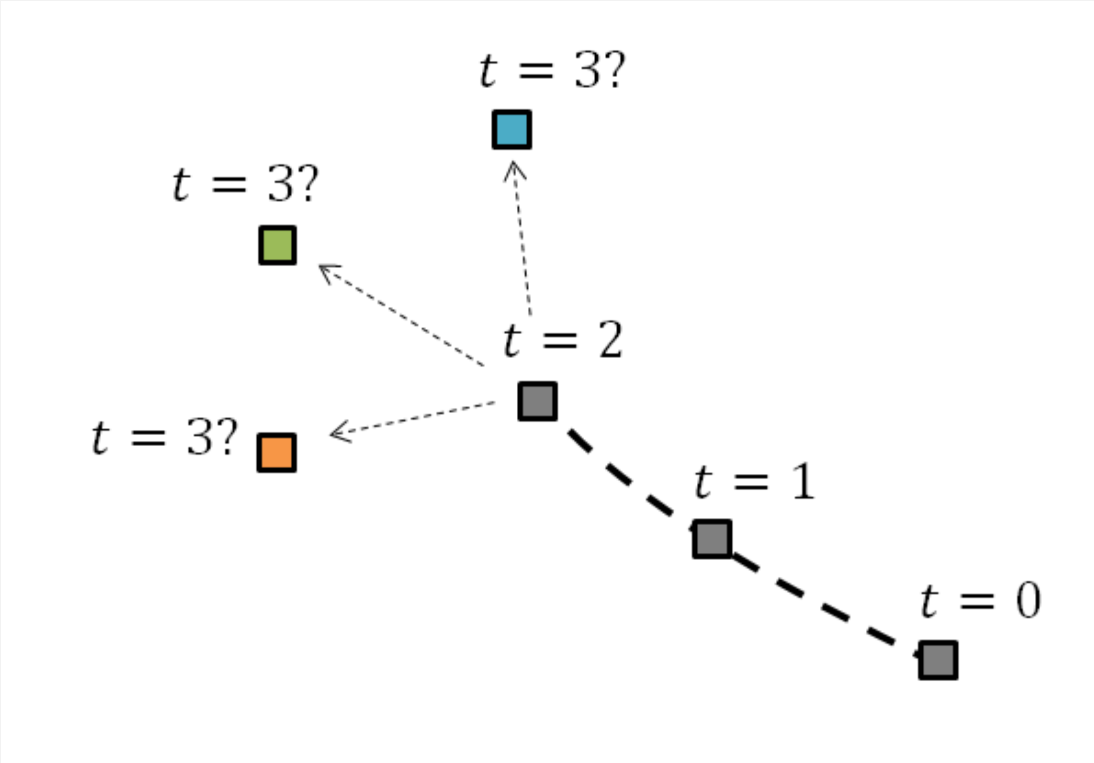
・全ての確率分布が積分が可能なガウス分布で、モデルは線形モデルだと仮定

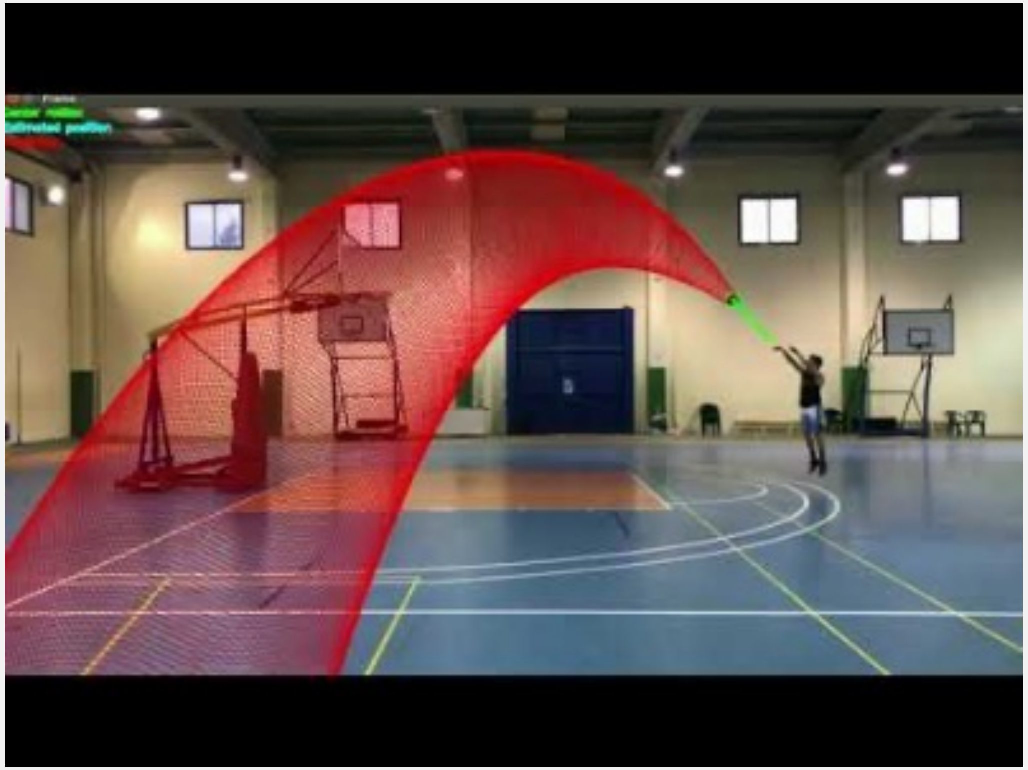
・モデルが線形システムで、確率分布がガウス分布なら、Kalman Filterは最適の推定をする

・予測モデルと観測モデルの不確実性を比較し、何をもっと信頼するか？決める＝Bayesと同じ

導入：KALMAN FILTERを用いた例

物体の軌跡を追跡するとき、今までの動きに基づいて次の時間の物体位置を推定できる



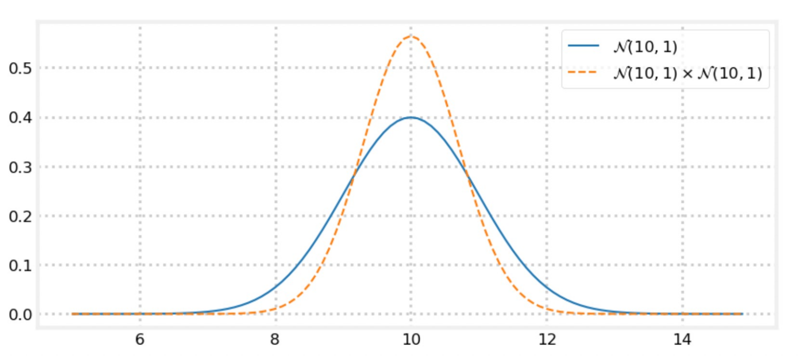


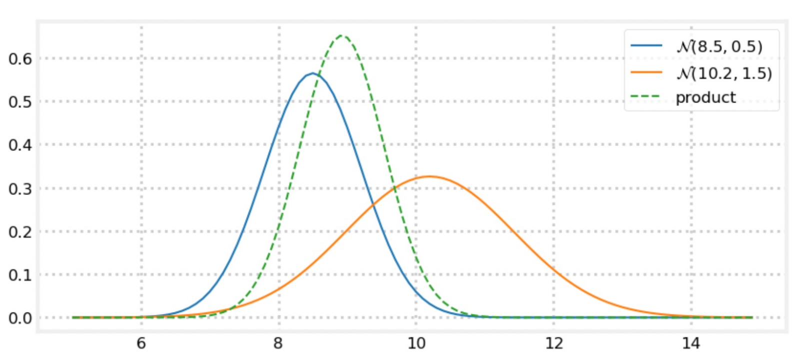
ガウス分布の特徴

・離散ベイズフィルタでは、予測にConvolution演算を、観測補正に掛算を使用
・Convolution演算ではTotal Probability法則を用いて確率の合計を算出
⇨ガウス分布に同じ概念を適用できる

ガウス分布の特徴
・ガウス分布＋ガウス分布⇨ガウス分布
・ガウス分布×ガウス分布⇨ガウス分布
・ベクトルのガウス分布⇨一つの確率変数もガウス分布(Marginals)
・ガウス分布⇨条件付き確率もガウス分布(Conditionals)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) &= \| prior \cdot likelihood \| \\
&= \| \mathcal{N}(\bar{\mu}, \bar{\sigma}^2) \cdot \mathcal{N}(\mu_z, \sigma_z^2) \| \\
&= \mathcal{N}\left(\frac{\bar{\sigma}^2 \mu_z + \sigma_z^2 \bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_z^2}, \frac{\bar{\sigma}^2 \sigma_z^2}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_z^2}\right)
\end{aligned}
$$





線形モデルの特徴

・線形モデルは、線形関数でモデルを表現可能
・線形変換されたガウス分布もガウス分布
⇨現在Beliefがガウス分布なら、予測と補正モデルをかけた結果もガウス分布になることを保証

Next State Probability

$$x_t = A_t \underbrace{x_{t-1}}_{\text{State vector}} + B_t \underbrace{u_t}_{\text{Control vector}} + \varepsilon_t \;.$$

Measurement Probability

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

At：(nxn)行列
制御とノイズ無しで状態の変化
Bt：(nxl)行列
制御uによる状態の変化
Ct：(kxn)行列
現在の状態から観測へのマッピング
現在状態が与えられた時、観測の予測値

et：制御ノイズ。共分散はR
dt：観測ノイズ。共分散はQ

制御モデルと観測モデルの確率分布

制御モデル

ガウスノイズに基づいた状態の確率分布

$$
\begin{aligned}
& p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) && (3.4) \\
= \quad & \det(2\pi R_t)^{-\frac{1}{2}} \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)^T R_t^{-1}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)\right\}
\end{aligned}
$$

観測モデル

ガウスノイズに基づいた観測の確率分布

$$
p(z_t \mid x_t) \quad = \quad \det(2\pi Q_t)^{-\frac{1}{2}} \, \exp\left\{-\tfrac{1}{2}(z_t - C_t\, x_t)^T \, Q_t^{-1} \, (z_t - C_t\, x_t)\right\}
$$

最後のBELIEFはガウス分布？

観測モデル（補正）

・観測モデルで補正されたbelがガウス分布か？を確認するためには、
　belの予測もガウス分布であることを証明するべき

・ガウス分布×ガウス分布⇨ガウス分布

$$bel(x_t) = \eta \underbrace{p(z_t \mid x_t)}_{\text{Gaussian}} \underbrace{\overline{bel}(x_t)}_{?}$$

制御モデル（予測）

belの予測はガウス分布。数式の二つの確率分布が全てガウス分布であるため

・二つのガウス分布のConvolution⇨ガウス分布

$$\overline{bel}(x_t) = \int \underbrace{p(x_t \mid u_t, x_{t-1})}_{\text{Gaussian}} \underbrace{bel(x_{t-1})}_{\text{Gaussian}} \, dx$$

CONVOLUTION演算の詳細

$$\overline{bel}(x_t) = \int \underbrace{p(x_t \mid x_{t-1}, u_t)}_{\sim N(x_t;\, A_t x_{t-1} + B_t u_t,\, R_t)} \underbrace{bel(x_{t-1})}_{\sim N(x_{t-1};\, \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1})} dx_{t-1}$$

$$= \underset{\text{normalization factor}}{\eta} \int \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)^T R_t^{-1} (x_t - A_t x_{t-1} - B_t u_t)\right\}$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}(x_{t-1} - \mu_{t-1})^T \Sigma_{t-1}^{-1} (x_{t-1} - \mu_{t-1})\right\} dx_{t-1}$$

合わせて $-L_t$: quadratic in x_t, x_{t-1}

$$= \eta \int \exp\{-L_t\} dx_{t-1}$$

$$= \eta \int \exp\{-L_t(x_{t-1}, x_t) - L_t(x_t)\} dx_{t-1}$$

$$= \eta \underbrace{\exp\{L_t(x_t)\}}_{\text{Gaussian}} \underbrace{\int \exp\{-L_t(x_{t-1}, x_t)\} dx_{t-1}}_{\text{Marginalization}}$$

→ does not depends on x_t

$$= \eta \underbrace{\exp\{L_t(x_t)\}}_{\text{Gaussian}}$$

最後のBELIEFはガウス分布？

全ての確率分布はガウス分布！
最初のbeliefがガウス分布なら、その次のbeliefはガウス分布を維持する

$$\underbrace{\overline{bel}(x_t)}_{\text{Gaussian}} = \underbrace{\int \underbrace{p(x_t \mid u_t, x_{t-1})}_{\text{Gaussian}} \underbrace{bel(x_{t-1})}_{\text{Gaussian}} \, dx}_{\text{Gaussian}}$$

$$\underbrace{bel(x_t)}_{\text{Gaussian}} = \eta \, \underbrace{p(z_t \mid x_t)}_{\text{Gaussian}} \, \underbrace{\overline{bel}(x_t)}_{\text{Gaussian}}$$

・ガウス分布は平均と共分散で表現可能
・以前時点の平均と共分散が現在時点ではどう変わるか？を表現できる

KALMAN FILTER

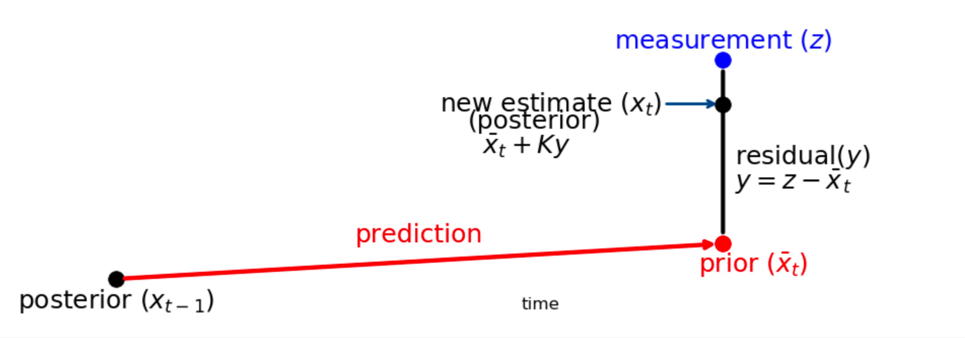
Algorithm Kalman_filter($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$)**:**

$$\left.\begin{aligned}\bar{\mu}_t &= A_t\ \mu_{t-1} + B_t\ u_t\\ \bar{\Sigma}_t &= A_t\ \Sigma_{t-1}\ A_t^T + R_t\end{aligned}\right\}\ \text{Control Update}$$

$$\left.\begin{aligned}K_t &= \bar{\Sigma}_t\ C_t^T (C_t\ \bar{\Sigma}_t\ C_t^T + Q_t)^{-1}\\ \mu_t &= \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t\ \bar{\mu}_t)\\ \Sigma_t &= (I - K_t\ C_t)\ \bar{\Sigma}_t\end{aligned}\right\}\ \text{Measurement Update}$$

return μ_t, Σ_t

Kalman Gainのイメージ



KALMAN FILTER

Algorithm Kalman_filter$(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t)$**:**

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\mu}_t = A_t\, \mu_{t-1} + B_t\, u_t \\ \bar{\Sigma}_t = A_t\, \Sigma_{t-1}\, A_t^T + R_t\end{array}\right\} \text{Control Update}$$

$$\left.\begin{array}{l}K_t = \bar{\Sigma}_t\, C_t^T (C_t\, \bar{\Sigma}_t\, C_t^T + Q_t)^{-1} \\ \mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - C_t\, \bar{\mu}_t) \\ \Sigma_t = (I - K_t\, C_t)\, \bar{\Sigma}_t\end{array}\right\} \text{Measurement Update}$$

return μ_t, Σ_t

Kalman Gain

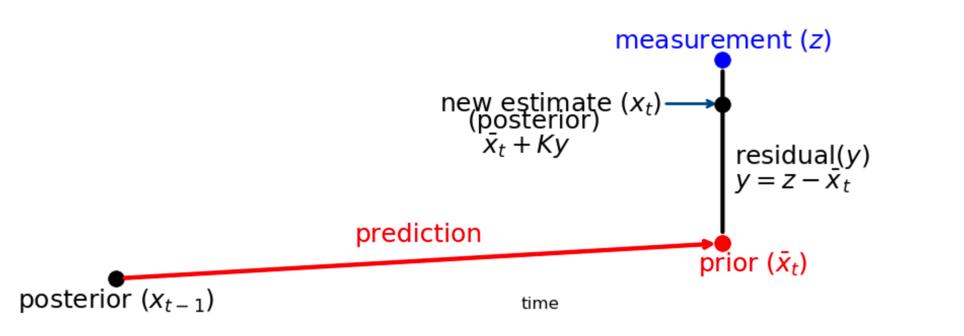
$$\mu = \frac{\bar{\sigma}^2\, \mu_z + \sigma_z^2\, \bar{\mu}}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_z^2}$$

$$\mu = \left(\frac{\bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_z^2}\right)\mu_z + \left(\frac{\sigma_z^2}{\bar{\sigma}^2 + \sigma_z^2}\right)\bar{\mu}$$

$$\begin{aligned}\mu &= K\mu_z + (1-K)\bar{\mu} \\ &= \bar{\mu} + K(\mu_z - \bar{\mu})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{9\sigma_z^2\mu_z + \sigma_z^2\,\bar{\mu}}{9\sigma_z^2 + \sigma_z^2} \\ &= \left(\frac{9}{10}\right)\mu_z + \left(\frac{1}{10}\right)\bar{\mu}\end{aligned}$$

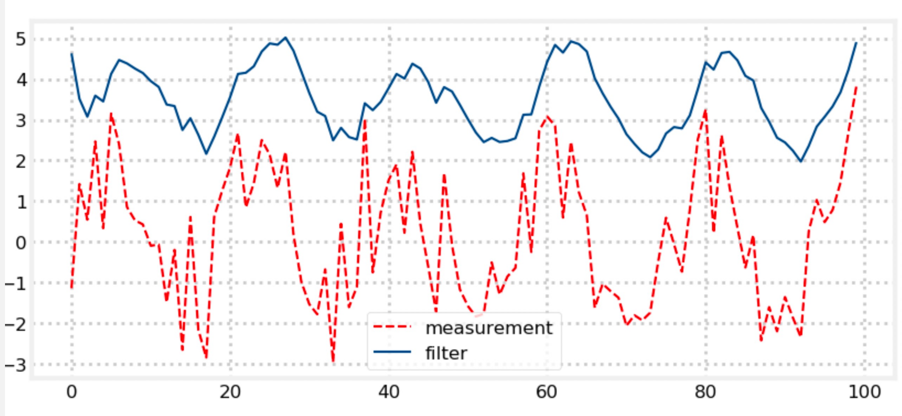
$$\begin{aligned}\mu &= \frac{\sigma_z^2\,(\bar{\mu} + \mu_z)}{2\sigma_z^2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\bar{\mu} + \left(\frac{1}{2}\right)\mu_z\end{aligned}$$



非線形システムと KALMAN FILTER

世の中には非線形システムのケースが一般的
線形システムの制約があるKalman Filterでは、限界あり

$$\begin{aligned} x_t &= g(u_t, x_{t-1}) + \varepsilon_t \\ z_t &= h(x_t) + \delta_t \,. \end{aligned}$$



Extended Kalman Filter
・非線形関数はnon-Gaussian分布
・Kalman Filterは適用不可能
⇨非線形関数を近似する（微分が可能になる）
⇨テイラー展開を用いたLocal Linearizationでbeliefの真値を近似

$$\begin{aligned} g(u_t, x_{t-1}) &\approx g(u_t, \mu_{t-1}) + \underbrace{g'(u_t, \mu_{t-1})}_{=:\, G_t} (x_{t-1} - \mu_{t-1}) \\ &= g(u_t, \mu_{t-1}) + G_t \, (x_{t-1} - \mu_{t-1}) \end{aligned}$$

$$g'(u_t, x_{t-1}) := \frac{\partial g(u_t, x_{t-1})}{\partial x_{t-1}}$$

$$\begin{aligned} h(x_t) &\approx h(\bar{\mu}_t) + \underbrace{h'(\bar{\mu}_t)}_{=:\, H_t} (x_t - \bar{\mu}_t) \\ &= h(\bar{\mu}_t) + H_t \, (x_t - \bar{\mu}_t) \end{aligned}$$

$$h'(x_t) = \frac{\partial h(x_t)}{\partial x_t}$$

EXTENDED KALMAN FILTER

1: **Algorithm Extended_Kalman_filter**$(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t)$**:**
2: $\bar{\mu}_t = \underline{g(u_t, \mu_{t-1})}$
3: $\bar{\Sigma}_t = G_t\ \Sigma_{t-1}\ G_t^T + R_t$
4: $K_t = \bar{\Sigma}_t\ H_t^T (H_t\ \bar{\Sigma}_t\ H_t^T + Q_t)^{-1}$
5: $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - \underline{h(\bar{\mu}_t)})$
6: $\Sigma_t = (I - K_t\ H_t)\ \bar{\Sigma}_t$
7: return μ_t, Σ_t

Control Update (Lines 2–3)

Measurement Update (Lines 4–6)

☆違い

	Kalman filter	EKF
state prediction (Line 2)	$A_t\ \mu_{t-1} + B_t\ u_t$	$g(u_t, \mu_{t-1})$
measurement prediction (Line 5)	$C_t\ \bar{\mu}_t$	$h(\bar{\mu}_t)$