GPS估算TEC

双频GPS接收器的RINEX文件包括两个频率的载波相位（Φ1和Φ2）以及伪距（P1和P2）值，f1（1575.41MHz）和f2（1227.60MHz）。这些观察数据的定义在[Barrile, Cacciola, & Cotroneo, 2006; Sharifi & Farzaneh, 2017]。

$$P_i = \rho + c.(dt - dT) + d_o + d_T + I_i + b^s_{Pi} + b^r_{Pi} + \varepsilon_{Pi}$$

其中：

ρ：卫星与接收机之间的几何距离，单位：米

d_o：轨道误差，单位：米

dt：卫星时钟误差，单位：秒

dT：接收机时钟误差，单位：秒

d_T： 对流层误差，单位：米

I：对应频率的电离层延迟

Pi^s：对应频率下的卫星发射延迟，单位：米

Pi^r：对应频率下的接收器延迟，单位：米

ε：测量误差，单位：米

柯西色散公式

柯西色散公式指的是法国数学家柯西发现媒质的折射率与真空中入射光的波长的关系。它可以用一个级数表示为：

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4}$$

其中 a,b,c 是三个柯西色散系数，因不同的介质而不同。只须测定同一物质的三个不同的波长下的折射率$n(\lambda)$，代入柯西色散公式中可得到三个联立方程式，解这组联立方程式就可以得到该介质的三个柯西色散系数。有了三个柯西色散系数，就可以计算出其他波长下的折射率不需要再测量。

因为卫星都处于大气层外，卫星信号传播到地球上必须要经过大气层中的电离层，于是必然要受到电离层的影响。电离层是弥散性介质，即介质的介电常数与频率有关，所以在电离层中，不同频率的电磁波具有不同的传播速度。 卫星信号载波的速度是固定的，称之为相速度，$v_p = \lambda f$，其中λ是载波波长，f是载波频率。对应的相折射率为n_p。而载波上调制的数据信息可以看做是多个不同频率的波叠加而成的群波，其速度称之为群速度v_g，对应的群折射率为n_g。

群折射率与相折射率之间的关系为:

$$n_g = n_p + f\frac{dn_p}{df} \tag{1}$$

根据柯西色散公式可以得到

$$n_p = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} \tag{2}$$

将柯西色散公式应用到相折射率中可得：

$$n_P = 1 - K_1 Nef^{-2} - K_2 Ne\left(H_0 \cos\theta\right) f^{-3} - K_3 Ne^3 f^{-4} \tag{3}$$

$$\begin{cases} K_1 = \frac{e^2}{8\pi^2 \varepsilon_0 m} \\ K_2 = \frac{\mu_0 e^3}{16\pi^3 \varepsilon_0 m^2} \\ K_3 = \frac{e^4}{128\pi^4 \varepsilon_0^3 m^2} \end{cases}$$

其中：

Ne:电子密度,即单位体积中所含的电子数,常用电子数/m3或电子数/cm3来表示;

m:电子的质量,m=9.1096×10-31kg;

e:电子所带的电荷值,e=1.6022×10-19c;

ε0:真空中的介电系数,ε0=8.8542×10-12F/m;

H0:地磁场的磁场强度;

μ0:真空中的磁导率;

θ:地磁场的方向与电磁波信号传播方向间的夹角;

f:电磁波信号的频率

整个表达式后两项的值非常小，可以忽略不计。简化后的公式如下：

$$n_p = 1 - K_1\frac{Ne}{f^2} = 1 - 40.3\frac{Ne}{f^2} \tag{4}$$

根据折射率公式可得相速度（载波相位在电离层中的传播速度）（对GPS卫星信号而言, $40.3\frac{Ne}{f^2} \approx 10^{-7}$）：

$$V_p = \frac{c}{n_p} = \frac{c}{1 - 40.3\frac{Ne}{f^2}} = c\left(1 + 40.3\frac{Ne}{f^2}\right) \tag{5}$$

将相折射率带入公式(1)中得到群折射率：

$$n_g = n_p + f\frac{dn_p}{df} = 1 - 40.3\frac{Ne}{f^2} + 80.6\frac{Ne}{f^2} = 1 + 40.3\frac{Ne}{f^2} \tag{6}$$

根据折射率公式可得群速度（伪距在电离层中的传播速度）：

$$V_g = \frac{c}{n_g} = \frac{c}{1 + 40.3\frac{Ne}{f^2}} = c\left(1 - 40.3\frac{Ne}{f^2}\right) \tag{7}$$

卫星到接收机的几何距离

由于电离层延迟的影响，从卫星到接收机的几何距离ρ可表示为：

$$\rho = \rho' + \rho^I \tag{8}$$

其中，ρ'表示不受电离层影响的几何距离，ρ^I表示受到电离层影响的几何距离。

利用载波相位根据相速度来表示ρ：

$$\begin{aligned}\rho &= \rho' + S_I \\ &= \rho' + V_p \cdot t \\ &= \rho' + C \cdot \left(1 + 40.3\frac{Ne}{f^2}\right) \cdot t \\ &= \rho' + C \cdot \int_t \left(1 + 40.3\frac{Ne}{f^2}\right) dt\end{aligned}$$

用ds代替Cdt后近似得到：

$$\rho = \rho' + \frac{40.3}{f^2}\int_s Ne\,\mathrm{d}s \tag{9}$$

即利用载波相位测距时应加的电离层延迟改正为：

$$(V_{\text{ion}})_P = \frac{40.3}{f^2}\int_s Ne\,\mathrm{d}s$$

利用伪距根据群速度来表示ρ：

$$\begin{aligned}\rho &= \rho' + S_I \\ &= \rho' + V_p \cdot t \\ &= \rho' + C \cdot \left(1 - 40.3\frac{Ne}{f^2}\right) \cdot t \\ &= \rho' + C \cdot \int_t \left(1 - 40.3\frac{Ne}{f^2}\right) dt\end{aligned}$$

同理， 用ds代替Cdt后近似得到：

$$\rho = \rho' - \frac{40.3}{f^2}\int_s Ne\,\mathrm{d}s \tag{10}$$

即利用测距码进行测距时应加的电离层延迟改正为：

$$(V_{\text{ion}})_G = -\frac{40.3}{f^2}\int_s Ne\,\mathrm{d}s$$

TEC和电离层延迟的关系

上述通过伪距和载波相位得到的电离层延迟理论上应该是一致的，因此：

$$-(V_{\text{ion}})_G = (V_{\text{ion}})_P = \frac{40.3}{f^2}\int_s Ne\,\mathrm{d}s$$

上式中的$\int_s Ne\,\mathrm{d}s$可表示为TEC，即：

$$-(V_{\text{ion}})_G = (V_{\text{ion}})_P = \frac{40.3}{f^2}TEC \tag{11}$$

总电子含量TEC即为沿卫星信号传播路径s对电子密度Ne进行积分所获得的结果，也即底面积为一个单位面积沿信号传播路径贯穿整个电离层的一个柱体中所含的电子数，通常以C/m^2或C/cm^2为单位。此外，我们以10^{16}个电子/m^2作为TEC的单位，并将它称为1TECU。

对同一电离层而言,从某一测站至各卫星的方向上的TEC值是不相同的。卫星的高度角h越小。卫星信号在电离层中的传播路径就越长，TEC的值就越大。在该站所有的TEC值中有一个最小值，即天顶方向(h=90°)的总电子含量VTEC (Vertical TotalElectron Content)。VTEC与高程和卫星高度角均脱离了关系，可以反映测站上空电离层的总体特征,所以被广泛应用。

电离层的延迟改正

单层改正模型（Klobuchar/克罗布歇模型）

这是一个被单频GPS用户所广为采用的电离层延迟改正模型。该模型将晚间的电离层时延视为常数,取值为5纳秒(ns)，把白天的时延看成是余弦函数中正的部分。于是天顶方向调制在L1载波(f=1575.42MHz)上的测距码的电离层时延T_g可表示为：

$$\mathrm{T_g} = 5\times10^{-9} + A\cos\frac{2\pi}{\mathrm{P}}\left(\mathrm{t}-14^{\mathrm{h}}\right)$$

其中，振幅A和周期P分别为：

$$A = \sum_{i=0}^{3}\alpha_i\left(\varphi_m\right)^i$$
$$P = \sum_{i=0}^{3}\beta_i\left(\varphi_m\right)^i$$

此模型在计算电离层延迟时，将整个电离层压缩为一个单层，整个电离层中的自由电子都集中在该单层上，称为中心电离层。中心电离层离地面的高度通常取359km。

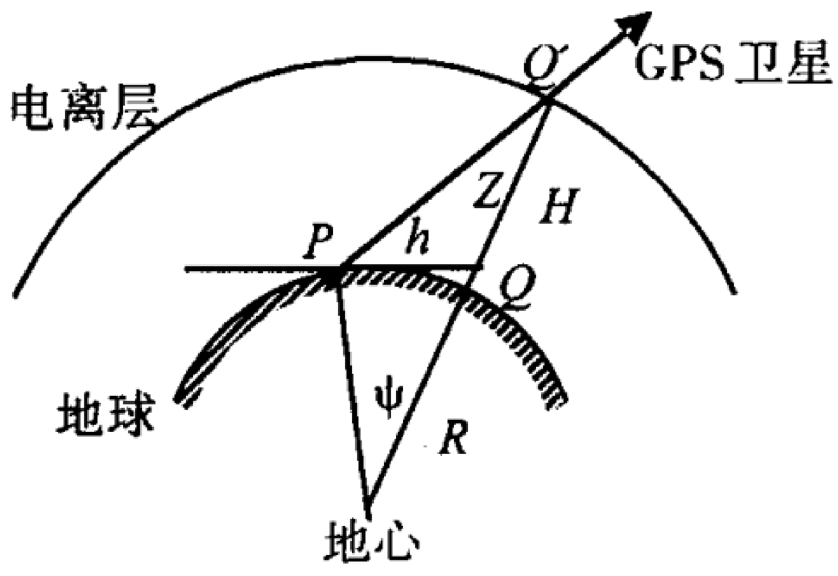

图 1　GPS 卫星信号穿刺点

如图所示： Klobuchar模型采用了单层电离层模型，即把电离层的所有自由电子看作位于高度H(350一400km)厚度忽略的单层球壳上．把GPS卫星和用户P的连线与电离层的交点称作信号穿刺点Q′，其星下点为Q；P与Q点的地心角用 φ 表示，GPS卫星对于用户P点的地平高度角为h；广播星历中发播的天顶电离层改正的参数的 α 和 β 值，是对于星下点Q的天顶而言的（既QQ′方向）。

计算用户P与穿刺点Q‘的地心角φ；

计算穿刺点的星下点Q的地理/地心经纬度φQ，λQ；

将星下点Q的地理纬度换算为地磁纬度；

换算穿刺点的星下点Q处的地方时tQ；

计算单频信号的电离层天顶延迟T‘；

利用倾斜因子计算信号实际路径的电离层延迟 单位：时间/s

双频改正模型

由公式(10)可知，伪距和载波电离层延迟（单位：米），卫星信号所受到的电离层延迟是与信号频率f的平方成反比的。当卫星发射两种频率的时候，可以认为两个频率的电磁波传播的是同一个路径，如果精确确定这两个频率信号到达接收机的时间差，那么就可以反推出各自受到的电离层延迟。

GPS卫星采用的L1和L2载波频率分别为：1575.42MHz 和 1227.60MHz

令：

$$A = -40.3 \int_s Ne \, \mathrm{d}s \tag{12}$$

带入公式(9)中可得：

$$\rho_1 = \rho_1' + \frac{A}{f_1^2}$$
$$\rho_2 = \rho_2' + \frac{A}{f_2^2}$$

其中ρ_1、ρ_2为两个不同频率下测量得到的伪距。两式相减可得：

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \rho_1 - \rho_2 \\ &= c \cdot t \\ &= \frac{A}{f_2^2} - \frac{A}{f_1^2} \\ &= A\left(\frac{1}{{f_2}^2} - \frac{1}{{f_1}^2}\right) \\ &= A\left(\frac{{f_1}^2 - {f_2}^2}{{f_1}^2 f_2^2}\right) \\ &= A\left(\frac{\frac{f_1^2}{f_2^2} - 1}{f_1^2}\right) \\ &= \frac{A}{f_1^2}\left(\frac{f_1^2}{f_2^2} - 1\right)\end{aligned}$$

上式中的$\frac{A}{f_1^2}$项即为公式(11)中的电离层延迟。因此根据如下公式，结合双频信号就可得出两个频率下的电离层延迟V_{ion}

$$\rho = \rho_1 - \rho_2 = c \cdot t = \frac{A}{f_2^2} - \frac{A}{f_1^2} = (V_{ion})_1\left[\frac{f_1^2}{f_2^2} - 1\right]$$

同样的，根据双频原理，我们也可以求解出伪距中不受电离层影响的几何距离(Ion-Free)，即公式(8)中的ρ'

$$\begin{aligned}p' &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \rho_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \rho_2 \\ &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \left(\rho_1' + \frac{A}{f_1^2}\right) - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2}\left(\rho_2' + \frac{A}{f_2^2}\right) \\ &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \rho_1' + \frac{A}{f_1^2 - f_2^2} - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \rho_2' - \frac{A}{f_1^2 - f_2^2} \\ &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \rho_1' - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \rho_2'\end{aligned}$$

已知：$\rho_1' = \rho_2' = \rho'$，因此：

$$\frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \rho_1' - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \rho_2' = \frac{f_1^2 - f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \cdot \rho' = \rho'$$