Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Mobile und Verteilte Systeme
Prof. Dr. Linnhoff-Popien

mobile and distributed systems group

Tutoriumsblatt 4
Rechnerarchitektur im SoSe 2020

Zu den Modulen G, H

Tutorium: Die Aufgaben werden in Tutorien-Videos vorgestellt, die am 14. Mai 2020 (17 Uhr) veröffentlicht werden.

Aufgabe T11: Minimierung mittels Karnaugh

(– Pkt.)

Minimieren Sie folgende Funktionen mit Hilfe des Karnaugh-Diagramms.
Geben Sie dabei sowohl das jeweilige gezeichnete Karnaugh-Diagramm, als auch die zugehörige minimierte Funktion in disjunktiver Form an!

a. $y_1 = (x_1x_2\overline{x}_3) + (x_1\overline{x}_2\overline{x}_3) + (\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3) + (\overline{x}_1x_2\overline{x}_3) + (x_1\overline{x}_2x_3) + (x_1x_2x_3)$

b. $y_2 = (\overline{x}_2x_3x_4)+(\overline{x}_1x_2x_3x_4)+(x_1x_2\overline{x}_3x_4)+(\overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4)+(\overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4)+(\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4)+(\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4)$

Resolutionsregel

$f_1(x_1,x_2,x_3)$		$f_2(x_1,x_2,x_3)$
$= x_1x_2x_3 + \overline{x_1}x_2x_3$		$= (x_1 + x_2 + x_3) * (\overline{x_1} + x_2 + x_3)$
$= (x_1 + \overline{x_1})x_2x_3$	Distributivgesetz	$= (x_1 * \overline{x_1}) + x_2 + x_3$
$= 1\ x_2x_3$	Komplementärgesetz	$= 0 + x_2 + x_3$
$= x_2x_3$	Neutralitätsgesetz	$= x_2 + x_3$

When $x=1$
$(\ 1\ )\ (0+y+z) = y+z$
When $x=0$
$(0+y+z)\ (\ 1\ ) = y+z$

$(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee b)$
$= b \vee (a \wedge \bar{a})$
$= b$

✓

(a)

x_3 \ x_1x_2	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1			1	1

$y_1 = \overline{x_3} + x_1$

(b)

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
10		1		
11	1	1		1
01		1	1	
00	1	1		

$y_2 = (\overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4) + (\overline{x}_1x_2)$
$+ (x_2\overline{x}_3x_4) + (\overline{x}_2x_3x_4)$

Aufgabe T12: Schaltfunktion

(– Pkt.)

Gegeben ist folgende Wahrheitstabelle:

a	b	c	d	f(a,b,c,d)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

a. Geben Sie die Schaltfunktion von f in disjunktiver Normalform (DNF) an.

b. Vereinfachen Sie die Funktion unter Verwendung eines Karnaugh-Diagramms.

c. Nehmen Sie an, dass die Wahrheitstabelle wie oben gegeben ist, jedoch ohne die letzte Zeile. Das heißt, die neue Funktion f' ist auf dem Eingabe-4-Tupel (a=1, b=1, c=1, d=1) undefiniert. Wie wirkt sich das auf Ihre Möglichkeiten aus, die neue Funktion f' zu vereinfachen? Verdeutlichen Sie Ihre Antwort an einem neuen Karnaugh-Diagramm, und geben Sie eine möglichst einfache Darstellung von f' an.

(a)

$$f(a,b,c,d) = \left(\bar{a}\bar{b}c\bar{d}\right) + \left(\bar{a}\bar{b}cd\right) + \left(\bar{a}bc\bar{d}\right) + \left(\bar{a}bcd\right) + \left(abc\bar{d}\right) + \left(a\bar{b}cd\right) + \left(a\bar{b}c\bar{d}\right)$$

(b)

cd \ ab	00	01	11	10
10	1	1	1	1
11	1	1		1
01				
00				

$f(a,b,c,d) = c\bar{d} + \bar{a}c + \bar{b}c$

(c) Don't Care Argumente

- Nicht bei jeder Schaltfunktion sind alle der 2^n möglichen Kombinationen festgelegt
- Im Karnaugh-Diagramm kennzeichnen wir diese Fälle mit „D"
- Mit D gekennzeichnete Felder **können** verwendet werden **müssen** aber nicht

cd \ ab	00	01	11	10
10	1	1	1	1
11	1	1	D	1
01				
00				

$f'(a,b,c,d) = c$

Aufgabe T13: Quine-McCluskey

(– Pkt.)

a. Vereinfachen Sie den folgenden Booleschen Term unter Anwendung des Algorithmus von Quine-McCluskey:
$f(x) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4$
Geben Sie dabei alle notwendigen Schritte an!

b. Berechnen Sie die Kosten vor und nach der Optimierung. Wie viel kann an Kosten eingespart werden?

c. Begründen Sie, ob in diesem Beispiel auch eine Optimierung mittels Karnaugh-Diagrammen möglich wäre.

(a) 1

Gruppe	Minterm	Einschlägiger Index		
1	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	0111	=	7
	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	1011	=	11
	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$	1101	=	13
2	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	1001	=	9
	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	1100	=	12
3	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	1000	=	8
4	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	0000	=	0

Quine – McCluskey Verfahren

Schritt 1: Implikanten bestimmen

Schritt 2: Implikanten verkürzen => Primimplikanten

Schritt 3: Mit Primimplikanten verkürzte Boolsche Funktion bestimmen

2 Paarweise Vergleichen

Gruppe	Implikant	Einschlägiger Index		
1	$x_1\bar{x}_2x_4$	10*1	=	11,9
	$x_1\bar{x}_3x_4$	1*01	=	13,9
	$x_1x_2\bar{x}_3$	110*	=	12,13
	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	0111	=	7
2	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	100*	=	9,8
	$x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$	1*00	=	8,12
3	$\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	*000	=	8,0

Again: Paarweise Vergleichen
If a pair of Indices have already been represented, can just leave it out

↓ Primimplikanten

Implikant	Einschlägiger Index		
$x_1\bar{x}_3$	1*0*	=	13,9,8,12
$x_1\bar{x}_2x_4$	10*1	=	11,9
$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	0111	=	7
$\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	*000	=	8,0

Primimplikant	0	7	8	9	11	12	13
$x_1\bar{x}_3$			1	1		1	1
$x_1\bar{x}_2x_4$				1	1		
$\bar{x}_1x_2x_3x_4$		1					
$\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	1		1				

$$f(x) = x_1\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

(b)

Ohne Optimierung:
$(4-1)*7+(7-1) = 3*7+6 = 27$

Mit Optimierung:
$(1+2+3+2)+3 = 11$

Ersparnis: 16

$$f(x) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3x_4$$

$$f(x) = x_1\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

(c)

In diesem Beispiel wäre auch eine Optimierung über K ohne weiters möglich, da bei dieser Variablenzahl eine Darstellung in der Matrix noch übersichtlich ist.

Zur Optimierung von Booleschen Funktionen mit mehr als 4 Variablen sollte dann das Quine-McCluskey-Verfahren angewandt werden.