

Tutoriumsblatt 4

Rechnerarchitektur im SoSe 2020

Zu den Modulen G, H

Tutorium: Die Aufgaben werden in Tutorien-Videos vorgestellt, die am 14. Mai 2020 (17 Uhr) veröffentlicht werden.

Aufgabe T11: Minimierung mittels Karnaugh

(– Pkt.)

Minimieren Sie folgende Funktionen mit Hilfe des Karnaugh-Diagramms.

Geben Sie dabei sowohl das jeweilige gezeichnete Karnaugh-Diagramm, als auch die zugehörige minimierte Funktion in disjunktiver Form an!

a. $y_1 = (x_1 x_2 \bar{x}_3) + (x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) + (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3) + (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3) + (x_1 \bar{x}_2 x_3) + (x_1 x_2 x_3)$

b. $y_2 = (\bar{x}_2 x_3 x_4) + (\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4) + (x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4) + (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4) + (\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4) + (\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4) + (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4)$

Resolutionsregel

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \\ &= (x_1 + \bar{x}_1) x_2 x_3 \quad \leftarrow \text{Distributivgesetz} \\ &= 1 x_2 x_3 \quad \leftarrow \text{Komplementärgesetz} \\ &= x_2 x_3 \quad \leftarrow \text{Neutralitätsgesetz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2 + x_3) * (\bar{x}_1 + x_2 + x_3) \\ &= (x_1 * \bar{x}_1) + x_2 + x_3 \\ &= 0 + x_2 + x_3 \\ &= x_2 + x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}) \\ &= b \vee (a \wedge \bar{a}) \\ &= b \end{aligned}$$

(a)

	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	00	01	11	10
x_3	0	1	1	1	1
	1			1	1

$$y_1 = \bar{x}_3 + x_1$$

(b)

	$\bar{x}_1 \bar{x}_2$	00	01	11	10
$x_3 x_4$	10		1		
	11	1	1		1
	01		1	1	
	00	1	1		

$$\begin{aligned} y_2 &= (\bar{x}_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4) + (\bar{x}_1 x_2) \\ &\quad + (x_2 \bar{x}_3 x_4) + (\bar{x}_2 x_3 x_4) \end{aligned}$$

Aufgabe T12: Schaltfunktion

(– Pkt.)

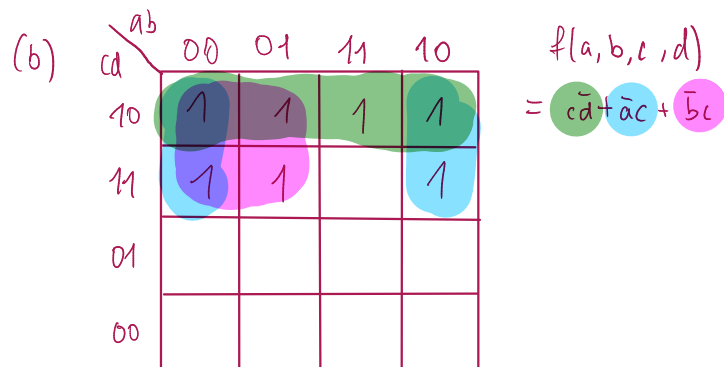
Gegeben ist folgende Wahrheitstabelle:

a	b	c	d	f(a,b,c,d)
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

- Geben Sie die Schaltfunktion von f in disjunktiver Normalform (DNF) an.
- Vereinfachen Sie die Funktion unter Verwendung eines Karnaugh-Diagramms.
- Nehmen Sie an, dass die Wahrheitstabelle wie oben gegeben ist, jedoch ohne die letzte Zeile. Das heißt, die neue Funktion f' ist auf dem Eingabe-4-Tupel (a=1, b=1, c=1, d=1) undefiniert. Wie wirkt sich das auf Ihre Möglichkeiten aus, die neue Funktion f' zu vereinfachen? Verdeutlichen Sie Ihre Antwort an einem neuen Karnaugh-Diagramm, und geben Sie eine möglichst einfache Darstellung von f' an.

(a)

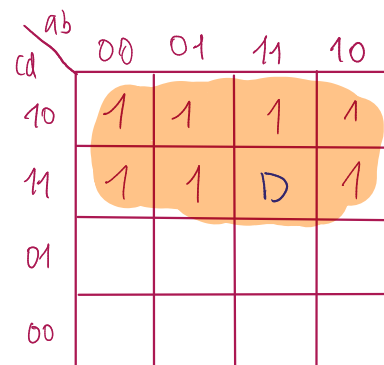
$$\begin{aligned}
 f(a,b,c,d) &= (\bar{a}\bar{b}c\bar{d}) + (\bar{a}\bar{b}cd) \\
 &+ (\bar{a}bc\bar{d}) + (\bar{a}bcd) \\
 &+ (abc\bar{d}) + (abcd) \\
 &+ (a\bar{b}c\bar{d})
 \end{aligned}$$



(c) Don't Care Argumente

- Nicht bei jeder Schaltfunktion sind alle der 2^n möglichen Kombinationen festgelegt
- Im Karnaugh-Diagramm kennzeichnen wir diese Fälle mit „D“
- Mit D gekennzeichnete Felder **können** verwendet werden **müssen** aber nicht

$$f'(a,b,c,d) = c$$



Aufgabe T13: Quine-McCluskey

(– Pkt.)

- Vereinfachen Sie den folgenden Booleschen Term unter Anwendung des Algorithmus von Quine-McCluskey:

$$f(x) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$
 Geben Sie dabei alle notwendigen Schritte an!
- Berechnen Sie die Kosten vor und nach der Optimierung. Wie viel kann an Kosten eingespart werden?
- Begründen Sie, ob in diesem Beispiel auch eine Optimierung mittels Karnaugh-Diagrammen möglich wäre.

(a) ①

Gruppe	Minterm	Einschlägiger Index
1	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	0111 = 7
	$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	1011 = 11
	$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	1101 = 13
2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	1001 = 9
	$x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	1100 = 12
3	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	1000 = 8
4	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	0000 = 0

② Paarweise Vergleichen

Gruppe	Implikant	Einschlägiger Index
1	$x_1 \bar{x}_2 x_4$	10*1 = 11, 9
	$x_1 \bar{x}_3 x_4$	1*01 = 13, 9
	$x_1 x_2 \bar{x}_3$	110* = 12, 13
	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	0111 = 7
2	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$	100* = 9, 8
	$x_1 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	1*00 = 8, 12
3	$\bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	*000 = 8, 0

Again: Paarweise Vergleichen

If a pair of indices have already been represented, can just leave it out

↓ Primimplikanten

Implikant	Einschlägiger Index
$x_1 \bar{x}_3$	1*0* = 13, 9, 8, 12
$x_1 \bar{x}_2 x_4$	10*1 = 11, 9
$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	0111 = 7
$\bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	*000 = 8, 0

Quine - McCluskey Verfahren

Schritt 1: Implikanten bestimmen

Schritt 2: Implikanten verkürzen => Primimplikanten

Schritt 3: Mit Primimplikanten verkürzte Boolesche Funktion bestimmen

(b)

Ohne Optimierung:

$$(4 - 1) * 7 + (7 - 1) = 3 * 7 + 6 = 27$$

Mit Optimierung:

$$(1 + 2 + 3 + 2) + 3 = 11$$

Ersparnis: 16

$f(x)$

$$= \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$$

$f(x)$

$$= x_1 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

(c)

In diesem Beispiel wäre auch eine Optimierung über K ohne weiters möglich, da bei dieser Variablenzahl eine Darstellung in der Matrix noch übersichtlich ist.

Zur Optimierung von Booleschen Funktionen mit mehr als 4 Variablen sollte dann das Quine-McCluskey-Verfahren angewandt werden.

Primimplikant	0	7	8	9	11	12	13
$x_1 \bar{x}_3$			1	1		1	1
$x_1 \bar{x}_2 x_4$				1	1		
$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$		1					
$\bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	1		1				

$f(x)$

$$= x_1 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 x_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 + \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$$