Rechnerarchitektur (SS20)
Online-Hausarbeit 3

Yudong Sun
12141043

14. Juni 2020

[OH5] (a) Die letzte 2 Ziffern meiner Matrikelnummer lautet „43“ $\implies X = 43$. Die Zweierkomplementdarstellung von X ist dann

$$\begin{aligned} Y &= (12)_{10} = (00001100)_2 \\ K_2(Y) &= 11110011 + 1 = 11110100 \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Die erste 2 Ziffern meiner Matrikelnummer lautet „12“ $\implies Y = 12$. Die Zweierkomplement von Y ist dann:

$$\begin{aligned} Y &= (12)_{10} = (00001100)_2 \\ K_2(Y) &= 11110011 + 1 = 11110100 \end{aligned} \tag{2}$$

(c)

$$\begin{array}{rcccccccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & & & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \cancel{(1)} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Wir streichen den Übertrag aus und merken, dass die erste Ziffer 0 ist. Damit ist das Ergebnis 00011111 positiv und muss nicht umgewandelt werden. Es gilt:

$$X + K_2(Y) = (00011111)_2 = (31)_{10} \tag{3}$$

Das stimmt mit der Rechnung $43 - 12 = 31$ überein.

[OH6] Es sei $X = 1043$ und $Y = {}^{1043}/_{4} = 260.75 = 260 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Dann ist die Binärdarstellung von Y gegeben durch:

$$Y = (260.75)_{10} = (100000100.11)_2 = (1.0000010011)_2 \cdot 2^{(8)_{10}} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \text{IEEE-754}(Y) &= (1.0000010011)_2 \cdot 2^{(8+127)_{10}} = (1.0000010011)_2 \cdot 2^{(135)_{10}} \\ &= (1.0000010011)_2 \cdot 2^{(10000111)_2} \end{aligned} \tag{5}$$

Die IEEE-754 Darstellung ist dann:

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S	Exponent								Significand																						

[OH7] Da $E = (11111111)_2$ in dem IEEE-754 Standard speziall betrachtet wird, hat die größste darstellbare Zahl R_{max} ein Exponent von $E = (11111110)_2 = 254$, inklusive das 127 Bias. Damit ist R_{max}:

$$
\begin{aligned}
R_{\text{max}} &= (1.11111111111111111111111)_2 \cdot 2^{(254-127)_{10}} \\
&= (2^{24} - 1)_{10} \cdot 2^{(127-23)_{10}} = (2^{24} - 1)_{10} \cdot 2^{(104)_{10}} \\
&= (3.402823466 \cdot 10^{38})_{10}
\end{aligned}
$$

Analog hat die kleinste darstellbare Zahl das Exponent $E = (00000000)_2$ mit Bias und es gilt:

$$
\begin{aligned}
R_{\text{min}} &= (0.0000000000000000000001)_2 \cdot 2^{(-127)_{10}} \\
&= (2^{-22})_{10} \cdot 2^{(-127)_{10}} = (2^{-149})_{10} \\
&= (1.401298464 \cdot 10^{-45})_{10}
\end{aligned}
$$

Leider (oder glücklicherweise) ist der Bereich von Zahlen, die dargestellt werden können, groß genug, um fast alle Zahlen aus der Naturwissenschaft als eine 32-bit Fließkommazahl darzustellen.

Im Allgemein ist diese Darstellung aber nicht exact, was uns verlangt ist. Ein Beispiel einer extrem kleinen Zahl ist das Plancksches Wirkungsquantum h, was als

$$h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s^{-1}}$$

exact definiert ist. Da es keine ganze Zahl ist, lässt es sich nur durch eine Floating Point Zahl dargestellt werden.

Wir nomieren erst die Zahl mit $2^{-\lceil \log_2(h) \rceil}$ und erhalten wir:

$$a_0 = h \times 2^{-\lceil \log_2(h) \rceil} = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \times 2^{111} = 1{,}720\,226\,161\,213\,82$$

Wir betrachten nun die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit:

$$a_n = \big(a_{n-1} - \lfloor a_{n-1} \rfloor\big) \times 2 \qquad\qquad b_n = \lfloor a_n \rfloor$$

Das n-te b_n ist dann die n-te Ziffer unseres Mantisses. b_0 wird laut IEEE-754 nicht gespeichert. Da uns nur 23-Bits für das Significand zur Verfügung steht, können wir nur bis b_{23} speichern, obwohl es mehr Ziffern b_i gibt, mit $i > 23$, $b_i \neq 0$.

In IEEE-754 dargestellt ist h dann:

31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1
S	Exponent								Significand																						

was umgerechnet:

$$h' = 1{,}720\,226\,168\,632\,507\,3 \times 2^{-111} = 6{,}626\,070\,179 \cdot 10^{-34} \qquad \text{(9 Nks.)}$$

ergibt. Das entspricht ein Fehler von $2{,}9 \cdot 10^{-42}$.

Somit lässt h sich aus der Beschränkung der Anzahl der Bits nicht exact als Festkommazahl in 32 Bit-Darstellung darstellen und man kann nur eine Annäherung mit einem Fehler von $2{,}9 \cdot 10^{-42}$ im Computer speichern.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass die abgegebene Lösung alleinig durch mich angefertigt wurde und ohne die Hilfe Dritter entstanden ist. Insbesondere habe ich keine Lösungen von Dritten teilweise oder gänzlich abgegeben.

12141043, Yudong Sun	Singapur, den 14. Juni 2020
Matrikelnummer, Name	Ort, Datum

Unterschrift