FLU – Flüssigkeitsmechanik
Auswertung

Yudong Sun
in Zusammenarbeit mit David Giesegh und Joel Schönberger

Gruppe F2

5. März 2020

Teilversuch 1: Oberfläsche Spannung einer Flüssigkeit

Bestimmung des Radius des Aluminiumrings

Da der Alumimiumring eine endliche Dicke hat, messen wir beide Innen- (r_i) und Außenradien (r_a) des Rings und nehmen für die Rechnung den Durchschnitt davon. In diesem Fall können wir nur den Durchmesser ($2r$) messen und daraus den Radius des Rings berechnen.

Fehler bei jeder Messung $= 0{,}05\,\mathrm{mm}$

$2r_i$ / mm		$2r_a$ / mm		$\bar{r}$ / mm
$2r_{i1}$	$2r_{i2}$	$2r_{a1}$	$2r_{a2}$	
61,40	61,60	62,50	62,45	30,993 75

wobei $\bar{r}$ ist gegeben durch:

$$\bar{r} = \frac{2r_{i1} + 2r_{i2} + 2r_{a1} + 2r_{a2}}{8} \tag{1.1}$$

Der dazugehörige Fehler ist folglich dann:

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{r} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial 2r_{i1}}\Delta 2r_{i1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial 2r_{i2}}\Delta 2r_{i2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial 2r_{a1}}\Delta 2r_{a1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial 2r_{a2}}\Delta 2r_{a2}\right)^2} \\
&= \sqrt{4\left(\frac{1}{8}\Delta 2r\right)^2} = \frac{1}{4}\Delta 2r \\
&= \frac{1}{4}\left(0{,}05\,\mathrm{mm}\right) = 0{,}0125\,\mathrm{mm}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Daraus folgt: $\bar{r} = r = (30{,}994 \pm 0{,}013)\,\mathrm{mm}$.

Bestimmung der Gewichtskraft des Aluminiumrings im Luft

Fehler bei jeder Messung $= 0{,}0005\,\mathrm{N}$

n	1	2	$\overline{F_g}$
Gewichtskraft F_g / N	0,0540	0,0535	0,053 75

wobei $\overline{F_g} = \sum F_{gn}/2$ der Durchschnitt ist.

Der dazugehörige Fehler ist folglich dann:

$$\begin{aligned}\Delta\overline{F_g} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \overline{F_g}}{\partial F_{g1}}\Delta F_{g1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{F_g}}{\partial F_{g2}}\Delta F_{g2}\right)^2} = \frac{\Delta F_g}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{0{,}0005\,\mathrm{N}}{\sqrt{2}} = 3{,}535\,54 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N} \qquad \text{(6 sig. Zif.)}\end{aligned} \tag{1.3}$$

Daraus folgt: $\overline{F_g} = F_g = (0{,}0538 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{N}$

Bestimmung der Oberfläschespannung von Wasser

Messreihe

Fehler bei jeder Messung $= 0{,}0005\,\mathrm{N}$

n	1	2	3	4	5	6	$\overline{F}$
Kraft F / N	0,0800	0,0810	0,0790	0,0795	0,0800	0,0795	0,079 833 3

wobei $\overline{F} = \sum F_n/6$ der Durchschnitt ist.

Der dazugehörige Fehler ist analog zu (1.3) folglich dann:

$$\Delta\overline{F} = \frac{\Delta F}{\sqrt{6}} = \frac{0{,}0005\,\mathrm{N}}{\sqrt{6}} = 2{,}041\,25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N} \qquad \text{(6 sig. Zif.)} \tag{1.4}$$

Daraus folgt: $\overline{F} = F = (0{,}079\,83 \pm 0{,}000\,21)\,\mathrm{N}$

Rechnung

Aus Gleichung (13) der Anleitung ist der Oberfläschespannung gegeben durch:

$$\sigma = \frac{F - F_g}{4\pi r} \tag{1.5}$$

Der Fehler ist folglich dann:

$$\Delta\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial F}\Delta F\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial F_g}\Delta F_g\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial r}\Delta r\right)^2} \tag{1.6}$$

Die partielle Ableitungen liefern jeweils:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial F} &= \frac{1}{4\pi r} = -\frac{\partial\sigma}{\partial F_g} \\ \frac{\partial\sigma}{\partial r} &= -\frac{F - F_g}{4\pi r^2}\end{aligned}$$

In Gleichung (1.6) einsetzen:

$$\Delta\sigma = \frac{1}{4\pi r}\sqrt{(\Delta F)^2 + \left(\Delta F_g\right)^2 + \left(\frac{F - F_g}{r}\Delta r\right)^2} \tag{1.7}$$

Durch Gleichungen (1.5) und (1.7) lässt es sich σ bestimmen:

$$\sigma = \frac{0{,}079\,83\,\mathrm{N} - 0{,}053\,75\,\mathrm{N}}{4\pi \times 30{,}993\,75\,\mathrm{mm}} = 6{,}696\,98 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N\,mm^{-1}} \qquad \text{(6 sig. Zif.)} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}\Delta\sigma &= \frac{1}{4\pi 30{,}993\,75\,\mathrm{mm}}\left(\left(2{,}041\,25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}\right)^2 + \left(3{,}535\,54 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}\right)^2\right.\\ &\quad \left. + \left(\frac{0{,}079\,83\,\mathrm{N} - 0{,}053\,75\,\mathrm{N}}{30{,}993\,75\,\mathrm{mm}}0{,}0125\,\mathrm{mm}\right)^2\right)^{1/2}\\ &= 1{,}049 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N\,mm^{-1}}\end{aligned} \tag{1.9}$$

Der Werte von π direkt aus dem Taschenrechner wurde hier benutzt. Werte mit mehr signifikante Ziffern wurden hier auch benutzt, um mögliche Rundungsfehler zu vermeiden.

Daraus folgt, dass $\sigma_w = (6{,}70 \pm 0{,}11) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N\,mm^{-1}}$.

Vergleich

Der Temperatur des Labor ist ungefähr der Temperatur des Wassers im Teilversuch 3 $= (21{,}10 \pm 0{,}05)\,°\mathrm{C} = (294{,}10 \pm 0{,}05)\,\mathrm{K}$

Laut der Dortmunder Datenbank[1] ist der Oberfläschespannung des Wassers wie folgt:

Temperatur / K	σ_w / $\mathrm{mN\,m^{-1}}$
293,15	72,7500
297,15	71,5000

Im Vergleich liegt der Literaturwert öffentsichlich nicht in dem Fehlerintervall unseres emprisches Wert $\sigma_w = (6{,}70 \pm 0{,}11) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N\,mm^{-1}} = (6{,}70 \pm 0{,}11)\,\mathrm{mN\,m^{-1}}$:

Fehlerintervall:

$$\max\left(\sigma_{w\,(\mathrm{exp})}\right) = 6{,}81\,\mathrm{mN\,m^{-1}}$$
$$\min\left(\sigma_{w\,(\mathrm{exp})}\right) = 6{,}59\,\mathrm{mN\,m^{-1}}$$

$3 \times$ Fehlerintervall:

$$\max\left(\sigma_{w\,(\mathrm{exp})}\right) = 7{,}03\,\mathrm{mN\,m^{-1}}$$
$$\min\left(\sigma_{w\,(\mathrm{exp})}\right) = 6{,}37\,\mathrm{mN\,m^{-1}}$$

Das Ergebnis $\sigma_{w\,(\mathrm{exp})}$ und der Vergleichwert unterscheiden sich signifikant voneinander.

Dieses Unterschied kann vermutlich auf zwei Gründen zurückgeführt werden:

- Ungenauigkeiten bei Messung

  Es könnte sein, dass die Fehler aller Messungen deutlich unterschätzt waren, besonders bei der Messung des Durchmessers des Aluminiumrings. Da der Ring eine endliche Dicke hat, könnte es auch sein, dass das vorgeschlagene Modell die physikalische Situation nicht vollständig beschreiben kann. Daraus entstehen dann Fehler bei der Rechnung.

[1] DDBST GmbH, „Surface Tension of Water", Dortmund Data Bank. [Online]. Verfügbar unter: http://www.ddbst.de/en/EED/PCP/SFT_C174.php. [Zugegriffen: 04-März-2020].

- Steuerung der Parameter

  Es könnte auch sein, dass die Parameter nicht richtig gesteuert bzw. berücksichtigt wurden. Die Temperatur des Wassers war beispielsweise nicht gemessen. Der Ring könnte auch noch Ethanol haben, oder waren einfach nicht genug gesäubert. Daraus entstehen dann Fehler bei der Messung, die nicht berücksichtigt waren.

Teilversuch 3: Strömung einer Flüssigkeit durch eine Kapillare

Fehler bei jeder Messung der Höhe $h = 1\,\mathrm{mm}$
Fehler bei jeder Messung der Zeit $t = 0{,}2\,\mathrm{s}$

Die höhe $h_\infty = (83 \pm 2)\,\mathrm{mm}$

t/min	0	1	2	3	4	5	6	7
h/mm	418	386	358	333	311	290	271	254
$\ln\left[(h - h_\infty)/\mathrm{mm}\right]$	5,81	5,71	5,62	5,52	5,43	5,33	5,24	5,14

t/min	8	9	10	11	12	13	14	15
h/mm	238	225	212	200	190	180	172	164
$\ln\left[(h - h_\infty)/\mathrm{mm}\right]$	5,04	4,96	4,86	4,76	4,67	4,57	4,49	4,39

Fehler bei jeder Rechnung von $y = \ln\left[(h - h_\infty)/\mathrm{mm}\right]$ ist gegeben durch:

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial h}\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial h_\infty}\Delta h_\infty\right)^2} = \frac{1}{h - h_\infty}\sqrt{(1\,\mathrm{mm})^2 + (2\,\mathrm{mm})^2} = \frac{\sqrt{5}\,\mathrm{mm}}{h - h_\infty} \tag{3.1}$$

Normale Anpassungsalgorithmen (Methode der kleinsten Quadrate) setzen voraus, dass die x-Variable die unabhängige Variable ist und als fehlerfrei genommen werden kann. Da es sich bei diesem Versuch um zwei gemessene Variablen handelt, gibt es bei beiden Variablen y und t Fehler. Die Fehler müssen dann während der Kurvenanpassung berücksichtigt werden.

Aus Gleichung (6) der Anleitung haben wir den folgenden Zusammenhang:

$$\ln(h - h_\infty) = -\frac{\pi r^4 \rho g}{8\eta L A_v} t + \ln(h_0 - h_\infty) \equiv \alpha t + \beta \tag{3.2}$$

Die Daten wurden dann mit `gnuplot` geplottet und es wurde eine Kurvenanpassung durchgeführt (Siehe Appendix A):

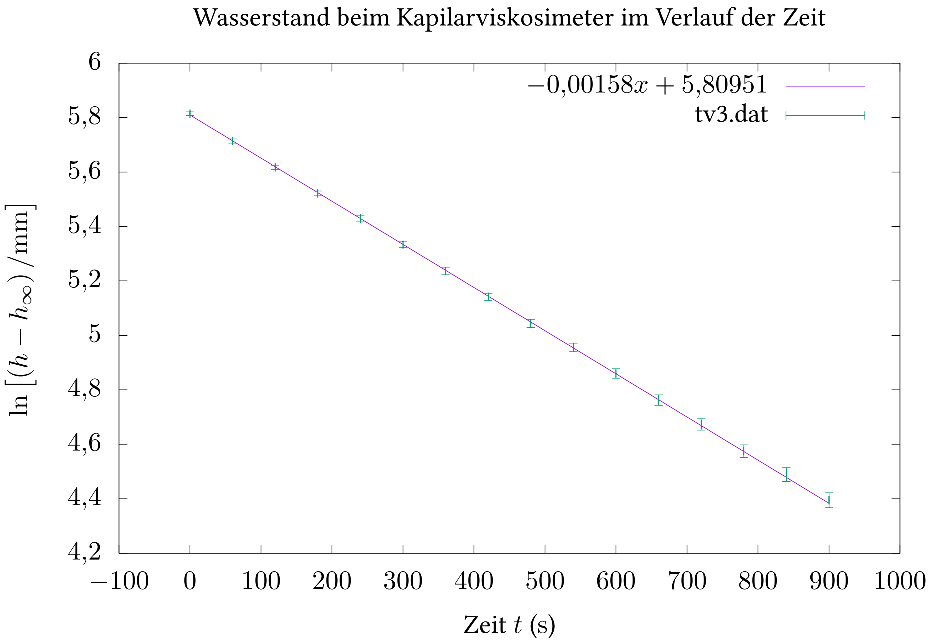

Abbildung 3.1: Strömung des Wassers durch eine Kapillare
$\chi^2_{\text{red}} = 0.0946142 < 1 \implies$ Gute Kurvenanpassung

Wir haben als Endergebnis:

α	$(-0{,}001\,584\,66 \pm 0{,}000\,003\,90)\,\mathrm{s}^{-1}$
β	$5{,}809\,51 \pm 0{,}001\,28$

Die y-Achsenabschnitt $\beta = 5{,}809\,51 \pm 0{,}001\,28 = 5{,}81 \pm 0{,}13$ laut der Kurvenanpassung stimmt mit dem gemessenen Wert $\ln\left[(h - h_\infty)\right]_{\text{exp}} = 5{,}814 \pm 0{,}007$ überein.

Nach Gleichung (3.2) ist α und folglich die Viskosität von Wasser η gegeben durch:

$$\alpha = -\frac{\pi r^4 \rho g}{8\eta L A_v} \iff \eta = -\frac{\pi r^4 \rho g}{8\alpha L A_v} = -\frac{\cancel{\pi} d^4 \rho g}{128 \alpha L \left(\cancel{\pi} r_v^2\right)} = -\frac{d^4 \rho g}{32 \alpha L d_v^2} = -\left(\frac{\rho g}{32}\right) d^4 \alpha^{-1} L^{-1} d_v^{-2} \tag{3.3}$$

wobei $d =$ Durchmesser der Kapillare und $d_v =$ der Durchmesser des Vorratsrohres.

Der Fehler $\Delta\eta$ ist dann:

$$\begin{aligned}\Delta\eta &= \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial d}\Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\Delta \alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial L}\Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial d_v}\Delta d_v\right)^2} \\ \text{(AMW Seite 20)} &= \eta \times \sqrt{\left(4\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \alpha}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d_v}{d_v}\right)^2}\end{aligned} \tag{3.4}$$

Mit der folgenden Werten:

Variable	Wert	Bedeutung
g	$9807\,\mathrm{mm\,s^{-2}}$	Erdfeldbeschleunigung
ρ	$9{,}98 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{g\,mm^{-3}}$	Wasserdichte
α	$(-0{,}001\,584\,66 \pm 0{,}000\,003\,90)\,\mathrm{s^{-1}}$	Gefundene Steigung der Gerade
d	$(0{,}80 \pm 0{,}05)\,\mathrm{mm}$	Durchmesser der Kapillare
d_v	$(15{,}95 \pm 0{,}05)\,\mathrm{mm}$	Durchmesser des Vorratsrohres
L	$(245 \pm 4)\,\mathrm{mm}$	Länge der Kapillare

lässt sich η und $\Delta\eta$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\eta &= -\frac{(0{,}80\,\mathrm{mm})^4\left(9{,}98 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{g\,mm^{-3}}\right)\left(9807\,\mathrm{mm\,s^{-2}}\right)}{32\left(-0{,}001\,584\,66\,\mathrm{s^{-1}}\right)(245\,\mathrm{mm})(15{,}95\,\mathrm{mm})^2} \\
&= 1{,}268\,39 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g\,mm^{-1}\,s^{-1}} \quad \text{(6 sig. Zif.)} && (3.5) \\
\Delta\eta &= \left(1{,}268\,39 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g\,mm^{-1}\,s^{-1}}\right) && (3.6) \\
&\quad \times \sqrt{\left(4 \cdot \frac{0{,}05\,\mathrm{mm}}{0{,}80\,\mathrm{mm}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}000\,003\,90\,\mathrm{s^{-1}}}{0{,}001\,584\,66\,\mathrm{s^{-1}}}\right)^2 + \left(\frac{4\,\mathrm{mm}}{245\,\mathrm{mm}}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{0{,}05\,\mathrm{mm}}{15{,}95\,\mathrm{mm}}\right)^2} \\
&= 3{,}18 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{g\,mm^{-1}\,s^{-1}} \quad \text{(3 sig. Zif.)} && (3.7)
\end{aligned}$$

Daraus folgt: $\eta_w = \eta = (1{,}3 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g\,mm^{-1}\,s^{-1}} = (1{,}3 \pm 0{,}4)\,\mathrm{mPa\,s}$

Gefunden sei die Temperatur des Wassers $T = (21{,}10 \pm 0{,}05)\,°\mathrm{C}$. Der Literaturwert $\eta_{w\,\text{(lit)}} = 0{,}978\,\mathrm{mPa\,s}$ bei $21\,°\mathrm{C}$ liegt im Fehlerintervall des Wertes $\eta_{w\,\text{(exp)}} = (1{,}3 \pm 0{,}4)\,\mathrm{mPa\,s}$. Diese zwei Werte stimmen miteinander überein.

Teilversuch 5: Sinken von Kugeln in einer viskosen Flüssigkeit

Verhältnis aus Rohrradius R und Kugelradius r

Kugel

Fehler bei Messung des Kugeldurchmessers $= 0{,}01\,\mathrm{mm}$

Messung n	1	2	$\overline{d_i}$
Durchmesser der kleinen Kugel d_k / mm	0,98	0,99	0,985
Durchmesser der großen Kugel d_g / mm	2,99	2,99	2,990

Der Mittelwerte $\overline{d_i}$, $i = g, k$ wurden wie folgt berechnet:

$$\Delta d := \overline{d_i} = \frac{1}{N}\left(\sum_{x=1}^{N} d_{in}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{x=1}^{2} d_{in}\right) \tag{5.1}$$

Da alle Messungen stochastisch unabhängig sind, benutzen wir hier die Gauß'scher Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta\overline{d_i} = \frac{\Delta d_i}{\sqrt{N}} = \frac{\Delta d_i}{\sqrt{2}} = \frac{0{,}01\,\mathrm{mm}}{\sqrt{2}} = 0{,}008\,\mathrm{mm} \tag{5.2}$$

Rohr

Innendurchmesser des kleinen Rohres D_k	$(9{,}95 \pm 0{,}05)\,\mathrm{mm}$
Innendurchmesser des großen Rohres D_g	$(55{,}45 \pm 0{,}05)\,\mathrm{mm}$

Verhältnisse

Die Verhältnis k aus Rohrradius R und r und der dazugehörige Fehler Δk sind gegeben durch:

$$k = \frac{R}{r} = \frac{D}{d} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} \Delta k &= \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial D}\Delta D\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial d}\Delta d\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta D}{d}\right)^2 + \left(\frac{D}{d^2}\Delta d\right)^2} \\ &= \frac{1}{d}\sqrt{(\Delta D)^2 + \left(\frac{D}{d}\Delta d\right)^2} \end{aligned} \tag{5.4}$$

k ist Einheitslos.

Kleine Kugel, Kleines Rohr

$$k = \frac{D_k}{d_k} = \frac{9{,}95\,\mathrm{mm}}{0{,}985\,\mathrm{mm}} = 10{,}1015 \quad \text{(6 sig. Zif.)} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \Delta k &= \frac{1}{0{,}985\,\mathrm{mm}}\sqrt{(0{,}05\,\mathrm{mm})^2 + \left(\frac{9{,}95\,\mathrm{mm}}{0{,}985\,\mathrm{mm}}\left(\frac{0{,}01\,\mathrm{mm}}{\sqrt{2}}\right)\right)^2} \\ &= 0{,}0886 \quad \text{(3 sig. Zif.)} \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\Longrightarrow k_{kK} = 10{,}10 \pm 0{,}09 \tag{5.7}$$

Kleine Kugel, Großes Rohr

$$k = \frac{D_g}{d_k} = \frac{55{,}45\,\mathrm{mm}}{0{,}985\,\mathrm{mm}} = 56{,}2944 \quad \text{(6 sig. Zif.)} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} \Delta k &= \frac{1}{0{,}985\,\mathrm{mm}}\sqrt{(0{,}05\,\mathrm{mm})^2 + \left(\frac{55{,}45\,\mathrm{mm}}{0{,}985\,\mathrm{mm}}\left(\frac{0{,}01\,\mathrm{mm}}{\sqrt{2}}\right)\right)^2} \\ &= 0{,}408 \quad \text{(3 sig. Zif.)} \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\Longrightarrow k_{kG} = 56{,}3 \pm 0{,}5 \tag{5.10}$$

Große Kugel, Kleines Rohr

$$k = \frac{D_k}{d_g} = \frac{9{,}95\,\mathrm{mm}}{2{,}990\,\mathrm{mm}} = 3{,}327\,76 \qquad \text{(6 sig. Zif.)} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}\Delta k &= \frac{1}{2{,}990\,\mathrm{mm}}\sqrt{(0{,}05\,\mathrm{mm})^2 + \left(\frac{9{,}95\,\mathrm{mm}}{2{,}990\,\mathrm{mm}}\left(\frac{0{,}01\,\mathrm{mm}}{\sqrt{2}}\right)\right)^2} \\ &= 0{,}0185 \qquad \text{(3 sig. Zif.)} \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\implies k_{gK} = 3{,}328 \pm 0{,}019 \tag{5.13}$$

Große Kugel, Großes Rohr

$$k = \frac{D_g}{d_k} = \frac{55{,}45\,\mathrm{mm}}{2{,}990\,\mathrm{mm}} = 18{,}5452 \qquad \text{(6 sig. Zif.)} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}\Delta k &= \frac{1}{2{,}990\,\mathrm{mm}}\sqrt{(0{,}05\,\mathrm{mm})^2 + \left(\frac{55{,}45\,\mathrm{mm}}{2{,}990\,\mathrm{mm}}\left(\frac{0{,}01\,\mathrm{mm}}{\sqrt{2}}\right)\right)^2} \\ &= 0{,}0470 \qquad \text{(3 sig. Zif.)} \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\implies k_{gG} = 18{,}55 \pm 0{,}05 \tag{5.16}$$

Tabuliert haben wir für k:

	Kleine Kugel	Große Kugel
Kleines Rohr	$10{,}10 \pm 0{,}09$	$3{,}328 \pm 0{,}019$
Großes Rohr	$56{,}3 \pm 0{,}5$	$18{,}55 \pm 0{,}05$

Sinkgeschwindigkeiten

Angenommen, dass die Kugeln eine konstante Geschwindigkeit während des Sinkens haben, dann lässt sich die Sinkgeschwindigkeit v und der dazugehörige Fehler Δk durch einfache Kinematik bestimmen:

$$v = \frac{s}{t} \tag{5.17}$$

$$\Delta v \overset{(5.4)}{=} \frac{1}{t} \times \sqrt{(\Delta s)^2 + \left(\frac{s}{t}\Delta t\right)^2} \tag{5.18}$$

wobei $s =$ Höhe der Fallstrecke und $t =$ Fallzeit.

Als Fallstrecke haben wir immer $s = (801 \pm 1)\,\mathrm{mm}$.

Für die Fallzeiten haben wir immer einen Fehler von $0{,}2\,\mathrm{s}$.

Kleine Kugel, Weites Rohr

Als Fallzeiten der kleine Kugel im weiten Rohr haben wir:

Messung	1	2	3	$\overline{t_i}$
Fallzeit t_i / s	109,02	109,09	109,30	109,137

Die Rechnung für den Mittelwert erfolgt wie bei Gleichung (5.1) mit $N = 3$. Der Fehler ist dann analog zu (5.2) $= 0{,}2\,\mathrm{s}/\sqrt{3} = 0{,}12\,\mathrm{s}$.

v und Δv sind dann gegeben durch:

$$v = \frac{801\,\mathrm{mm}}{109{,}137\,\mathrm{s}} = 7{,}339\,42\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \qquad \text{(6 sig. Zif.)} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{1}{109{,}137\,\mathrm{s}} \times \sqrt{(1\,\mathrm{mm})^2 + \left(\frac{801\,\mathrm{mm}}{109{,}137\,\mathrm{s}}\left(\frac{0{,}2\,\mathrm{s}}{\sqrt{3}}\right)\right)^2} \\ &= 0{,}0121\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \qquad \text{(3 sig. Zif.)} \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\Longrightarrow v_{kw} = (7{,}339 \pm 0{,}012)\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \tag{5.21}$$

Kleine Kugel, Enges Rohr

Als Fallzeiten der kleine Kugel im engen Rohr haben wir:

Messung	1	2	$\overline{t_i}$
Fallzeit t_i / s	137,15	137,02	137,085

Die Rechnung für den Mittelwert erfolgt wie bei Gleichung (5.1). Der Fehler ist dann analog zu (5.2) $= 0{,}2\,\mathrm{s}/\sqrt{2} = 0{,}15\,\mathrm{s}$.

v und Δv sind dann gegeben durch:

$$v = \frac{801\,\mathrm{mm}}{137{,}085\,\mathrm{s}} = 5{,}843\,09\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \qquad \text{(6 sig. Zif.)} \tag{5.22}$$

$$\Delta v = \frac{1}{137{,}085\,\mathrm{s}} \times \sqrt{(1\,\mathrm{mm})^2 + \left(\frac{801\,\mathrm{mm}}{137{,}085\,\mathrm{s}}\left(\frac{0{,}2\,\mathrm{s}}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}$$

$$= 9{,}47 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \qquad \text{(3 sig. Zif.)} \tag{5.23}$$

$$\implies v_{ke} = (5{,}843 \pm 0{,}010)\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \tag{5.24}$$

Große Kugel, Weites Rohr

Als Fallzeiten der große Kugel im weiten Rohr haben wir:

Messung	1	2	$\overline{t_i}$
Fallzeit t_i / s	13,07	13,13	13,10

Die Rechnung für den Mittelwert erfolgt wie bei Gleichung (5.1). Der Fehler ist wie vorher $= 0{,}2\,\mathrm{s}/\sqrt{2} = 0{,}15\,\mathrm{s}$.

v und Δv sind dann gegeben durch:

$$v = \frac{801\,\mathrm{mm}}{13{,}10\,\mathrm{s}} = 61{,}1450\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \qquad \text{(6 sig. Zif.)} \tag{5.25}$$

$$\Delta v = \frac{1}{13{,}10\,\mathrm{s}} \times \sqrt{(1\,\mathrm{mm})^2 + \left(\frac{801\,\mathrm{mm}}{13{,}10\,\mathrm{s}}\left(\frac{0{,}2\,\mathrm{s}}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}$$

$$= 0{,}665\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \qquad \text{(3 sig. Zif.)} \tag{5.26}$$

$$\implies v_{gw} = (61{,}1 \pm 0{,}7)\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \tag{5.27}$$

Große Kugel, Enges Rohr

Als Fallzeiten der große Kugel im engen Rohr haben wir:

Messung	1	2	$\overline{t_i}$
Fallzeit t_i / s	31,86	32,06	31,96

Die Rechnung für den Mittelwert erfolgt wie bei Gleichung (5.1). Der Fehler ist wie vorher $= 0{,}2\,\mathrm{s}/\sqrt{2} = 0{,}15\,\mathrm{s}$.

v und Δv sind dann gegeben durch:

$$v = \frac{801\,\mathrm{mm}}{31{,}96\,\mathrm{s}} = 25{,}0626\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \qquad \text{(6 sig. Zif.)} \tag{5.28}$$

$$\Delta v = \frac{1}{31{,}96\,\mathrm{s}} \times \sqrt{(1\,\mathrm{mm})^2 + \left(\frac{801\,\mathrm{mm}}{31{,}96\,\mathrm{s}}\left(\frac{0{,}2\,\mathrm{s}}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}$$

$$= 0{,}116\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \qquad \text{(3 sig. Zif.)} \tag{5.29}$$

$$\implies v_{ge} = (25{,}06 \pm 0{,}12)\,\mathrm{mm\,s^{-1}} \tag{5.30}$$

Tabuliert haben wir für v:

	Kleine Kugel	Große Kugel
Enges Rohr	$(5{,}84 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$	$(25{,}06 \pm 0{,}12)\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$
Weites Rohr	$(7{,}339 \pm 0{,}012)\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$	$(61{,}1 \pm 0{,}7)\,\mathrm{mm\,s^{-1}}$

Diskussion und Interpretation

Zusammengefasst erhalten wir zum Vergleich:

		Kleine Kugel	Große Kugel
Enges Rohr	k	$10{,}10 \pm 0{,}09$	$3{,}328 \pm 0{,}019$
	$v/\mathrm{mm\,s^{-1}}$	$5{,}843 \pm 0{,}010$	$25{,}06 \pm 0{,}12$
Weites Rohr	k	$56{,}3 \pm 0{,}5$	$18{,}55 \pm 0{,}05$
	$v/\mathrm{mm\,s^{-1}}$	$7{,}339 \pm 0{,}012$	$61{,}1 \pm 0{,}7$

Wenn man das gleiches Rohr betrachtet (R konstant), dann steigt die Sinkgeschwindigkeit v mit abnehmende k. Das sieht man in jeder Zeile der obigen Tabelle.

Wenn man die gleiche Kugel betrachtet (r konstant), dann steigt die Sinkgeschwindigkeit v mit zunehmende k. Das sieht man in jeder Spalte der obigen Tabelle.

Im Allgemein ist es erkennbar, dass die Kugeln im engen Rohr langsamer fallen als im weiten Rohr, und dass die kleine Kugel wesentlich langsamer fällt als die große Kugel. Dies ist darauf zurückzuführen, dass im engen Rohr Reibungseffekte an der Rohrwand verstärkt auftreten, da die Geschwindigkeit des Fluids an der Rohrwand null sein muss. Außerdem steigt die Reibung bei der fallenden Kugel nach Stokes nur linear mit r, währenddessen steigt der Gewichtskraft einer Kugel mit der Ordnung r^3 ($m \propto V \propto r^3$). Dieser Zusammenhang führt zu der beobachteten Situation, indem die größere Kugel schneller fällt.

Die Reproduzierbarkeit der Messungen sollte besser bei der kleinen Kugel im weiten Rohr sein als die Messungen der großen Kugel im engen Rohr. Der Grund dafür ist, dass die Reibungseffekte an der Rohrwand sich kaum bei Abweichungen der kleinen Kugel vom Mittelpunkt des weiten Rohres ändern sollten. Dagegen beeinflussen solche Abweichungen bei der großen Kugel im engen Rohr die Reibungseffekte an der Rohrwand erheblich. Das kann zu der relativen Größen der Kugel und des Rohrs zurückgeführt werden. Zudem fällt die kleinen Kugeln auch langsamer, was eine Zeitmessung vereinfacht.

In unserer Zeitmessungen der kleiner Kugel im weiten Rohr war der Fehler jeder Messung als $0{,}2\,\mathrm{s}$ geschätzt, was nach 3 Messungen auf $\Delta t = 0{,}2\,\mathrm{s}/\sqrt{3} = 0{,}12\,\mathrm{s}$ abnimmt. Das war schon bei der Rechnung der Sinkgeschwindigkeit gerechnet und berücksichtigt.

Viskositätsrechnung

Aus Gleichung (12) der Anleitung lassen die Viskosität η und den dazugehörigen Fehler $\Delta\eta$ sich wie folgt berechnen. Der Fehler von m_f werden in diesem Fall vernachlässigt, um die Rechnung zu vereinfachen.

$$\eta = \frac{\left(m_k - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_f\right) gt}{6\pi r s} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}\Delta\eta &= \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial m_k}\Delta m_k\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\Delta r\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\Delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial s}\Delta s\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\rho}\Delta\rho\right)^2} \\ &\overset{\text{(AMW)}}{=} \eta \times \sqrt{\left(\frac{\Delta m_k}{m_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^2}\end{aligned} \tag{5.32}$$

Mit der folgenden Werte:

Variable	Wert	Bedeutung
g	$9807\,\mathrm{mm\,s^{-2}}$	Erdfeldbeschleunigung
$2r$	$(0{,}985 \pm 0{,}008)\,\mathrm{mm}$	Durchmesser der kleinen Kugel
r	$(0{,}493 \pm 0{,}004)\,\mathrm{mm}$	Radius der kleinen Kugel
t	$(109{,}14 \pm 0{,}12)\,\mathrm{s}$	Fallzeit der kleinen Kugel
s	$(801 \pm 1)\,\mathrm{mm}$	Höhe der Fallstrecke
ρ	$(0{,}856 \pm 0{,}004)\,\mathrm{g\,mL^{-1}}$	Dichte des Öls
$26m_k$	$(0{,}1005 \pm 0{,}0003)\,\mathrm{g}$	Masse von 26 kleinen Kugeln
m_k	$(3{,}865 \pm 0{,}012) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g}$	Masse einer kleiner Kugel

erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{\left(3{,}865 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g} - \frac{4}{3}\pi\,(0{,}493\,\mathrm{mm})^3\,\left(0{,}856 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g\,mm^{-3}}\right)\right)\left(9807\,\mathrm{mm\,s^{-2}}\right)(109{,}14\,\mathrm{s})}{6\pi\,(0{,}493\,\mathrm{mm})\,(801\,\mathrm{mm})} \\
&= 0{,}494\,672\,\mathrm{g\,mm^{-1}\,s^{-1}} \qquad \text{(6 sig. Zif.)} \qquad (5.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\eta &= 0{,}494\,672\,\mathrm{g\,mm^{-1}\,s^{-1}} \\
&\times \sqrt{\left(\frac{0{,}012 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g}}{3{,}865 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}004\,\mathrm{mm}}{0{,}493\,\mathrm{mm}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}12\,\mathrm{s}}{109{,}14\,\mathrm{s}}\right)^2 + \left(\frac{1\,\mathrm{mm}}{801\,\mathrm{mm}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}004\,\mathrm{g\,mL^{-1}}}{0{,}856\,\mathrm{g\,mL^{-1}}}\right)^2} \\
&= 4{,}95 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{g\,mm^{-1}\,s^{-1}} \qquad \text{(3 sig. Zif.)} \qquad (5.34)
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\eta = (0{,}495 \pm 0{,}005)\,\mathrm{g\,mm^{-1}\,s^{-1}} = (0{,}495 \pm 0{,}005)\,\mathrm{Pa\,s}$

Vergleich mit dem Literaturwert

Laut der Anleitung haben die absolute Temperatur und die Viskosität eines Öls die folgende Relation:

$$\eta(T) = \eta_\infty \exp\left(B/T\right) \iff \ln[\eta] = B \cdot \left(\frac{1}{T}\right) + \ln[n_\infty] \tag{5.35}$$

Wir plotten mithilfe `gnuplot` $\ln[\eta]$ gegen $\frac{1}{T}$ der angegebenen Daten und führen eine Kurvenanpassung durch. Die gefundene Gerade wird dann zum Rechnung der Literaturwert der Viskosität des Öls im Labor benutzt. Siehe Appendix B für das Quellcode zu diesem Teilversuch.

Die gemessene Temperatur des Öls lautet $(21{,}5 \pm 0{,}5)\,°\mathrm{C}$.

Die Grafiken sind wie folgt:

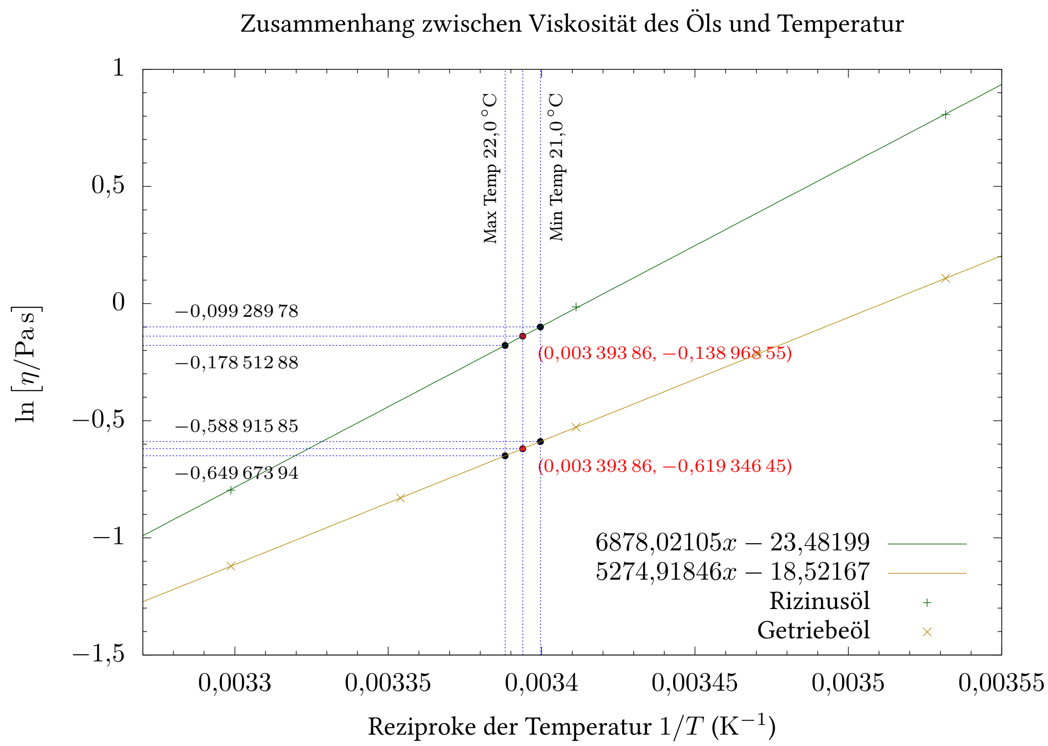

Abbildung 5.1: Zusammenhang zwischen $\ln[\eta]$ und $\frac{1}{T}$

Abgelesen haben wir als Ergebnis die optimale Geraden:

Ölsorte	Angepasste Kurve	Stoffkonstant	χ^2_{red}
Rizinusöl	$(6878{,}02 \pm 40{,}34)\,x - (23{,}4820 \pm 0{,}1378)$	$(6880 \pm 40)\,\mathrm{K}$	$4{,}419\,97 \cdot 10^{-5}$
Getriebeöl	$(5274{,}92 \pm 2{,}54)\,x - (18{,}5217 \pm 0{,}0087)$	$(5274{,}9 \pm 2{,}6)\,\mathrm{K}$	$2{,}189\,87 \cdot 10^{-7}$

Da es explizit gefragt war, ist der Kehrwert $1/T$ und der dazugehörige Fehler $\Delta\left(1/T\right)$ hier berechnet:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{(21{,}5 + 273{,}15)\ \mathrm{K}} = 3{,}393\,86 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1} \qquad \text{(6 sig. Zif.)} \tag{5.36}$$

$$\Delta\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{\Delta T}{T^2} = \frac{0{,}5\,\mathrm{K}}{(21{,}5 + 273{,}15)^2\ \mathrm{K}^2} = 5{,}76 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1} \qquad \text{(3 sig. Zif.)} \tag{5.37}$$

Daraus folgt $1/T = (3{,}394 \pm 0{,}006) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$

Andere Rechnungen erfolgt in `gnuplot` und wegen der Symmetrie der Fehler sind sie dann als $(\max - \min)/2$ genommen. Mehr signifikante Ziffern als nötig werden in diesem Fall dargestellt, um mögliche Rundungsfehler zu vermeiden. Siehe Appendix B für die Rohausgabe aus `gnuplot`.

Abgelesen erhalten wir als Literaturwerte bei $T = (21{,}5 \pm 0{,}5)\,°\mathrm{C}$:

Ölsorte	$\min(\eta_{\text{lit}})$	$\max(\eta_{\text{lit}})$	η_{lit}
Rizinusöl	$0{,}836\,513\,28\,\mathrm{Pa\,s}$	$0{,}905\,480\,28\,\mathrm{Pa\,s}$	$(0{,}87 \pm 0{,}04)\,\mathrm{Pa\,s}$
Getriebeöl	$0{,}522\,216\,02\,\mathrm{Pa\,s}$	$0{,}554\,928\,58\,\mathrm{Pa\,s}$	$(0{,}538 \pm 0{,}017)\,\mathrm{Pa\,s}$

Im Vergleich zu unserem empirischen Wert $\eta_{\text{exp}} = (0{,}495 \pm 0{,}005)\,\mathrm{Pa\,s}$ ist es dann höchstwahrscheinlich, dass Getriebeöl im Experiment verwendet wurden. Es ist aber offentsichlich, dass die zwei Werte unterscheiden sich signifikant voneinander.

Dieser Unterchied kann vermütlich darauf zurückgeführt werden, dass es bei der kleinen Kugel im weiten Rohr immer noch verwirbelungen bzw. Reibungseffekte gibt, die im Rechnungen nicht berücksichtigt wurden. Das kann beispielweise entstehen, wenn die Kugeln nicht gut gesaubert waren. Die Fallzeit der kleinen Kugel war auch etwas ungenau und es könnte sein, dass die Ungenauigkeit der Zeitmessung unterschätzt war. Da die Temperatur und Dichte des Öls nicht vom benutzten Ölrohr gelesen wurden, könnte es auch sein, dass die abgelesene Werte nicht die echte Parameter beim Experiment sind.

A gnuplot Quellcode zur Auswertung von Teilversuch 3

gnuplot Code für Abbildung 3.1

```
set term epslatex color
set output "tv3-plot.tex"
set decimalsign locale 'de_DE.UTF-8'

set title "Wasserstand beim Kapilarviskosimeter im Verlauf der Zeit"
set xlabel "Zeit $t$ ($\\si{\\second}$)"
set ylabel "$\\ln \\left[\\left(h - h_\\infty\\right) / \\si{\\milli\\meter}\\right]$"

m = -1
f(x) = m*x + c

# (x, y, xdelta, ydelta)
fit f(x) "tv3.dat" u (60*$1):(log($2-83)):(0.2):(sqrt(5)/($2-83)) xyerrors via m,c

t = "$".gprintf("%.5f", m)."x + ".gprintf("%.5f", c)."$"
plot f(x) title t, "tv3.dat" u (60*$1):(log($2-83)):(0.2):(sqrt(5)/($2-83)) with xyerrorbars pointtype 0 title "tv3.dat"
```

mit tv3.dat:

```
# t  h
0   418
1   386
2   358
3   333
4   311
5   290
6   271
7   254
8   238
9   225
10  212
11  200
12  190
13  180
14  172
15  164
```

B gnuplot Quellcode zur Literaturwertsvergleich beim Teilversuch 5

gnuplot Quellcode zur Abbildung 5.1

```
set term epslatex color size 5.5in, 4in
set output "tv5-plot.tex"
set decimalsign locale 'de_DE.UTF-8'

set title "Zusammenhang zwischen Viskosität des Öls und Temperatur"
set xlabel "Reziproke der Temperatur $1/T$ ($\\si{\\per\\kelvin}$)"
set ylabel "$\\ln \\left[\\eta / \\si{\\pascal\\second}\\right]$"

f(x) = m*x + c
g(x) = n*x + d

# (x, y, xdelta, ydelta)
fit f(x) "tv5_rizoel.dat" u (1/($1 + 273.15)):(log($2)) via m,c
fit g(x) "tv5_getriebeoel.dat" u (1/($1 + 273.15)):(log($2)) via n,d

set key right bottom
set mxtics
set mytics
set xrange [0.00327:0.00355]

constmin = (1/(21.0 + 273.15))
constval = (1/(21.5 + 273.15))
constmax = (1/(22.0 + 273.15))
rymin = f(constmin)
ryval = f(constval)
rymax = f(constmax)
gymin = g(constmin)
gyval = g(constval)
gymax = g(constmax)

print "rymin: ".gprintf("%.8f", exp(rymin))
print "ryval: ".gprintf("%.8f", exp(ryval))
print "rymax: ".gprintf("%.8f", exp(rymax))
print "gymin: ".gprintf("%.8f", exp(gymin))
print "gyval: ".gprintf("%.8f", exp(gyval))
print "gymax: ".gprintf("%.8f", exp(gymax))

# (x, y)
set arrow from constmin,-1.5 to constmin,1 nohead lc rgb 'blue' dt 3
set arrow from constmax,-1.5 to constmax,1 nohead lc rgb 'blue' dt 3
set arrow from constval,-1.5 to constval,1 nohead lc rgb 'blue' dt 3
set arrow from 0.00327,rymin to constmin,rymin nohead lc rgb 'blue' dt 3
set arrow from 0.00327,rymax to constmax,rymax nohead lc rgb 'blue' dt 3
set arrow from 0.00327,ryval to constval,ryval nohead lc rgb 'blue' dt 3
```

```
set arrow from 0.00327,gymin to constmin,gymin nohead lc rgb 'blue' dt 3
set arrow from 0.00327,gymax to constmax,gymax nohead lc rgb 'blue' dt 3
set arrow from 0.00327,gyval to constval,gyval nohead lc rgb 'blue' dt 3

set label "\\scriptsize Min Temp \\SI{21.0}{\\celsius}" at (constmin+0.000005),0.9 right rotate by 90 font ',9'
set label "\\scriptsize Max Temp \\SI{22.0}{\\celsius}" at (constmax-0.000005),0.9 right rotate by 90 font ',9'
set label "\\scriptsize \\num{".gprintf("%.8f", rymin)."}" at 0.00328,(rymin+0.07) font ',9'
set label "\\scriptsize \\num{".gprintf("%.8f", rymax)."}" at 0.00328,(rymax-0.07) font ',9'
set label "\\scriptsize \\num{".gprintf("%.8f", gymin)."}" at 0.00328,(gymin+0.07) font ',9'
set label "\\scriptsize \\num{".gprintf("%.8f", gymax)."}" at 0.00328,(gymax-0.07) font ',9'
set label "\\textcolor{red}{\\scriptsize (\\num{".gprintf("%.8f", constval)."}, \\num{".gprintf("%.8f", ryval)."})}" at (constval+0.000005),(ryval-0.07) font ',9'
set label "\\textcolor{red}{\\scriptsize (\\num{".gprintf("%.8f", constval)."}, \\num{".gprintf("%.8f", gyval)."})}" at (constval+0.000005),(gyval-0.07) font ',9'

set style fill solid 1.0 border -1
set object circle at constmin,rymin size 0.000001 fc rgb 'black'
set object circle at constval,ryval size 0.000001 fc rgb 'red'
set object circle at constmax,rymax size 0.000001 fc rgb 'black'
set object circle at constmin,gymin size 0.000001 fc rgb 'black'
set object circle at constval,gyval size 0.000001 fc rgb 'red'
set object circle at constmax,gymax size 0.000001 fc rgb 'black'

tein = "$".gprintf("%.5f", m)."x - ".gprintf("%.5f", -c)."$"
tzwo = "$".gprintf("%.5f", n)."x - ".gprintf("%.5f", -d)."$"
plot f(x) title tein lc rgb 'dark-green', \
    g(x) title tzwo lc rgb 'dark-goldenrod', \
    "tv5_rizoel.dat" u (1/($1 + 273.15)):(log($2)) title "Rizinusöl" pointtype 1 lc rgb 'dark-green', \
    "tv5_getriebeoel.dat" u (1/($1 + 273.15)):(log($2)) title "Getriebeöl" pointtype 2 lc rgb 'dark-goldenrod'
```

mit tv5_getriebeoel.dat:

```
# T(C) eta
10,0    1,114
15,0    0,806
20,0    0,590
25,0    0,436
30,0    0,326
```

und tv5_rizoel.dat:

```
# T(C) eta
10      2,240
20      0,986
30      0,451
```

Rohausgabe:

```
rymin: 0,90548028
ryval: 0,87025540
rymax: 0,83651328
gymin: 0,55492858
gyval: 0,53829613
gymax: 0,52221602
```