

STW – Stehende Wellen

Auswertung

Yudong Sun

in Zusammenarbeit mit David Giesege und Joel Schönberger

Gruppe F2

11. März 2020

Teilversuch 1: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft

Bestimmung der Wellenlänge

Um die Wellenlänge zu bestimmen, war es in der Fragestellung der Auswertung verlangt, eine optimale Kurve durch die Messpunkte zu legen. Statt Millimeterpapier wird aber in diesem Fall `gnuplot` benutzt. Das Prozess der Wellenlängebestimmung wird dann ein bisschen anders aussehen.

Laut Theorie lässt eine Welle mittels einer Sinus bzw. Cosinus Funktion beschreiben. Die Summe von zwei solchen Wellen liefert dann noch eine Sinus bzw. Cosinus Funktion. Da wir aber nur die Lautstärke mittels Mikrofonspannung messen können, entsprechen die Messwerte die absolute Betrag von dieser Funktion. Im Allgemeinen, lässt die Messwerte durch die folgende Funktion beschreiben:

$$U_{\text{eff}} = |A \sin[kx - h]| + c = \left| A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - b) \right] \right| + c \quad (1.1)$$

wobei λ = Wellenlänge und $\mathbb{R} \ni b, c$ = konstante.

Als physikalische Bedeutung ist c die Raumhintergrund, b die Position des ersten Minimums und A die maximale Mikrofonspannung ohne die Raumhintergrund.

1. MessreiheFehler bei Messung der Spannung $\Delta U_{\text{eff}} = 0,1 \text{ mV}$ Fehler bei Messung der Position $\Delta x = 0,5 \text{ mm}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x/mm	63,5	70,0	80,0	90,0	100,0	110,0	120,0	130,0	140,0	150,0
U_{eff}/mV	42,9	40,3	27,9	9,4	12,8	31,0	42,2	45,1	39,7	26,2

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x/mm	160,0	170,0	180,0	190,0	200,0	210,0	220,0	230,0	240,0	250,0
U_{eff}/mV	7,0	15,5	33,2	42,6	44,1	36,4	21,0	2,0	20,7	36,3

n	21	22	23
x/mm	260,0	270,0	280,0
U_{eff}/mV	44,2	43,1	33,3

2. Messreihe bei erstem und letztem MinimumFehler bei Messung der Spannung $\Delta U_{\text{eff}} = 0,2 \text{ mV}$ Fehler bei Messung der Position $\Delta x = 0,5 \text{ mm}$

U_{eff}/mV	x_1/mm	x_2/mm	x_3/mm	x_4/mm	$x_{1,2}/\text{mm}$	$x_{3,4}/\text{mm}$
5,0	93,5	97,0	232,0	228,0	95,3	230,0
10,0	98,5	89,5	225,5	234,5	94,0	230,0
15,0	89,0	102,0	237,5	223,0	95,5	230,3
20,0	104,5	84,5	220,0	237,5	94,5	228,8
25,0	87,5	107,0	242,0	217,5	97,3	229,8

Die Mittelwerte $x_{1,2} = (x_1 + x_2)/2$ bzw. $x_{3,4} = (x_3 + x_4)/2$ haben als Fehler:

$$\Delta x_{1,2} = \Delta x_{3,4} = \frac{0,5 \text{ mm}}{\sqrt{2}} = 0,4 \text{ mm} \quad (1.2)$$

Wenn wir die erste Reihe betrachten, können wir das erste Minimum bei $x = (93,5 \text{ mm} + 97,0 \text{ mm})/2 = 95,25 \text{ mm}$ und das letzte Minimum bei $x = (232,0 \text{ mm} + 228,0 \text{ mm})/2 = 230,0 \text{ mm}$ einschätzen. Die Wellenlänge ist dann ungefähr $230 \text{ mm} - 95,25 \text{ mm} = 134,75 \text{ mm}$.

Da es bei ungefähr $x = 230,0 \text{ mm}$ ein Minimum liegt, ist der Messwert für $n = 18$ mit $U_{\text{eff}} = 2,0 \text{ mV}$ ungefähr der Raumhintergrund.

Der größte Messwert liegt bei $n = 21$ mit $U_{\text{eff}} = 44,2 \text{ mV}$. Dieser Wert wird dann als ein Maximumwert geschätzt.

Wir benutzen deshalb die folgende Werte als Anfangseinschätzungen bei der Kurveanpassung:

Variable	Wert
A	45
λ	134,75
b	95,2
c	2

Die Daten wurden dann mit `gnuplot` geplottet und es wurde eine Kurveanpassung durchgeführt. Der

Punkt bei (87,5, 25,0) ist aber zu weit von der Kurve abgewichen und wird als Anomalie vernachlässigt. Alle nötige Rechnungen erfolgt im gnuplot. Siehe Appendix A für die genauere Rechnungen.

Normale Anpassungsalgorithmen (Methode der kleinsten Quadrate) setzen voraus, dass die x -Variable die unabhängige Variable ist und als fehlerfrei genommen werden kann. Da es sich bei diesem Versuch um zwei gemessene Variablen handelt, gibt es bei beiden Variablen $y = U_{\text{eff}}$ und x Fehler. Die Fehler müssen dann während der Kurvenanpassung berücksichtigt werden.

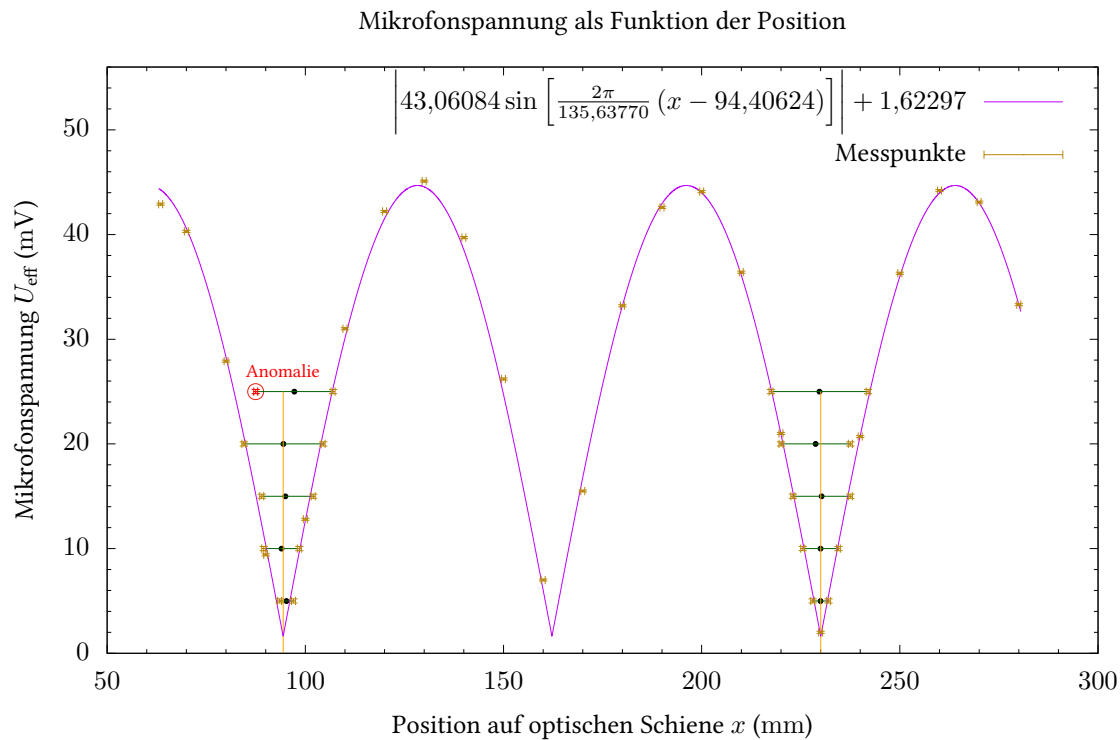


Abbildung 1.1: Messung der Mikrofonspannung bei verschiedenen Orten
 $\chi_{\text{red}}^2 = 3,7408 > 1 \implies$ Nicht so gute Anpassung

Das wenig ideale χ_{red}^2 lässt sich dadurch erklären, dass die Fehler wahrscheinlich wesentlich unterschätzt wurden.

Als Endergebnis haben wir:

Variable	Rohausgabe	Gerundet
A	$(43,0608 \pm 0,5247) \text{ mV}$	$(43,1 \pm 0,6) \text{ mV}$
λ	$(135,6377 \pm 0,3153) \text{ mm}$	$(135,6 \pm 0,4) \text{ mm}$
b	$(94,4062 \pm 0,2371) \text{ mm}$	$(94,41 \pm 0,24) \text{ mm}$
c	$(1,6230 \pm 0,4747) \text{ mV}$	$(1,6 \pm 0,5) \text{ mV}$

Von der angepassten Kurve weichen die Werte aus der zweiten Messreihe durchschnittlich mehr als die Werte aus der ersten Messreihe ab. Diese Punkten sind mit grünen Linien angezeichnet. Diese Abweichung kann darauf zurückgeführt werden, dass wir bei dieser Messung auf der schwankende Mikrofon-

spannung während der ungenauen Verschiebung des Mikrofons aufpassen müssen. Das kann zu einem Fehler führen, der deutlich größer als was wir hier geschätzt haben.

Wir rechnen rückwärts und leiten die beiden Ausgleichsgerade von der angepassten Kurve her. Die schwarzen Punkte auf der grünen Linien sind die Mittelpunkte der zur Abszisse parallelen Strecken. Die linke orange Linie ist gegeben durch $x_e = b$ und die rechte $x_l = b + \lambda$, wobei b und λ aus der Kurvenanpassung kommt. Explizit geschrieben:

$$x_e = (94,41 \pm 0,24) \text{ mm}, \quad (1.3)$$

$$x_l = (94,41 \pm 0,24) \text{ mm} + (135,6 \pm 0,4) \text{ mm} = (230,0 \pm 0,5) \text{ mm} \quad (1.4)$$

wobei der Fehler in Gleichung (1.4) durch $\Delta x_l = \sqrt{(0,24 \text{ mm})^2 + (0,4 \text{ mm})^2} = 0,5 \text{ mm}$ gegeben ist.

Wir vergleichen jetzt diese Werte mit dem Mittelwert und Standardabweichung von $x_{1,2}$ und $x_{3,4}$. Der Wert von $x_{1,2}$ bei Spannung $U_{\text{eff}} = 25,0 \text{ mV}$ wird vernachlässigt. Die Standardabweichung ist hier wegen der Schwierigkeit der Schätzung aus geplotteten Graph statt grob Betrachtung der Zeichnung benutzt. Mithilfe eines Python Skript (Appendix B) bekommen wir die folgenden Werte:

$x_e = x_{1,2}$	$(94,8 \pm 0,7) \text{ mm}$
$x_l = x_{3,4}$	$(229,8 \pm 0,6) \text{ mm}$

Die Werte stimmen miteinander überein. Es ist anschaulich, dass die orange Linien gute Annäherungen für beide Reihe von Mittelpunkten sind. Wir benutzen nun die Wellenlänge aus der Kurvenanpassung:

$$\lambda = (135,6 \pm 0,4) \text{ mm} \quad (1.5)$$

Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft

Die Schallgeschwindigkeit v und Wellenlänge λ haben den folgenden Zusammenhang:

$$v = f\lambda \quad (1.6)$$

$$\Rightarrow \Delta v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial f} \Delta f\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} \Delta \lambda\right)^2} = \sqrt{(\lambda \Delta f)^2 + (f \Delta \lambda)^2} \quad (1.7)$$

Mit der folgenden Werten:

Variable	Wert	Bedeutung
f	$(2,54 \pm 0,01) \text{ kHz}$	Frequenz
λ	$(135,6 \pm 0,4) \text{ mm}$	Wellenlänge

lässt sich v und Δv bestimmen:

$$v = (2,54 \cdot 10^3 \text{ Hz}) (135,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}) = 344,424 \text{ m s}^{-1} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta v &= \sqrt{\left((135,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}) (0,01 \cdot 10^3 \text{ Hz})\right)^2 + \left((2,54 \cdot 10^3 \text{ Hz}) (0,4 \cdot 10^{-3} \text{ m})\right)^2} \\ &= 1,694 \text{ m s}^{-1} \quad (4 \text{ sig. Zif.}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Daraus folgt, $v = (344,4 \pm 1,7) \text{ m s}^{-1}$

Aus der Anleitung ist der Schallgeschwindigkeit v proportional zur \sqrt{T} , wobei T die absolute Temperatur ist. Mit $T = ((21,0 \pm 0,1) + 273,15) \text{ K} = (294,15 \pm 0,10) \text{ K} = (294,2 \pm 0,1) \text{ K}$ lässt sich eine theoretische Schallgeschwindigkeit berechnen:

$$v = v_0 \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}} = (331 \text{ m s}^{-1}) \cdot \sqrt{\frac{294,15 \text{ K}}{273,15 \text{ K}}} = 343,488 \text{ m s}^{-1} \quad (6 \text{ sig. Zif.}) \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta v &= \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial T} \Delta T\right)^2} = \frac{v_0}{\sqrt{T_0}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} (\Delta T) = \frac{v_0}{2\sqrt{T \cdot T_0}} (\Delta T) \\ &= \frac{331 \text{ m s}^{-1}}{2\sqrt{(294,15 \text{ K})(273,15 \text{ K})}} (0,1 \text{ K}) \\ &= 0,0584 \text{ m s}^{-1} \quad (3 \text{ sig. Zif.}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

wobei v_0 und T_0 jeweils die Schallgeschwindigkeit und die absolute Temperatur bei 0°C sind. Genauere Werte sind hier benutzt, um mögliche Rundungsfehler zu vermeiden.

Daraus folgt, $v_{\text{th}} = (343,49 \pm 0,06) \text{ m s}^{-1}$

Im Vergleich erhalten wir:

v_{exp}	$(344,4 \pm 1,7) \text{ m s}^{-1}$
v_{th}	$(343,49 \pm 0,06) \text{ m s}^{-1}$

Der theoretische Wert v_{th} liegt im Fehlerintervall des experimentellen Wertes. Die Werte stimmen also miteinander überein.

Bestimmung des Adiabatenexponentes γ der Luft

Aus der Anleitung ist der Adiabatenexponent γ und folglich der dazugehörige Fehler $\Delta\gamma$ gegeben durch:

$$v = f\lambda = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}} \iff \gamma = \left(\frac{M}{R}\right) \cdot \frac{f^2 \lambda^2}{T} = \left(\frac{M}{R}\right) \cdot \frac{f^2 \lambda^2}{\theta + 273,15 \text{ K}} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta\gamma &= \sqrt{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial f} \Delta f\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial \lambda} \Delta\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial T} \Delta T\right)^2} \\ (AMW) &= \frac{M f^2 \lambda^2}{RT} \sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2} \\ &= \frac{M f^2 \lambda^2}{R(\theta + 273,15 \text{ K})} \sqrt{\left(\frac{\Delta\theta}{\theta + 273,15 \text{ K}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta f}{f}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta\lambda}{\lambda}\right)^2} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Mit der folgenden Werten:

Variable	Wert	Bedeutung
M	$28,96 \text{ g mol}^{-1}$	Molare Masse von trockener Luft
R	$8,314\,463 \text{ kg m}^2 \text{ K}^{-1} \text{ mol}^{-1} \text{ s}^{-2}$	Allgemeine Gaskonstante (CODATA 2018)
f	$(2,54 \pm 0,01) \text{ kHz}$	Frequenz
λ	$(135,6 \pm 0,4) \text{ mm}$	Wellenlänge
θ	$(21,0 \pm 0,1) ^\circ \text{C}$	Temperatur der Luft im Labor

lässt sich γ und $\Delta\gamma$ bestimmen:

$$\gamma = \left(\frac{28,96 \cdot 10^{-3}}{8,314\,463} \text{K s}^2 \text{m}^{-2} \right) \cdot \frac{(2,54 \cdot 10^3 \text{ Hz})^2 (135,6 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{(21,0 + 273,15) \text{ K}}$$

$$= 1,404\,70 \quad (6 \text{ sig. Zif.}) \quad (1.14)$$

$$\Delta\gamma = \left(\frac{28,96 \cdot 10^{-3}}{8,314\,463} \text{K s}^2 \text{m}^{-2} \right) \cdot \frac{(2,54 \cdot 10^3 \text{ Hz})^2 (135,6 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{(21,0 + 273,15) \text{ K}}$$

$$\times \sqrt{\left(\frac{0,1 \text{ K}}{(21,0 + 273,15) \text{ K}} \right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 0,01 \text{ kHz}}{2,54 \text{ kHz}} \right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 0,4 \text{ mm}}{135,6 \text{ mm}} \right)^2}$$

$$= 0,0138 \quad (3 \text{ sig. Zif.}) \quad (1.15)$$

Daraus folgt, $\gamma = 1,405 \pm 0,014$. γ ist einheitslos.

Im Abschnitt 1.5 der Anleitung wurde der theoretische Wert von γ als 1,4 genannt. Dieser Wert liegt in dem Fehlerintervall des experimentellen Wertes. Die Werte stimmen also miteinander überein.

Teilversuch 2: Bestimmung eines Reflexionsgrades

Mit A = die korrigierte maximale Amplitude und B = die korrigierte minimale Amplitude ist das Reflexionsgrad R und folglich dessen Fehler laut der Anleitung gegeben durch:

$$R = \left(\frac{A + B}{A - B} \right)^2 \quad (2.1)$$

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial A} \Delta A \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial B} \Delta B \right)^2} \quad (2.2)$$

Die partielle Ableitungen liefern jeweils:

$$\frac{\partial R}{\partial A} = 2 \left(\frac{A - B}{A + B} \right) \left[\frac{A + B - (A - B)}{(A + B)^2} \right] = 2 \left(\frac{A - B}{A + B} \right) \left[\frac{2B}{(A + B)^2} \right]$$

$$= 4 \cdot \frac{B(A - B)}{(A + B)^3} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial R}{\partial B} = 2 \left(\frac{A - B}{A + B} \right) \left[\frac{-(A + B) - (A - B)}{(A + B)^2} \right] = 2 \left(\frac{A - B}{A + B} \right) \left[\frac{-2A}{(A + B)^2} \right]$$

$$= -4 \cdot \frac{A(A - B)}{(A + B)^3} \quad (2.4)$$

Da $\Delta A = \Delta B = \sqrt{2} \cdot \Delta S$, lässt der Fehler wie folgt schreiben:

$$\Delta R = 4\sqrt{2}\Delta S \frac{A - B}{(A + B)^3} \sqrt{A^2 + B^2} \quad (2.5)$$

wobei ΔS = der Fehler bei jeder Messung der Mikrofonspannung.

Die korrigierte Minima und Maxima werden hier als Zwischenergebnisse behandelt. Darum werden keine Fehler explizit berechnet. Die ist aber durch $\sqrt{2}\Delta S$ gegeben.

Der Mittelwert \bar{R} und dessen Fehler ΔR mittels der Methode der oberen und unteren Grenzen sind dann:

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^3 R_i}{3} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{R} &= \frac{\sum_{i=1}^3 (\cancel{R_i} + \Delta R_i) - \sum_{i=1}^3 (\cancel{R_i} - \Delta R_i)}{3 \times 2} = \frac{\sum_{i=1}^3 \Delta R_i + \sum_{i=1}^3 \cancel{\Delta R_i}}{3 \times 2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^3 \Delta R_i}{3} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Da es nur beim zweiten Teilaufgabe der Auswertung zum Teilversuch 2 gefragt, dass man der Fehler $\Delta \bar{R}$ mittels der Methode der oberen und unteren Grenzen berechnen soll, ist die Korrektur für A und B mittels Gauß'sche Fehlerfortpflanzung gerechnet. Außerdem ist auch schwierig, schnell zu bestimmen, wann A bzw. B jeweils maximal und minimal sein, um das maximale und minimale R zu bekommen.

Mit Gleichungen (2.1), (2.5), (2.6) und (2.7), darstellen wir die Ergebnisse als Tabelle. Die Rechnungen erfolgt genauer in einem Tabellenkalkulationsprogramm. Die Werte hier sind schon gerundet.

Paar i	1	2	3	
Min S_{\min}/mV	5,8	6,2	6,0	
Hintergr. $S_{\min \text{ HG}}/\text{mV}$	0,9	0,9	0,9	
Max S_{\max}/mV	20,7	20,1	20,5	
Hintergr. $S_{\max \text{ HG}}/\text{mV}$	0,9	0,9	1,0	
B/mV	4,9	5,3	5,1	
A/mV	19,8	19,2	19,5	
R	0,364	0,322	0,343	$\overline{R} = 0,343$
ΔR	0,023	0,022	0,023	$\Delta \overline{R} = 0,023$

Explizit geschrieben: $R = 0,343 \pm 0,023$. R is einheitslos.

Als Funktion der Energie ist R gegeben durch:

$$R = \frac{b^2}{a^2} = \frac{\text{Energie der reflektierten Welle}}{\text{Energie der Quellwelle}} \quad (2.8)$$

Laut Energieerhaltungssatz kann die reflektierte Welle keine Energie mehr als die Quellwelle haben. Das heißt, dass $b < a$ bzw. $R \in [0,1]$ sein muss. In diesem Fall liegt unser Wert von R in diesem Intervall, was physikalischen Sinn ergibt.

In unserem Versuch ist $(34,3 \pm 2,3) \%$ der Energieflussdichte am offenen Rohrende reflektiert und $100 \% - (34,3 \pm 2,3) \% = (65,7 \pm 2,3) \%$ transmittiert.

Teilversuch 3: Messung der Eigenfrequenzen einer Luftsäule

Fehler bei Messung bzw. Steuerung der Frequenz $\Delta f_n = 1 \text{ Hz}$

Fehler bei Messung der Mikrofonspannung $\Delta U_{\text{eff}} = 0,1 \text{ mV}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n/Hz	168	502	837	1171	1510	1843	2188	2541	2876	3210	3554
U_{eff}/mV	3,36	22,10	57,7	31,07	21,70	22,48	22,93	24,80	13,20	10,10	6,76

Laut Gleichung (6) der Anleitung hat f_n und n den folgenden Zusammenhang:

$$f_n = \frac{v}{4L^*} (2n + 1) = \left(\frac{v}{2L^*} \right) n + \frac{v}{4L^*} \equiv an + b \quad (3.1)$$

Daraus folgt auch, dass die akustische Rohrlänge L^* und der dazugehörige Fehler ΔL^* sich wie folgt berechnen lässt:

$$L^* = \frac{v}{2a} \quad (3.2)$$

$$\Delta L^* = \sqrt{\left(\frac{\partial L^*}{\partial v} \Delta v \right)^2 + \left(\frac{\partial L^*}{\partial a} \Delta a \right)^2} \stackrel{(\text{AMW})}{=} \frac{v}{2a} \sqrt{\left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 + \left(\frac{\Delta a}{a} \right)^2} \quad (3.3)$$

Die Daten wurden mit gnuplot geplottet und eine Kurveanpassung wurde durchgeführt (Siehe Appendix C).

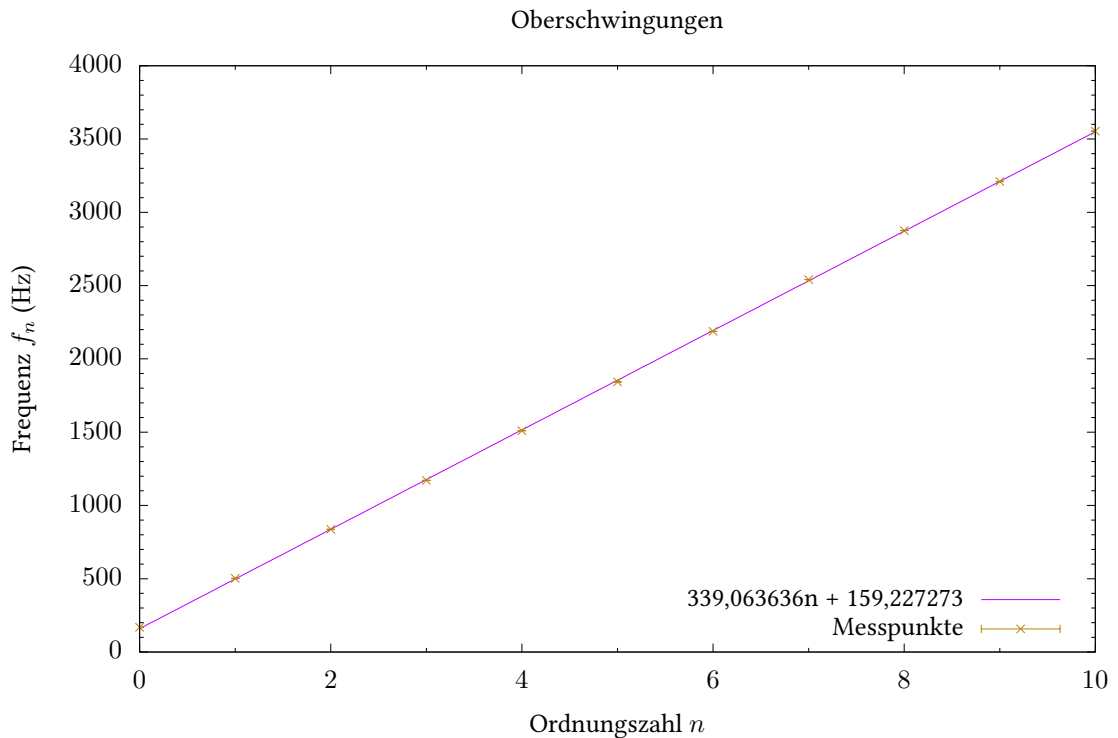


Abbildung 3.1: Messung der Oberschwingungen des Rohres

$$\chi_{\text{red}}^2 = 46,698 > 1 \implies \text{Schlechte Anpassung}$$

Die schlechte Anpassung kann vermutlich dadurch erklärt werden, dass die Bestimmung der Resonanzfrequenzen eher ungenau war, besonders bei der Steuerung des Sinus-Generator. In diesem Fall wurden aber die Messungenauigkeit der Frequenzen schon bei der Kurvenanpassung berücksichtigt. Es könnte dann sein, dass wir diese Ungenauigkeit wesentlich unterschätzt haben.

Als Endergebnis erhalten wir:

Variable	Rohausgabe	Gerundet
a	$(339,0636 \pm 0,6516) \text{ Hz}$	$(339,1 \pm 0,7) \text{ Hz}$
b	$(159,227 \pm 3,855) \text{ Hz}$	$(159 \pm 4) \text{ Hz}$

Wir benutzen in unserer Rechnungen die genauere Werte von a und Δa bzw. v und Δv . In diesem Fall wurde für die Bestimmung der akustischen Rohrlänge aufgrund des geringeren Fehler a statt b gewählt, obwohl beide Werte theoretisch funktionieren könnten.

Mit der folgenden Werten:

Variable	Wert	Bedeutung
a	$(339,0636 \pm 0,6516) \text{ Hz}$	Gefundene Steigung der Gerade
v	$(344,424 \pm 1,694) \text{ m s}^{-1}$	Gefundene Schallgeschwindigkeit

lässt sich mittels Gleichungen (3.2) und (3.3) die akustische Rohrlänge L^* und deren Fehler ΔL^* bestimmen:

$$L^* = \frac{344,424 \text{ m s}^{-1}}{2 (339,0636 \text{ Hz})} = 0,507\,905 \text{ m} \quad (6 \text{ sig. Zif.}) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta L^* &= \frac{344,424 \text{ m s}^{-1}}{2 (339,0636 \text{ Hz})} \sqrt{\left(\frac{1,694 \text{ m s}^{-1}}{344,424 \text{ m s}^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{0,6516 \text{ Hz}}{339,0636 \text{ Hz}}\right)^2} \\ &= 2,682 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (4 \text{ sig. Zif.}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Daraus folgt, dass die akustische Rohrlänge $L^* = (0,5079 \pm 0,0027) \text{ m} = (507,9 \pm 2,7) \text{ mm}$.

Im Vergleich dazu ist die gemessene Rohrlänge $L = (50,0 \pm 0,1) \text{ cm} = (500 \pm 1) \text{ mm}$. Das Fehlerintervall der beiden Werten überschneiden sich miteinander nicht, also ist $L^* > L$, was zu erwarten ist.

Teilversuch 4: Messung der Resonanzkurve für eine Oberschwingung

Messreihe

Fehler der Frequenzen $\Delta f = 1 \text{ Hz}$

Fehler der Spannung $\Delta f = 0,2 \text{ mV}$

Raumhintergrund = $(1,1 \pm 0,2) \text{ mV}$

f/Hz	1011	980	970	952	928	910	892	881	871	861
U_{eff}/mV	7,33	7,53	7,99	8,85	10,85	13,45	18,33	23,31	30,14	44,53
f/Hz	854	850	844	841	837	833	830	825	818	810
U_{eff}/mV	64,33	85,80	125,53	149,11	149,49	120,65	96,04	71,73	54,43	41,24
f/Hz	801	790	780	760	742					
U_{eff}/mV	34,00	28,51	25,66	22,68	21,61					

Graph

Aus der Anleitung des Versuchs MOS lässt die folgende Funktion eine Resonanzkurve beschreiben:

$$\hat{x} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \hat{x}_A \iff U_{\text{eff}} = \frac{f_0^2}{\sqrt{(f_0^2 - f^2)^2 + (2\beta f)^2}} U_A \quad (4.1)$$

Da die Kurvenanpassung mit `gnuplot` sehr empfindlich auf die Wahl der Startparameter reagiert, müssen die Startparameter sorgfältig ausgewählt. Dafür ist eine grobe Kurvenanpassung wie im Versuch MOS mittels Geogebra per Hand durchgeführt:

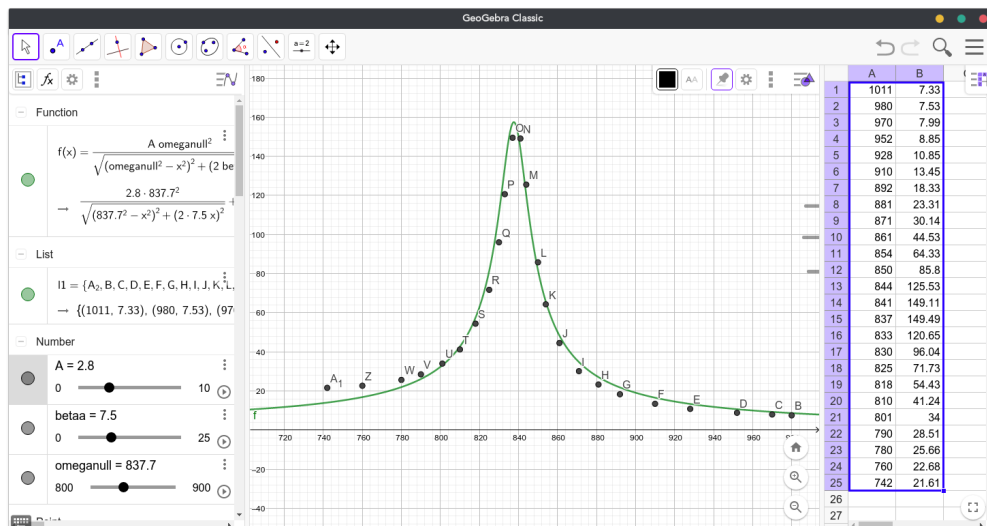


Abbildung 4.1: Grobe Kurvenanpassung mittels Geogebra

Der Raumhintergrund und dessen Fehler sind direkt im `gnuplot` Skript berücksichtigt (Siehe Appendix D). Der Fehler der Spannung nach dem Abzug des Raumhintergrund wird als $(0,2 \text{ mV} + 0,2 \text{ mV} = 0,4 \text{ mV})$ angenommen. Der Grund dafür ist, dass wir letztendlich nur eine Messung von der Raumhintergrund haben, obwohl wir bei mehrfache Messungen eher Schwankungen gegen die gleiche Werten bekommen. Daher ist es sicherer bei der Kurvenanpassung einen größeren Fehler zu benutzen.

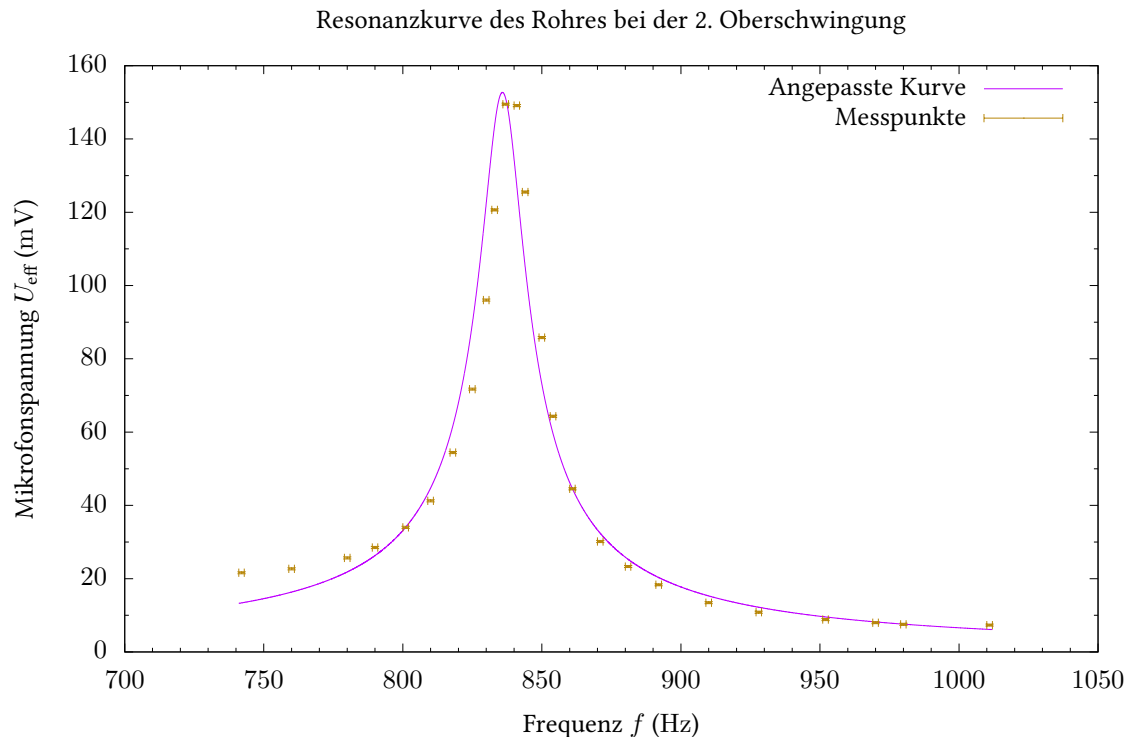


Abbildung 4.2: Messung der Resonanzkurve des Rohres bei der 2. Oberschwingung

$$\chi_{\text{red}}^2 = 32,6373 > 1 \implies \text{Schlechte Anpassung}$$

Als Endergebnis erhalten wir:

Variable	Rohausgabe	Gerundet
f_0	$(835,89 \pm 1,46) \text{ Hz}$	$(835,9 \pm 1,5) \text{ Hz}$
U_A	$(2,8473 \pm 0,1317) \text{ mV}$	$(2,85 \pm 0,14) \text{ mV}$
β	$7,79 \pm 1,02$	$7,8 \pm 1,1$

Anstatt einfach die Messpunkte durch eine glatte Kurve zu verbinden, war eine theoretische Kurve auf die Messwerte angepasst. Die Anpassung war leider schlecht, und der Grund dafür liegt vermutlich daran, dass wir Nebeneffekte bzw. andere Faktoren nicht berücksichtigt haben. Es könnte auch sein, dass wir alle Werten im SI Einheiten skalieren sollten, bevor wir die Kurvenanpassung durchführen.

Unsere gemessene Resonanzfrequenz $f_0 = (837 \pm 1) \text{ Hz}$ liegt auch im Fehlerintervall des aus der Kurvenanpassung gefundene f_0 . Die Werte stimmen also miteinander überein.

A gnuplot Quellcode zur Auswertung von Teilversuch 1

gnuplot Code für Abbildung 1.1

```

1  #!/usr/bin/env gnuplot
2  # ver >= 5.2
3
4  set term epslatex color size 6in, 4in
5  set output "tv1-plot.tex"
6  set decimalsign locale 'de_DE.UTF-8'
7
8  set title "Mikrofonspannung als Funktion der Position"
9  set xlabel "Position auf optischen Schiene  $x$  ( $\text{si}\{\text{milli}\}\text{meter}$ )"
10 set ylabel "Mikrofonspannung  $U_{\text{eff}}$  ( $\text{si}\{\text{milli}\}\text{volt}$ )"
11
12 set mxtics
13 set mytics
14 set samples 10000
15
16 A = 45
17 b = 95.2
18 lambda = 134.75
19 c = 2
20 f(x) = abs(A*sin(((2*pi)/lambda)*(x - b))) + c
21
22 # (x, y, xdelta, ydelta)
23 fit f(x) "tv1.dat" u 1:2:(0.5):3 xyerrors via A,lambda,b,c
24
25 # Anomalie
26 set style fill solid 0.0 border 7
27 set object circle at 87.5, 25 size 2 fc rgb 'black'
28 set label "\\textcolor{red}{\\scriptsize Anomalie}" at 85,27 font ',9'
29
30 # Linien
31 array oneleft[5] = [93.5, 98.5, 89, 104.5, 87.5]
32 array oneright[5] = [97, 89.5, 102, 84.5, 107]
33 array lastleft[5] = [232, 225.5, 237.522, 220, 242]
34 array lastright[5] = [228, 234.5, 223, 237.5, 217.5]
35 set style fill solid 1.0 border -1
36 do for [i=1:5] {
37     why = i*5
38     onemw = (oneleft[i] + oneright[i])/2
39     lastmw = (lastleft[i] + lastright[i])/2
40
41     #(x, y)
42     set arrow from oneleft[i],why to oneright[i],why nohead lc rgb
43     ↪ 'dark-green' # dt 3
44     set arrow from lastleft[i],why to lastright[i],why nohead lc rgb
45     ↪ 'dark-green' # dt 3

```

```

45     set object circle at onemw,why size 0.4 fc rgb 'black'
46     set object circle at lastmw,why size 0.4 fc rgb 'black'
47 }
48
49 set arrow from b,0 to b,25 nohead lc rgb 'orange'
50 set arrow from b+lambda,0 to b+lambda,25 nohead lc rgb 'orange'
51
52 set yrange [0:56]
53 set key top right spacing 1.8
54
55 titel = "$\\abs{" . gprintf("%.5f",
    ↪ A). "\\sin\\left[\\frac{2\\pi}{"} . gprintf("%.5f", lambda). "\\right(x -
    ↪ ". gprintf("%.5f", b). "\\right)\\right]} + ". gprintf("%.5f", c). "$"
56 plot f(x) title titel lc rgb 'dark-magenta', \
57     "tv1.dat" u 1:2:(0.5):3 with xyerrorbars title "Messpunkte" pointtype 0
    ↪ lc rgb 'dark-goldenrod', \
58     "<echo 87,5 25,0" u 1:2:(0.5):(0.2) with xyerrorbars notitle pointtype 0
    ↪ lc rgb 'red'

```

mit tv1.dat:

1	# x/mm	U/mV	delU	16	200,0	44,1	0,1	31	89,5	10,0	0,2
2	63,5	42,9	0,1	17	210,0	36,4	0,1	32	102,0	15,0	0,2
3	70,0	40,3	0,1	18	220,0	21,0	0,1	33	84,5	20,0	0,2
4	80,0	27,9	0,1	19	230,0	2,0	0,1	34	107,0	25,0	0,2
5	90,0	9,4	0,1	20	240,0	20,7	0,1	35	232,0	5,0	0,2
6	100,0	12,8	0,1	21	250,0	36,3	0,1	36	225,5	10,0	0,2
7	110,0	31,0	0,1	22	260,0	44,2	0,1	37	237,5	15,0	0,2
8	120,0	42,2	0,1	23	270,0	43,1	0,1	38	220,0	20,0	0,2
9	130,0	45,1	0,1	24	280,0	33,3	0,1	39	242,0	25,0	0,2
10	140,0	39,7	0,1	25	93,5	5,0	0,2	40	228,0	5,0	0,2
11	150,0	26,2	0,1	26	98,5	10,0	0,2	41	234,5	10,0	0,2
12	160,0	7,0	0,1	27	89,0	15,0	0,2	42	223,0	15,0	0,2
13	170,0	15,5	0,1	28	104,5	20,0	0,2	43	237,5	20,0	0,2
14	180,0	33,2	0,1	29	# 87,5	25,0	0,2	44	217,5	25,0	0,2
15	190,0	42,6	0,1	30	97,0	5,0	0,2				

Rohausgabe

```

1  degrees of freedom      (FIT_NDF)                : 38
2  rms of residuals        (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 1.93411
3  variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 3.7408
4  p-value of the Chisq distribution (FIT_P)            : 6.03961e-14
5
6  Final set of parameters      Asymptotic Standard Error
7  =====
8  A                = 43.0608    +/- 0.5247      (1.219%)
9  lambda           = 135.638    +/- 0.3153      (0.2324%)
10 b                = 94.4062    +/- 0.2371      (0.2511%)
11 c                = 1.62297    +/- 0.4747      (29.25%)

```

B python Quellcode zur Berechnung der Mittelwert und Standardabweichung im Teilversuch 1

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import numpy as np
4
5  x12 = np.array([95.25, 94.00, 95.50, 94.50])
6  x34 = np.array([230.00, 230.00, 230.26, 228.75, 229.75])
7
8  def sab(arr, mw):
9      return np.sqrt((np.sum((arr - mw)**2))/(arr.size - 1))
10
11 x12mw = np.mean(x12)
12 x12ab = sab(x12, x12mw)
13 x34mw = np.mean(x34)
14 x34ab = sab(x34, x34mw)
15
16 print("x12 = ", x12mw, " +- ", x12ab)
17 print("x34 = ", x34mw, " +- ", x34ab)

```

Rohausgabe

```

1  x12 =  94.8125 +-  0.688446318411
2  x34 =  229.752 +-  0.588447108923

```

C gnuplot Quellcode zur Auswertung von Teilversuch 3

gnuplot Code für Abbildung 3.1

```

1  #!/usr/bin/env gnuplot
2
3  set term epslatex color size 6in, 4in
4  set output "tv3-plot.tex"
5  set decimalsign locale 'de_DE.UTF-8'
6
7  set title "Oberschwingungen"
8  set xlabel "Ordnungszahl $n$"
9  set ylabel "Frequenz $f_n$ ($\si{\hertz})"
10
11 set mxtics
12 set mytics
13
14 set key right bottom
15
16 f(x) = m*x + c
17
18 # (x, y, xdelta, ydelta)
19 fit f(x) "tv3.dat" u 1:2:(1) yerrors via m,c
20

```

```

21 | titel = gprintf("%.6f", m)."\n + ".gprintf("%.6f", c)
22 | plot f(x) title titel lc rgb 'dark-magenta', \
23 |     "tv3.dat" u 1:2:(1) with yerrorbars title "Messpunkte" lc rgb
    |     ↪ 'dark-goldenrod'

```

mit tv3.dat:

```

1 | # n f/Hz    Ueff/mV
2 | 0  168     3,36
3 | 1  502     22,10
4 | 2  837     57,70
5 | 3 1171     31,07
6 | 4 1510     21,70
7 | 5 1843     22,48
8 | 6 2188     22,93
9 | 7 2541     24,80
10 | 8 2876     13,20
11 | 9 3210     10,10
12 |10 3554      6,76

```

Rohausgabe

```

1 | degrees of freedom    (FIT_NDF)                : 9
2 | rms of residuals      (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 6.83359
3 | variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 46.698
4 | p-value of the Chisq distribution (FIT_P)           : 0
5 |
6 | Final set of parameters          Asymptotic Standard Error
7 | =====
8 | m                                = 339.064          +/- 0.6516      (0.1922%)
9 | c                                = 159.227          +/- 3.855       (2.421%)
10 |
11 | correlation matrix of the fit parameters:
12 |           m           c
13 | m           1.000
14 | c        -0.845    1.000

```

D gnuplot Quellcode zur Auswertung von Teilversuch 4

gnuplot Code für Abbildung 4.2

```

1 | #!/usr/bin/env gnuplot
2 |
3 | set term epslatex color size 6in, 4in
4 | set output "tv4-plot.tex"
5 | set decimalsign locale 'de_DE.UTF-8'
6 |
7 | set title "Resonanzkurve des Rohres bei der 2. Oberschwingung"
8 | set xlabel "Frequenz $f$ ($\si{\hertz})"
9 | set ylabel "Mikrofonspannung $U_{\text{eff}}$ ($\si{milli\volt})"
10 |

```

```

11  set mxtics
12  set mytics
13  set samples 10000
14
15  omeganull = 837.7
16  beta = 7.4
17  A = 3
18  f(x) = (A*omeganull**2)/(sqrt((omeganull**2 - x**2)**2 + (2*beta*x)**2))
19
20  # (x, y, xdelta, ydelta)
21  fit f(x) "tv4.dat" u 1:($2-1.1):(1):(2*0.2) xyerrors via omeganull,beta,A
22
23  titel = "Angepasste Kurve"
24  plot f(x) title titel lc rgb 'dark-magenta', \
25  "tv4.dat" u 1:2:(1):(sqrt(2)*0.2) with xyerrorbars title "Messpunkte"
    ↪ pointtype 0 lc rgb 'dark-goldenrod'

```

mit tv4.dat:

1	#f/Hz	Ueff/mV	10	871	30,14	19	825	71,73
2	1011	7,33	11	861	44,53	20	818	54,43
3	980	7,53	12	854	64,33	21	810	41,24
4	970	7,99	13	850	85,80	22	801	34,00
5	952	8,85	14	844	125,53	23	790	28,51
6	928	10,85	15	841	149,11	24	780	25,66
7	910	13,45	16	837	149,49	25	760	22,68
8	892	18,33	17	833	120,65	26	742	21,61
9	881	23,31	18	830	96,04			

Rohausgabe

```

1  degrees of freedom    (FIT_NDF)                : 22
2  rms of residuals      (FIT_STDFIT) = sqrt(WSSR/ndf) : 5.71291
3  variance of residuals (reduced chisquare) = WSSR/ndf : 32.6373
4  p-value of the Chisq distribution (FIT_P)           : 0
5
6  Final set of parameters      Asymptotic Standard Error
7  =====
8  omeganull      = 835.893      +/- 1.46      (0.1746%)
9  beta           = 7.79227      +/- 1.02      (13.09%)
10 A              = 2.8473       +/- 0.1317     (4.626%)

```