

ROT – Rotation

Auswertung

Yudong Sun

in Zusammenarbeit mit David Giesege und Joel Schönberger

Gruppe F2

3. März 2020

Teilversuch 1: „Gewichtsverlust“ des Maxwellschen Rads

Das Maxwellsche-Rad hat während des Auf- und Abrollens (außer Umkehrpunkt) immer eine nach unten gerichtete Beschleunigung. Diese Beschleunigung wirkt in derselben Richtung wie die Erdbeschleunigung. Im Vergleich zum Ruhezustand zieht das Maxwellsche-Rad deswegen nicht so viel auf dem Faden. Das folgt aus der sichtbaren Beschleunigung während des Auf- und Abrollens und dem Newtonsche 3. Gesetz. Die gemessene Kraft ist folglich geringer und die Waage hebt sich ab.

Am tiefsten Punkt kehrt das Rad um. Das führt zu einer Impulsänderung in einem kurzen Zeitintervall von einem maximalen Impuls nach unten zu einem maximalen Impuls nach oben. Mit $F = \frac{dp}{dt}$ versteht man diese Impulsänderung als eine große Kraft, die auf den Faden zieht. Diese Kraft wurde als einen Zuck auf der Waage beobachtet.

Die Gewichtskraft und die Seilkraft wirken immer auf dem Rad. Da das Rad ab und aufrollt, sind diese zwei Kräfte nicht im Gleichgewicht und es gibt eine resultierende externe Kraft, die den Translationsimpuls des Rads ändert. Da die Seilkraft nicht am Schwerpunkt des Rads greift, gibt es auch ein Drehmoment bezüglich der Rotationsachse des Rads, die den Drehimpuls ändert.

Es gibt deshalb zu jedem Zeitpunkt eine externe Kraft bzw. Drehmoment auf dem Rad, und folglich ist das Rad kein Inertialsystem. Die Translation- und Drehimpuls bleiben dann auch nicht konstant.

Teilversuch 2: Bewegungsvorgang eines Maxwellschen Rads

Messung mittels Spiegelskala und Stoppuhr

Aufgrund der Art der Schwingung des Maxwellschen Rads können wir den Umkehrpunkt erst nach der Umkehrung bestimmen. Das hat bei dieser Messung zu einem Messfehler geführt, der größer als die menschliche Reaktionszeit von 0,2 s ist. In diesem Fall war $\Delta T = 0,5$ mm geschätzt.

Fehler beim Ablesen der Spiegelskala = 5 mm

Fehler bei Messung mittels Stoppuhr¹ = 0,5 s

Messreihen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Höhe h_n / mm	775	715	665	647	583	550	515	485	465	430	405
Periode T_n / s	10,57	9,53	10,10	8,92	8,89	8,76	7,79	7,59	7,92	7,40	7,03
T_n^2 / s ²	111,7	90,8	102,0	79,6	79,0	76,7	60,7	57,6	62,7	54,8	49,4
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
Höhe h_n / mm	387	365	345	330	315	300	296	275	260	250	
Periode T_n / s	6,52	6,41	6,55	5,64	6,07	5,30	5,48	5,04	4,69	4,76	
T_n^2 / s ²	42,5	41,1	42,9	31,8	36,8	28,1	30,0	25,4	22,0	22,7	

wobei n die Schwingungsnummer ist.

Der erste Höhenwert im Protokoll entspricht der Starthöhe, von der aus nur eine halbe Periode durchlaufen wird, weswegen dazu kein Zeitwert gemessen wurde (T_1 gehört zu Höhe H_2 im Protokoll). Zudem wurden zwei Zeitwerte mehr als Höhenwerte ermittelt, also werden die letzten beiden vernachlässigt.

Normale Anpassungsalgorithmen (Methode der kleinsten Quadrate) setzen voraus, dass die x -Variable die unabhängige Variable ist und als fehlerfrei genommen werden kann. Da es sich bei diesem Versuch um zwei gemessene Variablen handelt, gibt es bei beiden Variablen h_n und T_n Fehler. Die Fehler müssen dann während der Kurvenanpassung berücksichtigt werden.

Der Fehler bei $G = T_n^2$ lässt sich laut AMW wie folgt berechnen:

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta T_n}{T_n} = 2 \frac{\Delta T_n}{T_n} \implies \Delta G = 2 (T_n) (\Delta T_n) \quad (2.1)$$

Aus Gleichung (5) der Anleitung folgt, dass die Schwingungsdauer T und die Anfangshöhe h_n den folgenden Zusammenhang haben:

$$h_n = \frac{g}{8 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)} T_n^2 + h_0 \equiv ax + b \quad (2.2)$$

wobei h_0 die Höhe beim tiefsten Punkt ist.

¹Im Protokoll war der Fehler als ± 1 s geschätzt. Das fanden wir rückblickend zu groß eine Überschätzung.

Die Daten waren dann mit `gnuplot` geplottet und es wurde eine Kurvenanpassung durchgeführt (Siehe Appendix A):

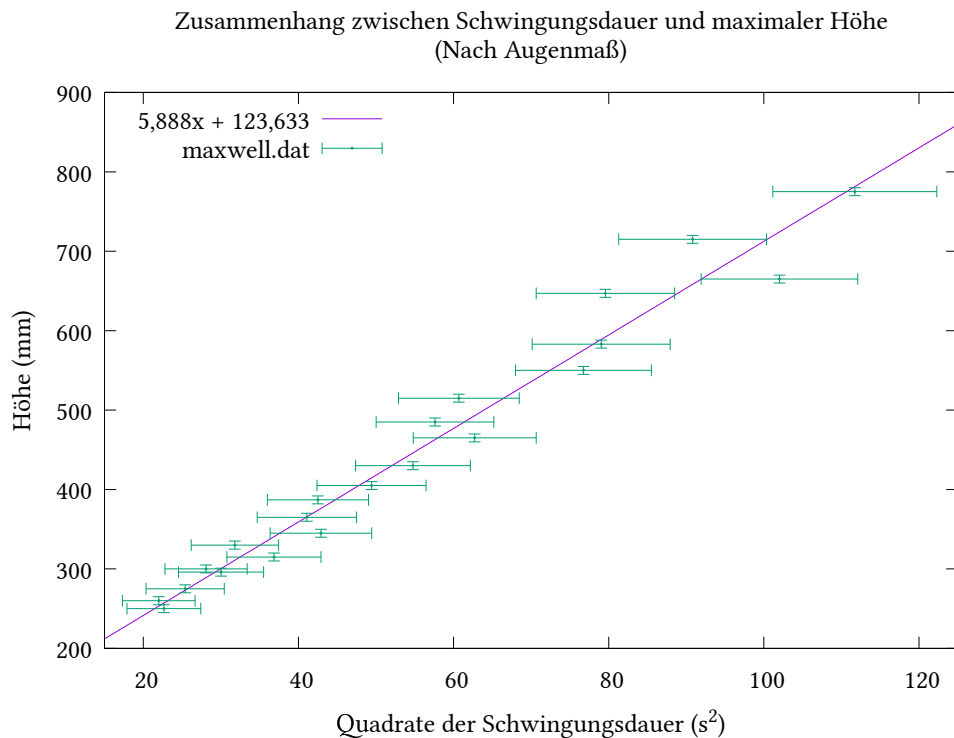


Abbildung 2.1: Nach Augenmaß gemessene Werte
 $\chi^2_{\text{red}} = 0.343292 < 1 \implies$ Gute Kurvenanpassung

Wir haben als Endergebnis:

a	$(5,8878 \pm 0,2257) \text{ mm s}^{-2}$
b	$(123,63 \pm 11,03) \text{ mm}$

Die y -Achsenabschnitt $b = (123,63 \pm 11,03) \text{ mm} = (123 \pm 12) \text{ mm}$ laut der Kurvenanpassung stimmt mit dem gemessenen Wert $h_{0\text{exp}} = (127 \pm 1) \text{ mm}$ überein.

Mit $g = 9,807 \text{ m s}^{-2}$ lässt sich die dimensionslose Größe $y = g/(8a)$ berechnen:

$$y = \frac{g}{8a} = \frac{9,807 \text{ m s}^{-2}}{8 (5,8878 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2})} = 208,2 \quad (4 \text{ sig. Zif.}) \quad (2.3)$$

Aus (2.2) und (2.3) folgt auch, dass

$$R_J = r\sqrt{y-1} = r\sqrt{\frac{g}{8a}-1} = \frac{R'_1 + R_1}{2} \sqrt{\frac{g}{8a}-1} \quad (2.4)$$

wobei $r = (R'_1 + R_1)/2$ der Wickelradius des Fadens ist.

Herleitung des Fehlers mittels Gaußschen-Fehlerfortpflanzung

Der Fehler ΔR_J ist gegeben durch:

$$\Delta R_J = \sqrt{\left(\frac{\partial R_J}{\partial R'_1} \Delta R'_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R_J}{\partial R_1} \Delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R_J}{\partial a} \Delta a\right)^2} \quad (2.5)$$

Die partielle Ableitungen liefern jeweils:

$$\frac{\partial R_J}{\partial R'_1} = \frac{\partial R_J}{\partial R_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{8a} - 1} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_J}{\partial a} &= \frac{1}{2} \left(\frac{R'_1 + R_1}{2} \right) \left(\frac{g}{8a} - 1 \right)^{-1/2} \left(-\frac{g}{8} a^{-2} \right) \\ &= -\frac{R'_1 + R_1}{4\sqrt{\frac{g}{8a} - 1}} \cdot \frac{g}{8a^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Da $\Delta R'_1 = \Delta R_1$, kann man aus (2.6) die Gleichung (2.5) vereinfachen:

$$\begin{aligned} \Delta R_J &= \sqrt{2 \left(\frac{\partial R_J}{\partial R_1} \Delta R_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial R_J}{\partial a} \Delta a \right)^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{g}{8a} - 1 \right) (\Delta R_1)^2 + \frac{(R'_1 + R_1)^2}{4 \left(\frac{g}{8a} - 1 \right)} \cdot \frac{g^2}{64a^4} (\Delta a)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{g}{8a} - 1 \right) (\Delta R_1)^2 + \frac{g^2 (R'_1 + R_1)^2}{32a^3 (g - 8a)} \cdot (\Delta a)^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bestimmung von R_J

Mit der folgenden Werten

Variable	Wert	Bedeutung
g	$9,807 \text{ m s}^{-2}$	Erdfeldbeschleunigung
R_1	$(4,05 \pm 0,05) \text{ mm}$	Radius der Achse
R'_1	$(4,70 \pm 0,05) \text{ mm}$	Radius der Achse mit Faden
a	$(5,8878 \pm 0,2257) \text{ mm s}^{-2}$	Gefundene Steigung der Gerade

lässt sich R_J und ΔR_J bestimmen:

$$\begin{aligned}
 R_J &= \frac{R'_1 + R_1}{2} \sqrt{\frac{g}{8a} - 1} \\
 &= \frac{4,70 \text{ mm} + 4,05 \text{ mm}}{2} \sqrt{\frac{9,807 \text{ m s}^{-2}}{8 (5,8878 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2})} - 1} \\
 &= 62,9766 \text{ mm} \quad (6 \text{ sig. Zif.})
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta R_J &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{9,807 \text{ m s}^{-2}}{8a} - 1 \right) (\Delta R_1)^2 + \frac{(9807 \text{ mm s}^{-2})^2 (R'_1 + R_1)^2}{32a^3 (9,807 \text{ m s}^{-2} - 8a)} \cdot (\Delta a)^2} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{9807 \text{ mm s}^{-2}}{8 (5,8878 \text{ mm s}^{-2})} - 1 \right) (0,05 \text{ mm})^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(9807 \text{ mm s}^{-2})^2 (4,70 \text{ mm} + 4,05 \text{ mm})^2}{32 (5,8878 \text{ mm s}^{-2})^3 (9807 \text{ mm s}^{-2} - 8 (5,8878 \text{ mm s}^{-2}))} \cdot (0,2257 \text{ mm s}^{-2})^2 \right)^{1/2} \\
 &= 2,5 \text{ mm} \quad (2 \text{ sig. Zif.})
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Daraus folgt: $R_J = (63,0 \pm 2,5) \text{ mm}$

Messung mittels gemessener Radien

Laut der Anleitung ist der Trägheitsradius R_J gegeben durch:

$$R_J = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{L_1 R_1^4 + L_2 (R_2^4 - R_1^4) + L_3 (R_3^4 - R_2^4 + R_5^4 - R_4^4) + L_4 (R_4^4 - R_3^4)}{L_1 R_1^2 + L_2 (R_2^2 - R_1^2) + L_3 (R_3^2 - R_2^2 + R_5^2 - R_4^2) + L_4 (R_4^2 - R_3^2)}} \tag{2.11}$$

mit

Variable	Wert	Variable	Wert
L_1	$(141,675 \pm 0,050) \text{ mm}$	R_1	$(4,05 \pm 0,05) \text{ mm}$
L_2	$(63,275 \pm 0,050) \text{ mm}$	R_2	$(6,525 \pm 0,050) \text{ mm}$
L_3	$(6,575 \pm 0,050) \text{ mm}$	R_3	$(10,25 \pm 0,05) \text{ mm}$
L_4	$(2,025 \pm 0,050) \text{ mm}$	R_4	$(67,85 \pm 0,05) \text{ mm}$
		R_5	$(87,05 \pm 0,05) \text{ mm}$

Die Werte bzw. Messunsicherheiten wurden an dieser Stelle nicht gerundet, da es sich um Zwischenergebnissen handelt. Die Einheiten wurden beim Einsetzen auch nur am Ende berücksichtigt.

$$\begin{aligned}
 R_J &= \sqrt{\frac{1}{2} \frac{L_1 R_1^4 + L_2 (R_2^4 - R_1^4) + L_3 (R_3^4 - R_2^4 + R_5^4 - R_4^4) + L_4 (R_4^4 - R_3^4)}{L_1 R_1^2 + L_2 (R_2^2 - R_1^2) + L_3 (R_3^2 - R_2^2 + R_5^2 - R_4^2) + L_4 (R_4^2 - R_3^2)}} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \frac{(141,675) (4,05)^4 + (63,275) ((6,525)^4 - (4,05)^4) + (6,575) ((10,25)^4 - (6,525)^4 + (87,05)^4 - (67,85)^4) + (2,025) ((67,85)^4 - (10,25)^4)}{(141,675) (4,05)^2 + (63,275) ((6,525)^2 - (4,05)^2) + (6,575) ((10,25)^2 - (6,525)^2 + (87,05)^2 - (67,85)^2) + (2,025) ((67,85)^2 - (10,25)^2)} \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

Nach sorgfältiger Rechnung erhalten wir $R_J = 65,2296 \text{ mm} = 65,2 \text{ mm}$ (3 sig. Zif.).

Da die Gleichung zu kompliziert ist, wurde eine (etwas inelegante) Python Skript durchgeführt, um die minimale bzw. maximale Werte von R_J zu schätzen (Siehe Appendix B). Die echte minimale und maximale Werte von R_J wurden dann mithilfe eines Taschenrechners bestimmt:

R_J	Var muss maximal sein	Var muss minimal sein	Wert
Max	L_3, R_5	$L_1, L_2, L_4, R_1, R_2, R_3, R_4$	65,5096 mm
Min	$L_1, L_2, L_4, R_1, R_2, R_3, R_4$	L_3, R_5	64,9498 mm

Da die obere und untere Grenze symmetrisch ist, ist der Fehler dann $(\max(R_J) - \min(R_J)) / 2 = 0,28 \text{ mm}$.

Daraus folgt, dass $R_J = (65,23 \pm 0,28) \text{ mm}$.

Diskussion 1

R_J	Wert
Augenmaß	$(63,0 \pm 2,5) \text{ mm}$
Radienmessung	$(65,23 \pm 0,28) \text{ mm}$

Der durch Radienmessung bestimmte Wert R_{J_r} liegt im Fehlerintervall des durch Augenmaß bestimmten Wert R_{J_a} . Das Ergebnis R_{J_a} stimmt mit dem Vergleichswert R_{J_r} überein.

Der Fehler ΔR_{J_a} ist aber deutlich größer als den Fehler ΔR_{J_r} . Dieser Unterschied kann zu der Ungenauigkeit der Messmethode und der Schwankungen des Rads während der Auf- und Abrollens zurückgeführt. Wie im ersten Abschnitt schon erwähnt hat, war es auch schwer den Umkehrpunkt mit Augenmaß genau zu bestimmen.

Beide Methode haben ihren eigenen Vorteil. Augenmaß ist eher ungenau und zeitintensiv, aber führt zu einer einfacheren Rechnung. Stattdessen ist die Radienmessung genauer, aber führt zu Schwierigkeiten bei der Fehlerbestimmung.

Messung mittels Ultraschall-Bewegungssensor

Aus dem Protokoll sind unsere Erwartungen wie folgt:

Höhe	Aneinandergereihte, nach unten geöffnete Parabelbögen mit abnehmende Höhe
Geschwindigkeit	„Sägezahnkurve“, also linear steigende Geschwindigkeit mit Sprüngen zwischen den Perioden von minimaler zu maximaler Geschwindigkeit.
Beschleunigung	Konstante Beschleunigung $< g$; an Umkehrpunkten sehr hohe Beschleunigung.

Unsere Erwartungen stimmen mit den Diagrammen aus *LoggerPro* größtenteils überein, besonders bei der Position-Zeit Diagramme. Die größte Abweichungen lässt sich im Beschleunigung-Zeit Diagramme erfahren. Zwischen den Peaks sollte die Beschleunigung theoretisch konstant bleiben, aber es gibt in diesen Fall große Abweichungen im Form von Geräusch.

Das kann vermutlich auf die Art und Weise zurückführen, wie *LoggerPro* diese Diagramme erzeugt hat. Zwischen jeder zwei nacheinander folgender Positionspunkte würden wahrscheinlich die Differenz und „Steigung“ gerechnet und dann geplottet. Die Beschleunigung könnte auch so von Geschwindigkeitspunkten berechnet werden. Das könnte zu der Situation führen, indem kleine Abweichungen bzw. Geräusche bei den Positionspunkten mit der Rechnung der Geschwindigkeitspunkten vergrößert würden. Diese Vergrößerung verstärkt sich weiter mit der Rechnung der Beschleunigung. Deswegen entstehen in den Diagramme die Abweichungen von unserer Erwartungen.

Der von Computer berechnete y -Achsenabschnitt liegt bei $(-0,0167 \pm 0,0021) \text{ m} = (-1,67 \pm 0,21) \text{ cm}$, was der Nullpunkt ziemlich nah liegt. Der Nullpunkt liegt trotzdem nicht in dem Fehlerintervall dieses Wertes. Manuelles Nachmessen ergab jedoch, dass sich die Höhe des Rades während dem Versuch nicht geändert hat. Der Fehler könnte bei der manuellen Auswahl der Umkehrpunkte im Diagramm entstanden sein.

Bestimmung von R_J

Die Rechnung erfolgt wie vorher. Mit der folgenden Werten

Variable	Wert	Bedeutung
g	$9,807 \text{ m s}^{-2}$	Erdfeldbeschleunigung
R_1	$(4,05 \pm 0,05) \text{ mm}$	Radius der Achse
R'_1	$(4,70 \pm 0,05) \text{ mm}$	Radius der Achse mit Faden
a	$(5,697\,14 \pm 0,030\,33) \text{ mm s}^{-2}$	Erhaltene Steigung (Ultraschall-Sensor)

lässt sich R_J und ΔR_J mithilfe (2.4) und (2.8) bestimmen:

$$\begin{aligned}
 R_J &= \frac{R'_1 + R_1}{2} \sqrt{\frac{g}{8a} - 1} \\
 &= \frac{4,70 \text{ mm} + 4,05 \text{ mm}}{2} \sqrt{\frac{9,807 \text{ m s}^{-2}}{8 (5,697\,14 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2})} - 1} \\
 &= 64,0267 \text{ mm} \quad (6 \text{ sig. Zif.})
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta R_J &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{9,807 \text{ m s}^{-2}}{8a} - 1 \right) (\Delta R_1)^2 + \frac{(9807 \text{ mm s}^{-2})^2 (R'_1 + R_1)^2}{32a^3 (9,807 \text{ m s}^{-2} - 8a)} \cdot (\Delta a)^2} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{9807 \text{ mm s}^{-2}}{8 (5,697\,14 \text{ mm s}^{-2})} - 1 \right) (0,05 \text{ mm})^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(9807 \text{ mm s}^{-2})^2 (4,70 \text{ mm} + 4,05 \text{ mm})^2}{32 (5,697\,14 \text{ mm s}^{-2})^3 (9807 \text{ mm s}^{-2} - 8 (5,697\,14 \text{ mm s}^{-2}))} \cdot (0,030\,33 \text{ mm s}^{-2})^2 \right)^{1/2} \\
 &= 0,7 \text{ mm} \quad (1 \text{ sig. Zif.})
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Daraus folgt: $R_J = (64,0 \pm 0,7) \text{ mm}$

Diskussion 2

R_J	Wert
Augenmaß	$(63,0 \pm 2,5) \text{ mm}$
Radienmessung	$(65,23 \pm 0,28) \text{ mm}$
Ultraschall-Sensor	$(64,0 \pm 0,7) \text{ mm}$

Die Fehlerintervalle der manuellen durch Augenmaß bestimmte Messung und der computergestützten Messung überschneiden sich auch wie bei der Radienmessung. Die Werte stimmen in Rahmen der Messgenauigkeit überein.

Der durch Radienmessung erhaltene Wert von R_J liegt nur in dreifachen des Fehlerintervalls des computergestützten Wertes. Die Werte sind also verträglich miteinander. Dieser Unterschied ist vermutlich dadurch entsteht, dass die Ungenauigkeit der Ultraschall-Sensor bezüglich zeitlicher und örtlicher Messungen nicht berücksichtigt wurde.

Der Schwerpunkt eines Körpers gibt an, wo sich ein Massenpunkt gleicher Masse in einem konservative Gravitationskraftfeld befinden müsste, um die gleiche Beschleunigung zu erfahren. Analog dazu gibt der Trägheitsradius an, wo sich ein Massenpunkt gleicher Masse befinden müsste, um das gleiche Drehmoment mit einer bestimmter Kraft um einer bestimmter Rotationsachse zu erfahren.

Teilversuch 3: Trägheitsmomente verschiedener Körper

Kalibrierung des Torsionspendels

Fehler bei der Zeitmessung mit Handy = 0,5 s

Messreihe

n	1	2	3	4	$\overline{T_n}/s$
$5T_n/s$	83,12	82,44	82,42	82,24	16,51

wobei $\overline{T_n}$ und seiner zugehöriger Fehler $\Delta\overline{T_n}$ ist gegeben durch:

$$\overline{T_n} = \frac{1}{5n} \sum_{i=1}^n (5T_i) = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^4 (5T_i) \quad (3.1)$$

$$\Delta\overline{T_n} = \frac{\Delta(5T)}{5\sqrt{n}} = \frac{\Delta(5T)}{5\sqrt{4}} = 0,05 \text{ s} \quad (3.2)$$

Die Schwingungsdauer T ist dann $(16,51 \pm 0,05) \text{ s}$.

Rechnung

Aus Gleichung (10) und (12) der Anleitung haben wir:

$$k = \frac{D}{4\pi^2} = \frac{J}{T^2} \stackrel{(12)}{=} \frac{mR^2}{2T^2} \quad (3.3)$$

Der Fehler Δk ist gegeben durch:

$$\Delta k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial m} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial R} \Delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial T} \Delta T\right)^2} \quad (3.4)$$

Die partielle Ableitungen liefern jeweils:

$$\frac{\partial k}{\partial T} = mR^2(-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot T^{-3} = -\frac{mR^2}{T^3} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial k}{\partial R} = \frac{m}{2T^2}(2)R = \frac{mR}{T^2} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial k}{\partial m} = \frac{R^2}{2T^2} \quad (3.7)$$

$$\Rightarrow \Delta k = \frac{R}{T^2} \sqrt{\left(\frac{R}{2} \Delta m\right)^2 + (m \Delta R)^2 + \left(\frac{mR}{T} \Delta T\right)^2} \quad (3.8)$$

Mit der folgenden Werten

Variable	Wert	Bedeutung
m	$(3013,80 \pm 0,13) \text{ g}$	Masse der Scheibe
$2R$	$(16,9 \pm 0,1) \text{ cm}$	Durchmesser der Scheibe
R	$(8,45 \pm 0,05) \text{ cm}$	Radius der Scheibe
T	$(16,51 \pm 0,05) \text{ s}$	Schwingungsdauer

lässt sich k und Δk bestimmen:

$$k = \frac{mR^2}{2T^2} = \frac{(3,013\,80 \text{ kg}) (8,45 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{2 (16,51 \text{ s})^2} = 3,947\,332\,445 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \quad (6 \text{ sig. Zif.}) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \Delta k &= \frac{R}{T^2} \sqrt{\left(\frac{R}{2} \Delta m\right)^2 + (m \Delta R)^2 + \left(\frac{mR}{T} \Delta T\right)^2} \\ &= \frac{8,45 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{(16,51 \text{ s})^2} \left(\left(\left(\frac{8,45 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2} \right) (1,3 \cdot 10^{-4} \text{ kg}) \right)^2 + \left((3,013\,80 \text{ kg}) (5 \cdot 10^{-4} \text{ m}) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(3,013\,80 \text{ kg}) (8,45 \cdot 10^{-2} \text{ m})}{(16,51 \text{ s})} (0,05 \text{ s}) \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= 5,247\,72 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \quad (1 \text{ sig. Zif.}) \quad (3.10) \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $k = (3,95 \pm 0,06) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ ist.

Berechnung der Trägheitsmomente

Messreihe der Schwingungsdauer

Fehler bei jeder Messung = 0,2 s

Die Einheiten sind alle Sekunde.

Fläche (l_1, l_2)				Fläche (l_1, l_3)				Fläche (l_2, l_3)			
n	1	2	$\overline{T_n}$	n	1	2	$\overline{T_n}$	n	1	2	$\overline{T_n}$
$5T_n$	36,08	35,86	7,194	$5T_n$	45,69	45,63	9,132	$5T_n$	50,15	49,95	10,01

Raumdiagonale			
n	1	2	$\overline{T_n}$
$5T_n$	41,01	41,04	8,205

wobei die jeweilige Mittelwerte analog zu Gleichung (3.1) mit $n = 2$ berechnet wurde.

Der jeweilige Fehler ist analog zu Gleichung (3.2) wie folgt gegeben:

$$\Delta T = \frac{0,2}{5\sqrt{2}} = 0,029 \text{ s} \quad (3.11)$$

Rechnung mittels Schwingungsdauer

Aus Gleichung (3.3) ist die Trägheitsmoment J gegeben durch:

$$J = kT^2 \quad (3.12)$$

Der Fehler ist laut AMW dann:

$$\Delta J = kT^2 \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2} \quad (3.13)$$

Mit $k = (3,947\,332\,4 \pm 0,052\,477\,2) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ sind die Hauptträgheitsmomente:

Fläche (l_1, l_2) **mit** $\hat{e}_{1,2} = \hat{e}_z$

$$J = \left(3,954\,733\,24 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}\right) (7,194 \text{ s})^2 = 2,044\,29 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (6 \text{ sig. Zif.}) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \Delta J &= \left(3,954\,733\,24 \cdot 10^{-5}\right) (7,194)^2 \sqrt{\left(\frac{5,247\,72 \cdot 10^{-7}}{3,954\,733\,24 \cdot 10^{-5}}\right)^2 + \left(\frac{2(0,029)}{7,194}\right)^2} \text{ kg m}^2 \\ &= 3,177 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow J_z = (2,04 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (3.16)$$

Fläche (l_1, l_3) **mit** $\hat{e}_{1,3} = \hat{e}_y$

$$J = \left(3,954\,733\,24 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}\right) (9,132 \text{ s})^2 = 3,291\,82 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (6 \text{ sig. Zif.}) \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \Delta J &= \left(3,954\,733\,24 \cdot 10^{-5}\right) (9,132)^2 \sqrt{\left(\frac{5,247\,72 \cdot 10^{-7}}{3,954\,733\,24 \cdot 10^{-5}}\right)^2 + \left(\frac{2(0,029)}{9,132}\right)^2} \text{ kg m}^2 \\ &= 4,851 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow J_y = (3,29 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (3.19)$$

Fläche (l_2, l_3) mit $\hat{e}_{2,3} = \hat{e}_x$

$$J = \left(3,954\,733\,24 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}\right) (10,01 \text{ s})^2 = 3,955\,23 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (6 \text{ sig. Zif.}) \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta J &= \left(3,954\,733\,24 \cdot 10^{-5}\right) (10,01)^2 \sqrt{\left(\frac{5,247\,72 \cdot 10^{-7}}{3,954\,733\,24 \cdot 10^{-5}}\right)^2 + \left(\frac{2(0,029)}{10,01}\right)^2} \text{ kg m}^2 \\ &= 5,736 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\Rightarrow J_x = (3,96 \pm 0,06) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (3.22)$$

Raumdiagonale

$$J = \left(3,954\,733\,24 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}\right) (8,205 \text{ s})^2 = 2,657\,42 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (6 \text{ sig. Zif.}) \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta J &= \left(3,954\,733\,24 \cdot 10^{-5}\right) (8,205)^2 \sqrt{\left(\frac{5,247\,72 \cdot 10^{-7}}{3,954\,733\,24 \cdot 10^{-5}}\right)^2 + \left(\frac{2(0,029)}{8,205}\right)^2} \text{ kg m}^2 \\ &= 4,001\,24 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2 \end{aligned} \quad (3.24)$$

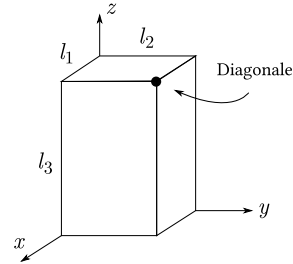
$$\Rightarrow J_d = (2,66 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (3.25)$$

Genauere k und T wurden hier benutzt, um Rundungsfehler zu vermeiden.

Messreihe der Längen

Wir definieren die Längen L_x, L_y, L_z wie im letzten Abschnitt, das heißt:

$$\begin{aligned} L_x &= l_1 = (5,115 \pm 0,005) \text{ cm} \\ L_y &= l_2 = (7,315 \pm 0,005) \text{ cm} \\ L_z &= l_3 = (10,250 \pm 0,005) \text{ cm} \end{aligned}$$



Rechnung mittels Längemessung

Aus der Herleitung lassen J_d und den dazu gehörigen Fehler wie folgt berechnen:

$$J_d = \frac{1}{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} \left(J_x L_x^2 + J_y L_y^2 + J_z L_z^2 \right) \quad (3.26)$$

$$\Delta J_d = \sqrt{\left(\frac{\partial J_d}{\partial L_x} \Delta L_x\right)^2 + \left(\frac{\partial J_d}{\partial L_y} \Delta L_y\right)^2 + \left(\frac{\partial J_d}{\partial L_z} \Delta L_z\right)^2 + \left(\frac{\partial J_d}{\partial J_x} \Delta J_x\right)^2 + \left(\frac{\partial J_d}{\partial J_y} \Delta J_y\right)^2 + \left(\frac{\partial J_d}{\partial J_z} \Delta J_z\right)^2} \quad (3.27)$$

Sei $r(L_x, L_y, L_z) = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, dann liefern die partielle Ableitungen jeweils:

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_d}{\partial L_x} &= J_x \left(\frac{2L_x}{r} - \frac{L_x^2}{r^2} \frac{\partial r}{\partial L_x} \right) = \frac{2J_x L_x}{r} \left(1 - \frac{L_x^2}{r} \right) \\ \frac{\partial J_d}{\partial L_y} &= \frac{2J_y L_y}{r} \left(1 - \frac{L_y^2}{r} \right) & \frac{\partial J_d}{\partial L_z} &= \frac{2J_z L_z}{r} \left(1 - \frac{L_z^2}{r} \right) \\ \frac{\partial J_d}{\partial J_x} &= \frac{L_x^2}{r} & \frac{\partial J_d}{\partial J_y} &= \frac{L_y^2}{r} & \frac{\partial J_d}{\partial J_z} &= \frac{L_z^2}{r}\end{aligned}$$

Da $(1 - L_x^2/r) = (1/r)(r - L_x^2)$ und $\Delta L_x = \Delta L_y = \Delta L_z = \Delta L$, können wir den Fehler so vereinfachen²:

$$\begin{aligned}\Delta J_d &= \sqrt{\frac{4\Delta L^2}{r^4} \left(\begin{bmatrix} J_x (r - L_x^2) \\ J_y (r - L_y^2) \\ J_z (r - L_z^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\begin{bmatrix} L_x^2 \\ L_y^2 \\ L_z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta J_x \\ \Delta J_y \\ \Delta J_z \end{bmatrix} \right)^2} \\ &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{4\Delta L^2}{r^2} \left(\begin{bmatrix} J_x (r - L_x^2) \\ J_y (r - L_y^2) \\ J_z (r - L_z^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} \right)^2 + \left(\begin{bmatrix} L_x^2 \\ L_y^2 \\ L_z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta J_x \\ \Delta J_y \\ \Delta J_z \end{bmatrix} \right)^2} \quad (3.28)\end{aligned}$$

Mithilfe eines Python Skript (Siehe Appendix C) wurden J_d und ΔJ_d berechnet und wir erhalten $J_d = (2,68 \pm 0,06) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$.

Tabuliert haben wir:

J_d (Schwingungsdauer)	$(2,66 \pm 0,05) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$
J_d (Rechnung)	$(2,68 \pm 0,06) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$

Die Werte stimmen miteinander überein.

Rechnung der Hauptträgheitsmoment mittels Längemessung

Aus Seite 10 der Anleitung sind die Hauptträgheitsmomente gegeben durch:

$$J_x = \frac{1}{12} m (L_y^2 + L_z^2), \quad J_y = \frac{1}{12} m (L_z^2 + L_x^2), \quad J_z = \frac{1}{12} m (L_x^2 + L_y^2) \quad (3.29)$$

Der Fehler für J_x ist dann:

$$\Delta J_x = \sqrt{\left(\frac{\partial J_x}{\partial m} \Delta m \right)^2 + \left(\frac{\partial J_x}{\partial L_y} \Delta L_y \right)^2 + \left(\frac{\partial J_x}{\partial L_z} \Delta L_z \right)^2} \quad (3.30)$$

mit J_y und J_z analog.

²Es ist so geschrieben, sodass die Gleichung in einer Zeile geschrieben werden kann. Damit ist die Rechnung auch einfacher. Es gibt keine physikalische Bedeutung.

Die partielle Ableitungen liefern jeweils:

$$\frac{\partial J_x}{\partial m} = \frac{1}{12} (L_y^2 + L_z^2), \quad \frac{\partial J_x}{\partial L_y} = \frac{1}{6} m L_y, \quad \frac{\partial J_x}{\partial L_z} = \frac{1}{6} m L_z \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \Delta J_x &= \sqrt{\frac{1}{144} \left((L_y^2 + L_z^2) \Delta m \right)^2 + \frac{m^2 \Delta L^2}{36} (L_y^2 + L_z^2)} \\ &= \frac{\sqrt{L_y^2 + L_z^2}}{12} \sqrt{(L_y^2 + L_z^2) (\Delta m)^2 + (4m^2 \Delta L^2)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

mit J_y und J_z analog.

Mit $m = (3,011\,20 \pm 0,000\,13) \text{ kg}$, haben wir:

Fläche (l_2, l_3) **mit** $\hat{e}_{2,3} = \hat{e}_x$

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{1}{12} (3,011\,20 \text{ kg}) \left((7,315 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 + (10,250 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \right) \\ &= 3,979\,09 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (6 \text{ sig. Zif.}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \Delta J_x &= \frac{\sqrt{(7,315 \cdot 10^{-2})^2 + (10,250 \cdot 10^{-2})^2}}{12} \\ &\quad \times \sqrt{\left((7,315 \cdot 10^{-2})^2 + (10,250 \cdot 10^{-2})^2 \right) (1,3 \cdot 10^{-4})^2 + \left(4 (3,011\,20)^2 (5 \cdot 10^{-5})^2 \right)} \text{ kg m}^2 \\ &= 3,17 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 \quad (3 \text{ sig. Zif.}) \\ \implies J_x &= (3,979 \pm 0,004) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \end{aligned} \quad (3.34) \quad (3.35)$$

Fläche (l_1, l_3) **mit** $\hat{e}_{1,3} = \hat{e}_y$

$$\begin{aligned} J_y &= \frac{1}{12} (3,011\,20 \text{ kg}) \left((5,115 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 + (10,250 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \right) \\ &= 3,292\,89 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (6 \text{ sig. Zif.}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \Delta J_y &= \frac{\sqrt{(5,115 \cdot 10^{-2})^2 + (10,250 \cdot 10^{-2})^2}}{12} \\ &\quad \times \sqrt{\left((5,115 \cdot 10^{-2})^2 + (10,250 \cdot 10^{-2})^2 \right) (1,3 \cdot 10^{-4})^2 + \left(4 (3,011\,20)^2 (5 \cdot 10^{-5})^2 \right)} \text{ kg m}^2 \\ &= 2,88 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 \quad (3 \text{ sig. Zif.}) \\ \implies J_y &= (3,293 \pm 0,029) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \end{aligned} \quad (3.37) \quad (3.38)$$

Fläche (l_1, l_2) **mit** $\hat{e}_{1,2} = \hat{e}_z$

$$J_z = \frac{1}{12} (3,011\,20\,\text{kg}) \left((5,115 \cdot 10^{-2}\,\text{m})^2 + (7,315 \cdot 10^{-2}\,\text{m})^2 \right) \\ = 1,999\,25 \cdot 10^{-3}\,\text{kg m}^2 \quad (6 \text{ sig. Zif.}) \quad (3.39)$$

$$\Delta J_z = \frac{\sqrt{(5,115 \cdot 10^{-2})^2 + (10,250 \cdot 10^{-2})^2}}{12} \\ \times \sqrt{\left((5,115 \cdot 10^{-2})^2 + (10,250 \cdot 10^{-2})^2 \right) (1,3 \cdot 10^{-4})^2 + \left(4 (3,011\,20)^2 (5 \cdot 10^{-5})^2 \right)} \,\text{kg m}^2 \\ = 2,24 \cdot 10^{-6}\,\text{kg m}^2 \quad (3 \text{ sig. Zif.}) \quad (3.40) \\ \Rightarrow J_z = (1,999 \pm 0,023) \cdot 10^{-3}\,\text{kg m}^2 \quad (3.41)$$

Vergleichung

	Schwingung	Längemessung
J_x	$(3,96 \pm 0,06) \cdot 10^{-3}\,\text{kg m}^2$	$(3,979 \pm 0,004) \cdot 10^{-3}\,\text{kg m}^2$
J_y	$(3,29 \pm 0,05) \cdot 10^{-3}\,\text{kg m}^2$	$(3,293 \pm 0,029) \cdot 10^{-3}\,\text{kg m}^2$
J_z	$(2,04 \pm 0,04) \cdot 10^{-3}\,\text{kg m}^2$	$(1,999 \pm 0,023) \cdot 10^{-3}\,\text{kg m}^2$

Die Fehlerintervalle der Trägheitsmomente jeder Achse überschneidet sich. Die Werte stimmen miteinander überein.

Teilversuch 4: Identifikation des „falschen“ Würfels

Messreihe

Fehler bei jeder Messung = 0,2 s

Roter Würfel

M_1	
Versuch	T_i/s
$(5T)_1$	56,74
$(5T)_2$	56,46
\bar{T}	11,32

M_2	
Versuch	T_i/s
$(5T)_1$	57,55
$(5T)_2$	57,70
\bar{T}	11,525

M_3	
Versuch	T_i/s
$(5T)_1$	55,78
$(5T)_2$	56,01
\bar{T}	11,179

Grüner Würfel

M_1	
Versuch	T_i/s
$(5T)_1$	55,59
$(5T)_2$	55,35
\bar{T}	11,094

M_2	
Versuch	T_i/s
$(5T)_1$	57,27
$(5T)_2$	57,02
\bar{T}	11,429

M_3	
Versuch	T_i/s
$(5T)_1$	56,97
$(5T)_2$	56,99
\bar{T}	11,396

wobei alle \overline{T} analog zu (3.1) mit $n = 2$ berechnet wurden.

Die Rechnung des Fehlers jedes \overline{T} erfolgt auch analog zu (3.2) wie bei (3.11) und ergibt $\Delta\overline{T} = 0,029 \text{ s}$

Die größte Unterschied zwischen den Schwingungsdauer zweier Seite beträgt bei dem roter Würfel die zwischen M_2 und M_3 ($11,525 \text{ s} - 11,179 \text{ s} = 0,346 \text{ s}$) und bei dem grüner Würfel die zwischen M_1 und M_2 ($11,429 \text{ s} - 11,094 \text{ s} = 0,335 \text{ s}$). Beide Differenz entspricht ein Unterschied viel größer als sogar dreifachen des Fehlerintervalls ($3\Delta T = 3 \times 0,029 \text{ s} = 0,087 \text{ s}$).

Es gibt außerdem keinen signifikanten Unterschied zwischen den beiden Würfeln. Entweder sind beide Würfel „falsch“, oder die Fehler wurden wesentlich zu gering eingeschätzt.

Teilversuch 5: Nicht-starrer Körper am Drehpendel

Fehler bei jeder Messung = 0,2 s

Arretierte								
n	1	2	3	4	5	6	7	$\overline{T_n}$
$5T_n/s$	34,20	34,14	33,59	33,59	34,68	34,13	34,16	6,814

Frei Drehbare								
n	1	2	3	4	5	6	7	$\overline{T_n}$
$5T_n/s$	30,08	30,10	30,06	30,98	30,87	29,80	29,84	6,049

wobei alle \overline{T} analog zu (3.1) mit $n = 7$ berechnet wurden.

Die Rechnung des Fehlers jedes \overline{T} erfolgt auch analog zu (3.2) und ergibt $\Delta\overline{T} = (0,2s)/(5\sqrt{7}) = 0,016s$.

Im Vergleich zu dem Fehler hat die Hantel mit arretierten Seitenzylinder eine deutlich größere Schwingungsdauer als die mit frei drehbaren Seitenzylinder. Aus dem gleichen Direktionsmoment des Drahtes folgt, dass die Hantel mit dem arretierten Zylinder ein größeres Trägheitsmoment hat.

Dies erklärt sich dadurch, dass die freien Zylinder ihre eigene Drehbewegung bezüglich des Laborsystems nicht ändern und folglich liefern sie keinen Beitrag zum Trägheitsmoment des Systems.

Man kann hier trotzdem den Steinerschen Satz anwenden, weil das Superpositionsprinzip für die Berechnung des Trägheitsmoments eines aus verschiedenen Teilen zusammengesetztes Objekt gilt. In diesem Fall sind die Schwerpunktschwerachse der zwei Zylinder nicht die gleiche wie die Rotationsachse im Versuch. Deswegen kann man mithilfe des Steinerschen Satz die Zunahme des Trägheitsmoments erklären.

A gnuplot Quellcode zur Auswertung von Teilversuch 2

gnuplot Code für Abbildung 2.1

```

1  set term epscairo font "Linux Libertine, 14" size 5in, 4in
2  set output "maxwell.eps"
3  set decimalsign locale 'de_DE.UTF-8'
4
5  set title "Zusammenhang zwischen Schwingungsdauer und maximaler Höhe\n(Nach
   ↳ Augenmaß)"
6  set xlabel "Quadrate der Schwingungsdauer (s^2)"
7  set ylabel "Höhe (mm)"
8  set key left top
9
10 f(x) = m*x + c
11
12 # (x, y, xdelta, ydelta)
13 fit f(x) "maxwell.dat" u ($2**2):1:($2*2*(0.5)):5 xyerrors via m,c
14
15 set yrange [200:900]
16 set xrange [15:125]
17
18 t = gprintf("%.3f", m). "x + ".gprintf("%.3f", c)
19 plot f(x) title t, "maxwell.dat" u ($2**2):1:($2*2*(0.5)):5 with
   ↳ xyerrorbars pointtype 0 title "maxwell.dat"

```

mit maxwell.dat:

```

1  # Höhe T
2  775 10,57
3  715 9,53
4  665 10,1
5  647 8,92
6  583 8,89
7  550 8,76
8  515 7,79
9  485 7,59
10 465 7,92
11 430 7,4
12 405 7,03
13 387 6,52
14 365 6,41
15 345 6,55
16 330 5,64
17 315 6,07
18 300 5,3
19 296 5,48
20 275 5,04
21 260 4,69
22 250 4,76

```

B Python Code zur Bestimmung des Fehlers ΔR_J

```

1  #!/usr/bin/env python3
2
3  import numpy as np
4
5  def rj(l1, l2, l3, l4, r1, r2, r3, r4, r5):
6      return np.sqrt((0.5)*((l1*r1**4 + l2*(r2**4-r1**4) +
7          ↪  l3*(r3**4-r2**4+r5**4-r4**4) + l4*(r4**4-r3**4))/(l1*r1**2 +
8          ↪  l2*(r2**2-r1**2) + l3*(r3**2-r2**2+r5**2-r4**2) + l4*(r4**2-r3**2))))
9
10
11 def parameterize(*args):
12     return args
13
14
15 maxWert = 0
16 minWert = 100
17 step = 0.01
18
19 for i1 in range(-5,6,2):
20     for i2 in range(-5,6,2):
21         for i3 in range(-5,6,2):
22             for i4 in range(-5,6,2):
23                 for i5 in range(-5,6,2):
24                     for i6 in range(-5,6,2):
25                         for i7 in range(-5,6,2):
26                             for i8 in range(-5,6,2):
27                                 for i9 in range(-5,6,2):
28                                     currWert = rj(141.675 + i1*step, 63.275 +
29                                         ↪ i2*step, 6.575 + i3*step, 2.025 +
30                                         ↪ i4*step, 4.05 + i5*step, 6.525 +
31                                         ↪ i6*step, 10.25 + i7*step, 67.85 +
32                                         ↪ i8*step, 87.05 + i9*step)
33                                     params = parameterize(141.675 + i1*step,
34                                         ↪ 63.275 + i2*step, 6.575 + i3*step,
35                                         ↪ 2.025 + i4*step, 4.05 + i5*step,
36                                         ↪ 6.525 + i6*step, 10.25 + i7*step,
37                                         ↪ 67.85 + i8*step, 87.05 + i9*step)
38
39                                     if currWert > maxWert:
40                                         maxWert = currWert
41                                         maxParams = params
42                                     if currWert < minWert:
43                                         minWert = currWert
44                                         minParams = params
45
46 print("Max Value\t", maxWert)
47 print("Max Params\t", maxParams)
48 print("Min Value\t", minWert)
49 print("Min Params\t", minParams)

```

Rohausgabe:

```

1 | Max Value      65.50959631684215
2 | Max Params    (141.625, 63.225, 6.625, 1.9749999999999999, 4.0,
   | ↪ 6.4750000000000005, 10.2, 67.8, 87.1)
3 | Min Value      64.94975893345266
4 | Min Params    (141.72500000000002, 63.324999999999996, 6.525,
   | ↪ 2.0749999999999997, 4.1, 6.575, 10.3, 67.89999999999999, 87.0)

```

Wertetabelle zur Vergleichung:

Variable	Wert	Variable	Wert
L_1	$(141,675 \pm 0,050)$ mm	R_1	$(4,05 \pm 0,05)$ mm
L_2	$(63,275 \pm 0,050)$ mm	R_2	$(6,525 \pm 0,050)$ mm
L_3	$(6,575 \pm 0,050)$ mm	R_3	$(10,25 \pm 0,05)$ mm
L_4	$(2,025 \pm 0,050)$ mm	R_4	$(67,85 \pm 0,05)$ mm
		R_5	$(87,05 \pm 0,05)$ mm

C Python Code zur Bestimmung des Wertes und Fehlers von J_d im Teilversuch 3

```

1 | #!/usr/bin/env python3
2 | import numpy as np
3 |
4 | # x, y, z
5 | L      = np.array([5.115e-2, 7.315e-2, 10.250e-2])
6 | deltaL = 0.005e-2
7 | J      = np.array([3.95523e-3, 3.29182e-3, 2.04429e-3])
8 | deltaJ = np.array([3.177e-5, 4.851e-5, 5.736e-5])
9 |
10 | r = np.dot(L, L)
11 |
12 | vecL2 = np.multiply(L, L)
13 | vec1 = np.multiply(J, r - vecL2)
14 |
15 | def Jd():
16 |     return (1/r)*(np.dot(J, vecL2))
17 |
18 | def deltaJd():
19 |     return (1/r)*np.sqrt(((4*deltaL**2)/(r**2))*(np.dot(vec1, L))**2 +
   | ↪ (np.dot(vecL2, deltaJ)**2))
20 |
21 | print("J_d Wert\t", Jd())
22 | print("Delta J_d\t", deltaJd())

```

Rohausgabe:

```

1 | J_d Wert      0.0026762804092092477
2 | Delta J_d     5.122652638090954e-05

```