

STO – Stöße

Auswertung

Yudong Sun

in Zusammenarbeit mit Fabian Solfronk und Simon Pfeiffer

Gruppe F2

28. Februar 2020

Teilversuch 1: Flugweiten und Streuung verschiedener Projektilarten

Messung

Fehler beim Abschlagen des Schienendes auf das Transparentpapier = 0,5 mm

Fehler bei Markierung des Aufschlagpunktes = 1,0 mm

Fehler beim Lesen des Lineal = 0,5 mm (beim 0) + 0,5 mm (beim Aufschlagpunkt) = 1,0 mm

Fehler bei Messung der Flugweiten insgesamt = 2,5 mm

Kugelart	Flugweite x_i im Versuch i / mm					Mittelwert \bar{x}
	1	2	3	4	5	
Kleine Stahlkugel	254,0	252,5	255,5	253,0	255,0	254,0
Große Stahlkugel	255,0	257,5	253,5	256,0	258,0	256,0
Glaskugel	239,5	238,0	233,0	245,0	240,5	239,2
Plastikkugel	235,5	249,5	264,0	250,0	258,0	251,4

Der Mittelwert \bar{x} wurde wie folgt berechnet:

$$\bar{x} = \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 x_i \right) \quad (1.1)$$

Da alle Messungen stochastisch unabhängig sind, benutzen wir hier die Gauß'scher Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta \bar{x} = \frac{1}{5} \sqrt{5 (\Delta x_i)^2} = \frac{1}{5} \sqrt{5 (2,5 \text{ mm})^2} = 1,1 \text{ mm} \quad (1.2)$$

Fehlerkreis

Die Fehlerkreise sind auf dem korpierten Transparenzpapier gezeichnet. Circa $\frac{2}{3} \times 5 = 3,3$ Punkten müssen in diesem Kreis liegen.

Die Auftreffpunkten für die kleine Stahlkugel waren leider zu eng zusammen. Das hat zu Schwierigkeiten beim Zeichnen des Fehlerkreises geführt.

Theoretische Flugweite des kleinen Stahlkugels

Herleitung

Aus Gleichung (15) der Anleitung haben wir die Formel für die theoretische Flugweite s_{th} :

$$s_{th} = \sqrt{\frac{4h_1 h_2}{1 + \frac{2}{5 \sin^2 \beta/2}}} = \sqrt{\frac{4h_1 (h - \varnothing)}{1 + \frac{2}{5 \sin^2 \beta/2}}} = \mu \sqrt{h - \varnothing} \quad (1.3)$$

mit

Variable	Wert mit Fehler	Bedeutung
h_1	229,0 mm	Höhendifferenz zws. Startposition und Schienenauslauf
β	120°	Öffnungswinkel
h	(138,00 ± 0,02) mm	Höhe von Stahlkugeloberfläche bis Detektorboden
\varnothing	(20,00 ± 0,05) mm	Durchmesser des Stahlkugels

wobei $h_2 = h' - 2 \times \varnothing/2 = h - \varnothing$ die Höhedifferenz zwischen Anfangs- und Endestahlkugelmittelpunkt und μ der fehlerfreie Vorfaktor von $\sqrt{h - \varnothing}$.

Der Fehler Δs_{th} ist gegeben durch:

$$\Delta s_{th} = \sqrt{\left(\frac{\partial s_{th}}{\partial h} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial s_{th}}{\partial \varnothing} \Delta \varnothing\right)^2} \quad (1.4)$$

Die partielle Ableitungen liefern jeweils:

$$\frac{\partial s_{th}}{\partial h} = \frac{\mu}{2} (h - \varnothing)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\mu}{2\sqrt{h - \varnothing}} \quad (1.5) \quad \frac{\partial s_{th}}{\partial \varnothing} = \frac{\mu}{2} (h - \varnothing)^{-\frac{1}{2}} (-1) = -\frac{\mu}{2\sqrt{h - \varnothing}} \quad (1.6)$$

(1.5) und (1.6) ins (1.4) einsetzen:

$$\Delta s_{th} = \left(\frac{\mu}{2\sqrt{h - \varnothing}}\right) \sqrt{(\Delta h)^2 + (\Delta \varnothing)^2} \quad (1.7)$$

Rechnung

Vorfaktor μ :

$$\mu = \sqrt{\frac{4h_1}{1 + \frac{2}{5 \sin^2 \beta/2}}} = \sqrt{\frac{4 (229,0 \text{ mm})}{1 + \frac{2}{5 \sin^2 (60^\circ/^\circ)}}} \quad (1.8)$$

Wert und Fehler von s_{th} :

$$s_{\text{th}} = \mu \sqrt{h - \varnothing} = \sqrt{\frac{4 (229,0 \text{ mm})}{1 + \frac{2}{5 \sin^2(60^\circ)}}} \sqrt{138,00 \text{ mm} - 20,00 \text{ mm}} = 265,5036 \text{ mm} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \Delta s_{\text{th}} &= \left(\frac{\mu}{2\sqrt{h - \varnothing}} \right) \sqrt{(\Delta h)^2 + (\Delta \varnothing)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4 (229,0 \text{ mm})}{1 + \frac{2}{5 \sin^2(60^\circ)}}} \left(2\sqrt{138,00 \text{ mm} - 20,00 \text{ mm}} \right)^{-1} \sqrt{(0,02 \text{ mm})^2 + (0,05 \text{ mm})^2} \\ &= 0,07 \text{ mm} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Daraus folgt: $s_{\text{th}} = (265,50 \pm 0,07) \text{ mm}$

Diskussion

Gefunden sei: $s_{\text{exp}} = (254,0 \pm 1,1) \text{ mm}$ und $s_{\text{th}} = (265,50 \pm 0,07) \text{ mm}$

Fehlerintervall:

$$\begin{array}{ll} \max(s_{\text{exp}}) = 255,1 \text{ mm} & \max(s_{\text{th}}) = 265,57 \text{ mm} \\ \min(s_{\text{exp}}) = 252,9 \text{ mm} & \min(s_{\text{th}}) = 265,43 \text{ mm} \end{array}$$

3× Fehlerintervall:

$$\begin{array}{ll} \max(s_{\text{exp}}) = 257,3 \text{ mm} & \max(s_{\text{th}}) = 265,71 \text{ mm} \\ \min(s_{\text{exp}}) = 250,7 \text{ mm} & \min(s_{\text{th}}) = 265,29 \text{ mm} \end{array}$$

Das experimentelles Ergebnis s_{exp} und der theoretische Wert s_{th} unterscheiden sich signifikant voneinander.

Dieser Unterschied kann zu 2 Gründe vermutlich zurückgeführt werden:

1. Energieverlust

Der Energieverlust durch Reibung und andere Faktoren könnte man in dieses Experiment nicht vernachlässigen. Der Stahlkugel könnte deshalb nicht so weit wie erwartet fliegen.

2. Skalierung aufgrund des Kopierens

Beim Kopieren kann das Bild trotz der Einstellung skaliert werden. Das führt zu einem systematischen Fehler, den man berücksichtigen muss.

Reibungskoeffizient κ

Aus der Anleitung ist der Reibungskoeffizient κ gegeben durch:

$$\kappa = \frac{h_1}{S} \left(1 - \frac{s_{\text{exp}}^2}{s_{\text{th}}^2} \right) \quad (1.11)$$

mit

Variable	Wert mit Fehler	Bedeutung
h_1	229,0 mm	Höhendifferenz zws. Startposition und Schienenauslauf
S	728 mm	Bahnlänge der Schiene
s_{exp}	$(254,0 \pm 1,1)$ mm	Flugweite (Experimentell)
s_{th}	$(265,50 \pm 0,07)$ mm	Flugweite (Theoretisch)

Herleitung des Fehlers

Der Fehler $\Delta\kappa$ ist gegeben durch:

$$\Delta\kappa = \sqrt{\left(\frac{\partial\kappa}{\partial s_{\text{exp}}} \Delta s_{\text{exp}} \right)^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial s_{\text{th}}} \Delta s_{\text{th}} \right)^2} \quad (1.12)$$

Die partielle Ableitungen liefern jeweils:

$$\frac{\partial\kappa}{\partial s_{\text{exp}}} = \frac{h_1}{S} \left(-\frac{2s_{\text{exp}}}{s_{\text{th}}^2} \right) = \frac{2h_1}{S} \left(-\frac{s_{\text{exp}}}{s_{\text{th}}^2} \right) \quad (1.13) \quad \frac{\partial\kappa}{\partial s_{\text{th}}} = \frac{h_1}{S} \left(2s_{\text{exp}}^2 s_{\text{th}}^{-3} \right) = \frac{2h_1}{S} \left(\frac{s_{\text{exp}}^2}{s_{\text{th}}^3} \right) \quad (1.14)$$

(1.13) und (1.14) ins (1.12) einsetzen:

$$\Delta\kappa = \left(\frac{h_1}{S} \right) \left(\frac{2s_{\text{exp}}}{s_{\text{th}}^2} \right) \sqrt{(\Delta s_{\text{exp}})^2 + \left(\frac{s_{\text{exp}}}{s_{\text{th}}} \Delta s_{\text{th}} \right)^2} \quad (1.15)$$

Rechnung

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{h_1}{S} \left(1 - \frac{s_{\text{exp}}^2}{s_{\text{th}}^2} \right) = \frac{229,0 \text{ mm}}{728 \text{ mm}} \left(1 - \frac{(254,0 \text{ mm})^2}{(265,50 \text{ mm})^2} \right) \\ &= 2,66599 \cdot 10^{-2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \Delta\kappa &= \left(\frac{h_1}{S} \right) \left(\frac{2s_{\text{exp}}}{s_{\text{th}}^2} \right) \sqrt{(\Delta s_{\text{exp}})^2 + \left(\frac{s_{\text{exp}}}{s_{\text{th}}} \Delta s_{\text{th}} \right)^2} \\ &= \frac{229,0 \text{ mm}}{728 \text{ mm}} \left(\frac{2 \times 254,0 \text{ mm}}{(265,50 \text{ mm})^2} \right) \sqrt{(1,1 \text{ mm})^2 + \left(\frac{254,0 \text{ mm}}{265,50 \text{ mm}} 0,07 \text{ mm} \right)^2} \\ &= 2,5 \cdot 10^{-3} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Daraus folgt: $\kappa = (2,67 \pm 0,25) \cdot 10^{-2}$. κ ist einheitslos.

Teilversuch 2: Elastischer Stoß von Kugeln gleicher Masse

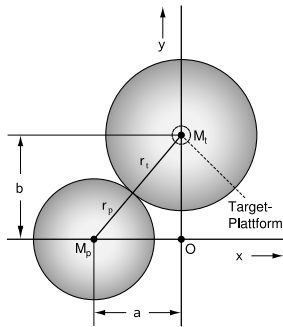


Abbildung 2.1: Abbildung aus Skript für die Korrektur der Auftreffpunkte auf dem Detektorboden.

Der Punkt O ist der Schnittpunkt zwischen der $b = 0$ Linie und der dazu senkrechten Linie, die durch die Target-Plattform gerichtet ist. Das heißt, Punkt O ist $20 + 5 = 25$ mm vom Schienenende entfernt. Er ist mit schwarzem Stift auf dem kopierten Experimentierpapier gezeichnet.

Da die Kugeln endlichen Radien haben, müssen die Landepunkte dementsprechend korrigiert werden sein, sodass die gemessene Flugbahnen wirklich die theoretische Flugbahn entspricht.

Man kann zur Korrektur wie folgt machen:

- Landepunkt des Targets um die Strecke b in der negativer y -Richtung schieben.
- Landepunkt des Projektils um die Strecke a in der positiver x -Richtung schieben.

wobei die Strecke a durch diese Formel gegeben ist: $a = \sqrt{(r_p + r_t)^2 - b^2}$

Diese Korrektur reicht aber in diesen Fall nicht aus. Nachdem die Projektileugel der Schienenende verlassen hat, fängt sie sofort an, zu fallen. Das passiert bevor die Projektileugel die Targetkugel trifft. Dieser schiefe Auftreffwinkel ergibt die Targetkugel nicht nur eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit, sondern auch eine nicht vernachlässigbare Anfangsgeschwindigkeit nach oben. Die Flugweite beider Kugeln ändern sich dadurch.

Man braucht großen Aufwand, um diese Änderung zu korrigieren, und deshalb wurde es in diesem Versuch nicht berücksichtigt.

Messung der Flugweite

Fehler beim Abschlagen des Schienenendes auf das Transparentpapier = 0,5 mm

Fehler bei Markierung des Punktes O = 1,0 mm

Fehler bei Markierung des Aufschlagpunktes = 1,0 mm

Fehler beim Lesen des Lineal = 0,5 mm (beim 0) + 0,5 mm (beim Aufschlagpunkt) = 1,0 mm

Fall $b = 0$:

Fehler bei Messung der Flugweiten für $b = 0$ insgesamt = 4,5 mm

Flugweite x_i im Versuch i / mm					Mittelwert \bar{x}
1	2	3	4	5	
228,0	228,5	230,0	231,5	233,0	230,2

Der Mittelwert \bar{x} wurde wie in (1.1) berechnet.

Ein Kreis mit einem Durchmesser von $\varnothing = 230,2$ mm \equiv 230 mm war auf dem kopierten Experimentierpapier für den nächsten Teil der Auswertung zum Teilversuch 2 gezeichnet.

Fall $b \neq 0$:

Fehler bei Markierung des Abstands b bzw. a von Punkt $O = 1,0$ mm

Fehler bei Messung der Flugweiten für $b \neq 0$ insgesamt = 4,5 mm

Für die Targetkugel:

n	Flugweite x_{in} mit Stoßparameter (b_i/mm) / mm									
	3	4	6	9	12	15	17	18	19	19,5
1	260,0	258,0	250,0	238,0	206,0	169,0	131,0	105,0	64,0	43,0
2	261,0	260,0	253,0	238,0	208,0	172,0	133,0	108,0	72,0	46,0
3	263,0	259,0	254,0	238,0	207,0	173,0	134,0	109,0	73,0	48,0
\bar{x}_i	261,3	259,0	252,3	238,0	207,0	171,3	132,7	107,3	69,7	45,7

Für die Projektilkugel:

n	$\begin{pmatrix} b_i/\text{mm} \\ a_i/\text{mm} \end{pmatrix}$	Flugweite x_{in} mit Parameters / mm									
		3	4	6	9	12	15	17	18	19	19,5
1		19,8	19,6	19,1	17,9	16,0	13,2	10,5	8,7	6,2	4,4
1		-	-	79,0	111,0	154,0	184,0	205,0	214,0	222,0	228,0
2		-	-	81,0	113,0	153,0	181,0	205,0	212,0	222,0	228,0
3		-	-	80,0	116,0	152,0	181,0	202,0	212,0	224,0	229,0
	\bar{x}_i	-	-	80,0	113,3	153,0	182,0	204,0	212,7	222,7	228,3

wobei n die Versuchsnummer ist. Die Mittelwerte \bar{x}_i wurden analog zu (1.1) berechnet (mit 3 statt 5).

Fehlermessung

Direkte Messung

Ohne Korrektur für die Strecke a und b wurden die Fehler gemessen. Diese Messung entspricht den kürzesten Abstand zwischen einem Punkt und dem Kreisumfang. Wir bezeichnen einen Fehler eines Punktes als positiv, wenn dieser Punkt außerhalb des Kreises liegt. Der Fehler bei dieser Fehlermessung ist der gleiche wie bei dem Fall $b \neq 0$.

Es gibt keinen Zusammenhang zwischen der Versuchsnummer dieser Fehlermessung und der der vorherigen Flugweitemessung.

Für die Targetkugel:

n	Fehler y_{in} mit Stoßparameter (b_i/mm) / mm									
	3	4	6	9	12	15	17	18	19	19,5
1	33,5	33,0	32,0	33,0	24,0	22,0	15,0	10,0	7,0	3,5
2	34,0	34,0	34,0	33,0	26,0	22,0	15,0	11,5	7,0	4,0
3	36,0	35,0	35,0	33,0	24,0	20,0	14,0	11,0	5,0	6,0
\bar{y}_i	34,5	34,0	33,7	33,0	24,7	21,3	14,7	10,8	6,3	4,5

Für die Projektilkugel:

n	Fehler y_{in} mit Stoßparameter $(b_i/\text{mm}) / \text{mm}$									
	3	4	6	9	12	15	17	18	19	19,5
1	-	-	16,0	12,0	12,0	4,0	0,0	0,0	-3,0	-2,0
2	-	-	17,0	13,0	12,5	4,0	1,0	-3,0	-3,0	-3,0
3	-	-	17,0	15,0	12,0	5,0	2,0	-3,0	-2,0	-2,5
\bar{y}_i	-	-	16,7	13,3	12,2	4,3	1,0	-2,0	-2,7	-2,5

Mithilfe Daten der Messung der Flugweite

Wir können auch die Fehler messen, indem wir die geometrische Eigenschaften eines Kreises zu Nutze machen. Da die Winkel zwischen der Trajektorie zweier gleichen Kugeln immer 90° entspricht, soll der Satz des Pythagoras gelten. Sei s_t die Flugweite der Target-Kugel in Millimeter und s_p die Flugweite der Projektil-Kugel in Millimeter, dann gilt es:

$$\sqrt{s_t^2 + s_p^2} = \text{Durchmesser des Kreises} = 230,2 \text{ mm} \quad (2.1)$$

Der Fehler ist dann:

$$\Delta s = \sqrt{s_t^2 + s_p^2} - 230,2 \text{ mm} \quad (2.2)$$

Tabuliert:

b/mm	3	4	6	9	12	15	17	18	19	19,5
$\Delta s/\text{mm}$	-	-	34,7	33,6	27,4	20,0	13,3	8,2	3,3	2,9

Diskussion

Es ist offensichtlich aus der direkte Messung der Fehler für die Targetkugel und der Pythagoreische Methode, dass der Fehler deutlich abnimmt mit wachsendem Stoßparameter b . Bei der Projektilkugel ist der absolute Fehler bei der direkte Messung das kleinste, wenn $b = 17$.

Wenn die Massen von Projektil und Target unterschiedlich sind, werden die Kugeln auf Kreisen mit verschiedenem Radien landen. Die Kreisradien haben die folgenden Relation:

$$\frac{R_p}{R_t} = \frac{m_t}{m_p} \quad (2.3)$$

Sei P die Projektilkugel und T die Targetkugel. Die Stöße werden dann zum Beispiel so aussehen:

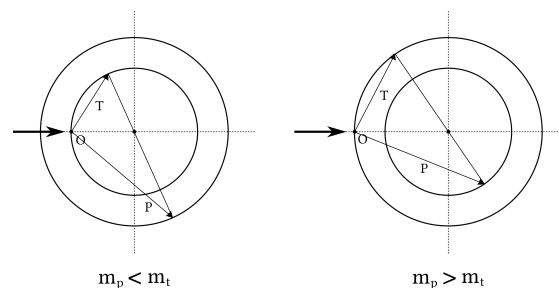


Abbildung 2.2: Ortskurven für elastische Stöße bei verschiedenen Massenrelationen

Die Flugbahnen werden natürlich vom Stoßparameter b abhängen. Die Winkel γ zwischen der beiden Pfaden wird auch von 90° abweichen: $m_p < m_t \implies \gamma > 90^\circ$ und $m_p > m_t \implies \gamma < 90^\circ$.

Die Fehler der Werten wurden in dieser Diskussion nicht berücksichtigt.

Teilversuch 3: Bewegungsanalyse mit Hochgeschwindigkeitskamera

Siehe Protokoll für das erste Teil der Auswertung zum Teilversuch 3.

Theoretische Werte

Beschleunigung a

Aus Gleichung (4) der Anleitung ist a gegeben durch:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{2}{5 \sin^2 \beta/2}} \quad (3.1)$$

mit

Variable	Wert	Bedeutung
g	$9,807 \text{ m s}^{-2}$	Erdfeldbeschleunigung
α	37°	Neigungswinkel der schiefen Ebene
β	120°	Öffnungswinkel

Das heißt:

$$a = \frac{9,807 \text{ m s}^{-2} \times \sin(37^\circ)}{1 + \frac{2}{5 \sin^2(60^\circ)}} = 3,8 \text{ m s}^{-2} \quad (2 \text{ sig. Zif.}) \quad (3.2)$$

Abfluggeschwindigkeit u

Aus Gleichung (10) der Anleitung ist u gegeben durch:

$$u = \sqrt{\frac{2gh_1}{1 + \frac{2}{5 \sin^2 \beta/2}}} \quad (3.3)$$

mit

Variable	Wert	Bedeutung
h_1	$229,0 \text{ mm}$	Höhendifferenz zws. Startposition und Schienenauslauf
g	$9,807 \text{ m s}^{-2}$	Erdfeldbeschleunigung
β	120°	Öffnungswinkel

Das heißt:

$$u = \sqrt{\frac{2 \times 9,807 \text{ m s}^{-2} \times 229,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1 + \frac{2}{5 \sin^2(60^\circ)}}} = 1,7 \text{ m s}^{-1} \quad (2 \text{ sig. Zif.}) \quad (3.4)$$

Vergleich und Diskussion

Variable	Theorie	Experiment	Abs. Fehler	% Fehler
a	$3,8 \text{ m s}^{-2}$	$3,544 \text{ m s}^{-2}$	$0,3 \text{ m s}^{-2}$	$6,7 \%$
u	$1,7 \text{ m s}^{-1}$	$1,642 \text{ m s}^{-1}$	$0,1 \text{ m s}^{-1}$	$3,4 \%$
g	$9,807 \text{ m s}^{-2}$	$9,408 \text{ m s}^{-2}$	$0,399 \text{ m s}^{-2}$	$4,069 \%$

wobei der absolute bzw. prozentuale Fehler einer Variable v sich wie folgt berechnen lässt:

$$\text{Abs. Fehler} = |v_{\text{th}} - v_{\text{exp}}| \qquad \text{\% Fehler} = \frac{|v_{\text{th}} - v_{\text{exp}}|}{v_{\text{th}}} \qquad (3.5)$$

Es ist offensichtlich, dass alle experimentelle Werte geringer als ihre theoretische Werte sind. Der Fehler bei a ist auch größer als die bei u und g . Das heißt vor allem, dass hier die Situation des nicht rutschfreien Rollens nicht betrifft.

Diese Abweichung kann man in zwei Arten umfassen:

1. Abweichungen wegen physikalischer Gründe

Energieverlust durch Reibung ist in diesem Fall relativ signifikant. Die benutzte Stahlkugel könnte auch wegen mehrfacher Stoßen beschädigt werden. Diesen Faktoren führen zu einem geringeren Wert von a , u und g .

2. Abweichungen wegen menschlicher Gründe

Bei Analyse der Hochgeschwindigkeitsaufnahmen, muss man Punkten und Achsen manuell definieren. Das ist eher ungenau und kann zu Abweichungen führen.