

---

# Elektromagnetische Wellen und Optik

*Prof. Dr. Matthias Kling*  
*Apl. Prof. Dr. Vladislav Yakovlev*

*Nach einer Vorlage von Prof. Dr. Thomas Udem*

---





## **Hinweis**

Dieses Skript ist als Hilfestellung für die Vor- und Nachbereitung sowie als Ergänzung zur Vorlesung gedacht. Es erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, Aktualität und Richtigkeit. Einzig verbindlich sind die Inhalte der Vorlesung, die von diesem Skript abweichen können.

Teilen Sie uns gerne Fehler mit, die Sie im Skript entdecken, damit wir diese korrigieren können.



# LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Zinth, U.; Zinth, W.: *Optik: Lichtstrahlen - Wellen - Photonen*. 4. aktualisierte Auflage. Oldenburg (München, 2013).
- [2] Meschede, D.; Gerthsen, C.: *Gerthsen Physik*. 25. Auflage. Springer Spektrum (Berlin, 2015).
- [3] Demtröder, W. *Experimentalphysik 1 - Mechanik und Wärme*. 7. Auflage. Springer Spektrum (Heidelberg, 2015).
- [4] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M. . *The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat* (Vol. 1). Basic books (2011)
- [5] Griffiths, David J. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall (1999)



# NÜTZLICHE FORMELN

## Trigonometrische Identitäten

### Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\begin{aligned}\tan(x \pm y) &= \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \\ &= \frac{\sin(x \pm y)}{\cos(x \pm y)}\end{aligned}$$

### Funktionssummen

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

### Funktionsprodukte

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\begin{aligned}\tan x \tan y &= \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} \\ &= -\frac{\tan x - \tan y}{\cot x - \cot y}\end{aligned}$$

## Exponentialform

$$\cos x \pm i \sin x = e^{\pm ix}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

## Vektor Identitäten

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = 0$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$$

## Gradient, Divergenz und Rotation

$$\nabla(\psi\phi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\nabla \cdot (\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \psi$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\psi \mathbf{A}) = \psi(\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla\psi \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\psi \nabla \phi) = \nabla\psi \times \nabla\phi$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla\psi) = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$



# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1. Wellen</b>	<b>7</b>
1.1. Schwingungen und Wellen . . . . .	7
1.1.1. Die harmonische Schwingung . . . . .	7
1.1.2. Die harmonische Welle . . . . .	7
1.2. Wellengleichung in 1D . . . . .	8
1.2.1. Allgemeine Lösung der Wellengleichung . . . . .	8
1.2.2. Superpositionsprinzip . . . . .	9
1.3. Einige Beispiele . . . . .	9
1.3.1. Kugelwellen . . . . .	9
1.3.2. Stehende Welle . . . . .	9
1.3.3. Schallwellen . . . . .	9
1.3.4. Oberflächenwellen . . . . .	11
1.4. Wellengleichung in 3D . . . . .	11
1.5. Dispersion . . . . .	12
1.6. Komplexe Schreibweise . . . . .	12
<b>2. Elektromagnetische Wellen</b>	<b>17</b>
2.1. Maxwellgleichungen . . . . .	17
2.1.1. Mikroskopische Maxwellgleichungen . . . . .	17
2.1.2. Makroskopische Maxwellgleichungen . . . . .	17
2.2. Die elektromagnetische Wellengleichung . . . . .	19
2.2.1. Herleitung der Wellengleichung . . . . .	19
2.2.2. Die Lichtgeschwindigkeit . . . . .	20
2.2.3. Dispersionsrelation . . . . .	22
2.3. Relationen zwischen Feldern und $\mathbf{k}$ . . . . .	22
2.3.1. Geometrische Relationen . . . . .	23
2.3.2. Amplituden der Felder . . . . .	23
2.4. Energietransport . . . . .	23
2.4.1. Poyntingvektor . . . . .	23
2.4.2. Intensität . . . . .	24
<b>3. Überlagerung von Wellen – Fourieranalyse</b>	<b>27</b>
3.1. Überlagerungen von zwei Wellen . . . . .	27
3.1.1. Intensität bei gleicher Frequenz . . . . .	27
3.1.2. Überlagerung bei unterschiedlicher Frequenz . . . . .	28
3.2. Überlagerung mehrerer Frequenzen . . . . .	28
3.2.1. Periodische Funktionen . . . . .	28

## Inhaltsverzeichnis

3.2.2. Bestimmung der Fourierkoeffizienten . . . . .	29
3.2.3. Nichtperiodische Funktionen . . . . .	31
3.3. Spektrum einer monochromatischen Welle . . . . .	32
3.4. Fourier Theoreme . . . . .	32
3.4.1. Parseval-Theorem . . . . .	32
3.4.2. Ähnlichkeitssatz . . . . .	33
3.4.3. Verschiebungssatz . . . . .	33
3.4.4. Ableitung . . . . .	33
3.4.5. Faltungssatz . . . . .	33
3.5. Gaußsches Wellenpaket . . . . .	33
3.6. Dispersion . . . . .	35
3.6.1. Gruppengeschwindigkeit . . . . .	35
3.6.2. Höhere Dispersionsordnungen . . . . .	36
<b>4. Kohärenz - Interferenzfähigkeit</b>	<b>39</b>
4.1. Michelson-Interferometer . . . . .	39
4.2. Zeitliche Kohärenz . . . . .	40
4.2.1. Kohärenzzeit und -länge . . . . .	40
4.3. Räumliche Kohärenz . . . . .	41
<b>5. Licht-Materie-Wechselwirkung</b>	<b>45</b>
5.1. Impulsdichte . . . . .	45
5.2. Wechselwirkung mit nichtleitenden Materialien . . . . .	46
5.2.1. Absorption . . . . .	47
5.3. Suszeptibilität im einfachsten Modell . . . . .	48
5.3.1. Normale und Anomale Dispersion . . . . .	49
5.3.2. Mehrere Resonanzen . . . . .	50
5.4. Brechungsindex von Metallen . . . . .	50
5.4.1. Dispersionsrelation . . . . .	51
<b>6. Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen</b>	<b>55</b>
6.1. Brechungs- und Reflexionsgesetz . . . . .	56
6.1.1. Herleitung aus dem Huygensschen Prinzip . . . . .	56
6.2. Lichtbrechung an Prismen . . . . .	57
6.3. Einschub: Regenbogen . . . . .	59
6.3.1. Hauptregenbogen . . . . .	59
6.3.2. Nebenregenbogen . . . . .	60
6.4. Totalreflexion . . . . .	60
6.5. Reflexion am Spiegel . . . . .	61
6.6. Amplitude von reflektierter und gebrochener Welle . . . . .	62
6.6.1. Senkrechter Einfall . . . . .	62
6.6.2. Fresnelsche Formeln . . . . .	63
6.6.3. Eigenschaften der Fresnelschen Formeln . . . . .	65
6.7. Evaneszente Wellen . . . . .	67

<b>7. Wellenleiter</b>	<b>71</b>
7.1. Schichtwellenleiter . . . . .	72
7.1.1. Lösungen für die Schichtleitermode . . . . .	73
7.1.2. Bedeutung der Lösungen . . . . .	73
7.1.3. Anzahl der geführten Moden . . . . .	74
7.1.4. Endliche Dämpfung im Mantel . . . . .	75
<b>8. Streuung</b>	<b>79</b>
8.1. Elastische Streuung . . . . .	79
8.1.1. Kleine Teilchen $r \ll \lambda$ . . . . .	79
8.1.2. Große Teilchen $r \approx \lambda$ und $r \gg \lambda$ . . . . .	81
8.2. Inelastische Streuung . . . . .	81
8.3. Streureute und Streuleistung . . . . .	82
<b>9. Geometrische Optik</b>	<b>85</b>
9.1. Fermatsches Prinzip . . . . .	86
9.2. Paraxiale Näherung . . . . .	87
9.3. Abbildung an einem Kugelspiegel . . . . .	88
9.3.1. Vorzeichenkonvention . . . . .	89
9.3.2. Reelle und virtuelle Abbildungen . . . . .	89
9.3.3. Abbildung mit Spiegeln . . . . .	90
9.3.4. Vergrößerung einer Abbildung . . . . .	90
9.4. Abbildung an brechender Kugelfläche . . . . .	92
9.5. Dünne Linsen . . . . .	92
9.5.1. Plankonvexe und plankonkave Linsen . . . . .	93
9.5.2. Meniskuslinsen . . . . .	94
9.5.3. Andere Linsenarten . . . . .	95
9.5.4. Abbildung mit dünnen Linsen . . . . .	95
9.6. Dicke Linse und Hauptebenen . . . . .	96
9.7. Abbildung mit zwei Linsen . . . . .	98
9.8. Optische Systeme und ABCD-Matrizen . . . . .	98
9.8.1. Brechung an ebener Grenzfläche . . . . .	98
9.8.2. Propagation über eine Länge $d$ . . . . .	100
9.8.3. Brechende Kugelfläche . . . . .	100
9.8.4. Zentrierte optische Systeme . . . . .	101
9.8.5. Kombination dünner Linsen . . . . .	102
<b>10. Aberrationen</b>	<b>105</b>
10.1. Chromatische Aberration . . . . .	105
10.1.1. Abbe-Zahl . . . . .	105
10.1.2. Achromat . . . . .	106
10.2. Monochromatische Aberration . . . . .	106
10.2.1. Sphärische Aberration . . . . .	106
10.2.2. Astigmatismus und Koma . . . . .	107

## *Inhaltsverzeichnis*

10.2.3. Bildfeldwölbung . . . . .	108
10.3. Endliche Schärfentiefe . . . . .	109
<b>11. Optische Instrumente</b>	<b>113</b>
11.1. Projektor . . . . .	113
11.2. Teleobjektiv . . . . .	113
11.3. Das Auge . . . . .	114
11.3.1. Fehlsichtigkeit . . . . .	114
11.3.2. Winkelvergrößerung optischer Instrumente . . . . .	115
11.4. Lupe . . . . .	115
11.5. Mikroskop . . . . .	116
11.6. Fernrohr (nach Kepler) . . . . .	116
11.7. Galileisches Fernrohr . . . . .	116
<b>12. Beugung</b>	<b>119</b>
12.1. Huygenssches Prinzip . . . . .	119
12.1.1. Nah- und Fernfeld . . . . .	119
12.2. Fresnelsche Beugung . . . . .	120
12.2.1. Fresnelzonen . . . . .	120
12.2.2. Fresnelsche Zonenplatte . . . . .	120
12.3. Kirchhoffsche Beugungstheorie . . . . .	121
12.4. Fraunhofer Beugung . . . . .	121
12.4.1. Filtern in der Fourierebene . . . . .	122
12.4.2. Babinet'sches Prinzip . . . . .	123
<b>13. Beugung an Blenden und Gittern</b>	<b>125</b>
13.1. Einfachspalt . . . . .	125
13.2. Geometrische Interpretation von Fraunhoferbeugung . . . . .	127
13.3. Weitere wichtige Blenden . . . . .	127
13.3.1. Rechteckblende . . . . .	127
13.3.2. Lochblende . . . . .	128
13.3.3. Doppelspalt . . . . .	129
13.4. Gitter . . . . .	130
13.4.1. Reflexionsgitter . . . . .	131
13.4.2. Auflösungsvermögen eines Gitterspektrometers . . . . .	131
13.5. Monochromator (Czerny-Turner) . . . . .	132
<b>14. Interferenz an Schichtsystemen</b>	<b>133</b>
14.1. Bragg-Streuung . . . . .	133
14.2. Schichtsysteme für den sichtbaren Wellenlängenbereich . . . . .	133
14.3. Interferenzen gleicher Dicke . . . . .	134
14.4. Newtonsche Ringe . . . . .	135
14.5. Antireflexbeschichtung . . . . .	135

14.6. Fabry-Pérot-Interferometer . . . . .	136
14.6.1. Linienbreite eines Fabry-Pérot-Interferometers . . . . .	138
14.6.2. Freier Spektralbereich (FSR) . . . . .	139
14.6.3. Finesse . . . . .	139
14.7. Fourier-Transform-Spektrometer . . . . .	139
<b>15. Holographie</b>	<b>141</b>
15.1. Prinzip der Holographie . . . . .	141
15.2. Aufnahme eines Hologramms . . . . .	142
15.3. Wiedergabe des Hologramms . . . . .	142
15.4. Hologrammtypen und Anwendungen . . . . .	143
<b>16. Laseroptik - Gaußsche Strahlenoptik</b>	<b>145</b>
16.0.1. Intensität . . . . .	146
16.0.2. Abbildung Gaußscher Strahlen . . . . .	147
16.0.3. Transformation des Strahlparameters . . . . .	148
16.0.4. Gaußsche Strahlen als Mode eines Resonators . . . . .	148
<b>17. Polarisation und Doppelbrechung</b>	<b>151</b>
17.1. Polarisationszustände . . . . .	151
17.2. Doppelbrechung . . . . .	153
17.2.1. Definition . . . . .	153
17.2.2. Indexellipsoid . . . . .	154
17.2.3. Anwendungen und Beispiele . . . . .	155
17.2.4. Induzierte Doppelbrechung . . . . .	156
17.2.5. Spannungsdoppelbrechung . . . . .	156
17.2.6. Optische Aktivität . . . . .	156
17.2.7. Magnetfeldinduzierte optische Aktivität (Faraday-Effekt) . . . . .	157
<b>18. Nichtlineare Optik</b>	<b>159</b>
18.1. Erzeugung von Mischfrequenzen bzw. Harmonischen . . . . .	160
18.1.1. Frequenzverdopplung . . . . .	160
18.1.2. Optischer Kerr-Effekt ( $\chi^{(3)}$ ) . . . . .	161
18.1.3. Anwendungen . . . . .	162
18.1.4. Literaturhinweis . . . . .	162
<b>19. Quantenphänomene</b>	<b>163</b>
19.1. Deutung des Photoeffekts . . . . .	163
19.2. Experimentelle Bestimmung von $W_A$ und $h$ . . . . .	164
19.3. Impuls von Photonen . . . . .	164
19.4. Quantenmechanik für massebehaftete Teilchen . . . . .	165
19.5. Innerer Photoeffekt . . . . .	165
19.6. Röntgenstrahlung . . . . .	165
19.7. Röntgenbeugung . . . . .	166

## *Inhaltsverzeichnis*

19.8. Compton-Effekt . . . . .	167
19.9. Technische Aspekte . . . . .	167
<b>20. Wärmestrahlung</b>	<b>169</b>
20.1. Schwarzer Körper und Hohlraumstrahlung . . . . .	169
20.2. Strahlungsgesetze . . . . .	169
20.2.1. Allgemeine Strahlungseigenschaften . . . . .	169
20.2.2. Näherungsweise Beschreibung des Spektrums in Grenzfällen . . . . .	170
20.2.3. Plancksches Strahlungsgesetz . . . . .	170
20.3. Einsteinsche Herleitung der Planckschen Formel . . . . .	170
<b>21. Laser</b>	<b>173</b>
<b>22. Tabellen</b>	<b>177</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>179</b>
A.1. Fouriertransformation der Gaußfunktion . . . . .	179

## Kapitel

# 1. WELLEN

Waves from moving sources: Adagio. Andante. Allegro moderato

OLIVER HEAVISIDE

## 1.1. Schwingungen und Wellen

### 1.1.1. Die harmonische Schwingung

Beobachtet man die Natur, so stellt man häufig fest, dass eine messbare Größe  $A$  (z. B. die Position, der Druck oder die elektrische Feldstärke) in regelmäßigen Zyklen ansteigt und wieder abfällt, man sagt *oszilliert* oder *schwingt*.

Dieser Effekt der *harmonischen Schwingung* oder *Oszillation* lässt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$A(t) = A_0 \sin(2\pi\nu t + \phi_0) \quad (1.1)$$

Hierbei ist  $A_0$  die *Amplitude*, welche den maximalen Wert von  $A$  angibt. Die *Frequenz*  $\nu$  gibt an wie viele Zyklen die Größe pro Sekunde durchwandert und ist über die *Periode* (Länge) eines Zyklus  $T$  definiert:  $\nu = T^{-1}$ . Häufig verwendet man auch die *Kreisfrequenz*  $\omega = 2\pi\nu$ . Die konstante *Offset Phase*  $\phi_0$  entscheidet, an welcher Stelle des Zyklus man sich am Anfang der Betrachtungszeit befindet.

Das gesamte Argument des Sinus bezeichnet man als *Phase*.

### 1.1.2. Die harmonische Welle

Bei genauerer Betrachtung stellt man häufig fest, dass eine Größe nicht nur von der Zeit, sondern auch vom

Ort abhängt und sich auch hier in regelmäßigen Abständen wiederholt. Dieses gekoppelte Auftreten einer zeitlichen und einer örtlichen Oszillation nennt man *Welle*.

Eine eindimensionale harmonische Welle lässt sich mit folgender Formel beschreiben:

$$A(x, t) = A_0 \sin(kx - \omega t + \phi_0) \quad (1.2)$$

Neben den aus Gleichung 1.1 bekannten Parametern wurde hier der *Wellenvektor*  $k$ , das Analogon zur Kreisfrequenz im Ort, verwendet. Dieser ist über  $k = 2\pi\nu = 2\pi\lambda^{-1}$  mit der *Wellenzahl*  $\nu$  ( $\leftrightarrow \nu$ ) und der *Wellenlänge*  $\lambda$  ( $\leftrightarrow T$ ) verknüpft.

Harmonische Wellen weisen also definitionsgemäß folgende Periodizität auf:

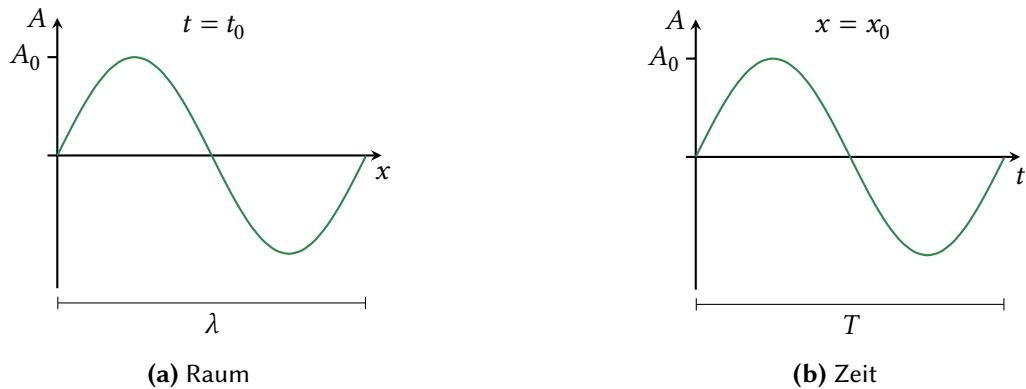
$$A(x, t) = A(x + n \cdot \lambda, t + m \cdot T) \quad n, m \in \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

Betrachten wir nun eine Stelle der Welle mit konstanter Amplitude, z. B. ein Maximum. Aufgrund der Zeitabhängigkeit von Gleichung 1.2 wird dieses sich nun über den Ort bewegen. Mit welcher Geschwindigkeit passiert dies?

Für Stellen mit konstanter Amplitude muss offensichtlich die Phase der Welle konstant sein.

$$kx - \omega t = \text{const.}$$

## 1. Wellen



**Abb. 1.1.: Harmonische Welle**

Es gilt also:

$$\frac{d}{dt}(kx - \omega t) = k \frac{dx}{dt} - \omega \stackrel{!}{=} 0$$

Die gesuchte Geschwindigkeit ist also durch

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = v\lambda \quad (1.4)$$

gegeben.

Diese Geschwindigkeit wird *Phasengeschwindigkeit* genannt. Mit ihr lässt sich [Gleichung 1.2](#) umschreiben.

$$A(x, t) = A_0 \sin(k(x - v_{\text{ph}}t)) \quad (1.5)$$

beschreibt eine sich nach rechts ausbreitende Welle.

## 1.2. Wellengleichung in 1D

Bis jetzt hatten wir Wellen als Beschreibung der empirischen Beobachtung von gleichzeitig auftretenden Schwingungen in Ort und Zeit eingeführt. Allgemeiner jedoch erhält man eine Welle, wenn sich die zeitliche und örtliche Änderung einer Größe  $A$  mit folgender Differenzialgleichung beschreiben lässt:

$$\frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial t^2} = v_{\text{ph}}^2 \frac{\partial^2 A(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

Diese Gleichung heißt *Wellengleichung* oder *d'Alembert Gleichung*.

Eine Welle ist also eine Lösung der d'Alambert Gleichung. Insbesondere bedeutet das, dass es auch Wellen gibt, welche sich nicht mit [Gleichung 1.2](#) beschreiben lassen (z. B. evanescente Wellen beim Eintritt von Licht in ein undurchsichtiges Medium oder auch die unten besprochenen Kugelwellen).

Wir wollen kurz überprüfen, ob [Gleichung 1.2](#) die Wellengleichung erfüllt und berechnen dafür die Ableitungen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -A_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t + \phi_0) \\ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= -A_0 k^2 \sin(kx - \omega t + \phi_0) \end{aligned}$$

Wenn also  $v_{\text{ph}}^2 = \omega^2/k^2$  gilt, ist die Wellengleichung erfüllt.

### 1.2.1. Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Die eindimensionale Wellengleichung wird durch Funktionen der Form

$$A = f(x \pm v_{\text{ph}}t) \quad (1.7)$$

gelöst, wobei  $f$  eine mindestens zweifach differenzierbare Funktion ist. Wenden wir die Wellengleichung an, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v_{\text{ph}}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} .$$

Allgemein schreiben wir

$$\begin{aligned} A = & \quad a_1 f_1(x - v_{\text{ph}} t) + b_1 f_1(x + v_{\text{ph}} t) \\ & + a_2 f_2(x - v_{\text{ph}} t) + b_2 f_2(x + v_{\text{ph}} t) \\ & + \dots \\ = & \mathcal{A} \cdot F(x - v_{\text{ph}} t) + \mathcal{B} \cdot F(x + v_{\text{ph}} t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

mit den Funktionen  $f_1, f_2, \dots$  und  $F$  und den Konstanten  $a_1, b_1, \dots$ .

Die Bestimmung von  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ , und  $F$  erfolgt

- durch die Anfangsbedingung  $A(t=0) = \mathcal{A} \cdot F(x) + \mathcal{B} \cdot F(x)$
- mittels der Randbedingung, z. B.  $A(x=0) = 0$  für alle  $t$ .

### 1.2.2. Superpositionsprinzip

Eine wichtige Konsequenz der Linearität der Wellengleichung ist, dass sich mehrere Wellen überlagern können, da die Summe (mit Vorfaktoren) zweier Lösungen der Wellengleichung wieder eine gültige Lösung und daher eine Welle ist.

$$A_{\text{ges}} = \sum \alpha_i A_i \quad (1.9)$$

Wir können das bereits an der allgemeinen Lösung ablesen, welche eine Summe der Funktionen  $f_i$  ist.

Diese Eigenschaft ermöglicht es, komplexe Wellenzüge durch die Summe von harmonischen Wellen zu beschreiben (siehe Kapitel 3).

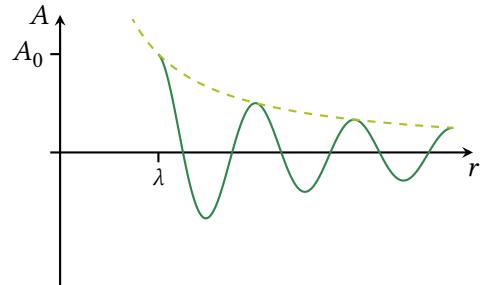
## 1.3. Einige Beispiele

### 1.3.1. Kugelwellen

Aufgrund der Energieerhaltung nimmt die Amplitude bei Kugelwellen mit größer werdendem Radius ab.

$$A(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(kr \pm \omega t) \quad (1.10)$$

Aufgrund der Divergenz bei  $r = 0$  gilt diese Formel nur für größere Abstände



**Abb. 1.2.:** Kugelwelle in  $r$  für  $r \geq \lambda$

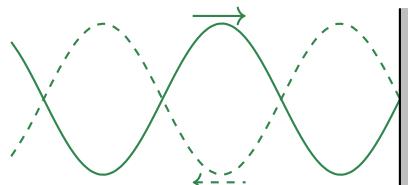
### 1.3.2. Stehende Welle

Überlagern sich zwei gegenläufige Wellen,

$$\begin{aligned} A_{\text{sw}} = & A_0 \sin(kx - \omega t) + A_0 \sin(kx + \omega t) = \\ = & 2A_0 \sin(kx) \cos(\omega t), \end{aligned}$$

so erhält man eine Welle, welche sich nicht mehr fortbewegt, sondern nur noch an Ort und Stelle oszilliert. Dieses Phänomen nennt man *stehende Welle*.

Die fixen Nulldurchgänge bezeichnet man als *Wellenknoten*, während man die Region um die Extrema als *Wellenbäuche* bezeichnet.

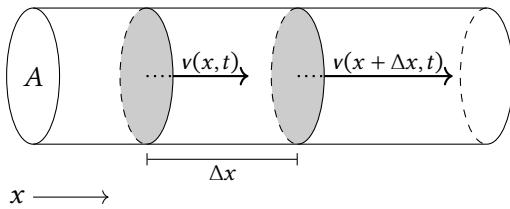


**Abb. 1.3.:** Stehende Welle nach Reflexion mit Phasensprung.

### 1.3.3. Schallwellen

Wir betrachten eindimensionale Schallwellen (siehe Abbildung 1.4) und wollen einen Ausdruck für deren Dispersionsrelation und Phasengeschwindigkeit finden. Die lokale Geschwindigkeit bezeichnen wir als  $v = v(x, t)$ , diese ist nicht gleich der Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}}$ . Der lokale Druck ist durch  $p = p(x, t)$  gegeben.

## 1. Wellen



**Abb. 1.4.:** Zu den Schallwellen

Wenn  $\Delta x$  klein ist, können wir die lokale Änderung von  $v$  und  $p$  linearisieren.

$$v(x + \Delta x, t) \approx v(x, t) + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$

$$p(x + \Delta x, t) \approx p(x, t) + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x$$

Nach der Newtonschen Bewegungsgleichung ist die Änderung der Geschwindigkeit  $v$  durch  $\frac{F}{m}$  gegeben. Um diese beiden Größen zu bestimmen, betrachten wir das kleine Volumen  $V = \Delta x A$  zwischen den markierten Flächen.

Die Kraft auf das Volumen ist durch den negativen Druckunterschied zwischen den beiden Seitenflächen gegeben (Druckgradient). Zusammen mit der Dichte  $\rho$  können wir die Bewegungsgleichung dann folgendermaßen vereinfachen.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{F}{m} = -\frac{A \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x}{A \rho \Delta x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.11)$$

Wir verwenden nun die *Kompressibilität*  $\kappa$ , für welche die Gleichung

$$dp = -\frac{1}{\kappa} \frac{dV}{V}, \quad (1.12)$$

welche aus der Vorlesung E1: Mechanik bekannt ist, gilt. Die Volumenänderung  $dV$  lässt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt = A \frac{\partial \Delta x}{\partial t} dt$$

Die Änderung von  $\Delta x$  ist durch die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen linker und rechter Fläche gegeben.

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial t} = \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$

Wir erhalten somit

$$\frac{dV}{V} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dt A \Delta x}{A \Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

Zusammen mit [Gleichung 1.12](#) erhalten wir dann

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.13)$$

Wenn wir nun [Gleichung 1.11](#) nach  $x$  und [Gleichung 1.13](#) nach  $t$  ableiten und anschließend  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$  gleichsetzen, erhalten wir die Wellengleichung für  $p$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\kappa \rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad (1.14)$$

welche ebenso auch für  $v$  gilt. Die Phasengeschwindigkeit ist nun

$$v_{\text{ph}} = \sqrt{\frac{1}{\kappa \rho}}. \quad (1.15)$$

Für adiabatische Zustandsänderungen gilt  $p \propto V^{-\gamma}$  mit dem *Adiabatenexponenten*  $\gamma$ . Aus [Gleichung 1.12](#) folgt für die Kompressibilität  $\kappa = (\gamma p)^{-1}$  und somit für die Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (1.16)$$

Einige typische Werte können [Tabelle 1.1](#) entnommen werden.

Gas	$v_{\text{ph}} [\text{m s}^{-1}]$
Luft	343
Helium	981
Kohlendioxid	266
Wasserdampf	477
Schwefelhexafluorid	129

**Tab. 1.1.:** Schallgeschwindigkeit in einigen Gasen

In Festkörpern verwenden wir den *Elastizitätsmodul*  $E = \kappa^{-1}$ , welcher über

$$\frac{dF}{A} = E \frac{dV}{V} \quad (1.17)$$

definiert ist.

Wir erhalten dann für die Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}}^l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.18)$$

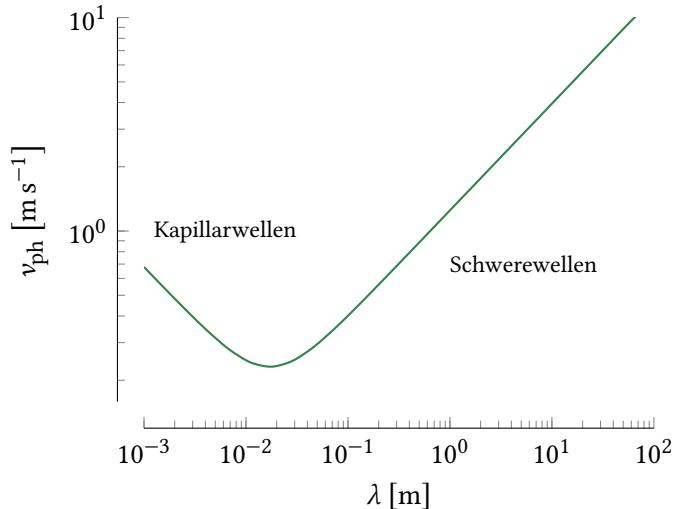
in longitudinaler Richtung.

Da bei Festkörpern aber im Gegensatz zu Gasen der Schermodul  $G$  nicht verschwindet, können sich auch transversale Wellen in ihnen ausbreiten. Für sie gilt die Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}}^t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (1.19)$$

Material	$v_{\text{ph}}^l [\text{km s}^{-1}]$	$v_{\text{ph}}^t [\text{km s}^{-1}]$
Eis	3.3	2.0
Gummi	1.5	0.15
Beton	3.7	2.2
Blei	2.2	0.7
Stahl	5.9	3.2
Beryllium	12.8	8.7

**Tab. 1.2.:** Schallgeschwindigkeiten in einigen Festkörpern



**Abb. 1.5.:** Dispersion von Oberflächenwellen für  $h = 10 \text{ m}$

Summe dominant, während für kurze Wellenlängen (*Kapillarwellen*) der rechte Teil dominant ist.

Darüber hinaus ist die Phasengeschwindigkeit abhängig von der Wassertiefe. Dies ist der Grund dafür, dass sich Wasserwellen am Strand brechen, da der obere Teil der Welle den unteren überholt.

### 1.3.4. Oberflächenwellen

Die Herleitung der Wellengleichung und Phasengeschwindigkeit von Oberflächenwellen (z.B. Wasserwellen) ist sehr kompliziert. Nach aufwendiger Rechnung erhält man für die Phasengeschwindigkeit [3]

$$v_{\text{ph}} = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}\right) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}, \quad (1.20)$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung,  $\sigma$  die Oberflächenspannung,  $\rho$  die Dichte und  $h$  die Flüssigkeitshöhe ist.

Da  $v_{\text{ph}}$  von der Wellenlänge  $\lambda$  abhängt, tritt bei Oberflächenwellen Dispersion auf (Siehe Abschnitt 1.5). Es lassen sich zwei Regionen unterscheiden. Für lange Wellenlängen (*Schwerewellen*) wird der linke Teil der

### 1.4. Wellengleichung in 3D

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (1.21)$$

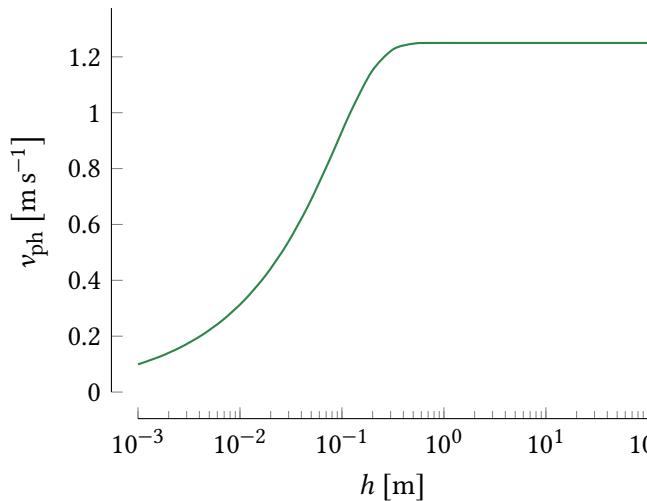
Mithilfe des Laplace Operators  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , kann dies kürzer als

$$\Delta A = \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (1.22)$$

geschrieben werden.

Der Ansatz  $A = f(\mathbf{k}r \pm \omega t)$  löst diese Wellengleichung. Der Wellenvektor  $\mathbf{k}$

## 1. Wellen



**Abb. 1.6.:** Wassertiefenabhängigkeit der Phasengeschwindigkeit für  $\lambda = 1 \text{ m}$

zeigt hierbei in die Ausbreitungsrichtung  $\hat{k}$

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{k}} \quad \text{mit} \quad |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (1.23)$$

Wir betrachten das Beispiel ebener Wellen. Eine Ebene konstanter Phase steht senkrecht zum Vektor  $\hat{\mathbf{k}}$  und wird als *Wellenfront* bezeichnet. Dies ist in [Abbildung 1.7](#) veranschaulicht.

Wir betrachten nun die richtungsabhängige Phasengeschwindigkeit:

- Für  $\mathbf{r} \parallel \mathbf{k}$  gilt wie gehabt  $v_{\text{ph}} = \omega/|\mathbf{k}|$
- Im Fall  $\mathbf{r} \perp \mathbf{k}$  sind hingegen alle Punkte  $\mathbf{r}$  in Phase. Daher ist die Phasengeschwindigkeit hier durch  $v_{\text{ph}} = \infty$  gegeben.

Wir halten jedoch fest, dass  $v_{\text{ph}} = \omega/|\mathbf{k}|$  die eigentliche Phasengeschwindigkeit darstellt.

hängt diese dort von der Wellenlänge bzw. der Frequenz ab, was *Dispersion* genannt wird. Dieses Phänomen wird bei der Untersuchung der Lichtausbreitung in Medien noch von entscheidender Bedeutung sein.

## 1.6. Komplexe Schreibweise

Aufgrund der Eulerformel kann der Kosinus auch als

$$\Re[e^{i\theta}] = \cos \theta \quad (1.24)$$

geschrieben werden. Damit können wir ebene Wellen auch folgendermaßen beschreiben.

$$\begin{aligned} A(x, t) &= A_0 \cdot \cos(kx - \omega t + \phi_0) \\ &= \Re[A_0 \cdot e^{i(kx - \omega t + \phi_0)}] \end{aligned} \quad (1.25)$$

Oft wird er Zusatz  $\Re$  weggelassen, sodass wir

$$A_c = A_0 \cdot e^{i(kx - \omega t + \phi_0)} \quad \text{bzw.} \quad A_c = A_0 \cdot e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} \pm \omega t + \phi_0)} \quad (1.26)$$

erhalten.

Mit dieser komplexen Schreibweise sind Berechnung häufig einfacher durchzuführen. Da physikalisch messbare Observablen aber immer reelle Größen sind, ist zu beachten, dass nur der Realteil die eigentlich messbare physikalische Größe beschreibt.

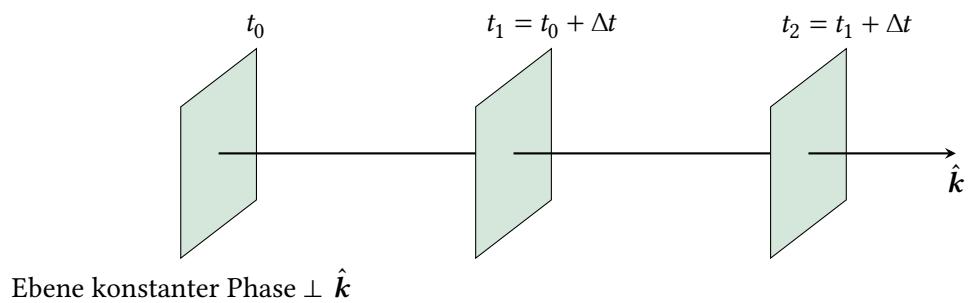
Achtung: Neben der oben genannten Form kann auch

$$A_c = A_0 \cdot e^{-i(kx - \omega t + \phi_0)} \quad \text{bzw.} \quad A_c = A_0 \cdot e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} \pm \omega t + \phi_0)} \quad (1.27)$$

verwendet werden. Beide Schreibweisen sind üblich und äquivalent, da  $\Re[e^{ix}] = \cos(x) = \cos(-x) = \Re[e^{-ix}]$ .

## 1.5. Dispersion

Die Phasengeschwindigkeit einer Welle wird bereits in der jeweiligen Wellengleichung festgelegt. Häufig



**Abb. 1.7.:** Wellenfronten einer Ebenen Welle

## Zusammenfassung

**Harmonische Welle** Gleichzeitig auftretende Oszillation in Raum und Zeit.

$$A(\mathbf{r}, t) = A_0 \underbrace{\cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \phi_0)}_{\text{Phase}}$$

$A_0$  Maximale Amplitude

$\omega$  Kreisfrequenz

$\mathbf{k}$  Wellenvektor

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{k}} = 2\pi \tilde{\nu} \hat{\mathbf{k}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

gibt Ausbreitungsrichtung an.

$T$  Periodenlänge

$\lambda$  Wellenlänge

$\nu$  Frequenz

$\tilde{\nu}$  Wellenzahl

$\phi_0$  Offset Phase

**Phasengeschwindigkeit** gibt Ausbreitungsgeschwindigkeit von Punkten konstanter Phase (z. B. eines Maximums) an.

- Bei harmonischen Wellen:

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$$

- Ist im Allgemeinen in der Wellengleichung definiert.
- Bei Wellenlängen abhängiger Phasengeschwindigkeit tritt Dispersion auf.

## Wellengleichung

$$\text{1D: } \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad \text{3D: } \Delta A = \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

- $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$  heißt Laplace-Operator.
- Wellengleichung definiert Phasengeschwindigkeit.
- Wellengleichung hat allgemeine Lösung

$$A(x, t) = f(x - v_{\text{ph}}t) + g(x + v_{\text{ph}}t).$$

- Linearität der Wellengleichung erlaubt Überlagerung von Wellen.  
⇒ Superpositionsprinzip

$$A_{\text{ges}} = \sum \alpha_i A_i$$

### Kugelwellen

$$A(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(kr - \omega t + \phi_0)$$

Abfall der Amplitude mit  $r^{-1}$  aufgrund der Energieerhaltung.

### Stehende Wellen

$$A(x, t) = 2A_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Überlagerung von zwei gleichen gegenläufigen Wellen ergibt eine auf der Stelle oszillierende Welle.

### Komplexe Schreibweise

$$A_c(\mathbf{r}, t) = A_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \phi_0)}$$

Nur Realteil beschreibt die physikalisch messbare Größe.



What, then, is light according to the electromagnetic theory? It consists of alternate and opposite rapidly recurring transverse magnetic disturbances, accompanied with electric displacements, the direction of the electric displacement being at the right angles to the magnetic disturbance, and both at right angles to the direction of the ray.

JAMES CLERK MAXWELL

## 2.1. Maxwellgleichungen

Die Maxwellgleichungen beschreiben die Zusammenhänge zwischen *elektrischen Feldern*, *magnetischen Feldern* und *elektrischen Ladungen*. Es existieren zwei unterschiedliche Formulierungen, der *mikroskopische* und der *makroskopische Formalismus*, welche sich in der Beschreibung des Effektes von Materie in elektromagnetischen Feldern unterscheiden.

### 2.1.1. Mikroskopische Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (2.4)$$

Hierbei sind  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  die *mikroskopische elektrische Feldstärke* und die *mikroskopische magnetische Flussdichte*, auch *magnetische Induktion* genannt. Im mikroskopischen Formalismus ist  $\rho$  die gesamte Ladungsdichte und  $\mathbf{j}$  die gesamte Stromdichte.

Die Konstanten  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  heißen *Vakuumpermittivität* und *Vakuumpermeabilität*.

Der Effekt, den Materie auf die elektromagnetischen Felder hat, wird im mikroskopischen Formalismus einzig und allein durch die exakte (evtl. sogar mikroskopische) Verteilung der Ladungen und Ströme beschrieben. Möchten wir also wissen, wie die Felder aussehen, müssen wir von jedem Ladungsträger seine exakte Position und Bewegung kennen.

In der Praxis ist eine mikroskopische Beschreibung von Festkörpern nicht möglich. Einerseits liegt die typische Ladungsträgeranzahl in einem Kubikzentimeter in der Größenordnung von  $10^{23}$ , andererseits ist für eine korrekte mikroskopische Beschreibung ein quantenmechanisches Modell nötig. Darüber hinaus ist die mikroskopische Feldverteilung experimentell aufgrund unserer vergleichsweise groben Messgenauigkeit in den meisten Fällen nicht bestimmbar und deshalb auch nicht von Relevanz.

### 2.1.2. Makroskopische Maxwellgleichungen

Um das oben genannte Problem zu umgehen, betrachtet man bei den *makroskopischen Maxwellgleichungen* nur gemittelte Felder.

## 2. Elektromagnetische Wellen

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Neben dem bereits bekannten  $\mathbf{E}$ - und  $\mathbf{B}$ -Feld führt man zusätzlich zur Beschreibung von Materie das  $\mathbf{D}$ -Feld, die *elektrische Flussdichte* oder *dielektrische Verschiebung* sowie das  $\mathbf{H}$ -Feld, die *magnetische Feldstärke* ein. Die Größen  $\rho_f$  und  $\mathbf{j}_f$  sind nun nur noch die *freie Ladungsdichte* sowie die *freie Stromdichte*.

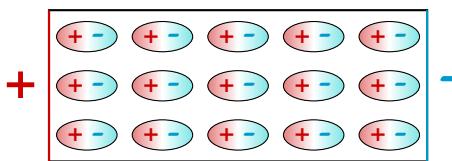
Die Eigenschaften der Materie werden nun von zusätzlichen *Materialgleichungen*, welche  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  sowie  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  verbinden, beschrieben.

### Polarisation

Die dielektrische Verschiebung  $\mathbf{D}$  setzt sich aus dem elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  und der Polarisation  $\mathbf{P}$  zusammen:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.9)$$

Die *Polarisation*  $\mathbf{P}$  beschreibt die Erzeugung von mikroskopischen Dipolen durch die Verschiebung von gebundenen Ladungen relativ zu ihrer Ruhelage. Ihr Betrag  $|\mathbf{P}|$  ist gleich der makroskopischen Oberflächenladung  $\sigma$ .



**Abb. 2.1.:** Mikroskopisches Modell der Polarisation

Die Quellen der Polarisation sind die gebundenen Ladungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_b \quad (2.10)$$

Gleichung 2.9 lässt sich meist in der Form

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} (1 + \chi_e) = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.11)$$

schreiben. Hierbei ist  $\chi_e$  die *elektrische Suszeptibilität* und  $1 + \chi_e = \epsilon$  die *elektrische Permittivität* oder *Dielektrizitätskonstante*. Die Suszeptibilität beschreibt, wie leicht sich das Medium durch ein elektrisches Feld polarisieren lässt. In Tabelle 2.1 sind beispielhaft die Dielektrizitätskonstanten verschiedener Materialien aufgeführt.

In linearen, isotropen (d.h. nicht doppelbrechenden) Medien, wie Gasen, Flüssigkeiten und kubischen Kristallen, sind  $\chi_e$  und  $\epsilon$  (meist frequenzabhängige) Skalare.

Beschreibt man Effekte der nichtlinearen Optik, so verwendet man eine Potenzreihenentwicklung der Suszeptibilität.

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \epsilon_0 \sum_n \chi_e^{(n)} \mathbf{E}^n \\ &= \epsilon_0 \left( \mathbf{E} + \chi_e^{(1)} \mathbf{E} + \chi_e^{(2)} \mathbf{E}^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Möchte man den Effekt der Doppelbrechung beschreiben, so wird die Permittivität ein Tensor (meist eine simple Matrix).

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_i^j \mathbf{E}_j \mathbf{e}^i \quad (2.13)$$

Material	$\epsilon$
Vakuum	1
Luft	1.000 59
Papier	1–4
Porzellan	2–6
Glas	6–8
Germanium	16.6
Propanol	18.3
Feuchte Erde	29
Methanol	32.6
Glycerin	42.5
Wasser (0–3 GHz)	80
Bariumtitanat	$10^3$ – $10^4$

**Tab. 2.1.:** Dielektrische Konstanten einiger Materialien bei 0 °C und 50 Hz

## 2.2. Die elektromagnetische Wellengleichung

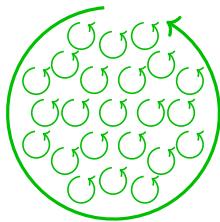
### Magnetisierung

Das magnetische Analogon zur Polarisierung  $P$  ist die Magnetisierung  $M$ :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}_m = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.14)$$

Die Größe  $J_m$  bezeichnet man als *magnetische Polarisation*; meist verwendet man jedoch die *Magnetisierung*  $M$ . Diese beschreibt das makroskopische Magnetfeld eines Körpers aufgrund kleiner Kreisströme oder des Spins der Elektronen (Siehe Abbildung 2.2). Sie ist also durch die gebundenen Ströme und Ladungen bedingt, weshalb für sie eine Gleichung analog zu Gleichung 2.8 gilt.

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_b - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (2.15)$$



**Abb. 2.2.:** Mikroskopisches Modell der Magnetisierung

Auch Gleichung 2.14 lässt sich meist als

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} (1 + \chi_m) = \mu \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.16)$$

schreiben, wobei man  $\chi_m$  als *magnetische Suszeptibilität* und  $\mu$  als *magnetische Permeabilität* bezeichnet.

Man unterscheidet je nach Vorzeichen und Größe der Permeabilität drei Klassen von Materialien:

- $0 \leq \mu < 1$  *Diamagnetisch*: Das Material wird leicht von Magneten abgestoßen.
- $\mu > 1$  *Paramagnetisch*: Das Material wird leicht von Magneten angezogen.
- $\mu \gg 1$  *Ferromagnetisch*: Das Material wird stark von Magneten angezogen.

Die magnetischen Permeabilitäten einiger Materialien sind in Tabelle 2.2 aufgelistet. In den meisten Fällen ist auch die magnetische Suszeptibilität und die Permeabilität ein Skalar. Wie die elektrische Suszeptibilität und Permittivität kann man aber auch hier eine Potenzreihe oder einen Tensor verwenden, wenn nichtlineare Effekte oder anisotrope Materialien beschrieben werden sollen.

Material	$\mu$
Kupfer	$1 - 6.4 \times 10^{-6}$
Wasserstoff	$1 - 2.061 \times 10^{-9}$
Wasser	$1 - 9 \times 10^{-6}$
Vakuum	1
Luft	$1 + 4 \times 10^{-7}$
Aluminium	$1 + 2.2 \times 10^{-5}$
Platin	$1 + 2.57 \times 10^{-4}$
Kobalt	80–200
Eisen	300–10 000
amorphe Metalle	50 000–140 000

**Tab. 2.2.:** Permeabilität einiger Materialien

## 2.2. Die elektromagnetische Wellengleichung

Zu Beginn werden wir uns mit linearen, isotropen, nicht leitenden Materialien beschäftigen. Es gelten daher folgende Formeln:

$$\rho_f = 0 \quad \mathbf{j}_f = \mathbf{0} \quad \mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.17)$$

### 2.2.1. Herleitung der Wellengleichung

Zur Herleitung der Wellengleichung bildet man die Rotation von Gleichung 2.7 und vereinfacht mithilfe der Vektoridentitäten.

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \end{aligned}$$

## 2. Elektromagnetische Wellen

Verwendet man nun die Bedingung 2.17, so erhält man

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (2.18)$$

Die Klammer auf der linken Seite ist aufgrund von Gleichung 2.5 gleich 0. Die Klammer auf der rechten Seite ergibt aufgrund von Gleichung 2.8 und unter Beachtung von 2.17 die Zeitableitung von  $\mathbf{E}$ . Somit erhält man für die elektrische Feldstärke folgende Wellengleichung:

$$\Delta \mathbf{E} = \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich auch die Wellengleichungen für die anderen Felder herleiten.

### 2.2.2. Die Lichtgeschwindigkeit

Die oben hergeleitete Wellengleichung hat die Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}}. \quad (2.20)$$

Da sowohl  $\epsilon_0$  als auch  $\mu_0$  Konstanten sind, könne diese in einer neuen Naturkonstante, der *Lichtgeschwindigkeit im Vakuum*

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}, \quad (2.21)$$

zusammengefasst werden. Die Phasengeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen ist folglich:

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n} \quad (2.22)$$

Die Materialkonstanten  $\mu$  und  $\epsilon$  wurden hierbei noch in die Konstante

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}, \quad (2.23)$$

dem *Brechungsindex*, zusammengefasst. Dieser beschreibt, wie schnell sich Licht in einem Medium ausbreitet und ist von zentraler Bedeutung bei der Beschreibung von optischen Phänomenen. Es gilt also:

Je höher  $n$ , desto langsamer ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Da der Brechungsindex meist abhängig von der Frequenz ist, ist auch die Phasengeschwindigkeit frequenzabhängig. Es herrscht also meist Dispersion.

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum beträgt

$$c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} (\approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}).$$

Dieser Wert ist exakt, da die Definition des Meters über die Lichtgeschwindigkeit erfolgt. Die Definition der Sekunde lautet:

$1 \text{ s} = 9\,192\,631\,770$ -fache der Periode

eines Übergangs im  $^{133}\text{Cs}$

mit der Genauigkeit von  $\approx 10^{-16}$ .

Im Vakuum ist  $\epsilon = \mu = 1$ , sodass  $n = 1$  folgt und daher  $v_{\text{ph}} = c = \text{const.}$  Es gibt keine Dispersion im Vakuum:

$$v = \frac{c}{\lambda} \quad (2.24)$$

In Medien gilt meist  $n \neq 1$  und daher eine andere Lichtgeschwindigkeit. Außerdem ist der Brechungsindex typischerweise frequenzabhängig ( $n = n(\omega)$ ). Es herrscht Dispersion.

Material	$n$
Luft	1.000 278 97
Wasser	1.3350
Ethanol	1.3652
Quarzglas	1.4623
Plexiglas	1.4960
BK7	1.5214
Kochsalz	1.5516
Flintglas	1.6299
Saphir	1.7743
Diamant	2.4289

**Tab. 2.3.:** Beispiele für Brechungsindizes bei  $\lambda_{\text{vac}} = 500 \text{ nm}$

Anmerkung: Wegen  $v_{\text{ph}} = \lambda v$  und  $v = \text{const.}$  (aufgrund der Energieerhaltung) wird die Wellenlänge  $\lambda$

## 2.2. Die elektromagnetische Wellengleichung

kleiner, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_{\text{ph}}$  abnimmt. Die Wellenlänge wird also beim Durchgang durch ein Medium mit  $n > 1$  kleiner.

### Experimente zur Wellenausbreitung

**Messung der Lichtgeschwindigkeit** Wir beginnen mit einer groben Messung, indem wir die Laufzeit  $T_L$  messen, welche Licht zum Überwinden einer Strecke von  $2L$  benötigt.

$$c = \frac{2L}{T_L} = \frac{26 \text{ m}}{90 \text{ ns}} = 2.89 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

**Ausbreitungsgeschwindigkeit in Wasser** Das in der Vorlesung verwendete Entfernungsmessgerät zeigt als Strecke die Gerätelänge  $L_G$  plus den Abstand zum reflektierenden Objekt an. Messen wir dieselbe Strecke einmal durch Luft und einmal durch Wasser, so ergeben sich zwei unterschiedliche Werte aufgrund des unterschiedlichen Brechungsindexes und damit der unterschiedlichen Lichtgeschwindigkeit. Für ein und dieselbe Länge von  $L_0 = 1.42 \text{ m}$  zeigt das Messgerät folgende Werte an:

$$L_{\text{Luft}} = 1.601 \text{ m} \quad L_{\text{Wasser}} = 2.099 \text{ m}$$

Weil vom Messgerät intern eine *Laufzeit* gemessen wird, gelten folgende Zusammenhänge:

$$L_{\text{Luft}} = c \frac{\Delta t_{\text{Luft}}}{2} + L_G, \quad L_{\text{Wasser}} = c \frac{\Delta t_{\text{Wasser}}}{2} + L_G. \quad (2.25)$$

Die Laufzeiten sind dabei durch die Brechungsindizes der jeweiligen Medien gegeben:

$$\Delta t_{\text{Luft}} = \frac{2L_0}{c}, \quad \Delta t_{\text{Wasser}} = \frac{2nL_0}{c} \quad (2.26)$$

Wir haben hier angenommen, dass  $n_{\text{Luft}} \approx 1$  und definieren  $n_{\text{Wasser}} = n$ . Bildet man jetzt die Differenz  $\Delta L = L_{\text{Wasser}} - L_{\text{Luft}}$ , so ergibt sich:

$$\Delta L = (nL_0 + L_G) - (L_0 + L_G)$$

Durch Auflösen nach  $n$  erhält man schließlich:

$$n = \frac{\Delta L}{L_0} + 1 = \frac{2.099 \text{ m} - 1.601 \text{ m}}{1.42 \text{ m}} = 1.35 .$$

Dieser Wert ist nahe am Literaturwert 1.3350.

Das Messinstrument bestimmt die Entfernung mit sichtbarem Laserlicht. Wir können daraus  $n$  berechnen. Eine DC-Messung (z. B. mit einem Kondensator) ergibt  $\epsilon = 80$  bei  $20^\circ\text{C}$ . Dann folgt  $n = \sqrt{\epsilon} = 8.9$ , im Widerspruch zu unserem Ergebnis. Daraus ist ersichtlich, dass Wasser Dispersion aufweist, d.h. dass der Brechungsindex von der Frequenz bzw. von der Vakuum-Wellenlänge der elektromagnetischen Welle abhängt ( $n(\nu = 0) \neq n(\nu \neq 0)$ ).

**Präzise Brechungsindexbestimmung mit Michelson-Interferometer** Wir führen nun eine präzise Messung mithilfe eines Michelson-Interferometers durch (Siehe Abbildung 2.3).

Wird in die Kammer der Länge  $L$  Luft eingelassen, so ändert sich die Phasengeschwindigkeit von  $v_{\text{ph}} = c$  zu  $v_{\text{ph}} = c/n$ . Nachdem wie oben schon angemerkt die Frequenz konstant bleibt, ändert sich in der Kammer die Wellenlänge  $\lambda$  bzw. der Wellenvektor  $k$ .

$$k_{\text{Vakuum}} = \frac{\omega}{c} \rightarrow k_{\text{Luft}} = n_{\text{Luft}} \frac{\omega}{c}$$

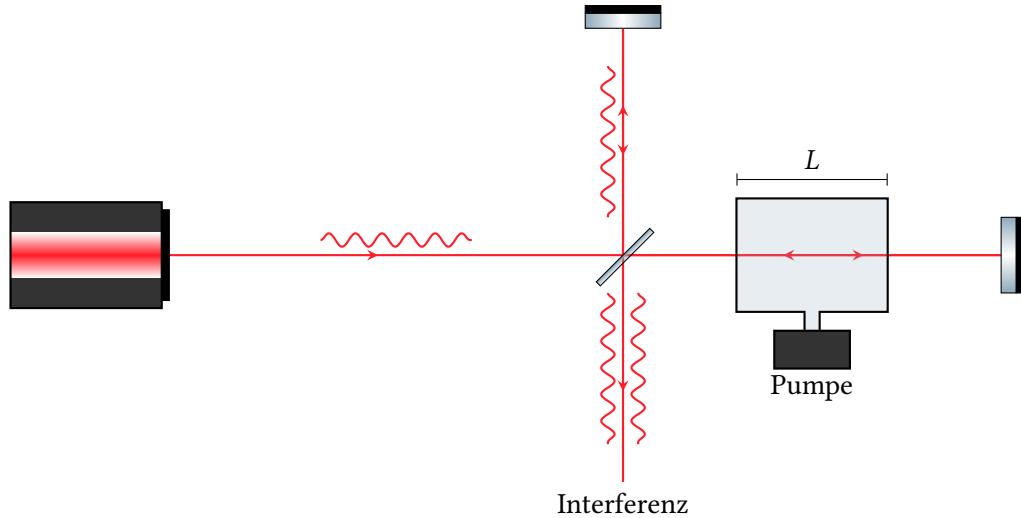
Im nächsten Kapitel werden sehen, dass wir, um zu bestimmen, ob wir bei der Überlagerung zweier Wellen konstruktive oder destruktive Interferenz haben, den Phasenunterschied der beiden Wellen betrachten müssen. Nachdem wir beide Wellen zur selben Zeit  $t$  betrachten, kann der Phasenunterschied nur von der unterschiedlichen Propagation im Raum stammen. Wir schreiben deshalb

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 2L k_{\text{Luft}} - 2L k_{\text{Vakuum}} \\ &= 2L n_{\text{Luft}} \frac{\omega}{c} - 2L \frac{\omega}{c} \\ &= 2L (n_{\text{Luft}} - 1) \frac{\omega}{c} \end{aligned}$$

Während wir nun die Luft aus der Kammer pumpen, sehen wir abwechselnd Interferenzmaxima und -minima. Ein Zähler liefert uns, dass wir  $m$  Maxima sehen bis die Kammer vollkommen geleert ist. Damit können wir nun  $\Delta\varphi$  bestimmen.

$$m = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{2\nu L}{c} (n_{\text{Luft}} - 1) = \frac{2L}{\lambda} (n_{\text{Luft}} - 1)$$

## 2. Elektromagnetische Wellen



**Abb. 2.3.:** Aufbau eines Michelson-Interferometers mit integrierter Kammer der Länge  $L$ .

Die Wellenlänge  $\lambda$  ist hierbei die Vakuumwellenlänge  $c/v$ .

Die Werte in unserem Aufbau sind:  $\lambda = 633 \text{ nm}$ ,  $L = 25 \text{ cm}$  und  $m = 200$ . Für den Brechungsindex  $n_{\text{Luft}}$  erhalten wir also

$$n_{\text{Luft}} = m \frac{\lambda}{2L} + 1 = 1.00025 .$$

Der Literaturwert lautet  $n_{\text{Luft}} = 1.00024$ . Dies entspricht einer Abweichung von  $\approx 10^{-4}$  vom Vakuum.

### 2.2.3. *Dispersionsrelation*

Als *Dispersionsrelation* bezeichnet man den Zusammenhang zwischen Wellenvektor, Frequenz und Phasengeschwindigkeit. Zur Herleitung setzt man die komplexe Lösung der Wellengleichung 2.19 in diese ein.

$$\begin{aligned} \Delta(A_0 e^{i(kr - \omega t + \phi_0)}) &= \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (A_0 e^{i(kr - \omega t + \phi_0)}) \\ -|\mathbf{k}|^2 e^{i(kr - \omega t + \phi_0)} &= -\frac{n^2}{c^2} \omega^2 e^{i(kr - \omega t + \phi_0)} \end{aligned}$$

Damit diese Gleichung für alle Zeiten  $t$  und Orte  $r$  gelöst ist, muss folgender Zusammenhang gelten:

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n^2} |\mathbf{k}|^2 \quad (2.27)$$

Dies ist die *Dispersionsrelation für elektromagnetische Wellen*. Sie entspricht der schon in Kapitel 1 hergeleiteten Definition der Phasengeschwindigkeit.

Äquivalent zu Gleichung 2.27 gilt natürlich auch

$$v^2 \lambda^2 = \frac{c^2}{n^2} . \quad (2.28)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass  $\lambda$  in diesem Fall die Wellenlänge im Medium mit Brechungsindex  $n$  ist. Sie hängt mit der Vakuumwellenlänge  $\lambda_0$  über  $\lambda = \lambda_0/n$  zusammen.

### 2.3. *Relationen zwischen Feldern und $k$*

Aufgrund der Maxwellgleichungen sind die elektromagnetischen Felder und der Wellenvektor von Licht nicht unabhängig voneinander. Im Folgenden wollen wir die wichtigsten Zusammenhänge herleiten. Wir gehen von nicht leitenden Materialien aus und verwenden die komplexe Schreibweise für ebene Wellen.

### 2.3.1. Geometrische Relationen

Wendet man [Gleichung 2.5](#) und [2.6](#) an,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (D_0 e^{i(kr - \omega t + \phi_0)}) &= ik \cdot D(r, t) = 0 \\ \nabla \cdot (B_0 e^{i(kr - \omega t + \phi_0)}) &= ik \cdot B(r, t) = 0\end{aligned}$$

so sieht man, dass diese Bedingungen nur erfüllt werden können, wenn gilt:

$$D \perp k \quad \text{und} \quad B \perp k \quad (2.29)$$

In isotropen Medien, in denen  $H \parallel B$  und  $D \parallel E$  ist, gilt also auch

$$E \perp k \quad \text{und} \quad H \perp k. \quad (2.30)$$

Elektromagnetische Wellen sind also *transversale Wellen*, da die Felder senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $k$  schwingen.

Betrachten wir nun die Rotationsgleichungen [2.7](#) und [2.8](#).

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial t}(B_0 e^{i(kr - \omega t + \phi_0)}) &= \nabla \times (E_0 e^{i(kr - \omega t + \phi_0)}) \\ &= ik \times E(r, t) \\ \frac{\partial}{\partial t}(D_0 e^{i(kr - \omega t + \phi_0)}) &= \nabla \times (H_0 e^{i(kr - \omega t + \phi_0)}) \\ &= ik \times H(r, t)\end{aligned}$$

Integriert man diese Gleichungen über  $t$ , so erhält man

$$B = \frac{k \times E}{\omega} \quad (2.31)$$

$$D = -\frac{k \times H}{\omega}. \quad (2.32)$$

Es gilt also:

$$B \perp E \quad \text{und} \quad D \perp H. \quad (2.33)$$

Die elektromagnetischen Felder und der Wellenvektor stellen ein *rechtshändiges System* dar.

### 2.3.2. Amplituden der Felder

Wir wollen nun die relativen Amplituden der elektromagnetischen Felder von Licht betrachten. Dafür bilden wir den Betrag von [Gleichung 2.31](#) und [2.32](#) und vereinfachen weiter mithilfe der Dispersionsrelation.

$$\begin{aligned}|B| &= \frac{|k \times E|}{|\omega|} \\ &= \frac{n}{c} |\hat{k} \times E| \\ |D| &= \frac{|k \times H|}{|\omega|} \\ &= \frac{n}{c} |\hat{k} \times H|\end{aligned}$$

In isotropen Medien ist  $E \perp k$  und  $H \perp k$ . Es gelten außerdem folgende Zusammenhänge zwischen den Amplituden der Felder.

$$|B| = \frac{n}{c} |E| \quad \text{und} \quad |D| = \frac{n}{c} |H| \quad (2.34)$$

## 2.4. Energietransport

Durch elektromagnetische Strahlung wird Energie transportiert, welche beispielsweise bei Absorption zu einer Erwärmung des Materials führt. Eine wichtige Größe ist hierbei die *Intensität* von Licht, die die eingestrahlte Leistung pro Fläche beschreibt und typischerweise in der Einheit  $\text{W/cm}^2$  angegeben wird.

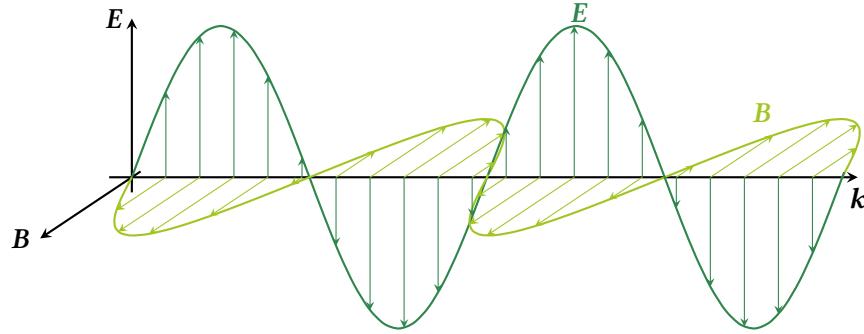
### 2.4.1. Poyntingvektor

Die *Energieflussrichtung* ist durch den *Poyntingvektor*

$$S = E \times H \quad (2.35)$$

gegeben. Dieser beschreibt die *Energieflussdichte* von elektromagnetischer Strahlung. In isotropen Medien ist die Richtung von  $k$  und  $S$  identisch. In doppelbrechenden Materialien müssen jedoch die *Energieflussdichte* und der *Wellenvektor* nicht zwangsläufig in dieselbe Richtung zeigen.

## 2. Elektromagnetische Wellen



**Abb. 2.4.:** Oszillierendes  $E$ - und  $B$ -Feld in isotropem Medium

### 2.4.2.

#### Intensität

Die Intensität ist eine der wichtigsten Kenngrößen von elektromagnetischer Strahlung, da uns die Feldstärken meist nicht bekannt sind. Sie beschreibt die Leistung  $P$  der Strahlung, welche durch eine senkrecht zur Energieflussrichtung stehenden Fläche  $A_{\perp}$  transportiert wird.

$$I = \frac{P}{A_{\perp}} \quad (2.36)$$

Bei der Herleitung werden wir nur isotrope Medien betrachten.

#### Instantane Intensität

Die Intensität zu einem bestimmten Zeitpunkt einer elektromagnetischen Welle ist durch den Betrag des Poyntingvektors gegeben.

$$\begin{aligned} I_i &= |S| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \\ &= \frac{1}{\mu\mu_0} |\mathbf{E}| |\mathbf{B}| \\ &= \epsilon\epsilon_0 \frac{c^2}{n^2} |\mathbf{E}| |\mathbf{B}| \end{aligned}$$

Den Betrag des Kreuzproduktes dürfen wir so vereinfachen, da  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  senkrecht aufeinander stehen.

Nutzen wir die Definition der Phasengeschwindigkeit und die zuvor hergeleiteten Amplitudenrelationen, so lassen sich folgende Formeln für die instantane In-

tensität herleiten:

$$I_i = \frac{1}{\mu\mu_0} |\mathbf{E}| |\mathbf{B}| \quad (2.37)$$

$$= \frac{c}{n} \epsilon\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \quad (2.38)$$

$$= \frac{c}{n} \frac{1}{\mu\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \quad (2.39)$$

#### Mittlere Intensität

Wenn wir von der Intensität von Licht sprechen, ist in den meisten Fällen nur die *mittlere Intensität* gemeint.

$$I = \frac{c}{n} \epsilon\epsilon_0 \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_t \quad (2.40)$$

Wir erhalten diese, wenn wir das Quadrat des elektrischen Feldes über eine Periode mitteln.

$$\begin{aligned} \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle_t &= \frac{1}{T} \int_0^T dt |\mathbf{E}_0|^2 \cos^2(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \phi_0) \\ &= \frac{1}{2} |\mathbf{E}_0|^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Somit erhalten wir folgende bekannte Formel für die Intensität von Licht:

$$I = \frac{1}{2} \frac{c}{n} \epsilon\epsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2 \quad (2.42)$$

Äquivalente Formeln gelten natürlich auch, wenn anstelle des  $E$ -Feldes das  $B$ -Feld oder beide verwendet werden.

## Zusammenfassung

**Mikroskopische Maxwellgleichungen** beschreiben Materie durch exakte Ladungs-, Strom- und Feldverteilung.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

$\mathbf{E}$  Elektrische Feldstärke

$\rho$  Ladungsdichte

$\mathbf{B}$  Magnetische Flussdichte

$\mathbf{j}$  Stromdichte

**Makroskopische Maxwellgleichungen** behandeln nur gemittelte Felder.

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$\mathbf{D}$  Elektrische Flussdichte

$\rho_f$  Freie Ladungsdichte

$\mathbf{H}$  Magnetische Feldstärke

$\mathbf{j}_f$  Freie Stromdichte

**Materialgleichungen** beschreiben Materieeigenschaften.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$\mathbf{P}$  Polarisation: Erzeugung mikroskopischer Dipole

$\mathbf{M}$  Magnetisierung: Magnetfeld durch Ladungsschleifen und Elektronenspins

Meist genügen einfache Zusammenhänge zur Beschreibung der Materie.

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$$

$\chi_e$  Elektrische Suszeptibilität

$\chi_m$  Magnetische Suszeptibilität

$\epsilon$  Elektrische Permittivität

$\mu$  Magnetische Permeabilität

**Elektromagnetische Wellengleichung** kann aus Maxwellgleichungen hergeleitet werden.

$$\Delta \mathbf{E} = \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$c = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}^{-1}$  Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $n = \sqrt{\mu \epsilon}$  Brechungsindex

**Dispersionsrelation** verknüpft Frequenz und Wellenlänge.

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n^2} |\mathbf{k}|^2 \quad v^2 \lambda^2 = \frac{c^2}{n^2}$$

Hier  $\lambda$  bezeichnet die Wellenlänge im Medium.

**Geometrische Relationen** Licht ist eine transversale Welle (in isotropen Medien).

$$\mathbf{D} \perp \mathbf{k} \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} \perp \mathbf{E} \quad \mathbf{D} \perp \mathbf{H}$$

**Amplitudenrelationen**

$$|\mathbf{B}| = \frac{n}{c} |\mathbf{E}| \quad |\mathbf{D}| = \frac{n}{c} |\mathbf{H}|$$

**Poyntingvektor** beschreibt Energieflussdichte elektromagnetischer Strahlung.

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

**Intensität** beschreibt die Leistung, welche durch eine senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehenden Fläche fließt. Sie ist meist durch den gemittelten Betrag des Poyntingvektors gegeben.

$$I = \frac{1}{2} \frac{c}{n} \epsilon \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \quad (2.43)$$

## 3.

# ÜBERLAGERUNG VON WELLEN – FOURIERANALYSE

Fourier's Theorem [...] is not only one of the most beautiful results of modern analysis, but it may be said to furnish an indispensable instrument in the treatment of nearly every recondite question in modern physics.

BARON WILLIAM THOMSON KELVIN

Wir hatten bereits im ersten Kapitel angemerkt, dass uns die Linearität der Wellengleichung erlaubt, viele Lösungen dieser zusammen zu addieren, um wieder eine gültige Lösung zu erhalten. In diesem Kapitel wollen wir uns etwas genauer mit dieser Thematik beschäftigen.

Wir werden sehen, dass uns der Formalismus der *Fouriertransformation* ein mächtiges Werkzeug an die Hand gibt, mit dem wir Wellenphänomene entweder als Überlagerung vieler harmonischer Wellen (Frequenzraum) oder als Amplitudenmodulation über der Zeit betrachten können.

Die Phänomene, welche bei der Überlagerung von mehreren Wellen auftreten, bezeichnet man als *Interferenz*.

Wir werden zu Beginn einige einfache Fälle betrachten und später einen allgemeinen Formalismus für beliebige Überlagerungen herleiten.

## 3.1. Überlagerungen von zwei Wellen

### 3.1.1. Intensität bei gleicher Frequenz

Wir betrachten zunächst zwei Wellen mit gleicher Frequenz  $\omega$ , welche aber jeweils eine unterschiedliche Phase

$$\alpha_i = kx + \phi_i$$

haben können.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{01} \sin(\omega t + \alpha_1) \\ E_2 &= E_{02} \sin(\omega t + \alpha_2) \end{aligned}$$

Die Summe dieser Wellen,  $E$  ist wieder eine Welle mit Frequenz  $\omega$  und neuer Amplitude  $E_0$ . Mittelt man das Feld über eine Periode, um die Intensität zu berechnen, erhält man

$$\langle E^2 \rangle_t = \frac{1}{2}(E_{01}^2 + E_{02}^2 + \underbrace{2E_{01}E_{02} \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}_{\text{Interferenzterm}}).$$

Für den *Interferenzterm* ist also der Phasenabstand  $\delta = \alpha_1 - \alpha_2$  entscheidend. Dieser Term beschreibt das

### 3. Überlagerung von Wellen – Fourieranalyse

Phänomen, dass sich Wellen bei Überlagerung entweder verstärken oder auch auslöschen können. Aus dem Verlauf des Kosinus ergibt sich:

- Maximum bei  $\delta = m \cdot 2\pi$  mit  $m \in \mathbb{Z}$
- Minimum bei  $\delta = \pi + m \cdot 2\pi$  mit  $m \in \mathbb{Z}$

#### 3.1.2. Überlagerung bei unterschiedlicher Frequenz

Wir betrachten nun das wichtige Phänomen der *Schwingung*. Hierfür überlagern wir wieder zwei Wellen, welche dieses Mal dieselbe Amplitude aber unterschiedliche Frequenz haben.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ E_2 &= E_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{aligned}$$

Ihre Summe lässt sich mithilfe von trigonometrischen Identitäten auf

$$\begin{aligned} E &= 2E_0 \cdot \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \\ &\quad \cdot \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \\ &= 2E_0 \cdot \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \cdot \cos(k_m x - \omega_m t) \quad (3.1) \end{aligned}$$

bringen. Das Ergebnis (siehe Abbildung 3.1) ist eine Welle, welche mit der mittleren Frequenz  $\bar{\omega} = 1/2(\omega_1 + \omega_2)$  in der Zeit und  $\bar{k} = 1/2(k_1 + k_2)$  im Ort schwingt und deren Amplitude mit der Frequenz  $\omega_m = 1/2(\omega_1 - \omega_2)$  in der Zeit und  $k_m = 1/2(k_1 - k_2)$  im Ort moduliert wird.

Die Intensität dieser Überlagerung ist dann

$$\begin{aligned} I &\propto 4E_0^2 \cos^2(k_m x - \omega_m t) \\ &= 2E_0^2 (1 + \cos(2k_m x - 2\omega_m t)) . \quad (3.2) \end{aligned}$$

Sie oszilliert also mit der Frequenz  $2\omega_m = \omega_1 - \omega_2$ , welche *Schwingungsfrequenz* genannt wird.

## 3.2. Überlagerung mehrerer Frequenzen

Wir wollen nun die oben beschriebenen Gedanken fortführen und uns überlegen, was wir bei einer Überlagerung von beliebig vielen diskreten harmonischen Wellen erhalten.

$$E(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{-i(k_l x - \omega_l t)} \stackrel{x=0}{=} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l e^{i\omega_l t} \quad (3.3)$$

Das Betragsquadrat der Koeffizienten  $|a_l|^2$  bezeichnen wir als *Spektrum*. Es gibt uns die Amplitude jeder Frequenzkomponente in unserem Signal an.

#### 3.2.1. Periodische Funktionen

Ein wichtiger Sonderfall der oberen Gleichung bilden periodische Funktionen, bei denen  $E(t + T) = E(t)$  gilt. In diesem Fall besteht das Spektrum aus diskreten Frequenzen mit dem Abstand  $\omega_0 = 2\pi T^{-1}$ .

$$\text{Periode } T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Leftrightarrow \text{Spektrum } \omega_m = m \cdot \omega_0$$

Wir können diesen Zusammenhang wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned} E(t + T) &= \sum_m a_m e^{i\omega_m(t+T)} \\ &= \sum_m a_m e^{i\omega_m t} \cdot e^{i\omega_m T} \quad (\text{I}) \\ E(t) &= \sum_m a_m e^{i\omega_m t} \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

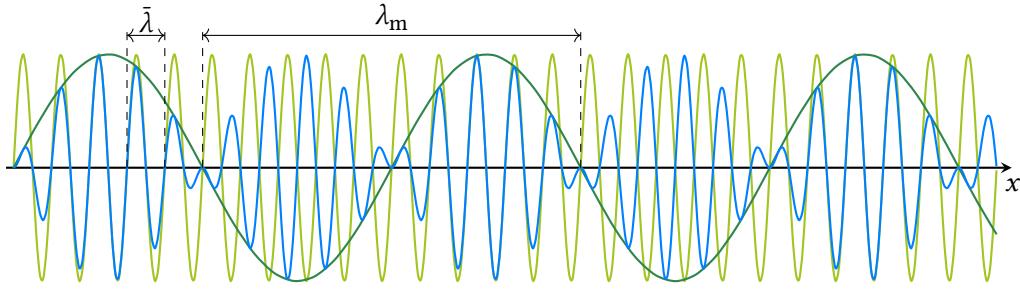
Vergleichen wir I und II, so sehen wir, dass

$$e^{i\omega_m T} = e^{i\omega_m \frac{2\pi}{\omega_0}} \stackrel{!}{=} 1$$

gelten muss. Damit die komplexe Exponentialfunktion gleich 1 ist, muss ihre Phase ein Vielfaches von  $2\pi$  sein. Es gilt also

$$\omega_m \stackrel{!}{=} m \cdot \omega_0 . \quad q.e.d.$$

Für periodische Funktionen wird Gleichung 3.3 zur sogenannten *Fourierreihe*. Die Koeffizienten  $a_m$  werden als *Fourierkoeffizienten* bezeichnet.



**Abb. 3.1.:** Die Multiplikation von Trägerwelle (hellgrün) und Einhüllender (dunkelgrün) liefert eine Schwebung (blau).

### 3.2.2. Bestimmung der Fourierkoeffizienten

Wir wissen nun, dass wir periodische Funktionen mithilfe von Fourierreihen darstellen können. Wie finden wir nun jedoch bei einer gegebenen Funktion  $E(t)$  die Fourierkoeffizienten für jede einzelne Frequenz?

Wir beginnen wieder mit der Fourierreihe

$$E(t) = \sum_m a_m e^{im\omega_0 t}.$$

Um nun den Fourierkoeffizienten  $a_n$  zur Frequenzkomponente  $n \cdot \omega_0$  aus dieser Gleichung zu extrahieren, multiplizieren wir  $E(t)$  mit  $\exp(-in\omega_0 t)$  und integrieren über  $[-T/2, T/2]$ .

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{-in\omega_0 t} dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \sum_m a_m e^{im\omega_0 t} e^{-in\omega_0 t} dt \\ &= \sum_m a_m \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(m-n)\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die beiden Fälle  $m = n$  und  $m \neq n$  separat:

1. Für  $m = n$  erhalten wir

$$\begin{aligned} a_m \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(m-m)\omega_0 t} dt &= a_m \int_{-T/2}^{T/2} e^0 dt \\ &= a_m \cdot T \end{aligned} \tag{3.4}$$

2. Für  $m \neq n$  folgt

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(m-n)\omega_0 t} dt &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(m-n)\frac{2\pi}{T} t} dt \\ &= \frac{T}{i2\pi(m-n)} (e^{i(m-n)\pi} - e^{-i(m-n)\pi}) \\ &= \frac{T}{(m-n)\pi} \sin[(m-n)\pi] = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Da  $m - n$  eine ganze Zahl ungleich null ist, bleibt der Vorfaktor endlich. Der Sinusterm dagegen ist null, wodurch der gesamte Ausdruck null ergibt.

Fassen wir alles zusammen, erhalten wir schließlich

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \tag{3.6}$$

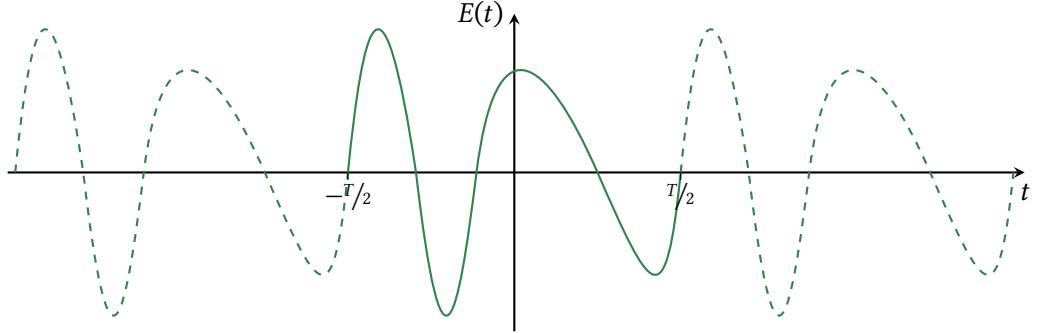
Durch die Integration ist unser Ergebnis nicht mehr zeitabhängig. Die Menge aller Fourierkoeffizienten mit zugehörigen harmonischen Wellen ist also eine *Frequenzdarstellung* von  $E(t)$ .

Außerhalb von  $[-T/2, T/2]$  wird die Funktion periodisch fortgesetzt (siehe Abbildung 3.2).

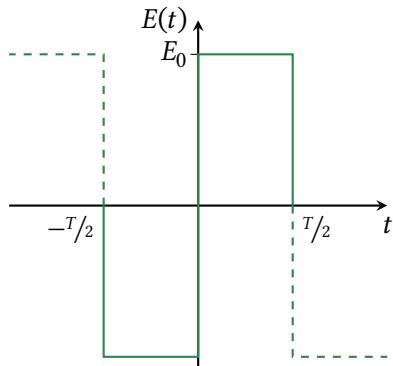
#### Beispiel: Periodische Rechteckfunktion

Wir bestimmen die Fourierkoeffizienten für eine periodische Rechteckfunktion mit Frequenz  $\omega_0 = 2\pi T^{-1}$ .

### 3. Überlagerung von Wellen – Fourieranalyse



**Abb. 3.2.:** Periodische Fortsetzung einer Funktion  $E(t)$ .



Um die Rechteckfunktion für den Sinusterm zu beachten, spalten wir das obere Integral nun in eines von  $-T/2$  bis 0 mit Amplitude  $-E_0$  und eines von 0 bis  $T/2$  mit Amplitude  $E_0$  auf. Außerdem ziehen wir das Minus aus dem Sinus heraus, da er antisymmetrisch ist.

**Abb. 3.3.:** Darstellung einer Rechteckfunktion.

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{-im\frac{2\pi}{T}t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) \cos\left(-m\frac{2\pi}{T}t\right) dt \\ &\quad + i E(t) \sin\left(-m\frac{2\pi}{T}t\right) dt \end{aligned}$$

Das Produkt aus  $E(t)$  und dem Kosinus ist eine ungerade Funktion, da  $E(t)$  ungerade und der Kosinus gerade ist. Aus diesem Grund ergibt das Integral über den Bereich  $[-T/2, T/2]$  0 und fällt weg.

$$\begin{aligned} a_m &= -i \frac{-E_0}{T} \int_{-T/2}^0 \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt \\ &\quad - i \frac{E_0}{T} \int_0^{T/2} \sin\left(m\frac{2\pi}{T}t\right) dt \\ &= -i \frac{E_0}{2\pi m} (\cos(0) - \cos(m\pi)) \\ &\quad - \cos(m\pi) + \cos(0) \\ &= \begin{cases} 0 & m \text{ gerade} \\ -i \frac{2E_0}{\pi m} & m \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Aus diesen Fourierkoeffizienten bilden wir nun die Fourierreihe.

$$\begin{aligned} E(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\frac{2\pi}{T}t} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} e^{i(2m+1)\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{m=-1}^{-\infty} a_{2m+1} e^{i(2m+1)\frac{2\pi}{T}t} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} e^{i(2m+1)\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{-2m+1} e^{i(-2m+1)\frac{2\pi}{T}t} \quad (3.9)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} e^{i(2m+1)\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{-2(m+1)+1} e^{i(-2(m+1)+1)\frac{2\pi}{T}t} \quad (3.10)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} e^{i(2m+1)\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{-(2m+1)} e^{-i(2m+1)\frac{2\pi}{T}t} \quad (3.11)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} \left[ e^{i(2m+1)\frac{2\pi}{T}t} - e^{-i(2m+1)\frac{2\pi}{T}t} \right] \quad (3.12)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} 2i \sin((2m+1)\frac{2\pi}{T}t) \quad (3.13)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4E_0}{\pi(2m+1)} \sin((2m+1)\frac{2\pi}{T}t) \quad (3.14)$$

Wir haben hier zunächst die Summe in ihre positiven und negativen Beiträge aufgespaltet (Gleichung 3.8). Die geraden Beiträge zur Summe sind null und wurden deshalb nicht berücksichtigt (Siehe  $2m+1$ ). Danach wurde die zweite Teilsumme in eine Summe über positive Indizes verwandelt (Gleichung 3.9) und der Summationsindex so verschoben, dass die Summe bei  $m = 0$  startet (Gleichung 3.10 und Gleichung 3.11). Nachdem man schließlich noch die Symmetrie der Koeffizienten  $a_{-m} = -a_m$  verwendet (Gleichung 3.12), lassen sich die komplexen Exponentialfunktionen zu einem Sinusterm kombinieren (Gleichung 3.13). Das Ergebnis ist (wie erwartet) eine rein reelle Darstellung der Rechtecksfunktion als Überlagerung von ungeraden Harmonischen (Gleichung 3.14).

### 3.2.3.

### Nichtperiodische Funktionen

Im vorigen Abschnitt hatten wir hergeleitet, wie wir periodische Signale durch eine Fourierreihe darstellen können. Wie müssen wir nun unseren Formalismus erweitern, wenn wir auch nichtperiodische Signale beschreiben wollen?

Zunächst sollten wir uns davon überzeugen, dass wir kontinuierlich vom periodischen zum nichtperiodischen Fall gelangen können, wenn wir  $T$  gegen  $\infty$  gehen lassen.

$$E(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_m \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t') e^{-i2\pi\frac{m}{T}t'} dt' e^{i2\pi\frac{m}{T}t}$$

Wir verwenden nun anstelle von  $T$  die Kreisfrequenz  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Wenn wir dies tun, müssen wir auch beachten, dass sich der Limes ändert. Wir erhalten dann

$$E(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \sum_m \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} E(t') e^{-im\omega_0 t'} dt' e^{im\omega_0 t}.$$

Wir haben hier nun eine *Riemannsumme* über die Kreisfrequenzen erhalten. Führen wir den Grenzwert nun aus und überführen wir dabei die diskreten Frequenzen  $m\omega_0$  zu der kontinuierlichen Kreisfrequenz  $\omega$ , so erhalten wir folgendes Integral:

$$E(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} E(t') e^{-i\omega t'} dt'}_{\tilde{E}(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \quad (3.15)$$

Wenn wir nun noch das innere Integral als Frequenzdarstellung  $\tilde{E}(\omega)$  unserer Funktion identifizieren, erhalten wir die Definitionen der *Fouriertransformation*.

$$\tilde{E}(\omega) = \mathfrak{FT}[E(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.16)$$

$$E(t) = \mathfrak{IFT}[\tilde{E}(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.17)$$

### 3. Überlagerung von Wellen – Fourieranalyse

Die *Fouriertransformation* überführt vom Zeit- in den Frequenzraum, die *inverse Fouriertransformation* hingegen vom Frequenz- in den Zeitraum.

#### Vollständigkeit der Fouriertransformation

Die Fouriertransformation ist vollständig für Funktionen in  $\mathcal{L}^2$ , dem Raum quadratisch integrierbarer Funktionen, d. h. Funktionen für die  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$  gilt. Um dies zu zeigen, verwenden wir die Dirac'sche  $\delta$ -Distribution, welche wir folgendermaßen definieren:

$$\delta(y - y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(y-y')x} dx \quad (3.18)$$

Für  $f(y') \in \mathcal{L}^2$  gilt für diese

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - y') f(y) dy = f(y'). \quad (3.19)$$

Wir beginnen nun mit Gleichung 3.17 und wenden auf sie die Fouriertransformation (3.16) an.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega e^{-i\omega' t} dt$$

Da die zweite Exponentialfunktion unabhängig von  $\omega$  ist, können wir sie in das innere Integral hinein ziehen und mit der inneren zusammenfassen.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i(\omega-\omega')t} d\omega dt$$

Die Integrationen über  $t$  und  $\omega$  sind unabhängig voneinander und können deshalb vertauscht werden. Wenn wir nun noch  $\tilde{E}(\omega)$  aus dem  $t$ -Integral herausziehen, erhalten wir die Definition der  $\delta$ -Distribution (3.18).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt}_{\delta(\omega-\omega')} d\omega \quad (3.20)$$

Wenn wir diese Formel nun mit Gleichung 3.19 vereinfachen, erhalten wir wieder  $\tilde{E}(\omega')$ . Es gilt also

$$\mathfrak{FT}[\mathfrak{FT}[\tilde{E}(\omega)]](\omega') = \tilde{E}(\omega'). \quad q.e.d.$$

### 3.3. Spektrum einer monochromatischen Welle

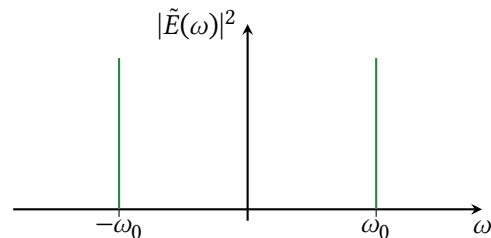
Wir gehen von einer Welle der Form

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_0 t) = \frac{E_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \quad (3.21)$$

aus, führen die Fouriertransformation durch und vereinfachen mithilfe der  $\delta$ -Distribution.

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\omega) &= \frac{E_0}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega_0)t} dt \right) \\ &= \pi E_0 (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Das Spektrum einer monochromatischen Welle besteht also aus zwei Frequenzen bei  $+\omega_0$  und  $-\omega_0$ .



**Abb. 3.4.:** Spektrale Intensität mit positiven und negativen Frequenzen. In Anwendungen interessieren uns üblicherweise nur die positiven Anteile.

### 3.4. Fourier Theoreme

Es gibt einige nützliche Theoreme bei der Verwendung der Fouriertransformation.

#### 3.4.1. Parseval-Theorem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{E}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.23)$$

Man kann die Energie wahlweise im Zeit- oder Frequenzraum berechnen.

**3.4.2.****Ähnlichkeitssatz**

$$\mathfrak{FT} \left[ E\left(\frac{t}{\alpha}\right) \right] = |\alpha| \tilde{E}(\alpha\omega) \quad (3.24)$$

Dieser Satz besagt, dass kleine Strukturen in einem Raum nach der Fouriertransformation (man sagt auch im *reziproken Raum*) große Strukturen ergeben und umgekehrt.

Wir haben das bereits oben bei der monochromatischen Welle gesehen, welche in der Zeit unendlich weit ausgedehnt ist, aber im Frequenzraum nur zwei unendlich feine Peaks enthält. Kurze Signale in der Zeit haben also immer ein breites Spektrum, während ein schmales Spektrum nur längere zeitliche Signale zulässt.

**3.4.3.****Verschiebungssatz**

$$\begin{aligned} \mathfrak{FT} [E(t - t_0)] &= e^{-i\omega t_0} \tilde{E}(\omega) \\ &= e^{-i\omega t_0} \mathfrak{FT} [E(t)] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Verschiebungen in der Zeit um  $t_0$  entsprechen einer linearen spektralen Phase von  $t_0\omega$ .

**3.4.4.****Ableitung**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{i\omega \tilde{E}(\omega)}_{\mathfrak{FT} \text{ der Ableitung}} e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (3.26)$$

Die Zeitableitung im Zeitraum entspricht einem Faktor  $i\omega$  im Frequenzraum. Äquivalent ergibt eine Integration im Zeitraum einen Faktor von  $\frac{1}{i\omega}$  im Frequenzraum.

**3.4.5.****Faltungssatz**

Wir definieren die *Faltung* durch

$$(f \otimes g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t') g(t - t') dt' . \quad (3.27)$$

Für die Fouriertransformation einer Faltung gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{FT} [f(t) \otimes g(t)] &= \mathfrak{FT} [f(t)] \mathfrak{FT} [g(t)] \\ &= \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega) . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die Faltung im Zeitraum ist identisch zum Produkt der Funktionen im Fourierraum (und umgekehrt). Dieser Zusammenhang wird z. B. bei der Beugung am Doppelpalt und in der Fourieroptik äußerst nützlich sein.

**3.5.****Gaußsches Wellenpaket**

Ein Gaußsches Wellenpaket (siehe Abbildung 3.5) wird folgendermaßen beschrieben:

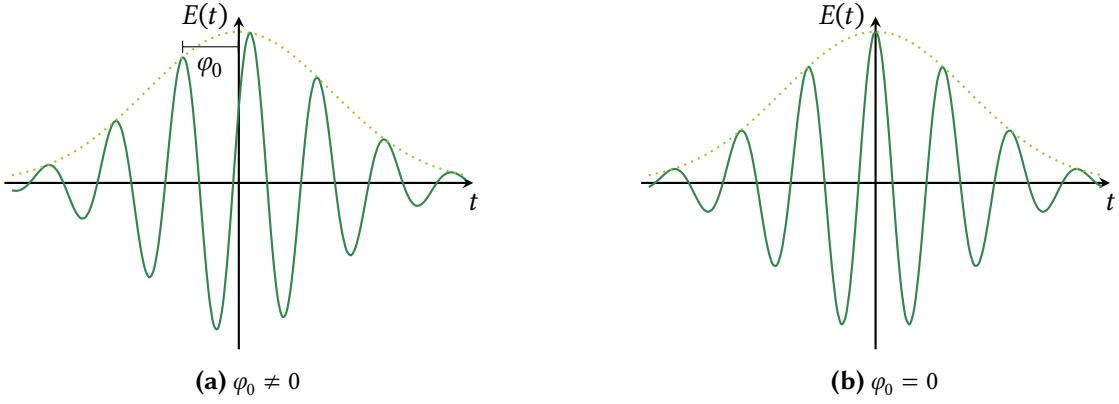
$$E_c(t) = E_0 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 + i(\omega_0 t + \varphi_0)} \quad (3.29)$$

Der Realteil ist dann

$$\begin{aligned} \Re [E_c(t)] &= \frac{E_0}{2} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2} (e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-i(\omega_0 t + \varphi_0)}) \\ &= E_0 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Wir wollen nun das Spektrum eines Gaußschen Wellenpakets bestimmen und führen deshalb die Fourier-

### 3. Überlagerung von Wellen – Fourieranalyse



**Abb. 3.5.:** Darstellung zum Gaußschen Wellenpaket.

transformation durch.

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_0}{2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\tau})^2} \cdot (e^{i((\omega_0 - \omega)t + \varphi_0)} \\ &\quad + e^{-i((\omega_0 + \omega)t + \varphi_0)}) dt \\ &= \frac{E_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\tau})^2} e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt e^{i\varphi_0} \\ &\quad + \frac{E_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\tau})^2} e^{-i(\omega + \omega_0)t} dt e^{-i\varphi_0} \\ &= \frac{E_0}{2} \mathfrak{FT} \left[ e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\tau})^2} \right] (\omega - \omega_0) e^{i\varphi_0} \\ &\quad + \frac{E_0}{2} \mathfrak{FT} \left[ e^{-\frac{1}{2}(\frac{t}{\tau})^2} \right] (\omega + \omega_0) e^{-i\varphi_0}\end{aligned}$$

Da wir ein reelles Signal fouriertransformiert haben, erhalten wir wieder, wie bei der monochromatischen Welle, ein symmetrisches Spektrum. Außerdem sehen wir, dass die Fouriertransformierte des Gaußschen Wellenpakets, die um die Trägerfrequenz  $\omega_0$  verschobene Transformierte der Gaußfunktion ist.

Die Fouriertransformation der Gaußfunktion mit Breite  $\tau$  ist wieder eine Gaußfunktion mit Breite  $1/\tau$  (siehe [Abschnitt A.1](#) auf S. 179). Damit erhalten wir

für die gesamte Frequenzdarstellung:

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi\tau} E_0}{2} \left( e^{-\frac{1}{2}\tau^2(\omega - \omega_0)^2 + i\varphi_0} + e^{-\frac{1}{2}\tau^2(\omega + \omega_0)^2 - i\varphi_0} \right). \quad (3.31)$$

Meist betrachtet man die volle Halbwertsbreite (FWHM) der Intensität  $\Delta t_{\text{FWHM}}$ , welche proportional zum Quadrat des elektrischen Feldes ist. Sie ist durch

$$\exp\left(-\frac{(\Delta t_{\text{FWHM}}/2)^2}{\tau^2}\right) = \frac{1}{2}$$

definiert. Für den Zeitbereich und das Spektrum ist sie durch

$$\begin{aligned}\Delta t_{\text{FWHM}} &= 2\tau \sqrt{\ln(2)} \\ \Delta \omega_{\text{FWHM}} &= \frac{2}{\tau} \sqrt{\ln(2)}\end{aligned} \quad (3.32)$$

mit der *Gaußschen Breite*  $\tau$  verknüpft.

Für das *Bandbreitenprodukt* der Gaußschen Breiten  $\tau$  im Zeitbereich und  $1/\tau$  im Frequenzbereich gilt

$$\tau \cdot \frac{1}{\tau} = 1.$$

Verwenden wir die FWHM so erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta t_{\text{FWHM}} \cdot \Delta \omega_{\text{FWHM}} &= 4 \ln(2) \approx 2.772 \dots \\ \Delta t_{\text{FWHM}} \cdot \Delta \nu_{\text{FWHM}} &= \frac{4 \ln(2)}{2\pi} \approx 0.441 \dots .\end{aligned} \quad (3.33)$$

Wir sehen hier direkt eine Konsequenz des oben besprochenen Ähnlichkeitssatzes. Die Breiten im Zeit und Fourieraum sind zueinander invers proportional.

## 3.6. Dispersion

Einer der wichtigsten Aspekte bei der Beschreibung von Wellenphänomenen ist die Dispersion. Darunter versteht man die Tatsache, dass die Phasengeschwindigkeit von Wellen abhängig von ihrer Frequenz sein kann. Bei Licht tritt dies bei der Ausbreitung durch Medien auf, da der Brechungsindex meist abhängig von der Frequenz ist. Da komplexere zeitliche Signale immer aus unterschiedlichen Frequenzen bestehen heißt das, dass sie sich bei der Ausbreitung unter Dispersion verändern.

Um die Lichtausbreitung in dispersiven Medien zu berechnen, gehen wir wie folgt vor:

1. Wir führen zunächst die Fouriertransformation durch.
2. Anschließend betrachten wir die Propagation jeder einzelnen Welle mit ihrer Frequenz und Geschwindigkeit.
3. Schließlich bestimmen wir die inverse Fouriertransformation.

### 3.6.1. Gruppengeschwindigkeit

Eine wichtige Konsequenz der Dispersion ist, dass Phasen- und Gruppengeschwindigkeit nicht mehr gleich sind. Das heißt, dass sich beispielsweise die Einhüllende eines Gaußschen Pulses nicht mit derselben Geschwindigkeit wie die Trägerwelle ausbreitet.

Wir wollen im Folgenden eine Formel für die Gruppengeschwindigkeit herleiten. Wir betrachten hierfür einen Wellenzug  $E(t)$ , welcher aus einer Trägerwelle mit Frequenz  $\omega_0$  und einer beliebigen Einhüllenden besteht.

Für die Phasengeschwindigkeit jeder Frequenzkomponente  $\omega$  gilt

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{n(\omega)} = \frac{\omega}{k(\omega)}. \quad (3.34)$$

Wir nutzen nun die Taylorentwicklung um die Trägerfrequenz  $\omega_0$  und schreiben mit  $\Omega = \omega - \omega_0$ :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \Omega \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0} + \frac{1}{2} \Omega^2 \left( \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right)_{\omega_0} + \dots \quad (3.35)$$

Wir berechnen nun die Propagation über die Strecken  $x$  wie oben besprochen.

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t - ik(\omega)x} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{e^{i\omega_0 t - ik_0 x}}_{\text{Trägerwelle}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\tilde{E}(\omega_0 + \Omega) e^{i\Omega(t - xk' - \frac{1}{2}x\Omega k'' + \dots)}}_{\text{Einhüllende}} d\Omega \end{aligned}$$

Für die Phasengeschwindigkeit der Trägerwelle folgt dann

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{c}{n(\omega_0)}. \quad (3.36)$$

Wir vernachlässigen nun die höheren Ordnungen der Dispersion von  $k$ , setzen also  $k' \neq 0$  aber  $k'', k''' \dots = 0$ , und erhalten so die Einhüllende

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega_0 + \Omega) e^{i\Omega(t - xk')} d\Omega. \quad (3.37)$$

Um die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Einhüllenden zu bestimmen, verwenden wir wieder die Bedingung, dass die Phase  $\Omega(t - xk')$  konstant bleiben muss. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Omega(t - x(t)k') &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Omega(1 - \dot{x}(t)k') &= 0 \\ \dot{x}(t) &= \frac{1}{k'} \\ &= \frac{1}{\left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\omega_0}} \\ &= \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{\omega_0}. \end{aligned}$$

Die Gruppengeschwindigkeit der Einhüllenden ist also gegeben durch:

### 3. Überlagerung von Wellen – Fourieranalyse

$$v_{\text{gr}} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{\omega_0} \quad (3.38)$$

Diese Formel gilt allgemein für beliebige Wellenphänomene. In der Optik beschäftigen wir uns jedoch meist mit der Dispersion, welche durch die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindexes zustande kommt. In diesem Fall gilt folgender Zusammenhang

$$\frac{1}{v_{\text{gr}}} = \frac{1}{v_{\text{ph}}} \left( 1 - \frac{\lambda}{n} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right). \quad (3.39)$$

Ohne Dispersion, also für  $\partial n / \partial \lambda = 0$ , geht dies über zu  $v_{\text{ph}} = v_{\text{gr}}$ .

Man unterscheidet zwei Fälle je nachdem, ob Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}} = \omega_0/k_0$  oder Gruppengeschwindigkeit  $v_{\text{gr}} = (\partial \omega / \partial k)_{\omega_0}$  größer ist.

1.  $v_{\text{ph}} > v_{\text{gr}}$ : Dieser Fall wird *normale Dispersion* genannt. In den meisten Materialien liegt dieser Fall vor.
2.  $v_{\text{gr}} > v_{\text{ph}}$ : Diesen Fall nennt man *anomale Dispersion*

Gruppengeschwindigkeit  $v_{\text{gr}} = (\partial \omega / \partial k)_{\omega_0}$ . Die zweite Ableitung von  $k$  verformt die Einhüllende gemäß

$$\tau(x) = \tau_0 \sqrt{1 + \left( \frac{2xk''}{\tau_0^2} \right)^2}, \quad (3.41)$$

wobei  $\tau_0$  die anfängliche Pulslänge ist. Wir bezeichnen diese zweite Ableitung als *Gruppengeschwindigkeitsdispersion* (group velocity dispersion, GVD). Kurze Lichtpulse mit breitem Spektrum laufen in dispersiven Medien (auch in Luft) schnell auseinander. In nichtdispersiven Medien (Vakuum) gilt  $v_{\text{gr}} = v_{\text{ph}}$ .

Betrachten wir Abbildung 3.7, so können wir sehen, dass bei Propagationen über längere Strecken und bei sehr kurzen Pulsen auch die höheren Dispersionsordnungen, welche wir hier nicht behandelt haben, relevant werden. Diese führen dazu, dass sich nicht nur die Länge der Einhüllenden ändert, sondern auch ihre Form. Außerdem ist die Frequenz nicht mehr konstant über die Länge des Pulses, was als *Chirp* bezeichnet wird.

#### 3.6.2.

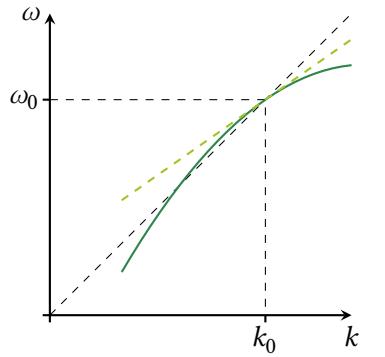
#### *Höhere Dispersionsordnungen*

Wenn wir nur kurze Propagationen durch disperse Medien betrachten und wenn das Spektrum nicht sehr breit ist, können wir wie oben die höheren Komponenten der Taylorentwicklung von  $k$  vernachlässigen. Sind diese Bedingungen nicht mehr erfüllt, können wir dies nicht mehr tun, da sich nun auch die Form unserer Einhüllenden verändert.

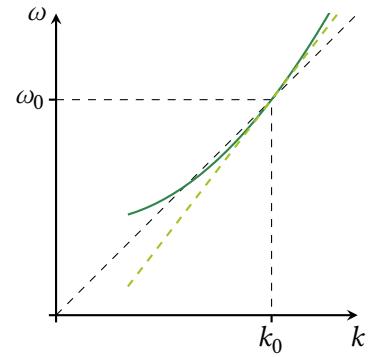
Wir wollen am Beispiel eines Gaußschen Wellenpaketes betrachten, welchen Effekt die zweite Ableitung von  $k$  auf dieses Wellenpaket hat. Wir betrachten wieder ein Wellenpaket der Form

$$E_c(t) = E_0 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t}{\tau} \right)^2 + i\omega_0 t}. \quad (3.40)$$

Die Trägerwelle bewegt sich wie gehabt mit der Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}}$  und die Einhüllende mit der

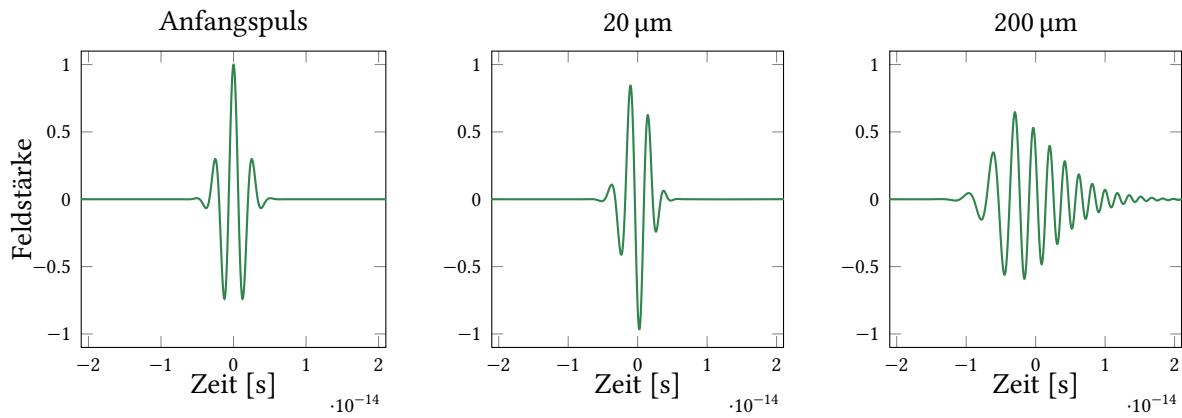


(a) Normale Dispersion  $v_{\text{ph}} > v_{\text{gr}}$

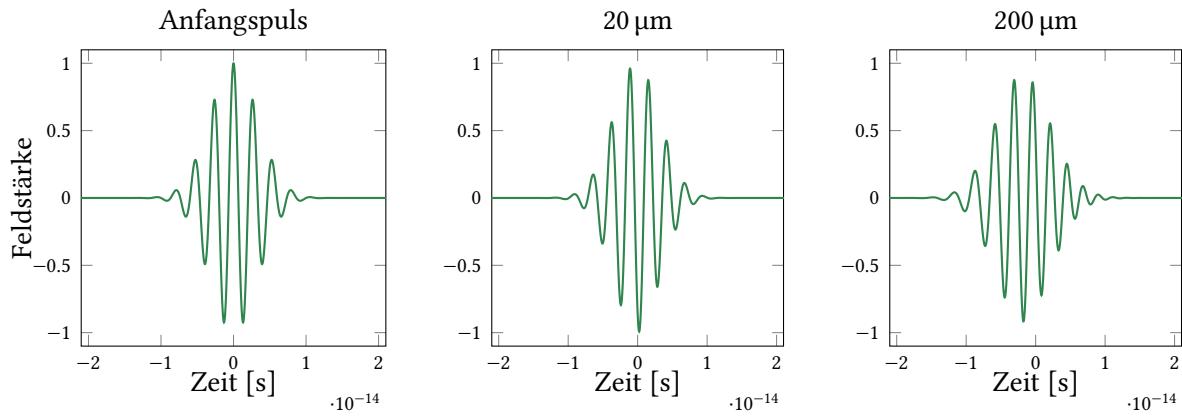


(b) Anomale Dispersion  $v_{\text{gr}} > v_{\text{ph}}$

**Abb. 3.6.:** Darstellung zweier Dispersionsrelationen mit Tangenten ( $v_{\text{gr}}$ ) in hellgrün.



(a) Ein anfänglich kurzer Laserpuls und seine Form nach 20  $\mu\text{m}$  und 200  $\mu\text{m}$  Quarzglas.



(b) Ein anfänglich längerer Laserpuls und seine Form nach 20  $\mu\text{m}$  und 200  $\mu\text{m}$  Quarzglas.

**Abb. 3.7.:** Das Verhalten von zwei anfangs unterschiedlich langen Pulsen bei der Propagation durch ein dispersives Medium.

## Zusammenfassung

**Schwebung** Überlagerung zweier Wellen mit Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  ergibt Welle mit mittlerer Frequenz  $\bar{\omega}$ , welche mit der halben Differenzfrequenz  $\omega_m = 1/2(\omega_1 - \omega_2)$  moduliert wird. Intensität ist mit der Differenzfrequenz moduliert (Schwiegungsfrequenz).

$$E_S(t, x) \propto \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \cos(k_m x - \omega_m t)$$

**Fourierreihe** wird zur Beschreibung von periodischen Funktionen verwendet.

$$E(t) = \sum_m a_m e^{im\omega_0 t} \quad \text{mit} \quad a_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t) e^{-im\omega_0 t} dt$$

Spektrum besteht aus diskreten Frequenzen mit konstantem Abstand:

$$\text{Periode } T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Leftrightarrow \text{Spektrum } \omega_m = m \cdot \omega_0$$

**Fouriertransformation** wechselt zwischen Frequenz- und Zeitdarstellung. Beide Darstellungen enthalten dieselbe Information.

$$\tilde{E}(\omega) = \mathfrak{FT}[E(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt \quad E(t) = \mathfrak{FT}[\tilde{E}(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

**Gaußsches Wellenpaket** wird zur Beschreibung von Laserpulsen verwendet.

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + i(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

Spektrum eines Gaußschen Wellenpakets ist wieder gaußförmig.

$$\tilde{E}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}E_0}{2} e^{-\frac{1}{2}\tau^2(\omega - \omega_0)^2}$$

**Gruppengeschwindigkeit** gibt Ausbreitungsgeschwindigkeit der Einhüllenden an und unterscheidet sich in dispersionsen Medien von der Phasengeschwindigkeit.

$$v_{\text{gr}} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{\omega_0} \quad \text{mit zentraler Frequenz } \omega_0$$

**Dispersion** tritt auf, wenn die Phasengeschwindigkeit frequenzabhängig ist (z. B. wegen des Brechungsindex). Man unterscheidet:

**Normale Dispersion**

**Anomale Dispersion**

- $v_{\text{ph}} > v_{\text{gr}}$
- $v_{\text{ph}} < v_{\text{gr}}$
- "rot schneller als blau"
- "blau schneller als rot"

**Höhere Dispersionsordnungen** werden bei kurzen Pulsen und dicken Medien relevant und verändern die Form der Pulse. Zweite Ordnung (GVD) verlängert Puls. Nicht konstante Frequenz während eines Pulses wird als Chirp bezeichnet.

## 4.

# KOHÄRENZ - INTERFERENZFÄHIGKEIT

Am Anfang des vorherigen Kapitels hatten wir gesehen, dass der Phasenunterschied zwischen zwei sich überlagernden Wellen darüber entscheidet, ob wir ein Maximum oder ein Minimum sehen. Wir sind dabei stillschweigend davon ausgegangen, dass dieser Phasenunterschied wohldefiniert ist. Würde sich die Phase einer der beiden Wellen zufällig ändern, so könnten wir kein Interferenzmuster mehr erkennen. Licht mit zufälliger Phase nennt man *inkohärentes Licht*. Laser, welche wir bei den Experimenten verwendet hatten, sind weitestgehend kohärent.

Wir wollen uns in diesem Kapitel etwas genauer mit dem Thema der Kohärenz beschäftigen und uns überlegen wann wir Interferenz beobachten können.

## 4.1. Michelson-Interferometer

Schon zur Bestimmung des Brechungsindexes von Luft hatten wir ein Michelson-Interferometer verwendet. Wir werden es jetzt heranziehen, um die Definition des *Interferenzkontrastes* zu motivieren.

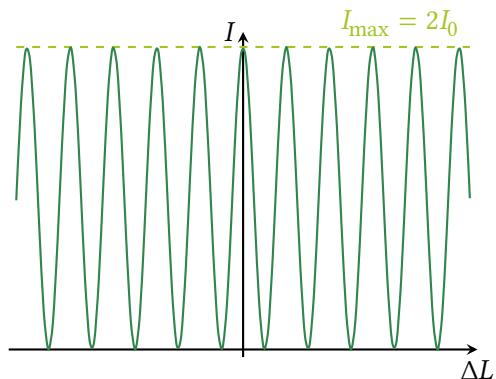
Das Feld am Ausgang des Interferometers ist durch die Summe der beiden reflektierten Wellen gegeben. Wir betrachten die Phasen  $i\omega t - ikx$  der Wellen am Ort des Detektors. Die Zeit  $t$  ist bei beiden Wellen gleich, weshalb sie sich nur in der unterschiedlichen Propagationslänge  $x$  unterscheiden können. Diese können wir wiederum aus der gemeinsamen Länge  $L$  und den

jeweiligen Längen der Arme  $L_1$  und  $L_2$  berechnen.

$$\begin{aligned} E(L, L_1, L_2, t) &= E_0 (e^{i\omega t - ikL_1} + e^{i\omega t - ikL_2}) e^{-ikL} \\ &= E_0 (1 + e^{-ik(L_2 - L_1)}) e^{-ik(L+L_1)+i\omega t} \end{aligned}$$

Wir definieren nun  $\Delta L = L_2 - L_1$  und erhalten für die Intensität auf dem Detektor

$$\begin{aligned} I &\propto |E|^2 = E \cdot E^* \\ &= E_0^2 (1 + e^{-ik\Delta L}) (1 + e^{ik\Delta L}) \\ &= 2E_0^2 + 2E_0^2 \Re(e^{-ik\Delta L}) \\ &= 2E_0^2 + 2E_0^2 \cos(k\Delta L) \\ \Rightarrow I &= I_0 (1 + \cos(k\Delta L)) \end{aligned} \tag{4.1}$$



**Abb. 4.1.:** Verteilung der Intensität auf dem Detektor in Abhängigkeit von  $\Delta L$

#### 4. Kohärenz - Interferenzfähigkeit

Mit der maximalen Intensität  $I_{\max} = 2I_0$  (Abbildung 4.1) und der minimalen Intensität  $I_{\min}$  können wir den *Kontrast* definieren

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \in [0, 1] \quad (4.2)$$

Im Fall des idealen (kohärenten) Michelson-Interferometers erhalten wir einen Kontrast von  $V = 1$ . Im Allgemeinen gilt:  $V \leq 1$ .

## 4.2. Zeitliche Kohärenz

Inkohärenz entsteht durch eine fluktuierende Phase  $\varphi(t)$ , hervorgerufen z. B. durch viele Emittoren oder stoßende Atome. Wie wirkt sich das auf unser Interferenzbild aus? Ergänzen wir hierfür diese Phase in der Summe der elektrischen Felder.

$$E(t) = (e^{-ikL_1+i\varphi(t)} + e^{-ikL_2+i\varphi(t-\tau)}) e^{i\omega t - ikL}$$

$$\tau = \frac{\Delta L}{c}$$

Die Zeit  $\tau$  bezeichnen wir als *Laufzeitunterschied*. Die Phase  $\varphi(t)$  ist eine uns meist nicht explizit bekannte Zufallsvariable, welche beschreibt, dass sich die Phase des Lichts nach einer gewissen Zeit für uns nicht vorhersehbar geändert hat.

Bei unserer Betrachtung gehen wir davon aus, dass die gesamte Inkohärenz schon in dem ausgesandten Licht enthalten ist und nicht erst während der Propagation z. B. durch die Interaktion mit einem Medium erzeugt wird. Für die Interferenzintensität erhalten wir nun einen etwas komplexeren Ausdruck

$$I = I_0 (1 + \cos(k \Delta L + \varphi(t) - \varphi(t - \tau))) . \quad (4.3)$$

Die schnellen Fluktuationen aufgrund der Inkohärenz können wir mit unserem Detektor nicht auflösen. Das beobachtete Bild ist also das zeitliche Mittel vorheriger Formel.

$$\langle I \rangle = I_0 (1 + \langle \cos(k \Delta L + \varphi(t) - \varphi(t - \tau)) \rangle) \quad (4.4)$$

Für große Laufzeitunterschiede sind  $\varphi(t)$  und  $\varphi(t - \tau)$  unkorreliert, sodass die Mittlung des Kosinus 0 ergibt.

Das Interferenzmuster verschwindet also für große Laufzeitunterschiede.

Zeitliche Kohärenz bezeichnet also eine nicht-verschwindende Korrelation zwischen den Phasen einer Lichtquelle zu verschiedenen Zeitpunkten.

### 4.2.1. Kohärenzzeit und -länge

Den maximalen Laufzeitunterschied  $\tau_c$ , nach dem keine Interferenz mehr sichtbar ist, bezeichnen wir als *Kohärenzzeit*. Ebenso können wir auch eine *Kohärenzlänge*<sup>1</sup>  $L_c$  definieren. Beide Größen sind über

$$L_c = c \tau_c \quad (4.5)$$

miteinander verknüpft.

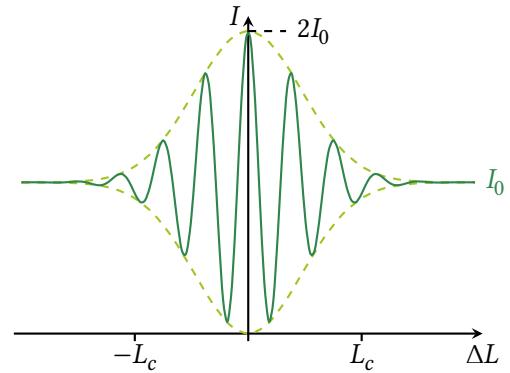


Abb. 4.2.: Interferenzbild für eine Quelle mit begrenzter Kohärenzlänge  $L_c$ .

Für Lichtquellen mit Gaußförmigen Spektrum gilt als Faustformel für die Kohärenzzeit

$$\frac{1}{\tau_c} \approx \Delta v . \quad (4.6)$$

Vergleichen wir die Abschätzung mithilfe dieser Formel mit den Ergebnissen unserer Messung mit dem Michelson-Interferometer.

<sup>1</sup>Auch, wenn der Begriff Länge es vermuten lässt, so ist die Kohärenzlänge kein Maß für die räumliche, sondern für die zeitliche Kohärenz.

	$L_c$	$\Delta\lambda$
Tageslicht	900 nm	300 nm
Glühbirne	4 μm	100 nm
Glühbirne m. Grünfilter	40 μm	6.5 nm
"bester" He-Ne-Laser	400 m	$10^{-6}$ nm

**Tab. 4.1.:** Kohärenzlängen und Bandbreiten einiger Lichtquellen.

- Für weißes Licht mit spektraler Halbwertsbreite  $\Delta\lambda \approx 200$  nm erhalten wir

$$\Delta\nu = \frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda = 240 \text{ THz}$$

$$\Rightarrow L_c = 5 \mu\text{m}$$

Gemessen haben wir einen Wert von 4.0 μm.

- Für grünes Licht mit  $\Delta\lambda = 6.5$  nm folgt  $\Delta\nu = 7.5$  THz und damit  $L_c = 40$  μm. Die Messung lieferte das Ergebnis 40 μm.

## 4.3. Räumliche Kohärenz

Wir hatten uns bis jetzt nicht damit beschäftigt, welchen Effekt eine räumlich ausgedehnte Quelle (mit unkorrelierten Emittern) auf das Auftreten von Interferenz hat. Ohne es explizit zu sagen, sind wir bis jetzt immer von Punktquellen bzw. ebenen Wellen ausgegangen. In diesem Abschnitt werden wir eine geometrische Bedingung für unser Interferometer herleiten, unter der wir Interferenzphänomene beobachten können. Wir betrachten hierfür in Abbildung 4.3 den *Youngschen Doppelspalt*.

Wir werden später sehen, dass das Auftreten von Interferenzmaxima nach einem Doppelspalt vom Gangunterschied  $\Delta g = |g_2 - g_1|$  der beiden Wege vom gemeinsamen Quellpunkt abhängt. Beträgt er ein Vielfaches einer Wellenlänge, so tritt ein Maximum auf; unterscheiden sich die optischen Wege jedoch um eine halbe Wellenlänge, so tritt ein Minimum auf.

Wenn sich in Abbildung 4.3 die beiden Gangunterschiede  $\Delta g$  und  $\Delta g'$  um  $\lambda/2$  unterscheiden, so wür-

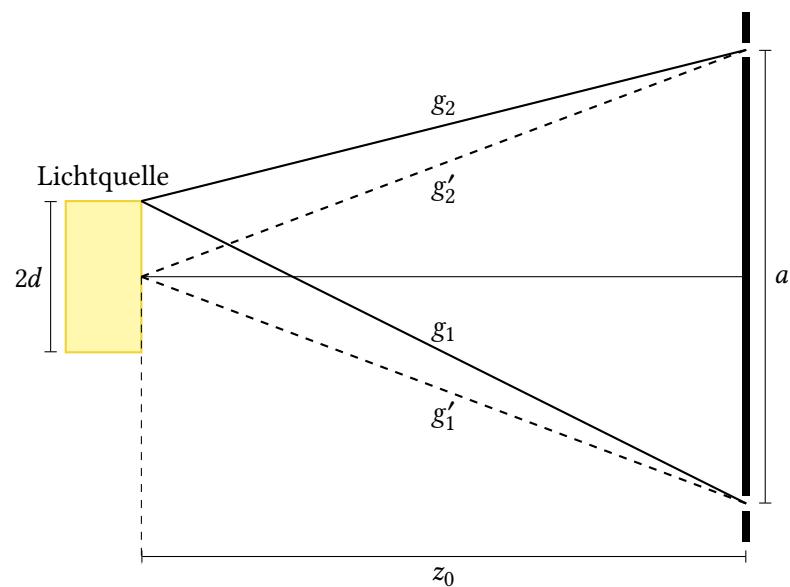
de das Interferenzbild der einen Lichtquelle ein Minimum erzeugen, wo das andere ein Maximum hätte. Überlagert man alle Interferenzbilder der einzelnen Quellen, so ist kein Interferenzbild nach dem Doppelspalt mehr zu erkennen. Wir finden also folgende Bedingung  $|\Delta g - \Delta g'| \ll \lambda/2$ . Da  $\Delta g'$  offensichtlich null ist, reduziert sich das auf folgende Bedingung, wobei wir hier immer von einer symmetrischen Positionierung der ausgedehnten Quelle ausgehen.

$$\Delta g = |g_2 - g_1| \approx \frac{ad}{z_0} \ll \frac{\lambda}{2} \quad (4.7)$$

Die Wurzeln, die bei der Berechnung der Längen von  $g_1$  und  $g_2$  auftauchen, wurden linear genähert. Es lässt sich anschaulich zusammenfassen: Eine Lichtquelle ist dann räumlich kohärent, wenn sie sich für den betrachteten Wellenlängenbereich nicht von einer Punktquelle unterscheiden lässt.

*Hintergrund:* Räumliche Kohärenz von Lichtquellen spielt auch in technischen Anwendung eine zunehmende Rolle. Bei der Bildgebung mit Röntgenstrahlung kann eine räumlich kohärente Röntgenquelle beispielsweise dabei helfen, den Kontrast einer Röntgenaufnahme zu erhöhen. Gerade in Anwendungen wie Mammographie, in denen konventionelle Röntgenaufnahmen nur niedrigen Kontrast bieten, ist das ein höchst wünschenswerter Vorteil. Beispiele für räumlich kohärente Quellen von Röntgenstrahlung sind Synchrotrons oder sogenannte microfocus X-ray tubes.

#### 4. Kohärenz - Interferenzfähigkeit



**Abb. 4.3.:** Aufbau des Youngschen Doppelspalts, auch Youngsches Interferometer genannt, mit ausgedehnter Lichtquelle

## Zusammenfassung

**Interferenzkontrast** Der Interferenzkontrast  $V$  ist definiert durch:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \in [0, 1]$$

**Kohärenzlänge** Die Strecke, die Licht während der Kohärenzzeit  $\tau_c$  zurücklegt, wird als Kohärenzlänge bezeichnet:

$$L_c = c\tau_c.$$

**Kohärenzzeit und spektrale Breite** Kohärenzzeit einer Lichtquelle mit näherungsweise gaußförmigem Spektrum:

$$\frac{1}{\tau_c} \approx \Delta\nu.$$



# 5. LICHT-MATERIE-WECHSELWIRKUNG

Wir beginnen mit ebenen Wellen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= B_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \end{aligned}$$

welche in einem verlustfreien Medium propagieren und in Phase sind. Unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \Rightarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{E} &= -i\omega \mathbf{B}, \end{aligned}$$

was zu den bereits bekannten geometrischen Relationen zwischen den Feldern führt:

$$\mathbf{k} \perp \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{B}. \quad (5.1)$$

Des Weiteren können wir auch die Amplitudenrelation  $k|\mathbf{E}| = \omega|\mathbf{B}|$  ablesen, welche mithilfe der Dispersionsrelation  $k = \omega n/c$  zu folgender wichtigen Formel wird.

$$|\mathbf{B}| = \frac{n}{c} |\mathbf{E}| \quad (5.2)$$

Wie wir bereits aus [Unterabschnitt 2.4.2](#) wissen, erhalten wir die Intensität aus dem Poyntingvektor  $\mathbf{S}$  durch zeitliche Mittelung.

$$\begin{aligned} I &= \langle |\mathbf{S}| \rangle \\ &= \epsilon_0 c^2 \langle |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| \rangle \\ &= \epsilon_0 c n \langle |\mathbf{E}|^2 \rangle \end{aligned}$$

**Achtung:** Das Bilden des Betragsquadrates kommutiert nicht mit dem Bilden des Realteils, da Erstes eine lineare Operation ist. Wir müssen deshalb zuerst den Realteil des Feldes nehmen und diesen anschließend über eine Periode mitteln, um zum richtigen Ergebnis für die Intensität zu gelangen.

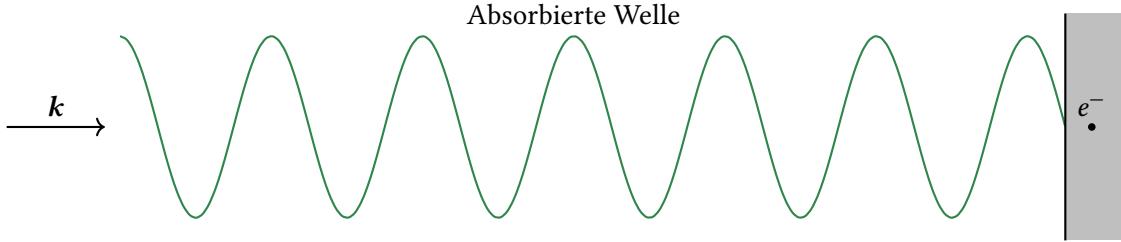
## 5.1. Impulsdichte

Neben Energie übertragen elektromagnetische Wellen auch Impuls. Wie einzelne Photonen Impuls tragen können, obwohl sie masselos sind, werden wir in einem späteren Kapitel sehen. Jetzt wollen wir uns zunächst damit beschäftigen, wie wir alleine aus der klassischen Elektrodynamik einen Impulsübertrag von Licht auf reflektierende und absorbierende Medien erhalten.

Betrachten wir hierfür in [Abbildung 5.1](#) eine absorbierte Welle: Die Elektronen im absorbierenden Medium werden aufgrund des elektrischen Feldes des absorbierten Lichts eine transversale Beschleunigung erfahren. Die benötigte Leistung  $P$  ist durch das Produkt der Kraft  $q \cdot \mathbf{E}$  auf die Elektronen und deren Geschwindigkeit  $v$  gegeben:  $P = q \cdot \mathbf{E} \cdot v$ , wobei  $q$  die Ladung ist. Da die Ladungsträger nun eine von Null verschiedene Geschwindigkeit haben, spüren sie aufgrund der *Lorentzkraft* auch das magnetische Feld des Lichts und werden durch diese nun in longitudinale Richtung beschleunigt.

$$F_L = q v |\mathbf{B}| = q v \frac{|\mathbf{E}|}{c} = \frac{P}{c}$$

## 5. Licht-Materie-Wechselwirkung



**Abb. 5.1.:** Licht beschleunigt Ladungen des Absorbers und somit auch den Absorber selbst.

Im nicht relativistischen Fall  $v \ll c$  gilt  $qE \gg F_L$ , weshalb wir das magnetische Feld meist vernachlässigen. Erst ab  $I \geq 10^{18} \text{ W cm}^{-2}$  können wir dies nicht mehr tun.

Wir können nun noch die Intensität  $I$  als Leistung pro Fläche ausdrücken und erhalten daraus den Strahlungsdruck  $p_S$  für vollständige *Absorption*:

$$p_S = \frac{F_L}{A} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{P}{cA}$$

$$p_S = \frac{I}{c} \quad (5.3)$$

**Achtung:** Bei vollständiger *Reflexion* wird der doppelte Impuls übertragen. Es gilt also  $p_S = 2I/c$ .

	$I[\text{W cm}^{-2}]$	$p_S [\text{N m}^{-2}]$
Sonne	0.14	$4.7 \times 10^{-6}$
Taschenlampe	$25.4 \times 10^{-3}$	$850 \times 10^{-9}$
PW-Laser	$6 \times 10^{19}$	$4 \times 10^{15}$

**Tab. 5.1.:** Intensitäten und Strahlungsdrücke einiger Lichtquellen. Zum Vergleich Luftdruck:  $10^5 \text{ N m}^{-2}$ .

Wir betrachten das Experiment der Lichtmühle und stellen fest, dass sie sich nicht in die aufgrund des Strahlungsdrucks erwartete Richtung dreht. Warum ist das so?

**Hinweis:** Restgas, Absorption und Erwärmung

## 5.2. Wechselwirkung mit nichtleitenden Materialien

Wir wollen herausfinden, wie sich die Präsenz nichtleitender Medien auf die Propagation elektromagnetischer Wellen auswirkt. Wir beginnen mit den Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\end{aligned}$$

mit der elektrischen Flussdichte  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  und der Polarisation  $\mathbf{P}$ . Für nichtleitende Materialien gilt  $\mathbf{j} = 0$ . Wir müssen nun wieder die Wellengleichung herleiten und gehen dabei wie in [Unterabschnitt 2.2.1](#) vor, indem wir die Rotation der ersten Gleichung bilden.

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (5.4)$$

Dies ist eine Wellengleichung mit der Polarisation als Quellterm. Ist die elektrische Feldstärke nicht zu hoch, so gilt  $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$ , was die Definition  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$  mit der Suszeptibilität  $\chi$  motiviert. Damit erhalten wir die Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

## 5.2. Wechselwirkung mit nichtleitenden Materialien

mit dem Brechungsindex

$$n^2 = 1 + \chi. \quad (5.5)$$

Die Polarisierbarkeit von Medien ändert also die Phasengeschwindigkeit von Wellen, welche sich in ihnen ausbreiten. Es kommt zur Retardierung und Phasenverschiebung zwischen  $E$  und  $P$ . Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist eine komplexwertige Definition von  $\chi$  und  $n$  hilfreich:

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_R + i\chi_I & n &= n_R + in_I \\ \chi &= n^2 - 1 = n_R^2 - n_I^2 - 1 + 2in_R n_I \end{aligned}$$

Für Luft, Gase und Glas gilt im sichtbaren Spektralbereich  $n_R \approx 1$  und  $n_I \ll 1$ . In diesem Fall sind folgende Näherungen sinnvoll:

$$\begin{aligned} \chi_R &= n_R^2 - n_I^2 - 1 \approx n_R^2 - 1 \\ &= (n_R + 1)(n_R - 1) \approx 2(n_R - 1) \\ \Rightarrow n_R &\approx 1 + \frac{1}{2}\chi_R \\ \chi_I &= 2n_R n_I \approx 2n_I \Rightarrow n_I \approx \frac{1}{2}\chi_I \end{aligned}$$

### 5.2.1. Absorption

Nun betrachten wir eine ebene Welle mit komplexem Brechungsindex  $n$ .

$$\begin{aligned} E(x, t) &= E_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ &= E_0 e^{i(\frac{\omega n}{c}x - \omega t)}. \end{aligned}$$

Schreiben wir den Brechungsindex nun mit Real- und Imaginärteil, bekommen wir

$$E(x, t) = E_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha x} e^{i(\frac{\omega n_R}{c}x - \omega t)},$$

wobei der Term  $-\frac{1}{2}\alpha x$  vom Imaginärteil  $n_I$  stammt. Ein komplexer Brechungsindex beschreibt also ein absorbierendes Medium. Der positive Parameter  $\alpha$  wird *Absorptionskoeffizient* genannt.

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \chi_I \quad \chi_I > 0$$

Wir können den Absorptionskoeffizient auch durch die Teilchendichte  $N$  (Einheit [ $m^{-3}$ ]) unseres absorbierenden Stoffes beschreiben. Wir stellen uns hierbei vereinfacht vor, dass Licht absorbiert wird, wenn es ein Teilchen trifft. Die effektive Teilchengröße  $\sigma$  (Einheit [ $m^2$ ]) wird *Wirkungsquerschnitt*<sup>1</sup> genannt.

Wir erhalten damit das *Lambert-Beersche Absorptionsgesetz*:

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x} = I_0 e^{-N\sigma x} \quad (5.6)$$

In technischen Anwendungen findet man auch häufig folgende Schreibweise:

$$I(x) = I_0 10^{-10\beta x} \text{ mit } [\beta] = \text{dB km}^{-1}$$

Die Absorption von Gasen und Gläsern lässt sich meist vernachlässigen, wenn Licht nur über kurze Strecken durch sie propagiert. Von zentraler Bedeutung ist die Absorption jedoch beispielsweise bei der Telekommunikation über Glasfaser. Auch wenn deren Absorption äußerst klein ist (üblicherweise  $\beta < 1 \text{ dB km}^{-1}$ ), muss das Licht über *lange* Strecken immer wieder verstärkt werden, um ausreichende Signalstärken zu erreichen. Auch die Wellenlängenabhängigkeit der Absorption ist bei solchen Anwendungen relevant.

Betrachten wir nun folgendes Experiment zur Absorption von Licht in einer Küvette mit Indigo.

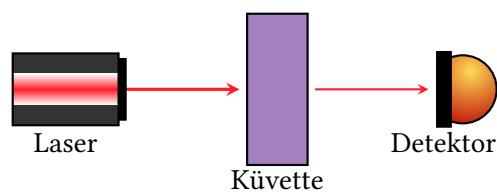


Abb. 5.2.: Absorption von Indigo

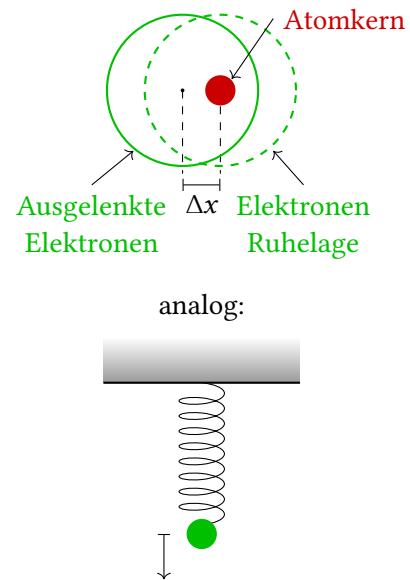
<sup>1</sup>Man sollte sich hierbei im Klaren sein, dass der Wirkungsquerschnitt nicht die reale Größe eines Teilchens ist, sondern lediglich das Streu-/Absorptionsvermögen eines Teilchens widerstellt. Der Wirkungsquerschnitt für die Absorption kann beispielsweise für verschiedene Lichtwellenlängen unterschiedlich sein, auch wenn die Größe eines Teilchens sich offensichtlich nicht ändert.

## 5. Licht-Materie-Wechselwirkung

Wir führen zwei Lichtleistungsmessungen nach der Küvette durch, wobei wir einmal durch die kurze und einmal durch die lange Seite der Küvette strahlen. Wir nehmen die Maße der Küvette mit  $50 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$  an und folgern

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{e^{-\alpha 50 \text{ mm}}}{e^{-\alpha 20 \text{ mm}}} = e^{-\alpha 30 \text{ mm}}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \ln\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \cdot \frac{1}{30 \text{ mm}} = \ln\left(\frac{4.2}{2.3}\right) \cdot \frac{1}{30 \text{ mm}} \\ &= 0.020 \text{ mm}^{-1}\end{aligned}$$



analog:

### 5.3. Suszeptibilität im einfachsten Modell

Das elektrische Feld  $E_0 e^{-i\omega t}$  bewirkt eine erzwungene Schwingung der Elektronen um ihre Ruhelage. In einem einfachen Modell können wir diese Schwingung analog zur harmonischen Schwingung eines Federpendels betrachten. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz  $F = ma$  stellen wir eine Bewegungsgleichung auf, wobei wir die Schwingung der Elektronen als einen gedämpften harmonischen Oszillatator betrachten.

$$m\ddot{x} = -eE_0 e^{-i\omega t} \underbrace{- m\omega_0^2 x}_{\text{Rückstellkraft Dämpfung}} \underbrace{- \gamma m \dot{x}}_{\text{Dämpfung}}$$

Die Parameter  $\omega_0$  und  $\gamma$  sind hierbei Materialkonstanten. Lösen wir diese Differenzialgleichung, so erhalten wir

$$x(t) = \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}.$$

Wir nutzen die Beziehung

$$\frac{\text{Polarisation}}{\text{Dipoldichte}} = \text{Dipolmoment} \cdot \text{Teilchendichte}$$

in der Form  $P(t) = (-x(t)e) N$  aus und schreiben

$$P(t) = \frac{e^2 N}{m} \underbrace{\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}}_{= \epsilon_0 \chi = \epsilon_0 (n^2 - 1)} E(t).$$

**Abb. 5.3.:** Die schwingenden Elektronen eines Atoms werden durch einen harmonischen Oszillatator genähert.

Die Suszeptibilität  $\chi$  ist hier nun also komplex und frequenzabhängig.

Aus dieser Formel lässt sich der Brechungsindex bestimmen. Für ihn gilt in linearer Näherung ( $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ):

$$\begin{aligned}n_R &\approx 1 + \frac{\chi_R}{2} = 1 + \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \\ n_I &\approx \frac{\chi_I}{2} = \frac{e^2 N}{2\epsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}.\end{aligned}$$

Teilweise findet man für  $\omega \approx \omega_0$  auch Näherungen der Form

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 - \omega^2)^2 &= ((\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega))^2 \\ &\approx 4\omega^2 (\omega_0 - \omega)^2\end{aligned}$$

Betrachten wir die Formeln für den Imaginärteil des Brechungsindex mit oben genannter Näherung um  $\omega \approx \omega_0$ , so erhalten wir die Proportionalität

$$n_I \propto \frac{1}{4(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}.$$

Diese Form wird *Lorentzprofil* genannt und ist eine charakteristische Form von Spektrallinien um die Resonanzfrequenz  $\omega_0$ , welche man häufig bei spektroskopischen Untersuchungen findet.

Der Imaginärteil des Brechungsindex ist für die Absorption von Licht verantwortlich. Die Resonanzfrequenzen sind also an starken Absorptionspeaks im transmittierten Spektrum erkennbar.

### 5.3.1. Normale und Anomale Dispersion

Bei den meisten Materialien und für nahezu alle Frequenzen gilt, dass der Realteil des Brechungsindex für größer werdende Frequenzen zunimmt. Als Faustregel gilt also: "Blau wird stärker gebrochen als Rot." bzw. "Rot ist schneller als Blau." Man spricht hier von *normaler Dispersion*.

Eine Ausnahme stellt der Bereich um die Resonanzfrequenzen dar. Wie wir in Abbildung 5.4a sehen können, fällt der Brechungsindex um  $\omega_0$  stark ab. Hier spricht man nun von *anomaler Dispersion*.

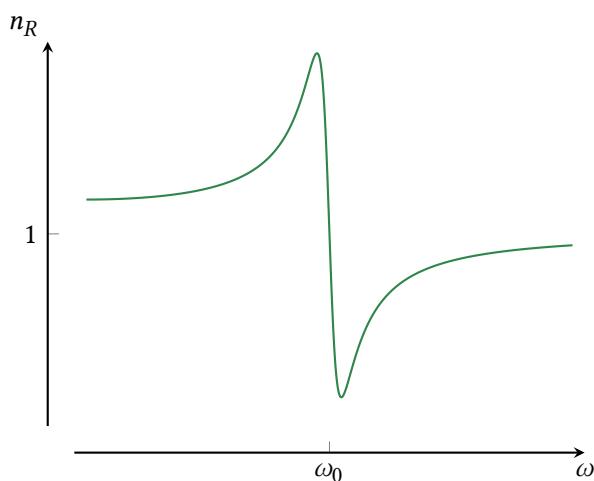
Zusammengefasst gilt folglich:

Normale Dispersion:

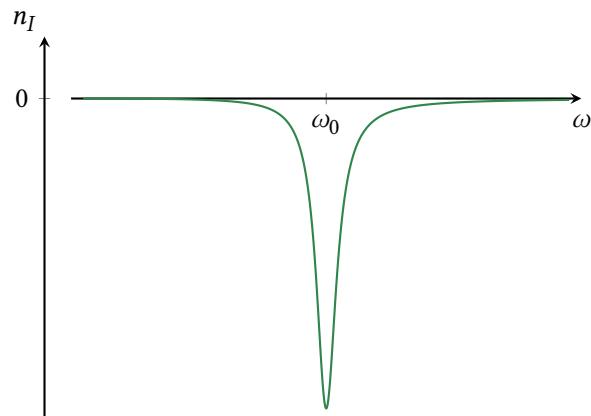
$$\frac{\partial n_R}{\partial \omega} > 0 \text{ bzw. } \frac{\partial n_R}{\partial \lambda} < 0$$

Anomale Dispersion:

$$\frac{\partial n_R}{\partial \omega} < 0 \text{ bzw. } \frac{\partial n_R}{\partial \lambda} > 0$$

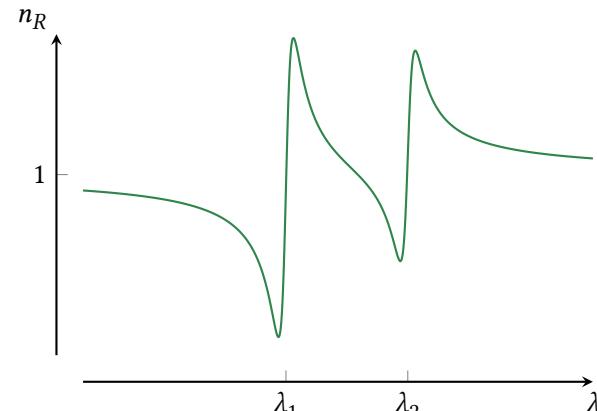


(a) Realteil des Brechungsindex



(b) Imaginärteil des Brechungsindex

**Abb. 5.4.:** Brechungsindex nach dem einfachsten Atommodell mit einer einzigen Resonanzfrequenz  $\omega_0$ .



**Abb. 5.5.:** Schematische Darstellung der markanten Spektrallinien von Natrium bei  $\lambda_1 = 589.00 \text{ nm}$  und  $\lambda_2 = 589.59 \text{ nm}$

## 5. Licht-Materie-Wechselwirkung

### 5.3.2.

#### Mehrere Resonanzen

In der Praxis treten häufig mehrere Resonanzen auf (siehe Abbildung 5.5). Meist interessiert dann der Zwischenbereich, der normale Dispersion aufweist. Für kleine Dämpfungen, also  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \gg (\gamma\omega)^2$ , können wir den Brechungsindex folgendermaßen beschreiben:

$$n^2 = 1 + \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2}$$

Dabei sind  $f_i$  Gewichtungsfaktoren mit  $\sum_j f_j = 1$ . Sie werden auch *Oszillatorstärke* genannt. In der Quantenmechanik spricht man von *Übergangswahrscheinlichkeiten*. Meist wird diese Gleichung in der Form der sogenannten *Sellmeier-Gleichung* dargestellt:

$$n^2(\lambda) = A + \sum_{j=1}^N \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - C_j}, \quad (5.7)$$

wobei man  $A$ ,  $B_j$  und  $C_j$  aus einem Fit an die experimentellen Daten erhält.

Im Sichtbaren (visible, VIS) erfüllt die Sellmeier-Gleichung für Gläser die Bedingung  $\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$ . Die meisten Gläser weisen im sichtbaren Bereich normale Dispersion auf.

### 5.4.

#### Brechungsindex von Metallen

Für die Suszeptibilität wurde bereits folgende Formel hergeleitet:

$$\chi = n^2 - 1 = \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Für gebundene Elektronen, wie wir sie bis jetzt betrachtet hatten, gilt  $\omega_0 \neq 0$ . Für freie Elektronen gilt jedoch  $\omega_0 = 0$ , da es für sie keine Rückstellkraft gibt. In diesem Fall sind Elektronendichteschwankungen, also eine Änderung von  $N$ , möglich. Aufgrund der geringen Reibung von freien Elektronen in Metallen können wir näherungsweise auch  $\gamma = 0$  annehmen. Für den Brechungsindex folgt somit

$$n^2 = 1 - \frac{e^2 N}{m \epsilon_0 \omega^2} \equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Hierbei ist  $\omega_p$  die *Plasmafrequenz*

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{m \epsilon_0}}.$$

Wir schreiben den Brechungsindex für Metalle in der Form

$$n = \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}. \quad (5.8)$$

Dieser ist folglich imaginär für  $\omega < \omega_p$  und reell im Fall  $\omega > \omega_p$ .

#### Zur Wahl des Vorzeichens

Die Wellengleichung enthält nur  $n^2$ . Wir müssen deswegen andere Bedingungen verwenden oder "raten", um das Vorzeichen festzulegen. Alle vier Möglichkeiten sind physikalisch erlaubt:

- $\omega < \omega_p$  mit + oder -
- $\omega > \omega_p$  mit + oder -

Typisch sind dabei:

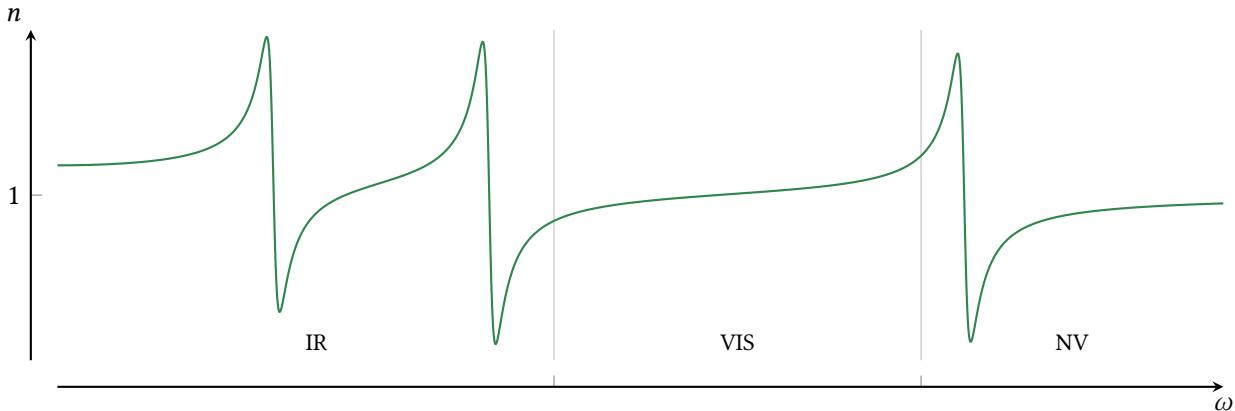
1.  $\omega < \omega_p$  und -, woraus  $n_I < 0$  und  $\alpha = -4\pi/\lambda n_I > 0$  ( $I = I_0 e^{-\alpha x}$ ) folgt.
2.  $\omega > \omega_p$  und + und somit  $n_R > 0$

#### Bedeutung der Plasmafrequenz

Bevor wir den Verlauf des metallischen Brechungsindex genauer betrachten, werden wir in diesem kurzen Einschub die physikalische Begründung für oben genannte Plasmafrequenz herleiten.

Die Ladungsdichte im Metal ist durch  $\rho = e(N^+ - N^-)$  gegeben, wobei  $N^+$  die Dichte der raumfesten Ionen und  $N^-$  wie üblich die Dichte der freien Elektronen ist. Wir erinnern uns an die Maxwellgleichung  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  und drücken außerdem die Änderung der Stromdichte durch die bewegten Elektronen aus.

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -eN \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = e^2 N \frac{\mathbf{E}}{m}$$



**Abb. 5.6.:** Schematische Darstellung des Brechungsindex für Gläser vom Infraroten bis zum nahen Ultravioletten.

Dies folgt aus  $\dot{\mathbf{v}} = -e\mathbf{E}/m$  und  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ . Außerdem gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{j} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\ \Rightarrow \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Mit diesen Ergebnissen erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} &= \frac{e^2 N}{m} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{e^2 N}{\underbrace{\epsilon_0 m}_{\omega_p^2}} \rho \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} &= -\omega_p^2 \rho\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass  $\omega_p$  die Oszillationsfrequenz der Elektronendichtheschwingung ist.

#### 5.4.1. *Dispersionsrelation*

Da, wie wir gesehen hatten,  $n$  für  $\omega < \omega_p$  imaginär ist, können Wellen mit niedrigen Frequenzen nicht im Plasma propagieren. Wie in Kapitel 6 gezeigt werden wird, führt dies zur vollständigen Reflexion der einlauenden Welle an der Grenze zum Plasma. Für  $\omega > \omega_p$  ist die Propagation der Wellen durch das Plasma hingegen möglich.

Diese Eigenschaft spielt beispielsweise bei der Reflexion von Radiowellen an der Ionosphäre eine Rolle. Normalerweise könnte ein Sender nur dann mit einem Empfänger über elektromagnetische Wellen kommunizieren, wenn diese Sichtkontakt hätten. Ist der Empfänger aufgrund der Erdkrümmung jedoch bereits unter dem Horizont, so wäre dies nicht ohne Weiteres möglich. Dieses Problem kann jedoch umgangen werden, indem der Sender sein Signal von der Ionosphäre (einer Schicht in der oberen Atmosphäre mit vielen freien Elektronen) reflektiert ( $\omega < \omega_p$ ). Umgekehrt kann man von der Erde nur mithilfe von hochfrequenter Strahlung  $\omega > \omega_p$  mit Satelliten kommunizieren, da nur sie die Ionosphäre durchdringen.

#### *Experimente zur Plasmafrequenz*

Wir betrachten das Plasma in einer Leuchtstoffröhre. Aus dem Strom folgt eine Dichte von  $N = 5 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$  und damit eine Plasmafrequenz  $\omega_p = 2\pi\nu = 2\pi \times 6.3 \text{ GHz}$ . Wir sehen, dass Strahlung der Frequenz 1 GHz nicht transmittiert wird, Strahlung der Frequenz 9 GHz dagegen schon.

Nun betrachten wir Silber mit einer Dichte von  $N = 6 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ . Hier erhalten wir  $\omega_p = 2\pi \times 2.2 \times 10^{15} \text{ Hz}$ , was  $\lambda_p = 135 \text{ nm}$  entspricht. Sichtbares Licht wird also reflektiert (> 97 %), Röntgenstrahlen dagegen werden transmittiert.

## 5. Licht-Materie-Wechselwirkung

Für den Imaginärteil des Brechungsindex in Silber gilt

$$\begin{aligned} n_I &= \Im \left( -\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \right) \\ &= -\Im \left( i \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} \right) = -3.53 . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den ortsabhängigen Teil der Welle

$$\begin{aligned} e^{ikx} &= e^{i \frac{n\omega}{c} x} \quad (n_R=0) \\ &= e^{-\frac{n_I\omega}{c} x} \\ &= e^{-\frac{2\pi n_I}{\lambda} x} = e^{-\frac{\alpha}{2} x} . \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine Dämpfung des Feldes beim Eindringen in das Medium. Die räumliche Dämpfung ist nicht gleich der Absorption.

Die Abschwächung auf  $e^{-1}$  erfolgt bei einer Wellenlänge  $\lambda = 500 \text{ nm}$  nach einer Tiefe  $x = 2/\alpha = 11.3 \text{ nm}$ . Man spricht daher von einer Eindringtiefe (*skin depth*) von  $x = 11.3 \text{ nm}$ .

## Zusammenfassung

### Strahlungsdruck

Strahlungsdruck bei vollständiger Absorption des Lichts:

$$p_S = \frac{I}{c}$$

Strahlungsdruck bei vollständiger Reflexion des Lichts:

$$p_S = 2 \frac{I}{c}$$

Hintergrund: Bei der Reflexion von Licht kehrt sich der Impuls  $\mathbf{p}$  der Photonen um:  $\mathbf{p}_{\text{out}} = -\mathbf{p}_{\text{in}}$ . Damit der Impuls insgesamt erhalten bleibt, müssen  $2\mathbf{p}_{\text{in}}$  an Impuls übertragen werden. Im Vergleich dazu geht bei der Absorption von Licht der Impuls des einlaufenden Photons einfach an den Absorber über. Es wird also nur  $1\mathbf{p}_{\text{in}}$  übertragen.

### Brechungsindex und Suszeptibilität

Die Suszeptibilität  $\chi$  gibt an, wie sehr ein externes elektrisches Feld ein Material polarisiert:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}.$$

Die Suszeptibilität hängt über folgende Identität mit dem Brechungsindex  $n$  zusammen:

$$n^2 = 1 + \chi.$$

Unter der Annahme, dass  $\chi \ll 1$  wird häufig die lineare Näherung  $n \approx 1 + \frac{\chi}{2}$  verwendet.

### Lambert-Beersches Absorptionsgesetz

Das Lambert-Beersche Gesetz gibt an, wie sich die Intensität von elektromagnetischer Strahlung als Funktion der Eindringtiefe in einem absorbierenden Material verhält:

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x} = I_0 e^{-\sigma}$$

Man bezeichnet  $\alpha$  als Absorptionskoeffizient und  $\sigma$  als Wirkungsquerschnitt.

### Absorptionskoeffizient und Imaginärteil des Brechungsindex

Der Absorptionskoeffizient hängt mit dem Imaginärteil der Suszeptibilität  $\text{Im}(\chi) = \chi_I$  und dem Imaginärteil des Brechungsindex  $\text{Im}(n) = n_I$  zusammen:

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \chi_I \approx \frac{2\omega}{c} n_I$$

Hier wurde die Näherung für kleine  $\chi$ ,  $n \approx 1 + \frac{\chi}{2}$ , verwendet.

### Normale und Anomale Dispersion

Normale Dispersion:

$$\frac{\partial n_R}{\partial \omega} > 0 \text{ bzw. } \frac{\partial n_R}{\partial \lambda} < 0$$

Anomale Dispersion:

$$\frac{\partial n_R}{\partial \omega} < 0 \text{ bzw. } \frac{\partial n_R}{\partial \lambda} > 0$$

### Brechungsindex von Metallen

Der Brechungsindex eines idealen Metalls ist gegeben durch:

$$n = \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Das Symbol  $\omega_p$  steht hierbei für die sogenannte Plasmafrequenz:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{m \epsilon_0}}.$$

### Sellmeier-Gleichung

Die Sellmeier-Gleichung ist eine in der Praxis häufig verwendete Näherung für den Brechungsindex verschiedenster Materialien:

$$n^2(\lambda) = A + \sum_{j=1}^N \frac{B_j \lambda^2}{\lambda^2 - C_j},$$

Die Koeffizienten werden durch das Fitten von Messdaten bestimmt.

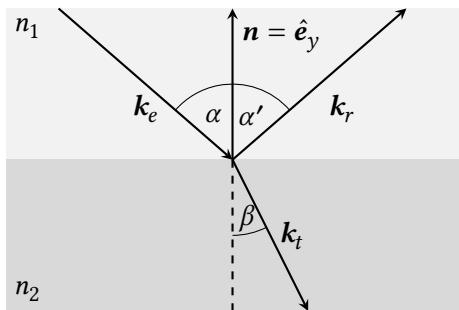
## 6.

# ELEKTROMAGNETISCHE WELLEN AN GRENZFLÄCHEN

Do not Bodies and Light act mutually upon one another; that is to say, Bodies upon Light in emitting, reflecting, refracting and inflecting it, and Light upon Bodies for heating them, and putting their parts into a vibrating motion wherein heat consists?

SIR ISAAC NEWTON

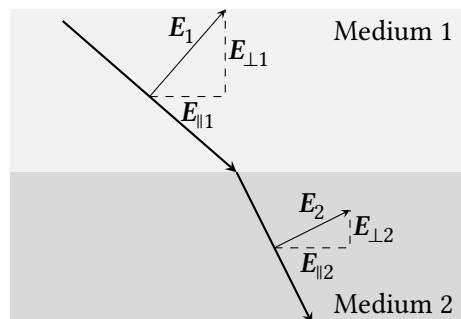
Wir betrachten zunächst ein Experiment zum Brechungsgesetz. Gemäß Abbildung 6.1 bezeichnet  $\alpha$  den Einfallswinkel,  $\alpha'$  den Ausfallwinkel und  $\beta$  den Winkel der transmittierten Welle. Um nun diese drei Winkel zu bestimmen, müssen wir die Stetigkeitsbedingungen von elektromagnetischen Wellen an Grenzflächen beachten.



**Abb. 6.1.:** Reflexion und Transmission einer einfallenden Welle an einer Grenzfläche. Die Abkürzungen stehen für  $e$ : einfallend,  $r$ : reflektiert und  $t$ : transmittiert. Die Strahlen entsprechen den zugehörigen Wellenvektoren  $\mathbf{k}$ .

## Stetigkeitsbedingungen

Zur Herleitung der Stetigkeitsbedingungen spaltet man die Felder in eine Tangential- (parallel zur Oberfläche) und eine Normalkomponente (senkrecht zur Oberfläche) auf.



**Abb. 6.2.:** Aufspaltung des elektrischen Feldes in Normal- ( $\perp$ ) und Tangentialkomponente ( $\parallel$ ) an der Grenzfläche.

- Aus dem Satz von Stokes folgt, dass die Tangentialkomponente des  $\mathbf{E}$ -Feldes stetig ist:

$$E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2}$$

- Aus dem elektrischen Satz von Gauß  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0$  folgt, dass die Normalkomponente des

## 6. Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

$D$ -Feldes stetig ist. Damit gilt für die  $E$ -Felder:

$$\frac{E_{\perp 1}}{E_{\perp 2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{n_2^2}{n_1^2}$$

- Für die Magnetfelder folgt aus dem Satz von Stokes, dass die Tangentialkomponente des  $H$ -Feldes stetig ist. Damit gilt für das  $B$ -Feld

$$\frac{B_{\parallel 1}}{B_{\parallel 2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Meistens betrachten wir nicht magnetische Materialien ( $\mu_1 = \mu_2$ ). Dann ist auch die Tangentialkomponente des  $B$ -Feldes stetig.

- Aus dem magnetischen Satz von Gauß ( $\nabla \cdot B = 0$ ) ergibt sich, dass die Normalkomponente des  $B$ -Feldes stetig ist.

$$B_{\perp 1} = B_{\perp 2}$$

### 6.1. Brechungs- und Reflexionsgesetz

Wir betrachten nun die einzelnen Felder explizit und wählen den Ansatz

$$\begin{aligned} E_e &= A_e e^{i(k_e r - \omega_e t)} \\ E_r &= A_r e^{i(k_r r - \omega_r t)} \\ E_t &= A_t e^{i(k_t r - \omega_t t)}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun die Stetigkeit des tangentialen elektrischen Feldes  $E_{e\parallel} + E_{r\parallel} = E_{t\parallel}$  bei  $y = 0$  an:

$$A_{e\parallel} e^{i(k_e r - \omega_e t)} + A_{r\parallel} e^{i(k_r r - \omega_r t)} = A_{t\parallel} e^{i(k_t r - \omega_t t)}$$

Damit diese Bedingung für alle Zeiten  $t$  bei  $y = 0$  erfüllt ist, dürfen sich die Frequenzen bei Reflexion und Transmission nicht ändern. Es gilt also

$$\omega_e = \omega_r = \omega_t \equiv \omega. \quad (6.1)$$

Da die Bedingung auch für alle Orte auf der Grenzfläche ( $x, y = 0, z$ ) gültig sein muss, gilt außerdem:

$$\mathbf{k}_e \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \mathbf{r} \text{ für } \mathbf{r} \mathbf{e}_y = 0. \quad (6.2)$$

Wählen wir nun  $\mathbf{k}_e$  so, dass der Wellenvektor keine  $z$ -Komponente besitzt, dann haben auch  $\mathbf{k}_r$  und  $\mathbf{k}_t$  keine  $z$ -Anteil. Es folgt

$$\begin{aligned} k_{ex}x &= k_{rx}x = k_{tx}x \\ |\mathbf{k}_e| x \sin \alpha &= |\mathbf{k}_r| x \sin \alpha' = |\mathbf{k}_t| x \sin \beta. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun die Dispersionsrelation  $k_e = k_r = \omega n_1/c$  und  $k_t = \omega n_2/c$ , so erhalten wir

$$\underbrace{\frac{n_1 \sin \alpha}{\sin \beta} = n_1 \sin \alpha'}_{\rightarrow \alpha = \alpha'} = n_2 \sin \beta. \quad (6.3)$$

Hierbei haben wir das *Reflexionsgesetz* "Einfallswinkel = Ausfallswinkel" hergeleitet. Wir erhalten außerdem das *Snelliussche Brechungsgesetz*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (6.4)$$

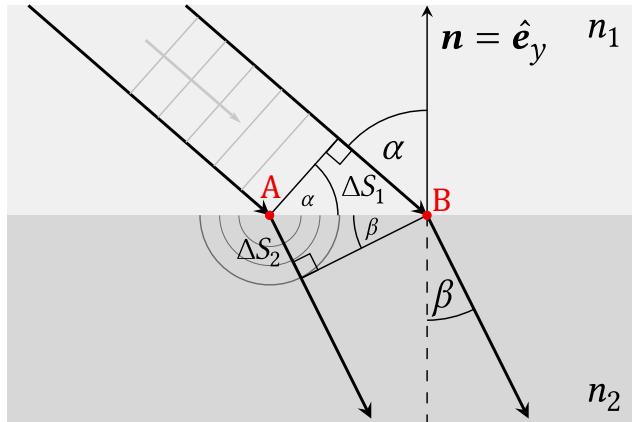
#### 6.1.1. Herleitung aus dem Huygensschen Prinzip

Wir betrachten eine Phasenfront einer ebenen Welle, die sich einer Grenzfläche unter einem Winkel  $\alpha$  zur Normalen nähert (Abbildung 6.3). Zu einem Zeitpunkt  $t_0$  trifft die Phasenfront im Punkt  $A$  auf die Grenzfläche. Das Huygenssche Prinzip besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront als Ausgangspunkt einer Kugelwelle betrachtet werden kann. Wir wenden das Prinzip an, indem wir eine Kugelwelle in  $A$  starten, die sich mit der Phasengeschwindigkeit  $c/n_2$  ins Medium mit Brechungsindex  $n_2$  ausbreitet. Nach einer kurzen Zeit  $\Delta t = \Delta S_1 n_1/c$  erreicht die ursprüngliche Phasenfront die Grenzfläche auch im Punkt  $B$ . Die Phasenfront im Medium mit Brechungsindex  $n_2$  ergibt sich nun als die Tangente an die Kugelwelle nach der Zeit  $\Delta t$  durch den

Punkt B. Rein geometrisch erhalten wir durch diese Überlegung:

$$\sin(\alpha) = \frac{c\Delta t}{n_1 \overline{AB}}, \quad \sin(\beta) = \frac{c\Delta t}{n_2 \overline{AB}}$$

Der Ausdruck  $\overline{AB}$  bezeichnet die Länge der Strecke AB.



**Abb. 6.3.:** Laufzeitdifferenzen nach dem Huygen'schen Prinzip.

Es ist leicht ersichtlich, dass wir wie zuvor Folgendes erhalten:

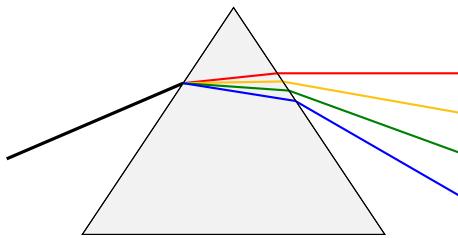
$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

Betrachten wir den Fall, bei dem Licht vom optisch dünneren in das optisch dichtere Medium geht ( $n_2 > n_1$ ), beispielweise von Luft in Glas. Man kann dann Folgendes beobachten:

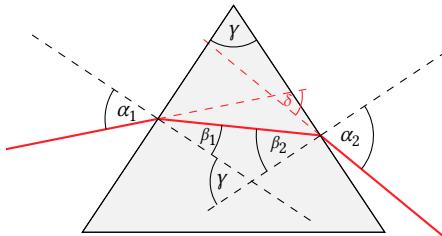
- Durch "Abbremsen" wird die Welle zum Lot hin gebrochen
- Die Wellenfronten rücken näher zusammen
- Der Strahldurchmesser wird um  $(\cos \beta)/(\cos \alpha)$  größer
- Blaues Licht wird bei normaler Dispersion stärker gebrochen, was man in Prismen ausnutzt.

Der Brechungsindex in einem Medium kann sich auch kontinuierlich ändern, wie etwa in einer Zuckerslösung. Andere Beispiele hierfür sind Spiegelungen auf einer heißen Straße bzw. eine Fata Morgana. Ursächlich hierfür sind Dichteschwankungen in der Luft mit variierendem  $n$ .

## 6.2. Lichtbrechung an Prismen



**(a)** Lichtbrechung mit normaler Dispersion; Rot (oben) wird weniger stark gebrochen als blau (unten).



**(b)** Geometrie an einem Prisma zur Berechnung des Ablenkungswinkels  $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2)$

**Abb. 6.4.:** Schematische Darstellungen zur Brechung am Prisma.

Nach Abbildung 6.4b gilt folgender Zusammenhang für den Ablenkungswinkel  $\delta$  eines Lichtstrahls, der ein Prisma durchläuft:

$$\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - (\beta_1 + \beta_2) .$$

Aus der Geometrie bestimmen wir  $\gamma = \beta_1 + \beta_2$  und erhalten  $\delta = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma$ . Mit dem Brechungsgesetz  $\sin \alpha_{1,2} = n \sin \beta_{1,2}$  gilt schließlich

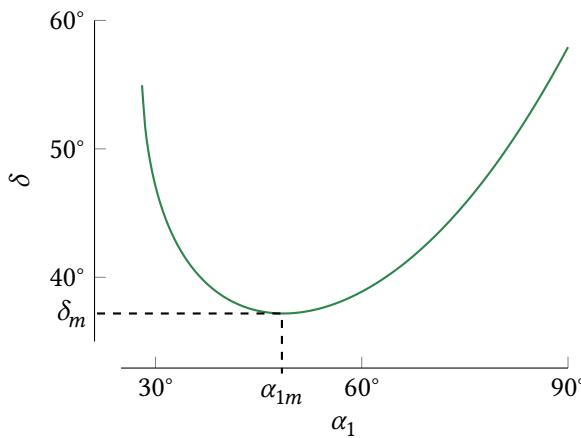
$$\alpha_2 = \arcsin(n \sin(\gamma - \beta_1)) .$$

## 6. Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

Wir nutzen das Additionstheorem und erhalten

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \arcsin(n(\sin\gamma\cos\beta_1 - \sin\beta_1\cos\gamma)) \\ &= \arcsin\left(n\left(\sin\gamma\sqrt{1-\sin^2\beta_1} - \sin\beta_1\cos\gamma\right)\right) \\ \delta &= \alpha_1 + \arcsin\left(\sin\gamma\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_1} - \sin\alpha_1\cos\gamma\right) - \gamma,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt das Brechungsgesetz ( $\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1$ ) verwendet haben. Die Ablenkung  $\delta = f(\alpha_1, \gamma, n)$  ist also eine Funktion in Abhängigkeit von Einfallsinkel, Prismenwinkel und Brechungsindex.



**Abb. 6.5.:** Die Ablenkung an einem Prisma weist ein Minimum auf. Hier wurde  $\gamma = 60^\circ$  und  $n = 1.5$  gewählt, sodass bei  $\alpha_{1m} = 48.4^\circ$  der minimale Ablenkinkel  $\delta_m = 37.2^\circ$  auftritt.

Die minimale Ablenkung tritt bei  $d\delta/d\alpha_1 = 0 = 1 + d\alpha_2/d\alpha_1$ , sodass folgt  $d\alpha_2/d\alpha_1 = -1$ . Leiten wir das Brechungsgesetz ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_1)d\alpha_1 &= n\cos(\beta_1)d\beta_1 \\ \cos(\alpha_2)d\alpha_2 &= n\cos(\beta_2)d\beta_2.\end{aligned}$$

Außerdem haben wir  $d\beta_1 = -d\beta_2$ , da  $d\gamma = 0$  gilt. Somit folgt

$$\begin{aligned}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} &= \frac{\cos\beta_1}{\cos\beta_2} \\ \Rightarrow \frac{1-\sin^2\alpha_1}{1-\sin^2\alpha_2} &= \frac{n^2-\sin^2\alpha_1}{n^2-\sin^2\alpha_2}.\end{aligned}$$

Da  $n \neq 1$  gilt, folgt  $\alpha_1 = \alpha_2$  und  $\beta_1 = \beta_2$ . Die minimale Ablenkung entspricht also dem symmetrischen Durchgang durch das Prisma. Wir haben dann

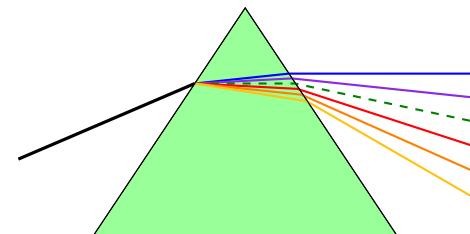
$$\alpha_{1,2} = \frac{\delta_m + \gamma}{2} \quad \text{und} \quad \beta_{1,2} = \frac{\gamma}{2}$$

und finden für den Brechungsindex

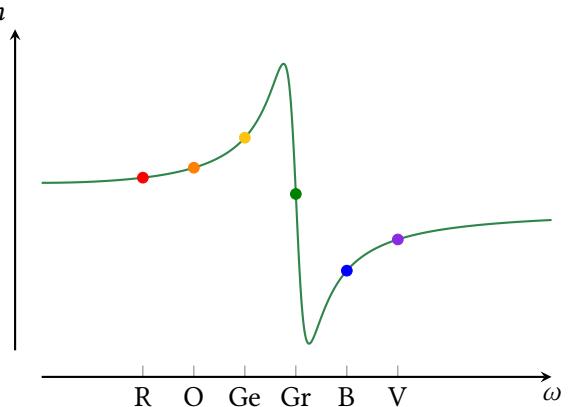
$$n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_m + \gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Wir haben hiermit eine einfache Möglichkeit gefunden, den Brechungsindex des Materials zu messen.

Kehren wir nochmal zurück zur Dispersion:



**(a)** Ein mit grünem Farbstoff gefülltes Prisma weist anomale Dispersion auf.



**(b)** Schematische Darstellung des Brechungsindex für das Prisma mit grünem Farbstoff

**Abb. 6.6.:** Anomale Dispersion im Prisma.

Ein Prisma mit normaler Dispersion lenkt kürzere Wellenlängen stärker ab. Die Reihenfolge von geringster zu stärkster Ablenkung lautet dann rot → orange

→ gelb → grün → blau → violett. Ein Prisma, das mit grünem Farbstoff gefüllt ist, hat dagegen eine andere Farbreihenfolge: blau → violett → grün (nicht sichtbar) → rot → orange → gelb. Wir sagen, das Prisma weist anomale Dispersion auf.

### 6.3. Einschub: Regenbogen

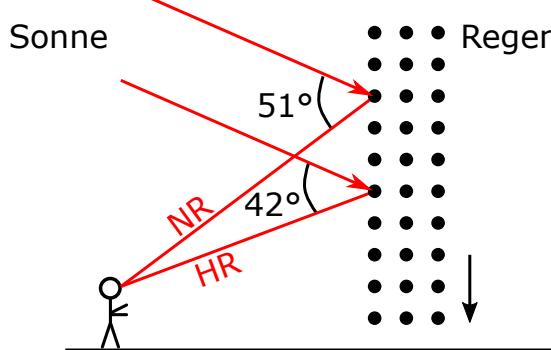


Abb. 6.7.: Entstehung eines Regenbogens.

Es entstehen zwei Regenbogen: wir unterscheiden den **Hauptregenbogen** bei ca.  $42^\circ$  und den **Nebenregenbogen** bei ca.  $51^\circ$ . Hierbei ist die Farbabfolge im Haupt- bzw. Nebenregenbogen umgekehrt. Die Lichtstärke und der Farbkontrast hängen stark von der Tröpfchengröße ab (z.B. kaum sichtbar bei Nebel).

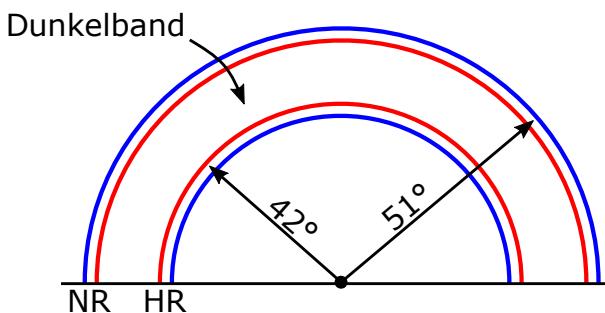


Abb. 6.8.: Zum Haupt- und Nebenregenbogen.

#### 6.3.1. Hauptregenbogen

Wir betrachten die Geometrie des Hauptregenbogens.

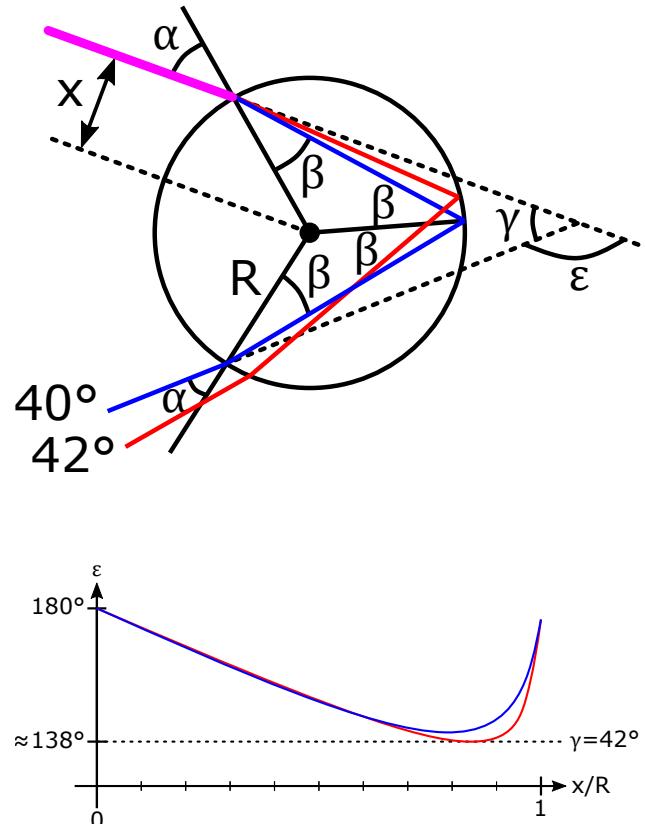
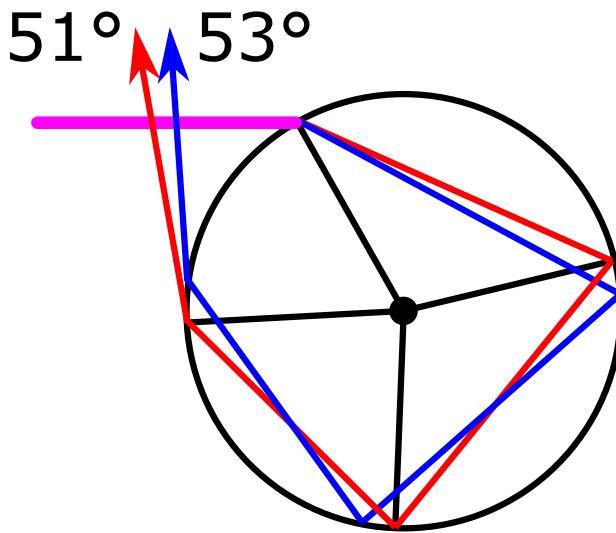


Abb. 6.9.: Geometrie im Wassertropfen des Hauptregenbogens (oben) und Ablenkungswinkel in Abhängigkeit des Auftreffwinkels (unten).

Aus Abbildung 6.9 (oben) finden wir  $\epsilon = 180^\circ + 2\alpha - 4\beta$  und erhalten  $\frac{x}{R} = \sin \alpha \stackrel{\text{Snell}}{=} n \sin \beta$ . Dann folgt

$$\epsilon = 180^\circ + 2 \arcsin\left(\frac{x}{R}\right) - 4 \arcsin\left(\frac{x}{nR}\right). \quad (6.5)$$

Für Wasser gilt  $n(400 \text{ nm}) = 1,339$  und  $n(800 \text{ nm}) = 1,329$ .



**Abb. 6.10.:** Geometrie im Wassertropfen des Nebenregenbogens.

### 6.3.2. Nebenregenbogen

Im Nebenregenbogen gibt es eine Reflexion mehr. Dies ist der Grund für die umgedrehte Farbreihenfolge. Er ist weniger intensiv, da ein Teil des Lichts nicht reflektiert wird.

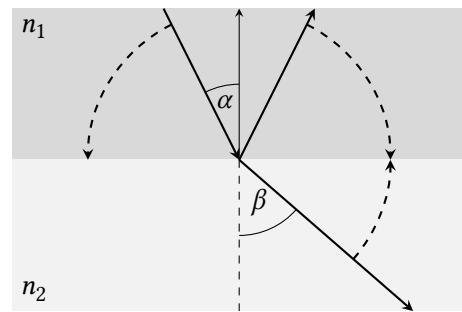
**Anmerkungen:** Jeder Regentropfen spaltet das Licht in die Spektralfarben auf. Wir sehen aber nur die Farbe, die direkt in unser Auge fällt.

## 6.4. Totalreflexion

Beim Übergang von Licht in ein optisch dünneres Medium, d.h. von hohem Brechungsindex zu niedrigerem Brechungsindex ( $n_1 > n_2$ ), kann *Totalreflexion* auftreten. Diese tritt auf, wenn wir aus dem Snelliusschen Brechungsgesetz für den gebrochenen Strahl die Bedingung

$$\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha = \sin \beta > 1$$

erhalten. Da diese mathematisch offensichtlich nie erfüllt werden kann, existiert kein gebrochener Strahl. Das gesamte Licht wird folglich reflektiert.



**Abb. 6.11.:** Wird der Einfallswinkel  $\alpha$  so groß, dass der gebrochene Strahl entlang der Oberfläche verlaufen würde, so tritt Totalreflexion auf.

Um nun den Winkel zu bestimmen, ab dem Totalreflexion auftritt, setzen wir  $\sin \beta = 1$  an und erhalten

$$\alpha_{tr} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \quad (6.6)$$

Beispiel: Mit  $n_1 = 1.5$  und  $n_2 = 1$  folgt  $\alpha_{tr} = 41.8^\circ$ .

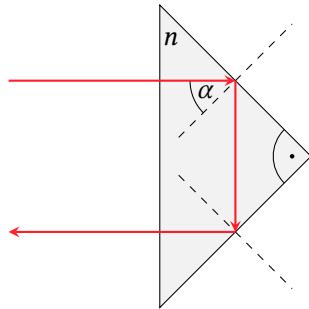
**Anmerkung:** Bei Röntgenstrahlen ist der Brechungsindex von Glas  $n_{\text{Glas}} < 1$ . Daher kann hier unter schleifendem Einfall *äußere Totalreflexion* stattfinden. Das bedeutet, dass Röntgenstrahlen, die unter einem sehr flachen Winkel auf Glas treffen, an der Grenze *Vakuum zu Glas* total reflektiert werden. Bei sichtbarem Licht geschieht dies immer nur an der Grenze von *Glas zu Vakuum*.

### Retroreflexion

Eine wichtige Anwendung der Totalreflexion ist die Retroreflexion. Positioniert man zwei Spiegel (bzw. drei Spiegel in 3D) senkrecht zueinander, so wird ein einlaufender Lichtstrahl exakt parallel reflektiert. Nutzt man nun noch die Totalreflexion aus, so können Lichtstrahlen mit hoher Effizienz umgelenkt werden.

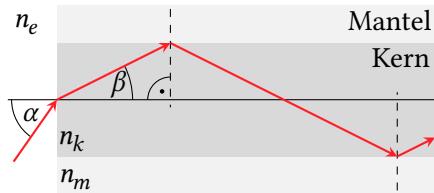
### Lichtfasern

Wir werden uns in [Kapitel 7](#) noch ausgiebig mit Lichtfasern beschäftigen, wollen aber an dieser Stelle schon einmal auf die Bedeutung der Totalreflexion für die



**Abb. 6.12.:** Ein Retroreflektor (hier in 2D) kehrt die Strahlrichtung über zwei Totalreflexionen um. Im vorliegenden Fall gilt  $\alpha = 45^\circ$ , sodass bei  $n = 1.5$  Totalreflexion auftritt.

Propagation von Licht in Glasfasern eingehen. Lichtfasern bestehen aus einem Kern mit hohem Brechungsindex  $n_k$  und einem Mantel mit niedrigerem Brechungsindex  $n_m$ , sodass an deren Grenzfläche Totalreflexion auftreten kann. Der Brechungsindex der Umgebung ist  $n_e$ .



**Abb. 6.13.:** Schematischer Strahlengang in einer Lichtfaser.

Nach Abbildung 6.13 bezeichnen wir den Winkel, mit dem das Licht von Außen auf den Faserkern trifft, mit  $\alpha$  und den Winkel des gebrochenen Strahls im Kern mit  $\beta$ . Der Winkel, mit dem das Licht folglich auf die Grenzfläche zwischen Kern und Mantel trifft, ist durch  $90^\circ - \beta$  gegeben. Die Bedingung für Totalreflexion ist also

$$90^\circ - \beta \geq \arcsin\left(\frac{n_m}{n_k}\right)$$

und für den Grenzwinkel gilt

$$\cos \beta = \frac{n_m}{n_k}$$

beziehungsweise  $\sin(90^\circ - \beta) = n_m/n_k$ . Wir erhalten dann

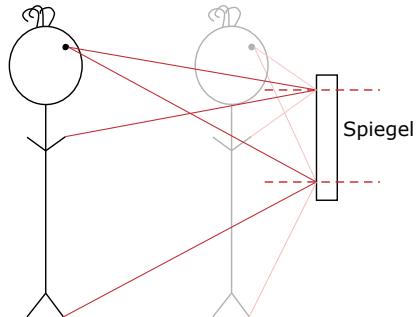
$$\begin{aligned} n_e \sin \alpha_{\max} &= n_k \sin \beta \\ &= n_k \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \\ &= n_k \sqrt{1 - \frac{n_m^2}{n_k^2}} \\ &= \sqrt{n_k^2 - n_m^2} \stackrel{!}{=} \text{NA} \end{aligned}$$

mit der *numerischen Apertur* NA.

Koppelt man Licht in eine Faser ein, so sollte der Fokusdurchmesser mit dem Kerndurchmesser vergleichbar sein. Zudem sollte der Winkel des einfallenden Lichtkegels  $\alpha_{\max}$  nicht überschreiten.

## 6.5.

## Reflexion am Spiegel

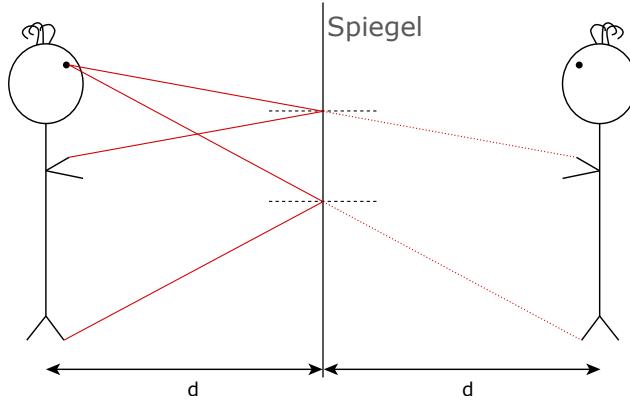


**Abb. 6.14.:** Herr Slim in verschiedenen Abständen zum Spiegel.

Herr Slim sieht im Spiegel alles von den Händen bis zu den Füßen (Abbildung 6.14). Seinen Kopf sieht er aber nicht! Hilft es ihm, weiter weg zu gehen?

Nein. Da die tatsächliche relative Position zwischen einem beliebigen Teil von Herrn Slims Körper und seinen Augen gleich bleibt, bleibt auch der Punkt am Spiegel gleich, an dem Herr Slim dieses Körperteil sieht (Einfallsinkel=Ausfallsinkel). Es werden lediglich die Winkel zur Spiegelnormalen kleiner, während das Sichtfeld gleich bleibt. Das Spiegelbild taucht im Abstand  $2d$  auf (Abbildung 6.15). Es ist aufrecht aber "spiegelverkehrt".

## 6. Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen



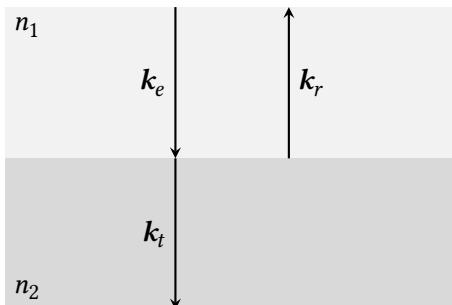
**Abb. 6.15.:** Herr Slim und sein Spiegelbild.

Spiegel lassen also beispielweise einen Raum in doppelter Größe erscheinen, was in der Architektur zur Ausgestaltung von Fahrstühlen, Prunksälen etc. ausgenutzt wird.

### 6.6. Amplitude von reflektierter und gebrochener Welle

#### 6.6.1. Senkrechter Einfall

Wir betrachten zuerst den Fall  $\alpha = \beta = 0^\circ$ ; die einlaufende Welle trifft also senkrecht auf die Grenzfläche. In diesem Fall spielt die Polarisation des Lichts keine Rolle.



**Abb. 6.16.:** Reflexion und Brechung einer Welle bei senkrechtem Einfall.

In nicht magnetischen Materialien ist  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ . Dann ist  $B$  stetig. Wir betrachten außerdem keine

elektrischen Ladungen ( $\rho = 0, E_\perp = 0$ ). Damit ist auch  $E$  stetig. Es folgt

$$\begin{aligned} B_e + B_r &= B_t \\ E_e + E_r &= E_t . \end{aligned}$$

Für ebene Wellen erhalten wir aus den Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= i\omega \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E} \\ \Rightarrow \mathbf{B} &= \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) . \end{aligned}$$

Setzen wir diese Gleichung in die Stetigkeitsbedingung ein, erhalten wir

$$\frac{1}{\omega} (\mathbf{k}_e \times \mathbf{E}_e) + \frac{1}{\omega} (\mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_r) = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_t) .$$

Aus den Bedingungen  $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}$  (transversale Welle) und  $\mathbf{k}_e = -\mathbf{k}_r$  (senkrechte Reflexion) erhalten wir nun

$$\frac{k_e}{\omega} E_e - \frac{k_e}{\omega} E_r = \frac{k_t}{\omega} E_t .$$

Nutzen wir nun die Dispersionsrelation  $k = \omega n/c$  erhalten wir.

$$\begin{aligned} n_1 E_e - n_1 E_r &= n_2 E_t = n_2 (E_e + E_r) \\ \Rightarrow E_r &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_e \equiv r E_e . \end{aligned}$$

Hier haben wir den *Feldreflexionskoeffizienten*  $r$  für den senkrechten Einfall eingeführt.

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (6.7)$$

Wir stellen fest:

- Für  $n_1 = n_2$  gibt es keine Reflexion
- Für reelle  $n_1, n_2$  gibt es einen Phasensprung von  $0$  ( $n_1 > n_2$ ) oder  $\pi$  ( $n_2 > n_1$ ).
- Komplexe  $n_1, n_2$  liefern andere Phasensprünge.

## 6.6. Amplitude von reflektierter und gebrochener Welle

### Wellenwiderstand

Es lässt sich im Allgemeinen ein *Wellenwiderstand*  $z$  definieren. Dieser ist zum Beispiel bei der verlustfreien Übertragung von RF-Signalen in Koaxialkabeln von Bedeutung. Stimmen der Wellenwiderstand von Sender und Empfänger nicht überein, so wird ein Teil des Signales reflektiert. Für den Reflexionskoeffizienten gilt:

$$r = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \quad (6.8)$$

**Elektromagnetische Wellen** Wir definieren den Wellenwiderstand als

$$z \equiv \frac{E}{H} \text{ mit } [z] = \Omega$$

analog zum elektrischen Widerstand  $R = U/I$ . Mit  $c/n = (\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r)^{-1/2}$  folgt dann

$$z = \mu_0 \mu_r \frac{E}{B} = \mu_0 \mu_r \frac{c}{n} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}}.$$

In der Optik mit  $\mu_r = 1$  nach Gleichung 6.8:

$$r = \frac{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}}{\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_1}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2},$$

während für Radiofrequenzen mit  $\mu_r \neq 1$

$$z = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \dots = \frac{L_k}{C_k}$$

gilt. Hierbei sind  $L_k$  die *Induktivität* und  $C_k$  die *Kapazität* pro Länge.

BNC-Kabel haben typischerweise einen Wellenwiderstand von  $z = 50 \Omega$ . Für Luft oder Vakuum ergibt sich  $z = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 377 \Omega$ . Ein offenes BNC-Kabel stellt also keine gute Antenne dar, da über 50% der Leistung eines im Kabel propagierenden Signals am Kabelende reflektiert werden.

**Schallwellen** Für Schallwellen in Festkörpern findet man:

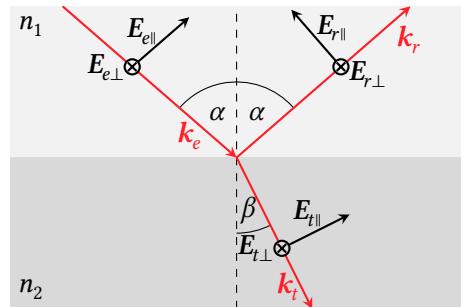
$$z \equiv \rho v_{ph} = \begin{cases} \sqrt{\rho E} & \text{transversal} \\ \sqrt{\rho G} & \text{longitudinal} \end{cases}$$

Hier ist  $E$  der Elastizitätsmodul und  $G$  der Schubmodul des Festkörpers.

### 6.6.2.

### Fresnelsche Formeln

Für den allgemeinen Fall von schräg einfallendem Licht zerlegen wir das elektrische Feld zunächst in seine Komponenten parallel ( $p$ ) und senkrecht ( $s$ ) zur *Einfallsebene*.<sup>1</sup> Dies entspricht der Ebene, die von der Flächennormalen und dem Einfallsstrahl aufgespannt wird. Sie ist in unserem Fall identisch mit der Zeichenebene in Abbildung 6.17.



**Abb. 6.17.:** Definition von  $p$ - und  $s$ -Polarisation bei der Reflexion an einer Grenzfläche.

Wir definieren den Amplituden-Reflexionskoeffizienten

$$r_{\perp} = \frac{E_{r\perp}}{E_{e\perp}}, \quad r_{\parallel} = \frac{E_{r\parallel}}{E_{e\parallel}}$$

sowie den Amplituden-Transmissionskoeffizienten

$$t_{\perp} = \frac{E_{t\perp}}{E_{e\perp}}, \quad t_{\parallel} = \frac{E_{t\parallel}}{E_{e\parallel}}.$$

Wir betrachten die beiden Polarisationsrichtungen nun separat

<sup>1</sup>Wichtig: Parallel und senkrecht beziehen sich hier nicht mehr wie zuvor auf die Grenzfläche zwischen Medium 1 und Medium 2, sondern auf die Einfallsebene, in der der Strahl liegt.

## 6. Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

### s-Polarisation

Zunächst sei  $E$  senkrecht zur Einfallsebene orientiert. Für den Reflexionskoeffizienten finden wir

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)},$$

wobei wir im letzten Schritt  $n_2/n_1 = \sin \alpha / \sin \beta$  verwendet haben. Mit  $n_r = n_2/n_1$ , der Umformung  $\beta = \arcsin(n_r \sin \alpha)$  sowie der Identität  $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$  folgt dann

$$r_{\perp} = \frac{\left( \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha \right)^2}{n_r^2 - 1}. \quad (6.9)$$

Analog erhalten wir für den Transmissionskoeffizienten

$$t_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} = \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \cos \alpha \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha} - 2 \cos^2 \alpha}{n_r^2 - 1}. \quad (6.10)$$

Häufig ist nicht die reflektierte Feldstärke, sondern die reflektierte Leistung von Interesse. Diese ist durch den *Reflexionsgrad*  $R$  gegeben.

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= |r_{\perp}|^2 \\ &\equiv \frac{\text{reflektierte Leistung}}{\text{einfallende Leistung}} = \frac{P_r}{P_e} \\ &= \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

### p-Polarisation

In diesem Fall ist  $E$  parallel zur Einfallsebene. Wir erhalten dann

$$r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \alpha - n_1 \cos \beta}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \quad (6.11)$$

$$= \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \quad (6.12)$$

$$r_{\parallel} = \frac{n_r^2 \cos \alpha - \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha}}{n_r^2 \cos \alpha + \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha}}. \quad (6.13)$$

Analog gilt für den Transmissionskoeffizienten

$$\begin{aligned} t_{\parallel} &= \frac{2n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \alpha + n_1 \cos \beta} \\ &= \frac{2 \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2n_r^2 \cos \alpha}{n_r^2 \cos \alpha + \sqrt{n_r^2 - \sin^2 \alpha}}. \quad (6.14)$$

Für den Reflexionsgrad finden wir

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= |r_{\parallel}|^2 \\ &= \frac{\tan^2(\alpha - \beta)}{\tan^2(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

Die Formeln für  $r_{\perp}$ ,  $r_{\parallel}$ ,  $t_{\perp}$  und  $t_{\parallel}$  werden *Fresnelsche Formeln* genannt. Sie gelten auch für komplexe Werte von  $n$ .

### Zum Reflexions- und Transmissionsgrad

In Kapitel 2 hatten wir bereits den Zusammenhang zwischen der  $E$ -Feldamplitude einer elektromagnetischen Welle und deren Intensität  $I$  hergeleitet:

$$I = \frac{1}{2} c n \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2.$$

Damit können wir mit den Fresnelschen Formeln die reflektierten und transmittierten Intensitäten an einer Grenzfläche von Medium 1 ( $n_1$ ) zu Medium 2 ( $n_2$ ) bestimmen.

## 6.6. Amplitude von reflektierter und gebrochener Welle

**Reflexion** Für die reflektierte Intensität ergibt sich folglich

$$I_r \propto n_1 |E_r|^2 = n_1 |r_i E_e|^2 ,$$

wobei  $r_i$  der Reflexionskoeffizient für  $p$ - oder  $s$ -Polarisation ist. Mit der einfallenden Intensität  $I_e \propto n_1 |E_e|^2$  erhalten wir die Reflektivität für die Intensität

$$\frac{I_r}{I_e} = |r_i|^2 \equiv R_i^I .$$

Die Leistung des einfallenden Lichts ist mit der Querschnittsfläche des einfallenden Strahls  $A_e$  durch  $P_e = A_e I_e$  gegeben. Da sich die Querschnittsfläche bei der Reflexion nicht ändert, können wir  $A_e = A_r \equiv A$  schreiben, womit wir für die reflektierte Leistung

$$\frac{P_r}{P_e} = \frac{A I_r}{A I_e} = |r_i|^2 \equiv R_i^W$$

erhalten. Die Reflektivität ist für die Intensität und Leistung identisch, weshalb wir

$$R_i^I = R_i^W \equiv R_i = |r_i|^2$$

schreiben können.

**Transmission** Analog zur Herleitung des Reflexionsgrads erhalten wir für den Transmissionsgrad der Intensität

$$\frac{I_t}{I_e} = \frac{n_2}{n_1} |t_i|^2 \equiv T_i^I .$$

Aufgrund des Übergangs zu einem anderen Material spielen hierbei nun die Brechungsindizes eine Rolle.

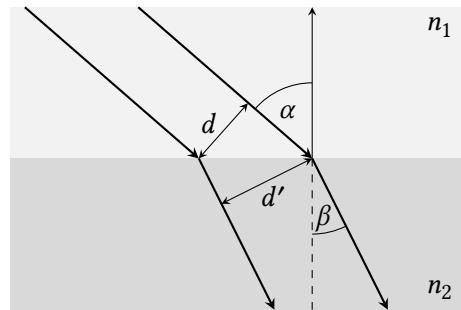
Unter der Annahme, dass keine Energie an der Grenzfläche zwischen zwei Materialien verloren geht, ergibt sich aus der Energieerhaltung, dass die Leistung erhalten sein muss. Damit erhalten wir für den Transmissiongrad der Leistung

$$T_i^W = 1 - R_i^W = 1 - |r_i|^2 .$$

Möchten wir den Transmissionsgrad der Leistung  $T^W$  mit dem Transmissionskoeffizienten  $t$  und damit mit dem Transmissionsgrad der Intensität  $T^I$  in Bezug setzen, so müssen wir beachten, dass sich der Strahl durchmesser und damit die Querschnittsfläche durch

die Brechung an der Oberfläche ändert. Aus Abbildung 6.18 sehen wir folgenden Zusammenhang:

$$\frac{d_t}{d_e} = \frac{A_t}{A_e} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$



**Abb. 6.18.:** Änderung des Strahldurchmessers  $d$  bei der Brechung an einer Grenzfläche.

Der Leistungs-Transmissionsgrad ergibt sich nun folglich zu

$$\frac{P_t}{P_e} = \frac{A' I_t}{A I_e} = \frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha} |t_i|^2 \equiv T_i^W .$$

Die Transmissionsgrade sind folglich für die Intensität und die Leistung unterschiedlich. Die Summe des Intensitäts-Reflexions- und Transmissionsgrads ist im Allgemeinen auch nicht eins, was widerspiegelt, dass die Intensität keine Erhaltungsgröße ist.

### 6.6.3. Eigenschaften der Fresnelschen Formeln

#### Energieerhaltung

Für reelle Werte von  $n_1$  und  $n_2$  erfüllen die Fresnelschen Formeln die Energieerhaltung, was wir zur Herleitung des Leistungs-Transmissionsgrads bereits verwendet hatten. Es gilt also

$$\underbrace{|r_i|^2}_{\equiv R^W} + \underbrace{\frac{n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha} |t_i|^2}_{\equiv T^W} = 1 .$$

## 6. Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

Wir testen dies für den senkrechten Einfall ( $\alpha = \beta = 0^\circ$ ) mittels der Freselschen Formeln:

$$\begin{aligned} R^W + T^W &= \left( \pm \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 + \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 \\ &= \frac{(n_1 - n_2)^2 + 4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2} \\ &= \frac{(n_1 + n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} = 1 \end{aligned}$$

### Senkrechter Einfall

Bei senkrechtem Einfall gelten die Formeln für s-Polarisation. Wir nehmen wieder  $n_1$  und  $n_2$  reell an. Damit gilt

$$r_{\perp} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}.$$

Wenn  $n_2 > n_1$ , wird  $r_{\perp}$  negativ. Das heißt, dass die Welle bei der Reflexion ihr Vorzeichen ändert. Der Vorzeichenwechsel ist äquivalent zu einem Phasensprung um  $\pi$  ( $-1 = e^{i\pi}$ ).

### schräger Einfall: Brewsterwinkel

Für  $n_1 \neq n_2$  erkennen wir, dass  $r_{\perp}$  für keinen Einfallswinkel Null werden kann. Der Koeffizient  $r_{\parallel}$  kann jedoch Null werden, wenn  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , also für  $E_t \perp E_r$ . Siehe dazu Abbildung 6.19 und Abbildung 6.21. In diesem Fall gilt dann  $\tan(\alpha + \beta) \rightarrow \infty$ .

Man nennt diesen Winkel  $\alpha_B$  den *Brewsterwinkel*. Das elektrische Feld der einlaufenden Welle erzeugt an der Oberfläche schwingende Dipole. Für den Einfall von p-polarisiertem Licht unter dem Brewsterwinkel liegt die Schwingungsrichtung der Dipole in Richtung des reflektierten Strahls. Da Dipole jedoch nicht entlang ihrer Schwingungsrichtung abstrahlen, verschwindet der p-polarisierte Anteil der Reflexion (siehe Abbildung 6.19), der reflektierte Strahl ist also vollständig s-polarisiert.

Aus dem Brechungsgesetz folgt schließlich die Bedingung für den Brewsterwinkel:

$$\begin{aligned} n_1 \sin \alpha_B &\stackrel{!}{=} n_2 \sin(90^\circ - \alpha_B) = n_2 \cos \alpha_B \\ \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} &= \frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B} = \tan \alpha_B \end{aligned}$$

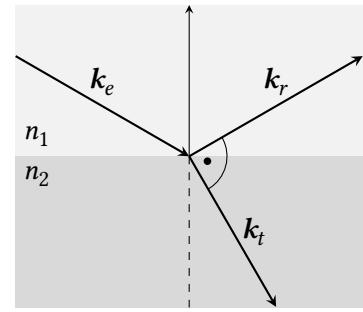


Abb. 6.19.: Einfall von Licht unter dem Brewsterwinkel

$$\alpha_B = \arctan \left( \frac{n_2}{n_1} \right) \quad (6.15)$$

Der Brewsterwinkel gilt auch für  $n_1 > n_2$ . Für  $n_1 = 1$  und  $n_2 = 1.5$  ergibt sich ein Brewsterwinkel  $\alpha_B = 56^\circ$ . Anwendung findet der Brewsterwinkel in Lasern zur Festlegung der Polarisationsrichtung (Abbildung 6.20), zur Reflexionsunterdrückung, für Polarisatoren (Abbildung 6.22) bzw. zum "Säubern" der Polarisierung.



Abb. 6.20.: In einem Laseroszillator erhält man niedrigere Verluste, wenn der Verstärkerkristall im Brewsterwinkel geschnitten ist.

### Reflexion an planparalleler Platte

Für  $n_2 = 1.5$  und  $n_1 = 1$  gilt wie gehabt  $\alpha_B = 56^\circ$ . Außerdem gilt für nahezu senkrechten Einfall ( $\alpha \approx 0^\circ$ )

$$\left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = 0.04 .$$

Das heißt, dass es beispielsweise an einer Glasplatte Reflexion von 4 % unabhängig von der Polarisierung an beiden Grenzflächen gibt.

Für planparallele Platten lässt sich außerdem zeigen, dass für den Austritt aus der Platte die Brewsterbedingung dann gilt, wenn sie auch beim Eintritt erfüllt ist.

**Reflexion am optisch dichteren Medium** Mithilfe der Formel für die Reflexionsgrade stellen wir nochmals fest: Bei der Reflexion am optisch dichteren Medium ( $n_2 > n_1$ ) gibt es keine Totalreflexion, was sich dadurch widerspiegelt, dass die Reflexionsgrade erst für  $\alpha \rightarrow 90^\circ$ , d. h. für streifenden Einfall, eins werden.

### Reflexion an Metallen

Wir gehen davon aus, dass das Metall für das verwendete Licht nicht transparent ist. Die Lichtfrequenz soll also kleiner als die Plasmafrequenz des Metalls sein ( $\omega < \omega_p$ ). Damit wird der Brechungsindex des Metalls imaginär (siehe Gleichung 5.8). Für die Brechungsindizes wählen wir also  $n_1 = 1$  (Luft),  $n_2 = i n_I$  und erhalten für den Reflexionsgrad am Beispiel für s-Polarisation.

$$\begin{aligned} |r_{\perp}|^2 &= \left| \frac{\cos \alpha - i n_I \cos \beta}{\cos \alpha + i n_I \cos \beta} \right|^2 \\ &= \frac{|\cos \alpha - i n_I \cos \beta|^2}{|\cos \alpha + i n_I \cos \beta|^2} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha + n_I^2 \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha + n_I^2 \cos^2 \beta} = 1 \end{aligned}$$

Für p-Polarisation erhält man das gleiche Ergebnis. Ideale Metalle reflektieren also in der Theorie trotz Dämpfung zu 100 % unabhängig vom Winkel und der Polarisation.

## 6.7. Evanescenze Wellen

Betrachtet man die Totalreflexion genauer, so stellt man fest, dass das elektrische Feld im optisch dünnern Medium nicht augenblicklich auf Null abfällt, sondern etwas hineinragt. Es fällt jedoch stark ab. Dieses Phänomen wird *evanescente Welle* genannt.

Wir nehmen eine Grenzfläche an, welche senkrecht auf der x-Achse und parallel zur z-Achse liegt. Darüber

hinaus gehen wir davon aus, dass sich die Welle in der x-z-Ebene bewegt.

Aufgrund der Stetigkeit der transversalen Komponente des elektrischen Feldes erhalten wir an der Grenzfläche die Bedingung

$$k_{ez} = k_{tz} \equiv k_z .$$

Über die Dispersionsrelation und unter Beachtung des Einfallswinkels  $\alpha$  erhalten wir

$$\begin{aligned} k_z &= \frac{\omega n_1}{c} \sin \alpha \\ k_t &= \sqrt{k_{tz}^2 + k_{tx}^2} = \frac{\omega n_2}{c} . \end{aligned}$$

Für den Wellenvektor senkrecht zur Oberfläche erhalten wir dann

$$\begin{aligned} k_{tx}^2 &= \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2} - k_z^2 \\ &= \frac{\omega^2 n_2^2}{c^2} - \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2} \sin^2 \alpha \\ \Rightarrow k_{tx} &= \frac{\omega n_2}{c} \sqrt{1 - \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \alpha} \equiv i \gamma . \end{aligned}$$

imaginär für  $\alpha > \alpha_{tr}$

Wir haben hier nun den Dämpfungsfaktor  $\gamma$  eingeführt

$$\gamma = \frac{\omega n_2}{c} \sqrt{\left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \alpha - 1} .$$

Der gesamte Wellenvektor der transmittierten Strahlung hat also die Form

$$\mathbf{k}_t = \begin{pmatrix} i \gamma \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix} .$$

Damit erhalten wir für das transmittierte elektrische Feld

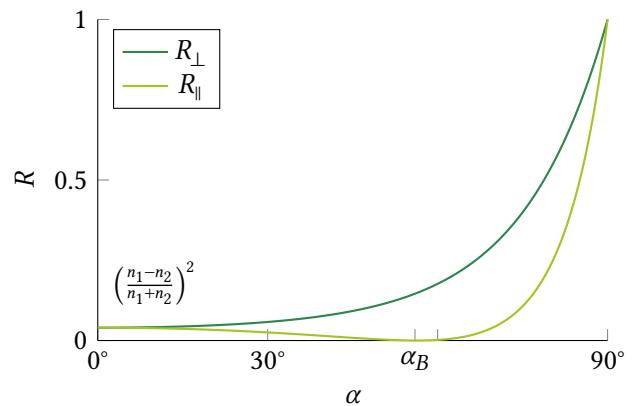
$$E_t(x, y, z) = E_{0t} e^{-\gamma x + i \omega t - i k_z z} .$$

Einen solchen Feldverlauf nennt man evanescente Welle. Sie oszilliert nur in z-Richtung, also entlang der Grenzfläche, und fällt senkrecht zu ihr exponentiell ab (innerhalb von  $1/\gamma \sim \lambda$ ).

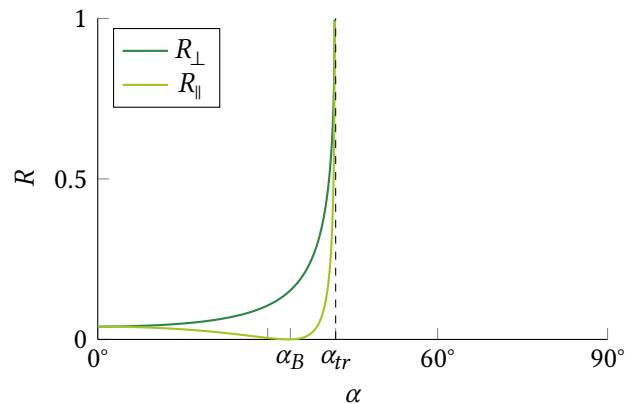
## 6. Elektromagnetische Wellen an Grenzflächen

### Frustrierte Totalreflexion

Dieses Phänomen ist in Abbildung 6.23 gezeigt und verdeutlicht die Abweichung von der Strahlenoptik in Raumbereichen von der Größe der Wellenlänge. Bringt man zwei Prismen nahe ( $\lesssim \lambda$ ) aneinander, so kann aufgrund der evaneszenten Welle Licht vom Prisma, an dessen Seite es eigentlich total reflektiert, in das andere Prisma koppeln und dort weiter propagieren. Diesen Effekt bezeichnet man als *frustrierte Totalreflexion* oder in Anlehnung an die Quantenmechanik als Tunneleffekt.

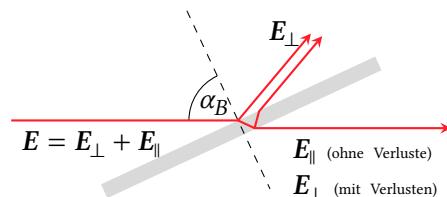


(a) Reflexion am optisch dichteren Medium ( $n_1 = 1, n_2 = 1.5$ ).  $\alpha_B = 56^\circ$

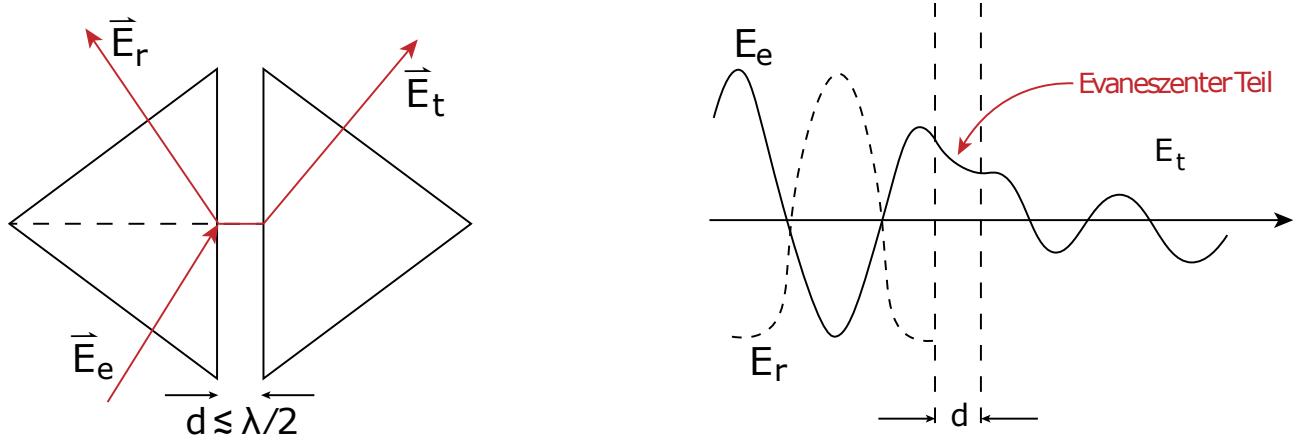


(b) Reflexion am optisch dünneren Medium ( $n_1 = 1.5, n_2 = 1$ ).  $\alpha_B = 34^\circ$ . Hier tritt nun auch Totalreflexion auf  $\alpha_{tr} = 42^\circ$ .

**Abb. 6.21.:** Typischer Verlauf des Reflexionsgrads, wenn die Absorption vernachlässigt werden kann (z.B. für Gläser.)



**Abb. 6.22.:** Unter der Ausnutzung des Brewsterwinkels kann eine planparallele Platte als Polarisator verwendet werden.



**Abb. 6.23.:** Frustrierte Totalreflexion: Licht koppelt trotz Totalreflexion in das zweite Prisma.

## Zusammenfassung

### Snelliussches Brechungsgesetz

An der Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  gilt:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$$

Die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  werden zur Flächennormalen gemessen. Der Winkel im Medium mit  $n_1$  ( $n_2$ ) ist mit  $\alpha$  ( $\beta$ ) bezeichnet.

### Totalreflexion

Beim Übergang von einem optisch dichteren (Brechungsindex  $n_1$ ) in ein optisch dünneres Medium (Brechungsindex  $n_2 < n_1$ ) tritt Totalreflexion auf, wenn gilt:

$$\alpha > \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

### Fresnelsche Formeln

An einer Grenzflächen zwischen zwei Medien mit reellen Brechungsindizes gelten für die Amplitudentransmissions- und Amplitudenreflexionskoeffizienten,  $t$  und  $r$ :

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, & t_{\perp} &= \frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \\ r_{\parallel} &= \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}, & t_{\parallel} &= \frac{2 \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

Die Indizes  $\perp$  und  $\parallel$  beziehen sich auf die Komponenten des elektrischen Feldes senkrecht beziehungsweise parallel zur *Einfallsebene*. Man spricht (auch in englischsprachiger Literatur) von *s*-Polarisation ( $\perp$ ) und *p*-Polarisation. Die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  sind die Winkel zur Grenzflächennormalen auf den beiden Seiten der Grenzfläche. Sind die beiden Brechungsindizes und einer der Winkel gegeben, lässt sich der zweite Winkel über das Snelliussche Brechungsgesetz berechnen.

### Brewsterwinkel

Stehen transmittierter und reflektierter Strahl senkrecht aufeinander, so spricht man von Lichteinfall im Brewsterwinkel. Der Brewsterwinkel ist gegeben durch:

$$\alpha_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Bei Einfall im Brewsterwinkel ist der reflektierte Strahl vollständig *s*-polarisiert. Die gesamte einfalende Leistung in *p*-Polarisation (und ein Teil der einfallenden *s*-Polarisation) wird transmittiert.

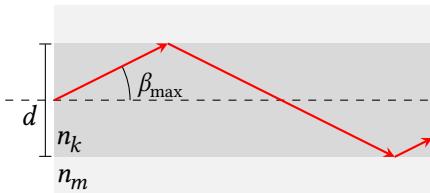
# 7. WELLENLEITER

Bisher hatten wir die Propagation von Licht in einer Faser durch eine Zickzackbahn modelliert. Die Laufzeit hängt hierbei vom Eintrittswinkel ab. Für eine Faserlänge  $L$  ergibt sich für geradlinige Strahlen eine Laufzeit von  $t_F = n_k L/c$ . Für Licht, das unterhalb des kritischen Winkels gerade noch durch Totalreflexion geführt wird erhalten wir jedoch (siehe Abbildung 7.1):

$$\begin{aligned} t'_F &= \frac{n_k L}{c} \frac{1}{\cos \beta_{\max}} = t_F + \Delta t \\ &\approx \frac{n_k L}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \beta_{\max} \right) \\ \Rightarrow \Delta t &= \frac{n_k L}{2c} \sin^2 \beta_{\max} \end{aligned}$$

Aus dem bereits hergeleiteten Zusammenhang  $n_k \sin \beta_{\max} = \sqrt{n_k^2 - n_m^2}$  erhalten wir  $\sin^2 \beta_{\max} = (n_k^2 - n_m^2)/n_k^2$  und somit

$$\Delta t = \frac{n_k L}{2c} \frac{n_k^2 - n_m^2}{n_k^2}.$$



**Abb. 7.1.:** Zustandekommen der Laufzeitverzögerung  $\Delta t$  aufgrund des Eintrittswinkels  $\beta$ .

Was bedeutet dies für die Datenübertragung?

Die einfachste Möglichkeit Daten über eine Glasfaser zu übertragen ist, in einem fest definierten Takt das Licht "ein-" und "auszuschalten", wie in Abbildung 7.2 angedeutet. Je kürzer die Digitalisierungszeit  $\delta t$  ist, desto höher ist die Übertragungsrate. Wenn wir am Beginn der Faser einen Lichtpuls mit unendlich steil ansteigender/abfallender Kante in die Faser schicken, so wird diese Kante aufgrund der unterschiedlichen Winkel und damit verbundenen Laufzeiten am Ende der Faser über  $\Delta t$  "verschmiert" auftreten.

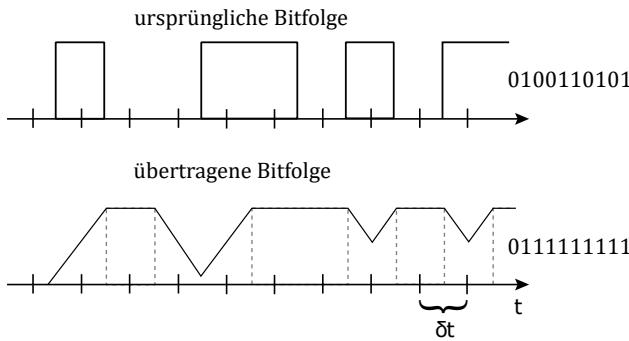
Für  $\Delta t \geq \delta t$  verlieren wir somit die übertragene Information, da benachbarte Bits nicht mehr voneinander unterscheiden werden können. In diesem Fall würde das Licht des  $n$ -ten Bits, welches mit dem Maximalwinkel  $\beta_{\max}$  durch die Faser propagierte, zu dem Zeitpunkt ankommen, an dem das  $(n+1)$ -te Bit ausgelesen wird.

Für eine Repetitionsrate  $f_{\text{Rep}} = 1 \text{ GHz}$  erhalten wir eine Digitalisierungszeit  $\delta t = 1 \text{ ns}$ . Für die typische Brechungsindexpaarung  $n_k = 1.46$  und  $n_m = 1.44$  ergibt sich somit eine maximale Übertragungslänge von  $L_{\max} = 15 \text{ m}$ , was für Telekommunikationsfasern offensichtlich viel zu kurz ist. Wählt man spezielle Fasern und einen kleinen Öffnungswinkel, so ist maximal eine Länge von 1 km möglich.

Wie werden also Daten mit Glasfasern über die ganze Erde übertragen?

Die Lösung des Problems liegt in der Idee, den Faserdurchmesser  $d$  in den Bereich von  $\lambda$  zu verkleinern. Dadurch können wir nicht mehr das "Lichtstrahlen"-Modell verwenden. Wir müssen die Wellennatur des

## 7. Wellenleiter



**Abb. 7.2.:** Bei der Datenübertragung treten Fehler auf, wenn der Laufzeitunterschied größer als die Digitalisierungszeit  $\delta t$  ist. (oben) Daten am Beginn der Faser. (unten) Ausgelesene Daten aufgrund des Laufzeitunterschieds.

Lichts berücksichtigen. Wir sprechen dann von *Wellenleitern*.

Wir müssen nun die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 E_{l,y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{l,y}}{\partial z^2} - \frac{n_l^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_{l,y}}{\partial t^2} = 0$$

für  $l = m, k$ , also für Mantel und Kern, lösen.

Aus der Maxwell-Gleichung  $\nabla \times E = -\dot{B}$  folgt  $\partial_x E_{l,y} = -\partial_t B_{l,z}$ . Setzen wir nun für  $E_y$  eine ebene Welle an

$$E_{l,y}(x, z, t) = E_{l,y}(x) \exp i(\omega t - k_z z)$$

erhalten wir

$$B_{l,z} = -\frac{1}{i\omega} \frac{\partial E_{l,y}}{\partial x}.$$

Setzen wir den Ansatz in die Wellengleichung ein, erhalten wir

$$\frac{\partial^2 E_{l,y}}{\partial x^2} + (k_l^2 - k_z^2) E_{l,y} = 0$$

mit  $l = m, k$  und  $k_l = \omega n_l / c$ .

Eine Lösung dieser Gleichung lautet

$$E_{l,y}(x) = A e^{\pm i k_{l,x} x}$$

$$\text{mit } k_{l,x} = \sqrt{k_l^2 - k_z^2} \Rightarrow k_l^2 = k_{l,x}^2 + k_z^2.$$

Wir müssen nun noch die Randbedingungen berücksichtigen:

- Die Tangentialkomponenten von  $E$  und  $B$  müssen bei  $\pm d/2$  stetig sein. Daher folgt

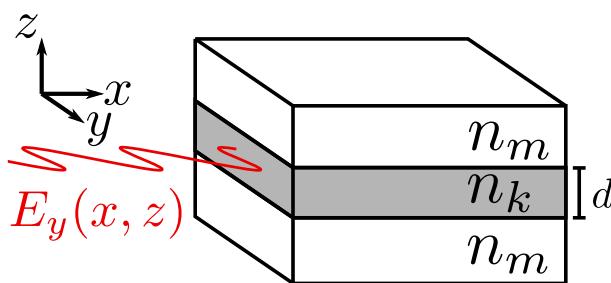
$$E_{m,y}\left(\pm \frac{d}{2}\right) \stackrel{!}{=} E_{k,y}\left(\pm \frac{d}{2}\right)$$

- Ist  $B_z$  stetig, so ist auch  $\partial_x E_y$  stetig. Wir folgern damit

$$\left( \frac{\partial E_m(x)}{\partial x} \right)_{\pm d/2} \stackrel{!}{=} \left( \frac{\partial E_k(x)}{\partial x} \right)_{\pm d/2}.$$

Aus Symmetriegründen wählen wir für das elektrische Feld den folgenden Ansatz

$$E_l(x) \propto \begin{cases} \sin(x); \cos(x) & \text{Kern} \\ e^{-\gamma|x|} & \text{Mantel} \end{cases},$$



**Abb. 7.3.:** Schematische Darstellung eines Schichtwellenleiters.

wobei wir mit  $k_{m,x}^2 + k_z^2 = k_m^2$

$$\gamma = ik_{m,x} = i\sqrt{k_m^2 - k_z^2} = \sqrt{k_z^2 - k_m^2}$$

gilt. Außerdem erhalten wir mit  $k_z^2 = k_k^2 - k_{k,x}^2$

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{k_k^2 - k_{k,x}^2 - k_m^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\omega n_k}{c}\right)^2 - k_{k,x}^2 - \left(\frac{\omega n_m}{c}\right)^2}.\end{aligned}$$

Die Welle fällt also exponentiell im Außenraum bzw. im Mantel ab. Sie wird folglich im Kern geleitet.

### 7.1.1. Lösungen für die Schichtleitermode

Wir betrachten zunächst die Lösungen für den Fall  $E_k \propto \cos$ :

- Für das elektrische Feld  $E_t$  muss folgende Randbedingung gelten:

$$A_1 e^{-\gamma \frac{d}{2}} = A_0 \cos\left(k_{k,x} \frac{d}{2}\right)$$

$A_0, A_1 = \text{konst.}$

- Für das magnetische Feld  $B_t$  gilt:

$$\gamma A_1 e^{-\gamma \frac{d}{2}} = k_{k,x} A_0 \sin\left(k_{k,x} \frac{d}{2}\right)$$

Teilen wir beide Gleichungen durcheinander, so erhalten wir den Dämpfungsfaktor

$$\gamma = k_{k,x} \tan\left(k_{k,x} \frac{d}{2}\right).$$

Auf äquivalentem Wege erhalten wir die Lösungen für  $E \propto \sin$ :

- Für das elektrische Feld  $E_t$  muss folgende Randbedingung gelten:

$$A_1 e^{-\gamma \frac{d}{2}} = A_0 \sin\left(k_{k,x} \frac{d}{2}\right)$$

$A_0, A_1 = \text{konst.}$

- Für das magnetische Feld  $B_t$  gilt:

$$-\gamma A_1 e^{-\gamma \frac{d}{2}} = k_{k,x} A_0 \cos\left(k_{k,x} \frac{d}{2}\right)$$

Durch Teilen erhalten wir wieder den Dämpfungsfaktor

$$\gamma = -k_{k,x} \cot\left(k_{k,x} \frac{d}{2}\right).$$

### 7.1.2. Bedeutung der Lösungen

Betrachten wir zunächst den Extremfall  $\gamma \rightarrow \infty$ . In diesem Fall wird das gesamte Licht im Kern geführt; er ähnelt also einem Kastenpotential. Für welche Werte divergieren nun tan und cot?

$$\begin{aligned}\tan \phi &\rightarrow \infty \text{ für } \phi = (2m+1)\frac{\pi}{2} \\ \cot \phi &\rightarrow \infty \text{ für } \phi = 2m\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

jeweils mit  $m \in \mathbb{Z}$  (siehe auch Abbildung 7.4). Daraus ist ersichtlich, dass die Moden quantisiert sind. Kombinieren wir die Quantisierungsbedingungen für tan und cot, ergibt sich

$$k_{k,x} = m \frac{\pi}{d},$$

wobei gerade  $m$  zu den sin- und ungerade  $m$  zu dem cos-Moden gehören.

Wir konstruieren die Moden aus den Randbedingungen: Für die Mode  $m = 0$  gilt  $E_k(x) \propto \sin(0) = 0$ . Diese Mode besitzt also keine Amplitude und ist deswegen nicht brauchbar. Die ersten verwendbaren Moden niedriger Ordnung sind in Abbildung 7.5 dargestellt.

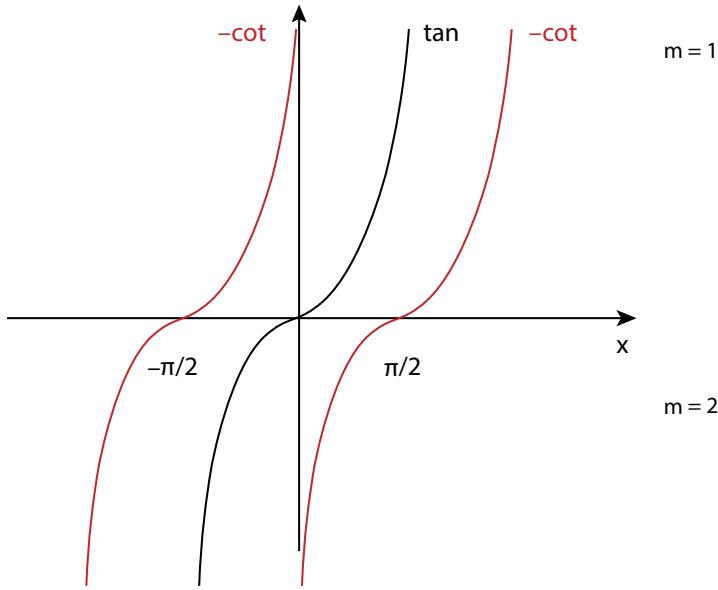
Wir können das mit der Lösung zum Kastenpotential, zur Saitenschwingung etc. vergleichen.

$$\begin{aligned}E_k(x, z, t) &= E_k(x) e^{i\omega t - ik_z z} \\ &\propto \begin{cases} \cos\left(m \frac{\pi}{d} x\right) e^{i\omega t - ik_z z} & m = 1, 3, \dots \\ \sin\left(m \frac{\pi}{d} x\right) e^{i\omega t - ik_z z} & m = 2, 4, \dots \end{cases}\end{aligned}$$

Zu jeder Mode gehören zwei  $\mathbf{k}$ -Vektoren (siehe Abbildung 7.6):

$$\mathbf{k}_k = \begin{pmatrix} \pm m \frac{\pi}{d} \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}.$$

## 7. Wellenleiter

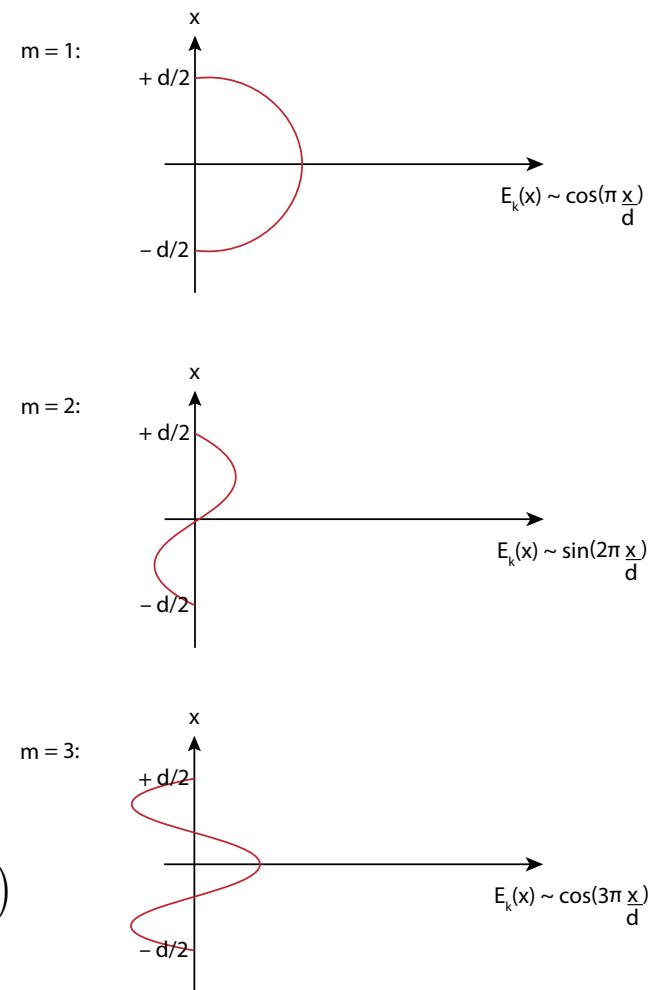


**Abb. 7.4.:** Verlauf von  $f(x) = \tan(x)$  und  $f(x) = -\cot(x)$

Es entstehen also stehende Wellen entlang der  $x$ -Achse und laufende Wellen in  $z$ -Richtung. Die allgemeine Lösung ist eine Superposition der Moden:

$$E(x, z, t) = e^{i\omega t - ik_z z} \sum_m \left( a_m \cos \left( m \frac{\pi}{d} x \right) + b_m \sin \left( m \frac{\pi}{d} x \right) \right)$$

Hierbei ist  $a_m = 0$  für gerade  $m$  und  $b_m = 0$  für ungerade  $m$ . Diese Entwicklung in sin- und cos-Moden ähnelt einer Fourier-Reihe.



**Abb. 7.5.:** Darstellung der ersten drei Moden

### 7.1.3. Anzahl der geführten Moden

Wir hatten bereits den Wellenvektor für die geführten Moden hergeleitet.

$$\mathbf{k}_k = \begin{pmatrix} \pm m \frac{\pi}{d} \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } k_z = \sqrt{k_k^2 - k_{k,x}^2} = \sqrt{\left(\frac{\omega n_k}{c}\right)^2 - \left(m \frac{\pi}{d}\right)^2}.$$

Wir sehen, dass  $k_z$  für

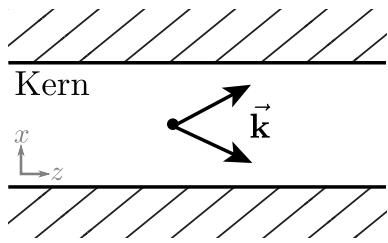
$$m > \frac{d}{\pi} \frac{\omega n_k}{c} = \frac{d}{\pi} \frac{2\pi n_k}{\lambda_0}$$

imaginär wird, wobei  $\lambda_0$  die Wellenlänge im Vakuum ist. Für einen bestimmten Durchmesser  $d$  können also nur Moden mit  $m \leq m_{\max}$  geführt werden. Wir erhalten

$$m_{\max} = \frac{2d}{\lambda_k}, \quad (7.1)$$

wobei  $\lambda_k$  die Wellenlänge im Kern ist. Für Fasern mit Kerndurchmesser  $d < \lambda_k/2$  gibt es also keine Moden.

Ideal für die Datenübertragung sind Fasern, welche nur eine Mode im Kern führen (*single-mode fibers*). Für



**Abb. 7.6.:** Zu den  $k$ -Vektoren einer Mode

ihren Kerndurchmesser gilt also

$$1 < \frac{2dn_k}{\lambda_0} < 2 .$$

#### 7.1.4. Endliche Dämpfung im Mantel

Wir betrachten nun den realistischen Fall  $\gamma < \infty$ . Es existieren nun evanescente Wellen, welche in den Mantel hineinragen (Abbildung 7.7). Für die Propagation von Wellen durch eine Faser spielt folglich auch der Brechungsindex des Mantels eine Rolle, auch wenn die Wellen zum Großteil im Kern propagieren.

Reale optische Fasern sind rotationssymmetrisch (Abbildung 7.8). Für ihr Brechungsindoprofil gilt also  $n = n(r)$ . Eine single-mode Faser erhält man in diesem Fall, wenn gilt:

$$d < \frac{0.76 \lambda_0}{\sqrt{n_k^2 - n_m^2}} . \quad (7.2)$$

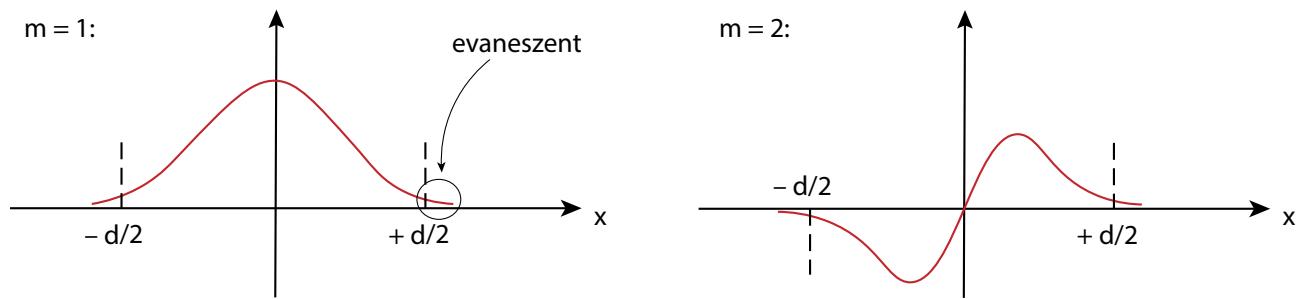
#### Technische Details

Die Herstellung von Fasern findet in einem Faserturm statt, in dem die Fasern "gezogen" werden (siehe Abbildung 7.9).

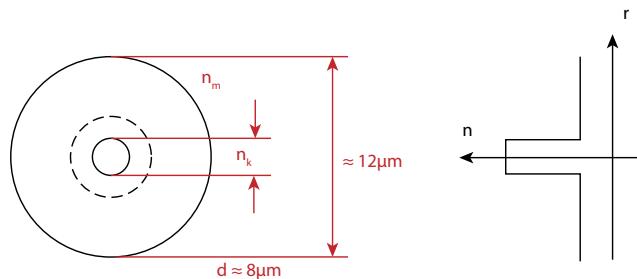
Übliche Telekommunikationsfasern weisen eine Dämpfung von  $\approx 0.2 \text{ dB km}^{-1}$  entlang der Ausbreitungsrichtung auf. Dies entspricht einer Transmission von 1 % nach 100 km. Aufgrund dieser Dämpfung werden Telekommunikationssignale in regelmäßigen Abständen in sogenannten *Repeatern* verstärkt.

Zudem sind Wellen nie vollständig monochromatisch, weswegen wir die Dispersion berücksichtigen müssen. Die Gruppengeschwindigkeitsdispersion (GVD) von Erbium-dotierten Fasern wird für eine Zentralwellenlänge von  $1.5 \mu\text{m}$  null, weshalb diese die gebräuchlichste Wellenlänge für Telekommunikationsfasern ist.

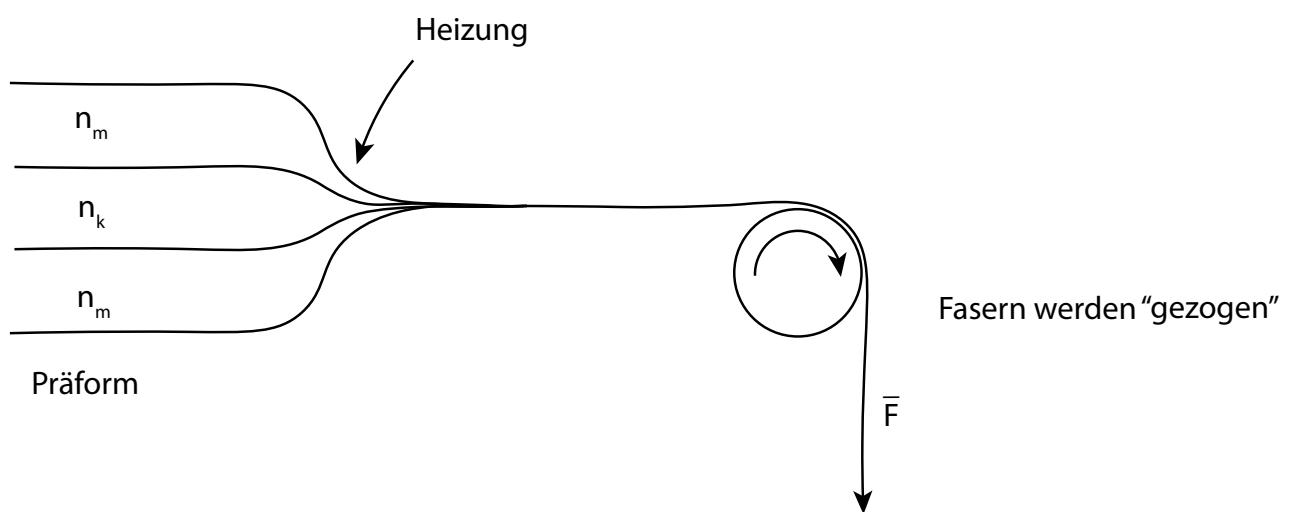
## 7. Wellenleiter



**Abb. 7.7.:** Darstellung der Moden in einer Faser mit  $\gamma < \infty$



**Abb. 7.8.:** Rotationssymmetrische Faser



**Abb. 7.9.:** Zur technischen Herstellung optischer Fasern

## Zusammenfassung

### Wellenleiter

Liegt der Kerndurchmesser einer Glasfaser im Bereich der Wellenlänge, funktioniert eine Beschreibung durch geometrische Lichtstrahlen nicht mehr. Da die Wellennatur des Lichtes berücksichtigt werden muss, spricht man in diesem Fall von *Wellenleitern*.

### Anzahl geführter Moden

Die Anzahl der erlaubten Moden in einem Schichtwellenleiter ist gegeben durch:

$$m_{\max} = \frac{2d}{\lambda_k}.$$

Achtung:  $\lambda_k$  bezeichnet hier die Wellenlänge im Kern und nicht die Vakuumwellenlänge  $\lambda_0$ . Mit dem Brechungsindex des Faserkerns  $n_k$  gilt:  $\lambda_k = \lambda_0/n_k$ .

### Einzelmodenfasern (single-mode fibers)

Für Einzelmodenfasern gilt:

$$1 < m_{\max} < 2 .$$

Für eine reale, zylindersymmetrische Faser ist dies erfüllt, wenn

$$d < \frac{0.76 \lambda_0}{\sqrt{n_k^2 - n_m^2}} ,$$

wobei  $d$  der Kerndurchmesser,  $n_k$  der Brechungsindex des Kerns,  $n_m$  der Brechungsindex des Mantels und  $\lambda_0$  die Vakuumwellenlänge ist.

# 8. STREUUNG

Wir beginnen mit einer generellen Einteilung zum Phänomen der Streuung. Man kann Streuung danach einteilen, ob sich die Frequenz des gestreuten Lichts ändert oder nicht:

- Wir sprechen von **elastischer Streuung**, wenn sich die Frequenz nicht verändert.
- Bei **inelastischer Streuung** liegt eine Frequenzänderung vor.

Darüber hinaus unterscheidet man Streuung, je nachdem welchen Effekt sie auf die Phase der gestreuten Welle hat:

- Bei **kohärenter Streuung** gibt es eine definierte Phasenbeziehung zwischen einfallender und ausfallender Welle.
- Bei **inkohärenter Streuung** liegt eine statistische Phasenbeziehung vor.

## 8.1. Elastische Streuung

### 8.1.1. Kleine Teilchen $r \ll \lambda$

Gilt  $r \ll \lambda$ , wie etwa bei Atomen, Molekülen oder kleinen Nanoteilchen, so können wir die Streuung als Dipolschwingung betrachten (siehe Abschnitt 5.3). In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e}{m} \frac{E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega} \\ \Rightarrow x_0 &= \frac{e}{m} \frac{E_0}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega}. \end{aligned}$$

Mit einer längeren Herleitung<sup>1</sup> kann man zeigen, dass daraus für die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel element  $d\Omega$  gilt:

$$\frac{d}{d\Omega} P_{\text{Dipol}} = \frac{Ne^2 x_0^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \theta$$

und erhalten mit

$$|x_0|^2 = \frac{e^2 E_0^2}{m^2} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

schließlich das Ergebnis:

$$\frac{d}{d\Omega} P_{\text{Dipol}} = \frac{Ne^4 E_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2}.$$

Für den Fall  $\omega < \omega_0$ , ergibt sich näherungsweise folgender wichtiger Zusammenhang:

$$\frac{d}{d\Omega} P_{\text{Dipol}} \sim \omega^4 \sin^2 \theta. \quad (8.1)$$

<sup>1</sup>Siehe zum Beispiel Griffiths' Einführung in die Elektrodynamik [5], Kapitel 11.

## 8. Streuung

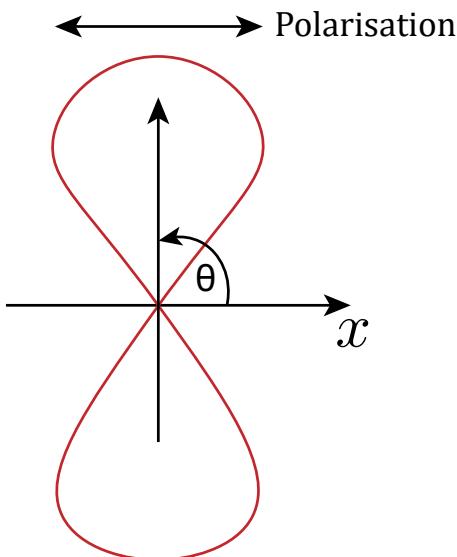


Abbildung 8.1.: Streuerender Dipol.

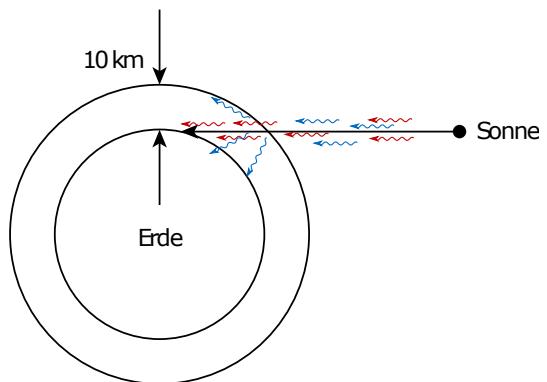


Abbildung 8.2.: Entstehung von Morgen- und Abendrot.

C) **Thomson-Streuung** liegt bei  $\omega \gg \omega_0$  und  $\gamma \approx 0$  vor. Hierbei kommt es zur Streuung von Licht an „freien“ Elektronen. Dann folgt

$$\frac{d}{d\Omega} P_{\text{Dipol}} = \frac{Ne^4 E_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} \sin^2 \theta$$

unabhängig von der Frequenz des Lichts  $\omega$ . Thomson-Streuung tritt zum Beispiel bei der Streuung des Lichts an der Korona der Sonne auf. Sie wird bei einer Sonnenfinsternis sichtbar.

### Frequenzabhängigkeit

- A) Den obigen Fall,  $\omega < \omega_0$ , bezeichnet man als **Rayleigh-Streuung**. Charakteristisch für Rayleigh-Streuung ist die starke Abhängigkeit der gestreuten Leistung von der Wellenlänge:

$$\frac{dP}{d\Omega} \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

Blaues Licht (400 nm) wird also 16-mal stärker gestreut als rotes Licht (800 nm). Dies erklärt, weshalb uns der Himmel tagsüber blau erscheint. Der Himmel auf dem Mond ist dagegen schwarz, weil dort keine Atmosphäre das Licht streut. Das gleiche Prinzip erklärt das Morgen- und Abendrot: Die blauen Anteile fehlen wegen des längeren Weges durch die Atmosphäre, der aus dem steileren Winkel der Sonnenstrahlung resultiert (siehe Abbildung 8.2).

- B) **Resonante Streuung** finden wir für  $\omega \approx \omega_0$ . Sie verursacht z.B. die Fraunhofer-Linien bei der Anregung atomarer Übergänge. Diesen Effekt nutzt man in der Laserspektroskopie zum Nachweis von Atomen und Molekülen.

### Streuquerschnitt

Der Streuquerschnitt ist definiert als

$$\sigma = \frac{\text{gestreute Leistung}}{\text{einfallende Intensität}}$$

Um  $\sigma$  zu berechnen, muss die Winkelabhängigkeit der Streuung berücksichtigt werden:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega.$$

Der **differentielle Streuquerschnitt**  $d\sigma/d\Omega$  ist definiert als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{gestreute Leistung pro Raumwinkel}}{\text{einfallende Intensität}} = \frac{dP/d\Omega}{I_{\text{in}}} = \frac{dP/d\Omega}{\frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2}$$

mit  $I_{\text{in}} = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2$ .

Für den Fall der Thomson Streuung erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{e^4 E_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 m_e^2 c^3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2} \\ &= \left( \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 \sin^2 \theta \stackrel{!}{=} r_e^2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

mit dem klassischen Elektronenradius  $r_e = 2,8 \times 10^{-15} \text{ m}$ .

Wir schreiben für den totalen Streuquerschnitt:

$$\begin{aligned}\sigma &= r_e^2 \int \sin^2 \theta d\Omega = r_e^2 \int \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \cdot 2\pi \\ &= \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6,65 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2 = 0,67 \text{ barn}\end{aligned}$$

mit  $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$ . Man kann sich das so vorstellen, dass ein Elektron effektiv wie eine Scheibe mit Querschnitt  $\sigma$  wirkt, an der jedes Photon gestreut werden kann.

### 8.1.2. Große Teilchen $r \approx \lambda$ und $r \gg \lambda$

Bei Lichtstreuung für Wellenlängen im Bereich der Teilchengröße  $r \approx \lambda$  spricht man von **Mie-Streuung**. Im Allgemeinen muss man dafür die Maxwell-Gleichungen unter Berücksichtigung der Geometrie und des Brechungsexponenten der Teilchen lösen. Für sphärische Teilchen gibt es analytische Formeln für die Mie-Streuung, die sogenannte Mie-Lösung der Maxwell-Gleichungen. Ein Beispiel für Mie-Streuung ist die Streuung an Fett-Teilchen in stark verdünnter Milch oder an (synthetisch hergestellten) Nanokugeln.

Für elastische Streuung und große Teilchen  $r \gg \lambda$  können die Fresnelschen Formeln (Kapitel 6) und die Ergebnisse der geometrischen Optik (Kapitel 9) verwendet werden.

## 8.2. Inelastische Streuung

A) **Raman- und Brillouin-Streuung** liegt im Fall  $r \ll \lambda$  und beliebige  $\omega$  vor. Es kommt zu einer

Frequenzverschiebung infolge der Streuung am schwingenden Dipol. Raman-Streuung bezeichnet optische Schwingungen im Bereich  $\gtrsim 100 \text{ THz}$ , Brillouin-Streuung hingegen akustische Schwingungen mit  $\lesssim 160 \text{ Hz}$ .

B) Bei  $r \ll \lambda$  und  $\omega \gg \omega_0$  spricht man von der **Compton-Streuung**.

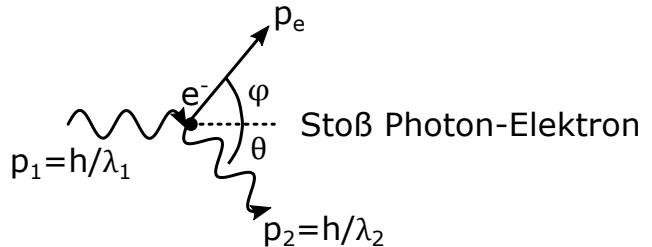


Abb. 8.3.: Impulsdiagramm zur Compton Streuung.

Es handelt sich hierbei um einen relativistischen Stoß zwischen einem Photon und einem sich in Ruhe befindlichen Elektron (siehe Abbildung 8.3). Compton-Streuung wird in Abschnitt 19.8 detaillierter behandelt.

C) Bei der **Paarbildung** erzeugt ein energiereiches Photon ein Elektron-Positron-Paar. Dafür ist eine Energie  $E \geq 2m_e c_0^2 \approx 2 \cdot 511 \text{ keV}$ , also mindestens die Ruheenergie von Elektron und Positron, notwendig. Auch hier müssen wieder die Energie- und Impulserhaltung erfüllt sein.

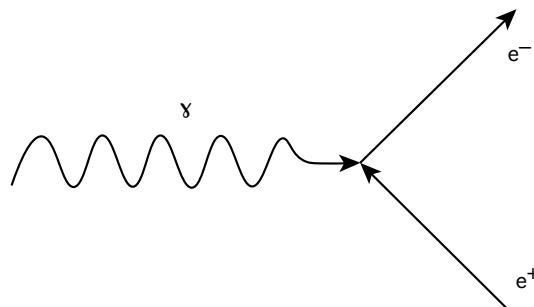
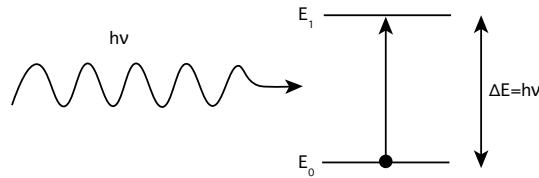


Abb. 8.4.: Feynman-Diagramm zur Paarbildung.

## 8. Streuung

- D) Beim **Photoeffekt** wird ein Photon absorbiert, um ein Atom in einen höheren Energiezustand anzuregen. Ist  $h\nu = E_1 - E_0$ , dann wird das Photon absorbiert und kein weiteres Teilchen erzeugt. Dies ist in gewisser Weise ein halber Stoß.



**Abb. 8.5.:** Zum Photoeffekt.

### 8.3. Streurate und Streuleistung

Die Streurate ist gegeben durch

$$n_s = \frac{I}{\hbar\omega} \cdot N \cdot \sigma.$$

Hierbei bezeichnet  $\frac{I}{\hbar\omega}$  die gestreuten Photonen pro Sekunde und  $\text{m}^2$ .  $N$  definiert die Dichte der Streuzentren. Dann gilt für die

$$\text{Streuleistung} \equiv \hbar\omega n_s = N\sigma I = N\sigma \cdot \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2.$$

## Zusammenfassung

### Arten von Streuung

- Unterscheidung nach Energieerhaltung: Bei **elastischer Streuung** bleibt die Energie des einlaufenden Photons erhalten. Bei **inelastischer Streuung** ändert sich die Photonenenergie.
- Unterscheidung nach Kohärenz: Man spricht von **kohärenter Streuung** wenn es eine feste Phasenbeziehung zwischen einlaufender und auslaufender Welle gibt. Lassen sich über diese Phasenbeziehung nur statistische Aussagen treffen, spricht man von **inkohärenter Streuung**.

### Arten von elastischer Streuung

- **Rayleigh-Streuung:** kleine Teilchen ( $r \ll \lambda$  Atome, Moleküle, ...) und niedrige Frequenzen ( $\omega \ll \omega_0$ ). Für die abgestrahlte Leistung gilt:

$$\frac{d}{d\Omega} P_{\text{Dipol}} \sim \omega^4 \sin^2 \theta \quad (8.2)$$

Rayleigh-Streuung ist für das Blau des Himmels verantwortlich.

- **Resonante Streuung** ( $\omega \approx \omega_0$ ) an kleinen ( $r \ll \lambda$ ) Objekten.
- **Thomson-Streuung:** kleine, freie (oder schwach gebundene), geladene Teilchen ( $r \ll \lambda$ ) und hohe Frequenzen ( $\omega \gg \omega_0$ ).
- **Mie-Streuung:** große Teilchen ( $r \approx \lambda$ )

### Arten von inelastischer Streuung

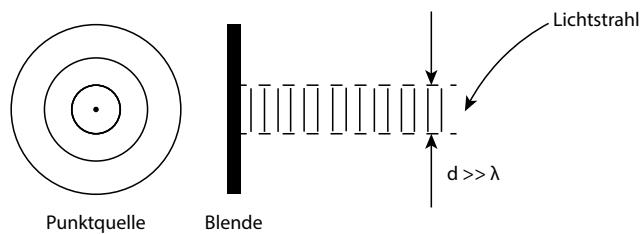
- **Raman- und Brillouin-Streuung:** Frequenzverschiebung durch Streuung an schwingenden Dipolen. Optische Frequenzen: Raman-Streuung, Akustische Frequenzen: Brillouin-Streuung
- **Compton-Streuung:** Streuung eines Photons an einem freien Elektron mit Wellenlängenänderung des Photons.
- **Paarbildung:** Ein Photon zerfällt in ein Paar aus Teilchen und Antiteilchen.
- **Photoeffekt:** Erzeugung eines angeregten elektronischen Zustandes (innerer Photoeffekt) oder eines freien Elektrons (äußerer Photoeffekt) durch Absorption eines Photons.



## 9.

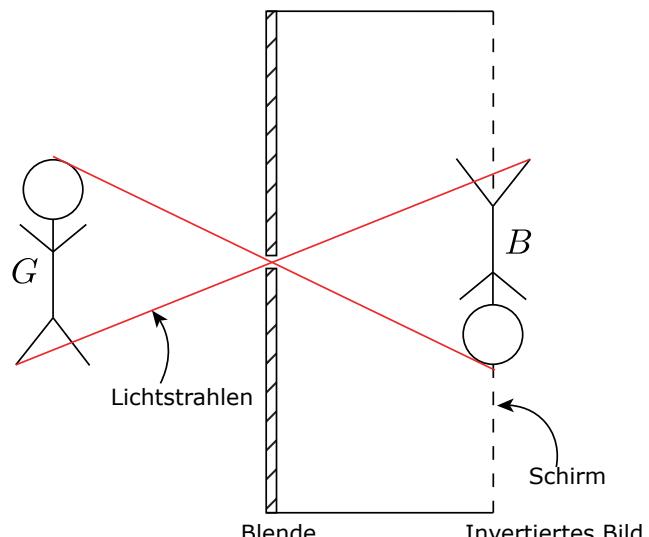
## GEOMETRISCHE OPTIK

In der geometrischen Optik betrachtet man die Ausbreitung von Licht als Lichtstrahl (oder Lichtbündel). Wir ignorieren also die Wellennatur des Lichts. Eine Möglichkeit, einen solchen Lichtstrahl zu erzeugen, ist in [Abbildung 9.1](#) dargestellt. Dieses geometrische Modell eines **Lichtstrahls** ist offensichtlich nur anwendbar, wenn die betrachteten Längen deutlich größer als die Wellenlänge sind. Insbesondere muss der Strahldurchmesser  $d$  größer als die Wellenlänge sein ( $d > \lambda$ ).



**Abb. 9.1.:** Erzeugung eines Lichtstrahls für die geometrische Optik.

Eines der simplisten Beispiele für den Gebrauch der geometrischen Optik ist die Abbildung eines Objektes durch eine Blende: Camera Obscura, oder auch Lochkamera genannt ([Abbildung 9.2](#)). Bei einer Lochkamera tritt Licht durch eine kleine Öffnung und trifft auf einen dahinterliegenden Schirm. Im idealisierten Fall einer punktförmigen Blende wird jeder Ausgangspunkt eines Lichtstrahles eindeutig auf einen Punkt auf dem Schirm abgebildet. Wird die Blendenöffnung vergrößert, so verkürzt sich zwar die notwendige Belichtungszeit, doch das Bild wird unscharf. In diesem Fall gibt es nämlich einen endlichen Raumwinkel von



**Abb. 9.2.:** Schematische Darstellung einer Camera Obscura.

Lichtstrahlen, aus dem alle auf den selben Punkt am Schirm abgebildet werden.

Das Prinzip der Lochkamera wird von manchen Weichtieren angewendet, die lediglich eine kleine Öffnung anstelle einer Linse in ihren Augen verwenden. Die Auswirkung der Blendenöffnung auf die Bildschärfe können wir beobachten, wenn wir unsere Augen zukneifen: Wir verkleinern auch hier den Eintrittswinkel, um schärfer zu sehen.

## 9. Geometrische Optik

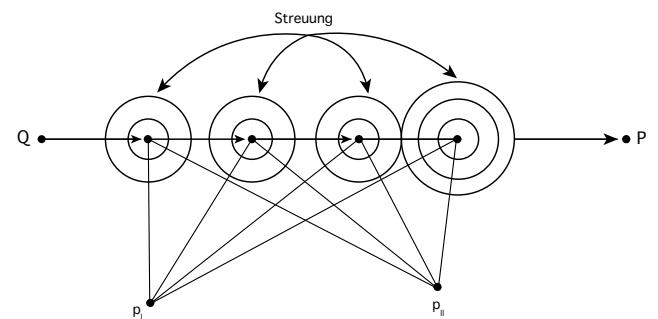
Wir wollen an dieser Stelle den Begriff Abbildung definieren:

In der (geometrischen) Optik spricht man von einer Abbildung eines Objektes (bzw. einer Objektebene) auf eine Bildebene, wenn alle Strahlen, die von einem Punkt in der Objektebene ausgehen eindeutig auf einen Punkt in der Bildebene geleitet (d. h. abgebildet) werden.

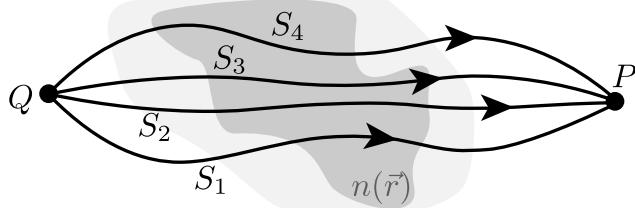
$$\delta W(S_i) = \delta \int_{S_i} n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0 \quad (9.1)$$

d. h. für den tatsächlich benutzten Pfad muss die optische Länge (also die Phasenänderung von  $Q$  nach  $P$ ) extremal sein.

Daraus folgt die lineare Lichtausbreitung in homogenen Medien, da nur bei geradliniger Ausbreitung alle gestreuten Wellen die gleiche Phase haben (siehe Abbildung 9.4).



**Abb. 9.4.:** Zur Lichtausbreitung



**Abb. 9.3.:** Zum Fermatschen Prinzip

Aus dem Fermatschen Prinzip können wir wieder das Reflexions- und Brechungsgesetz herleiten.

Wir bezeichnen mit  $S_i$  alle denkbaren Pfade zwischen zwei Punkten  $Q$  und  $P$  (siehe Abbildung 9.3). Die optische Pfadlänge  $W(S_i)$  eines Pfades  $S_i$  ist gegeben durch:

$$W(S_i) = \int_{S_i} n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Nach dem Fermatschen Prinzip breitet sich Licht auf dem extremalen optischen Pfad aus. Es gilt also

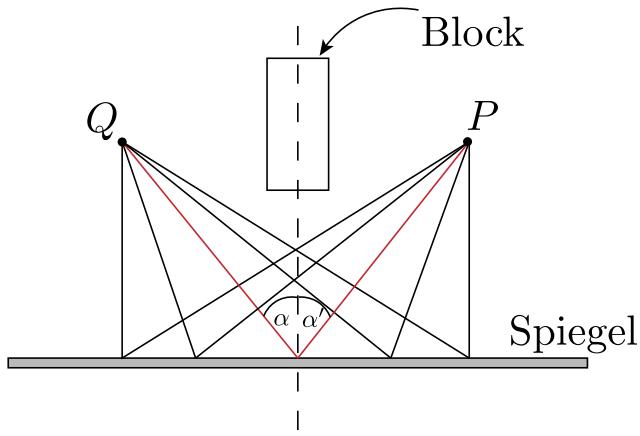
### Reflexion nach Fermat

Um das Reflexionsgesetz aus dem Fermatschen Prinzip herzuleiten, betrachten wir den Aufbau in Abbildung 9.5. Ein Block mittig zwischen  $Q$  und  $P$  sorgt dafür, dass der direkte Weg von  $Q$  nach  $P$  versperrt ist.

Errechnen wir den optischen Weg für alle möglichen Reflexionswinkel, so sehen wir aus Abbildung 9.6, dass das Minimum bei  $\alpha = \alpha'$  liegt. Wir erhalten somit das bekannte Reflexionsgesetz „Einfallsinkel = Ausfallwinkel“.

### Brechung nach Fermat

Zur Herleitung des Brechungsgesetzes mit Hilfe des Prinzips von Fermat betrachten wir Abbildung 9.7. Die Parametrisierung der Wege durch den Punkt  $(x_0, 0)$  auf der Oberfläche lautet unter Verwendung des Satzes



**Abb. 9.5.:** Aufbau zur Herleitung des Reflexionsgesetzes aus dem Fermatschen Prinzip

von Pythagoras:

$$W = n_1 \sqrt{(x_0 - x_q)^2 + y_q^2} + n_2 \sqrt{(x_p - x_0)^2 + y_p^2}$$

Aufgrund des Fermatschen Prinzips fordern wir

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{\partial W}{\partial x_0} \\ &= n_1 \frac{x_0 - x_q}{\sqrt{(x_q - x_0)^2 + y_q^2}} - n_2 \frac{x_p - x_0}{\sqrt{(x_p - x_0)^2 + y_p^2}} \end{aligned}$$

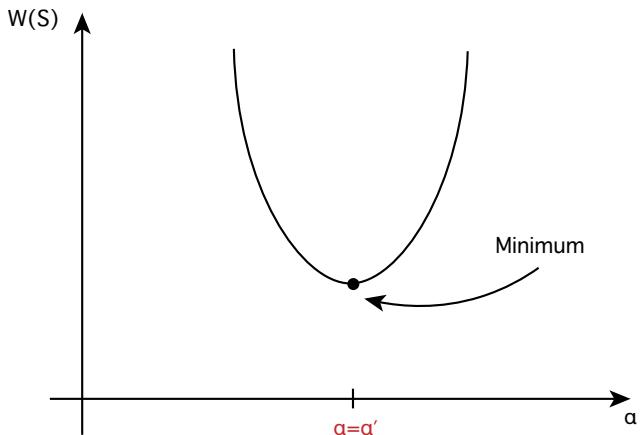
und erhalten daraus das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad (9.2)$$

### Überkrümmte Ellipse

Wie bei der Einführung des Fermatschen Prinzips beschrieben, nimmt Licht immer den Pfad, welcher die Laufzeit extremalisiert. Bei den bis jetzt betrachteten Beispielen war das immer der schnellste Weg. In einigen besonderen Fällen kann es jedoch vorkommen, dass das Extremum des optischen Weges nicht ein Minimum, sondern ein Maximum in der Laufzeit ergibt.

Ein solcher Fall liegt bei einer überkrümmten Ellipse vor. Bei einer normalen Ellipse sind alle Wege von



**Abb. 9.6.:** Weglänge  $W(S)$  gegen  $\alpha$  für den Aufbau in Abbildung 9.5.

$F_1$  nach  $F_2$  gleich lang. Wir betrachten nun den Fall, bei dem wir an Stelle einer normalen Ellipse das Licht nun an dem in Abbildung 9.8 rot eingezzeichneten Bereich reflektieren. Wir nennen diese Geometrie eine überkrümmte Ellipse.

In diesem Fall stellt der symmetrische Pfad (rote Linie) ein Maximum in der optischen Pfadlänge dar. Da nach dem Fermatschen Prinzip Licht immer den extremalen Pfad nimmt, ist dies der physikalisch korrekte Pfad.

## 9.2.

### Paraxiale Näherung

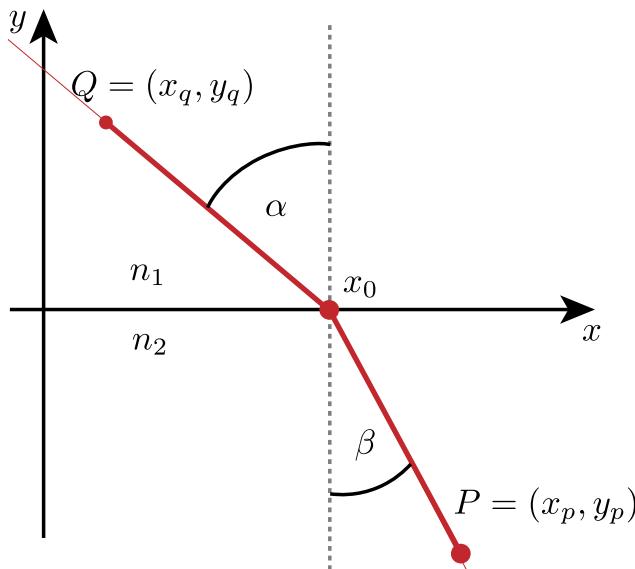
Unter der *paraxialen Näherung* versteht man die Annahme, dass sich alle Strahlen nahe der optischen Achse ausbreiten. Das heißt, dass alle Strahlen nur einen kleinen Winkel zur optischen Achse bilden. Somit gilt

$$\begin{aligned} \tan \theta &\approx \sin \theta \approx \theta \\ \text{sowie } \cos \theta &\approx 1 \end{aligned}$$

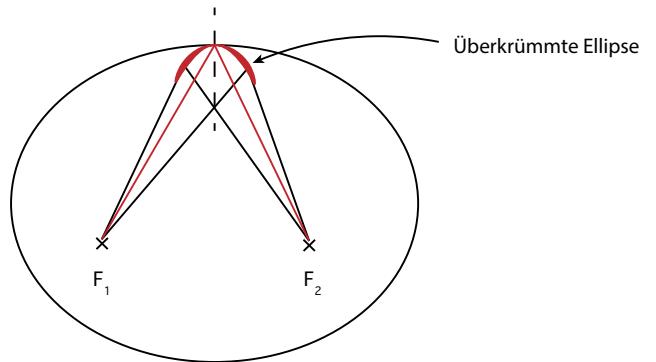
Dadurch vereinfacht sich das Snelliussche Brechungsgesetz zu

$$n_1 \alpha = n_2 \beta$$

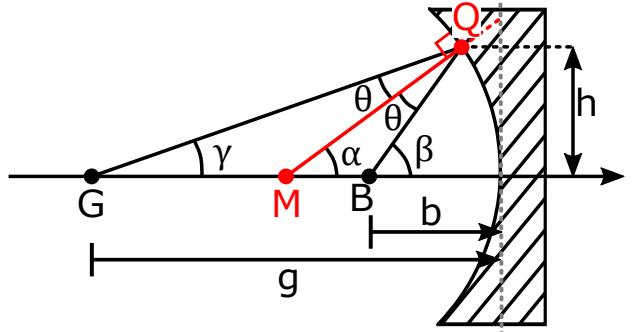
## 9. Geometrische Optik



**Abb. 9.7.:** Zur Brechung nach Fermat.



**Abb. 9.8.:** Reflexion an überkrümmter Ellipse. Das Licht läuft entlang des symmetrischen Pfades (Einfallswinkel=Ausfallwinkel). Dieser ist gleichzeitig der optisch längste Pfad.



**Abb. 9.9.:** Abbildung an einem Kugelspiegel

Als erstes Beispiel für ein abbildendes Element wollen wir einen konkaven sphärischen Spiegel betrachten ([Abbildung 9.9](#)). Wir definieren den Gegenstand  $G$ , das Bild  $B$ , den Mittelpunkt der Kugel  $M$  sowie die Gegenstandsweite  $g > 0$  und die Bildweite  $b > 0$ . Nach der üblichen Vorzeichenkonvention ist der Krümmungsradius  $R$  des Kugelspiegels negativ definiert:  $\overline{MQ} = -R$  und  $R < 0$ . Damit folgt für die Winkel aus [Abbildung 9.9](#):

$$\begin{aligned}\gamma + \theta + (180^\circ - \alpha) &= 180^\circ \\ \alpha + \theta + (180^\circ - \beta) &= 180^\circ \\ \Rightarrow \gamma - 2\alpha + \beta &= 0^\circ \\ \Rightarrow \gamma + \beta &= 2\alpha\end{aligned}$$

Mit der paraxialen Näherung gilt außerdem:

$$\begin{aligned}h/g &\approx \tan \gamma \approx \gamma, \\ h/\overline{MQ} &= -h/R = \sin \alpha \approx \alpha, \\ h/b &\approx \tan \beta \approx \beta.\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass in dieser Gleichung keine Winkel mehr auftauchen. Es trifft also jeder Strahl (in der paraxialen Näherung), der im Punkt  $G$  startet, nach der Reflexion an der Spiegeloberfläche auf den Punkt  $B$ . Wie eingangs definiert, sprechen wir in diesem Fall von einer Abbildung. Abbildungen in der Optik werden durch die *Abbildungs- bzw. Linsengleichung* beschrieben:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (9.3)$$

### 9.3. Abbildung an einem Kugelspiegel

Man bezeichnet  $g$  dabei als Gegenstandsweite,  $b$  als Bildweite und  $f$  als Brennweite. Die Brennweite ist eine Eigenschaft des abbildenden optischen Elements. Mithilfe der vorherigen Gleichung können wir den Zusammenhang zwischen dem Krümmungsradius  $R$  des Kugelspiegels und dessen *Brennweite* ablesen:

$$f = -\frac{R}{2}. \quad (9.4)$$

Strahlen, die parallel zur optischen Achse einlaufen, entsprechen dem Grenzfall  $g \rightarrow \infty$ . Solche Strahlen werden im Abstand  $b = f$  in einem einzigen Punkt, dem sogenannten Brennpunkt abgebildet. Nach der hier verwendeten Vorzeichenkonvention hat ein konkaver Spiegel ( $R < 0$ ) eine positive Brennweite. Das ist auch konsistent mit der positiv definierten Bildweite  $b$ .

Wir wollen an dieser Stelle auch den Begriff der Brechkraft  $D$  als Inverses der Brennweite  $f$  einführen:

$$D = \frac{1}{f}. \quad (9.5)$$

Je kleiner die Brennweite ist, umso größer ist also die Brechkraft eines optischen Elements. Brillenträgern ist die Brechkraft in den Einheiten der Dioptrien bekannt:  $[D] = \text{m}^{-1} = 1 \text{ Dioptrie} = 1 \text{ dpt}$ .

#### Newtonsche Abbildungsgleichung

Die Abbildungsgleichung in der obigen Form lässt sich in die sogenannte *Newtonsche Abbildungsgleichung* umschreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \\ f &= \frac{1}{\frac{1}{g} + \frac{1}{b}} = \frac{gb}{g+b} \\ -fg - fb + gb &= 0 \\ f^2 - fg - fb + gb &= f^2 \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile ergibt sich damit die *Newtonsche Abbildungsgleichung*:

$$(g-f)(b-f) = f^2. \quad (9.6)$$

#### 9.3.1.

#### Vorzeichenkonvention

Eingangs wurde schon angedeutet, dass man sich bei der Betrachtung von Abbildungen auf eine bestimmte Vorzeichenkonvention festlegen muss. Wir wollen die hier gewählte Konvention in diesem Abschnitt nochmal detailliert beschreiben. Zur besseren Veranschaulichung der Vorzeichenkonvention für sphärische Spiegel sind jeweils im unteren Bereich der Abbildungen 9.9, 9.10, 9.11, 9.13 und 9.14 Pfeile eingezeichnet. Ein Pfeil nach rechts bedeutet ein positives Vorzeichen und ein Pfeil nach links ein negatives Vorzeichen.

#### Konkave Spiegel

Für konkave Spiegel (Abbildung 9.10) definieren wir  $R < 0$ , weil der Mittelpunkt  $M$  links von der gekrümmten Oberfläche liegt. Ein Gegenstand, der sich ebenfalls links von der Spiegeloberfläche befindet, hat eine positive Gegenstandsweite ( $g > 0$ ). Liegt, der Gegenstand auf der anderen Seite, so entspricht dies einem konvexen Spiegel (siehe unten). Für die Bildweite  $b$  gilt  $b > 0$ , wenn das Bild links vom Spiegel liegt und  $b < 0$ , wenn das Bild rechts vom Spiegel liegt.

#### Konvexe Spiegel

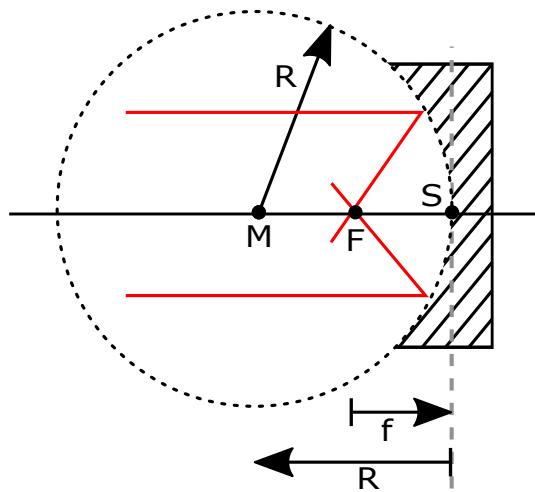
Für konvexe Spiegel (Abbildung 9.11) gilt  $R > 0$  ( $M$  rechts vom Spiegel  $S$ ) und daher  $f < 0$ . Sie wirken defokussierend. Das Bild liegt stets auf der auf der anderen Seite des Spiegels (vom Gegenstand aus gesehen). Damit ist die Bildweite bei konvexen Spiegeln immer negativ ( $b < 0$ ).

#### 9.3.2.

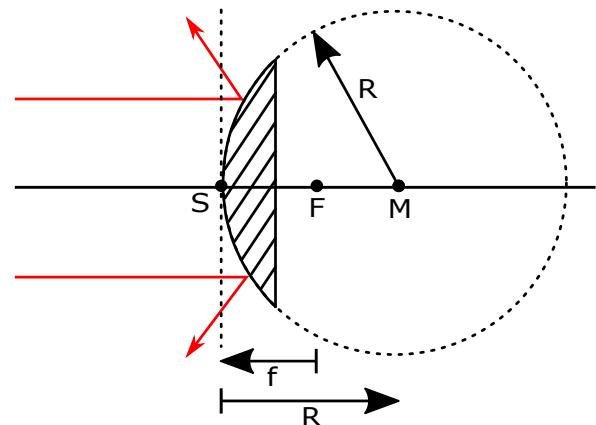
#### Reelle und virtuelle Abbildungen

Bei der Beschreibung von abbildenden Systemen unterscheidet man zwei Arten von Abbildungen. Die re-

## 9. Geometrische Optik



**Abb. 9.10.:** Konkaver Spiegel. Die Pfeile für  $R$  und  $f$  deuten die Vorzeichen an:  $R < 0$  (Pfeil nach links),  $f > 0$  (Pfeil nach rechts).



**Abb. 9.11.:** Konvexer Spiegel. Die Pfeile für  $R$  und  $f$  deuten die Vorzeichen an:  $R > 0$  (Pfeil nach rechts),  $f < 0$  (Pfeil nach links).

elle Abbildung, welche man mit fokussierender Optik erhält und die virtuelle Abbildung bei defokussierender Optik. Bei der reellen Abbildung kann das Licht nach dem abbildenden System an der Stelle des reellen Bildes mit einem Sensor aufgezeichnet werden.

Im Falle des virtuellen Bildes scheint das Objekt bei der Betrachtung mit einer weiteren abbildenden Optik (z. B. dem Auge) nur an der Stelle des virtuellen Bildes zu sein.

Abbildung 9.12 veranschaulicht die beiden Abbildungstypen.

### 9.3.3.

### Abbildung mit Spiegeln

#### Konkave Spiegel

Bei der Abbildung mit einem konkaven Spiegel ist das Bild  $B$  reell und invertiert, wenn  $g > f$  (Abbildung 9.13). Ansonsten erhält man ein virtuelles, aufrechtes Bild. Da diese virtuellen Bilder vergrößert erscheinen, lassen sich konkave Spiegel beispielweise als Kosmetikspiegel einsetzen.

#### Konvexe Spiegel

Bei der Abbildung mit konvexen Spiegeln (Abbildung 9.14) gilt  $R > 0$ ,  $f < 0$ ,  $g > 0$  und  $b < 0$ . Das Bild ist *immer* aufrecht und virtuell. Konvexe Spiegel findet man im Alltag beispielweise im Straßenverkehr. Dort werden sie eingesetzt um die Sicherheit bei schlecht einsehbaren Kreuzungen zu erhöhen. Die konvexe Form erlaubt eine Vergrößerung des Bildfeldes im Vergleich zu einem ebenen Spiegel. Was die Augen im Spiegel sehen ist das virtuelle Bild, das der Spiegel erzeugt.

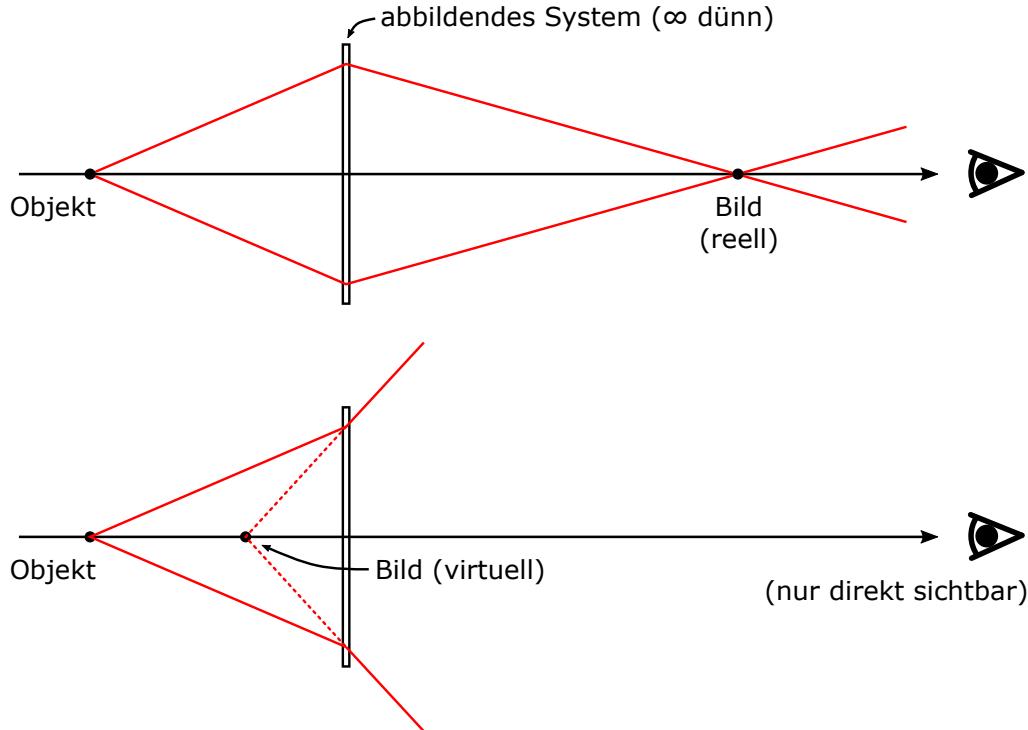
### 9.3.4.

### Vergrößerung einer Abbildung

Wir wollen an dieser Stelle die Ausdrücke für die Vergrößerung senkrecht zur optischen Achse und entlang der optischen Achse herleiten. Die hergeleiteten Ausdrücke gelten immer, wenn die Abbildungsgleichung erfüllt ist<sup>1</sup>:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}.$$

<sup>1</sup>Das Vorzeichen der Vergrößerungsformel hängt von der verwendeten Konvention ab. Meist findet man aber die hier verwendeten Vorzeichen.



**Abb. 9.12.:** Reelle (oben) und virtuelle Abbildung (unten)

Wie in den folgenden Abschnitten gezeigt werden wird, gilt diese Gleichung für eine Vielzahl optischer Elemente.

Bei  $|V_T| < 1$  ist das Bild verkleinert, bei negativem Vorzeichen ist es invertiert.

### Transversale Vergrößerung

Die (transversale) Vergrößerung bzw. Verkleinerung ist gegeben durch das Verhältnis von Bildgröße  $B$  zu Gegenstandsgröße  $G$  (siehe Abbildung 9.13 und Abbildung 9.14):

$$V_T \equiv \frac{B}{G} = -\frac{b}{g}. \quad (9.7)$$

Mit  $1/g + 1/b = 1/f$  folgt  $b = (fg)/(g - f)$  und  $g = (fb)/(b - f)$ . Wir erhalten schließlich

$$V_T = \frac{f}{f - g} = \frac{f - b}{f}. \quad (9.8)$$

### Longitudinale Vergrößerung

Die longitudinale Vergrößerung beschreibt das Vergrößern entlang der optischen Achse. Es gilt

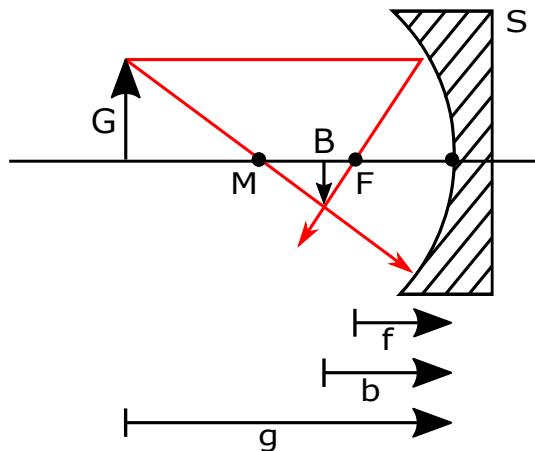
$$V_L \equiv \frac{\partial b}{\partial g} = \frac{\partial}{\partial g} \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}} = \frac{-\frac{1}{g^2}}{\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{g}\right)^2}.$$

Damit folgt dann

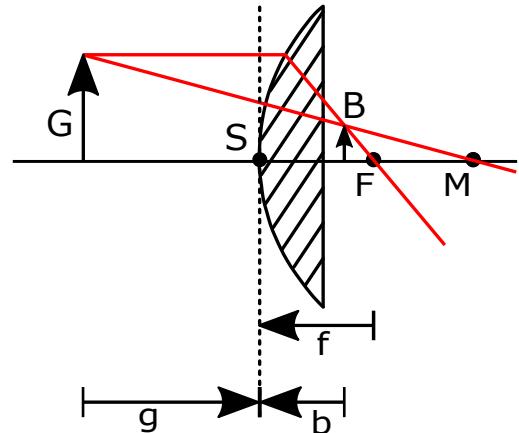
$$V_L = -\frac{f^2}{(g - f)^2} = \frac{(b - f)^2}{f^2}$$

$$V_L = -V_T^2. \quad (9.9)$$

## 9. Geometrische Optik



**Abb. 9.13.:** Abbildung mithilfe eines konkaven Spiegels. Die Pfeile nach rechts für  $g$ ,  $b$  und  $f$  deuten deren positives Vorzeichen an.



**Abb. 9.14.:** Abbildung mithilfe eines konvexen Spiegels. Die Pfeile für  $g$ ,  $b$  und  $f$  deuten die Vorzeichen an:  $g > 0$  (Pfeil nach rechts).  $b < 0$  und  $f < 0$  (Pfeile nach links).

### 9.4. Abbildung an brechender Kugelfläche

Aus dem Brechungsgesetz  $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$  bzw. in Paraxialnäherung  $n_1 \alpha = n_2 \beta$  erhalten wir für die Winkel in **Abbildung 9.15**:

$$\begin{aligned}\gamma + (180^\circ - \alpha) + \theta &= 180^\circ \Rightarrow \alpha = \gamma + \theta \\ \beta + (180^\circ - \theta) + \delta &= 180^\circ \Rightarrow \beta = \theta - \delta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}n_1 \alpha &= n_1(\gamma + \theta) = n_1 \left( \frac{h}{g} + \frac{h}{R} \right) \\ &= n_2 \beta = n_2(\theta - \delta) = n_2 \left( \frac{h}{R} - \frac{h}{b} \right)\end{aligned}$$

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (9.10)$$

Dies ist die Abbildungsgleichung für eine brechende Kugelfläche. Daraus ergibt sich die bildseitige Brennweite, wenn wir die Gegenstandsweite gegen Unendlich gehen lassen.

$$g \rightarrow \infty \Rightarrow b \rightarrow f_b = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir die gegenüberliegende Brennweite, wenn wir die Bildweite gegen Unendlich gehen lassen.

$$b \rightarrow \infty \Rightarrow g \rightarrow f_g = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}$$

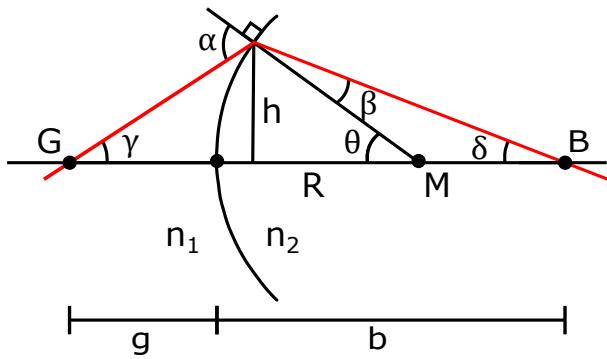
Hierbei ist wieder die Vorzeichenkonvention zu beachten:

$$\begin{aligned}G \text{ links: } g &> 0 \\ B \text{ rechts: } b &> 0 \\ M \text{ rechts: } R &> 0\end{aligned}$$

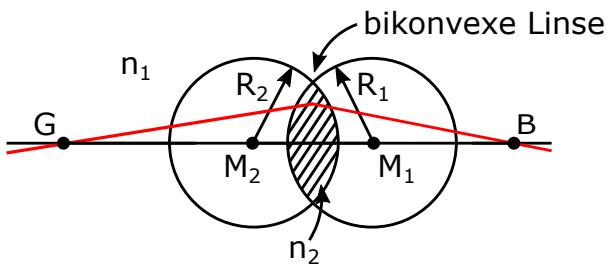
sowie konsequentes Vertauschen der Vorzeichen.

### 9.5. Dünne Linsen

**Abbildung 9.16** zeigt ein Beispiel für eine dünne, biconvexe Linse mit den wichtigsten geometrischen Größen. Eine Abbildung durch eine dünne Linse kann aus zwei aufeinanderfolgenden Abbildungen mit je einer brechenden Kugelfläche zusammengesetzt werden. Wir behandeln daher zunächst die Abbildung von  $G$  in ein



**Abb. 9.15.:** Zur Abbildung an einer brechenden Kugelfläche



**Abb. 9.16.:** Dünne bikonvexe Linse mit  $R_1 > 0$  ( $M_1$  rechts) und  $R_2 < 0$  ( $M_2$  links)

Zwischenbild  $B'$  durch die erste Kugelfläche und untersuchen dann die Abbildung von  $B'$  nach  $B$  mit der zweiten Kugelfläche. Aus dieser Überlegung folgt:

$$1. \text{ Fläche: } \frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}$$

$$2. \text{ Fläche: jetzt } g = -b'$$

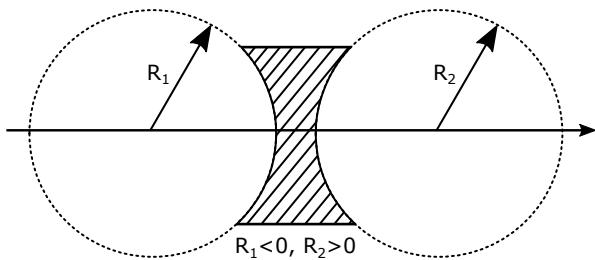
$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{n_2}{b'} + \frac{n_1}{b} &= \frac{n_1 - n_2}{R_2} \\ \Rightarrow \frac{n_1}{g} + \frac{n_1}{b} &= \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_1 - n_2}{R_2} \end{aligned}$$

Für eine Linse in Luft nehmen wir  $n_1 = 1$  und  $n_2 = n$  an und finden die *Linsenmachergleichung*, auch *Gaußsche Linsenformel* oder *Linsenschleiferformel* genannt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (9.11)$$

Merke:  $R_1$  gehört zur Fläche, die auf der Eintrittsseite (Gegenstandsseite) getroffen wird.

Die Linsenschleiferformel gilt natürlich auch für bikonkave Linsen. Hierbei muss man nur die veränderten Vorzeichen der Radien beachten (siehe Abbildung 9.17). Weitere Linsenarten werden im Folgenden näher betrachtet.



**Abb. 9.17.:** Bikonkave Linse

### 9.5.1. Plankonvexe und plankonkave Linsen

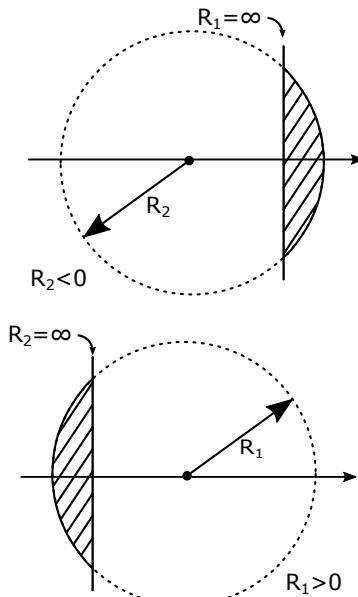
Abbildung 9.18 zeigt eine plankonvexe Linse in den beiden möglichen Orientierungen. Wir wollen untersuchen, ob sich die Ausrichtung der Linse auf ihre Abbildungseigenschaften auswirkt.

1. Mit  $R_1 = \infty$ ,  $R_2 = -50 \text{ mm}$  und  $n = 1.5$  erhalten wir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= (1.5 - 1) \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{-50 \text{ mm}} \right) \\ &= 0.5 \frac{1}{50 \text{ mm}} = \frac{1}{100 \text{ mm}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f = 100 \text{ mm}$$

## 9. Geometrische Optik



**Abb. 9.18.:** Plankonvexe Linsen in unterschiedlichen Orientierungen.

2. Wählen wir  $R_1 = 50 \text{ mm}$  und  $R_2 = -\infty$ , dann gilt

$$\frac{1}{f} = (1.5 - 1) \left( \frac{1}{50 \text{ mm}} - \frac{1}{-\infty} \right) = \frac{1}{100 \text{ mm}}$$

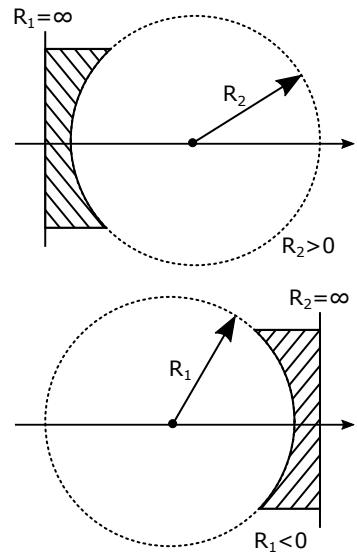
$$\Rightarrow f = 100 \text{ mm}$$

Wir erhalten beide Male das gleiche Ergebnis. Beide Ausrichtungen haben die gleiche Brechkraft. Es ist einfach zu zeigen, dass dasselbe auch für plankonkave Linsen (Abbildung 9.19) gilt. Wir werden jedoch später sehen, dass in der Praxis eine Ausrichtung der anderen aufgrund geringerer Aberrationen vorzuziehen ist.

### 9.5.2. Meniskuslinsen

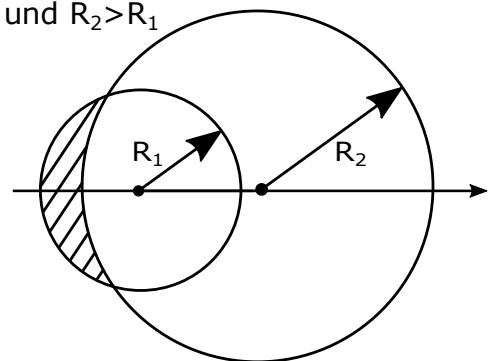
Ein Menisken bzw. Meniskuslinsen können je nach Ausführung Strahlenbündel fokussieren oder aufweiten.

Für eine meniskuskonvexe Linse (siehe Abbildung 9.20) gilt  $R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$  und  $R_2 > R_1$  oder in der gespiegelten Variante  $R_1 < 0$ ,  $R_2 < 0$  und  $|R_2| > |R_1|$ . Damit ist  $f$  positiv und die Linse daher fokussierend.



**Abb. 9.19.:** Plankonkave Linsen in unterschiedlichen Orientierungen.

$R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$  und  $R_2 > R_1$



**Abb. 9.20.:** Meniskuskonvexe Linse

Für eine meniskuskonkave Linse (siehe Abbildung 9.21) gilt  $R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$  und  $R_1 > R_2$  bzw. gespiegelt  $R_1 < 0$ ,  $R_2 < 0$  und  $|R_1| > |R_2|$ . Hier ist  $f$  negativ und die Linse daher defokussierend.

Aufgrund der geringeren Dicke und dem damit verbundenen geringeren Gewicht werden Meniskuslinsen gerne für Brillen verwendet.

## 9.6. Dicke Linse und Hauptebenen

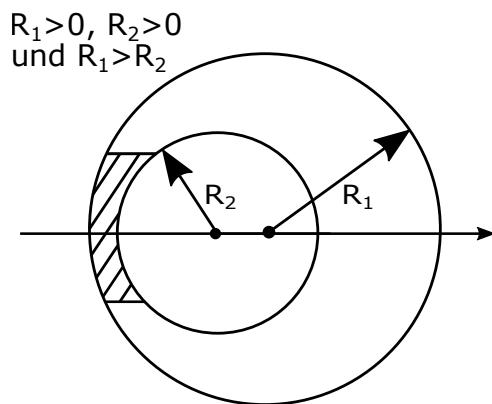


Abb. 9.21.: Meniskuskonkave Linse

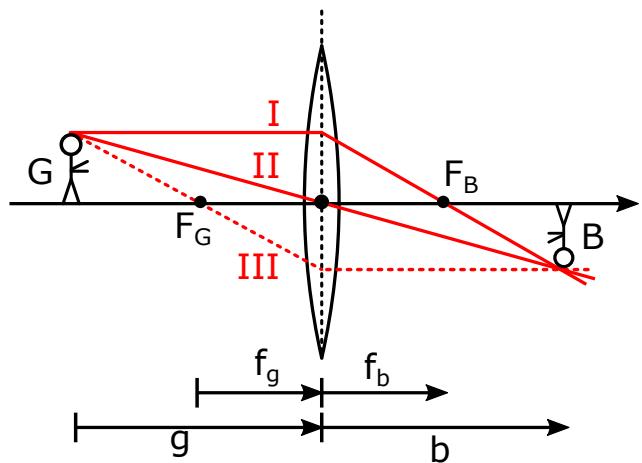


Abb. 9.23.: Abbildung mit einer dünnen Linse. Mit  $g > f$  ist das Bild reell und invertiert.

### 9.5.3. Andere Linsenarten

Der Vollständigkeit halber wollen wir hier einige weitere Linsenarten auflisten:

- Fresnel-Linsen (Leuchtturm, Overhead-Projektor)
- Zylinderlinsen (siehe Abbildung 9.22) fokussieren oder defokussieren nur in einer Richtung.

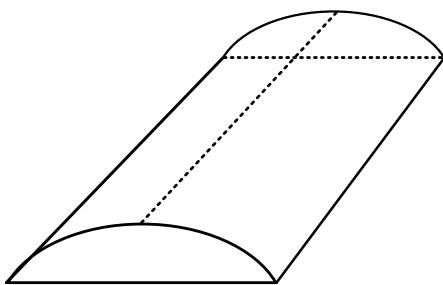


Abb. 9.22.: Zylinderlinse

### 9.5.4. Abbildung mit dünnen Linsen

Von allen möglichen Strahlen durch die Linse wählen wir drei Strahlen aus. Zur Konstruktion genügen zwei Strahlen, der dritte Strahl kann zur Probe verwendet werden (siehe Abbildung 9.23):

I Strahl I verläuft bis zur Linse parallel zur optischen Achse und anschließend durch den bildseitigen Fokus  $F_B$ .

II Der Strahl II läuft durch das Linsenzentrum und wird nicht abgelenkt.

III Strahl III wird durch den Gegenstandsfokus  $F_G$  zur Linse gerichtet und dann parallel zur optischen Achse weitergeführt.

Bei biconvexen Linsen kann es aber auch zu einer virtuellen Abbildung kommen, wenn sich der Gegenstand zwischen Gegenstands- und Brennpunkt befindet ( $0 < g < f$ ).

Eine Übersicht über die verschiedenen Abbildungsarten von biconvexen Linsen ist in Tabelle 9.1 und Abbildung 9.25 zu finden.

Wird in der Situation aus Abbildung 9.23 statt einer biconvexen Linse eine biconkavie Linse verwendet, so können immer noch die selben drei Strahlen zur Konstruktion des Bildes verwendet werden. In diesem Fall entsteht aber eine virtuelle statt einer reellen Abbildung (siehe Abbildung 9.24).

## 9. Geometrische Optik

Nr.	$g$	Abbildungstyp	$b$	$V_T = f/(f-g)$
1)	$2f < g < \infty$	reell	$f < b < 2f$	$-1 < V_T < 0$
2)	$g = 2f$	reell	$b = 2f$	$V_T = -1$
3)	$f < g < 2f$	reell	$2f < b < \infty$	$V_T < -1$
-	$g = f$	-	$b = \infty$	-
4)	$0 < g < f$	virtuell	$b < -g$	$V_T > 1$

Tab. 9.1.: Eigenschaften der Abbildungszonen aus Abbildung 9.25

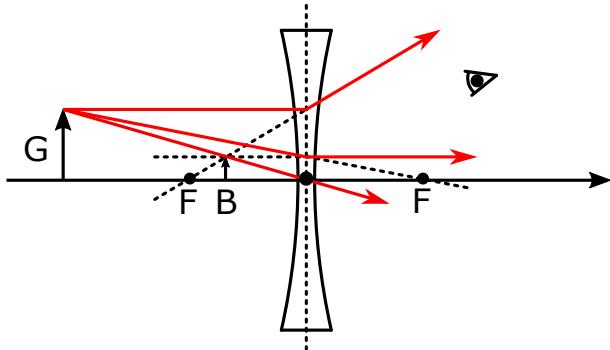


Abb. 9.24.: Virtuelle Abbildung mit aufrechtem Bild durch eine bikonvexe Linse.

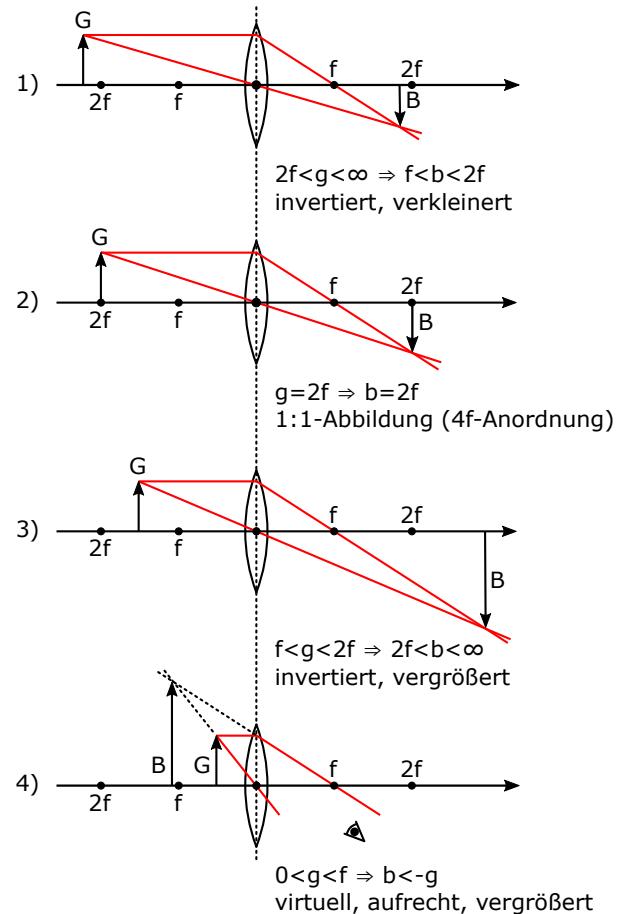


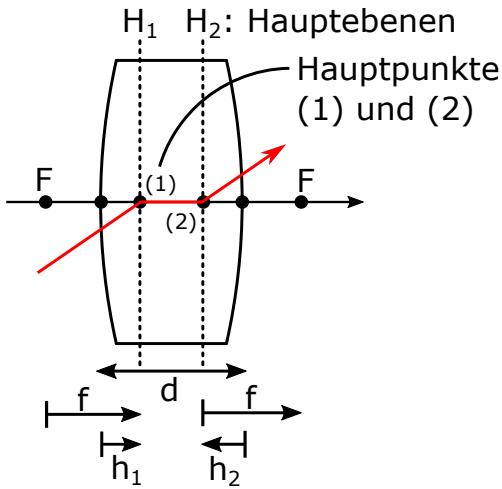
Abb. 9.25.: Klassifizierung der Abbildungszonen

Bei dünnen Linsen ignorieren wir die Dicke der Linsen. Wir hatten sie modelliert, indem wir lediglich die beiden Brechungen an den Außenflächen betrachtet hatten. Sind die betrachteten Linsen dicker (wie in Abbildung 9.26), so ist diese Näherung offensichtlich nicht mehr gültig.

Wenn wir jedoch bei jeder dicken Linse die Brechungen und Propagation von Grund auf konstruieren müssten, wäre das eine äußerst aufwendigen Aufgabe. Glücklicherweise können dicke Linsen vergleichsweise einfach mit der Einführung zweier Hauptebenen beschrieben werden.

In der Rekonstruktion verlaufen die Strahlen zwischen den Hauptebenen parallel zur optischen Achse (Abbildung 9.27 und Abbildung 9.28). Der „Mittelpunkts“strahl verläuft durch die Hauptpunkte. Dies

sind die Schnittpunkte von optischer Achse und der zugehörigen Hauptebene. Die Brennweite  $f$  bezeichnet nun den Abstand von  $F$  und  $H$ .



**Abb. 9.26.:** Eine dicke Linse mit ihren Hauptebenen. Die Hauptebene  $h_1$  ( $h_2$ ) liegt rechts (links) von der gekrümmten Fläche. Es gilt  $h_1 > 0$  ( $h_2 < 0$ ).

Für die Abbildung legt der Abstand von  $G$  zu  $H_1$  die Gegenstandsweite und der Abstand von  $H_2$  zu  $B$  die Bildweite fest.  $H_1$  und  $H_2$  sind konjugiert: Jeder Strahl der  $H_1$  trifft, kommt heraus, als hätte er  $H_2$  getroffen.

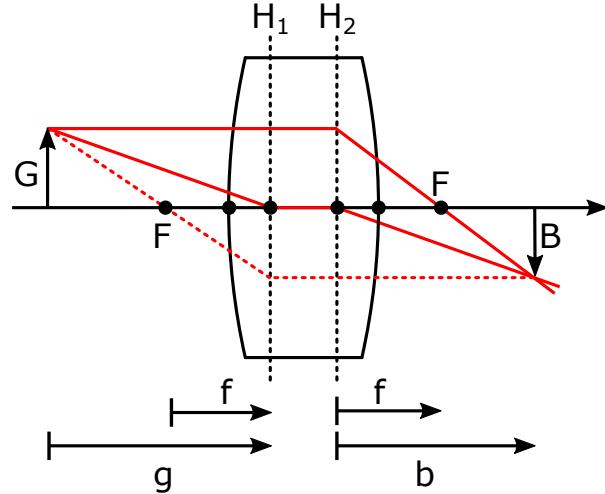
Die Linsenschleiferformel für dünne Linsen lautet in ihrer allgemeinen Form

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_L}{n_M} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (9.12)$$

mit dem Brechungsindex der Linse  $n_L$  und dem Brechungsindex  $n_M$  für das Medium. Bei Luft haben wir  $n_M = 1$  und  $n_L = n$ . Für dicke Linsen kann eine angepasste Linsenmacherformel hergeleitet werden.

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_L}{n_M} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{\left( \frac{n_L}{n_M} - 1 \right) d}{\frac{n_L}{n_M} R_1 R_2} \right) \quad (9.13)$$

Diese Anpassung ist konsistent: für  $d \rightarrow 0$  erhalten wir wieder die Formel für dünne Linsen.



**Abb. 9.27.:** Abbildung mit einer dicken Linse

Die Hauptebenen sind gegeben durch

$$h_1 = -f \frac{\left( \frac{n_L}{n_M} - 1 \right) d}{R_2 \frac{n_L}{n_M}}$$

$$h_2 = -f \frac{\left( \frac{n_L}{n_M} - 1 \right) d}{R_1 \frac{n_L}{n_M}} .$$

**Übungsaufgaben:** Gegeben sind  $R_1 = 20 \text{ cm}$ ,  $R_2 = -30 \text{ cm}$ ,  $d = 1 \text{ cm}$ ,  $n_L = 1.5$ ,  $n_M = 1$  und  $g = 30.5 \text{ cm}$ .

- Bestimme  $b$  für eine dünne Linse.
- Finde  $b$  für eine dicke Linse.
- Vergleiche jeweils die Abstände vom Zentrum der Linse zum Bild

Da alle Linsen in der Realität eine Dicke haben, kommt es in Experimenten zu Abweichungen im Vergleich zu Berechnungen mit der Formel für dünne Linsen. Besonders gravierend sind solche Fehler, wenn man dicke Linsen verwendet, wie z. B. in der Mikroskopie.

## 9. Geometrische Optik

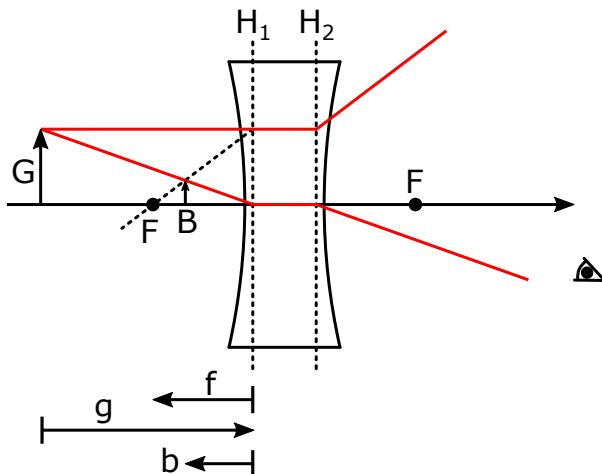


Abb. 9.28.: Virtuelle Abbildung mit einer dicken Linse

### 9.7. Abbildung mit zwei Linsen

Für die Abbildung mit zwei konvexen Linsen (Abbildung 9.29) ist das Zwischenbild  $B'$  reell und invertiert. Das Bild  $B$  ist ebenfalls reell, aber aufrecht.

Für die Konstruktion ignorieren wir zunächst Linse 2 und erstellen das Zwischenbild über Linse 1. Anschließend nutzen wir dieses als Gegenstand zur Abbildung mit Linse 2. Die Vergrößerung ist gegeben durch

$$V_T = V_{T_1} \cdot V_{T_2} = \frac{f_1 b_2}{d(g_1 - f_1) - g_1 f_1} \quad (9.14)$$

Auch wenn man die zweite konvexe Linse durch eine konkave Linse ersetzt (Abbildung 9.30), hängt die Vergrößerung vom Abstand der Linsen  $d$  ab. Oft werden solche Linsensysteme zur Vergrößerung (Aufweitung) oder Verkleinerung (Verengung) von Strahlen eingesetzt, wie in Kapitel 11 demonstriert wird.

#### Beispiele

1. Wir wählen  $d = f_1 + f_2$  für die beiden konvexen Linsen in Abbildung 9.31. Dann gilt  $V_T = f_2/f_1$ . Dies entspricht je nach Linsen und Richtung einer Verkleinerung bzw. einer Vergrößerung.

**Achtung:** Es tritt ein Zwischenfokus auf, was ein Problem für intensive Laserpulse darstellt. Ein Fokus in Luft kann ein Plasma erzeugen.

2. Für eine konkav-konvexe Kombination gibt es keinen Zwischenfokus (Abbildung 9.32). Auch hier ist  $d = f_1 + f_2$ .

## 9.8. Optische Systeme und ABCD-Matrizen

Mit dem vereinfachten Snelliusschen Brechungsgesetz  $n_a \alpha_a = n_b \alpha_b$  liegt folgende Definition des Strahlvektors nahe:

$$S \equiv \begin{pmatrix} n\alpha \\ x \end{pmatrix}.$$

Die Einträge  $S_1 = n\alpha$  und  $S_2 = x$  sind der Winkel des Strahls und der Abstand des Strahls zur optischen Achse. Wir werden im Folgenden sehen, dass die Wirkung optischer Elemente auf den Strahlvektor durch die Multiplikation mit einer  $2 \times 2$ -Matrix (sog. ABCD-Matrix) beschrieben werden kann.

### 9.8.1. Brechung an ebener Grenzfläche

An der Grenzfläche (siehe Abbildung 9.33) gilt mit der Definition des Strahlvektors und dem Brechungsgesetz die Gleichung  $S_a = S_b$ . Wir schreiben

$$S_a = \begin{pmatrix} n_a \alpha_a \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_b \alpha_b \\ x \end{pmatrix} = S_b$$

und erhalten somit die Transfomatrix für eine Brechung:

$$S_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S_a \quad (9.15)$$

Eine Brechung an einer ebenen Grenzfläche senkrecht zur optischen Achse entspricht somit einer Multiplikation mit der Einheitsmatrix.

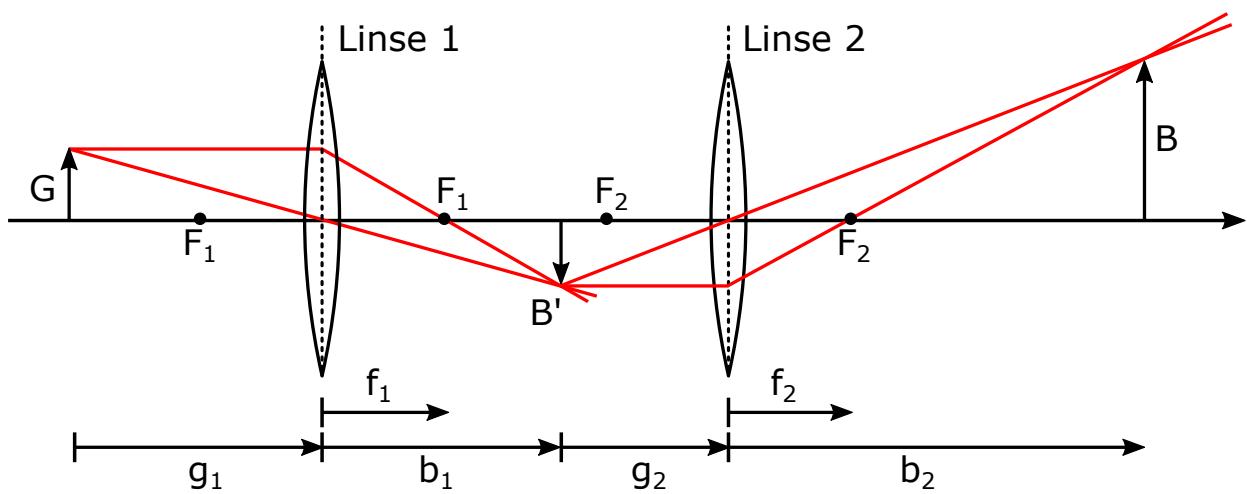


Abb. 9.29.: Abbildung mit Kombination von zwei konvexen Linsen.

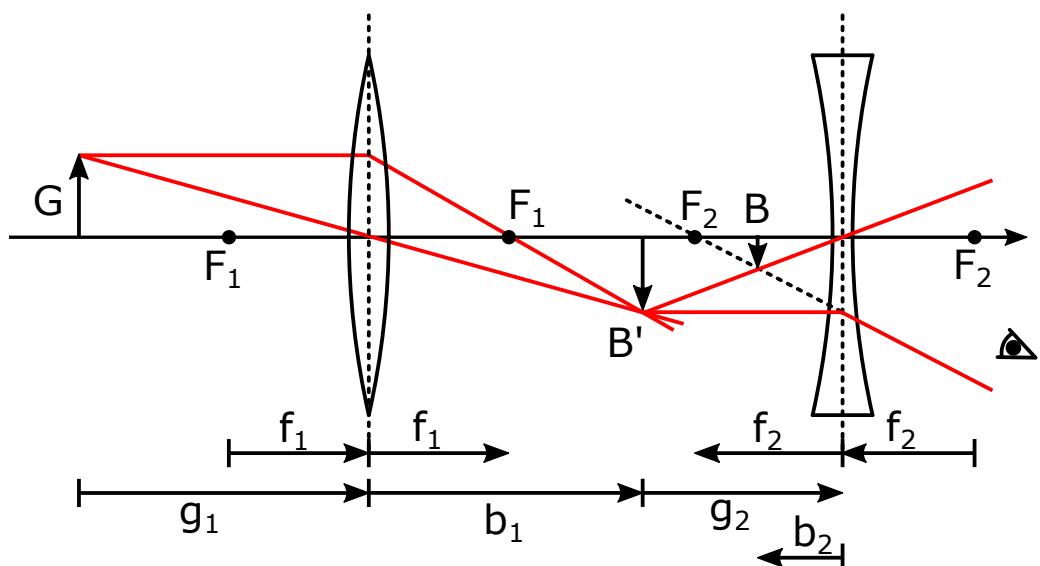


Abb. 9.30.: Abbildung mit einer konvexen und einer konkaven Linse. Das Zwischenbild  $B'$  ist reell und das Bild  $B$  virtuell. Beide Bilder sind invertiert. Mit dem Auge zu sehen ist nur  $B$ .

## 9. Geometrische Optik

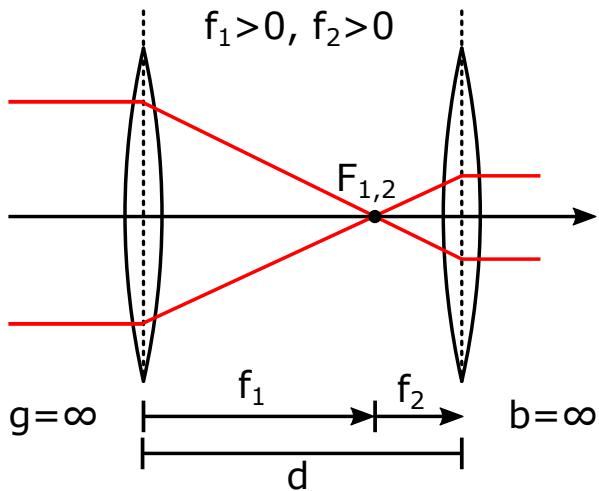


Abb. 9.31.: Verkleinerung eines Strahls mit zwei konvexen Linsen.

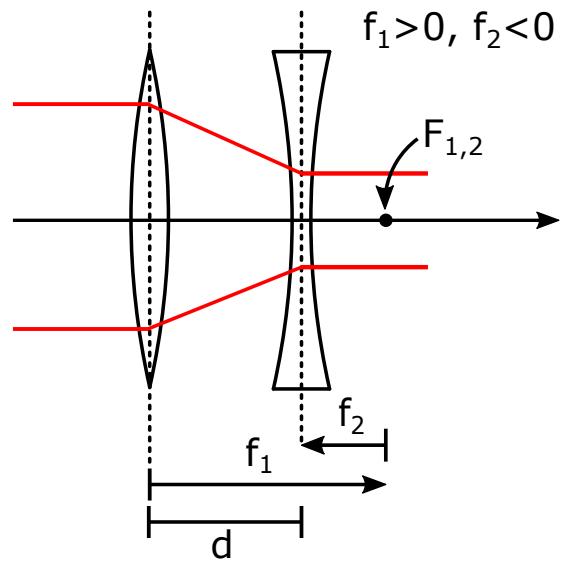


Abb. 9.32.: Strahlverkleinerung mit einer Kombination aus einer konkaven und einer konvexen Linse.

### 9.8.2. Propagation über eine Länge $d$

Aus Abbildung 9.34 entnehmen wir:  
 $x_b = x_a + \alpha_a d = x_a + S_{1a}/nd$  und erhalten daher eine Translation  $S_b = \hat{T}S_a$  mit

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d}{n} & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.16)$$

und bestimmen

$$\begin{aligned} S_{1b} &= n_b \alpha_b \\ &= n_b \theta_b - n_b \beta && (\text{II}) \\ &= n_a \theta_a - n_b \beta && \text{Snell} \\ &= n_a \alpha_a + \beta(n_a - n_b) && (\text{I}) \\ &= S_{1a} - (n_b - n_a) \frac{S_{2a}}{R_{ab}} \end{aligned}$$

### 9.8.3. Brechende Kugelfläche

Mit Abbildung 9.35 finden wir die Winkelbeziehungen

$$\begin{aligned} \alpha_a + (180^\circ - \theta_a) + \beta &= 180^\circ \\ \Rightarrow \theta_a &= \alpha_a + \beta \end{aligned} \quad (\text{I})$$

$$\begin{aligned} \theta_b + (180^\circ - \beta) - \alpha_b & \\ \Rightarrow \alpha_b &= \theta_b - \beta \end{aligned} \quad (\text{II})$$

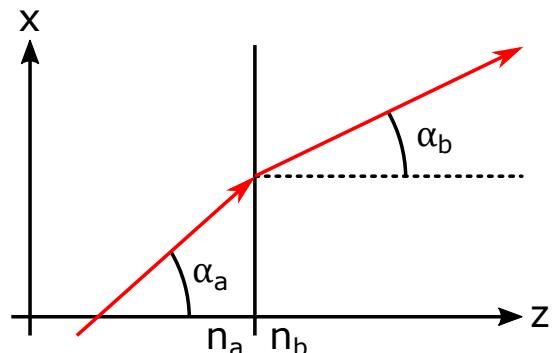
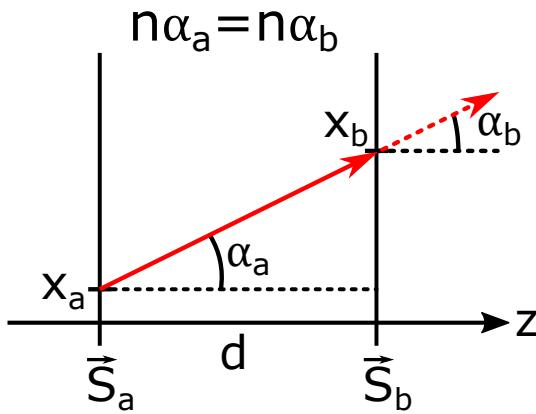
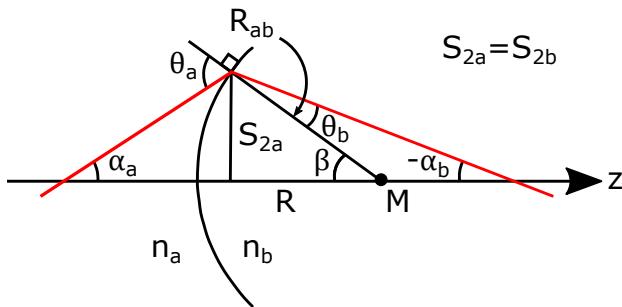


Abb. 9.33.: Strahlvektor an einer Grenzfläche (nach Zinth Kapitel 3)



**Abb. 9.34.:** Strahlvektor nach der Propagation um eine Länge  $d$



**Abb. 9.35.:** Strahlvektor an einer brechenden Kugelfläche.

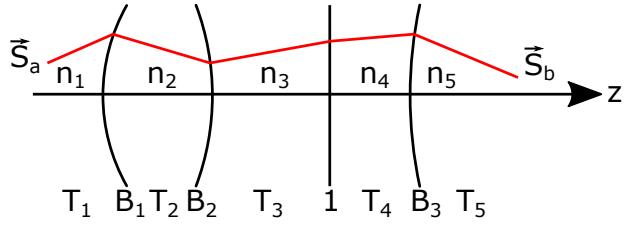
Wir erhalten die zugehörige Matrix für eine brechende Kugelfläche

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & -D_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

mit der Brechkraft der Kugelfläche  $D_{ab} = (n_b - n_a)/R_{ab}$ .

#### 9.8.4. Zentrierte optische Systeme

In Abbildung 9.36 ist ein optisches System aus mehreren Einzelementen gezeigt. Wir verwenden den Ansatz  $S_b = \hat{M}S_a$  und erhalten die zugehörige Matrix  $\hat{M}$  über Matrixmultiplikation der Matrizen der einzel-



**Abb. 9.36.:** Zentriertes optisches System

nen Elementen.

$$\hat{M} = \hat{T}_5 \hat{B}_3 \hat{T}_4 \hat{T}_3 \hat{B}_2 \hat{T}_2 \hat{B}_1 \hat{T}_1 .$$

Ein optisches System kann als Reihe von miteinander multiplizierten Einzelmatrizen aufgefasst werden. Beachte hier die Reihenfolge der Matrixmultiplikation! Wir gehen das System von hinten nach vorne durch.

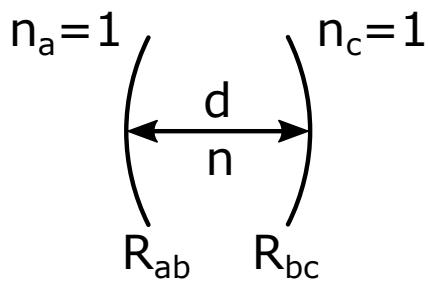
Allgemein bezeichnet man

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

als  $ABCD$ -Matrix oder optische Transfermatrix eines Systems.

#### Beispiele

1. Beginnen wir mit der dicken Linse (Abbildung 9.37).



**Abb. 9.37.:** Zur Bestimmung der Transfermatrix einer dicken Linse

## 9. Geometrische Optik

Wir erhalten die Matrix für die dicke Linse über wir folgende Matrizen:

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \begin{pmatrix} 1 & -D_{bc} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d}{n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -D_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{n} D_{bc} & -D_{ab} - D_{bc} + \frac{d}{n} D_{ab} D_{bc} \\ \frac{d}{n} & 1 - \frac{d}{n} D_{ab} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_2} & -\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}\right) \\ d & 1 - \frac{d}{f_1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. Die Matrix für die dünne Linse erhalten wir über den Grenzfall einer dicken Linse mit unendlich kleiner Dicke  $d$ :

$$\begin{aligned}\lim_{d \rightarrow 0} \hat{M} &= \begin{pmatrix} 1 & -D_{ab} - D_{bc} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -(n-1)\left(\frac{1}{R_{ab}} - \frac{1}{R_{bc}}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Gesamtbrennweite des Systems mit  $f$ , so folgt für die Brennweite eines Linsenpaars

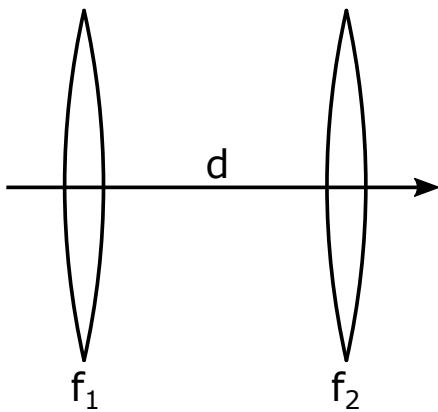
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (9.19)$$

Für  $d \ll f_1, f_2$  erhalten wir  $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$ . Die Brechkräfte addieren sich, die Brennweiten jedoch nicht!

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

### 9.8.5.

#### Kombination dünner Linsen



**Abb. 9.38.:** Zwei dünne Linse im Abstand  $d$

Um die ABCD Matrix für ein Paar aus dünnen Linsen (siehe Abbildung 9.38) zu erhalten, multiplizieren

## Zusammenfassung

### Fermatsches Prinzip

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass Licht sich zwischen zwei Punkten immer auf dem Weg extremaler Laufzeit ausbreitet.

### paraxiale Näherung

Die gesamte geometrische Optik basiert auf der paraxialen Näherung. Diese besagt, dass die Lichtstrahlen sich nur unter kleinen Winkeln  $\theta$  zur optischen Achse ausbreiten. Damit gilt die Kleinwinkelnäherung ( $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ ) und das Snelliussche Brechungsgesetz vereinfacht sich:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta \quad \rightarrow \quad \underbrace{n_1 \alpha = n_2 \beta}_{\text{paraxiale Näherung}}$$

### Abbildung

Wir sprechen dann von einer Abbildung, wenn jeder Lichtstrahl, der von einem Punkt einer Gegenstandsebene ausgeht, eindeutig auf einen Punkt auf einer Bildebene abgebildet wird. Die sogenannte Abbildungsgleichung gibt an, wie die Brennweite  $f$  der abbildenden Optik, die Gegenstandsweite  $g$  und die Bildweite  $b$  zusammenhängen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$$

- **reelle Abbildung:** Von einer reellen Abbildung spricht man, wenn das Bild ohne weitere optische Elemente auf einem Schirm, Sensor oder Film sichtbar gemacht werden kann.
- **virtuelle Abbildung:** Von einer virtuellen Abbildung spricht man, wenn weitere optische Elemente (Auge, Linse, Objektiv ...) nötig sind, damit das Bild sichtbar gemacht werden kann.

### Vergrößerung

Aus der Abbildungsgleichung kann die Vergrößerung eines Bildes berechnet werden:

- **transversale Vergrößerung (senkrecht zur optischen Achse)**

$$V_T \equiv \frac{\bar{B}}{\bar{G}} = -\frac{b}{g} = \frac{f}{f-g} = \frac{b-f}{f}$$

- **longitudinale Vergrößerung (entlang der optischen Achse)**

$$V_L \equiv \frac{\partial b}{\partial g} = -V_T^2$$

### Brennweite sphärischer Spiegel

$$f = -\frac{R}{2} \quad \text{mit Krümmungsradius } R$$

### Brennweite dünner Linsen - Linsenschleiferformel

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_L}{n_M} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Mit den Krümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$ , dem Brechungsindex der Linse  $n_L$  und dem Brechungsindex des Mediums  $n_M$ .

### Brennweite dicker Linsen

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_L}{n_M} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{\left( \frac{n_L}{n_M} - 1 \right) d}{\frac{n_L}{n_M} R_1 R_2} \right), \quad h_1 = -f \frac{\left( \frac{n_L}{n_M} - 1 \right) d}{R_2 \frac{n_L}{n_M}}, \quad h_2 = -f \frac{\left( \frac{n_L}{n_M} - 1 \right) d}{R_1 \frac{n_L}{n_M}}$$

Mit Dicke der Linse  $d$  und den Hauptebenen  $h_1$  und  $h_2$ . Nomenklatur ansonsten wie oben.

### Strahlvektor und ABCD-Matrizen

Definition des Strahlvektors:

$$S \equiv \begin{pmatrix} n\alpha \\ x \end{pmatrix} \quad \text{Brechungsindex } n, \text{ Winkel und Abstand zur o. A. } \alpha \text{ und } x.$$

ABCD-Matrizen beschreiben die Wirkung von optischen Elementen auf den Strahlvektor. Sie lassen sich durch Matrixmultiplikation miteinander kombinieren, um komplexe optische Anordnungen zu beschreiben. Hier die wichtigsten Beispiele für ABCD-Matrizen:

#### brechende ebene Fläche

$$S_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S_a$$

#### Propagation

$$S_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{d}{n} & 1 \end{pmatrix} S_a$$

#### brechende Kugelfläche

$$S_b = \begin{pmatrix} 1 & -D_{ab} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S_a$$

#### dünne Linse

$$S_b = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{f} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S_a$$

Dabei ist  $d$  die Propagationslänge,  $n$  der Brechungsindex,  $D_{ab} = (n_b - n_a)/R_{ab}$  die Brechkraft der Kugelfläche und  $f$  die Brennweite der Linse.

# 10. ABERRATIONEN

*Aberrationen* sind Abbildungsfehler, also Abweichungen von der idealen, durch die Abbildungsgleichung beschriebene Abbildung.

Allgemein unterscheiden wir zwei Arten von Aberrationen:

1. Chromatische Aberrationen sind Fehler, welche bei der Verwendung von Licht mit unterschiedlichen Wellenlängen auftreten.
2. Monochromatische Aberrationen sind Fehler, welche auch mit monochromatischem Licht, also Licht von nur einer Wellenlänge, auftreten.

## 10.1. Chromatische Aberration

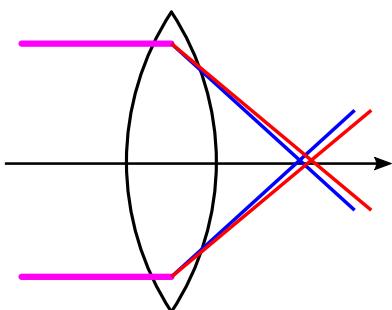
Chromatische Aberration ist auf die Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex zurückzuführen ( $n = n(\lambda)$ ). Wir schreiben für die Brechkraft  $D$  (inverse Brennweite) also

$$D(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} = (n(\lambda) - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Für normale Dispersion gilt  $n_{\text{blau}} > n_{\text{rot}}$ ; kurzwelligeres Licht wird stärker gebrochen als langwelligeres. Fokussiert man also Licht mit roten und blauen Frequenzkomponenten mit einer Linse, so erhält man den in [Abbildung 10.1](#) gezeigten Effekt.

### 10.1.1. Abbe-Zahl

Die Stärke der chromatischen Aberration lässt sich mithilfe der *Abbe-Zahl* quantifizieren. Wir bestimmen



**Abb. 10.1.:** Eine Linse fokussiert blaues Licht stärker als rotes.

hierzu den Brechkraftunterschied  $\Delta D$  für zwei ausgewählte Wellenlängen:

$$\Delta D = (n_{\text{blau}} - n_{\text{rot}}) \underbrace{\left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}_{\frac{1}{f} (n(\bar{\lambda}) - 1)^{-1}}$$

Hierbei ist  $\bar{\lambda}$  eine mittlere Wellenlänge. Es folgt damit

$$\Delta D = \frac{n_{\text{blau}} - n_{\text{rot}}}{n(\bar{\lambda}) - 1} \frac{1}{f} = \frac{1}{v_e} \frac{1}{f}. \quad (10.1)$$

Wir haben die Abbe-Zahl  $v_e$  eingeführt. Als Referenz verwendet man die Wellenlängen  $\lambda_{\text{blau}} = 479.9914 \text{ nm}$  und  $\lambda_{\text{rot}} = 643.8469 \text{ nm}$ , zwei Fraunhofer-Linien für Cd sowie als mittlere Wellenlänge  $\bar{\lambda} = 546.074 \text{ nm}$ , eine Fraunhofer Linie von Hg.

$$v_e = \frac{n(\bar{\lambda}) - 1}{n(\lambda_{\text{blau}}) - n(\lambda_{\text{rot}})} \quad (10.2)$$

## 10. Aberrationen

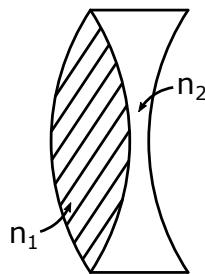
Die Abbe-Zahl misst die chromatische Aberration; je größer die Abbe-Zahl desto kleiner die Aberration. Ohne Dispersion,  $n \neq n(\lambda)$ , erhalten wir  $v_e = \infty$ . Für normale Dispersion gilt  $v_e > 0$ . So hat Kronglas beispielsweise eine Abbe-Zahl  $v_e > 50$ , Flintglas dagegen  $v_e < 50$ .

### 10.1.2.

#### Achromat

Beim Fotografieren beispielsweise führt chromatische Aberration dazu, dass scharfe Kanten einen Farbsaum erhalten, was offensichtlich nicht erwünscht ist. Wie können wir diesen Effekt nun verringern?

Zur Kompensation von chromatischer Aberration verwendet man *Achromaten*. Ein einfacher Achromat besteht, wie in Abbildung 10.2 gezeigt, aus zwei Linsen aus unterschiedlichem Material.



**Abb. 10.2.:** Aufbau eines Achromaten

Man wählt die beiden Linsen nun so aus, dass die Brechzahlunterschiede  $\Delta D_i$  sich gerade aufheben. Es gilt also:

$$\Delta D_1 + \Delta D_2 = \frac{1}{v_{e,1} f_1} + \frac{1}{v_{e,2} f_2} \stackrel{!}{=} 0,$$

wobei wir des Weiteren  $D_1 + D_2 \neq 0$  fordern, da wir sonst keine Abbildung erzeugen können. Wir erinnern uns hierbei daran, dass wir im vorherigen Kapitel gesehen hatten, dass sich im Abstand null die Brechkräfte zweier dünner Linsen addieren. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} v_{e,1} f_1 &= -v_{e,2} f_2 \\ \Rightarrow f_1 f_2 &< 0 \\ \Rightarrow f_1 &\neq -f_2 \text{ und } v_{e,1} \neq v_{e,2} \end{aligned}$$

Eine achromatische Linse muss also aus einer fokussierenden und einer defokussierenden Linse aus unterschiedlich dispersiven Gläsern bestehen.

Mithilfe eines Achromaten, wie er oben beschrieben ist, haben wir nun ein Linsensystem, welches für genau zwei Wellenlängen exakt die gleiche Brennweite besitzt. Wir haben damit jedoch kein System, welches für beliebige Wellenlängen die gleiche Brennweite hat.

### 10.2.

#### Monochromatische Aberration

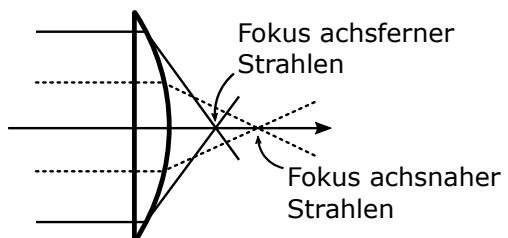
Während die chromatische Aberration auf Materialeigenschaften zurückzuführen ist, sind monochromatische Aberrationen geometrischen Ursprungs.

### 10.2.1.

#### Sphärische Aberration

Unter sphärischer Aberration versteht man den Effekt, dass parallele Strahlen in großem Abstand zur optischen Achse nicht im Brennpunkt fokussiert werden.

In Abbildung 10.3 ist der Effekt der sphärischen Aberration gezeigt. Die Brennweite einer sphärischen Linse oder Spiegels hängt vom Abstand der Strahlen von der optischen Achse ab. Anders formuliert: Sphärische Aberration wird vor allem dann relevant, wenn wir nicht mehr in der paraxialen Näherung arbeiten können.

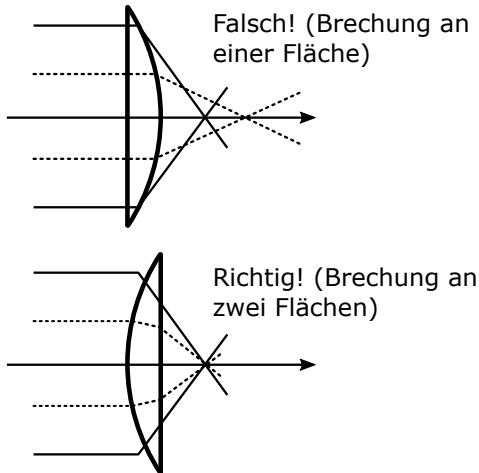


**Abb. 10.3.:** Zur sphärischen Aberration einer Linse

Um die sphärische Aberration zu korrigieren, gibt es folgende Möglichkeiten:

- Wir können den Strahldurchmesser reduzieren, um achsenferne Strahlen auszublenden, indem wir Blenden nutzen.

- Wir verteilen die Brechung auf mehrere Flächen (siehe Abbildung 10.4) Die Merkregel herzu lau-



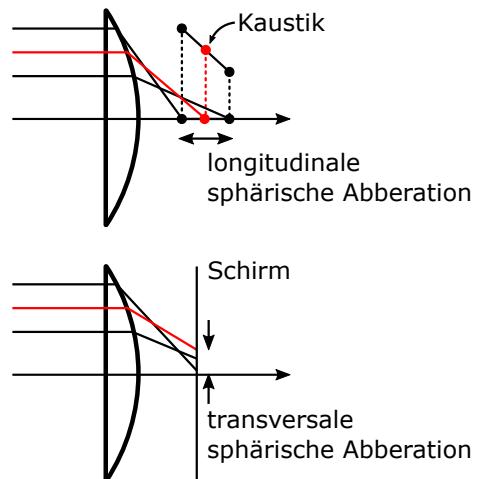
**Abb. 10.4.:** Vermeidung von sphärischer Aberration durch die Verteilen der Brechung auf mehrere Flächen.

tet: Gerade Strahlen auf gekrümmte Flächen, schiefe Strahlen auf gerade Flächen

- Wir verwenden *asphärische Linsen*. Diese sind jedoch deutlich teurer und für bestimmte Paare von  $g$  und  $b$  perfekt. Zudem weisen sie eventuell andere Fehler auf.

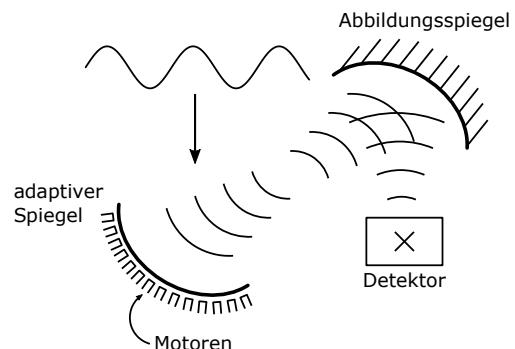
Ein prominentes Beispiel für die sphärische Aberration ist das Hubble-Weltraumteleskop. Bei dessen Erstinstallation im Jahr 1990 war es nur zu 12 % scharf und der Rest unscharf (im Halo). Der Grund hierfür war eine fehlerhafte Spiegelpolitur: es gab eine Abweichung von 4 mm auf 2.4 m. Abhilfe schafften 1993 Korrekturoptiken, die eine Schärfe von 70 % im zentralen Bildscheibchen erreichen konnten. Das Hubble-Teleskop kann jetzt ein Glühwürmchen in 20 000 km Entfernung beobachten.

Sphärische Aberration führt außerdem zu einer gekrümmten Brennebene statt einem Brennpunkt, welche man als *Kaustik* bezeichnet (siehe Abbildung 10.5). Daraus resultiert eine Verzerrung der Wellenfront.



**Abb. 10.5.:** Kaustik und transversale sphärische Abberation

Anmerkung: Auch atmosphärische Dichteschwankungen führen zu einer Wellenfrontverzerrung. Daher baut man astronomische Teleskope in großer Höhe (z.B. Berg in Chile oder auf Hawaii). Eine Korrektur ist über adaptive Spiegel möglich (siehe Abbildung 10.6).



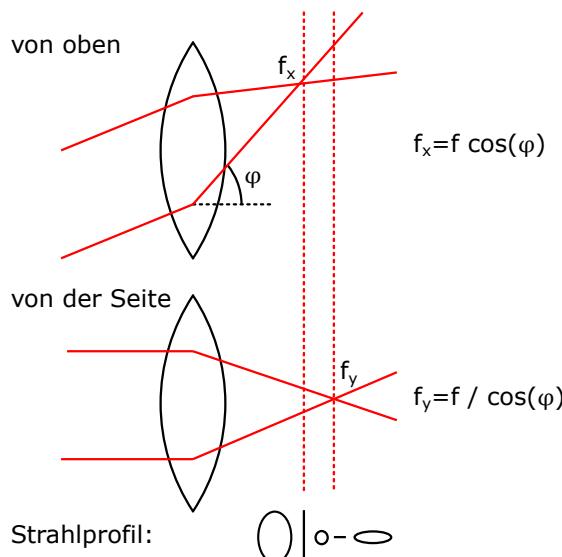
**Abb. 10.6.:** Adaptive Spiegel zur Korrektur einer Wellenfrontverzerrung.

## 10.2.2. Astigmatismus und Koma

Trifft ein Strahl schief auf eine Linse (oder auf einen sphärischen Spiegel), so kommt es zu *Astigmatismus*. Das bedeutet, dass das Licht, welches in der Ebene

## 10. Aberrationen

auf die Linse einfällt, in der der schiefe Einfallswinkel liegt eine andere Brennweite hat als das Licht, welches in der Ebene senkrecht dazu einfällt (siehe Abbildung 10.7).



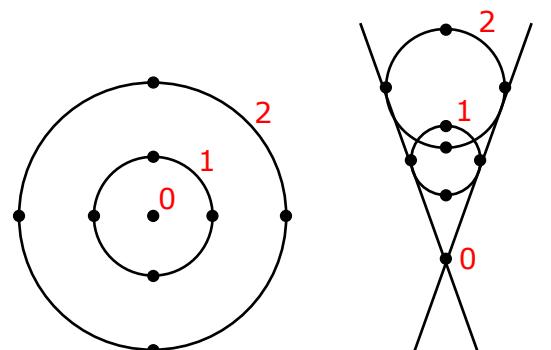
**Abb. 10.7.:** Zum Astigmatismus. Bei schiefem Einfall ergeben sich für zwei senkrecht aufeinander stehende Ebenen unterschiedliche Brennweiten.

Da sich die Brennpunkte beider Ebenen durch den schießen Einfall an unterschiedlichen Positionen befinden, führt dies zu ovalen Foki. Linienartige Foki entstehen in der *Sagittalebene* (horizontal) und in der *Tangentialebene* (vertikal).

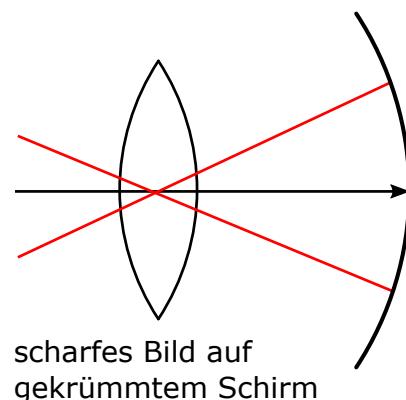
Aus der Kombination von Astigmatismus und sphärischer Aberration entsteht *Koma*. Der Name folgt der Tatsache, dass die Foki bei schiefem Einfall auf eine sphärische Linse oder einen sphärischen Spiegel wie ein Kometenschweif aussehen (siehe Abbildung 10.8).

### 10.2.3. Bildfeldwölbung

Ein scharfes Bild entsteht nur auf einem gekrümmten Schirm (siehe Abbildung 10.9), da nur hier alle Strahlen den gleichen Abstand zur Linse haben. Auf einem geraden Schirm entstehen Verzeichnungen oder Verzerrungen.



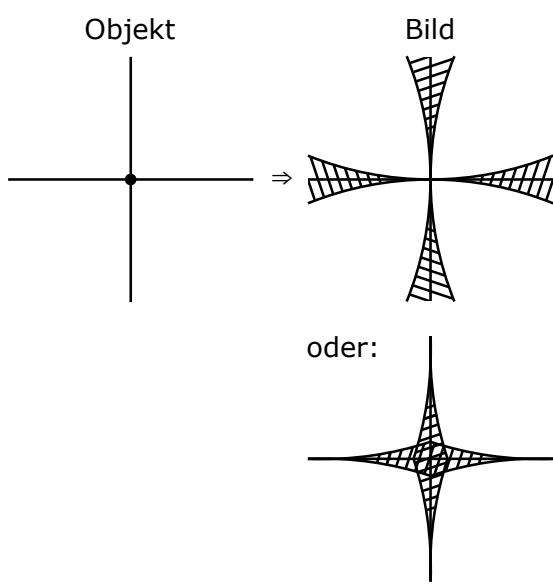
**Abb. 10.8.:** Koma beim schiefen Einfall auf eine sphärische Linse.



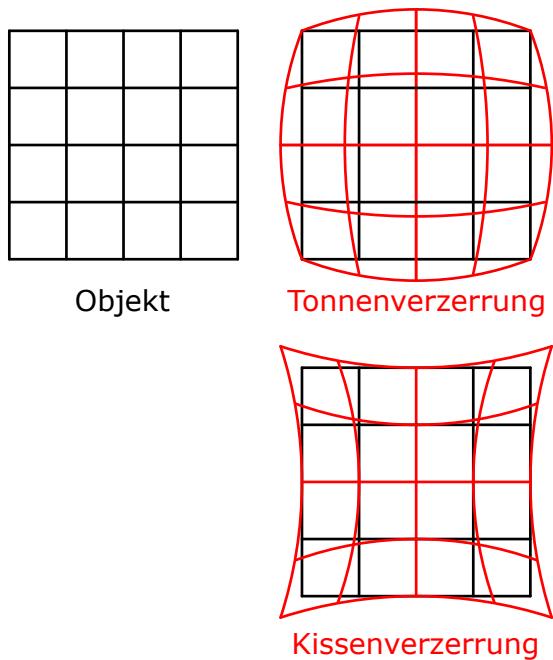
**Abb. 10.9.:** Nur auf einem gekrümmten Schirm ist das gesamte Bild scharf.

Die Verzerrung lässt sich Anhand der Abbildung eines simplen Kreuzes sehen. Wir sehen in Abbildung 10.10, dass es je nach Krümmung entweder an den Enden oder im Zentrum aufgeweitet wird.

In der Fotografie spricht man häufig von *Tonnen-* oder *Kissenverzerrung*. Diese Begriffe lassen sich am einfachsten veranschaulichen, wenn man die Abbildung eines simplen Quadratmusters betrachtet (siehe Abbildung 10.11).



**Abb. 10.10.:** Ein Kreuz wird auf einem geraden Schirm bei Bildfeldwölbung entweder im Zentrum oder an den Enden aufgeweitet.



**Abb. 10.11.:** Zur Tonnen- und Kissenverzerrung.

### 10.3. Endliche Schärfentiefe

Endliche Schärfentiefe tritt auch bei perfekten Linsen auf und wird deswegen nicht zu den Aberrationen gezählt. Wir behandeln sie der Einfachheit halber trotzdem in diesem Kapitel.

Bei einem Fotoapparat gilt  $b \approx f$  und  $g \gg f$ . Daraus folgt für den Öffnungswinkel  $\gamma$

$$\gamma = \frac{D}{2b} \approx \frac{D}{2f}.$$

Wir erhalten dann für die Bildgröße  $B_0$  bei einer um  $\Delta b$  verrückten Bildebene

$$\begin{aligned} B_0 &\approx 2\gamma\Delta b \\ &= \frac{D}{f} |V_L| \Delta g \\ &= \frac{D}{f} \frac{f^2}{f(g-f)^2} \Delta g \\ &\approx \frac{Df}{g^2} \Delta g \\ \Rightarrow \Delta g &= \frac{B_0 g^2}{Df} \propto \frac{1}{D} \end{aligned}$$

Die Schärfentiefe ist also groß, wenn die Blende klein ist. Jedoch wird bei kleinerer Blende auch die Lichtmenge proportional zu  $D^2$  kleiner!

**Abbildung 10.12** dient zur Veranschaulichung des Einflusses des Blendendurchmessers auf die Schärfentiefe. Bei großer Blendenöffnung werden große Bereiche des Hintergrundes auf einen einzigen Punkt am Sensor abgebildet. Durch diese Mittelung des Signals erscheint der Hintergrund unscharf. Bei sehr kleiner Blende wird über viel kleinere Bereiche des Hintergrundes gemittelt. Der Hintergrund erscheint daher schärfer. Eine Abbildung mit einer Linse (oder Fotokamera) bei kleiner Blendenöffnung ist vergleichbar mit der Abbildung durch eine Camera Obscura.

10. Aberrationen

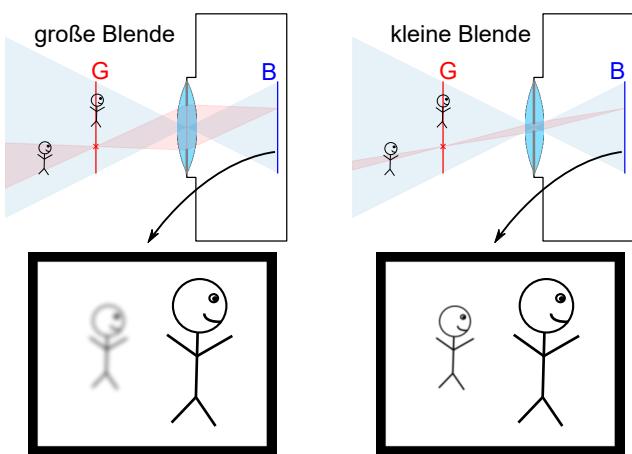


Abb. 10.12.: Zur Schärfentiefe.

## Zusammenfassung

### Chromatische Aberration

Chromatische Aberration wird durch die Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex verursacht. Ein Maß für chromatische Aberration ist die *Abbe-Zahl*  $v_e$ :

$$v_e = \frac{n(\bar{\lambda}) - 1}{n(\lambda_{\text{blau}}) - n(\lambda_{\text{rot}})}$$

Die Wellenlängen  $\bar{\lambda}$ ,  $\lambda_{\text{blau}}$  und  $\lambda_{\text{rot}}$  sind über bestimmte atomare Übergänge standardisiert. Ihre Werte sind:  $\lambda_{\text{blau}} = 479.9914 \text{ nm}$ ,  $\lambda_{\text{rot}} = 643.8469 \text{ nm}$ ,  $\bar{\lambda} = 546.074 \text{ nm}$ . Aus der Abbe-Zahl kann der Brechkraftunterschied  $\Delta D$  zwischen rotem und blauen Licht berechnet werden:

$$\Delta D = \frac{1}{v_e f(\bar{\lambda})}$$

### Sphärische Abberationen

Sphärische Aberration entsteht, wenn die paraxiale Näherung bei einer sphärischen Optik (Linse, Spiegel, ...) nicht mehr angewendet werden kann. Das ist zum Beispiel für große Strahldurchmesser oder sehr kurze Brennweiten der Fall. Sphärische Abberationen können durch folgende Maßnahmen verringert werden:

- Reduzierung des Strahldurchmessers
- Verteilung Brechung auf mehrere Flächen (Gerade Strahlen auf gekrümmte Flächen, schiefe Strahlen auf gerade Flächen)
- Verwendung asphärischer Optiken

### Astigmatismus und Koma

Astigmatismus bezeichnet den Effekt, dass ein Fokus bei schiefen Beleuchtung einer Linse oder eines Spiegels nicht mehr kreisförmig ist.

Die Kombination aus sphärischen Abberationen und Astigmatismus nennt man Koma.

### Bildfeldwölbung

Bildfeldwölbung kann in Form von Tonnen- oder Kissenverzerrung auftreten und wird durch die Verwendung einer Bildebene statt einer sphärischen Bildfläche verursacht.

### Schärfentiefe

Eine endliche Schärfentiefe tritt auch bei idealen Linsen auf und ist somit *keine* Aberration.

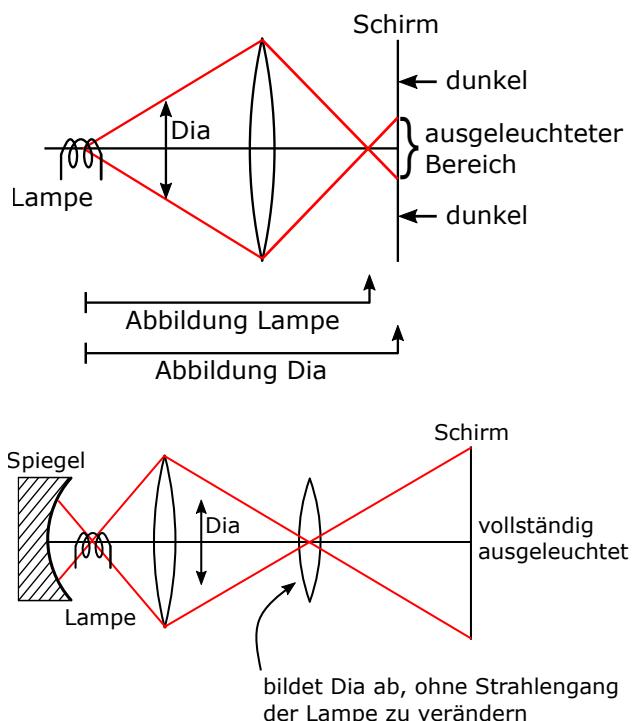


# 11. OPTISCHE INSTRUMENTE

## 11.1. Projektor

In einem Projektor wird eine Filmrolle, ein Dia oder ein LCD-Bildschirm mit einer Lampe ausgeleuchtet. Der ausgeleuchtete Gegenstand wird anschließend mit einer abbildenden Optik auf einem Schirm abgebildet. Im denkbar einfachsten Aufbau eines Projektors wird nur eine Linse verwendet, um den Gegenstand abzubilden (siehe Abbildung 11.1, oben). In diesem Fall wird aber auch die sich hinter dem Gegenstand befindliche Lampe abgebildet, was zu einer schlechten Ausleuchtung des Schirmes führt.

Eine Anordnung, die diesen Fehler ausgleicht, ist in Abbildung 11.1 (unten) gezeigt. Dort wird die (als punktförmig angenommene) Lampe zuerst in das Zentrum der Linse abgebildet, die wiederum den Gegenstand abbildet. So wird der Strahlengang der Lampe durch die zweite Linse nicht verändert. Um außerdem das volle Potential der Lampe auszuschöpfen, wird eine sphärischer Spiegel im Abstand des Spiegelradius  $g = R = 2f$  verwendet. Damit wird das gesamte Licht, das den Spiegel trifft wieder zurück zum Ausgangspunkt reflektiert ( $b = R$ ).



**Abb. 11.1.:** Ungewollte Abbildung der Lampe (oben) und verbesserte Anordnung (unten).

## 11.2. Teleobjektiv

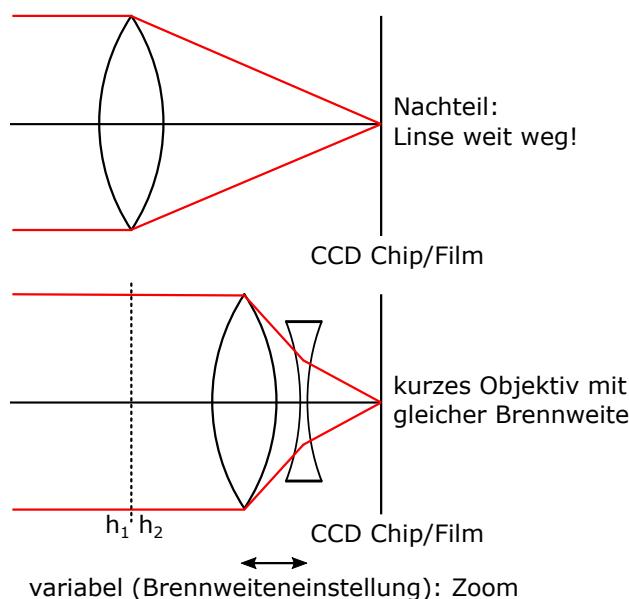
Eine Teleobjektiv wird in der Fotografie verwendet, um weit entfernte Objekte ( $g \gg f$ ) auf dem Sensor der Kamera abzubilden (d. h.  $f > 0$ ). In diesem Fall gilt für die transversale Vergrößerung:

$$|V_T| = \left| \frac{f}{f - g} \right| \stackrel{f \ll g}{\approx} \frac{f}{g}. \quad (11.1)$$

Wir erzielen also eine hohe Vergrößerung für große Werte von  $f$ .

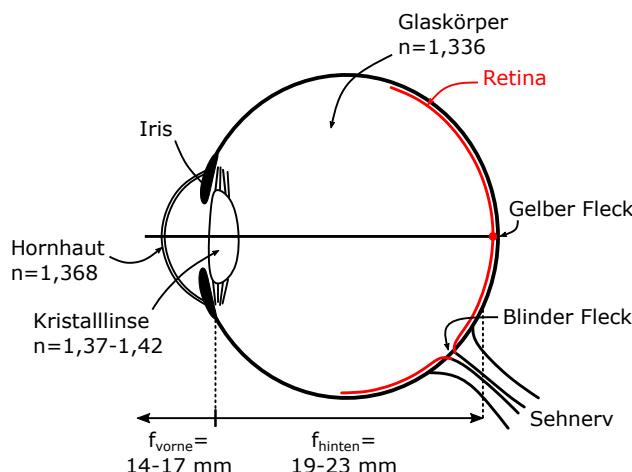
Objektive mit nur einer Linse wären aufgrund der langen Brennweite und der damit verbundenen großen Bauform jedoch nicht praktikabel. Es werden daher Systeme aus mehreren Linsen eingesetzt. Ein Beispiel aus zwei Linsen ist in Abbildung 11.2 gezeigt.

## 11. Optische Instrumente



**Abb. 11.2.:** Optimierter Aufbau für ein Teleobjektiv.

## 11.3. Das Auge



**Abb. 11.3.:** Aufbau des Auges.

Der Aufbau des Auges ist schematisch in [Abbildung 11.3](#) gezeigt. Die Hornhaut hat eine Brechkraft von +43 dpt (Dioptrien) in Luft, die Linse dagegen (nur) +19 dpt in Luft. Die Hornhaut ist also wesentlich für die Abbildung. Daher kann Kurzsichtigkeit durch La-

sern der Hornhaut korrigiert werden. Die Brechkraft ändert sich aber im Wasser, weswegen eine Taucherbrille von Vorteil ist.

Die Brennweite des Auges ändert sich durch die Linse. Ist diese entspannt, dann ist das Auge auf unendlich scharfgestellt (**Fernpunkt**). Die Akkommodation erlaubt eine Einstellung bis hin zum **Nahpunkt** bei 7 cm. Durch Alter oder angeborene Augenform können Nah- und Fernpunkt des Auges verändert sein.

Die Abbildung entsteht auf der **Retina** auf dem Kopf. Das Gehirn kompensiert dies nebst vieler anderer Fehler.

Die Retina besteht aus zwei Typen von Sensoren:

- Die **Zapfen** ermöglichen das Farbsehen. Sie sind aber sehr unempfindlich und langsam (brauchen viel Licht).
- Mit den **Stäbchen** können wir nur schwarz-weiß sehen. Diese sind aber empfindlicher ( $10^{-17} \text{ W}$ ) und schneller. Dies ist auch der Grund, weshalb „nachts alle Katzen grau“ sind.

Der **Gelbe Fleck** markiert den Fokuspunkt des Auges. Hier sind die Zapfen und 90 – 95 % des Sehvermögens angeordnet.

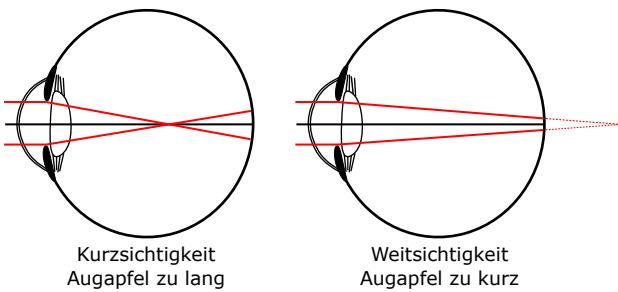
Das Auge macht immer kleinste Bewegungen, sogar wenn wir etwas anstarren, um die Sättigung der Sehzellen zu vermeiden.

Der **Blinde Fleck** liegt an der Stelle des Nervenanlasses. Hier sehen wir nichts.

### 11.3.1. Fehlsichtigkeit

Im Fall der Kurzsichtigkeit liegt der Fernpunkt näher als  $\infty$ . Man korrigiert dies mithilfe einer konkaven Linse. Bei Weitsichtigkeit liegt der Nahpunkt weiter weg, was durch eine konvexe Linse korrigiert wird. Zu den beiden Arten der Fehlsichtigkeit siehe auch [Abbildung 11.4](#).

**Beispiel:** Befindet sich der Nahpunkt bei 125 cm, so wollen wir diesen auf den „Arbeitsabstand“ von  $s_0 = 25$  cm verringern. Wir bilden also von  $g = 25$  cm auf



**Abb. 11.4.:** Zur angeborenen Kurzsichtigkeit (links) und Weitsichtigkeit (rechts).

$b' = -125 \text{ cm}$  (Zwischenbild) ab:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{-1,25 \text{ m}} + \frac{1}{0,25 \text{ m}} = \frac{1}{0,31 \text{ m}} = +3,1 \text{ dpt} \quad (11.2)$$

Die Brechkraft der Brille muss also  $+3,2 \text{ D}$  betragen.

**Anderes Beispiel:** Der Fernpunkt liegt bei  $2 \text{ m}$  und soll auf  $\infty$  korrigiert werden. Wir haben also  $g = \infty$  und  $b' = -2 \text{ m}$  und erhalten für die Brechkraft der Brille

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-2 \text{ m}} = -\frac{1}{2} \text{ m}^{-1} = -0,5 \text{ dpt} \quad (11.3)$$

Anmerkung: In den einfachen Überlegungen wurde der Abstand der Brille nicht berücksichtigt. Unsere Berechnungen gelten also strenggenommen nur für Kontaktlinsen.

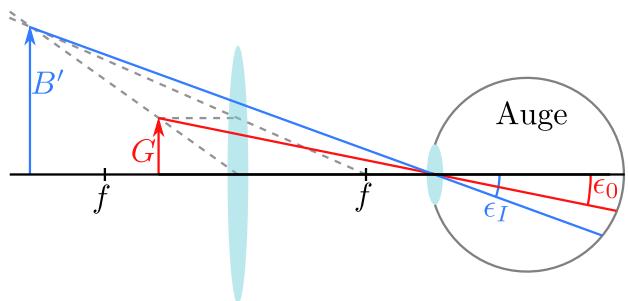
### 11.3.2. Winkelvergrößerung optischer Instrumente

Für die Winkelvergrößerung optischer Instrumente gilt:

$$V \equiv \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}} = \frac{\epsilon_I}{\epsilon_0} \neq V_T \quad (11.4)$$

### 11.4. Lupe

Eine Lupe ist eine Sammellinse, welche in einem Abstand  $g < f$  über einen Gegenstand  $G$  gehalten wird. Weil  $g < f$  ist das entstehende Bild  $B'$  virtuell und aufrecht. Über das menschliche Auge wird das virtuelle Bild auf die Netzhaut abgebildet. Wie in Abbildung 11.5 gezeigt, erscheint der Gegenstand dadurch vergrößert ( $\epsilon_I > \epsilon_0$ ).



**Abb. 11.5.:** Funktionsweise einer Lupe: Das virtuelle Bild einer konvexen Linse wird mit dem Auge betrachtet. Der Sehwinkel ohne Lupe ist  $\epsilon_0$ . Der Sehwinkel mit Lupe ist  $\epsilon_I$ .

Aus Abbildung 11.5 ist außerdem ersichtlich, dass die Vergrößerung  $V = \epsilon_I/\epsilon_0$  im Allgemeinen von den Abständen Gegenstand-Lupe und Lupe-Auge abhängt.

Um trotzdem einen Wert für die Vergrößerung einer Lupe angeben zu können, wird die Vergrößerung für den Fall definiert, dass sowohl Auge als auch Gegenstand sich im jeweiligen Brennpunkt der Lupe befinden. Als Referenz ohne Lupe wählt man einen Abstand  $s_0$  zum Objekt, der oft Arbeitsabstand genannt und typischerweise auf 25 cm festgelegt wird. Es gilt somit

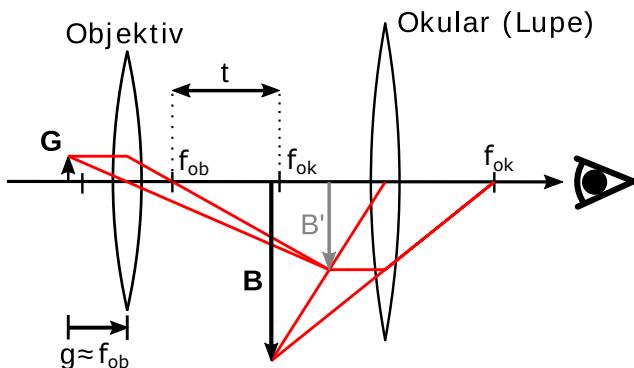
$$\epsilon_0 = \frac{G}{s_0} \quad \text{und} \quad \epsilon_I = \frac{G}{f}, \quad (11.5)$$

und für die **Winkelvergrößerung der Lupe**

$$V = \frac{s_0}{f}. \quad (11.6)$$

Mit Lupen kann man  $V \approx 5$ , mit Linsensystemen sogar  $V \approx 20$  erreichen.

## 11.5. Mikroskop



**Abb. 11.6.:** Zur Funktionsweise eines Mikroskops. Die Länge  $t$  bezeichnet man als Tubuslänge.

$$g \approx f_{ob} \Rightarrow |B'| \gg |G|$$

Das Mikroskop arbeitet mit einer zweistufigen Vergrößerung (siehe Abbildung 11.6). Die beiden Abbildungsstufen werden als Objektiv und Okular bezeichnet. Im einfachsten Fall bestehen diese aus jeweils nur einer Linse.

Das Objektiv erzeugt ein Zwischenbild mit

$$V_T = -\frac{b'}{g} = -b' \left( \frac{1}{f_{ob}} - \frac{1}{b'} \right) = -\frac{b' - f_{ob}}{f_{ob}} = -\frac{t}{f_{ob}}. \quad (11.7)$$

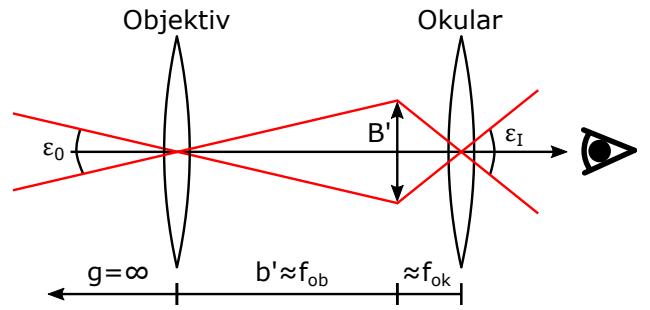
Das Zwischenbild wird dann mit dem Okular (Lupe) betrachtet. Damit folgt für die **Winkelvergrößerung des Mikroskops**:

$$V = \frac{t \cdot s_0}{f_{ob} \cdot f_{ok}} \quad (11.8)$$

Kurze Brennweiten bewirken also eine starke Vergrößerung. Es existiert jedoch eine Limitierung infolge der Wellenoptik (später).

## 11.6. Fernrohr (nach Kepler)

Ein Keplerfernrohr besteht aus zwei Linsen mit den positiven Brennweiten  $f_{ob}$  und  $f_{ok}$  (siehe Abbildung 11.7). Für den Abstand  $d$  der Linsen voneinander gilt  $d \approx$



**Abb. 11.7.:** Aufbau eines Kepler-Fernrohrs.

$f_{ob} + f_{ok}$ . Im Fall eines weit entfernten Gegenstandes ( $g \approx \infty$ ) finden wir das Zwischenbild bei  $b' \approx f_{ob}$ , womit gleichzeitig  $|B'| \ll G$  folgt. Das Objektiv ( $f_{ob}$ ) erzeugt also ein **verkleinertes** Zwischenbild, das wiederum mit dem Okular ( $f_{ok}$ ) betrachtet wird. Es gilt

$$V_T = \frac{f}{f-g} = \frac{f-b'}{f} \approx 0 \quad (g = \infty, b' \approx f). \quad (11.9)$$

Mit

$$\epsilon_0 = \frac{B'}{f_{ob}} \text{ und } \epsilon_I = \frac{B'}{f_{ok}} \quad (11.10)$$

folgt für die **Winkelvergrößerung des Teleskops**:

$$V = \frac{f_{ob}}{f_{ok}} \quad (11.11)$$

## 11.7. Galileisches Fernrohr

Das Galileische Fernrohr ist aufgrund der verwendeten Konkavlinse (siehe Abbildung 11.8) kompakter mit  $d \approx f_{ob} + f_{ok}$ . Es erzeugt ein aufrechtes Bild.

Wir erhalten ebenso aufrechte Bilder, wenn wir drei konvexe Linsen oder einen Feldstecher (Umlenkprisma) verwenden.

Für die Lichtstärke gilt  $\sim D_{ob}^2$  und das Auflösungsvermögen ist gegeben durch  $\Delta\epsilon = \frac{1,22\lambda}{D_{ob}}$  (später). Es ist also vorteilhaft, große Objektive zu verwenden. Hierbei setzt man dann häufig Spiegel anstelle von Linsen ein.

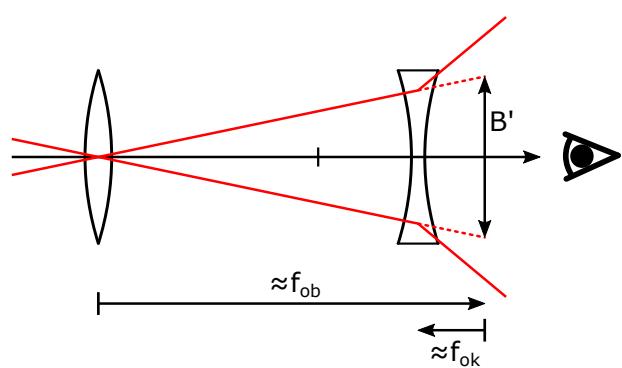
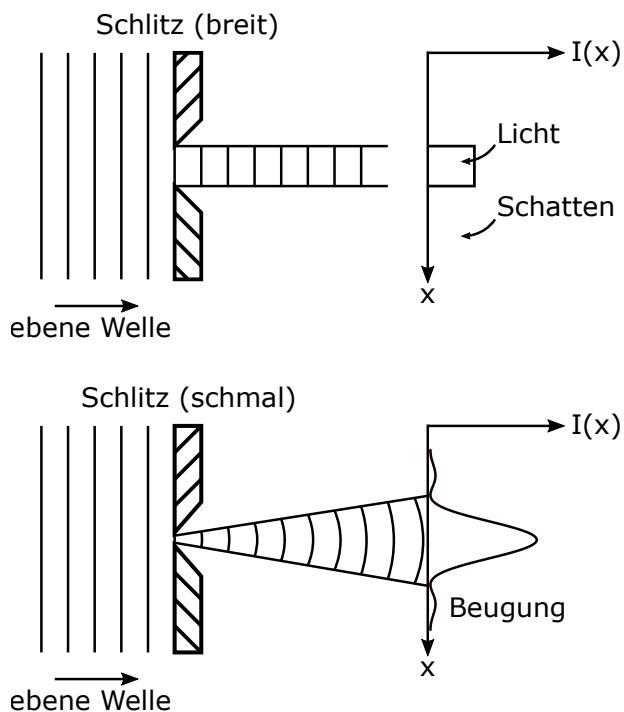


Abb. 11.8.: Galileisches Fernrohr.



# 12. BEUGUNG

## 12.1. Huygenssches Prinzip

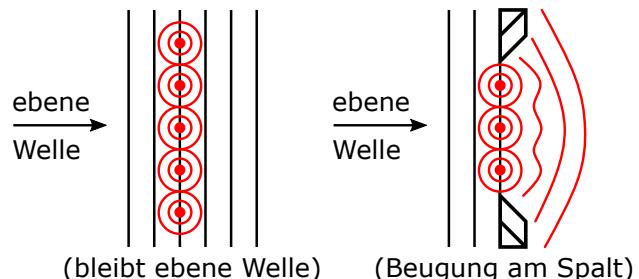


**Abb. 12.1.:** Geometrische Strahlausbreitung (oben) und Beugung (unten).

Als optische Beugung bezeichnet man die Phänomene, die auftreten, wenn Licht auf Hindernisse wie Blenden oder Schlitzte trifft und dabei die Wellennatur des Lichts zum Vorschein kommt. In [Abbildung 12.1](#) soll der Unterschied zwischen der in [Kapitel 9](#) behandelten geometrischen Strahlausbreitung und der Beu-

gung von Licht an einer Blende aufgezeigt werden. Beugung kann mit Hilfe des Huygensschen Prinzips beschrieben werden (siehe dazu auch [Abbildung 12.2](#)):

Huygenssches Prinzip: Jeder Punkt einer Wellenfront kann als Ausgangspunkt einer Kugelwelle betrachtet werden.



**Abb. 12.2.:** Zum Huygensschen Prinzip.

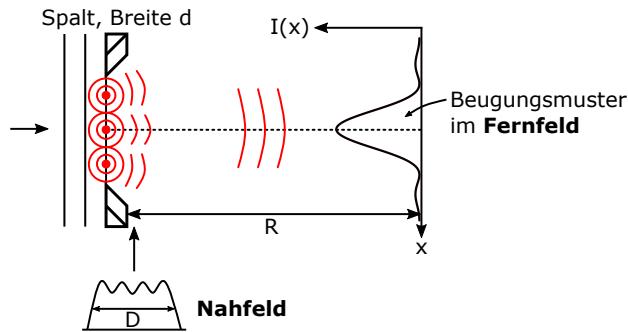
### 12.1.1. Nah- und Fernfeld

Wir unterscheiden als Grenzfälle die **Fresnelbeugung** im Nahfeld und die **Fraunhoferbeugung** im Fernfeld, wie in [Abbildung 12.3](#) veranschaulicht werden soll. Als Kriterium für die Unterscheidung gilt

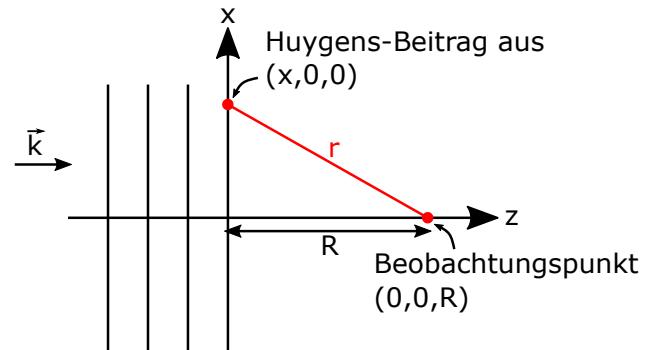
$$\text{Fernfeld: } R \gg \frac{D^2}{\lambda} \quad (12.1)$$

mit dem Abstand  $R$  zwischen Schirm und Blende sowie der Blendengröße  $D$ . Die Herleitung dieser Bedingung erfolgt später.

## 12. Beugung



**Abb. 12.3.:** Beugung im Nah- und Fernfeld.



**Abb. 12.4.:** Zur Fresnelschen Beugung.

**Beispiel:** Mit  $D = 1 \text{ mm}$  und  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$  erhalten wir für das Fernfeld  $R > 1,58 \text{ m}$ .

Ohne eine Störung, z.B. durch eine Blende, addieren sich alle Kugelwellen wieder zur ebenen Welle.

## 12.2. Fresnelsche Beugung

### 12.2.1. Fresnelzonen

Wir betrachten die Beziehung zwischen Kugelwellen und ebenen Wellen. Für die Phase einer Kugelwelle mit Ausgangspunkt  $(x, 0, 0)$  am Beobachtungspunkt  $(0, 0, R)$  gilt nach Abbildung 12.4:

$$\varphi = kr = k\sqrt{x^2 + R^2}. \quad (12.2)$$

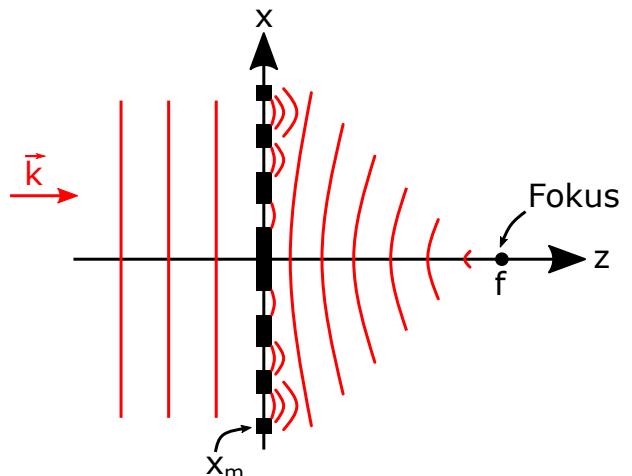
Das Feld wechselt sein Vorzeichen bei  $\Delta\varphi = m\pi$ , sodass folgt  $r = R + m \cdot \frac{\lambda}{2}$  mit  $m \in \mathbb{Z}$ . Wir erhalten schließlich

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + R^2} = R + m \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (12.3)$$

$$\Rightarrow x_m = \pm \sqrt{Rm\lambda + m^2 \cdot \frac{\lambda^2}{4}}. \quad (12.4)$$

Dies bestimmt den Radius der  $m$ -ten Fresnelzone. Die Beiträge benachbarter Fresnelzonen führen zu destruktiver Interferenz im Beobachtungspunkt.

### 12.2.2. Fresnelsche Zonenplatte



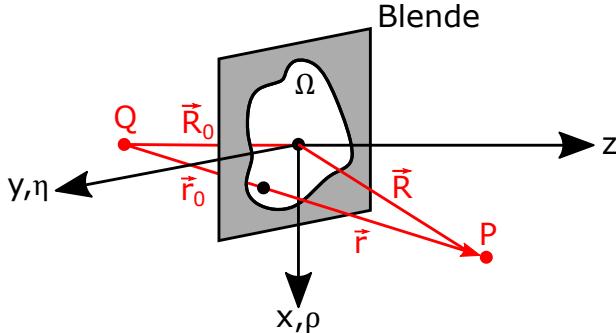
**Abb. 12.5.:** Fresnelsche Zonenplatte.

Mit einer Fresnelschen Zonenplatte stören wir die destruktive Interferenz durch Blenden. Dies wirkt bei geeigneter Anordnung als **Linse**. Man verwendet Fresnelsche Zonenplatten beispielsweise in der Röntgenoptik als Alternative zu Spiegeln, da normale Linsen im Röntgenbereich absorbieren.

Anmerkung: Im Röntgenbereich sind Optiken mit hoher Reflexion nur unter streifendem Einfall zu realisieren.

## 12.3. Kirchhoffsche Beugungstheorie

Die komplexe Schreibweise ist vorteilhaft, da sie der Fouriertransformation gleicht (später).



**Abb. 12.6.:** Lichtausbreitung durch eine Blende in der Fresnel-Kirchhoffschen Beugungstheorie.

Mit Hilfe von Abbildung 12.6 leiten wir zunächst einen allgemeinen Ausdruck zur Beschreibung der Beugung her und führen dann die Näherung für die Fraunhoferbeugung aus. Wir bezeichnen die Position der Quelle mit  $\vec{R}_0$ , den Beobachtungspunkt mit  $\vec{R} = (x, y, z)$  und die Koordinaten auf der Blendenöffnung als  $\rho, \eta$ . Wir wenden das **Huygenssche Prinzip** an:

- Vom Punkt  $Q$  wird eine Kugelwelle ausgesendet. An einem Punkt  $(\rho, \eta, 0)$  gilt für das Feld:

$$U(\rho, \eta) = E_0 \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \text{ mit } r_0 = \left| \vec{R}_0 - \begin{pmatrix} \rho \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \right|. \quad (12.5)$$

- Vom Punkt  $(\rho, \eta, 0)$  wird nach Huygens wiederum eine Kugelwelle emittiert:

$$\text{Feld in } P \sim U(\rho, \eta) \frac{e^{ikr}}{r} \text{ mit } r = \left| \begin{pmatrix} \rho \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} - \vec{R} \right| \quad (12.6)$$

- Das Gesamtfeld in  $P$  ist die Summe über alle  $(\rho, \eta, 0)$ . Wir erhalten das **Beugungsintegral**

$$U_P(\vec{R}) \sim E_0 \iint_{\Omega} \frac{e^{ik(r+r_0)}}{r \cdot r_0} d\rho d\eta. \quad (12.7)$$

## 12.4. Fraunhofer Beugung

Zum Lösen des Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegrals sind allgemein Näherungen nötig. Für die Fraunhoferbeugung lauten diese:

1.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - \rho)^2 + (y - \eta)^2 + (z - 0)^2} \quad (12.8) \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2x\rho - 2y\eta + \rho^2 + \eta^2} \\ &= \sqrt{R^2} = |R|^2 \end{aligned}$$

$$= R \cdot \sqrt{1 - \frac{2x\rho}{R^2} - \frac{2y\eta}{R^2} + \frac{\rho^2}{R^2} + \frac{\eta^2}{R^2}} \quad (12.10)$$

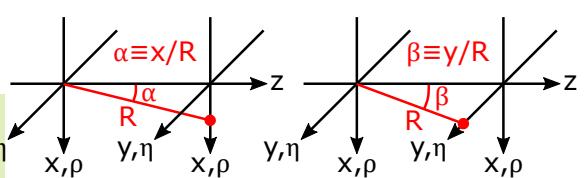
klein für große  $R$  (Fernfeld)

Wir haben in Gleichung (12.10) ausgenutzt, dass  $\sqrt{1 - x} \approx 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \dots ; x \ll 1$ .

- Die Blendengröße  $D = \max(\rho, \eta)$  ist klein gegenüber  $R$ .
- Der Abstand  $R$  ist groß gegen  $(x, y)$  und  $(\rho, \eta)$ . Dann folgt:

$$r \approx R \left( 1 - \underbrace{\frac{x\rho}{R^2} - \frac{y\eta}{R^2}}_{\text{klein } (\ll 1)} \right) + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{\rho^2}{R} + \frac{\eta^2}{R}\right)}_{\text{sehr klein}} \quad (12.11)$$

Wir definieren Winkel für die Beugungsrichtung: Wir



**Abb. 12.7.:** Definition der Beugungswinkel.

## 12. Beugung

erhalten dann

$$r \approx R - \alpha\rho - \beta\eta + \mathcal{O}\left(\frac{\rho^2}{R} + \frac{\eta^2}{R}\right). \quad (12.12)$$

Analog gilt für die Quelle:

$$r_0 \approx R_0 + \alpha_0\rho + \beta_0\eta + \mathcal{O}\left(\frac{\rho^2}{R_0} + \frac{\eta^2}{R_0}\right) \quad (12.13)$$

**Achtung:** Die Näherung versagt für  $k\left(\frac{\rho^2}{R_0}, \frac{\eta^2}{R_0}, \frac{\rho^2}{R}, \frac{\eta^2}{R}\right) \gtrsim 2\pi$ . Dann folgt  $\frac{D^2}{R_0\lambda}, \frac{D^2}{R\lambda} \gtrsim 1$ . Damit gilt für das **Fernfeld**

$$R, R_0 \gg \frac{D^2}{\lambda}. \quad (12.14)$$

Wenn die Punkte  $P$  und  $Q$  im Fernfeld liegen, so ist die Blende gleichmäßig ausgeleuchtet und  $P$  empfängt von jedem Punkt der Blende die gleiche Intensität. Dann gilt  $r, r_0 = \text{const}$  und es folgt

$$U_p(\alpha, \beta) \sim \iint_{\Sigma} e^{ik(\alpha-\alpha_0)\rho - ik(\beta-\beta_0)\eta} d\rho d\eta. \quad (12.15)$$

Für senkrechte Beleuchtung ist  $\alpha_0, \beta_0 = 0$  und es folgt die **Fraunhofer-Beugung im Fernfeld**

$$U_p(\alpha, \beta) \sim \iint_{-\infty}^{\infty} \Omega(\rho, \eta) e^{ik\alpha\rho - ik\beta\eta} d\rho d\eta. \quad (12.16)$$

Für die Blendenfunktion gilt

$$\Omega(\rho, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{innerhalb der Blende} \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases}. \quad (12.17)$$

Allgemein ist aber auch komplexes  $\Omega$  möglich, mit  $0 \leq |\Omega| \leq 1$ .

Für den Zusammenhang von Beugung und Fouriertransformation (später mehr) finden wir:

$$U_p(\alpha, \beta) \sim \text{F.T}\{\Omega(\rho, \eta)\}_{\rho \rightarrow k\alpha, \eta \rightarrow k\beta} \quad (12.18)$$

für  $R, R_0 > \frac{D^2}{\lambda}$ .

Ohne Beugung (Strahloptik) haben wir  $\alpha = 0 \Rightarrow \delta$ -Funktion, also ein Fokus. Mit Beugung dagegen liegt eine Fouriertransformation  $\text{F.T}\{\Omega\}$  in der Fourierebene vor.

Anmerkung: Nur ein unendlich weiter Strahldurchmesser würde einen  $\delta$ -förmigen Fokus erzeugen. Andernfalls ist der Durchmesser beugungsbegrenzt.

### 12.4.1. Filtern in der Fourierebene

Zur Abbildung des Beugungswinkels:

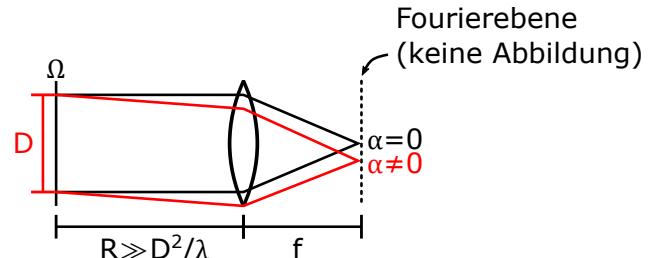


Abb. 12.8.: Zur Abbildung des Beugungswinkels.

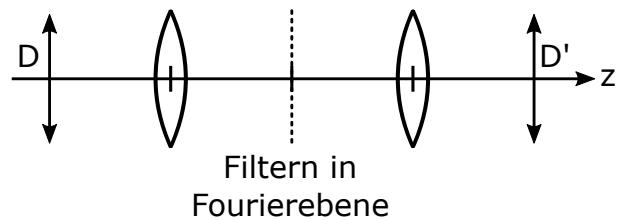


Abb. 12.9.: Zum Filtern in der Fourierebene. Es liegt ein 4f-Aufbau vor.

Mithilfe einer fokussierenden Linse kann jeder Beitrag zur Fraunhofer Beugung  $U(\alpha, \beta)$  auf einen Punkt in der Fourierebene/Fokusebene abgebildet werden. Mit Hilfe eines sogenannten 4f-Aufbaus (siehe Abbildung 12.9) können somit die einzelnen Fourierkomponenten eines Beugungsbildes manipuliert werden.

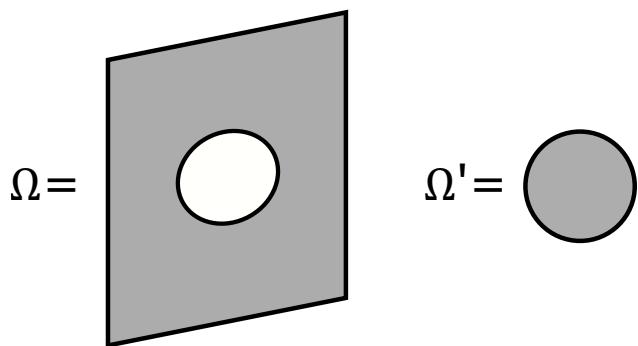
**12.4.2.****Babinet'sches Prinzip**

Wir betrachten zwei komplementäre Blenden  $\Omega$  und  $\Omega'$  mit  $\Omega + \Omega' = 1$ , wie in Abbildung 12.10 dargestellt. Dann folgt aus dem Beugungsintegral der Fraunhofer Beugung:

$$\Rightarrow U_p(\alpha, \beta) + U'_p(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{für } \alpha, \beta \neq 0 \quad (12.19)$$

$$\Rightarrow I_p(\alpha, \beta) = I'_p(\alpha, \beta) \quad \text{für } \alpha, \beta \neq 0. \quad (12.20)$$

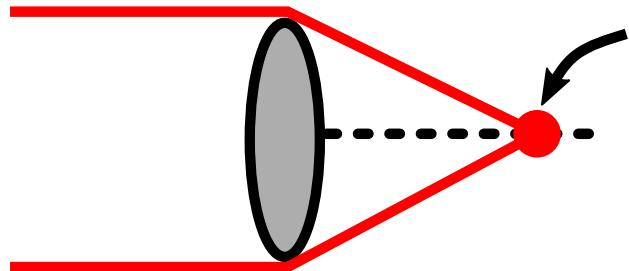
Das heißt die Intensitätsverteilungen  $I_p$  und  $I'_p$  der beiden Blenden sind identisch. **Beispiel:**



**Abb. 12.10.:** Beispiel zum Babinet'schen Prinzip.

**Poissonscher Fleck**

Der Poissonsche Fleck ist besonderes Beispiel für das Babinet'sche Prinzip: Bei der Beugung an einer Kreisscheibe oder Kugel tritt ein heller Fleck aufgrund konstruktiver Interferenz in der Mitte auf (gleiche optische Weglängen).



**Abb. 12.11.:** Poissonscher Fleck.



# 13. BEUGUNG AN BLENDEN UND GITTERN

## 13.1. Einfachspalt

Mit der Formel für Fraunhoferbeugung (Gl. 12.16) erhalten wir:

$$U_p(\alpha, \beta) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\alpha\rho} d\rho}_{2\pi\delta(k\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\eta) e^{-ik\beta\eta} d\eta \quad (13.2)$$

$$= \underbrace{2\pi\delta(k\alpha)}_{\text{keine Beugung in } \alpha\text{-Richtung}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ik\beta\eta} d\eta, \quad (13.3)$$

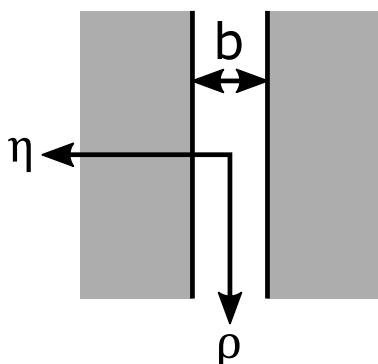


Abb. 13.1.: Zum Einfachspalt.

Wir betrachten die Beugung am Einfachspalt, wie in Abbildung 13.1 dargestellt. Für die Blendenfunktion wählen wir also:

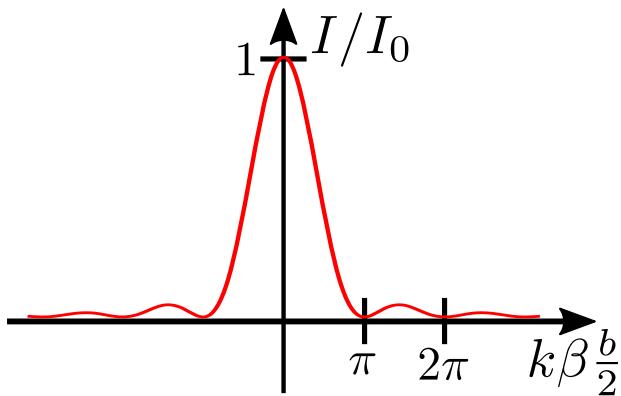
$$\Omega(\rho, \eta) = \Omega(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{b}{2} < \eta < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (13.1)$$

mit  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  und  $\text{sinc}(0) = 1$ . Abbildung 147 zeigt den entsprechenden Intensitätsverlauf.

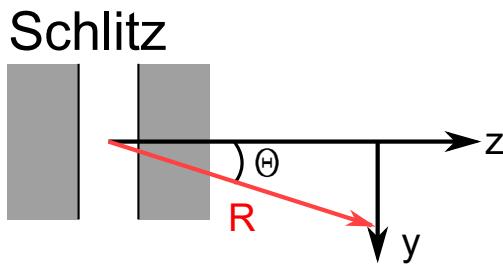
Nach Abbildung 13.3 definieren wir  $\beta = \frac{y}{R} = \sin \theta$  und erhalten dann für die Beugung an einer Schlitzblende

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \text{sinc}^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}\right). \quad (13.6)$$

### 13. Beugung an Blenden und Gittern



**Abb. 13.2.:** Intensitätsverlauf am Einfachspalt.



**Abb. 13.3.:** Winkel am Einfachspalt.

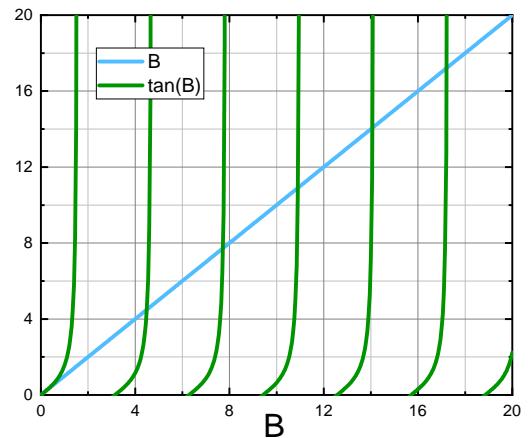
Schreiben wir  $B = \frac{\pi b \beta}{\lambda}$ , dann finden wir die Beugungsmaxima bei

$$\frac{d}{dB} \operatorname{sinc}^2(B) \stackrel{!}{=} 0 \quad (13.9)$$

$$\Rightarrow \frac{2B^2 \cos B \sin B - 2B \sin^2 B}{B^4} = 0 \quad (13.10)$$

$$\vdots \quad (13.11)$$

$$\Rightarrow \tan B = B \quad \text{siehe Abbildung 13.4} \quad (13.12)$$



**Abb. 13.4.:** Veranschaulichung der Bedingung  $\tan B = B$ .

In der Näherung für große Winkel folgt dann

$$\sin \theta_{\max} \approx \pm \frac{3}{2} \frac{\lambda}{b}; \pm \frac{5}{2} \frac{\lambda}{b}; \dots \quad (13.13)$$

sowie

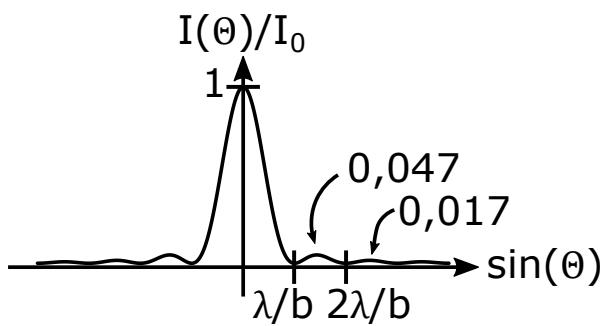
$$\frac{I(\theta_{\max})}{I(0)} = 0,047; 0,017; \dots \quad (13.14)$$

Zusammenfassend:

• **Minima:**  $b \cdot \sin \theta = n\lambda$

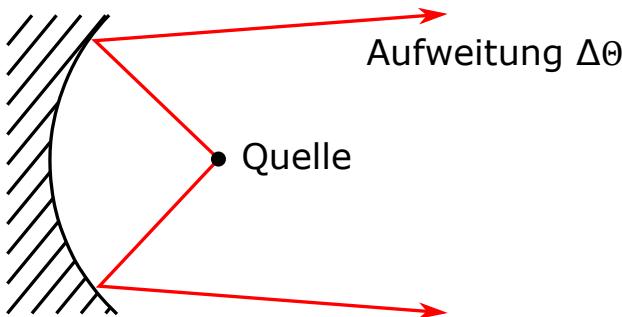
• **Maxima:**  $b \cdot \sin \theta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$

jeweils mit  $n = \pm 1; \pm 2; \dots$



**Abb. 13.5.:** Beugungsminima und -maxima am Einfachspalt.

Zur Bestimmung einer **Haardicke** nutzen wir das  
1. Minimum bei  $b \sin \theta = \lambda \Rightarrow \frac{y}{R} = \sin \theta = \frac{\lambda}{b}$ . Mit  
 $R = 3,5 \text{ m}$ ,  $\lambda = 633 \text{ nm}$  und der Messung  $y = \frac{8,5}{2} \text{ cm}$   
folgt  $b = 67 \mu\text{m}$ .

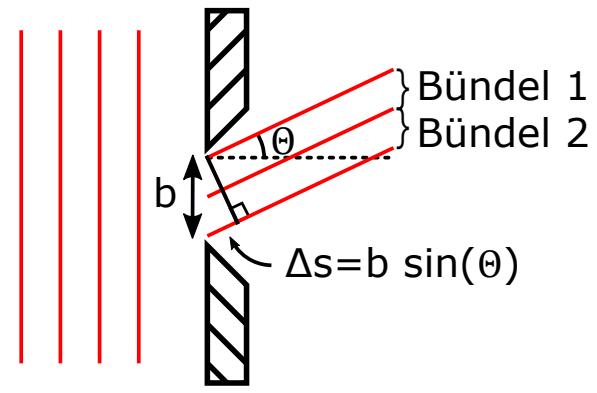


**Abb. 13.6.:** Beispiel zum gerichteten Abstrahler.

**Beispiel:** Die endliche Größe des kollimierenden Spiegels, ist equivalent zu einer Blende, auf die ein bereits kollimierter Strahl trifft. Wir betrachten die Aufweitung eines Strahls bei gerichteter Abstrahlung (z.B. Richtfunk) aus Abbildung 13.6. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $b = 1 \text{ m}$ ,  $\lambda = 3 \text{ cm}$  (10 GHz)  $\Rightarrow \Delta\theta = 3,6^\circ$  (Funk)
- $b = 1 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 500 \text{ nm} \Rightarrow \Delta\theta = 0,0057^\circ$  (Laser)

## 13.2. Geometrische Interpretation von Fraunhoferbeugung



**Abb. 13.7.:** Zwei Einzelbündel interferieren an der Stelle eines Beugungsminimas destruktiv.

Warum befinden sich die Minima bei  $\Delta s = n\lambda$  mit  $n = \pm 1; \pm 2; \dots$ ? Es gibt dann immer einen Phasenunterschied von  $\frac{\lambda}{2}$  zwischen Strahlen aus Bündel 1 und Bündel 2. Es folgt, dass sich die Maxima bei  $\Delta s = (n + \frac{1}{2})\lambda$  befinden. Im Gegensatz zur *Interferenz* im Fernfeld eines Doppelpalts, werden bei der *Beugung* am Einfachspalt mehr als nur zwei Strahlen betrachtet (siehe Strahlenbündel)! Daraus ergibt sich eine andere Lage der Maxima.

## 13.3. Weitere wichtige Blenden

### 13.3.1. Rechteckblende

Bei der Beugung an einer rechteckigen Blende (siehe Abbildung 13.8) sind die Beugungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  unabhängig voneinander. Es folgt damit

$$\frac{I(\alpha, \beta)}{I(0, 0)} = \operatorname{sinc}^2(A) \cdot \operatorname{sinc}^2(B) \quad (13.15)$$

$$\text{mit } A = \frac{\pi a \alpha}{\lambda} = \frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda} \text{ und } B = \frac{\pi b \beta}{\lambda} = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}. \quad (13.16)$$

### 13. Beugung an Blenden und Gittern

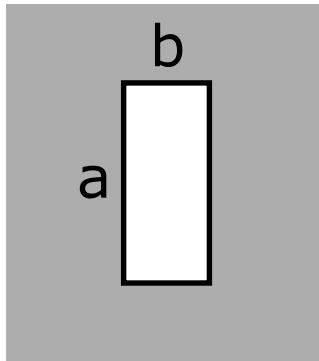


Abb. 13.8.: Rechteckblende.

#### 13.3.2. *Lochblende*

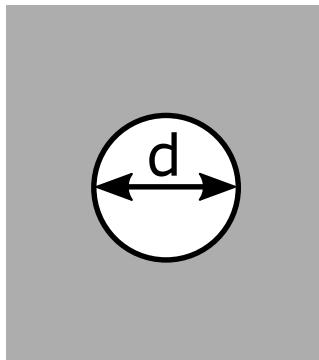


Abb. 13.9.: Lochblende.

Für eine kreisförmige Lochblende (siehe Abbildung 13.9) erhalten wir die Intensitätsverteilung

$$I \sim \left( \frac{J_1\left(\frac{\pi d \beta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi d \beta}{\lambda}} \right)^2. \quad (13.17)$$

mit der Besselfunktion  $J_1$  1. Ordnung anstelle des  $\sin(x)$ . Für eine Besselfunktion  $n$ -ter Ordnung gilt:

$$J_n(x) = \sum_r \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n}}{(n+r)! \cdot r!} \quad (13.18)$$

Für das 1. Beugungsminimum muss gelten  $\left(\frac{J_1(x)}{x}\right)^2 = 0$ . Dies ist erfüllt, falls  $J_1(x) = 0$ . Die numerische Lö-

sung liefert dann

$$x_{\min} = \frac{\pi d \sin \theta_{\min}}{\lambda} = 3,832 \text{ und wir erhalten für das erste Beugungsminimum an einer Kreisblende}$$

$$\sin \theta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{d}. \quad (13.19)$$

#### Beugungsgrenze einer Abbildung:

In der Strahlenoptik hatten wir für den Fokus eine  $\delta$ -Funktion (Punkt) angenommen. Der Fall wird in der Wellenoptik wie in Abbildung 13.10 behandelt. Wir werden in Kapitel 16 mehr zur genauen Form des Strahls erfahren.

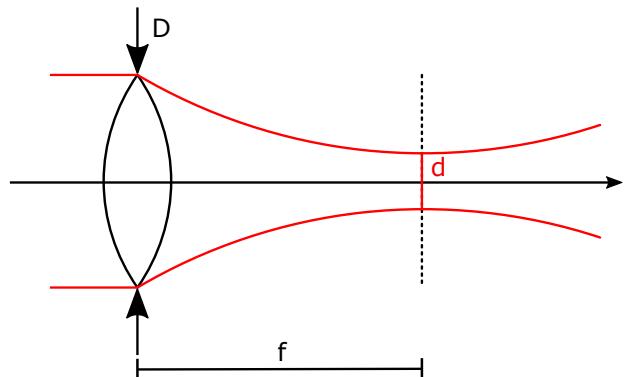


Abb. 13.10.: Zur Beugungsgrenze einer Abbildung.

Die Beugungsgrenze der Abbildung wird dann festgelegt über

$$\frac{d}{2} = 1,22 \cdot \frac{\lambda f}{D n}. \quad (13.20)$$

Eine andere Form dieser Gleichung lautet

$$d = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{NA}. \quad (13.21)$$

Die Abkürzung NA steht hierbei für die numerische Apertur, die wir in Abschnitt 6.4 für optische Faser definiert hatten. Diese Definition haben wir hier auf beliebige optische Systeme angewendet:

$$NA = n \sin \alpha_{\max} \approx n \frac{D}{f}. \quad (13.22)$$

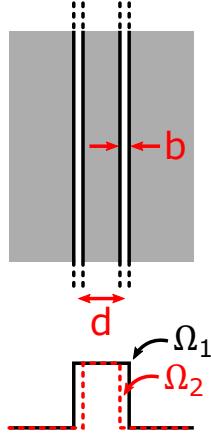
Ein **Fokus** wird also **kleiner**, wenn

- a)  $f$  kleiner wird.
- b)  $D$  größer wird.
- c)  $\lambda$  kleiner wird ( $\frac{\lambda}{n}$ ).

Dazu zwei Beispiele:

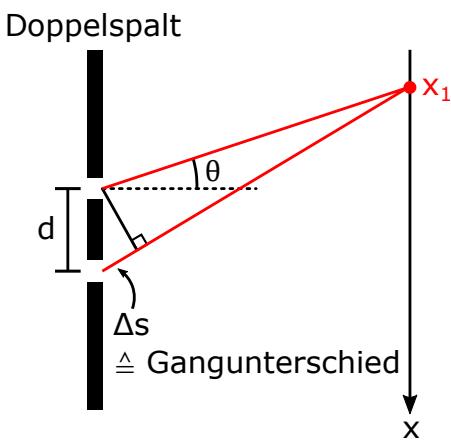
- Zum Auge: Mit  $D = 1 \text{ mm} \dots 9 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 500 \text{ nm}$ ,  $n = 1,3$  und  $f = 20 \text{ mm}$  folgt  $d = 2 \mu\text{m} \dots 16 \mu\text{m}$ . Vergleiche hierzu die Zäpfchengröße von  $9 \mu\text{m}$ .
- Für Hubble mit  $D = 2,4 \text{ m}$  und  $\lambda = 500 \text{ nm}$  erhalten wir  $\sin \theta_{\min} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$ , was  $200 \text{ m}$  auf dem Mond entspricht.

### 13.3.3. Doppelspalt



Beginnen wir mit einer **geometrischen Herleitung**:

**Abb. 13.12.:** Aufbau des Doppelpalts und Wahl der Blendenfunktionen.



**Abb. 13.11.:** Geometrie am Doppelspalt.

Wir finden die Bedingungen für

- ein Maximum:  $x_{\max} : \Delta s = m\lambda$  mit  $m \in \mathbb{Z}$ .
- ein Minimum:  $x_{\min} : \Delta s = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$ .

Für ein Maximum beim Doppelspalt schreiben wir daher

$$d \cdot \sin \theta = m\lambda. \quad (13.23)$$

Wir bestimmen nun den **Intensitätsverlauf unter Berücksichtigung der Spaltbreite**. Dazu nehmen wir an, dass die Spalte unendlich lang sind und wählen die Blendenfunktionen

$$\Omega_1(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{d+b}{2} < \eta < \frac{d+b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad (13.24)$$

$$\Omega_2(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{d-b}{2} < \eta < \frac{d-b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (13.25)$$

sodass wir die resultierende Blendenfunktion  $\Omega_{DS}(\eta) = \Omega_1(\eta) - \Omega_2(\eta)$  erhalten. Dann gilt:

$$U_p = \text{F.T.}\{\Omega_{DS}(\eta)\}_{\eta \rightarrow k\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{DS}(\eta) e^{-ik\beta\eta} d\eta \quad (13.26)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_1(\eta) - \Omega_2(\eta)) e^{-ik\beta\eta} d\eta \quad (13.27)$$

$$= \frac{1}{-ik\beta} \left( e^{-ik\beta\left(\frac{d+b}{2}\right)} - e^{ik\beta\left(\frac{d+b}{2}\right)} - e^{-ik\beta\left(\frac{d-b}{2}\right)} + e^{ik\beta\left(\frac{d-b}{2}\right)} \right) \quad (13.28)$$

$$= \frac{2}{k\beta} \left( \sin\left(k\beta\left(\frac{d+b}{2}\right)\right) - \sin\left(k\beta\left(\frac{d-b}{2}\right)\right) \right). \quad (13.29)$$

### 13. Beugung an Blenden und Gittern

Mit  $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\sin(y)\cos(x)$  folgt schließlich

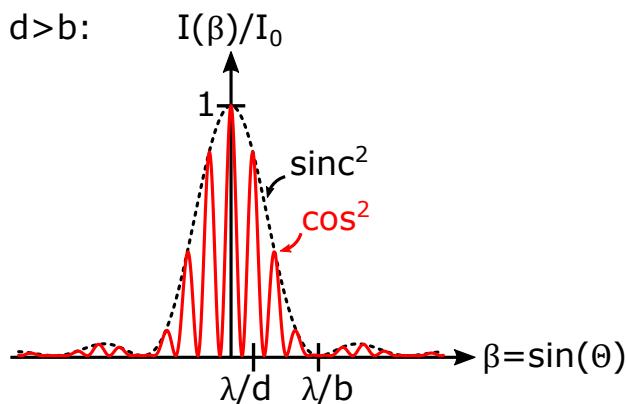
$$U_p(\beta) = 2b \cos\left(k\beta \frac{d}{2}\right) \operatorname{sinc}\left(k\beta \frac{b}{2}\right). \quad (13.30)$$

Mit der Intensität  $I_0 = 4b^2$  und  $\beta = \sin\theta$  schreiben wir die **Beugung am Doppelspalt** als

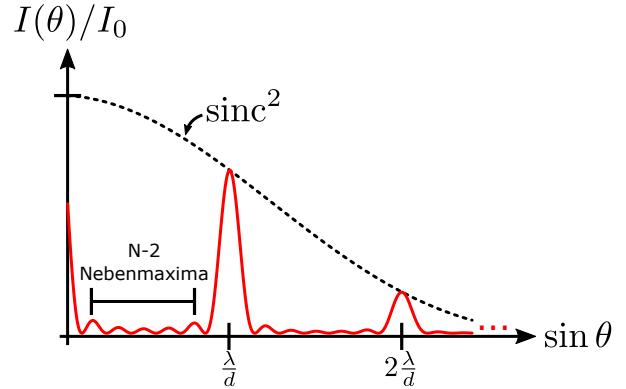
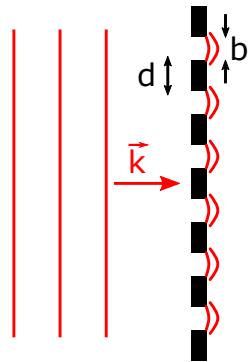
$$\frac{I(\beta)}{I(0)} = \cos^2\left(k\beta \frac{d}{2}\right) \operatorname{sinc}^2\left(k\beta \frac{b}{2}\right). \quad (13.31)$$

Für sehr schmale Spalte  $d \gg b$  folgt

$$I(\theta) \sim \cos^2\left(k\beta \frac{d}{2}\right) = \cos^2\left(k \frac{d}{2} \sin\theta\right). \quad (13.32)$$



**Abb. 13.13.:** Beugungsmuster am Doppelspalt.



**Abb. 13.14.:** Aufbau eines optischen Gitters (oben) und Intensitätsverteilung (unten).

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \frac{\sin^2\left(Nk \frac{d}{2} \sin\theta\right)}{N^2 \cdot \sin^2\left(k \frac{d}{2} \sin\theta\right)} \cdot \underbrace{\operatorname{sinc}^2\left(k \frac{b}{2} \sin\theta\right)}_{\text{gleicher Term wie beim Doppelspalt}}. \quad (13.33)$$

Aufgrund des Babinetischen Prinzips erhalten wir identische Ergebnisse bei Beugung an einem Gitter mit  $N$  Spalten oder mit  $N$  Stegen.

Es treten Hauptmaxima auf, wenn der Nenner in [Gleichung 13.33](#) null wird, also für  $k \frac{d}{2} \sin\theta_{\max} = n \cdot \pi$  mit  $n = \pm 1; \pm 2; \dots$ . Es folgt die **Gittergleichung**

$$\frac{2\pi d}{\lambda} \frac{1}{2} \sin\theta_{\max} = n\pi \quad (13.34)$$

## 13.4. Gitter

Wir bezeichnen  $d$  als Gitterkonstante (Abstand der Spalte),  $b$  als Spaltbreite und  $N$  als die Anzahl der beitragenden Spalte. Dann gilt für die Intensitätsverteilung

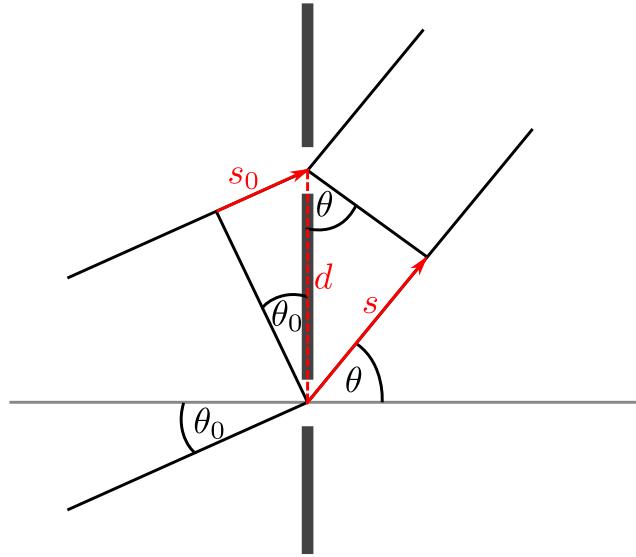
$$d \cdot \sin \theta_{\max} = n \cdot \lambda \quad (13.35)$$

mit der Beugungsordnung  $n$ . Häufig wird das Subskript  $\max$  in [Gleichung 13.35](#) weggelassen.

Für schrägen Einfall unter dem Winkel  $\theta_0$  gilt:

$$d(\sin \theta_{\max} - \sin \theta_0) = n \cdot \lambda \quad (13.36)$$

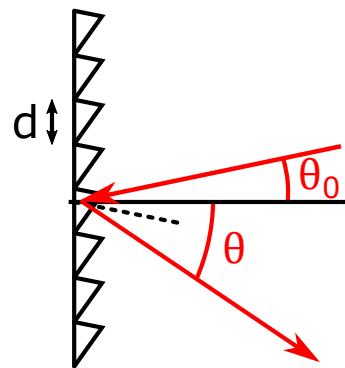
Wie [Abbildung 13.15](#) zeigt, ist der Weglängenunterschied zweier Strahlen, die auf zwei benachbarte Lücken im Gitter treffen, durch  $s - s_0 = d(\sin \theta - \sin \theta_0)$  gegeben. Wenn dieser Weglängenunterschied einem Vielfachen der Wellenlänge entspricht, entsteht ein Beugungsmaximum.



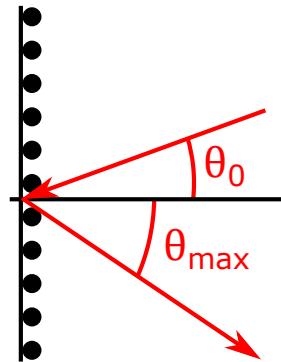
**Abb. 13.15.:** Schräger Einfall am Gitter.

### „Geblazte“ Gitter

Mit „geblazten“ Gittern (siehe [Abbildung 13.16](#)) lässt sich die Effizienz erheblich erhöhen (bis zu 90 %). Sie sind für eine bestimmte Wellenlänge und Beugungsordnung optimiert. Der Anstellwinkel der Furchen, der sogenannte Blaze-Winkel, wird so angepasst, dass der Einfallswinkel für die Beugungsordnung dem Ausfallswinkel entspricht.



**Abb. 13.16.:** „Geblaztes“ Gitter.



**Abb. 13.17.:** Winkeldefinition beim Reflexionsgitter.

#### 13.4.1. Reflexionsgitter

Reflexionsgitter lassen sich leichter herstellen und haben teilweise eine höhere Effizienz. Der Einfallswinkel ist hier ungleich dem Ausfallwinkel:  $\theta_0 \neq \theta$ . Eine Ausnahme ist  $n = 0$ . Es gilt die gleiche Formel wie für das Transmissionsgitter. Die Winkeldefinition für Reflexionsgitter ist in [Abbildung 13.17](#) gezeigt.

#### 13.4.2.

### Auflösungsvermögen eines Gitterspektrometers

Wegen der Wellenlängenabhängigkeit der Beugung an optischen Gittern, werden solche Gitter häufig zur Bestimmung des Spektrums einer Lichtquelle

### 13. Beugung an Blenden und Gittern

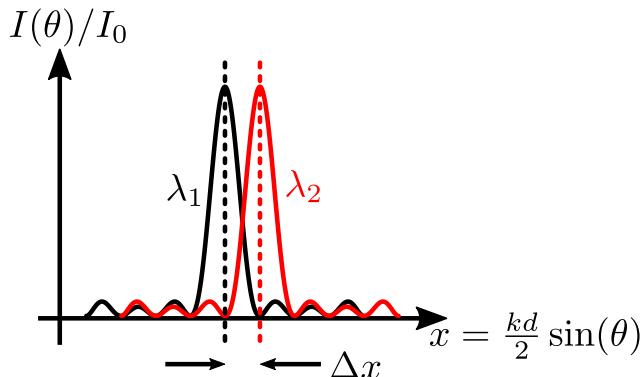
verwendet. Für das Auflösungsvermögen eines Gitters bezüglich der Wellenlänge betrachten wir das

**Rayleigh-Kriterium:** Zwei Linien  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sind unterscheidbar, falls das 1. Minimum der einen auf das Maximum der Anderen fällt.

Es folgt für das **Auflösungsvermögen eines Gitterspektrometers**:

$$\frac{\Delta x}{\Delta \lambda} \approx \left| \frac{dx}{d\lambda} \right| = \frac{\pi}{\lambda^2} d \sin \theta = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\pi/N}{n\pi} \quad (13.37)$$

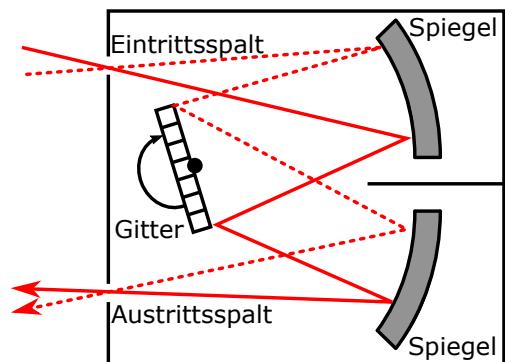
$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = n \cdot N \quad (13.38)$$



**Abb. 13.18.:** Zum Rayleigh-Kriterium: Die Maxima liegen bei  $x = n\pi$  mit  $\Delta x = \frac{\pi}{N}$ .

Das Auflösungsvermögen ist also gegeben durch die Ordnung multipliziert mit der Anzahl interferierender Pfade. Dies ist allgemein gültig für interferierende Spektrometer.

**Beispiel:** Wir setzen  $d = 1 \mu\text{m}$  (1000 Linien/mm) und  $N = 10^5$  (10 cm). Dann erhalten wir  $\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = 10^5 = \left| \frac{v}{\Delta v} \right|$ . Mit  $v = 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  folgt dann  $\Delta v = 5 \text{ GHz}$ .



**Abb. 13.19.:** Zum Czerny-Turner.

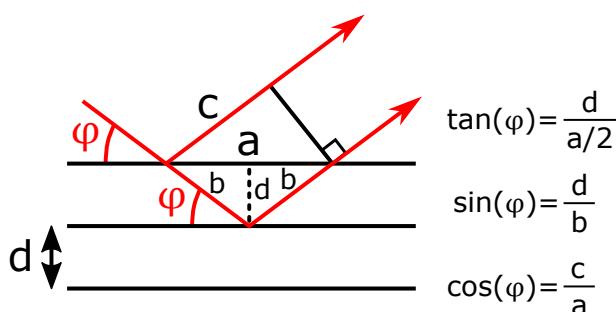
### 13.5. Monochromator (Czerny-Turner)

Wir betrachten hierzu Abbildung 13.19. Die Ein- und Austrittsspalte bestimmen zusätzlich zu  $n \cdot N$  die Auflösung.

# 14. INTERFERENZ AN SCHICHTSYSTEMEN

## 14.1. Bragg-Streuung

Bevor wir uns mit Schichtsystemen für sichtbares Licht beschäftigen, wollen wir kurz die Bragg-Streuung behandeln. Von Bragg-Streuung spricht man typischerweise, wenn Röntgenlicht von den Ebenen eines Kristallgitters gestreut wird. Unter bestimmten Einfallswinkeln kommt es zu konstruktiver Interferenz der von den verschiedenen Ebenen gestreuten Wellen. Bei Bragg-Streuung ist es üblich, den Einfallswinkel der Strahlen von der Tangente zur Oberfläche aus zu messen (Im Gegensatz zu unserer bisherigen Konvention). Des Weiteren ist der Brechungsindex für Röntgenstrahlen in den meisten Medien ungefähr eins, weshalb die Brechung beim Eintritt in das Medium vernachlässigt werden kann.



**Abb. 14.1.:** Bragg-Streuung an einem Schichtsystem (Ebenen eines Kristallgitters).

Unter Zuhilfenahme von Abbildung 14.1 bestimmen daher den Weglängenunterschied:

$$L = 2b - c = \frac{2d}{\sin \varphi} - a \cos \varphi \quad (14.1)$$

$$= \frac{2d}{\sin \varphi} \underbrace{\left(1 - \cos^2 \varphi\right)}_{\sin^2 \varphi} = 2d \sin \varphi \quad (14.2)$$

$$! = n\lambda \text{ für Maxima } (n = 0; \pm 1; \dots) \quad (14.3)$$

Damit folgt die **Bragg-Bedingung für die Streuung an Schichtsystemen**:

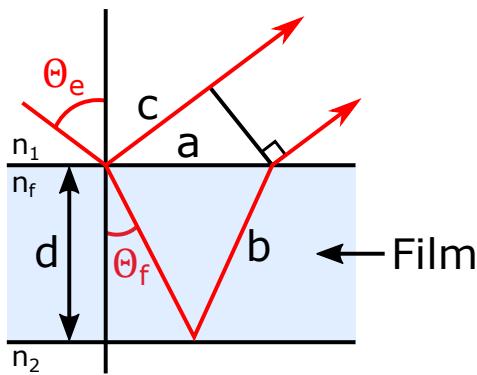
$$2d \sin \varphi = n\lambda \quad (14.4)$$

Einkristalle (z.B. NaCl) können durch Bragg-Streuung als Monochromator für Röntgenlicht dienen. Siehe Praktikum P3b.

## 14.2. Schichtsysteme für den sichtbaren Wellenlängenbereich

Wir betrachten die Interferenz an einem Schichtsystem mit den Brechungsindizes  $n_1$ ,  $n_f$  und  $n_2$  und verwenden

## 14. Interferenz an Schichtsystemen



**Abb. 14.2.:** Interferenz an einem Schichtsystem.

die Notation aus [Abbildung 14.2](#). Es gilt:

$$a = 2d \tan \theta_f \quad (14.5)$$

$$b = \frac{d}{\cos \theta_f}, \quad (14.6)$$

$$c = a \sin \theta_e = a \frac{n_f}{n_1} \sin \theta_f \text{ mit Snell.} \quad (14.7)$$

Wir berechnen den Weglängenunterschied:

$$L = 2n_f b - n_1 c \quad (14.8)$$

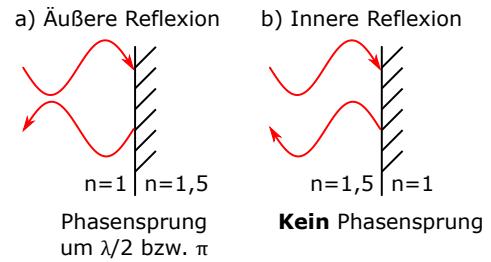
$$= 2n_f \frac{d}{\cos \theta_f} - n_1 a \frac{n_f}{n_1} \sin \theta_f \quad (14.9)$$

$$= 2n_f \frac{d}{\cos \theta_f} - 2n_f d \frac{\sin \theta_f}{\cos \theta_f} \sin \theta_f \quad (14.10)$$

$$= 2n_f \frac{d}{\cos \theta_f} \underbrace{\left(1 - \sin^2 \theta_f\right)}_{\cos^2 \theta_f} \quad (14.11)$$

$$= 2n_f d \cos \theta_f \quad (14.12)$$

**Achtung:** Es gibt eine zusätzliche Phasenverschiebung zwischen innerer und äußerer Reflexion. Bei der Reflexion an einem optisch dichteren Medium (äußere Reflexion), ergibt sich ein Phasensprung von  $\pi$ , was einer halben Wellenlänge ( $\lambda/2$ ) entspricht (siehe [Abbildung 14.3](#)). Dies folgt aus den Fresnelschen Gleichungen.



**Abb. 14.3.:** Bei äußerer Reflexion tritt ein Phasensprung von  $\pi$  auf (links), bei innerer Reflexion dagegen nicht (rechts).

Für konstruktive Interferenz muss die daher folgende Bedingung erfüllt sein:

$$2n_f d \cos \theta_f = (m + q) \lambda, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (14.13)$$

Abhängig von den Werten der Brechungsindizes gilt für  $q$ :

- $q = -\frac{1}{2}$  für  $n_1 < n_f > n_2$  (äußere-innere Reflexion).
- $q = +\frac{1}{2}$  für  $n_1 > n_f < n_2$  (innere-äußere Reflexion).
- $q = 0$  für  $n_1 < n_f < n_2$  oder  $n_1 > n_f > n_2$  (nur äußere bzw. innere Reflexion).

### 14.3. Interferenzen gleicher Dicke

Interferenzen gleicher Dicke treten z.B. bei Seifenblasen, Ölfilmen etc. auf. Hier ist die optische Dicke  $n_f \cdot d$  entscheidend. Die Farbstreifen sind dann ähnlich den Höhenlinien auf einer Karte. Sie zeigen die jeweilige Dicke des Films an.

Um diesen Effekt zu beschreiben, betrachten wir ein System wie in [Abbildung 14.4](#) dargestellt. Für kleine Winkel gilt  $\alpha = \frac{d}{x} \Rightarrow d = x \cdot \alpha$ , des Weiteren gehen wir von senkrechtem Lichteinfall aus  $\cos(\theta_f) \approx 1$ . Die Bedingung für Interferenzmaxima am Keil mit  $n < n_f$  lautet dann:

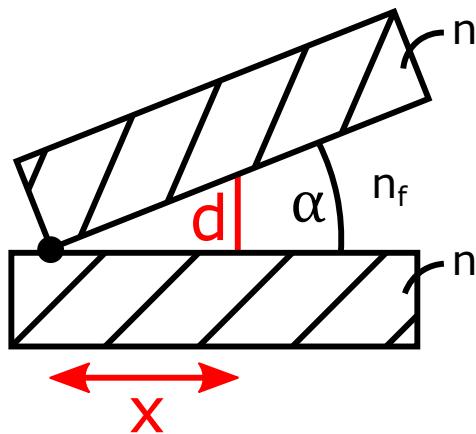


Abb. 14.4.: Interferenzen gleicher Dicke.

$$m - \frac{1}{2} \lambda_0 = 2n_f d_m \quad (14.14)$$

$$= 2\alpha x_m n_f; \quad n_f = \frac{\lambda_0}{\lambda_f} \quad (14.15)$$

$$\Rightarrow x_m = \left( \frac{m - \frac{1}{2}}{2\alpha} \right) \lambda_f \quad (14.16)$$

Wir erhalten also Maxima bei  $\frac{\lambda_f}{4\alpha}, \frac{3\lambda_f}{4\alpha}, \dots$  mit Abstand  $\Delta x = \frac{\lambda_f}{2\alpha}$ . Der Unterschied in den Schichtdicken liegt bei  $\frac{\lambda_f}{2}$ . Die optische Weglänge ist doppelt so groß: hier liegt eine Strecke von  $\lambda_f$  zwischen zwei Maxima. Die **Schichtdicke** bei Maxima ist gegeben durch:

$$d_m = \left( m - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda_f}{2} = (2m - 1) \frac{\lambda_f}{4}, \quad (14.17)$$

also ungerade Vielfache von  $\frac{\lambda_f}{4}$ .

am Schichtsystem Linse-Luftspalt-Glasplatte. Die Newtonschen Ringe können beispielweise eingesetzt werden um Linsenformen zu charakterisieren und zu überprüfen.

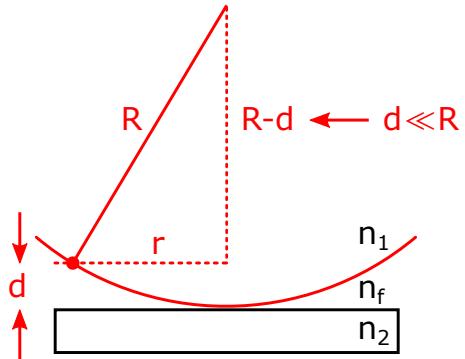


Abb. 14.5.: Schema zur Entstehung der Newtonschen Ringe.

Wir wollen nun die Interferenzbedingung für den Entstehung von Newtonschen Ringen herleiten. Dabei gehen wir wieder von senkrechtem Lichteinfall aus vernachlässigen wir wie zuvor die Brechung an den Grenzflächen, da die Ablenkung sehr klein sind. Aus Abbildung 14.5 erhalten wir:

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - (R - d)^2 \\ &= 2Rd - d^2 \approx 2Rd \Rightarrow d = \frac{r^2}{2R} \end{aligned} \quad (14.18)$$

Für konstruktive Interferenz muss gelten:

$$\begin{aligned} 2n_f d &= 2n_f \frac{r^2}{2R} \stackrel{!}{=} \left( m + \frac{1}{2} \right) \lambda \\ \Rightarrow r &= \sqrt{\left( m + \frac{1}{2} \right) R \lambda}; \quad n_f = 1 \end{aligned} \quad (14.19)$$

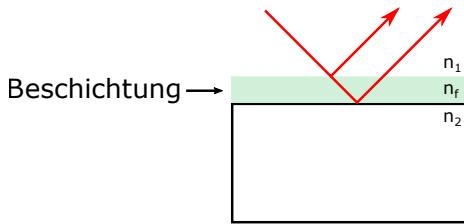
## 14.4. Newtonsche Ringe

Sogenannte Newtonsche Ringe werden sichtbar, wenn man eine konvexe Linse mit großem Krümmungsradius (langer Brennweite) auf eine Glasplatte legt und beleuchtet. Sie entstehen durch Interferenz

## 14.5. Antireflexbeschichtung

Zur Funktionsweise einer Antireflexbeschichtung (AR), auch Vergütung genannt, betrachten wir Abbildung 14.6.

## 14. Interferenz an Schichtsystemen



**Abb. 14.6.:** Zur Antireflexbeschichtung.

Meist wählt man  $n_1 = 1$  und  $n_1 < n_f < n_2$ . Damit tritt sowohl an der ersten als auch an der zweiten Grenzfläche ein Phasensprung von  $\pi$  für die reflektierten Strahlen auf. Ziel ist es nun, in Summe Reflexionen durch destruktive Interferenz zwischen den reflektierten Strahlen der verschiedenen Schichten zu vermeiden. Für destruktive Interferenz müssen die beiden reflektierten Strahlen um eine halbe Wellenlänge gegeneinander phasenverschoben sein. Die Schichtdicke  $d$  muss also einem Viertel der Wellenlänge im Material  $\lambda/n_f$  entsprechen:  $d \stackrel{!}{=} \frac{\lambda}{4n_f}$ . Völlige Auslöschung wird aber nur bei gleichzeitig gleicher Amplitude der beiden reflektierten Strahlen erreicht (siehe Fresnelsche Formeln):

$$\frac{n_1 - n_f}{n_1 + n_f} \stackrel{!}{=} \frac{n_f - n_2}{n_f + n_2} \quad (14.20)$$

$$\Rightarrow (n_1 - n_f)(n_f - n_2) = (n_f - n_2)(n_1 + n_f) \quad (14.21)$$

$$\Rightarrow -n_f^2 + n_1 n_f - n_2 n_f + n_1 n_2 \quad (14.22)$$

$$= n_f^2 - n_2 n_1 + n_1 n_f - n_2 n_f \quad (14.23)$$

$$\Rightarrow 2n_1 n_2 = 2n_f^2 \quad (14.24)$$

$$\Rightarrow n_f = \sqrt{n_1 n_2} \quad (14.25)$$

Für eine Antireflexschichtung müssen also diese Bedingungen erfüllt sein:

$$d = \frac{\lambda}{4n_f}, \quad n_f = \sqrt{n_1 n_2} \quad (14.26)$$

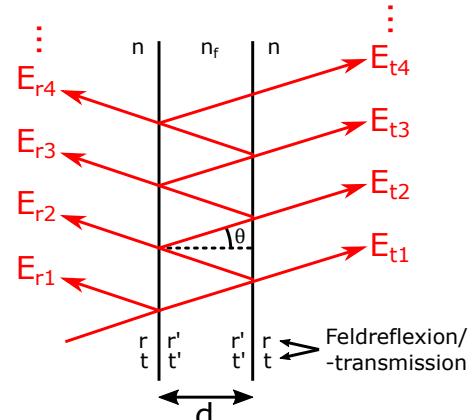
Antireflexbeschichtungen werden durch Aufdampfen

von Material ( $MgF_2$ ,  $TiO_2, \dots$ ) hergestellt. Jedoch ist selten ein passendes  $n_f$  verfügbar.

## 14.6.

## Fabry-Pérot-Interferometer

Ein Fabry-Pérot-Interferometer besteht im einfachsten Fall aus zwei planparallelen Grenzflächen (einem sog. Etalon) oder Spiegeln (siehe Abbildung 14.7). Sendet man Licht in einen solchen Aufbau, so kommt es zur Interferenz von Strahlen, die unterschiedlich oft zwischen den Grenzflächen reflektiert wurden. Fabry-Pérot-Interferometer bilden eine wichtige Grundlage für die Lasertechnik wie wir in Kapitel 21 sehen werden. Selbst der Physik-Nobelpreis für den sog. Frequenzkamm von Prof. Hänsch aus dem Jahr 2005 basiert auf den Eigenschaften des Fabry-Pérot-Interferometers.



**Abb. 14.7.:** Zum Fabry-Pérot-Interferometer bzw. Etalon.

Im Folgenden werden wir diese Eigenschaften herleiten. Wir bestimmen zunächst die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten aus den Fresnelschen For-

meln:

$$t = \frac{2n}{n + n_f} \quad (14.27)$$

$$t' = \frac{2n_f}{n + n_f} \quad (14.28)$$

$$r = -r' = \frac{n - n_f}{n + n_f} \quad (14.29)$$

Für das reflektierte Feld berechnen wir:

$$E_r = E_{1r} + E_{2r} + E_{3r} + E_{4r} + \dots \quad (14.30)$$

$$= E_0 \cdot r + E_0 t r' t' e^{i\delta} + E_0 t r' r' r' t' e^{2i\delta} + \dots \quad (14.31)$$

$$= E_0 (-r' + r' t' t e^{i\delta} + r'^3 t' t e^{2i\delta} + r'^5 t' t e^{3i\delta} + \dots) \quad (14.32)$$

$$= E_0 (-r' + r' t' t e^{i\delta} [1 + \underbrace{r'^2 e^{i\delta}}_{\equiv q} + (r'^2 e^{i\delta})^2 + (r'^2 e^{i\delta})^3 + \dots]) \quad (14.33)$$

$$= E_0 \left( r' + \frac{r' t' t e^{i\delta}}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right). \quad (14.34)$$

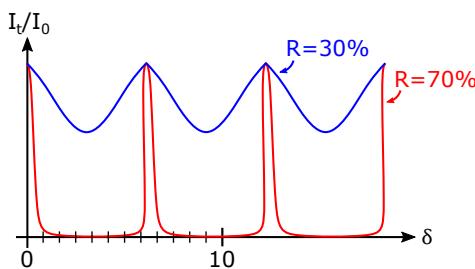
Hierbei haben wir in [Gleichung 14.31](#) die Umlaufphase definiert als:

$$\delta \equiv \frac{4\pi n_f d}{\lambda} \cos \theta \quad (14.35)$$

und im Schritt von [Gleichung 14.33](#) nach [Gleichung 14.34](#) die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} \quad (14.36)$$

angewandt.



**Abb. 14.8.:** Transmission eines Fabry-Pérot-Interferometers.

Wir erhalten weiter:

$$\begin{aligned} \frac{E_r}{E_0} &= \frac{r'(-1 + r'^2 e^{i\delta} + t' t e^{i\delta})}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \\ \Rightarrow \frac{E_r}{E_0} &= \frac{r(1 - e^{i\delta})}{1 - r^2 e^{i\delta}} \\ \text{mit } r'^2 + t' t &= \frac{(n_f - n)^2 + 4nn_f}{(n + n_f)^2} = 1 \text{ und } r = -r' \end{aligned} \quad (14.37)$$

Für die reflektierte Intensität gilt daher:

$$\frac{I_r}{I_0} = \frac{|E_r|^2}{|E_0|^2} = \frac{F \cdot \sin^2(\delta/2)}{1 - F \cdot \sin^2(\delta/2)}, \quad (14.38)$$

mit

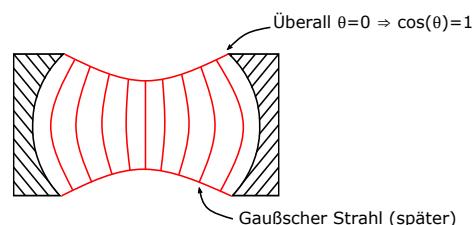
$$F \equiv \left( \frac{2r}{1 - r^2} \right)^2 = \frac{4R}{(1 - R)^2}; \quad R = r^2 = r'^2. \quad (14.39)$$

Es folgt für die Transmission:

$$\frac{I_t}{I_0} = 1 - \frac{I_r}{I_0} = \frac{1}{1 + F \cdot \sin^2(\delta/2)} \quad (\text{Airy-Funktion}). \quad (14.40)$$

Die Transmission  $\frac{I_t}{I_0}$  eines Fabry-Pérot-Interferometers ist in [Abbildung 14.8](#) skizziert.

Meist liegen gekrümmte Spiegel wie in [Abbildung 14.9](#) vor:



**Abb. 14.9.:** Fabry-Pérot-Interferometer mit gekrümmten Spiegeln.

## 14. Interferenz an Schichtsystemen

Wir erhalten Resonanz (d.h. maximale Transmission) im Fall von senkrechtem Einfall für die Bedingung:

$$\delta = \frac{4\pi n_f d}{\lambda} = 2\pi m \Rightarrow m \frac{\lambda}{2n_f} = d. \quad (14.41)$$

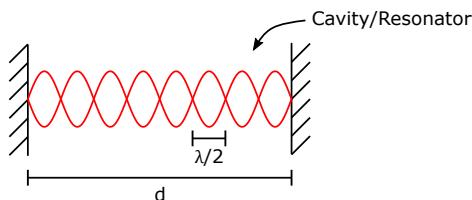
Dies liefert eine stehende Welle wie in Abbildung 14.10: hierbei entspricht  $d$  einem ganzzahligen Vielfachen von  $\frac{\lambda}{2n_f}$ .

Es liegt 100 % Transmission unabhängig von  $R$  vor:  
 $\frac{I_t}{I_0} = 1$ .

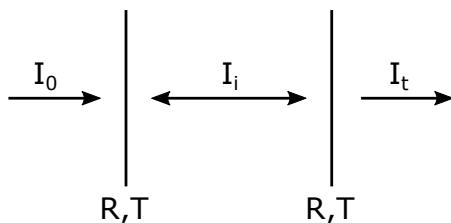
Wir betrachten nun Abbildung 14.11 und bezeichnen die interne Leistung im Resonator mit  $I_i$ . Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} I_t &= I_0 = T \cdot I_i \\ \Rightarrow I_i &= \frac{I_0}{T} = \frac{I_0}{1-R} \\ \Rightarrow I_i &\rightarrow \infty \text{ für } R \rightarrow 1 \end{aligned} \quad (14.42)$$

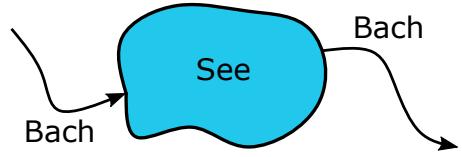
Beachte: hierbei handelt es sich nicht um eine Verletzung der Energieerhaltung. Eine Analogie ist in Abbildung 14.12 dargestellt.



**Abb. 14.10.:** Stehende Welle in einem Resonator ( $n_f = 1$ ).



**Abb. 14.11.:** Zur Leistung im Resonator.



**Abb. 14.12.:** Analogie zur internen Leistung im Resonator.

### 14.6.1. Linienbreite eines Fabry-Pérot-Interferometers

Wir nehmen im Folgenden  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = 1$  an. Zur Berechnung der vollen Halbwertsbreite (*full width at half maximum, FWHM*) der Transmissionslinien eines Fabry-Pérot-Interferometers fordern wir:

$$\frac{I_t}{I_0} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + F \cdot \sin^2(\delta/2)} \quad (14.43)$$

$$\approx \frac{1}{1 + F \delta^2 / 4} \text{ für } \delta \text{ klein} \quad (14.44)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2}{\sqrt{F}} \Rightarrow \Delta \delta = \frac{4}{\sqrt{F}} = 2 \cdot \frac{1-R}{\sqrt{R}} \stackrel{R \approx 1}{\approx} 2(1-R) \quad (14.45)$$

Es folgt für die Linienbreite im Frequenzraum  $\Delta\omega$ :

$$\Delta\omega = (1-R) \frac{c}{n_f d} \quad (\text{FWHM}) \quad (14.46)$$

Hier wurde verwendet, dass:

$$\Delta\delta = \Delta \left( \frac{4\pi n_f d}{\lambda} \right) = \frac{2n_f d}{c} \cdot \Delta\omega. \quad (14.47)$$

Die entsprechende Identität für die Resonanzbreite ausgedrückt durch Wellenlänge lautet daher:

$$\begin{aligned} \Delta\delta &= \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} \Delta\lambda = -\frac{4\pi n_f d}{\lambda^2} \Delta\lambda = \frac{4}{\sqrt{F}} \\ \rightarrow \Delta\lambda_{\text{FWHM}} &\equiv \Delta\lambda = -\frac{\lambda^2}{\pi n_f d \sqrt{F}} \end{aligned}$$

Das Symbol  $\Delta\lambda_{\text{FWHM}}$  wurde für die untenstehende Definition der Finesse eingeführt.

### 14.6.2. Freier Spektralbereich (FSR)

Der freie Spektralbereich (FSR, von engl. free spectral range) ist definiert als die Differenz zweier benachbarter Resonanzfrequenzen des Fabry-Pérot-Interferometers. Wir haben

$$m \frac{\lambda_m}{2n_f} = d \Rightarrow v_m = \frac{c}{\lambda_m} = m \frac{c}{2n_f d}. \quad (14.48)$$

Damit folgt schließlich:

$$\Delta v_{\text{FSR}} = v_m - v_{m-1} = \frac{c}{2n_f d}. \quad (14.49)$$

Die Frequenzdifferenz benachbarter Resonanzen ist äquivalent zur inversen Umlaufzeit. Drückt man  $\Delta v_{\text{FSR}}$  durch den Wellenlängenabstand  $\Delta\lambda_{\text{FSR}}$  aus, so ergibt sich:

$$\Delta v_{\text{FSR}} = -\frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda_{\text{FSR}}. \quad (14.50)$$

Hier wurde verwendet, dass  $v = c/\lambda$  und  $\Delta v = \partial_\lambda v \Delta\lambda$ . Durch Auflösen nach  $\Delta\lambda_{\text{FSR}}$  erhält man schließlich:

$$\Delta\lambda_{\text{FSR}} = \frac{-\lambda^2}{2n_f d}. \quad (14.51)$$

### 14.6.3. Finesse

Die Finesse  $\tilde{F}$  ist definiert als das Verhältnis aus Freiem Spektralbereich  $\Delta\lambda_{\text{FSR}}$  und Linienbreite  $\Delta\lambda_{\text{FWHM}}$  und hängt damit eng mit dem Auflösungsvermögen eines Resonators zusammen. Es gilt:

$$\tilde{F} \equiv \frac{\Delta\lambda_{\text{FSR}}}{\Delta\lambda_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \approx \frac{\pi}{1-R} \quad (R \approx 1). \quad (14.52)$$

Wir können also die Leistungsüberhöhung schreiben als:

$$\frac{I_i}{I_0} = \frac{1}{1-R} \approx \frac{\tilde{F}}{\pi}. \quad (14.53)$$

Für das Auflösungsvermögen erhalten wir:

$$\left| \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\text{FWHM}}} \right| = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} \frac{2n_f d}{\lambda} = \tilde{F} \cdot \frac{2dn_f}{\lambda}. \quad (14.54)$$

**Beispiel:** Wir wählen  $n_f = 1$  und  $R = 99,9961\%$ , woraus  $\tilde{F} = 10^5$  folgt,  $d = 10\text{ cm}$  und  $\lambda = 500\text{ nm}$ . Damit erhalten wir dann  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 4 \cdot 10^{10}$  und  $I_i = I_0 \cdot 32.000!$  Dies ist der Grund, weshalb man hier von einem **Überhöhungsresonator** spricht.

## 14.7. Fourier-Transform-Spektrometer

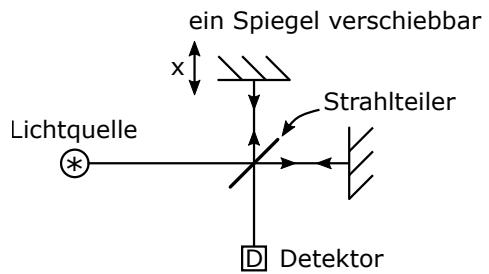


Abb. 14.13.: Zum Fourier-Transform-Spektrometer.

Wir definieren die Laufzeitdifferenz  $\tau = \frac{2x}{c}$  und berechnen die Leistung am Detektor:

$$W(\tau) \sim \int_{-\infty}^{\infty} |E(t) + E(t-\tau)|^2 dt \quad \left( \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dots dt \right) \quad (14.55)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega') e^{i\omega'(t-\tau)} d\omega' \right|^2 dt \quad (14.56)$$

$$= W_0 + \iiint_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) \tilde{E}^*(\omega') e^{i(\omega-\omega')t+i\omega' \tau} d\omega d\omega' dt + \text{c.c.} \quad (14.57)$$

Hierbei haben wir  $W_0 = \text{const}$  als mittlere Leistung definiert. Mit der Identität:

$$\int e^{i(\omega-\omega')t} dt = 2\pi\delta(\omega-\omega') \quad (14.58)$$

## 14. Interferenz an Schichtsystemen

folgt schließlich:

$$W(\tau) = W_0 + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{E}(\omega) \tilde{E}^*(\omega) \cdot [e^{-i\omega\tau} + \underbrace{e^{i\omega\tau}}_{\substack{\text{aus} \\ \text{c.c.-Teil}}}] d\omega \quad (14.59)$$

$$= W_0 + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\tilde{E}(\omega) \tilde{E}^*(\omega)}_{\sim I(\omega)} \cdot [2 \cos(\omega\tau)] d\omega \quad (14.60)$$

$$= W_0 + 8\pi^2 \operatorname{Re} (\operatorname{F.T.}\{I(\omega)\}_{\omega \rightarrow \tau}). \quad (14.61)$$

$W(\tau)$  wird gemessen, dann subtrahiert man den Mittelwert  $W_0$ . Wir erhalten eine inverse Fouriertransformation  $\tau \rightarrow \omega$ , wobei  $I(\omega)$  das Spektrum der Quelle bezeichnet.

Wir bestimmen noch das Auflösungsvermögen:

$$\Delta\nu = \frac{1}{\Delta\tau} = \frac{c}{2\Delta x} \Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\nu}{\Delta\nu} = \frac{2\nu\Delta x}{c} = 2 \cdot \frac{\Delta x}{\lambda} \quad (14.62)$$

# 15. HOLOGRAPHIE

Als Erfinder der Holographie gilt **Dennis Gabor**. Er entwickelte das Verfahren 1947 und erhielt den Nobelpreis im Jahr 1971. Der Begriff leitet sich aus dem griechischen *holos* für „ganz“ ab.

In der **normalen Fotografie** bilden wir punktweise die Intensität und die Farbe ( $\sim |E|^2$ ) ab. Informationen über die Phase gehen dabei verloren. Im Moment des Fotos werden der Blickwinkel, der Fokus, die Schärfentiefe etc. festgelegt.

Ziel der **Holographie** ist es, das Lichtfeld komplett zu rekonstruieren.

## 15.1. Prinzip der Holographie

Ein Hologramm bezeichnet die Intensitätsverteilung auf einem Film, die entsteht, wenn eine sogenannte Objektwelle und eine Referenzwelle miteinander interferieren. Wir beginnen mit einem dem Hologramm einer ebenen Welle. Wie in Abbildung 15.1 zu sehen, wählen wir für die Objektwelle und die Referenzwelle je eine ebene Welle.

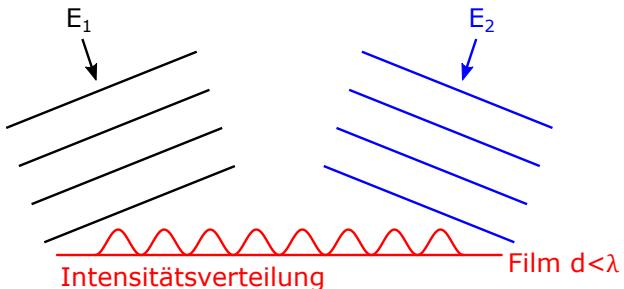
Mithilfe von Abbildung 15.2 bestimmen die Phasendifferenz für die Interferenzmaxima auf dem Film.

Die relative Phase hängt nur von der Position entlang des Films  $x$  ab. Ändert sich  $x$  um  $\overline{AB}$ , so ändert sich  $\varphi$  um  $2\pi$ :

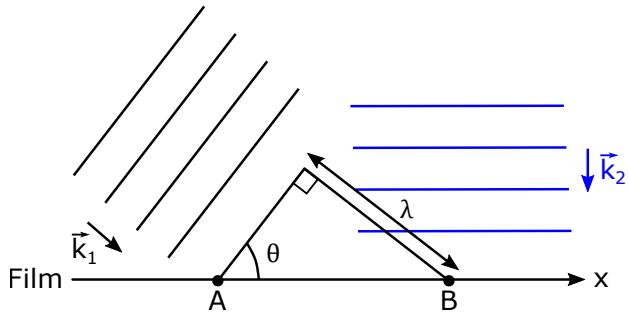
$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{x}{\overline{AB}} \quad (15.1)$$

Wegen  $\sin \theta = \frac{\lambda}{\overline{AB}}$  folgt dann

$$\varphi(x) = \frac{2\pi x \sin \theta}{\lambda} \quad (15.2)$$



**Abb. 15.1.:** Im einfachsten Aufbau interferieren zwei ebene Wellen und liefern die dargestellte Intensitätsverteilung. Die Körnung des Films  $d$  muss kleiner als die Wellenlänge sein, damit das Interferenzmuster aufgenommen werden kann.



**Abb. 15.2.:** Zur Phasendifferenz für die Maxima.

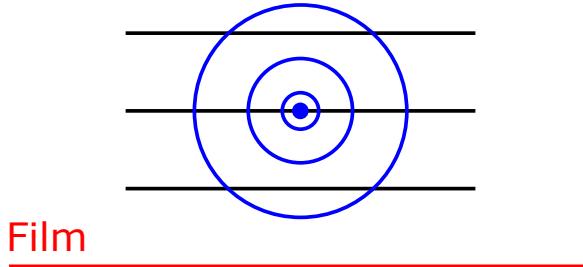
und nach längerer Rechnung erhalten wir ein **Kosinusgitter** der Form

$$I(x) = 2c\epsilon_0 E_0^2 + 2c\epsilon_0 E_0^2 \cos \varphi. \quad (15.3)$$

Das Interferenzmuster erzeugt ein kosinusförmiges Gitter auf dem Film. Wird der entwickelte Film (Transmission  $\propto \cos \varphi$ ) mit der Welle  $E_1$  oder  $E_2$  beleuchtet,

## 15. Holographie

so wird in die erste Beugungsordnung die jeweils andere Welle entsendet ( $E_1$  erzeugt  $E_2$ ,  $E_2$  erzeugt  $E_1$ ). In 0. Ordnung bleiben  $E_1$  und  $E_2$  unverändert. Die Herleitung folgt unten. Zuvor betrachten wir noch das **Hologramm eines Punktes**.

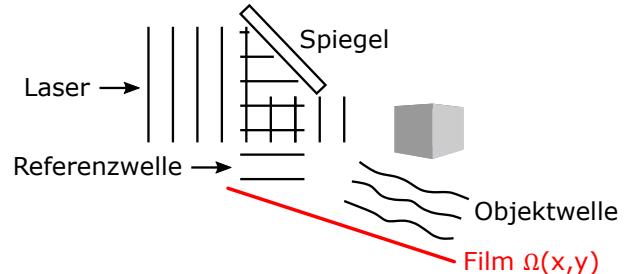
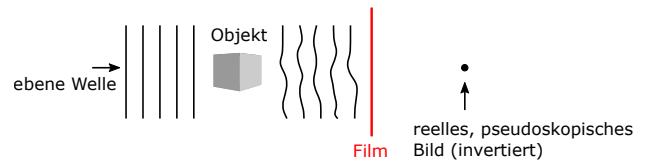


**Abb. 15.3.:** Zum Hologramm eines Punktes.

Das Hologramm eines Punktes muss, der obigen Logik folgend, eine ebene Referenzwelle in einen einzigen Punkt beugen. Eine ideale Fresnelsche Zonenplatte erreicht genau das und entspricht deshalb dem Hologramm eines Punktes. Das Hologramm eines beliebigen Objekts erhalten wir durch Überlagerung vieler Punkte.

## 15.2. Aufnahme eines Hologramms

Die ursprüngliche Anordnung zur Aufnahme eines Hologramms nach Gabor unterscheidet sich vom heutzutage eingesetzten Aufbau. Ein Vergleich dazu ist in Abbildung 15.4 zu finden.



**Abb. 15.4.:** Aufbau zur Aufnahme eines Hologramms nach Gabor (oben) und heutzutage eingesetzte Anordnung (unten).

Wir finden zwei Felder in der Filmebene  $\Omega(x, y)$ :

$$\text{Objekt: } E_O = E_{O,0} e^{i\omega t + i\phi_O(x,y)}$$

$$\text{Referenz: } E_R = E_{R,0} e^{i\omega t + i\phi_R(x,y)}$$

Für die Intensität in der Filmebene gilt

$$\begin{aligned} I(x, y) &\sim |E_O(x, y) + E_R(x, y)|^2 \\ &= E_{O,0}^2 + E_{R,0}^2 + E_{R,0} \cdot E_{O,0} \cdot e^{i\phi_O(x,y)-i\phi_R(x,y)} \\ &\quad + E_{R,0} \cdot E_{O,0} \cdot e^{-i\phi_O(x,y)+i\phi_R(x,y)}. \end{aligned}$$

## 15.3. Wiedergabe des Hologramms

Der entwickelte Film hat eine Transmission  $\sim I(x, y)$  der Form  $T(x, y) = \alpha I(x, y)$ . Beim Beleuchten mit der

## 15.4. Hologrammtypen und Anwendungen

Referenzwelle erhalten wir für das Feld in  $\Omega(x, y)$ :

$$E_{\text{Bild}}(x, y) = E_{\text{R}}(x, y)T(x, y) = E_{\text{R}}(x, y)\alpha I(x, y) \quad (15.4)$$

$$= \alpha(E_{\text{O},0}^2 + E_{\text{R},0}^2) \cdot E_{\text{R},0} \cdot e^{i\omega t + i\phi_{\text{R}}(x,y)} \quad (15.5)$$

$$+ \alpha E_{\text{R},0}^2 \cdot E_{\text{O},0} \cdot e^{i\omega t + i\phi_{\text{O}}(x,y)} \quad (15.6)$$

$$+ \alpha E_{\text{R},0}^2 \cdot E_{\text{O},0} \cdot e^{i\omega t - i\phi_{\text{O}}(x,y) + 2i\phi_{\text{R}}(x,y)} \quad (15.7)$$

$$\equiv E_1 + E_2 + E_3 \quad (\text{drei Felder}) \quad (15.8)$$

Hierbei entspricht Ausdruck (15.6) der **unveränderten Objektwelle**, obwohl das Objekt nicht mehr da ist. Wir untersuchen die einzelnen Felder:

- Für das erste Feld gilt  $E_1 \sim E_{\text{R}}(x, y)$ . Es propagiert hinter dem Film wie das ursprüngliche Feld  $E_{\text{R}}(x, y)$ .
- Das Feld  $E_2 \sim E_{\text{O}}(x, y)$  propagiert hinter dem Film wie das ursprüngliche  $E_{\text{O}}(x, y)$ . Der Film verhält sich also wie ein Fenster, durch das man das Objekt sehen kann.
- $E_3$  erzeugt ein perspektivisch invertiertes (pseudoskopisches), sehr schwaches Bild.

Die Interferenz zweier kohärenter Felder erzeugt ein „Gitter“, welches das eine Feld in das andere beugt.

Wir diskutieren kurz die **Vorteile**:

- Der Beobachtungspunkt ist veränderbar. Es handelt sich um ein dreidimensionales Bild bzw. Objekt.
- Jeder beleuchtete Punkt enthält Informationen über das gesamte Hologramm. Teile des Films reichen aus, um das Bild zu rekonstruieren. Die Auflösung und der Sichtwinkel werden allerdings schlechter. Ein Teil des Hologramms kann

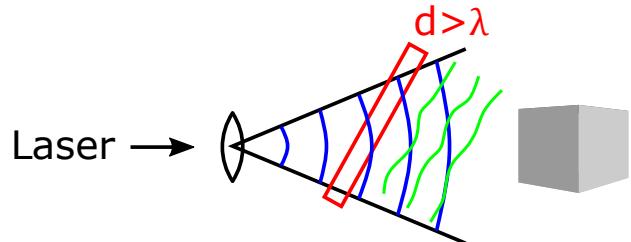
also abgedeckt werden und wir können dennoch den dahinterliegenden Teil um die Blende herum sehen.

- Wir profitieren von beliebiger Fokussierbarkeit. Es ist kein Tiefenschärfebereich festgelegt.

## 15.4. Hologrammtypen und Anwendungen

Wir unterscheiden die folgenden Hologrammtypen:

- Zunächst gibt es das **Lasertransmissionshologramm**. Wie der Name verdeutlicht, ist zur Wiedergabe dieses Hologramms ein Laser nötig.
- Weiterhin gibt es das **Weißlichtreflexionshologramm**. Die Aufnahme eines solchen Hologramms ist in Abbildung 15.5 dargestellt.



**Abb. 15.5.:** Zur Aufnahme eines Weißlichtreflexionshologramms.

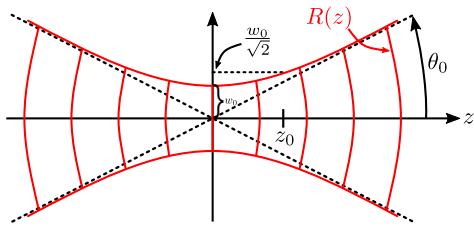
- Zur Wiedergabe eines **Volumenhologramms** wählt man die Farbe des Referenzlichts über die Braggbedingung aus.
- Es existieren auch **Regenbogenhologramme** (keine Volumenhologramme). Sie sind mit Weißlicht sichtbar und können z.B. auf Metallfolie geprägt werden. Sie besitzen außerdem keine vertikale Parallaxe.

Wir geben abschließend einige Anwendungsmöglichkeiten von Hologrammen an:

## *15. Holographie*

- Hologramme spielen in der **Holographischen Interferometrie** eine wichtige Rolle. Hierbei wird das Objekt mit einem Hologramm seiner selbst verglichen. Dadurch werden infolge von Interferenz bzw. Höhenlinien minimale Veränderungen in der Oberflächenstruktur sichtbar. Für jeden Punkt sind Verschiebungen bis in den sub- $\mu\text{m}$ -Bereich hinein messbar (Real Time/Time Average-Holographie).
- Es gibt **holographische optische Elemente**.
- Hologramme können außerdem zur **Datenspeicherung** eingesetzt werden.
- Nicht selten dienen Hologramme auch als **Echtheitszertifikate**.

# 16. LASEROPTIK - GAUßSCHE STRAHLENOPTIK



**Abb. 16.1.:** Gaußscher Strahl, auch „Fundamentalmodus“ genannt.

Gaußsche Strahlen sind Lösungen der Maxwellgleichungen für paraxiale Strahlen, weshalb sie sich sehr gut zur mathematischen Beschreibung der Ausbreitung von Laserstrahlen eignen. Abbildung 16.1 zeigt den einfachsten Gaußschen Strahl, die sogenannte Fundamentalmodus.

Wir erinnern uns an die Wellengleichung:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (16.1)$$

Wir wählen nun den Ansatz:

$$E = u(x, y, z) \cdot e^{i(\omega t - kz)}, \quad (16.2)$$

wobei  $u(x, y, z)$  eine komplexe Funktion sei, die sich nur langsam mit  $z$  verändert. Wir setzen dies in die Wellengleichung ein und erhalten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (16.3)$$

Hierbei haben wir  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  vernachlässigt, weil sich  $u(x, y, z)$  nur langsam mit  $z$  ändert.

Eine Lösung davon ist nun:

$$u(x, y, z) = \frac{u_1}{q(z)} \exp \left( -ik \frac{x^2 + y^2}{2 \cdot q(z)} \right) \quad (16.4)$$

mit dem **komplexen Strahlparameter**  $q(z) = z + iz_0$ , wobei  $z_0$  **Rayleigh-Länge** genannt wird.

Dieses Ergebnis bezeichnet man als **Gaußschen Strahl** oder „Fundamentalmode“

- Es gibt zwar noch (unendlich) viele andere Moden, die die Gleichung lösen. Wir wollen uns an dieser Stelle aber nur mit der Fundamentalmode beschäftigen.
- Nachdem  $q(z)$  eine komplexe Größe ist, wollen wir versuchen, die Auswirkungen von  $q(z)$  auf die Phase und Amplitude von  $u(x, y, z)$  zu trennen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q(z)} &= \frac{z^2 + z_0^2}{z - iz_0} = \\ &= \frac{z}{z^2 + z_0^2} - \frac{iz_0}{z^2 + z_0^2} \\ &= \frac{1}{z \cdot \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right]} - \frac{i}{z_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]} \end{aligned} \quad (16.5)$$

Hieraus ergeben sich folgende **Strahlparameter**:  
**Taillenradius:**

$$w_0 = \left( \frac{\lambda \cdot z_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16.6)$$

**Strahlradius bei  $z$ :**

$$w(z) = w_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16.7)$$

## 16. Laseroptik - Gaußsche Strahlenoptik

**Radius der Wellenfront:**

$$R(z) = z \cdot \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \quad (16.8)$$

**Phasenverzögerung oder Gouy-Phase:**

$$\zeta(z) = \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right) \quad (16.9)$$

Wir benötigen also nur die Rayleigh-Länge  $z_0$  und  $\lambda$  um den Gauß-Strahl vollständig zu beschreiben.

Weiterhin können wir den reziproken komplexen Strahlparameter schreiben als:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} \quad (16.10)$$

und drücken den Gaußschen Strahl aus in der Form:

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{u_0}{iz_0} \cdot \frac{w_0}{w(z)} \cdot \exp \left( -\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) \cdot \exp \left( i\omega t - ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z) \right) \quad (16.11)$$

mit dem Achsabstand  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

### 16.0.1.

#### Intensität

Wir erhalten für die Intensität des Gaußschen Strahls:

$$I(\rho, z) = \frac{\epsilon \cdot c}{2} \cdot | E(\mathbf{r}) \cdot E^*(\mathbf{r}) | = I_0 \cdot \left[ \frac{w_0}{w(z)} \right]^2 \cdot \exp \left( -\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right) \quad (16.12)$$

mit  $I_0 = \left( \frac{u_0}{z_0} \right)^2 \cdot \frac{\epsilon \cdot c}{2}$ .

Das Maximum  $I_0$  liegt immer auf der Achse bei  $z = 0$ . Bei einer Rayleigh-Länge  $z = z_0$  halbiert sich die Intensität  $I(\rho = 0, z_0) = \frac{I_0}{2}$ . Für große  $z \gg z_0$  gilt  $w(z) \approx \frac{w_0}{z_0} \cdot z = \theta_0 \cdot z$ . Der Strahlradius wächst dann linear mit  $z$ . Hierbei haben wir den **Divergenz- oder Öffnungswinkel** definiert:

$$\theta_0 = \frac{w_0}{z_0} = \frac{\lambda}{\pi \cdot w_0} \quad (16.13)$$

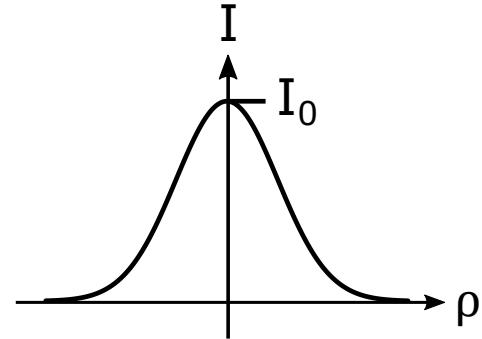


Abb. 16.2.: Intensitätsprofil.

Das Strahlparameterprodukt, definiert über

$$w_0 \cdot \theta_0 = \frac{\lambda}{\pi}, \quad (16.14)$$

bleibt beim Durchgang durch lineare optische Systeme konstant. Ein Laserstrahl kann also nicht auf einen beliebig kleinen Punkt fokussiert werden (siehe Abbildung 16.3).

Betrachten wir nun nochmals den Radius der Wellenfront:

$$R(z) = z \cdot \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right]. \quad (16.15)$$

Wir sehen, dass im Ursprung ( $z = 0$ )  $R(z) = \infty$  gilt. In diesem Punkt liegt also eine ebene Welle vor. Für große  $z$  hingegen gilt:

$$\frac{z_0}{z} \approx 0 \rightarrow R(z) \approx z. \quad (16.16)$$

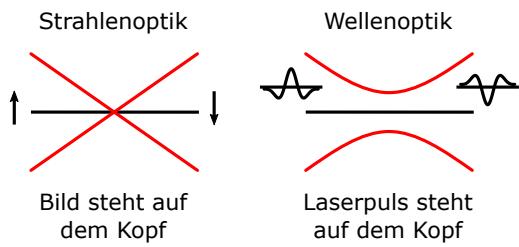
Für große  $z$  finden wir also annähernd eine Kugelwelle vor.

Wir hatten die Gouy-Phase bereits definiert über:

$$\zeta(z) = \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right). \quad (16.17)$$

$\zeta(z)$  beschreibt eine zusätzliche Phase relativ zur ebenen Welle. Für  $z \rightarrow \pm\infty$  finden wir  $\zeta(z) \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}$ . Dies bedeutet einen Phasensprung von  $\pi$  durch den Fokus.

**Beispiele:**



**Abb. 16.3.:** Fokus in der Strahlenoptik (links) und in der Wellenoptik (rechts).

1. Für einen Laserstrahl durch den Hörsaal gilt:

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} = \frac{\pi(0,5 \text{ mm})^2}{632 \text{ nm}} = 1,2 \text{ m} \quad (16.18)$$

$$\Rightarrow w(z = 30 \text{ m}) = 1,2 \text{ cm}$$

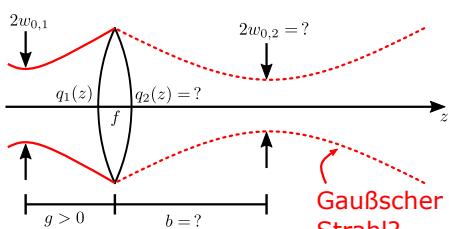
2) Schicken wir einen Laserstrahl zum Mond, erhalten wir abhängig vom Taillenradius:

a)  $w_0 = 1 \text{ cm} \Rightarrow z_0 = 1 \text{ km} \Rightarrow$   
 $w(z = 3 \cdot 10^8 \text{ m}) = 3 \text{ km}$

b)  $w_0 = 1 \text{ m} \Rightarrow z_0 = 10^4 \text{ km} \Rightarrow$   
 $w(z = 3 \cdot 10^8 \text{ m}) = 30 \text{ m}$

Die Divergenz hängt also stark von  $w_0$  ab.

### 16.0.2. *Abbildung Gaußscher Strahlen*



**Abb. 16.4.:** Abbildung Gaußscher Strahlen.

Wir betrachten Abbildung 16.4. Für das Feld auf der linken Seite der Linse gilt  $u_L \sim e^{-ikz - i \frac{k\rho^2}{2q_1(z)}}$ , auf der rechten Seite haben wir  $u_R \sim u_L(z = g) \cdot e^{i \frac{k\rho^2}{2f}}$ . Ist dies nun ebenfalls ein Gaußscher Strahl?

Wir gehen zunächst von der Abbildungsgleichung aus und erhalten:

$$\frac{1}{q_1(g)} - \frac{1}{f} \stackrel{?}{=} \frac{1}{q_2(-b)} \quad \text{Abbildungsgleichung}$$

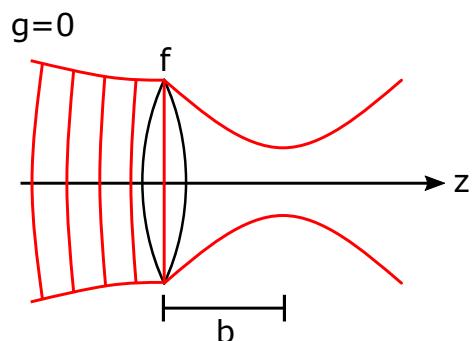
$$\Rightarrow \frac{1}{g + iz_{01}} - \frac{1}{f} = \frac{1}{-b + iz_{02}}$$

$$\Rightarrow b = f \left( 1 - \frac{f(f-g)}{(f-g)^2 + z_{01}^2} \right);$$

$$z_{02} = z_{01} \cdot \frac{f^2}{(f-g)^2 + z_{01}^2}$$
(16.19)

Ein Gaußscher Strahl vor der Linse führt auch zu einem Gaußschen Strahl nach der Linse.

Der Vergleich zur geometrischen Optik zeigt uns:



**Abb. 16.5.:** Zu Teil a) mit  $g = 0$ .

a) Für  $g = 0$  liegt der Fokus bei:

$$b = f \left( 1 - \frac{f^2}{f^2 + z_{01}^2} \right) \approx f \quad \text{für} \quad z_{01} \gg f.$$
(16.20)

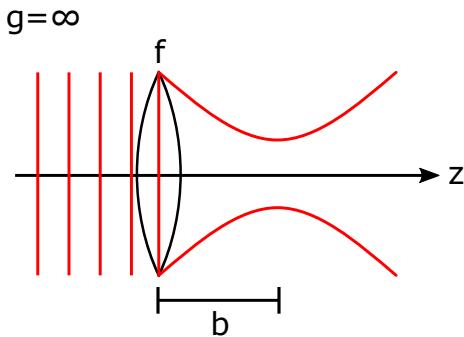
b) Für  $g = \infty$  finden wir den Fokus bei  $b = f$ . Dies zeigt Abbildung 16.6.

c) Für eine Punktquelle bei  $z_{01} \rightarrow 0$  rechnen wir:

$$b = f \left( 1 - \frac{f}{f-g} \right) = -\frac{fg}{f-g} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}} \quad (16.21)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

## 16. Laseroptik - Gaußsche Strahlenoptik



**Abb. 16.6.:** Zu Teil b) mit  $g = \infty$ .

Es handelt sich um eine Abbildung eines Punktes. Für:

$$z_{02} = z_{01} \cdot \frac{f^2}{(f-g)^2 + z_{01}^2} \quad (16.22)$$

folgt für den Taillenradius:

$$\begin{aligned} w_{02} &= w_{01} \cdot \frac{f}{\sqrt{(f-g)^2 + \left(\frac{kw_{01}}{2}\right)^2}} \\ &\Rightarrow w_{02} \rightarrow 0 \quad \text{für } f \rightarrow 0 \quad \text{oder} \quad w_{01} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (16.23)$$

Wellen aus allen Richtungen sind Kugelwellen.

### 16.0.3. Transformation des Strahlparameters

Beim Durchgang durch eine **Linse** erhalten wir:

$$-\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} = \frac{\frac{A}{q_1} + B}{\frac{C}{q_1} + D} \quad (16.24)$$

mit  $A = 1$ ,  $B = -\frac{1}{f}$ ,  $C = 0$  und  $D = 1$ . Diese Resultate entsprechen den Matrixelementen für eine Linse in der Konvention der  $ABCD$ -Matrizen.

Für die **Propagation um eine Strecke  $d$**  folgt:

$$\begin{aligned} q(z) &= z - i \cdot \frac{kw_0}{2} \Rightarrow \text{addiere } d \\ q_2 &= q_1 + d \Rightarrow \frac{1}{q_2} = \frac{1}{d+q_1} \\ &= \frac{\frac{A}{q_1} + B}{\frac{C}{q_1} + D} \end{aligned} \quad (16.25)$$

mit den  $ABCD$ -Matrixelementen  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = d$  und  $D = 1$  für eine Propagation.

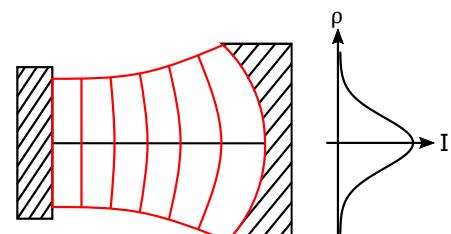
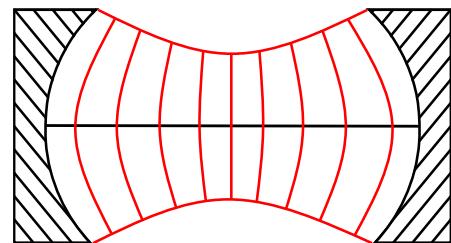
Jedes optische System transformiert den Strahl mit der  $ABCD$ -Matrix aus der geometrischen Optik:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{\frac{A}{q_1} + B}{\frac{C}{q_1} + D} \quad (16.26)$$

### 16.0.4. Gaußsche Strahlen als Mode eines Resonators

Die Spiegeloberflächen entsprechen den Wellenfronten.

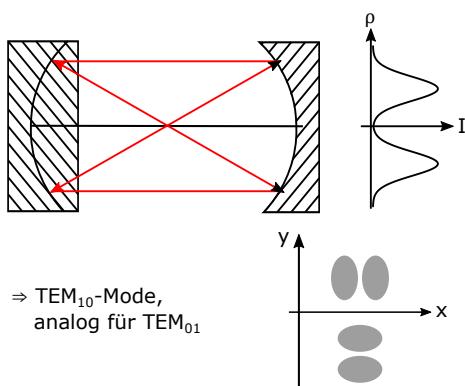
Konfokaler Resonator



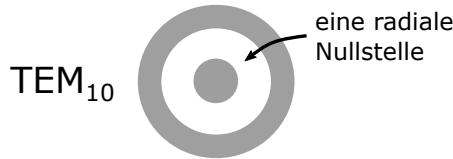
**Abb. 16.7.:** Resonatormoden und der dazugehörige Intensitätsverlauf.

**Transversale Moden** sind klassifiziert als  $\text{TEM}_{mn}$ , wobei  $m, n$  die interferenzbedingten Nullstellen kennzeichnen. TEM bedeutet transversale elektro-magnetische Mode.

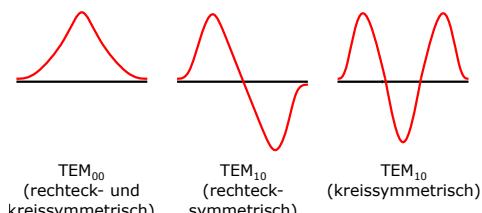
Im **rechteckigen** Fall stehen  $m, n$  für die Nullstellen in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Bei **kreisförmigen** Moden bezeichnet  $m$  die radialen Nullstellen, während  $n$  die Nullstellen entlang des Winkelbereichs  $\pi$  klassifiziert. Ein Beispiel ist in der folgenden Abbildung 16.8 dargestellt.



Für Kreisblende (typisch!)



Phasenlage des E-Feldes:



**Abb. 16.8.:** Verschiedene  $\text{TEM}_{10}$ - und  $\text{TEM}_{01}$ -Moden (oben) und Phasenlage des elektrischen Feldes (unten).

Die Gaußsche Grundmode besitzt einen Taillenradius  $w_0$ , höhere Moden haben einen größeren Radius, der als **effektiver Taillenradius** definiert wird:

$$w_{0,\text{eff}}^{m,n} = M \cdot w_0. \quad (16.27)$$

Für die Bestimmung von  $M$  wird verlangt, dass die Mode im Fokus den gleichen Erwartungswert von  $\rho^2$  besitzt wie ein Gaußscher Strahl mit dem Taillenradius:

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy I_{m,n}(x, y) (x^2 + y^2)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy I_{m,n}(x, y)} \\ = M \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy I_{0,0}(x, y) (x^2 + y^2)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy I_{0,0}(x, y)}.$$

Für rechtecksymmetrische (Hermite-Gaußsche) Moden gilt  $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$  mit  $M_x = \sqrt{2m+1}$  und  $M_z = \sqrt{2n+1}$ . Für kreissymmetrische (Laguerre-Gaußsche) Moden gilt dagegen  $M = \sqrt{2m+n+1}$ .

Zur **Diagnostik der Modenstruktur** führen wir die Strahlqualitätszahl  $K$  ein. Sie beschreibt das Verhältnis von Strahlparameterprodukt  $w_{0,\text{eff}} \cdot \theta_{\text{eff}}$  und  $w_0 \cdot \theta_0$ . Um den effektiven Divergenzwinkel  $\theta_{0,\text{eff}}$  zu bestimmen, vergleichen wir die Mode mit dem Gaußschen Strahl, der die gleiche Rayleigh-Länge hat. Aus  $\theta_0 = w_0/z_0$ ,  $\theta_{\text{eff}} = w_{0,\text{eff}}/z_0$  und  $w_{0,\text{eff}} = M \cdot w_0$  folgt  $\theta_{\text{eff}} = M \cdot \theta_0$ . Für die Strahlqualitätszahl gilt

$$K = \frac{w_0 \theta_0}{w_{0,\text{eff}} \cdot \theta_{\text{eff}}} \\ = \frac{\lambda/\pi}{w_{0,\text{eff}} \cdot \theta_{\text{eff}}} \\ = \frac{\lambda/\pi}{M \cdot w_0 \cdot M \cdot \theta_0} \\ = \frac{\lambda/\pi}{\lambda/\pi M^2} = \frac{1}{M^2}. \quad (16.28)$$

Dabei ist  $M^2$  ein wichtiger Parameter, der bei Lasersystemen bestimmt wird.



# 17. POLARISATION UND DOPPELBRUCHUNG

## 17.1. Polarisationszustände

Bislang hatten wir nur lineare Polarisation behandelt. Nun betrachten wir auch andere Arten der Polarisation und schreiben das Lichtfeld etwas allgemeiner als

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y = \begin{pmatrix} E_{x0} \cos(kz - \omega t) \\ E_{y0} \cos(kz - \omega t + \epsilon) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.1)$$

Wir betrachten zuerst den Fall  $E_{x0} = E_{y0}$ :

- Für  $\epsilon = \pm\frac{\pi}{2}$  liegt **zirkular polarisiertes Licht** vor mit

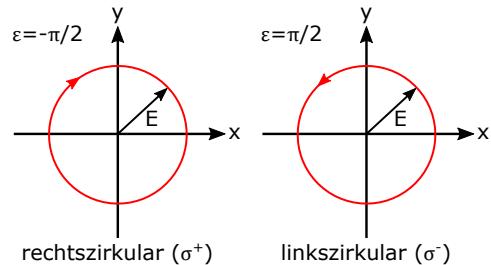
$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{x0} \cos(kz - \omega t) \\ E_{y0} \cos(kz - \omega t \pm \frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} = \quad (17.2)$$

$$= E_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \mp \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17.3)$$

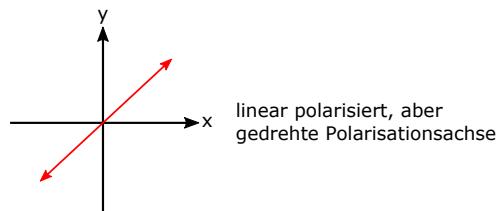
Für  $\mathbf{E}$  an einem festen Ort, z. B.  $z = 0$ , folgt dann Abbildung 17.1.

- Für  $\epsilon = \pm 2\pi \cdot n$  mit  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  ergibt sich linear polarisiertes Licht, das jedoch eine gedrehte Polarisationsachse aufweist:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_i E_{x0} + \mathbf{e}_j E_{y0}) \cos(kz - \omega t) \quad (17.4)$$



**Abb. 17.1.:** Rechts- und linkszirkular polarisiertes Licht.



**Abb. 17.2.:** Polarisation mit  $\epsilon = \pm 2\pi \cdot n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

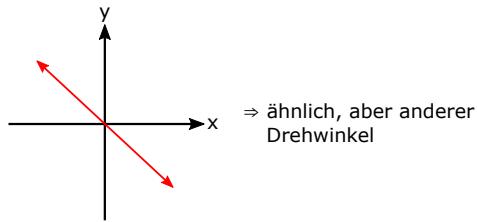
- Liegt  $\epsilon = (2n + 1)\pi \cdot n$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  vor, so gilt

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_i E_{x0} - \mathbf{e}_j E_{y0}) \cos(kz - \omega t). \quad (17.5)$$

Dieser Fall ist ähnlich zum vorherigen, allerdings um  $90^\circ$  gedreht. Andere Drehwinkel lassen sich für  $E_{x0} \neq E_{y0}$  realisieren.

- Die Addition von rechts- und linkszirkularem Licht gleicher Amplitude liefert linear polarisiertes

## 17. Polarisation und Doppelbrechung

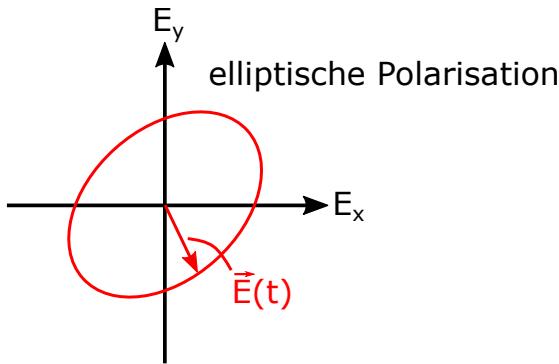


**Abb. 17.3.:** Polarisation mit  $\epsilon = (2n + 1)\pi \cdot n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

tes Licht:

$$E = \begin{pmatrix} 2E_0 \cos(kz - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.6)$$

Im allgemeinen Fall sind  $\epsilon$ ,  $E_x$  und  $E_y$  beliebig. Dann liegt elliptisch polarisiertes Licht vor, wie in [Abbildung 17.4](#) veranschaulicht.

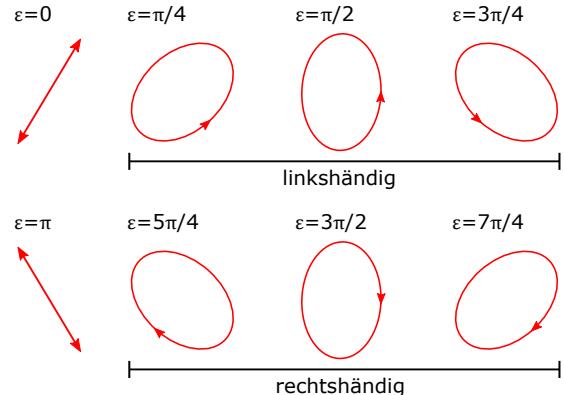


**Abb. 17.4.:** Elliptisch polarisiertes Licht.

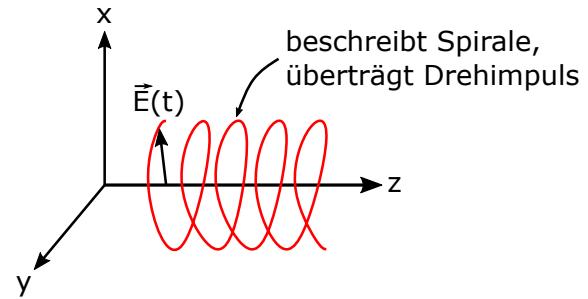
Polarisationszustände lassen sich ineinander überführen, wenn eine Komponente (z.B.  $E_y$ ) verzögert wird.

### Drehimpuls

Vorgriff: Photonen haben einen Drehimpuls  $L = \hbar$  mit  $L_z = -\hbar, +\hbar$ . In diesem Bild bedeutet rechtszirkular, dass alle Photonen eine Drehimpuls  $L_z = +\hbar$  aufweisen. Linkszirkulare Photonen haben dagegen einen Drehimpuls  $L_z = -\hbar$ . Bei linear polarisiertem Licht



**Abb. 17.5.:** Polarisationszustände für verschiedene Werte von  $\epsilon$ .



**Abb. 17.6.:** Das elektrische Feld beschreibt eine Spire und überträgt deswegen einen Drehimpuls.

besitzen die Photonen jeweils mit 50% Wahrscheinlichkeit den Drehimpuls  $L_z = -\hbar$  bzw.  $L_z = +\hbar$ . Den Fall  $L_z = 0$  gibt es bei Photonen nicht.

### Polarisationsselektion

Unpolarisiertes Licht, etwa von einer Glühbirne, einer Gasentladung oder aus einer thermischen Quelle, ist eine Mischung von Teilwellen mit allen möglichen Polarisationen.

Man kann die Polarisation durch folgende Prozesse selektieren:

- Selektive Absorption (Dichroismus), z.B. mittels einer Polarisationsfolie

- Streuung, vergleiche hier z. B. das Himmelsblau
- Reflexion (Fresnel)
- Doppelbrechung

einer Hauptachsentransformation erhalten wir

$$\hat{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (17.10)$$

Im Allgemeinen werden entsprechende optische Elemente als Polarisatoren bezeichnet.

Das **Malussche Gesetz** beschreibt die Reduzierung der Intensität von linear polarisiertem Licht nach einem Polarisator. Es lautet:

$$I(\theta) = I(0) \cos^2(\theta), \quad (17.7)$$

mit der eingestrahlten Intensität  $I(0)$ . Der Winkel  $\theta$  ist der Winkel zwischen der Polarisation des einlaufenden Lichts und der Polarisationsachse des Polarisators. Mathematisch gesehen wird das einlaufende elektrische Feld auf die Polarisatorachse projiziert. Die Feldkomponente entlang des Polarisators ist proportional zum Kosinus von  $\theta$ . Die transmittierte *Intensität* ist proportional zum Quadrat des Feldes und damit zum Quadrat des Kosinus.

## 17.2. Doppelbrechung

### 17.2.1. Definition

In anisotropen Medien (z. B. Kristallen) können die Polarisierbarkeit, die Dielektrizitätskonstante und der Brechungsindex richtungsabhängig sein. Mathematisch wird dadurch der Skalar  $\epsilon_r$  zu einer Matrix bzw. einem Tensor  $\hat{\epsilon}_r$ :

$$\epsilon_r = 1 + \chi = n^2 \rightarrow \hat{\epsilon}_r = 1 + \hat{\chi} = \hat{n}^2 \Rightarrow D = \epsilon_0 \hat{\epsilon}_r E, \quad (17.8)$$

Damit ist  $D$  im Allgemeinen nicht mehr parallel zu  $E$  orientiert. Es gilt dann

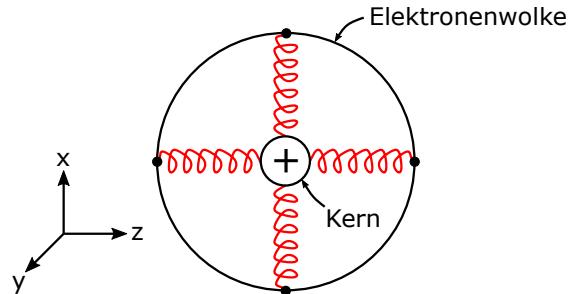
$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (17.9)$$

Aus Symmetriegründen gilt  $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$ , usw., sodass sich drei orthogonale Eigenvektoren finden lassen. Nach

Wir klassifizieren dabei:

- isotrope Medien mit  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$ . Hierzu zählen das Vakuum, Flüssigkeiten, Gläser (amorphe Medien) sowie Kristalle mit kubischer Symmetrie.
- einachsige Kristalle mit  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp}$  und  $\epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel}$ , wobei jedoch  $\epsilon_{\perp} \neq \epsilon_{\parallel}$  gilt.
- zweiachsige Kristalle mit  $\epsilon_{xx} \neq \epsilon_{yy} \neq \epsilon_{zz}$  und  $\epsilon_{xx} \neq \epsilon_{zz}$ .

### Federmodell



**Abb. 17.7.:** Zum Federmodell.

Betrachte hierzu Abbildung 17.7.

Bei isotropen Medien sind alle Federn gleich stark, bei anisotropen Medien sind die Federn in  $x$ - und  $y$ -Richtung unterschiedlich.

### Einachsige Kristalle

Wir wählen die  $z$ -Achse als Kristallachse, d.h. optische Achse (o.A.) aus. **Achtung:** Die optische Achse bezeichnet im Folgenden die Kristallachse und entspricht nicht immer der Ausbreitungsrichtung des Lichtes! Für einachsige Kristalle gilt Folgendes:

Strahlen, die sich entlang der optischen Achse ausbreiten, nennt man **o-Strahlen** (*ordinary*). Für das

## 17. Polarisation und Doppelbrechung

Feld gilt  $E \perp oa$ . Weil in diesem Fall die Polarisierung des Lichts in der  $x$ - $y$ -Ebene liegen muss und dort  $n_o = n_x = n_y$  gilt, breitet sich das Licht entlang der Kristallachse genau wie in einem isotropen Medium aus, also *ordinary*.

**e-Strahlen** (*extraordinary*) breiten sich unter einem von null verschiedenen Winkel  $\theta$  zur optischen Achse aus. Um ihre Ausbreitung zu beschreiben, muss die Polarisierung des Lichtes in Anteile senkrecht und parallel zur optischen Achse des Kristalls aufgeteilt werden. Für den senkrechten Anteil gilt wie oben der Brechungsindex  $n_o$ . Für den Anteil entlang der optischen Achse hängt der entsprechende Brechungsindex  $n_e$  vom Winkel  $\theta$  ab (siehe Gleichung 17.15). Wegen diesen Eigenschaften zeigen e-Strahlen ein außergewöhnliches (*extraordinary*) Verhalten. **Achtung!** Im Folgenden (und in vielen Lehrbüchern zur Optik) wird  $n_e(90^\circ)$  der Einfachheit halber mit  $n_e$  bezeichnet.

Gilt

- $n_e - n_o = 0$ , dann gibt es keine Doppelbrechung.
- $n_e - n_o > 0$ , so liegt ein positiver einachsiger Kristall vor (z.B. Quarz).
- $n_e - n_o < 0$ , dann handelt es sich um einen negativ einachsigen Kristall (z.B. Kalkspat).

Die nachfolgende Tabelle listet die Werte von  $n_o$  und  $n_e$  für verschiedene Materialien auf. Wir sehen, dass diese für Quarz und Eis nahezu identisch sind:

	$n_o$	$n_e$
Kalkspat	1,6584	1,4864
Quarz	1,5443	1,5534
Eis	1,309	1,313

### 17.2.2. Indexellipsoid

Wir schreiben den Ausdruck  $D = \epsilon_0 \hat{E} E$  komponentenweise in der Form

$$D_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} E_j. \quad (17.11)$$

Für die Energiedichte gilt dann

$$W = \frac{1}{2} ED = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{ij} \epsilon_{ij} E_i E_j = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_i \epsilon_{ii} E_i^2, \quad (17.12)$$

wobei der letzte Schritt durch Hauptachsentransformation erfolgt. Mit  $E_i^2 = \frac{D_i^2}{\epsilon_0^2 \epsilon_{ii}^2}$  erhalten wir dann

$$W = \frac{1}{2\epsilon_0} \left( \frac{D_x^2}{n_x^2} + \frac{D_y^2}{n_y^2} + \frac{D_z^2}{n_z^2} \right). \quad (17.13)$$

$D$  liegt also auf der Oberfläche eines Ellipsoids. Mit  $d = \frac{D}{\sqrt{2\epsilon_0 W}}$  gilt dann

$$1 = \frac{d_x^2}{n_\perp^2} + \frac{d_y^2}{n_\perp^2} + \frac{d_z^2}{n_\parallel^2}. \quad (17.14)$$

Man bezeichnet  $n_o = n_\perp$  als ordentlichen Strahl und

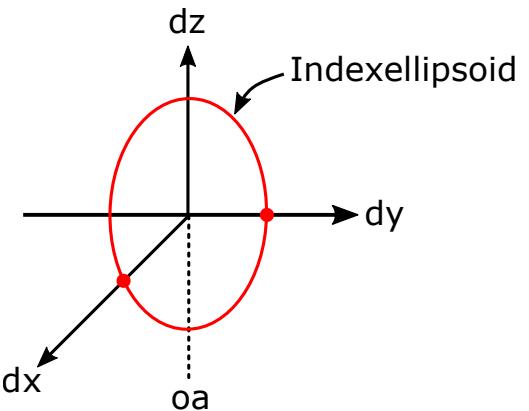


Abb. 17.8.: Beispiel eines Indexellipsoide.

alle anderen Richtungen als außerordentliche Strahlen mit

$$\frac{1}{n_e^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)}{n_\perp^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_\parallel^2}. \quad (17.15)$$

Der Brechungsindex  $n_\parallel$  entspricht dem zuvor eingeführten  $n_e(90^\circ)$  und  $\theta$  bezeichnet den Winkel zwischen Propagationsrichtung und optischer Achse.

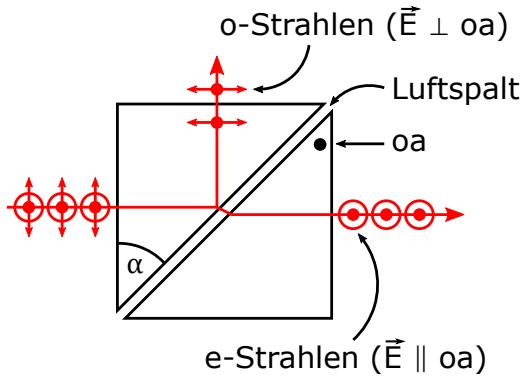
Die hier beschriebene Winkelabhängigkeit des Brechungsindexes  $n_e$  wird in der nichtlinearen Optik ausgenutzt, um Phasenanpassung (engl. *phase matching*)

zu erreichen und damit die Effizienz nichtlinearer Prozesse zu erhöhen.

### 17.2.3. Anwendungen und Beispiele

#### Polarisatoren

- Wir betrachten ein Beispiel für einen **Polarisator** in Abbildung 17.9.



**Abb. 17.9.:** Polarisator mit Totalreflexion für die o-Strahlen.

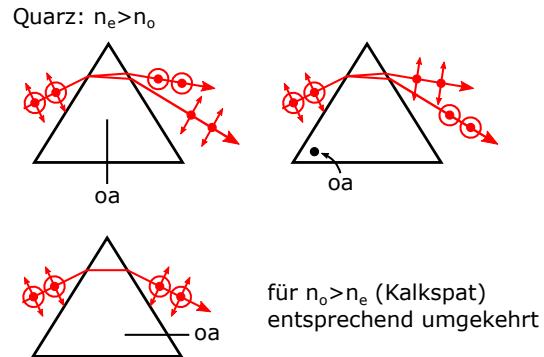
Der Winkel  $\alpha$  kann so gewählt werden, dass für die o-Strahlen zwar Totalreflexion auftritt ( $\alpha = \sin^{-1}(n_o)$ ), nicht aber für die e-Strahlen.

- Die **Brechung am Prisma** ist in Abbildung 17.10 dargestellt. Für Quarz gilt  $n_e > n_o$ , für Kalkspat dagegen  $n_o > n_e$ .

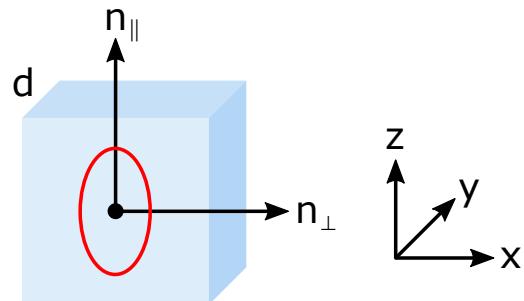
#### Verzögerungsplatten

**Verzögerungsplatten**, auch Wellenplatten oder Phaserschieber genannt, sind Plättchen, deren optische Achse parallel zur Oberfläche orientiert ist (siehe Abbildung 17.11). Wenn wir das elektrische Feld vor der Platte schreiben als

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{x0} \cos(ky - \omega t) \\ 0 \\ E_{z0} \sin(ky - \omega t + \epsilon) \end{pmatrix}, \quad (17.16)$$



**Abb. 17.10.:** Brechung an einem Quarzprisma, dargestellt aus verschiedenen Perspektiven.



**Abb. 17.11.:** Schematische Darstellung einer Verzögerungsplatte.

dann hat es nach der Platte die Form

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{x0} \cos(ky - \frac{\omega}{c} n_\perp d - \omega t) \\ 0 \\ E_{z0} \sin(ky - \frac{\omega}{c} n_\parallel d - \omega t + \epsilon) \end{pmatrix}. \quad (17.17)$$

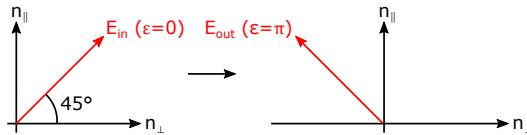
Es tritt eine Phasenverschiebung  $\epsilon \rightarrow \epsilon + \underbrace{\frac{2\pi d}{\lambda} (n_\parallel - n_\perp)}_{\equiv \Delta\phi}$

bzw.  $\Delta\phi = \frac{d}{\lambda} 2\pi (n_e - n_o)$  auf. Wir haben hier Gleichung 17.15 mit  $\theta = 90^\circ$  verwendet. Es gilt daher  $n_e = n_\perp$ .

- Bei einer  $\lambda/2$ -Platte handelt es sich um eine Verzögerungsplatte im Fall  $\Delta\phi = \pi + 2\pi n$  mit  $n = 0, 1, \dots$ . Mit einer  $\lambda/2$ -Platte lässt sich die Polarisation des einlaufenden Lichts drehen. Ein Winkel  $\alpha$  zwischen einlaufender linearer Polarisation und der optischen Achse der  $\lambda/2$ -Platte

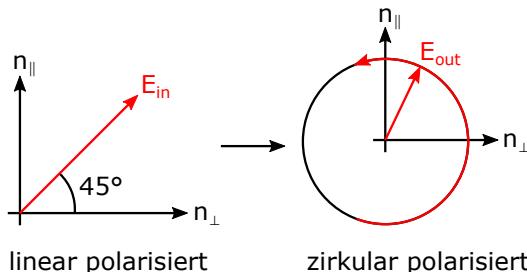
## 17. Polarisation und Doppelbrechung

führt zu einer Drehung der Polarisation um  $2\alpha$ . In Abbildung 17.12 ist dargestellt, wie  $\alpha = +45^\circ$ -Polarisation durch die  $\lambda/2$ -Platte zu einer  $-45^\circ$ -Polarisation wird. Es kommt zu einer Drehung um  $2\alpha = 90^\circ$ .



**Abb. 17.12.:** Eine  $\lambda/2$ -Platte spiegelt die Polarisation und dreht diese somit, hier um  $90^\circ$ .

- Bei einer  **$\lambda/4$ -Platte** liegt eine Phasenverschiebung  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$  mit  $n = 0, 1, \dots$  vor. Mit einer  $\lambda/4$ -Platte lässt sich lineare in elliptische Polarisation verwandeln. Für den Spezialfall von  $\alpha = \pm 45^\circ$  wird linear polarisiertes Licht durch die  $\lambda/4$ -Platte zu zirkular polarisiertem Licht. Dieses Beispiel ist in Abbildung 17.13 dargestellt.

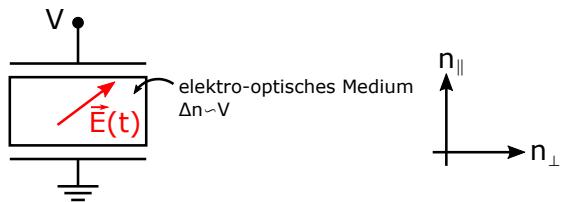


**Abb. 17.13.:** Linear polarisiertes Licht wird durch eine  $\lambda/4$ -Platte zu zirkular polarisiertem Licht.

**Anmerkung:** Verzögerungsplatten haben keinen Effekt auf elektrische Felder, die eine Orientierung  $R \parallel n_{\parallel}$  oder  $E \parallel n_{\perp}$  aufweisen.

### 17.2.4. Induzierte Doppelbrechung

Wir betrachten ein konstantes elektrisches Feld  $E_{DC}$ . Beim **Pockels-Effekt** richtet das Feld  $E_{DC}$  vorhandene Dipole eines Kristalls aus. Dabei ist die Änderung



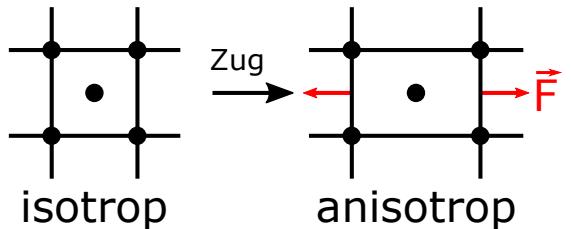
**Abb. 17.14.:** Zur induzierten Doppelbrechung.

des Brechungsindex proportional zur Stärke des angelegten Feldes:  $\Delta n \sim E_{DC}$ .

Wenn  $E_{DC}$  Dipole erzeugt **und** ausrichtet, so spricht man vom **Kerr-Effekt** mit  $\Delta n \sim E_{DC}^2$ .

Dies kann man bei einstellbaren Verzögerungsplatten einsetzen, die dann als schnelle Modulatoren dienen.

### 17.2.5. Spannungsdoppelbrechung



**Abb. 17.15.:** Zur Spannungsdoppelbrechung.

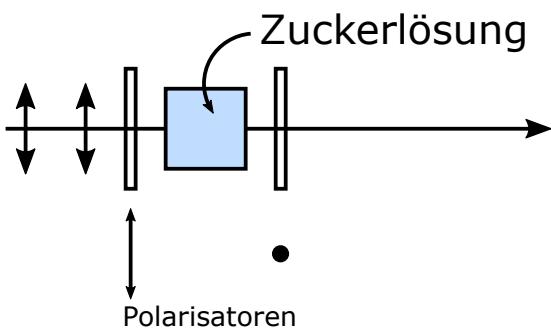
Mechanischer Druck auf ein Medium ändert dessen Brechungsindex. Dieses Phänomen kann beispielsweise zur Visualisierung von mechanischen Spannungen eingesetzt werden.

### 17.2.6. Optische Aktivität

Das Phänomen der optischen Aktivität tritt z.B. bei chiralen Molekülen auf. Es beschreibt die Eigenschaft transparenter Moleküle, die Polarisationsrichtung des Lichts zu drehen.

Als Beispiel betrachten wir die Zuckerlösung in Abbildung 17.16.

Mit einem **Saccharimeter** lässt sich der Zuckergehalt von Weintraubenmost messen. Dies ist auch mit einem

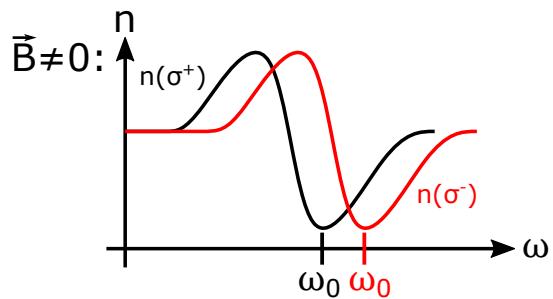


**Abb. 17.16.:** Optische Aktivität einer Zuckerlösung.

**Refraktometer** möglich, das über Totalreflexion arbeitet und den Brechungsindex misst.

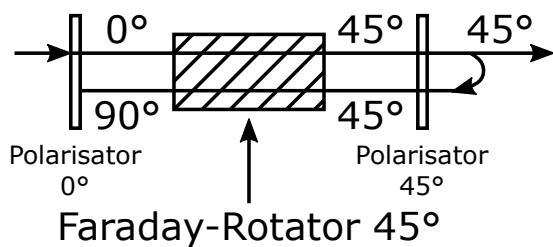
### 17.2.7. Magnetfeldinduzierte optische Aktivität (Faraday-Effekt)

Wenn in einem Medium ein Magnetfeld entlang der Ausbreitungsrichtung des Lichtes vorliegt, ergeben sich unterschiedliche Brechungsindizes für rechtshändig und linkshändig polarisiertes Licht. Dieser Effekt wird als Faraday-Effekt bezeichnet. Die Lorentzkraft  $F_L = -e \cdot v \times B$  addiert oder subtrahiert sich zur Coulomb-Kraft, je nach Drehsinn des durch das Licht erzeugten Dipols. Dies führt zu unterschiedlichen Brechungsindizes für  $\sigma^+$  und  $\sigma^-$ . Eine Anwen-

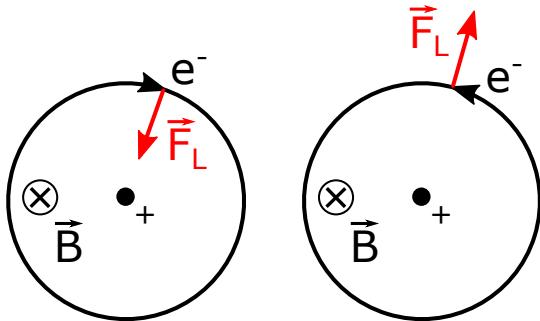


**Abb. 17.18.:** Unterschiedliche Brechungsindizes für  $\sigma^+$  und  $\sigma^-$ .

Überlagerung von rechts- und linkshändiger Strahlung schreibt, lässt sich die Polarisationsachse von linear polarisiertem Licht durch den Faraday-Effekt drehen. Im Laborsystem ist die Drehrichtung immer die gleiche wodurch sich der Faraday-Isolator realisieren lässt.



**Abb. 17.19.:** Funktionsweise des Faraday-Isolators.



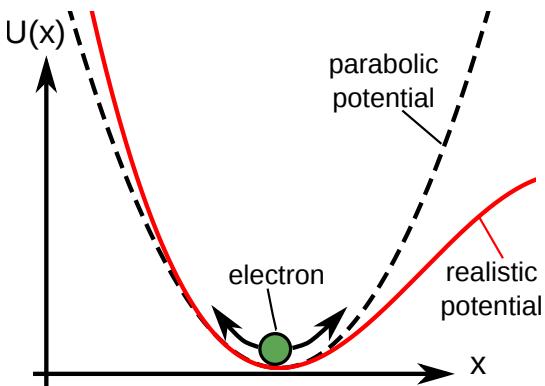
**Abb. 17.17.:** Magnetfeldinduzierte optische Aktivität.

dung des Faraday-Effekts ist der **Faraday-Isolator** (auch optische Diode genannt), veranschaulicht in Abbildung 17.19. Weil sich linear polarisiertes Licht als



# 18. NICHTLINEARE OPTIK

Bisher haben wir die Polarisation des Mediums als linear angenommen,  $P \sim E \Rightarrow P = \epsilon_0 \chi E$ . Im klassischen Modell beruht dies auf der Annahme, dass die Elektronen sich in einem parabolischen Potential bewegen. Dies ist eine sehr gute Näherung des realistischen Potentials für kleine Auslenkungen um die Gleichgewichtsposition des Elektrons, das heißt für niedrige und mittlere Intensitäten des elektromagnetischen Feldes. Erhöht man die Feldstärke, beginnt das Elektron den nicht-parabolischen Anteil des Potentials zu spüren. Dies lässt sich als kleine Störung beschreiben und führt zu zusätzlichen nichtlinearen Termen in dem Ausdruck für die Polarisation.



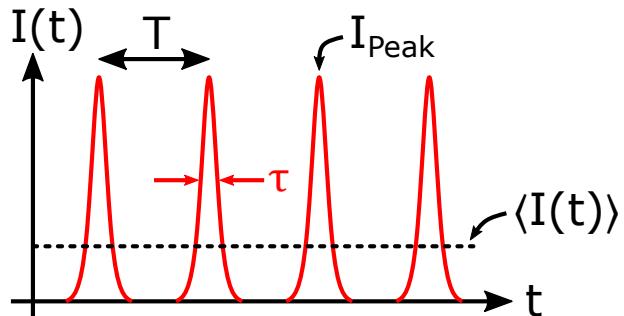
**Abb. 18.1.:** Parabolisches und realistisches Potential eines gebundenen Elektrons.

Wir führen nun Korrekturen ein, die zunächst skalar seien:

$$P = \epsilon_0 (\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3 \dots) = P_{\text{linear}} + P_{\text{NL}} \quad (18.1)$$

$P_{\text{NL}}$  bezeichnet dabei den nichtlinearen Anteil der Polarisation. Für diese Korrekturen sind hohe Intensitäten nötig! Diese erreichen wir entweder durch Fokussieren des Lasers, durch Erhöhung seiner Leistung oder durch den Einsatz gepulster Strahlung mit Pulsdauer  $\tau$ :

$$I \propto \frac{E^2}{A\tau} \quad (18.2)$$



**Abb. 18.2.:** Gepulste Strahlung.

Für die Peak-Intensität aus Abbildung 18.2 gilt  $I_{\text{Peak}} = \frac{T}{\tau} \cdot \langle I(t) \rangle$ . Wählen wir nun  $T = 10 \text{ ns}$  (Oszillator) und  $\tau = 10 \text{ fs} = 10 \cdot 10^{-15} \text{ s}$ , dann folgt  $\frac{T}{\tau} = \boxed{10^6}$ .

Die kürzesten Pulsdauern liegen heutzutage im Attosekunden-Bereich ( $10^{-18} \text{ s}$ ). Die bisher höchste erreichte Intensität mit Lasern lag bei  $10^{20} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$ . Für derart extrem hohe Intensität ist allerdings die störungstheoretische Beschreibung nicht mehr ausreichend.

Ein besonderes Beispiel, wie die Intensität gesteigert werden kann, ist ein (Überhöhungs-)resonator. Dadurch, dass das Laserlicht für mehrere Umläufe gespeichert wird, und gleichzeitig ständig weiterhin Laserlicht von außen eingekoppelt wird, kann innerhalb des Resonators eine deutliche höhere Intensität als

## 18. Nichtlineare Optik

außerhalb erreicht werden. Platziert man einen nichtlinearen Kristall in den Resonator können Mischfrequenzen bzw. Harmonische erzeugt werden. Dies wird in Abbildung 18.3 auf Seite 160 verdeutlicht.

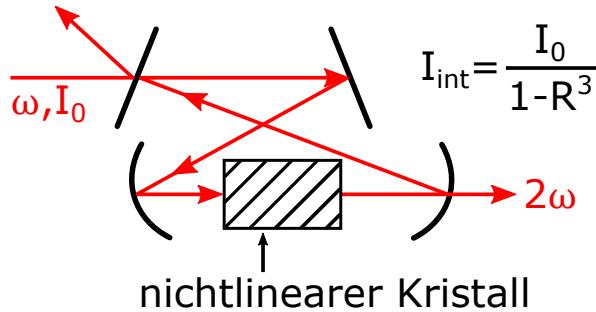


Abb. 18.3.: Zum Überhöhungsresonator.

### 18.1. Erzeugung von Mischfrequenzen bzw. Harmonischen

Wir wählen als Beispiel ein Feld  $E = E_0 \cos(\omega t) = \frac{E_0}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ . Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} P &= \epsilon_0 \chi^{(1)} \frac{E_0}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \\ &\quad + \epsilon_0 \chi^{(2)} \frac{E_0^2}{4} (2 + e^{i2\omega t} + e^{-i2\omega t}) \\ &\quad + \epsilon_0 \chi^{(3)} \frac{E_0^3}{8} (3e^{i\omega t} + 3e^{-i\omega t} + e^{i3\omega t} + e^{-i3\omega t}) + \dots \\ &= \epsilon_0 \chi^{(1)} E_0 \cos(\omega t) \\ &\quad + \epsilon_0 \chi^{(2)} \frac{E_0^2}{2} (1 + \cos(2\omega t)) \\ &\quad + \epsilon_0 \chi^{(3)} \frac{E_0^3}{4} (3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t) + \dots) \end{aligned}$$

$\chi^{(n)}$  entspricht der Erzeugung von Frequenzen  $\pm\omega \pm \omega \pm \omega \dots$  ( $n$  Terme mit unabhängigen Vorzeichen). Allgemeiner können auch verschiedene Frequenzen mischen:

$$\chi^{(n)} (E_1 e^{i\omega_1 t} + E_2 e^{i\omega_2 t} + \dots + \text{c.c.})^n \quad (18.3)$$

$\chi^{(2)}$  **Summenfrequenz**  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$

$$P_i(\omega_3) = \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3, \omega_1, \omega_2) \cdot E_1 e^{i\omega_1 t - ik_1 x} \cdot E_2 e^{i\omega_2 t - ik_2 x} + \text{c.c.}$$

Achtung: Damit die Beiträge der Polarisation in Propagationsrichtung konstruktiv interferieren mit der elektromagnetischen Welle bei  $\omega_3$  die vorher im Kristall erzeugt wurde, ist zusätzlich eine Phasenanpassung nötig. Alle  $\varphi$  müssen unabhängig von  $x$  sein, damit sich alle  $\omega_3$ -Wellen konstruktiv addieren.

Es gilt  $P_f(\omega_3)$  bei  $x \sim E_1 \cdot E_2 \cdot e^{-ik_1 x - ik_2 x}$  und für

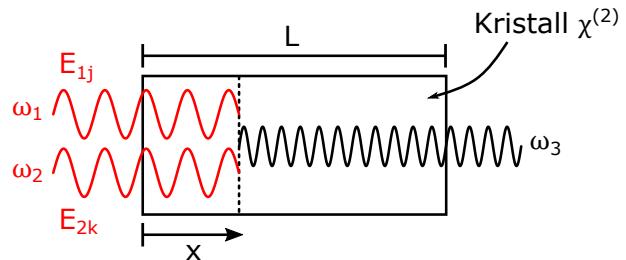


Abb. 18.4.: Zur Phasenanpassung.

die Phase haben wir  $\varphi = (k_1 + k_2)x + k_3(L - x) = (k_1 + k_2 - k_3)x + k_3L$ . Damit die Phase unabhängig von  $x$  ist, muss gelten  $k_1 + k_2 = k_3$  oder allgemeiner formuliert

$$\sum_{\text{in}} \mathbf{k}_n = \sum_{\text{out}} \mathbf{k}_m \quad (18.4)$$

Dies wird als **Phasenanpassung** bezeichnet. Man kann sie auch als Impulserhaltung im Photonenbild auffassen.

#### 18.1.1. Frequenzverdopplung

In diesem Fall gilt  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  und  $\omega_3 = 2\omega$ . Damit folgt dann

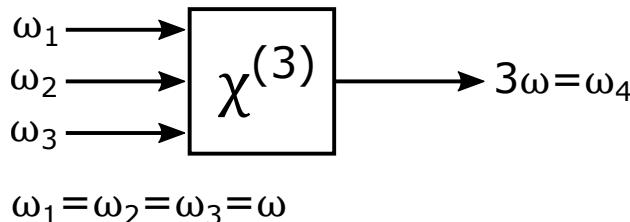
$$2k_1 \stackrel{!}{=} k_3 \Rightarrow 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_1} n(\omega) \stackrel{!}{=} \frac{2\pi}{\lambda_{1/2}} \cdot n(2\omega) \Rightarrow n(\omega) \stackrel{!}{=} n(2\omega). \quad (18.5)$$

Es müssen gleiche Phasengeschwindigkeiten vorliegen, was wegen Dispersion schwierig ist. Man kann

## 18.1. Erzeugung von Mischfrequenzen bzw. Harmonischen

dies aber über Doppelbrechung erreichen: hierbei liefert somit wählt man z. B.  $\omega$  als ordentlichen Strahl (o) und  $2\omega$  als den außerordentlichen Strahl (e).

### 18.1.2. Optischer Kerr-Effekt ( $\chi^{(3)}$ )



**Abb. 18.5.:** Veranschaulichung der 3. Harmonischenerzeugung.

Der Optische Kerr-Effekt ist ein Spezialfall für nichtphasenangepasste 3. Harmonischenerzeugung. Betrachten wir zunächst die 3. Harmonischenerzeugung wie in obiger Abbildung 18.5. Für den Kerr-Effekt gilt demnach  $\omega_4 = \pm\omega_3 \pm \omega_2 \pm \omega_1$  mit  $\omega_4 = 2\omega - \omega = \omega$ . Wir formulieren die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E = \mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}P = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\chi^{(1)}E + \chi^{(3)}E^3) \quad (18.6)$$

Mit  $n_0^2 = 1 + \chi^{(1)}$  folgt dann

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E - \frac{n_0^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E = \frac{\chi^{(3)}}{c^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}E^3. \quad (18.7)$$

Wir wählen den Ansatz  $E = E_0 \sin(kx - \omega t)$  und erhalten

$$E^3 = E_0^3 \left( \underbrace{\frac{3}{4} \sin(kx - \omega t)}_{\omega=2\omega-\omega} - \underbrace{\frac{1}{4} \sin(3kx - 3\omega t)}_{3. \text{ Harmonische}} \right). \quad (18.8)$$

Für nicht-phasenangepasste 3. Harmonischenerzeugung fällt der zweite Term weg. Der erste Term mit  $\omega = 2\omega - \omega$  ist immer phasenangepasst.

Einsetzen in die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E - \frac{n_0^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E = \frac{\chi^{(3)}}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E^3 \quad (18.9)$$

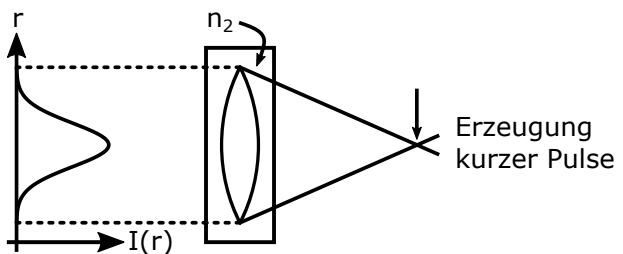
$$\begin{aligned} -k^2 + \omega^2 \frac{n_0^2}{c^2} &= -\frac{\chi^{(3)}}{c^2} \frac{3}{4} \omega^2 E_0^2 \\ \text{mit } E_0^2 &= \frac{2I}{\epsilon_0 c n_0}, \text{ Intensität } I \\ \Rightarrow -k^2 + \omega^2 \left( \frac{n_0^2 + \frac{3\chi^{(3)}}{4\epsilon_0 c} \cdot \frac{2I}{n_0}}{c^2} \right) &= 0 \\ \Rightarrow -k^2 + \omega^2 \left( \frac{n_0^2 + \frac{2n_2}{n_0} I}{c^2} \right) &= 0 \quad \text{mit } n_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{4\epsilon_0 c} \\ \Rightarrow n &= \sqrt{n_0^2 + \frac{2n_2}{n_0} I} \end{aligned}$$

Mit  $n_0 \ll n_2$  erhalten wir schließlich einen intensitätsabhängigen Brechungsindex

$$n(I) = n_0 + n_2 I. \quad (18.10)$$

Die Folgen dieses Ergebnisses sind:

- Es tritt **Selbstfokussierung** auf (**Kerr-Linse**):



**Abb. 18.6.:** Zur Selbstfokussierung (Kerr-Linse).

- Die **Selbstphasenmodulation** äußert sich wie folgt:

$$E_0 e^{i\omega t - ikx} = E_0 e^{i\omega t - i\frac{\omega}{c}nx} \quad (18.11)$$

$$= E_0 e^{i\omega t - i\frac{\omega}{c}(n_0 + n_2 I)x} \quad (18.12)$$

Sind die betrachteten Intensitäten zeitabhängig, gilt also  $I = I(t)$ , dann entstehen zusätzliche Frequenzen  $\frac{\omega}{c}n_2 I(t)x$ .

## 18. Nichtlineare Optik

### 18.1.3. Anwendungen

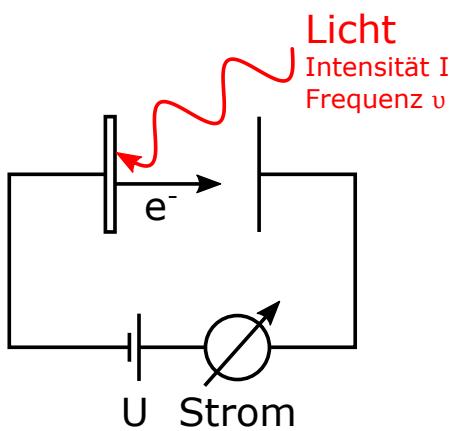
Nichtlineare Optik spielt in der physikalischen Forschung mit Lasern eine extrem wichtige Rolle, sei es um neue Frequenzen zu erzeugen oder statische Systeme oder dynamische Prozesse zu untersuchen. Auch im Alltag begegnet man nichtlinearer Optik, zum Beispiel wird das Licht eines grünen Laserpointers durch Frequenzverdoppelung eines nah-infrarot Lasers erreicht.

### 18.1.4. Literaturhinweis

Für Interessierte: Ein empfehlenswertes Standardwerk zur nichtlinearen Optik ist *Nonlinear Optics* von Robert W. Boyd.

# 19. QUANTENPHÄNOMENE

Das **Hallwachs-Experiment** (1886) untersucht das Entladen einer geladenen Metallelektrode, wenn diese mit Licht bestrahlt wird (siehe Abbildung 19.1).



**Abb. 19.1.:** Schematische Veranschaulichung zum Hallwachs-Effekt.

Man macht dabei diese Beobachtungen:

- A) Die negativ geladene Platte entlädt sich, Elektronen werden herausgelöst.
- B) Die positiv geladene Platte entlädt sich dagegen **nicht**.

## 19.1. Deutung des Photoeffekts

Die Anzahl der beim Photoeffekt ausgelösten Elektronen wächst mit der Lichtintensität, die kinetische Elektronenenergie  $E_{\text{kin}}$  ist aber **unabhängig** davon!

Ebenfalls stößt man auf Probleme des Wellenbildes durch die Folgerung:

Erhöhung der Amplitude  $\Rightarrow$  Erhöhung der Energie einer Welle

Erklärung durch **Einstein (1905)**: Licht besteht aus Quantenobjekten, den **Photonen** mit der Energie:

$$E = h \cdot v = h \cdot \frac{c}{\lambda}, \quad (19.1)$$

wobei  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$  die **Plancksche Konstante** bezeichnet.

Es gilt folglich für die Energiebilanz beim Photoeffekt:

$$E_{\text{Ph}} = h \cdot v = E_{\text{kin}} + W_A + W_S \quad (19.2)$$

$W_A$  entspricht der materialspezifischen Austrittsarbeit. Diese wird üblicherweise in Elektronenvolt (eV) mit 1 eV =  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  angegeben. Beispiele:

Material	Kalium	Aluminium	Zink	Platin
$W_A$ in eV	2,3	4,2	4,3	5,7

$W_S$  beschreibt den Energieverlust durch Stöße. Dieser variiert statistisch mit  $E_{\text{kin}} = \max$  für  $W_S = 0$ .  $\Rightarrow E_{\text{kin,max}} = h \cdot v - W_A$

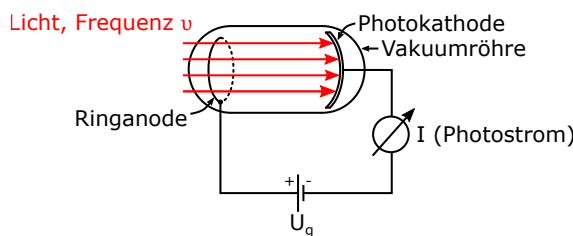
## 19. Quantenphänomene

Am Beispiel von Zink erhalten wir erhalten für die Grenzwellenlänge, ab der der Photoeffekt auftritt ist:

$$\begin{aligned} h \cdot \frac{c}{\lambda} = W_A &\Rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{W_A} \\ &= \frac{1,24 \text{ eV } \mu\text{m}}{4,3 \text{ eV}} = 0,288 \mu\text{m} \quad (19.3) \\ &= 288 \text{ nm (UV-Licht)} \end{aligned}$$

### 19.2. Experimentelle Bestimmung von $W_A$ und $h$

Im Jahr 1916 führte R. A. Millikan präzise Experimente zur Bestimmung der Austrittsarbeit von Metallen  $W_A$  und des Planck'schen Wirkungsquantums  $h$  durch. Bei der von ihm verwendeten Gegenfeldmethode (siehe Abbildung 19.2) werden Elektronen mit monochromatischem Licht über den Photoeffekt aus einer Metallkathode herausgelöst. Die freien Elektronen werden an einer ringförmigen Anode aufgesammelt wodurch ein Photostrom gemessen wird. Das Experiment besteht nun darin, für verschiedene Wellenlängen jeweils diejenige Gegenspannung zu finden, für die kein Photostrom mehr gemessen wird (siehe Abbildung 19.3). Das entspricht einer Messung der anfänglichen kinetischen Energie der herausgelösten Elektronen.

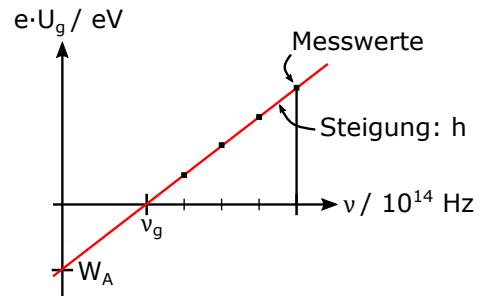


**Abb. 19.2.:** Zur Funktionsweise der Gegenfeldmethode: Die Abbremsung der an der Photokathode austretenden Elektronen erfolgt über die Gegenspannung  $U_g$ .

Es ergibt sich ein linearer Zusammenhang:

$$E_{\text{kin}} = e \cdot U_g = h \cdot v - W_A \quad (19.4)$$

Für  $v < v_g$  werden keine Elektronen ausgelöst.



**Abb. 19.3.:** Bestimmung der Austrittsarbeit  $W_A$ , der Planckschen Konstante  $h$  sowie der Grenzfrequenz  $v_g$  mithilfe der Messwerte aus der Gegenfeldmethode.

Damit die herausgelösten Elektronen eine genau definierte kinetische Energie haben, sollte die verwendete Lichtquelle möglichst monochromatisch sein. Millikan nutzte in seinen Messungen eine Hg-Lampe mit fünf Emissionslinien.

### 19.3. Impuls von Photonen

Der Ausdruck für den Impuls von Photonen kann über die relativistische Energie-Impuls Beziehung hergeleitet werden:

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + p^2 c^2 \quad (19.5)$$

$$\text{mit } m_0 = 0 \Rightarrow E^2 = p^2 c^2 = (hv)^2 \quad (19.6)$$

$$\Rightarrow p = \frac{hv}{c} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad (19.7)$$

Hierbei gilt  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  und  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ .

Zusammenfassend gilt für Photonen:

$$E = hv \text{ und } \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (19.8)$$

$$\text{Spin: 1, Ladung: 0 C, Ruhemasse: } m_0 = 0 \quad (19.9)$$

Für den Spin gilt außerdem  $|S| = \hbar$ .

## 19.4. Quantenmechanik für massebehaftete Teilchen

Einem Teilchen mit Impuls  $p$  wird die **de-Broglie-Wellenlänge**  $\lambda_{\text{dB}}$  zugeordnet gemäß

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p}. \quad (19.10)$$

Wir geben einige Beispiele an:

1. Ein Elektron mit der Energie  $E = \frac{p^2}{2m} = 1 \text{ eV}$  besitzt eine Wellenlänge  $\lambda_{\text{dB}} = 1,2 \text{ nm}$ .
2. Geschwindigkeit eines Heliumatoms (thermisch):

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad (19.11)$$

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{m \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}} \approx 7 \cdot 10^{-11} \text{ m} \quad (19.12)$$

Hierbei wurde von einer Masse  $m = 6,65 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  ausgegangen.

3. Wir betrachten abschließend eine Person mit Masse  $m = 100 \text{ kg}$ , die sich mit einer Geschwindigkeit  $v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  bewegt. Daraus lässt sich eine de-Broglie-Wellenlänge  $\lambda_{\text{dB}} = 6,6 \cdot 10^{-36} \text{ m}$  berechnen.

Wir modellieren nun die Beugung am Spalt der Breite  $b = 1 \text{ m}$ , was einer Türbreite entspricht. Dann folgt für den Beugungswinkel:

$$\Theta_{\min} = \frac{\lambda_{\text{dB}}}{b} = 6,6 \cdot 10^{-36} \text{ rad} \quad (19.13)$$

Das Fernfeld schätzen wir ab über

$$\frac{b^2}{\lambda} = 1,5 \cdot 10^{35} \text{ m}. \quad (19.14)$$

Vergleiche hierzu  $R_{\text{Universum}} = 1,3 \cdot 10^{26} \text{ m}$ .

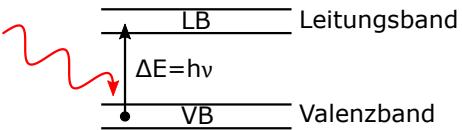


Abb. 19.4.: Innerer Photoeffekt.

## 19.5. Innerer Photoeffekt

Beim äußeren Photoeffekt werden Elektronen ausgelöst. Was geschieht nun, wenn  $h\nu < W_A$  gilt? In diesem Fall wird kein Elektron emittiert. Eine innere Anregung ist jedoch möglich, wie die obenstehende Abbildung 19.4 für einen nicht-metallischen Festkörper (Trennung von Valenz- und Leitungsband) veranschaulicht.

## 19.6. Röntgenstrahlung

Im Jahr 1895 entdeckt Conrad Wilhelm Röntgen zufällig die Fluoreszenz auf einem Leuchtschirm in der Nähe einer Entladungsrohre. Er bezeichnete die Strahlung als „x-rays“.

Das Spektrum der Röntgenstrahlung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Man unterscheidet hierbei die kontinuierlich verteilte Bremsstrahlung von der Linienemission der sogenannten charakteristischen Strahlung.

- A) Die **Bremsstrahlung** entsteht durch das Abbremsen der Elektronen in der Anode.

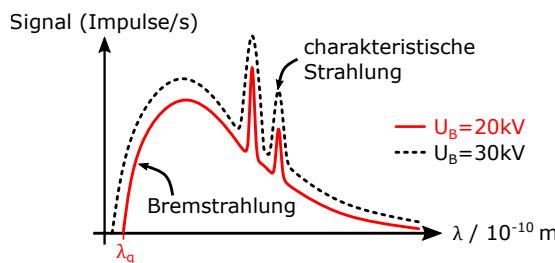
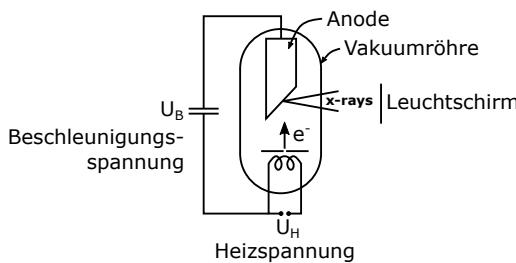
Die spektrale Verteilung der Bremsstrahlung weist eine kurzwellige Grenze  $\lambda_g$  auf, die unabhängig vom Anodenmaterial ist. Die Wellenlänge  $\lambda_g$  wird angenommen, wenn die gesamte kinetische Energie umgewandelt wird:

$$e \cdot U_B = h \cdot v \quad (19.15)$$

Mit der Beziehung  $v = \frac{c}{\lambda}$  folgt schließlich

$$\lambda_g = \frac{h \cdot c}{e \cdot U_B} = \frac{1,24 \cdot 10^{-6} \text{ V m}}{U_B}. \quad (19.16)$$

## 19. Quantenphänomene



**Abb. 19.5.:** Erzeugung von Röntgenstrahlung in einer Röntgenröhre (oben) und die dabei entstehende spektrale Verteilung der austretenden Röntgenstrahlung (unten).

Die kontinuierliche Verteilung ist abhängig vom Anodenmaterial sowie von der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen.

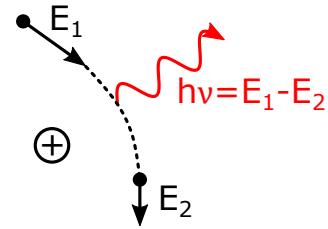
Bestimmt man für verschiedene Werte von  $U_B$  die jeweils zugehörigen Grenzwellenlängen  $\lambda_g$ , so kann damit die Plancksche Konstante  $h$  gemessen werden gemäß der Beziehung

$$h = \frac{e \cdot U_B \cdot \lambda_g}{c}. \quad (19.17)$$

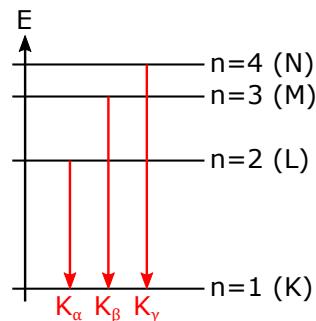
Der Spektralbereich der Bremsstrahlung reicht von etwa 100 eV bis hin zu  $eU_B$  (typischerweise einige hundert Kiloelektronenvolt).

Aufgrund der geringen Effizienz erwärmt sich die Röntgenanode stark. Auch Protonen könnten X-rays erzeugen, die Ausbeute ist aber um  $(\frac{1}{1.836})^2$  geringer.

- B) Die **charakteristische Strahlung** entsteht durch atomare Übergänge im Anodenmaterial. Dies wird in [Abbildung 19.7](#) veranschaulicht.



**Abb. 19.6.:** Entstehung der Bremsstrahlung.



**Abb. 19.7.:** Zur charakteristischen Strahlung.

Röntgenstrahlung findet heute nicht nur Anwendung in der medizinischen Diagnostik und bei therapeutischen Verfahren, sondern wird auch zur Materialprüfung und Strukturanalyse eingesetzt.

Die Bestimmung der Wellenlängen erfolgt beispielsweise über die Bragg-Reflexion gemäß der Gleichung  $2d \cdot \sin \varphi = n \cdot \lambda$ .

## 19.7. Röntgenbeugung

Hier seien zwei wichtige Verfahren angesprochen:

- Das **Laue-Verfahren** wird zur Kristallstrukturanalyse eingesetzt. Ein montierter Einkristall wird im Raum gedreht und dabei aus unterschiedlichen Richtungen bestrahlt. Dadurch erhält man Informationen über das Kristallgitter. Siehe hierzu auch die Bragg-Reflexion.
- Das **Debye-Scherrer-Verfahren** findet Anwendung bei Pulverdiffraktometern. Wie der Name vermuten lässt, kommt hierbei ein Kris-

tallpulver mit vielen kleinen zufällig orientierten Einkristallen zum Einsatz.

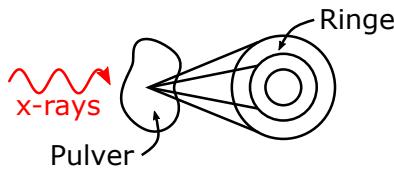


Abb. 19.8.: Zum Debye-Scherrer-Verfahren.

## 19.8.

## Compton-Effekt

Der Compton-Effekt bezeichnet die Wellenlängenänderung eines Photons, wenn dieses an einem Elektron streut. Die Wellenlängenänderung für einen gegebenen Streuwinkel lässt sich aus der Erhaltung von Energie und Impuls herleiten.

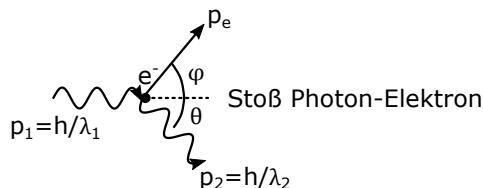


Abb. 19.9.: Schematische Darstellung zum Compton-Effekt.

Aufgrund der **Impulserhaltung** muss gelten:

$$p_1 = p_2 + p_e \Rightarrow p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos \theta \quad (19.18)$$

Die **Energieerhaltung** liefert

$$p_1c + m_e c^2 = p_2c + \sqrt{p_e^2 c^2 + (m_e c^2)^2} . \quad (19.19)$$

Energie des Elektrons nach dem Stoß

Aus beiden Gleichungen folgt durch Elimination von  $p_e^2$ :

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (19.20)$$

Daraus ergibt sich die **Compton-Gleichung**

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) . \quad (19.21)$$

Die größte Änderung der Wellenlänge findet also bei Rückstreuung statt. Dies entspricht einem Ablenkwinkel  $\Theta = 180^\circ$ .

Die **Compton-Wellenlänge**  $\lambda_C$  wird definiert über

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 2,426 \text{ pm.} \quad (19.22)$$

Sowohl der Photoeffekt als auch der Comptoneffekt stützen das Teilchenbild (Photonen) des Lichts und gelten als wichtige Triebfeder für die Entwicklung der **Quantenphysik**.

## 19.9.

## Technische Aspekte

- Ein **Photoelektronen-Vervielfacher**, auch als Sekundärelektronenvervielfacher (SEV) bezeichnet, erzielt eine Verstärkung einfallender Lichtsignale über die Beschleunigung von Elektronen zwischen den sogenannten Dynoden (siehe Abbildung 19.10).

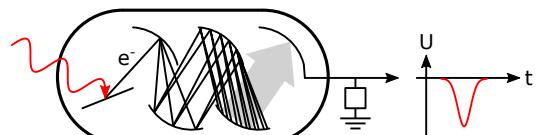
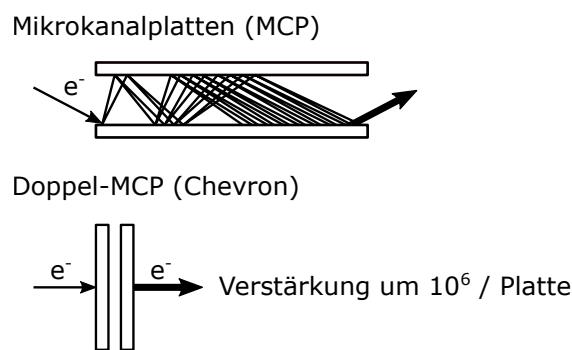


Abb. 19.10.: Photoelektronen-Vervielfacher.

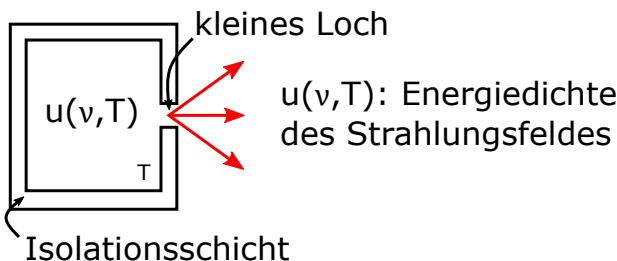
- Mikrokanalplatten** bestehen aus dünnen Kapillaren mit einem Durchmesser von etwa 10  $\mu\text{m}$ , die mit halbleitendem Material beschichtet sind. Diese Kapillaren sind in einen Glasträger eingelassen.

19. Quantenphänomene



**Abb. 19.11.:** Mikrokanalplatten (MCP).

# 20. WÄRMESTRahlUNG



**Abb. 20.1.:** Entstehung von Schwarzkörperstrahlung.

Als Wärmestrahlung (auch thermische Strahlung) bezeichnet man die elektromagnetische Strahlung, die aufgrund der thermischen Bewegung von Materie innerhalb eines Körpers, zum Beispiel Schwingungen, erzeugt wird.

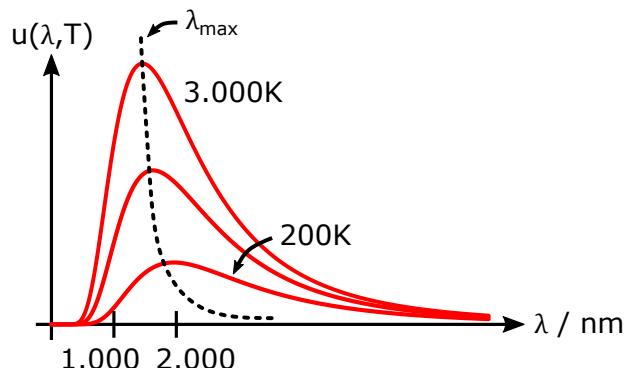
## 20.1. Schwarzer Körper und Hohlraumstrahlung

Eine idealisierte Form eines Wärmestrahlers ist der sogenannte schwarze Körper (auch schwarzer Strahler), der alle auftreffende Strahlung unabhängig von der Wellenlänge absorbiert und lediglich thermische Strahlung abhängig von seiner Temperatur emittiert. Er kann realisiert werden durch einen Hohlraum, wie in Abbildung 20.1 dargestellt. Die Wände des Hohlraums und die elektromagnetische Strahlung im Inneren befinden sich im thermischen Gleichgewicht. Die Schwarzkörperstrahlung und Hohlraumstrahlung sind daher äquivalent. Durch ein kleines Austrittsloch kann die Hohlraumstrahlung nach außen treten. Die Strahlungsleistung  $L(v, T)$  bei der Frequenz  $v$  ist abhängig von der Temperatur  $T$  des schwarzen Strahlers und steht mit der Energiedichte  $u(v, T)$  im Verhältnis

gemäß der Gleichung

$$L(v, T) = \frac{c}{4} u(v, T). \quad (20.1)$$

Experimentell ergibt sich ein Strahlungsspektrum wie in nachfolgender Abbildung 20.2.



**Abb. 20.2.:** Strahlungsspektren für verschiedene Temperaturen  $T$ .

## 20.2. Strahlungsgesetze

### 20.2.1. Allgemeine Strahlungseigenschaften

Das **Stefan-Boltzmann-Gesetz** beschreibt die spektral-integrierte Strahlungsleistung an der Oberfläche eines schwarzen Körpers:

$$\mathcal{L} = \int_0^{\infty} L(v, T) dv \propto \sigma T^4 \quad (20.2)$$

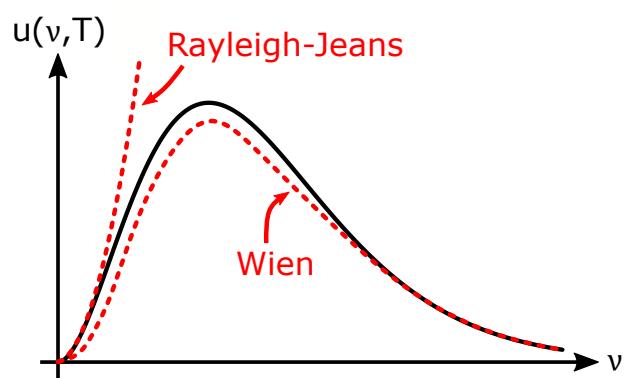
## 20. Wärmestrahlung

Hierbei bezeichnet  $\sigma = 5,67051 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$  die Stefan-Boltzmann-Konstante.

Alle Körper, deren Temperatur größer als null Kelvin ist, strahlen. Das Stefan-Boltzmann-Gesetz erlaubt die Berechnung des Energieverlustes eines thermischen Strahlers.

Das **Wiensche Verschiebungsgesetz** beschreibt die Temperaturabhängigkeit der Wellenlänge des Maximums des Strahlungsspektrums und lautet:

$$\lambda_{\max} \cdot T = 0,29 \text{ cm K} \quad (20.3)$$



**Abb. 20.3.:** Vergleich von Wienschem Strahlungsgesetz und Rayleigh-Jeans-Gesetz mit der Planckschen Strahlungsformel.

### 20.2.2. Näherungsweise Beschreibung des Spektrums in Grenzfällen

Es gibt verschiedene Ansätze, die Form des Strahlungsspektrums in verschiedenen Grenzfällen zu beschreiben:

- Das **Wiensche Strahlungsgesetz** (1893) funktioniert für große  $v$  und ist von der Form

$$u(v, T) = v^3 f\left(\frac{v}{T}\right). \quad (20.4)$$

- Das **Rayleigh-Jeans-Gesetz** aus dem Jahr 1900 kann nur für kleine Werte von  $v$  verwendet werden. Es schreibt sich als

$$u(v, T) = \frac{8\pi v^2}{c^3} k_B T. \quad (20.5)$$

Die Herleitung dieses Ausdrucks erfolgt mithilfe der klassischen Elektrodynamik.

Für große Werte von  $v$  erhalten wir nach dem Rayleigh-Jeans-Gesetz  $u(v, T) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \infty$ . Dieser Sachverhalt wird auch als **Ultraviolettkatastrophe** bezeichnet.

### 20.2.3. Plancksches Strahlungsgesetz

Max Planck konnte im Jahre 1900 die **Plancksche Strahlungsformel** herleiten, die nicht nur die Grenzfälle, sondern das gesamte Spektrum eines schwarzen

Strahlers beschreibt. Die Herleitung beruhte auf der damals heuristischen Annahme, dass die Energie quantisiert ist mit  $E = hv$ . Die Plancksche Strahlungsformel lautet:

$$u(v, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{v^3}{\exp(hv/k_B T) - 1} \quad (20.6)$$

Mit der klassischen Näherung der Exponentialfunktion für  $hv \ll k_B T$  (kleine  $v$ ),

$$e^{hv/k_B T} \approx 1 + \frac{hv}{k_B T} + \dots, \quad (20.7)$$

geht die Plancksche Strahlungsformel über in den Ausdruck

$$u(v, T) \approx k_B T \cdot \frac{8\pi v^2}{c^3}. \quad (20.8)$$

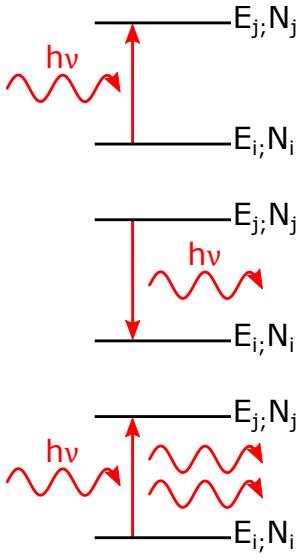
Dies entspricht genau der Form des Rayleigh-Jeans-Gesetzes aus Gleichung 20.5. Die Plancksche Strahlungsformel war ein wichtiger Grundstein für die spätere Entwicklung der Quantenmechanik.

### 20.3. Einsteinsche Herleitung der Planckschen Formel

Wir nehmen an, dass die Atome des Strahlers die Energieniveaus  $E_i$  und  $E_j$  mit den Besetzungszahlen  $N_i$

### 20.3. Einsteinsche Herleitung der Planckschen Formel

bzw.  $N_j$  besitzen. Es existieren nun drei Prozesse des Energieaustauschs zwischen diesen Energieniveaus, die in Abbildung 20.4 veranschaulicht sind.



**Abb. 20.4.:** Veranschaulichung von Absorption (oben), spontaner Emission (Mitte) und stimulierter Emission (unten) als Prozesse des Energieaustauschs zwischen zwei atomaren Energieniveaus  $E_i$  und  $E_j$ .

1. Die **Absorption** formulieren wir über die Ra tengleichung

$$\left( \frac{dN_i}{dt} \right)_{ab} = -B_{ij} N_i \cdot u(v, T), \quad (20.9)$$

wobei  $u(v, T)$  die Photonendichte und  $B_{ij}$  den **Einstein-Koeffizienten** bezeichnet.

2. Die **spontane Emission** drücken wir aus über

$$\left( \frac{dN_i}{dt} \right)_{sp} = -A_{ji} N_j. \quad (20.10)$$

Wieder ist  $A_{ji}$  ein Einstein-Koeffizient.

3. Schließlich schreiben wir die stimulierte Emission als

$$\left( \frac{dN_i}{dt} \right)_{st} = -B_{ji} N_j \cdot u(v, T). \quad (20.11)$$

Die Einstein-Koeffizienten  $A$  und  $B$  folgen aus der Quantentheorie. Dies wird in der Vorlesung „E4: Atom- und Molekülphysik“ näher behandelt.

Im Gleichgewichtsfall muss gelten „Rate hoch = Rate runter“. Dies bedeutet:

$$B_{ij} N_i \cdot u(v, T) = B_{ji} N_j \cdot u(v, T) + A_{ji} N_j \\ \Rightarrow \frac{N_j}{N_i} = \frac{B_{ij} \cdot u(v, T)}{A_{ji} + B_{ji} \cdot u(v, T)}$$

Die Besetzung folgt einer **Boltzmann-Verteilung**. Bezeichnet  $k_B$  die Boltzmann-Konstante, so gilt für das Besetzungsverhältnis

$$\frac{N_j}{N_i} = e^{-hv/k_B T}.$$

Mit  $\lim_{T \rightarrow \infty} u(v, T) = \infty$ , aber  $A_{ji} = \text{const}$  folgt, dass  $B_{ij} = B_{ji}$  gelten muss. Die Einstein-Koeffizienten für Absorption und stimulierter Emission sind identisch. Sei nun  $A = A_{ji}$  und  $B = B_{ij} = B_{ji}$ .

$$\Rightarrow \frac{B \cdot u(v, T)}{A + B \cdot u(v, T)} = e^{-hv/k_B T} \\ \Rightarrow u(v, T) = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{e^{hv/k_B T} - 1}$$

Für den Grenzfall kleiner Frequenzen  $h\nu \ll k_B T$  wissen wir aus Gleichung 20.5

$$u(v, T) \approx \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{1 + \frac{hv}{k_B T} + \dots - 1} = \frac{8\pi v^2}{c^3} k_B T \\ (\text{Rayleigh-Jeans}).$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{8\pi h v^3}{c^3}$$

Insgesamt folgt damit die bekannte Form des **Planck-schen Strahlungsgesetzes**:

$$u(v, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{v^3}{e^{hv/k_B T} - 1} \quad (20.12)$$

In Abhängigkeit der Wellenlänge schreibt sich dieses als

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1}. \quad (20.13)$$

## *20. Wärmestrahlung*

### **Abschließende Bemerkungen:**

Glühbirnen strahlen entsprechend der jeweiligen Temperatur. Ähnliches gilt für heiße Körper. Ab einer gewissen Temperatur überwiegt die Strahlungsabgabe über Wärmeabgabe an die Umgebung.

Die Farbe von LED-Licht wird oft in Kelvin angegeben. Beispielsweise entspricht 6.000 K weißem Licht, ähnlich dem der Sonne. Niedrigere Farbtemperaturen kennzeichnen rötlches Licht (sog. warmweiß) und höhere Farbtemperaturen bläulicheres Licht (sog. kaltweiß).

# 21. LASER

Der Begriff Laser ist eine Abkürzung für Light-Amplification by Stimulated Emission of Radiation. Der generelle Aufbau eines Lasers ist in Abbildung 21.1 dargestellt.

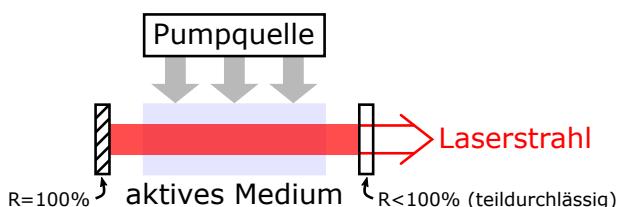


Abb. 21.1.: Prinzipieller Aufbau eines Lasers.

Die Anordnung setzt sich aus den folgenden Elementen zusammen:

- Resonator (zwei Spiegel)
- aktives Medium (Kristall, Glas, etc.)
- Pumpquelle (Blitzlampe, elektrische Entladung, Laserdiode, etc.)
- Auskoppler für den Laserstrahl

Das Funktionsprinzip eines Laser ist das Folgende: Ein spontan entlang der Resonatorachse emittiertes Photon wird von einem der Resonatorspiegel zurück in das gepumpte aktive Medium gelenkt und stimuliert dort die Emission weiterer Photonen. Durch den teildurchlässigen Auskoppler bleiben genügend Photonen im Resonator, um den Laserbetrieb aufrecht zu halten. Stimulierte emittierte Photonen haben die selbe Wellenlänge Phase wie das einfallende Photon. Aus diesem

Grund ist Laserlicht kohärent und (typischerweise) monochromatisch.

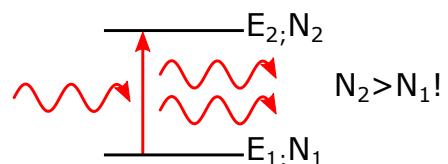


Abb. 21.2.: Populationsinversion.

Bedingung für **Verstärkung** im Laser ist, dass für die Photonendichte  $n$  im Laser gilt:

$$n = u(v, T) \cdot \frac{\Delta v}{h\nu}, \quad (21.1)$$

wobei  $\Delta v$  die Linienbreite bezeichnet.

In einem Laser gibt es die folgenden Beiträge:

## 1. Die **spontane Emission**:

$$\left( \frac{dn}{dt} \right)_{\text{sp}} \propto A_{21} N_2 \quad (21.2)$$

ist wichtig, um den Laser starten zu können. Danach ist diese vernachlässigbar.

Sie ist nicht gerichtet, sodass die meisten Photonen aus spontaner Emission den Resonator verlassen, sodass schließlich gilt:

$$\left( \frac{dn}{dt} \right)_{\text{sp}} \approx 0 \quad (21.3)$$

## 20. Wärmestrahlung

2. Für die **stimulierte Emission** gilt:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dn}{dt}\right)_{st} &= -\left(\frac{dN_2}{dt}\right)_{st} \\ &= B_{12}N_2u(v, T) = B_{12}\frac{hv}{\Delta v}nN_2 \end{aligned} \quad (21.4)$$

3. Die **Absorption** kann geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dn}{dt}\right)_{ab} &= \left(\frac{dN_1}{dt}\right)_{ab} \\ &= -B_{12}u(v, T)N_1 = -B_{12}\frac{hv}{\Delta v}nN_1 \end{aligned} \quad (21.5)$$

4. Bezeichnen wir die Verweilzeit der Photonen im Medium mit  $t_0$ , so können wir den Einfluss von **Verlusten** und der **Auskopplung** ausdrücken als:

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{Ver} = -\frac{n}{t_0} \quad (21.6)$$

Insgesamt folgt daraus:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{hv}{\Delta v}B_{12}N_2n - \frac{hv}{\Delta v}B_{12}N_1n - \frac{n}{t_0} \\ &= \frac{hv}{\Delta v}B_{12}(N_2 - N_1)n - \frac{n}{t_0} \\ \Rightarrow n(t) &= n(0) \exp \left[ \left( \frac{hv}{\Delta v}B_{12}(N_2 - N_1) - \frac{1}{t_0} \right) t \right] \\ &= n(0) \exp [\gamma t] \end{aligned} \quad (21.7)$$

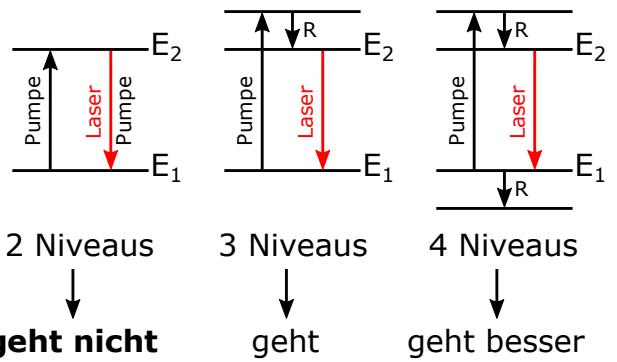
Für Werte  $\gamma > 0$  steigt  $n(t)$  exponentiell an (Verstärkung), während  $n(t)$  für  $\gamma < 0$  exponentiell abklingt (Dämpfung). Als Bedingung für eine Netto-Verstärkung finden wir

$$N_2 - N_1 > \frac{\Delta v}{t_0 B_{12} h v} = \frac{8\pi v^2 \Delta v}{c^3 t_0 A_{21}} = \frac{8\pi v^2 \Delta v \tau}{c^3 t_0} \quad (21.8)$$

Hierbei schreiben wir  $\tau = \frac{1}{A_{21}}$  für die Lebensdauer des angeregten Zustands.

Falls  $N_2 - N_1 > 0$  gilt, spricht man von **Besetzungs-inversion**. Für den Betrieb eines Lasers wird diese

benötigt, ist aber rein thermisch (durch heizen des aktiven Mediums) nicht zu erreichen (hier gilt immer  $N_1 > N_2$ ). Die Inversion muss stattdessen durch sog. Pumpen erreicht werden. Die Pumpschemata sind in [Abbildung 21.3](#) skizziert. Wie dort gezeigt ist mit einem aktiven Medium, das aus nur zwei Niveaus besteht, keine Besetzungsinversion und damit kein Laserbetrieb möglich (Herleitung benötigt Quantenmechanik).



**Abb. 21.3.:** Pumpschemata für zwei, drei und vier Energieniveaus.

Aufgrund der Beziehung  $A_{21} \propto v^3 B_{12}$  überwiegt bei großen Werten von  $v$  die spontane Emission leicht gegenüber der stimulierten Emission.

Für die **longitudinalen Moden** in einem Laser betrachten wir die Resonatorbedingung

$$L = m \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow m = \frac{L}{\lambda/2} \quad (21.9)$$

Wir erhalten dann

$$v_m = \frac{m \cdot v}{2L} \text{ mit } \Delta v = v_{m+1} - v_m = \frac{v}{2L} \quad (21.10)$$

Vergleiche hierzu auch [Abbildung 21.4](#).

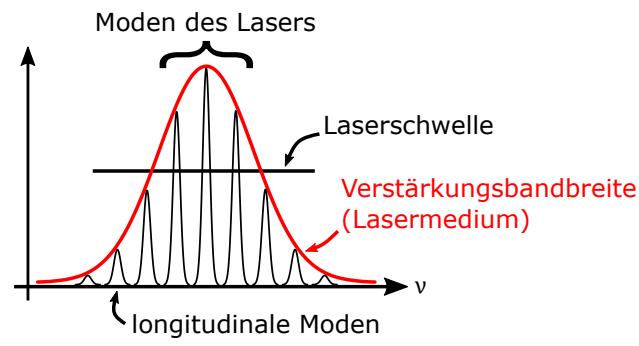
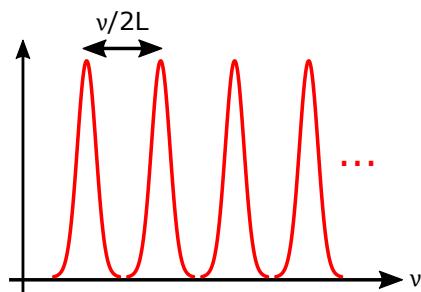
Für die **Laserbedingung** gilt:

$$g \geq \alpha + \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{R_1 R_2} \quad (\text{Schawlow 1958/Townes}), \quad (21.11)$$

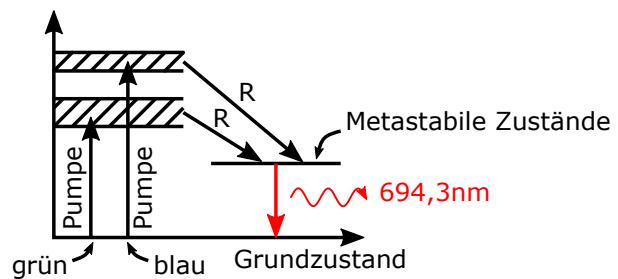
wobei  $g$  die Verstärkung (*gain*),  $\alpha$  die Verluste und  $R_1, R_2$  die Spiegelreflektivität bezeichnen.

### 20.3. Einsteinsche Herleitung der Planckschen Formel

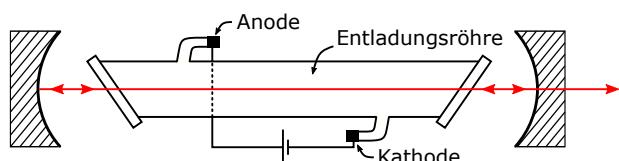
Der erste Laser wurde im Jahr **1960** durch **Theodore Maiman** entwickelt. Es handelt sich hierbei um einen Rubin-Laser, der auch aktuell am Max-Planck-Institut für Quantenoptik in Garching ausgestellt ist. Die Funktionsweise eines **Rubin-Lasers** mit drei Energieniveaus ist in Abbildung 21.5 auf Seite 175 dargestellt. Der Aufbau eines **Helium-Neon-Lasers** mit vier Niveaus ist ebenfalls auf Seite 175 in Abbildung 21.6 skizziert. Bei Letzterem erfolgt mittels elektrischer Entladung die Anregung im Helium. Die Energie wird dann durch Kollision auf das Neon übertragen. Die Laserübergänge finden im Neon statt, einer davon liegt bei einer Wellenlänge  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ .



**Abb. 21.4.:** Zu den longitudinalen Moden eines Lasers.



**Abb. 21.5.:** Rubin-Laser mit drei Energieniveaus.



**Abb. 21.6.:** Helium-Neon-Laser mit vier Energieniveaus.



*Kapitel*  
**22.** TABELLEN

22. Tabellen

Name	Formelzeichen	Wert
Vakuumpermittivität	$\epsilon_0$	$8.854 \times 10^{-12} \text{ C m}^{-2} \text{ N}^{-1}$
Vakuumpermeabilität	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Vakuumlichtgeschwindigkeit	$c, c_0$	$2.997\ 924\ 5 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum	$h$	$6.626\ 070\ 15 \times 10^{-34} \text{ Js}$
Reduziertes Plancksches Wirkungsquantum	$\hbar$	$h/2\pi = 1.054\ 571\ 800 \times 10^{-34} \text{ Js}$
Elementarladung	$e$	$1.602\ 177\ 33 \times 10^{-19} \text{ C}$
Gravitationskonstante	$G$	$6.674\ 08 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Avogadro-Konstante	$N_A$	$6.022\ 140\ 857 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	$k_B$	$1.380\ 648\ 52 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma$	$5.670\ 367 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$
Bohrscher-Radius	$a_0$	$5.291\ 772\ 106\ 7 \times 10^{-11} \text{ m}$
Feinstrukturkonstante	$\alpha$	$1.054\ 571\ 800 \times 10^{-34}$
Elektronenmasse	$m_e$	$9.109\ 383\ 56 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Neutronenmasse	$m_n$	$1.674\ 927\ 471 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Protonenmasse	$m_p$	$1.672\ 621\ 898 \times 10^{-27} \text{ kg}$

**Tab. 22.1.:** Wichtige Konstanten in SI-Einheiten

# A. ANHANG

## A.1. Fouriertransformation der Gaußfunktion

Wir beginnen mit der allgemeinen Form einer um 0 zentrierten Gaußfunktion mit Amplitude 1

$$f(t) = e^{-at^2}.$$

Zur Herleitung ist es nützlich auch die Ableitung der Fouriertransformation nach der Frequenz zu betrachten.

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt \\ \tilde{f}'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} -ite^{-at^2} e^{-i\omega t} dt\end{aligned}$$

Um das zweite Integral zu lösen, führen wir eine partielle Integration mit den Funktionen

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{2a} e^{-at^2} \\ v &= ie^{-i\omega t}\end{aligned}$$

durch und erhalten

$$\tilde{f}'(\omega) = \frac{i}{2a} e^{-at^2} e^{i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} e^{-at^2} \omega e^{-i\omega t} dt.$$

Da die Gaußfunktion im unendlichen gegen 0 geht, fällt der Randterm weg. Wir können also weiter zu

$$\tilde{f}'(\omega) = -\frac{\omega}{2a} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt}_{\tilde{f}(\omega)}$$

vereinfachen.

Wir haben nun eine Differenzialgleichung für  $\tilde{f}(\omega)$  erhalten, welche sich, wenn wir sie zu

$$\frac{\tilde{f}'(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} = -\frac{\omega}{2a}$$

umschreiben, einfach durch eine Integration über  $\omega$  lösen lässt.

$$\begin{aligned}\ln(\tilde{f}(\omega)) &= -\frac{\omega^2}{4a} + c \\ \tilde{f}(\omega) &= e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \cdot e^c\end{aligned}$$

Um nun die Integrationskonstante zu bestimmen, werten wir die Funktion  $\tilde{f}(\omega)$  bei  $\omega = 0$  aus, was das bekannte Integral über die Gaußfunktion ergibt.

$$\begin{aligned}e^c &= \tilde{f}(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}\end{aligned}$$

Fassen wir also alles zusammen, so erhalten wir für die Fouriertransformation der Gaußfunktion

$$\tilde{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}. \quad q.e.d.$$



# TABELLENVERZEICHNIS

1.1.	Schallgeschwindigkeit in einigen Gasen . . . . .	10
1.2.	Schallgeschwindigkeiten in einigen Festkörpern . . . . .	11
2.1.	Dielektrische Konstanten einiger Materialien bei 0 °C und 50 Hz . . . . .	18
2.2.	Permeabilität einiger Materialien . . . . .	19
2.3.	Beispiele für Brechungsindizes bei $\lambda_{\text{vac}} = 500 \text{ nm}$ . . . . .	20
4.1.	Kohärenzlängen und Bandbreiten einiger Lichtquellen. . . . .	41
5.1.	Intensitäten und Strahlungsdrücke einiger Lichtquellen. . . . .	46
9.1.	Abbildungszonen . . . . .	96
22.1.	Wichtige Konstanten in SI-Einheiten . . . . .	178



# INDEX

## A

Abbe-Zahl, 105  
Abbildung  
    dünne Linsen, 95  
    Kugelfläche, 92  
    Spiegel, 90  
Abbildungsgleichung, 88  
    Newton, 89  
Aberration, 105  
    monochromatische, 106  
    sphärische, 106  
Ableitungssatz, 33  
Absorptionsgesetz, 47  
Absorption, 47  
Absorptionskoeffizient, 47  
Achromat, 106  
Adiabatenexponent, 10  
Ähnlichkeitssatz, 33  
Amplitude, 7  
anomale Dispersion, 36, 49  
asphärische Linse, 107  
Astigmatismus, 107

## B

Bandbreitenprodukt, 34  
Beugung an Blenden und Gittern, 125  
Brechungsgesetz, 56, 86  
    paraxiale Näherung, 87  
Brechungsindex, 20, 35, 47, 48  
    Imaginärteil, 48  
    Metal, 50  
    Plasma, 50  
    Prisma, 58  
    Realteil, 48

Brechungsmatrix, 98

Brennweite  
    Kugelfläche, 92  
    Kugelspiegel, 89  
Brewsterwinkel, 66

## C

Camera Obscura, 85  
Chrip, 36

## D

dicke Linse, 96  
dielektrische Verschiebung, 18  
Dielektrizitätskonstante, 18  
Dispersion, 12  
    anomale, 36, 49, 58  
    Gruppengeschwindigkeits-, 36  
    normale, 36, 49  
Dispersionsrelation, 22  
    Metal, 51  
    Plasma, 51  
Dispsersion, 35  
Doppelbrechung, 18  
Doppelspalt, 41  
dünne Linse, 92

## E

Eindringtiefe, 52  
Elastizitätsmodul, 10  
elektrische Feldstärke  
    makroskopisch, 18  
    mirkoskopisch, 17  
elektrische Flussdichte, 18  
elektrische Permittivität, 18  
elektrische Suszeptibilität, 18

## *Index*

elektromagnetische Welle, 17

elektromagnetische Wellengleichung, 19

Energieflussdichte, 23

Energieflussrichtung, 23

evaneszente Welle, 67

### **F**

Faltung, 33

Faltungssatz, 33

Feldreflexionskoeffizient, 62

Feldstärke

  elektrische, 17, 18

  magnetische, 18

Flussdichte

  elektrische, 18

  magnetische, 17, 18

Fourier Theoreme, 32

Fourieranalyse, 27

Fourierkoeffizienten, 28

Fourierreihe, 28

Fouriertransformation, 27, 31

  inverse, 32

freie Ladungsdichte, 18

freie Stromdichte, 18

Frequenz, 7

Fresnelssche Formeln, 64

frustrierte Totalreflexion, 68

Full Width Half Maximum, 34

FWHM, 34

### **G**

Gaußsche Breite, 34

Gaußsche Linsenformel, 93

Gaußsches Wellenpaket, 33

geometrische Optik, 85

Glasfaser, 71

Glasfaser *siehe* Lichtfaser, 60

Grenzfläche, 55

Gruppengeschwindigkeit, 35

Gruppengeschwindigkeitsdispersion, 36

GVD, 36, 75

### **H**

harmonische Schwingung, 7

harmonischer Oszillator, 48

Hauptebene, 96

Huygenssches Prinzip, 56

### **I**

Impuls, 45

Impulsdichte, 45

Induktivität, 63

Inkohärenz, 39

Intensität, 24, 45

  instantane, 24

  mittlere, 24

Interferenz, 27

Interferenz an Schichtsystemen, 133

### **K**

Kapazität, 63

Kapillarwelle, 11

Kohärenz, 39

  räumliche, 41

  zeitliche, 40

Kohärenzlänge, 40

Kohärenzzeit, 40

Koma, 107

Kompressibilität, 10

Kontrast, 40

Kreisfrequenz, 7

Kugelwelle, 9

### **L**

Ladungsdichte

  freie, 18

  gesamte, 17

Lambert-Beersches Absorptionsgesetz, 47

Laplace Operator, 11

Laser, 173

Laufzeitunterschied, 40

Lichtfaser, 60

Lichtgeschwindigkeit, 20

Linse

  dicke, 96

  dünne, 92

  plankonvex, 93

Linsengleichung, 88

Linsenmacherformal

dicke Linse, 97

Linsenmacherformel, 97

Linsenmachergleichung, 93

Linsenschleiferformel, 93, 97

Lochkamera, 85

Lorentzkraft, 45

Lorentzprofil, 49

## M

magnetische Flussdichte

makroskopisch, 18

mikroskopisch, 17

magnetische Induktion, 17

magnetische Permeabilität, 19

magnetische Polarisation, 19

magnetische Suszeptibilität, 19

Magnetisierung, 19

magnetsche Feldstärke, 18

makroskopische Maxwellgleichungen, 17

Materialgleichungen, 18

Matrizenoptik, 98

Maxwellgleichungen, 17

makroskopische, 17

mikroskopische, 17

Meniskus

konkav, 94

konvex, 94

Meniskuslinse, 94

Michelson-Interferometer, 22, 39

mikroskopische Maxwellgleichungen, 17

monochromatische Aberration, 106

## N

Newtonscche Abbildugsgleichung, 89

nichtlineare Optik, 18

normale Dispersion, 36, 49

numerische Apertur, 61

## O

Oberflächenwelle, 11

Optische Instrumente, 113, 119

Oszillatiorstärke, 50

## P

paraxiale Näherung, 87

Periode, 7

Permeabilität, 19

Phase, 7

offset, 7

Phasenabstand, 27

Phasengeschwindigkeit, 8

ebene Welle, 12

Schall, 10

Plasmafrequenz, 50

Polarisation, 18

elektrische, 18

magnetische, 19

p-, 64

s-, 64

Poyntingvektor, 23, 45

## R

Randbedingungen, 55

räumliche Kohärenz, 41

Rechteckfunktion, 29

Reflexionsgesetz, 56, 86

Reflexionsgrad, 64

p-Polarisation, 64

Reflexionskoeffizient, 62

Amplituden-, 63

p-Polarisation, 64

s-Polarisation, 64

Retroreflexion, 60

## S

Sagittaleben, 108

Schallwelle, 9

Schärfentiefe, 109

Schermodul, 11

Schichtwellenleiter, 72

Schwebung, 28

Schwebungsfrequenz, 28

Schwerewelle, 11

Sellmeier-Gleichung, 50

skin depth, 52

Snelliussches Brechungsgesetz, 56

Spektrum, 28

## *Index*

- monochromatische Welle, 32
- sphärische Aberration, 106
- s-Poarisation, 64
- stehende Welle, 9
- Stetigkeitsbedingungen, 55
- Streuung, 79
- Stromdichte
  - freie, 18
  - gesamte, 17
- Superpositionsprinzip, 9
- Suszeptibilität, 46, 48
  - elktrische, 18
  - magnetische, 19
- T**
  - Tangentialebene, 108
  - Teilchendichte, 47
  - Totalreflexion, 60
    - äußere, 60
    - frustrierte, 68
  - Transmissionskoeffizient
    - Amplituden-, 63
    - s-Polarisation, 64
  - Transmissionskoeffiziet
    - p-Polarisation, 64
  - transversale Welle, 23
- U**
  - Übergangswahrscheinlichkeit, 50
  - Überlagerung, 27
    - gleiche Frequenz, 27
    - mehrere Frequenzen, 28
    - unterschiedliche Frequenz, 28
- V**
  - Vergrößerung
    - Longitudinal, 91
    - transversal, 91
  - Verschiebungssatz, 33
- W**
  - Welle, 7
    - elektromagnetische, 17
    - evaneszente, 67
    - harmonische, 7
- Kapillar-, 11
- Kugel-, 9
- Oberflächen-, 11
- Schall-, 9
- Schwere-, 11
- stehende, 9
- transversale, 23
- Wellenbauch, 9
- Wellenfront, 12
- Wellengleichung
  - dreidimensional, 11
  - eindimensional, 8
  - elektromagnetische, 19
- Wellenknoten, 9
- Wellenlänge, 7
- Wellenleiter, 71
- Wellenvektor, 7, 11
- Wellenwiderstand, 63
- Wellenzahl, 7
- Wirkungsquerschnitt, 47
- Y**
  - Youngscher Doppelspalt, 41
- Z**
  - zeitliche Kohärenz, 40
  - Zylinderlinse, 95