QAL - Quantum Analys.

<Vorbemerkung> Name: Yuelong Sun.
Datum: 23 Aug 2021.

• Bedeutung der Lebensdauer eines QM Zustandes.

o Ein quantenmechanischer Zustand, besteht im Allgemeinen nicht unendlich lang. Angeregte Zustände mit höherer Energieniveau zerfallen in den Grundzustand, welcher eine unendliche lange Lebensdauer hat.

o Zerfälle durch oszillierende, gedämpften Faktor $e^{-\lambda t}$ beschreiben (λ: Dämpfungskonstante.)

$$e^{-\lambda t}\cdot\cos(\omega t) \underset{\text{Euler}}{\Rightarrow} e^{-(\lambda+i\omega)t} \Rightarrow \psi(r,t) = \underbrace{f(x)}_{\text{beliebig}}\, e^{-(\lambda+i\omega)t}$$

Zwangsbedingung: $\psi(x,t) = 0$ für $t<0$

Endliche Lebensdauer ⇒ keine einzigen Kreisfreq ω_0

o Spektrum durch Fourier-Trafo

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-(\lambda+i\omega_0)t}e^{i\omega t}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\lambda+i(\omega_0-\omega)}$$

↓ Wkt, die Energie eines Teilchen mit $E=\hbar\omega$ zu messen.

$|A(\omega)|^2$ ↗ Lorentzkurve.

$$|A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\lambda^2}}.$$

↳ Breite direkt mit der Lebensdauer verknüpft. (Heisenberg Unschärferelation $\Delta E\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$)

↳ Lebensdauer wird durch τ repräsentiert

o Metastabiler Zustand

↳ Energie $\Gamma = \hbar\lambda \Rightarrow \Gamma = \frac{\hbar}{\tau}$ (λ: Dämpfungskonstant)

• Herleitung der Quantenzahlen (Ansatz, Idee des Lösungswegs, Lösung)

o Zeitunabhängige Schrödinger Gl.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi = E\psi$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right)\right] + V\psi = E\psi$$

o Ansatz: $\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,Y(\theta,\varphi)$ und $V = V(r)$

$$\Rightarrow 1)\quad \frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E] = l(l+1)$$ → Separationskonstant.

$$2)\quad \frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2}\right] = -l(l+1)$$ → $\boxed{\text{Nebenquantenzahl } l}$

Lösung: $R(r)$ ⇒ Laguerre Polynomen.

∘ $Y(\theta,\varphi)$ Lösung.

Ansatz: $Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$

⇒ Separationskonstante.

$$\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = -\ell(\ell+1)\sin^2\theta\, Y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Theta}\left[\sin\theta \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right)\right] + \ell(\ell+1)\sin^2\theta = m^2$$

magnetische Quantenzahl

und

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2$$

$$\Rightarrow \Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$$

∘ ↳ Legendre Polynome: $\Theta(\theta) = A\,\underbrace{P_\ell^m(\cos\theta)}$

$$P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} P_\ell(x)$$

$$= (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{|m|} \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell (x^2-1)^\ell$$

∘ Hauptquantenzahl n

↳ Aus Bohr Modell, ~~Drehimpuls~~ Bahndrehimpuls quantisiert.

$$E_n = -\frac{1}{n^2}E_I = -\frac{1}{n^2}\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}$$

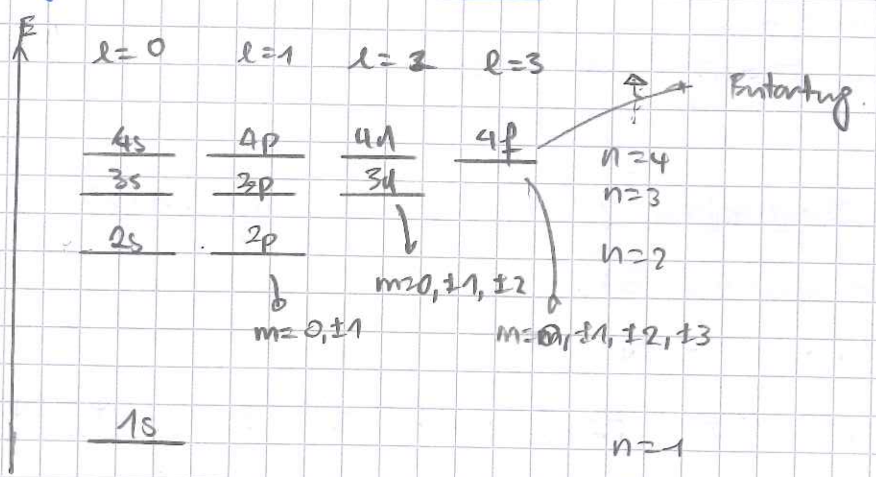
ref: Quantum Mechanics Volume 1 von Claude Cohen-Tannoudji et al.

∘ n: Energieniveau

ℓ: räumliche Verteilung der Ladungsdichte

m: räumliche Orientierung des Elektron-Bahndrehimpulses

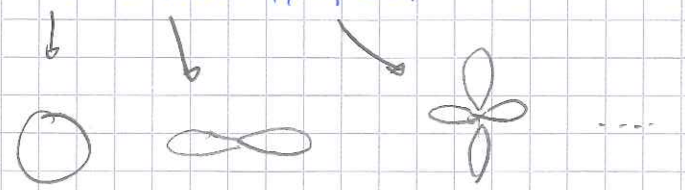
• <u>Energieschema des Wasserstoffatoms.</u>



Orbitale und spektroskopische Notation

Orbitale: Wahrscheinlichkeitsverteilung.

↳ 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, ...



s: sharp
p: principal
d: diffuse
f: fundamental

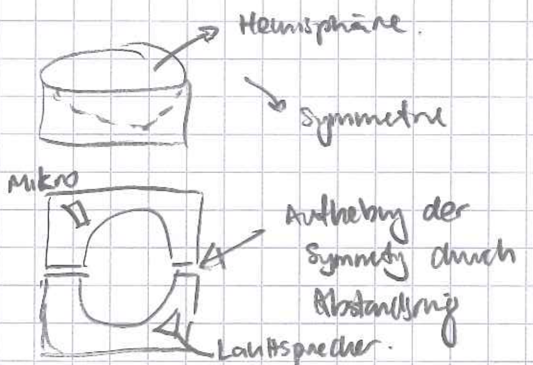
Spektroskopische Notation: Konfiguration, Term

$$^{(2S+1)}L_J$$

Multiplizität ← $(2S+1)$; Spin; Bahndrehimpuls; $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ Gesamtdrehimpuls.

$l =$	0	1	2	3	4	5	6
	S	P	D	F	G	H	...

Akustischer Resonator (Hemisphäre)



$\alpha \in [0°, 180°]$

↳ Rotation der oberen Hemisphäre in Bezug auf eine vertikale Achse zur Unteren.

$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\right)$, $\theta \in [90°, 180°]$

(Frage: wie/warum funktioniert das?)

Symmetrie ⇒ l untersuchen

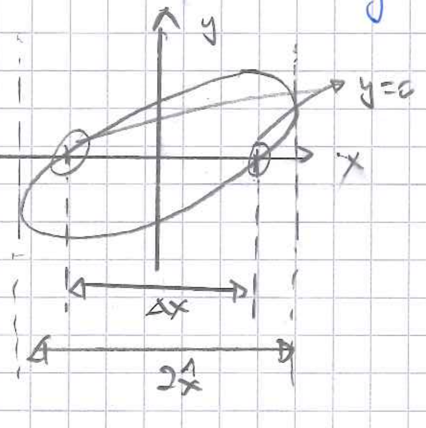
Sym. ~~Aufheben~~ aufheben ⇒ m untersuchen.

Alle Winkel können durch Rotation erfasst werden.

Phasendifferenz zweier sinus-förmiger Signale am Osz ~~gemessen~~ messen

- Lissajous-Ellipse

$$\left.\begin{aligned} x &= \hat{x}\cos(\omega t) \\ y &= \hat{y}\cos(\omega t - \varphi) \end{aligned}\right\} \text{Überlagerung}$$



$\sin\varphi = \pm \frac{|\Delta x|}{2\hat{x}}$ (Ref: P2 OSZ)

⇓

$\varphi \in [-180°, 180°]$ 4 Möglichkeiten

$\varphi > 0$ ⇒ Punkt ~~wandert~~ gegen Uhrzeigersinn.

$\varphi < 0$ ⇒ " " im Uhrzeigersinn.

↗ $\varphi \in [0°, 90°]$, ↖ $\varphi \in [90°, 180°]$