C3 Partielle Ableitungen

C3a

Betrachte $\quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (Skalarfeld)

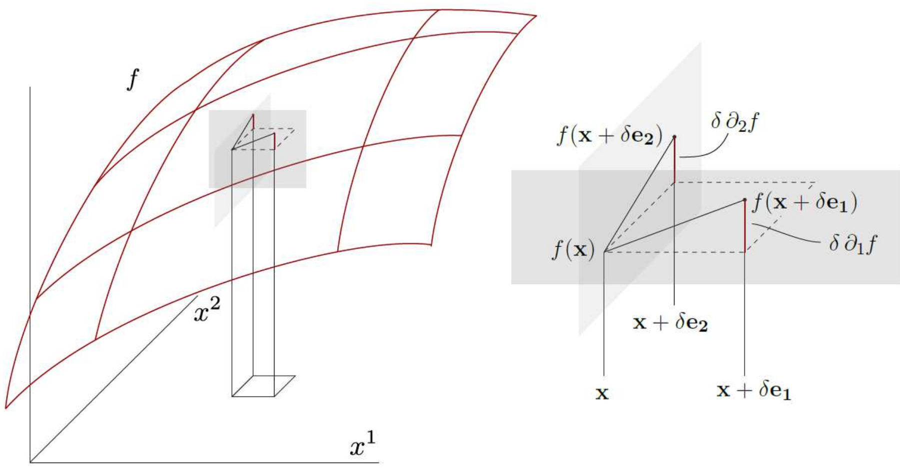
$\qquad\quad x \longmapsto f(x)$ (1)

Beispiel für d=3, mit

$\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)^T = (\quad , \quad , \quad)^T \qquad f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} = \sqrt{\qquad\qquad} = r$

C3.1 Partielle Ableitung:

wie ändert sich $f(\vec{x})$ als Funktion v. nur einer der Variablen, , wenn die anderen Variablen festgeh werden?



C3b

Wie ändert sich $f(\vec{x})$ als Funktion v. nur einer der Variablen, ?

Definition: 'Partielle Ableitung von f am Punkt $\vec{x}$, nach ':

$$\equiv \lim \left[f(x^1, \ldots, x^i \quad , \ldots, x^n) - f(x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n) \right] \qquad (1)$$

nur x^i ändert sich, um δ

In Vektornotation: $\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x} \equiv \lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{1}{\delta} \left[f(\vec{x} \qquad) - f(\vec{x}) \right]$ (2)

Lineare Näherung: $f(\vec{x} \qquad) = f(\vec{x})$ (2')

Alternative Notationen: $\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \equiv \quad f(\vec{x}) \equiv \qquad f(\vec{x}) \equiv$ eher unüblich $f(\vec{x})$ (3)

Lieblingsnotation

Merkregel: Index oben 'im Nenner der Ableitung' = Index unten in Kurznotation für Ableitung

Beispiele:

$\partial_y \left(\overbrace{x \cos(y)} \right) =$ (4)

$\partial_{x^1} \left(e^{3x^1} \sin(x^2) \right) =$ (5)

[Index, nicht Potenz!]

$\partial_z \left(e^{3x^1} \sin(x^2) \right) =$ (6)

C3.2 Mehrfache partielle Ableitungen (rekursive Definition)

C3c

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x}) \qquad (1)$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x})\right)\dots\right)} \equiv \frac{\partial}{\partial (x^i)} f(\vec{x}) \equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x}) \qquad (2)$$

Gemischte partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_{x^i} f(\vec{x}) \equiv \partial_i f(\vec{x}) \equiv f(\vec{x}) \equiv f_{,i}(\vec{x}) \qquad (3)$$

Beispiel v. Seite C3a:

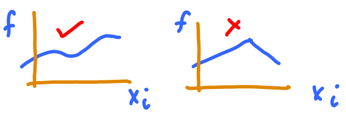
$$\partial_1 \left(e^{3x^1} \sin(x^2)\right) = 3e^{3x^1} \sin(x^2) = 3e^{3x^1} \qquad (4)$$

gleich!

$$\partial_2 \left(e^{3x^1} \sin(x^2)\right) = e^{3x^1} \cos(x^2) = \cos(x^2) \qquad (5)$$

(falls f stetige Ableitungen bis mindestens zur 2.ten Ordnung besitzt)

Satz v. Schwarz: Für hinreichend glatte Funktionen sind part. Ableitungen vertauschbar:



$$f(\vec{x}) \qquad f(\vec{x}) \qquad (6)$$

C3.3 Gleichzeitige Änderung aller Variablen

C3d

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mapsto$ (1)

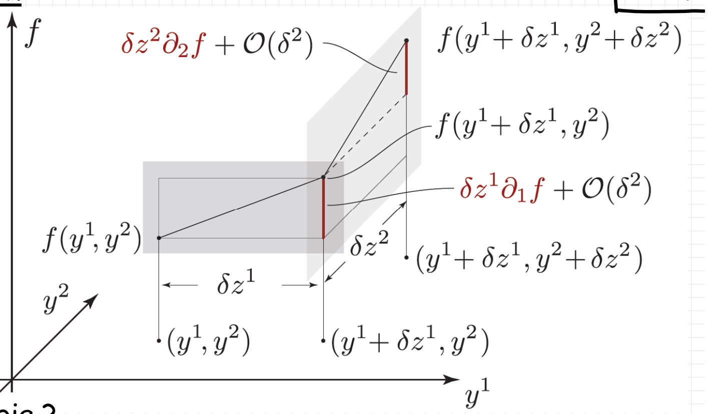
Wie ändert sich eine Funktion $f(\vec{y})$

an einem gegebenen Punkt

wenn sich beide Argumente gleichzeitig

ändern, von $\vec{y}$ nach $\vec{y}$

mit klein und $\vec{z} = (\; , \;)^T$ beliebig ?



Es gilt: $f(\vec{y} + \quad) - f(\vec{y}) = \qquad + \qquad = \sum_{j=1}^{2}$ (2)

(Begründung: Seite C3e)

Verallgemeinerung: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \mapsto$ gilt: (3)

$$\boxed{\lim \left[f(\vec{y} + \quad) - f(\vec{y}) \right] = \sum_{i=1} \qquad = \qquad} \qquad (4)$$

kovariante Notation

Merke: linear in z !

Begründung für (d.4):

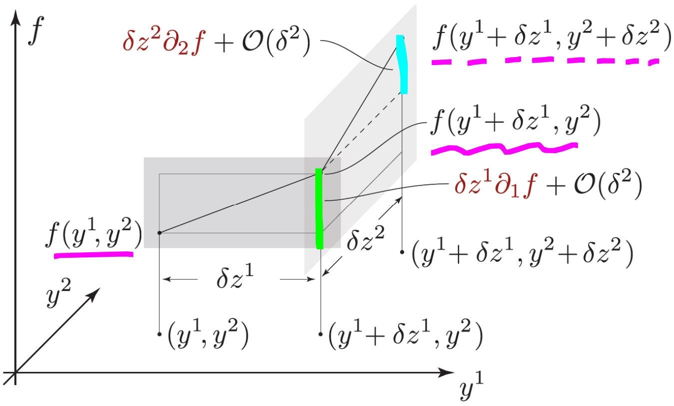
V3d

explizit für $d = 2$:

$$\vec{y} = (y^1, y^2)^T \qquad (1)$$

$$\vec{z} = (z^1, z^2)^T \qquad (2)$$

$$\left[f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y}) \right] = ? \qquad (3)$$



subtrahiere und addiere dieselbe Größe

$$[\ ] \overset{(2)}{=} f(\quad , \quad) - f(\quad , \quad) + f(\quad , \quad) - f(\quad , \quad) \qquad (4)$$

$$\simeq f(\quad , \quad) + f(\quad , \quad) \qquad (5)$$

$$\simeq [\quad + \quad]$$

vernachlässigbar, weil v. Ordnung

(5) in (3): $\left[f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y}) \right] = [\quad + \quad]$ = (d.4) für n=2

Analog folgt (d.4) für beliebiges n

Beispiel für (d.4)

C3f

$$f(\vec{y}) = f(y^1, y^2) = (y^1 + 3y^2)^2 \qquad (1)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left[f(\vec{y} + \delta \vec{z}) - f(\vec{y}) \right] \overset{(d.4)}{=} \quad + \quad \qquad (2)$$

$$= \quad + \quad \qquad (3)$$

Explizite Rechnung ist aufwendig... :

$$f(y^1, y^2) = (y^1)^2 + 6y^1y^2 + 9(y^2)^2 \qquad (4)$$

$$f(y^1 + \delta z^1, y^2 + \delta z^2) = (y^1 + \delta z^1)^2 + 6(y^1 + \delta z^1)(y^2 + \delta z^2) + 9(y^2 + \delta z^2)^2 \qquad (5)$$

$$= (y^1)^2 + 2y^1 \delta z^1 + (\delta z^1)^2 + 6\left[y^1 y^2 + y^1 \delta z^2 + \delta z^1 y^2\right] + 9(y^2)^2 + 18 y^2 \delta z^2 + 9(\delta z^2)^2 \qquad (6)$$

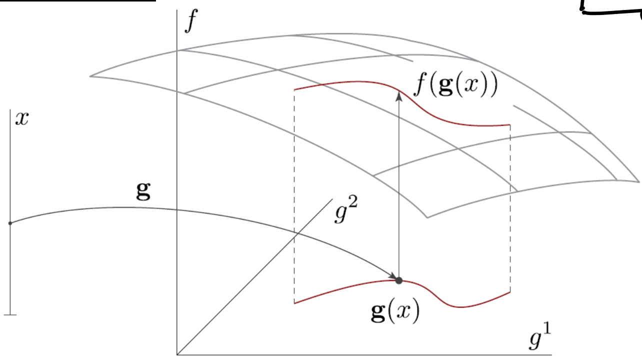
$$= (y^1)^2 + 6y^1y^2 + 9(y^2)^2 + \delta\left[2y^1z^1 + 6y^1z^2 + 6y^2z^1 + 18y^2z^2\right] + \mathcal{O}(\delta^2) \qquad (7)$$

$$= f(y^1, y^2) + \delta\left[2(y^1 + 3y^2)z^1 + 6(y^1 + 3y^2)z^2\right] + \mathcal{O}(\delta^2) \qquad (8)$$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\left[f(y^1 + \delta z^1, y^2 + \delta z^2) - f(y^1, y^2)\right] = 2(y^1 + 3y^2)z^1 + 6(y^1 + 3y^2)z^2 = (3) \qquad (9)$$

C3.3 Kettenregel für Funktion von mehreren Variablen

C3g



Betrachte:

$f: \quad \rightarrow \quad , \quad \mapsto \quad =$ In Skizze: d=2 (1)

$\vec{g}: \quad \rightarrow \quad , \quad \mapsto \quad =$ (2)

$f \circ \vec{g}: \quad \rightarrow \quad , \quad \mapsto \quad =$ (3)

Dann gilt: $\boxed{\dfrac{d\, f(\vec{g}(x))}{dx} = \qquad}$ wie normale Kettenregel, aber summiert über j (4)

(Steigung von mit) = (Steigung von mit) mal (Steigung von mit)

Begründung von Kettenregel (g.4)

C3h

$$\frac{d\, f(\vec{g}(x))}{dx} = \lim \quad \left[f(\vec{g}(x \quad) - f(\vec{g}(x)) \right] = ? \quad (1)$$

Für jede Komponente von $\vec{g}$ gilt: $g^j(x \quad) \overset{(C1b.3)}{=} g^j(x) \quad \underbrace{\qquad}_{=}$ Mutter aller Ableitungen! (2)

Vektornotation: $\vec{g}(x \quad) = \vec{g}(x) + \quad \underbrace{\qquad} = (g^1(x), \dots, g^d(x))^T$ (3)

$$\frac{d\, f(\vec{g}(x))}{dx} \overset{(3)\text{ in }(1)}{=} \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \left[f(\qquad) - f(\vec{g}(x)) \right] = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta} \left[f(\qquad) - f(\quad) \right] \quad (4)$$

Schreibe: $\vec{g}(x) = \qquad , \quad d_x \vec{g}(x) =$ (5)

Verwende nun (d.4):

$$\frac{d\, f(\vec{g}(x))}{dx} \overset{(d.4)}{=} \sum_{j=1}^{d} \qquad \overset{(5)}{=} \sum_{j=1}^{d} \qquad (6)$$

□

Beispiel: Teilchentrajektorie in Raum mit ortsabhängiger Temperatur

C3i

Temperatur: $T = T(\vec{r})$ Trajektorie: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (1)

Wie ändert sich die vom Teilchen entlang der Trajektorie empfundene Temperatur als Funktion der Zeit? $\frac{dT(\vec{r}(t))}{dt} =$ (2)

Verallgemeinerung I:

Betrachte: $\vec{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m, \quad \vec{y} \mapsto \vec{f}(\vec{y}) = (f^1(\vec{y}), \dots, f^m(\vec{y}))$ (3)

$\vec{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d, \quad x \mapsto \vec{g}(x) = (g^1(x), \dots, g^d(x))$ (4)

$\vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \vec{f}(\vec{g}(x)) = (f^1(\vec{g}(x)), \dots, f^m(\vec{g}(x)))$ (5)

Dann gilt (g.4) für jede Komponente getrennt:

$$\boxed{\frac{d f^i(\vec{g}(x))}{dx} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f^i(\vec{g}(x))}{\partial g^j} \frac{d g^j(x)}{dx}}$$

$i = 1, \dots, m$ wie normale Kettenregel, aber summiert über j (6)

Verallgemeinerung II:

C3j

Betrachte: $\vec{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m, \quad \vec{y} \mapsto \vec{f}(\vec{y}) = (f^1(\vec{y}), \dots, f^m(\vec{y}))$ (1)

$\vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d, \quad \vec{x} \mapsto \vec{g}(\vec{x}) = (g^1(\vec{x}), \dots, g^d(\vec{x}))$ (2)

$\vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) = (f^1(\vec{g}(\vec{x})), \dots, f^m(\vec{g}(\vec{x})))$ (3)

Dann gilt (i.6) bei partieller Ableitung nach $x^k, \; k = 1, \dots, n$ für jedes i und k getrennt:

$$\boxed{\frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f^i(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial g^j} \frac{\partial g^j(\vec{x})}{\partial x^k}}$$

$i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$ wie normale Kettenregel, aber summiert über j (4)

Beispiel: Leistung von Turbomotor

Sei Leistung: $W = W(T, P)$ Temperatur: $T = T(\kappa, V)$ Druck: $P = P(\kappa, V)$ (5)

Treibstoffinjektionsrate Volumen

Leistungsoptimum bei:

$$0 = \partial_\kappa W = \partial_T W \, \partial_\kappa T + \partial_P W \, \partial_\kappa P, \quad 0 = \partial_V W = \partial_T W \, \partial_V T + \partial_P W \, \partial_V P$$ (6)

Beispiel: Geschwindigkeit an Wasseroberfläche

C3k

Betrachte erstens:

$$\vec{g}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \longmapsto \vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g^1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g^d(\vec{x}) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Betrachte zweitens:

$$f: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (m=1)$$

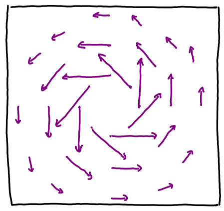
$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^d \end{pmatrix} \longmapsto f(\vec{y}) = f(y^1, \dots, y^d) \qquad (3)$$

Betrachte nun Verkettung v. f und g:

$$f \circ \vec{g}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{x} \longmapsto f(\vec{g}(\vec{x})) = f(g^1(\vec{x}), \dots, g^d(\vec{x})) \qquad (5)$$

Beispiel für g:
Geschwindigkeit an Wasseroberfläche, $\vec{v}$:



$d = 2$
$n = 2$

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} v^1(\vec{x}) \\ v^2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{x^1} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Beispiel für f: Betragsquadrat des Vektors $\vec{y}$:

$$f(\vec{y}) = \|\vec{y}\|^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2 \qquad (4)$$

Beispiel für Verkettung: Betragsquadrat der Wassergeschwindigkeit am Punkt $\vec{x}$:

$$f(\vec{v}(\vec{x})) = \|\vec{v}(\vec{x})\|^2 \qquad (5)$$

$$= (v^1(\vec{x}))^2 + (v^2(\vec{x}))^2$$

$$= \frac{1}{(x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \qquad (6)$$

Forts. Beispiel: Wie ändert sich Geschwindigkeit an Wasseroberfläche mit x^1 ?

C3l

$$\partial_1 f(\vec{v}(\vec{x})) \overset{(k.6)}{=} \partial_1 \left[\frac{1}{(x^2)^2} + \frac{1}{(x^1)^2} \right] = \left[0 + \frac{-2}{(x^1)^3} \cdot 1 \right] = -\frac{2}{(x^1)^3} \qquad (1)$$

Nochmal, nun mit der allgemeinen Kettenregel für partielle Ableitungen gerechnet:

$$f(\vec{y}) \overset{(k.4)}{=} (y^1)^2 + (y^2)^2, \qquad (2a) \qquad \vec{v}(\vec{x}) \overset{(C3c.2)}{=} \left(-\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^1}\right)^T \qquad (2b)$$

$$\partial_1 f(\vec{v}(\vec{x})) \overset{(j.4)}{=} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^j}\bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \cdot \frac{\partial v^j(\vec{x})}{\partial x^1} \qquad (3)$$

$$= \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^1}\bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial v^1(\vec{x})}{\partial x^1} + \frac{\partial f(\vec{y})}{\partial y^2}\bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial v^2(\vec{x})}{\partial x^1} \qquad (4)$$

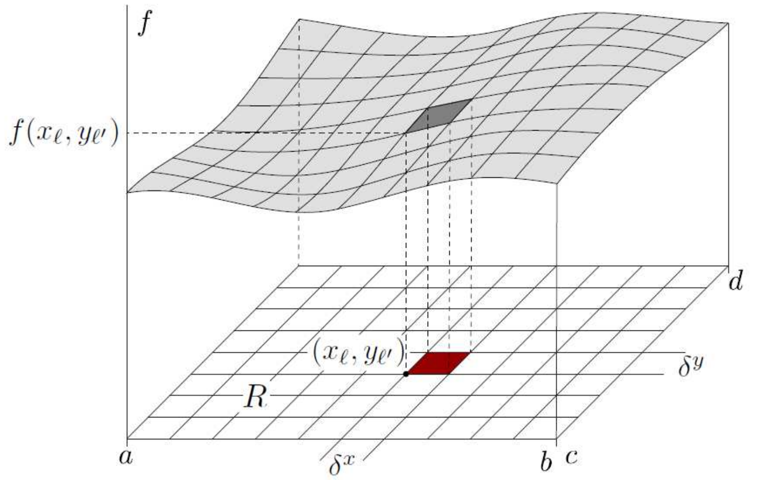
$$= \frac{\partial}{\partial y^1}\Big(\overbrace{(y^1)^2 + (y^2)^2}^{(2a)}\Big)\bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\overbrace{-\frac{1}{x^2}}^{(2b)}\Big)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial y^2}\Big(\overbrace{(y^1)^2 + (y^2)^2}^{(2a)}\Big)\bigg|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\overbrace{\frac{1}{x^1}}^{(2b)}\Big) \qquad (5)$$

$$= 2y^2\Big|_{\vec{y}=\vec{v}(\vec{x})} \cdot \left(\frac{-1}{(x^1)^2}\right) = 2\, v^2(\vec{x})\left(\frac{-1}{(x^1)^2}\right) = 2\,\frac{1}{x^1}\left(-\frac{1}{(x^1)^2}\right) = -\frac{2}{(x^1)^3} \ \checkmark \qquad (6)$$

C4 Mehrdimensionale Integration (kartesisch)

C4a

C4.1 2D Integration über Rechteck



$$f : [\ ,\ ] \times [\ ,\ ] \to$$

$$(\ ,\ ) \mapsto$$

Diskretisierungschritte:

$\delta^x =$, $\delta^y =$

Volumen $\simeq \sum \sum f(x\ ,\ y\ )$

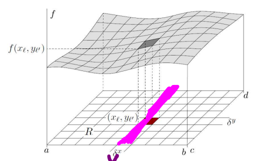
(Riemann-Summe)

Def. v 2D-Integral: $\lim \quad \delta^x \delta^y \sum_\ell \sum_{\ell'} f(x_\ell, y_{\ell'}) \equiv \int \quad f(\ ,\ )$

Integrations-Domäne

Fubini's Theorem: Integrationsreihenfolge ist egal

C4b



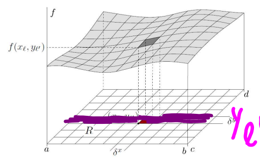
x_ℓ

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} dx\, dy\, f(x,y) = \lim \quad \delta^x \sum_\ell \underbrace{\lim \quad \delta^y \sum_{\ell'} f(\ ,\ )}_{\text{1D-Integral, mit } x_\ell \text{ fest}} \tag{1}$$

$$= \lim_{\delta^x \to 0} \delta^x \sum_\ell \underbrace{f(x_\ell,\ )}_{} = \int_c^d dy\, f(\ , y) \tag{2}$$

Funktion v. x_ℓ,
kann integriert werden

Alternativ:



$y_{\ell'}$

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} dx\, dy\, f(x,y) = \quad \delta^y \sum_{\ell'} \underbrace{\delta^x \sum_\ell f(x_\ell, y_{\ell'})}_{\text{1D-Integral, mit } y_{\ell'} \text{ fest}} \tag{3}$$

$$= \quad \sum_{\ell'} \underbrace{\int_a^b dx\, f(x, y_{\ell'})}_{} = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y) \tag{4}$$

Funktion v. $y_{\ell'}$,
kann integriert werden

Intuitive Begründung:
Zählreihenfolge der Quader in
Zeilen oder Spalten ist egal.

Fubini:

$$\boxed{\int_{[a,b]\times[c,d]} dx\, dy\, f(x,y) = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)} \tag{5}$$

Beispiel

C4c

$$f: [0,2] \times [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = xy + y^2 \qquad (1)$$

$$\int dx \int dy\, f(x,y) = \int dx \int dy\, (\quad + \quad) = \int_0^2 dx\, (x \quad + \quad) \qquad (2)$$

$$= \int_0^2 dx\, (x \quad + \quad) = \left(\tfrac{1}{2} \cdot \quad + \tfrac{1}{3} \quad \right)\Big| = \tfrac{1}{4} \cdot 4 + \tfrac{1}{3} \cdot 2 = \tfrac{5}{3} \qquad (3)$$

Fubini stimmt!

$$\int_0^1 dy \int_0^2 dx\, f(x,y) = \int_0^1 dy \int_0^2 dx\, (xy + y^2) = \int_0^1 dy \left(\tfrac{1}{2} x^2 y + x y^2\right)\Big|_0^2 \qquad (4)$$

$$= \int_0^1 dy \left(\tfrac{1}{2} \cdot 4 y + 2 y^2\right) = \left(2 \cdot \tfrac{1}{2} y^2 + 2 \tfrac{1}{3} \cdot y^3\right)\Big|_0^1 = 1 \cdot 1 + \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{3} \qquad (5)$$

Analog in 3D:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} dx\, dy\, dz\, f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\, f(x,y,z) \qquad (6)$$

Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig

Integration über allgemeiner Domänen

C4d

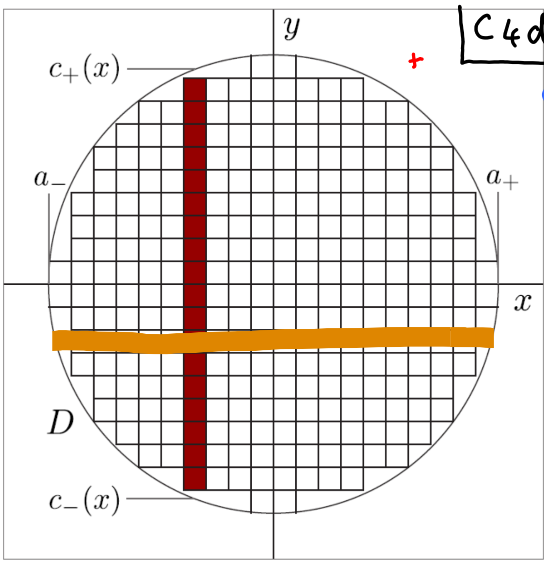
Riemann-Summe:

$$\simeq \delta^x \sum_{x_\ell} \quad \cdot \quad \delta y \sum_{y_{\ell'}} f(x_\ell, y_{\ell'}) \qquad (1)$$

Integral v. Funktion $f(x,y)$ über d. Fläche:

$$\int \quad f(\, , \,) \equiv \int \quad \left[\int \quad f(x,y) \right]$$

$$\overset{\text{nach Fubini}}{=} \int \quad \left[\int \quad f(x,y) \right]$$

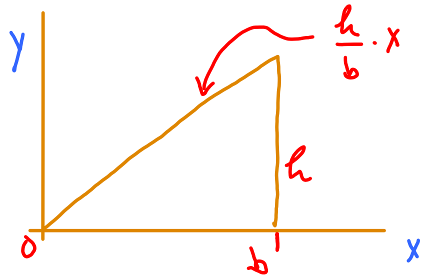


Für das "innere" (zweite) Integral sind die Grenzen abhängig von der "äußeren" (ersten) Integrationsvariable.

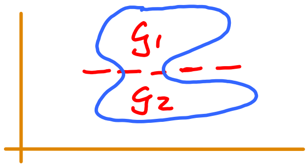
Fläche v.Dreieck:

$$F = \int \quad \int \quad = \int_0^b dx \qquad (3)$$

$$= \int_0^b dx \quad = \frac{h}{b} \quad = \qquad (4)$$



Bemerkung: $c_\pm(x)$ bzw. $a_\pm(y)$ müssen eindeutige Funktionen sein; falls nicht, hilft Unterteilung des Integrals in mehrere Teile:



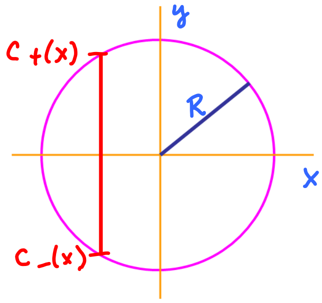
Beispiel: Kreisfläche

$$A \overset{(d.2)}{=} \int dx \int dy \qquad (3)$$

$x^2+y^2=R^2$ (1)

$y_\pm = \pm\sqrt{R^2-x^2}$ (2)

$$= \int_{-R}^{R} dx \qquad \overset{(2)}{=} \int_{-R}^{R} dx \qquad (4)$$



Substition: $x = R\cos t$ Grenzen: $R = R\cos(0)$ (5)

Maß: $\frac{dx}{\cancel{dt}} = -R\sin t \cdot dt$ $\qquad -R = R\cos(\pi)$

$$A \overset{(2)}{=} -2\int_\pi^0 dt\,(R\sin t)\underbrace{\sqrt{R^2-R^2\cos^2 t}}_{R\sqrt{1-\cos^2 t}\,=\,R\sin t} \qquad (6)$$

$$R\sqrt{1-\cos^2 t} = R\sin t \qquad (7)$$

$$= 2R^2 \underbrace{\int_0^\pi dt\, \overset{u}{\sin^2 t}\cdot \overset{v'}{1}}_{\pi/2} = \pi R^2 \qquad (8)$$

part. Int.

□

Integration in d Dimensionen, $\mathbb{R}^d$

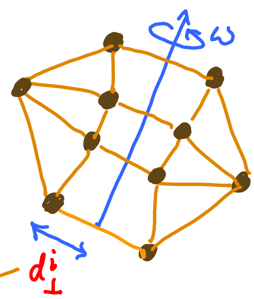
analog zu $\mathbb{R}^2$: Hintereinanderausführen von d eindimensionalen Integralen, Reihenfolge egal

d=3: Volumenintegrale $\int_G dV f(\vec{r}) = \int \qquad f \qquad)$ (1)

Beispiel: Trägheitsmoment eines homogenen Würfels

'Trägheits-moment': $I = \sum_i m_i (d_\perp^i)^2$

Senkrechter Abstand von Masse i zur Drehachse



Starrer Körper von Massenpunkten

Kontinuumslimes:

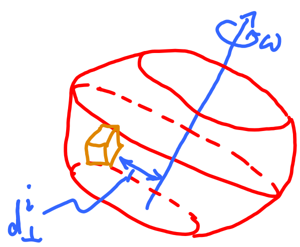
(sehr viele, dicht gepackte Massenpunkte)

$$I = \sum_i \underbrace{m_i}\,(d_\perp^i)^2 \qquad (2)$$

Volumenelement

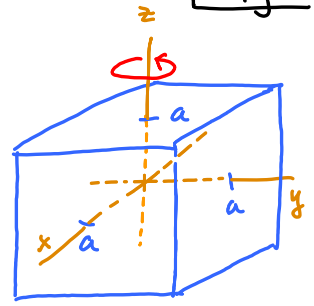
$$= \qquad (3)$$

Massendichte



Für einen homogenen Würfel sind kartesische Koordinaten geschickt: C4g

$$G = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad |x| \quad , \quad |y| \quad , \quad |z| \quad \} \qquad (1)$$



Massendichte: $\rho(\vec r) = \qquad = $ konstant $\equiv$ (2)

z-Achse sei Drehachse: $d^2 =$ (3)

Trägheitsmoment: $I \overset{(13.3)}{=} \int dx \int dy \int dz \quad \overbrace{\qquad}^{d^2}$ (4)

Seitenlänge: $2a$

integriere z: $= \rho_0 \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy \qquad (x^2 + y^2)$ (5)

integriere y: $= \rho_0 \, 2a \int_{-a}^{a} dx \quad \underbrace{(\; x^2 \qquad)}$ (6)

integriere x: $= \rho_0 (2a) \left[2a \quad + \frac{2}{3} a^3 \right] = \overset{(2)}{\rho_0 a^5}$ (7)

$I =$ (8)

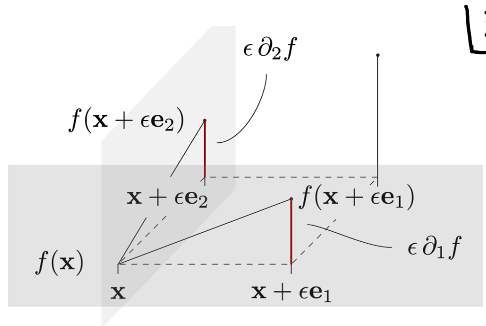
Zusammenfassung C3: Partielle Ableitungen

ZC3

Partielle Ableitung: $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f(\vec x)}{\partial x^i} \equiv \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \left[f(\vec x + \delta \hat e_i) - f(\vec x) \right] \qquad (1)$$

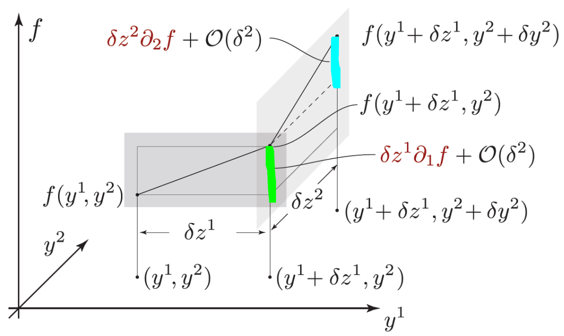
$$\equiv \partial_{x^i} f(\vec x) \equiv \partial_i f(\vec x) \qquad (2)$$



Satz v. Schwarz: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ (3)

$$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad \vec y \longmapsto f(\vec y)$$

$$\lim \frac{1}{\delta} \left[f(\vec y + \delta \vec z) - f(\vec y) \right] = \partial_j f(\vec y) \, z^j \qquad (4)$$



$$\vec g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d, \quad \vec f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m, \qquad \vec f \circ \vec g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Allgemeine Kettenregel:

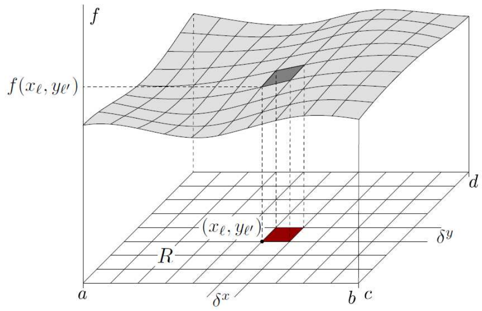
$$\frac{\partial f^i(\vec g(\vec x))}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f^i(\vec g(\vec x))}{\partial g^j} \, \frac{\partial g^j(\vec x)}{\partial x^k} \qquad i = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, n \qquad (5)$$

Zusammenfassung: C4 Mehrdimensionale Integration (Kartesisch)

ZC4a

Integration in $\mathbb{R}^2$

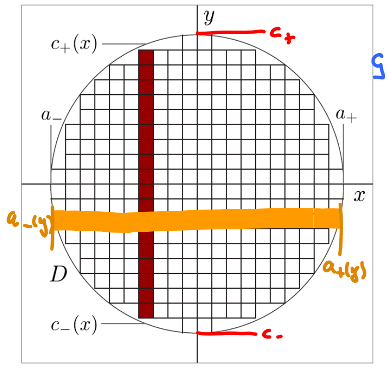
$$\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \equiv \lim_{\delta^x, \delta^y \to \infty} \delta^x \delta^y \sum_{\ell} \sum_{\ell'} f(x_\ell, y_{\ell'})$$



Fubini: Integrationsreihenfolge ist egal:

$$\int_a^b dx \int_{y_-(x)}^{y_+(x)} dy\, f(x,y) = \int_{y_a}^{y_b} dy \int_{x_-(y)}^{x_+(y)} dx\, f(x,y)$$

Für das "innere" (zweite) Integral sind die Grenzen abhängig von der "äußeren"



Analog in 3D: $$\int_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} dx\, dy\, dz\, f(x,y,z) = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\, f(x,y,z)$$

Reihenfolge dieser Integrale ist beliebig