1 线性代数工具

矩阵求逆

Schmidt 正交化

Vandemonde 行列式

2 矩阵分解

Schur

方阵 $A = UTU^H$，当 $A^H A = AA^H$（正规）时有 $A = U\Lambda U^H$。标准型对角线元素为 A全部特征值。证明基本思路为取单位特征向量构造酉阵，此后计算并归纳。

Jordan

方阵 $A = PJP^{-1}$，算法为:

1. 求 A的特征多项式，得到特征值
2. 求 A的最小多项式 $\prod(\lambda_i - A)^{\beta_i}$，$\beta_i$为 λ_i对应最大 Jordan 块大小
3. 对于每个特征值，求 $rank((\lambda_i I - A)^k)$，$k = 1 \dots \beta_i$。计算 $n_k = nullity(\lambda_i I - A)^k$，$n_1$为属于 λ_i的 Jordan 块总数，$n_{k+1} - n_k$为尺寸不小于 k的 Jordan 块个数。原因是 $(\lambda I - J)^i$与 $(\lambda I - A)^i$相似，秩相等，而对于 $(\lambda I - J)$每自乘一次，当前幂次阶以上的 Jordan 块就会多一个全零行。
4. 求变换矩阵 P

SVD

$A^{m\times n} = U_m \begin{pmatrix} \Sigma^{r\times r} & O \\ O & O \end{pmatrix} V_n^H, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}$，奇异值 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \neq 0$，$\lambda_i$是 $A^H A$的非零特征值，编号根据值降序排列。证明时先构造 V，由于 $A^H A$正规，Schur 得 $V^H A^H AV = diag(\Sigma^2, O_{n-r})$。竖切 $V = (V_1^{n\times r}, V_2^{n\times(n-r)})$，代入 Schur 计算有 V_1, V_2与 A, Σ的关系。取 $U_1^{m\times r} = AV_1\Sigma^{-1}$，满足 $U_1^H U_1 = I_r$，因此 U_1各列向量标准正交。将 U_1增补为 $U^{m\times m}$即为所需的 U，可代入 SVD 分解式验证。

极分解

方阵 $A = P\tilde{U}$，其中

满秩分解

QR 分解

3 矩阵分解相关

Sylvester 降幂公式

对于 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times m}, m \geq n$，有 $\det(\lambda I_m - AB) = \lambda^{m-n} \det(\lambda I_n - BA)$。结合满秩分解可以用于降阶计算高阶特征多项式。证明需要注意到

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & O \\ A & AB \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} BA & BAB \\ A & AB \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} BA & O \\ A & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix}\end{aligned}$$

再计算由此导出相似矩阵的特征多项式。

Carley-Hamilton 定理

对于 n阶方阵 A，其特征多项式 $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$是它的一个零化多项式。使用 Schur 或 Jordan 将 A化为上三角矩阵后计算可证。

最小多项式

次数最低的首一零化多项式。是所有零化多项式的因子，这一点可使用多项式整除求余证明。

广义特征向量

典型正规矩阵

奇异向量

SVD 变形有 $AV = U\begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}$，竖切 $U = (\eta_1 \dots \eta_m), V = (\xi_1 \dots \xi_n)$后展开计算，于是 $A\xi_i = \eta_i\sigma_i, 1 \leq i \leq r$，称 ξ_i为右奇异向量，η_i为左奇异向量。此外 $A\xi_i = O, r \leq i \leq n$。

基于 SVD 的矩阵压缩

对 SVD 分解式竖切 U，横切 V^H有 $A = (\eta_1 \dots \eta_m)\begin{pmatrix} \Sigma & O \\ O & O \end{pmatrix}(\xi_1^H \dots \xi_n^H)^T$，展开得 $A = \sum_{i=1}^{r} \eta_i\sigma_i\xi_i^H$，故大奇异值项是主要成分。

4 杂项

数列

广义逆（m-p 逆，伪逆）

$G = A^\dagger$满足

(1) $AGA = A$	(2) $GAG = G$
(3) $(AG)^H = AG$	(4) $(GA)^H = GA$

满足第 $i, j, \dots$条记作 $A^{\{i,j,\dots\}}$。使用 SVD 可得到 $A =$，$A^\dagger =$

广义逆的满秩分解算法