矩阵分析 Cheatsheet 1/2

1 线性代数工具

矩阵求逆

$\det(A)A^{-1} = A^* = ((-1)^{i+j}a_{ji})$

Schmidt 正交化

$y_1 = x_1$，令 $y_2 = x_2 + \lambda_{21}y_1, \langle y_2, y_1\rangle = 0$求解 y_2，$y_3 = x_3 + \lambda_{31}y_1 + \lambda_{32}y_2, \langle y_3, y_1\rangle = \langle y_3, y_2\rangle = 0$求解 y_3，以此类推。

Vandemonde 行列式

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

2 空间与变换

线性空间

对 $V, +, \cdot$，在

1. $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$
2. $\alpha+\beta = \beta+\gamma$
3. $\exists\theta\forall\alpha, \alpha+\theta = \alpha$
4. $\forall\alpha\exists\gamma, \alpha+\gamma = \theta$
5. $(\alpha\cdot k_1)\cdot k_2 = \alpha\cdot(k_1k_2)$
6. $\alpha\cdot(k_1+k_2) = \alpha\cdot k_1 + \alpha\cdot k_2$
7. $(\alpha_1+\alpha_2)\cdot k = \alpha_1\cdot k + \alpha_2\cdot k$
8. $\alpha\cdot 1 = \alpha$

中满足前四条的 $\langle V, +\rangle$为交换群，满足全部的 $\langle V, +, \cdot\rangle$为线性空间。

维数、基底与坐标

$\forall\beta \in V, \exists! k_1 \ldots k_n \in F, \beta = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i k_i$ 表示 n维空间 V下 β在基底 $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$下的坐标为 $(k_1 \ldots k_n)^T$。如 $V = \mathbb{R}^{2\times 3}, F = \mathbb{R}$的一组基底是将 2×3零矩阵逐个元素代入 1 得到的六个矩阵，按照 $\beta = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)(k_1 \ldots k_n)^T$计算时可先将矩阵拉直为列向量。

换基底

$(\alpha_1 \ldots \alpha_n)P = (\beta_1 \ldots \beta_n)$中 P为基 (α_i)到 (β_i)的过渡矩阵。于是 $\beta = (\alpha_i)X = (\beta_i)Y = (\alpha_i)PX$导出 $X = PY$。

内积空间

对线性空间 $\langle V, +, \cdot\rangle$和运算 $\langle , \rangle$满足

1. $\langle\beta, \alpha\rangle = \overline{\langle\alpha, \beta\rangle}$
2. $\langle\alpha, \alpha\rangle \ge 0$当且仅当 $\alpha = \theta$时取等
3. $\langle\alpha, \beta_1k_1 + \beta_2k_2\rangle = \langle\alpha, \beta_1\rangle k_1 + \langle\alpha, \beta_2\rangle k_2$

时 $\langle , \rangle$为内积，$\langle V, +, \cdot, \langle , \rangle\rangle$为内积空间。注意 $\langle\beta_1k_1 + \beta_2k_2, \alpha\rangle = \langle\beta_1\alpha\rangle\overline{k_1} + \langle\beta_2\alpha\rangle\overline{k_2}$。

3 矩阵分解

Schur

方阵 $A = UTU^H$，当 $A^HA = AA^H$（正规）时有 $A = U\Lambda U^H$。标准型对角线元素为 A全部特征值。证明基本思路为取单位特征向量构造酉阵，此后计算并归纳。正规矩阵的 Schur 求法：求出所有特征向量并标准正交化得到 U。

Jordan

方阵 $A = PJP^{-1}$，算法为:

1. 求 A的特征多项式，得到特征值
2. 求 A的最小多项式 $\prod(\lambda_i - A)^{\beta_i}$，$\beta_i$为 λ_i对应最大 Jordan 块大小
3. 对于每个特征值，求 $rank((\lambda_iI - A)^k)$，$k = 1 \ldots \beta_i$。计算 $n_k = nullity(\lambda_iI - A)^k$，$n_1$为属于 λ_i的 Jordan 块总数，$n_{k+1} - n_k$为尺寸不小于 k的 Jordan 块个数。原因是 $(\lambda I - J)^i$与 $(\lambda I - A)^i$相似，秩相等，而对于 $(\lambda I - J)$每自乘一次，当前幂次阶以上的 Jordan 块就会多一个全零行。
4. 求变换矩阵 P

SVD

$A^{m\times n} = U_m\begin{pmatrix}\Sigma^{r\times r} & O \\ O & O\end{pmatrix}V_n^H, \Sigma = \begin{pmatrix}\sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r\end{pmatrix}$，奇异值 $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \ne 0$，$\lambda_i$是 A^HA的非零特征值，编号根据值降序排列。证明时先构造 V，由于 A^HA正规，Schur 得 $V^HA^HAV = diag(\Sigma^2, O_{n-r})$。竖切 $V = (V_1^{n\times r}, V_2^{n\times(n-r)})$，代入 Schur 计算有 V_1, V_2与 A, Σ的关系。取 $U_1^{m\times r} = AV_1\Sigma^{-1}$，满足 $U_1^HU_1 = I_r$，因此 U_1各列向量标准正交。将 U_1增补为 $U^{m\times m}$即为所需的 U，可代入 SVD 验证。

极分解

方阵 $A = P\tilde{U} = U\tilde{Q}$, 其中 P, QHermite 半正定。从 SVD 开始配凑中间的 I为酉阵与其共轭转置乘积得到。一阶时为 $x = re^{i\theta}$。

满秩分解

QR 分解

LR 分解

$A = P\begin{pmatrix}I_r & O \\ O & O\end{pmatrix}Q = P\begin{pmatrix}I_r \\ O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & O\end{pmatrix}Q = LR$

4 矩阵分解相关

Sylvester 降幂公式

对于 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times m}, m \ge n$，有 $\det(\lambda I_m - AB) = \lambda^{m-n}\det(\lambda I_n - BA)$。结合满秩分解可以用于降阶计算高阶特征多项式。证明需要注意到

$$\begin{pmatrix}I & B \\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O & O \\ A & AB\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}BA & BAB \\ A & AB\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}BA & O \\ A & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & B \\ O & I\end{pmatrix}$$

再计算由此导出相似矩阵的特征多项式。

Carley-Hamilton 定理

对于 n阶方阵 A，其特征多项式 $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$是它的一个零化多项式。使用 Schur 或 Jordan 将 A化为上三角矩阵后计算可证。

最小多项式

次数最低的首一零化多项式。是所有零化多项式的因子，这一点可使用多项式整除求余证明。

广义特征向量

相似对角化

方阵可相似对角化等价于其特征向量线性无关，因为 $P^{-1}AP = \Lambda, AP = P\Lambda$，根据特征值定义可证明；亦等价于最小多项式无重根，因为最大 Jordan 块大小为 1。

典型正规矩阵

奇异向量

SVD 变形有 $AV = U\begin{pmatrix}\Sigma & O \\ O & O\end{pmatrix}$，竖切 $U = (\eta_1 \ldots \eta_m), V = (\xi_1 \ldots \xi_n)$后展开计算，于是 $A\xi_i = \eta_i\sigma_i, 1 \le i \le r$，称 ξ_i为右奇异向量，η_i为左奇异向量。此外 $A\xi_i = O, r \le i \le n$。

基于 SVD 的矩阵压缩

对 SVD 分解式竖切 U，横切 V^H有 $A = (\eta_1 \ldots \eta_m)\begin{pmatrix}\Sigma & O \\ O & O\end{pmatrix}(\xi_1^H \ldots \xi_n^H)^T$，展开得 $A = \sum_{i=1}^{r}\eta_i\sigma_i\xi_i^H$，故大奇异值项占主要成分。

5 杂项

数列

广义逆（m-p 逆，伪逆）

$G = A^+$满足

(1) $AGA = A$　　(2) $GAG = G$

(3) $(AG)^H = AG$　　(4) $(GA)^H = GA$

满足第 $i, j, \ldots$ 条记作 $A^{\{i,j,\ldots\}}$。使用 SVD 可得到 $A =$，$A^+ =$

广义逆的满秩分解算法