

炉温曲线

摘 要

在集成电路板等电子产品生产中，需要将安装有各种电子元件的印刷电路板放置在回焊炉中，通过加热，将电子元件自动焊接到电路板上。在这个生产过程中的许多工作是通过实验测试来进行控制和调整的。本文建立了焊接区域的温度变化规律的数学模型，并运用穷举遍历、蒙特卡罗算法、遗传算法等方法来对相关问题进行分析研究。

针对问题一，基于牛顿冷却定律与热平衡机理，对升、降温过程和对流热传导系数 h_c 进行推导和计算，从而建立焊接区域的温度变化规律的数学模型，并依据此模型分析相关因素，进而将题目中给出的数据代入模型，可得出焊接区域中心的温度变化情况，炉温曲线图（如图 4.4.1）。之后进行检验，通过对比模型曲线与附件数据曲线（如图 4.3.1）可以看出，此模型效果良好，为了方便之后的计算，我们利用附件中的数据与相关物理参数找出 h_c 与 T 、 $c \cdot \rho$ 与 T 的函数关系，对模型进行修正，进而对 Pr 、 λ 与 T 采用适当的函数进行拟合并作出函数图像进行检验（如图 4.5.1），分别对各温区之内，附件给出对的 T 与 $c \cdot \rho$ 的对应关系进行数据拟合并作出函数图像进行检验（如图 4.5.2），发现改进后的模型效果良好。

针对问题二，基于简化模型的思想，我们拟采用穷举遍历对问题进行求解。对允许范围内的传送带过炉速度进行遍历，并将相关数据代入问题一的模型，得出不同传送带过炉速度下时间与温度的数据（表 5.3.1）并进行筛选，最终得出符合制程界限的最大传送带过炉速度为 85 cm/min 。

针对问题三，此问为优化问题，优化目标函数为炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小（即： $\min \Delta S$ ），限制条件同问题二，我们首先对目标函数进行数值积分的计算，进而采用蒙特卡罗算法生成初始解（见表 6.3.1），最后采用遗传算法进行求解，得出优化效果较好的 10 个遗传算法解（见表 6.3.2），并选取优化效果最优的结果（见表 6.3.3）。

针对问题四，在问题三的基础上增加了以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线尽量对称的优化目标，约束条件与问题三相同。我们采用蒙特卡罗算法生成初始解（见表 7.3.1），最后采用遗传算法进行求解，得出优化效果较好的 10 个遗传算法解（见表 7.3.2），并选取优化效果最优的结果（见表 7.3.3）。

关键词： 牛顿冷却定律与热平衡机理、对流热传导、蒙特卡罗算法、遗传算法

一. 问题重述

问题 1：需要对焊接区域的温度变化规律建立数学模型。假设传送带过炉速度为 78 cm/min，各温区温度的设定值分别为 173°C（小温区 1~5）、198°C（小温区 6）、230°C（小温区 7）和 257°C（小温区 8~9），得出焊接区域中心的温度变化情况，并列出小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度，基于数据画出相应的炉温曲线，并将每隔 0.5 s 焊接区域中心的温度存放在提供的 *result.csv* 中。

问题 2：假设已知各温区温度的设定值分别为 182°C（小温区 1~5）、203°C（小温区 6）、237°C（小温区 7）、254°C（小温区 8~9），并在不同温度下，确定允许的最大传送带过炉速度。

问题 3：已知在焊接过程中，焊接区域中心的温度超过 217°C 的时间不宜过长，峰值温度也不宜过高。理想的炉温曲线应使超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积（图 2 中阴影部分）最小。在此要求下确定最优炉温曲线，以及各温区的设定温度和传送带的过炉速度，并给出相应的面积。

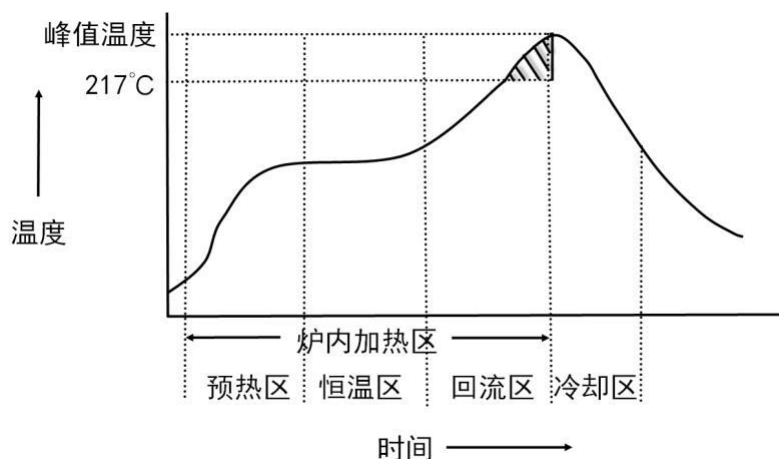


图 1.1 炉温曲线示意图

问题 4：在焊接过程中，除了满足制程界限外，还要以峰值温度为中心线的两侧超过 217°C 的炉温曲线应尽量对称（参见图 1.1）。结合问题 3，进一步给出最优炉温曲线，以及各温区设定的温度及传送带过炉速度，并给出相应的指标值。

二. 模型假设

- 1) 仅考虑热对流对温度的影响，忽略热辐射及热传导的影响；
- 2) 忽略外界温度对各温区的温度影响；
- 3) 假设回焊炉内空气不流动；

三. 通用符号说明

序号	符号	符号说明
1	Φ	传热功率
2	A	传热面积
3	h_c	物质的对流传热系数
4	Nu	表示流体在贴壁处温度梯度大小
5	Re	流动惯性力粘滞力的相对大小的物理量
6	Pr	表示流体动量扩散能力和热量扩散能力的相对大小
7	μ	气体流动速度
8	λ	气体的运动粘滞系数
9	ν	气体的流动粘度

四. 问题一求解

4.1 问题分析

关于问题一，题目要求对焊接区域的温度变化规律建立数学模型，并给出焊接区域的相关温度数据以及炉温曲线图像。本问涉及有关物理传热学方面的专业理论知识，我们基于牛顿冷却定律与热平衡机理，建立了焊接区域的温度变化规律的数学模型，并依据此模型分析相关因素，最后将附件中给出的数据代入模型进行检验，并利用题目中给出的相关参数计算出所需数据。

4.2 模型建立

4.2.1 升温过程的模型推导

当物体表面与周围存在温度差时，单位时间内从单位面积散失的热量与温度差成正比，这种温度高于周围环境的物体向周围媒质传递热量逐渐冷却时所遵循的规律称为牛顿冷却定律^[1]。根据牛顿冷却公式的定义，有

$$\Phi = h_c \cdot A \cdot \Delta T \quad (4.2.1)$$

其中， Φ 为传热功率， A 为传热面积， h_c 为物质的对流传热系数。

我们假定温度低的物质在 dt 时间内吸收的热量为 dQ ，则可得出

$$dQ = h_c \cdot A \cdot \Delta T \cdot dt \quad (4.2.2)$$

由式（4.2.2）以及热量的计算公式^[1]可得出：

$$c \cdot m \cdot dT = h_c \cdot A \cdot \Delta T \cdot dt \quad (4.2.3)$$

其中 c 为物质的比热容， m 为物质质量。

通过对式（4.2.3）进行变形，我们可以得出温度与时间的微分方程^[2]为：

$$c \cdot \rho \cdot x \cdot \frac{dT}{dt} = h_c \cdot (T_{\text{气}} - T) \quad (4.2.4)$$

其中 ρ 为物质的密度， x 为物质的厚度， $T_{\text{气}}$ 为气体温度， T 为物质温度。

我们常利用常微分方程求解相关知识，对式（4.2.4）进行求解，过程如下：

$$\begin{aligned} c \cdot \rho \cdot x \cdot \frac{dT}{dt} &= h_c \cdot (T_{\text{气}} - T) \\ \frac{c \rho x}{h_c} \cdot \frac{dT}{T_{\text{气}} - T} &= dt \\ -\frac{c \rho x}{h_c} \cdot \ln(T_{\text{气}} - T) \Big|_{T_0}^T &= t \Big|_{t_0}^t \\ -\frac{c \rho x}{h_c} \cdot (\ln(T_{\text{气}} - T) - \ln(T_{\text{气}} - T_0)) &= (t - t_0) \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

其中， t_0 为初始时间， T_0 为初始时间下的温度。

我们对（4.2.5）的求解结果进行整理，得出焊接区域的温度变化模型为：

$$T = T_{\text{气}} - e^{\frac{(t-t_0) \cdot h_c}{c \cdot \rho \cdot x} + \ln(T_{\text{气}} - T_0)} \quad (4.2.6)$$

其中温度 T 的单位为开尔文摄氏度 (K)。

4.2.2 对流热传导系数 h_c 的计算

在4.2.1的模型中，对流热系数 h_c 为一个未知量。因此我们需要对其进行计算。在计算之前，我们列举出三个变量^[2]：

Nu – 努塞尔数，表示流体在贴壁处温度梯度大小

Re – 雷诺数，表示流动惯性力和粘滞力的相对大小的物理量

Pr – 普朗特数，表示流体动量扩散能力和热量扩散能力的相对大小

上述三个变量之间的数学关系为：

$$Nu = 0.664 Re^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \quad (4.2.7)$$

雷诺数 Re 的计算公式为

$$Re = \frac{\mu L}{\nu} \quad (4.2.8)$$

其中， μ 为气体流动速度， L 为物质长度， ν 为气体的流动粘度。

普朗数由气体本身的性质决定，我们可以借助相关文献查阅有关气体的普朗特数。确定了上述三个变量，我们便可进行 h_c 的计算。

h_c 的计算公式为：

$$h_c = \frac{Nu \cdot \lambda}{L} \quad (4.2.9)$$

其中， λ 为气体的运动粘滞系数。

整理式（4.2.7），（4.2.8），（4.2.9），最终得出气体的对流换热系数的计算公式为：

$$\begin{aligned} h_c &= \frac{0.664 \cdot \left(\frac{\mu L}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot \lambda}{L} \\ &= \frac{0.664 \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot \lambda}{(L \cdot \nu)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

或表示为

$$h_c = a \cdot \mu^{\frac{1}{2}} \quad (4.2.9)$$

其中 $a = \frac{0.664 \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot \lambda}{(L \cdot \nu)^{\frac{1}{2}}}$ 为可确定的常数。

4.2.3 降温过程的模型推导

在外界温度低于物质温度时，物质的温度随着时间增加而下降，其相关模型与升温过程有所不同。

当物质的温度高于外界环境温度，且两者之差较小时，系统散失的热量的速度与两者温差成正比，即：

$$\frac{dQ}{dt} = k_0(T - T_0) \quad (4.2.12)$$

其中， k_0 为常数。

当散失了 dQ 的热量后，物质的温度改变量为 dT ，有 $\frac{dQ}{dT} = c$ ， c 为物质比热容，将其代入公式（4.2.12）可得：

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k_0}{c}(T - T_0) \quad (4.2.13)$$

式（4.2.13）为牛顿冷却定律的微分方程，对其进行微分求解，得出降温过程中物质温度的数学模型为：

$$T = T_0 \cdot t \cdot c \cdot e^{kt} \quad (4.2.14)$$

其中， c, k 均为常数， $k = \frac{k_0}{c}$ 。

4.3 模型检验

在进行问题求解的之前需要对模型进行检验，验证其是否合理。我们设定，炉前区域与小温区1~5为区域1，小温区6为区域2，小温区7为区域3，小温区8~9为区域4，小温区10~11及炉后区域为5。炉前区域，炉后区域与生产车间接触的边界的温度设定为 25°C ，与生产车间相同。间隙温度和炉前、炉后区域温度设定为一次线性函数，由相邻温区温度决定，关于附件数据的参数，传送带的速度为 70cm/min ，因此可计算出产品经过每个区域的起始时间为：

表 4.3.1 产品经过每个区域的起始时间

区域序号	1	2	3	4	5
起始时间(s)	0	173.5	204	234.5	295
终点时间(s)	173.5	204	234.5	295	373

之后将起始时间以及各温区温度代入 4.2 中建立的模型，得出模型曲线与附件数据曲线的对比图，如图 4.3.1。

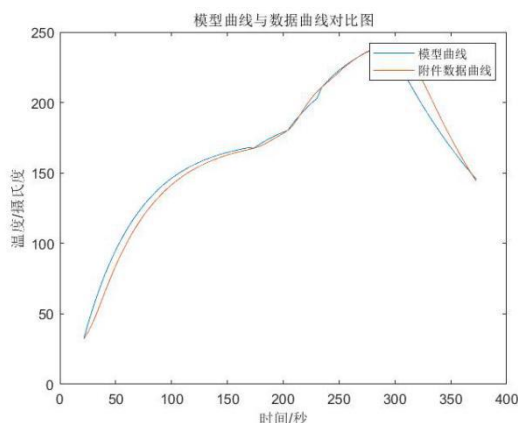


图 4.3.1 模型曲线与附件数据曲线的对比图

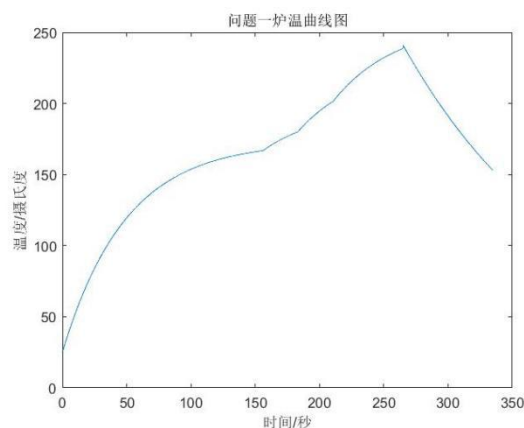


图 4.4.1 炉温曲线图

由图 4.3.1 我们可以直观的看出，此模型的效果较为准确，可以在此之后的求解中使用。

4.4 问题求解

问题一中，各温区的设定温度分别为：小温区 1~5：173°C，小温区 6：198°C，小温区 8~9：257°C。传送带过炉速度为 78cm/min，因此得出产品经过每个区域起始时间为：

表 4.3.2 产品经过每个区域的起始时间

区域序号	1	2	3	4	5
起始时间(s)	0	155.5	183	210.5	265
终点时间(s)	155.5	185	210.5	265	335

将上述数据代入模型，即可得出焊接区域中心的温度变化情况，炉温曲线图如图 4.4.1。

根据不同温区的位置以及传送带的运行速度，得出小温区 3、6、7 中点和小温区 8 结束点的位置及焊接区域到达时间，从而得出相应温度（见表 4.3.3）。

表 4.3.3 小温区 3、6、7 中点和小温区 8 结束点的相应温度

	距离 (cm)	焊接区域到达时间	温度
小温区 3 中点	111.25	95.35714286	151.7776
小温区 6 中点	217.75	186.6428571	183.5854
小温区 7 中点	253.25	217.0714286	208.3390928
小温区 8 结束点	304	260.5714286	236.9368623

焊接区域中心每隔 0.5s 的温度已存放在 *resalt.csv* 中。

4.5 模型改进

对于以上模型，我们在计算 h_c 时，采用了固定的 Nu 、 Re 、 ν 、 P_r ，但实际上，由于 ν 、 P_r 与温度相关，且随温度的变化而变化，则 Nu 、 Re 也与温度相关。另外 PCB 的 c 、 ρ 也随着温度有一定变化。对此，我们做出以下改进，找出 h_c 与 T 的函数关系与 c 、 ρ 与 T 的函数关系，进而对模型进行修正。

基于问题一的模型，我们做出以下改进

由

$$T = T_1 - e^{\left[-\frac{h_c}{c \cdot \rho \cdot x} (t - t_0) + \ln(T_1 - T_0) \right]} \quad (4.5.1)$$

可得

$$c \cdot \rho = \frac{(t - t_0) h_c}{x (\ln(T_1 - T_0) - \ln(T_1 - T))} \quad (4.5.2)$$

令

$$k = c \cdot \rho \quad (4.5.3)$$

且

$$h_c = \frac{\lambda}{l} \cdot Nu \quad (4.5.4)$$

$$Nu = 0.664 \cdot (Re)^{\frac{1}{2}} \cdot (Pr)^{\frac{1}{3}} \quad (4.5.5)$$

$$Re = \frac{u \cdot l}{\nu} \quad (4.5.6)$$

其中， λ 、 Pr 、 ν 在不同的温度下有所不同，我们利用《传热学》附录中不同温度下 Pr 、 ν 的对应表（见表 4.5.1），对 Pr 、 λ 与 T 采用适当的函数进行拟合并作出函数图像进行检验（如图 4.5.1），可得：

$$Pr(T) = (3.479 \times 10^{-7}) \cdot x^2 + (-0.0002105) \cdot x + 0.7069 \quad (4.5.7)$$

$$\nu(T) = (8.132 \times 10^{-11}) \cdot x^2 + (9.169 \times 10^{-8}) \cdot x + 1.321 \times 10^{-5} \quad (4.5.8)$$

$$\lambda(T) = (-2.093 \times 10^{-8}) \cdot x^2 + (7.847 \times 10^{-5}) \cdot x + 0.2437 \quad (4.5.9)$$

已知 $u = 0.7/60 \text{ m/s}$ ， $L = 0.2 \text{ m}$ ， $x = (0.15 \times 10^{-3})/z \text{ m}$ 。

表 4.5.1 不同温度下 Pr 、 ν 的对应表

$\frac{t}{^\circ C}$	50	-40	-30	-20	-10	0	10	20	900	1000	1100	1200
$\frac{\lambda \times 10^2}{W/(m \cdot K)}$	2.04	2.12	2.2	2.28	2.36	2.44	2.51	2.59	7.63	8.07	8.5	9.15
$\frac{\nu \times 10^6}{m^2/s}$	9.23	10.04	10.8	11.61	12.43	13.28	14.16	15.06	155.1	177.1	199.3	233.7
Pr	0.728	0.728	0.723	0.716	0.712	0.707	0.705	0.703	0.717	0.719	0.722	0.724

其中, T_1 为环境温度, t 为终止时间, t_0 为初始时间, T_0 为 PCB 的初始温度, T 为 PCB 的终止温度。

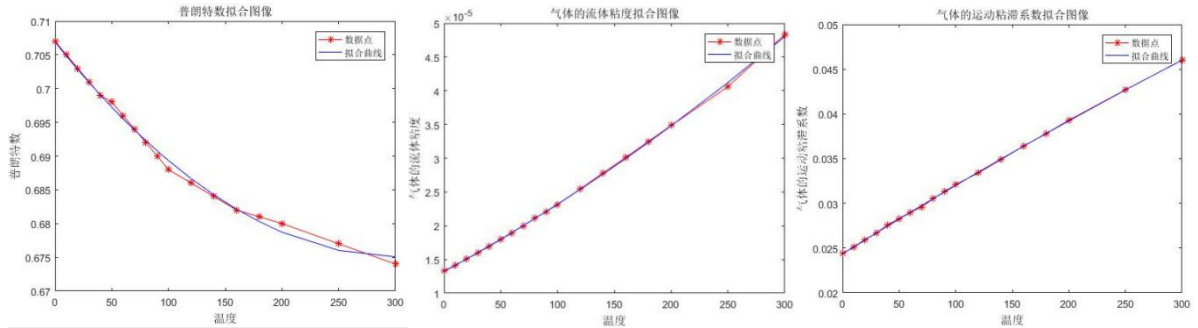


图 4.5.1 对 Pr 、 λ 与 T 的拟合函数图像

普朗特数拟合图像 $R-square$: 0.9953; 气体的流动粘度拟合图像 $R-square$: 0.9997; 气体的运动粘滞系数拟合图像 $R-square$: 0.9999; $R-square$: 拟合优度, 拟合优度越高, 说明拟合效果越好。

由式 4.5.2、式 4.5.3、式 4.5.4、式 4.5.5 及附件中数据, 且取 $(T_1 + T)/z$ 时的 λ 、 Pr 、 ν 进行计算。可得到 $k = c \cdot \rho$ 与 T 的一组对应关系, 分别对小温区 1~5, 小温区 6, 小温区 7, 小温区 8~9, 小温区 10~11 之内的附件给出 T 与 k 的对应关系进行数据拟合并作出函数图像进行检验 (如图 4.5.2)。

①小温区 1~5:

$$k = (3.875 \times 10^8) \cdot x^{-1.703} + (5.912 \times 10^5) \quad (4.5.10)$$

②小温区 6:

$$k = (3.412 \times 10^{19}) \cdot e^{-\left(\frac{x-37.53}{23.18}\right)^2} + (1.893 \times 10^6) \cdot e^{-\left(\frac{x-123.1}{54.06}\right)^2} \quad (4.5.11)$$

③小温区7：

$$k = (1.533 \times 10^{18}) \cdot e^{-0.1594 \cdot x} + (1.886 \times 10^6) \cdot e^{-0.006749 \cdot x} \quad (4.5.12)$$

④小温区8~9：

$$\begin{aligned} k = & (7.516 \times 10^5) \cdot e^{-\left(\frac{x-211.7}{20.7}\right)^2} - 6519 \cdot e^{-\left(\frac{x-218}{2.209}\right)^2} + 2470 \cdot e^{-\left(\frac{x-222.4}{1.74}\right)^2} \\ & + (1.683 \times 10^4) \cdot e^{-\left(\frac{x-225.3}{3.124}\right)^2} + (1.19 \times 10^5) \cdot e^{-\left(\frac{x-231.7}{6.111}\right)^2} + (7.093 \times 10^{18}) \cdot e^{-\left(\frac{x-930.8}{125.1}\right)^2} \\ & + (4.446 \times 10^4) \cdot e^{-\left(\frac{x-236.2}{3.109}\right)^2} + (3.784 \times 10^4) \cdot e^{-\left(\frac{x-239.2}{2.442}\right)^2} \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

⑤小温区10~11：

$$k = (3.452 \times 10^{10}) \cdot e^{-\left(\frac{x-311.8}{24.43}\right)^2} + (3.094 \times 10^{24}) \cdot e^{-\left(\frac{x-5520}{823.4}\right)^2} \quad (4.5.14)$$

另外，由公式4.5.3、式4.5.4、式4.5.5、式4.5.6、式4.5.7、式4.5.8可推得：

$$\begin{cases} h_c = \frac{\lambda}{l} \cdot 0.664 \cdot \left(\frac{u \cdot l}{v}\right)^{\frac{1}{2}} (\text{Pr})^{\frac{1}{3}} \\ \text{Pr}(T) = (3.479 \times 10^{-7}) \cdot x^2 + (-0.0002105) \cdot x + 0.7069 \\ v(T) = (8.132 \times 10^{-11}) \cdot x^2 + (9.169 \times 10^{-8}) \cdot x + 1.321 \times 10^{-5} \\ \lambda(T) = (-2.093 \times 10^{-8}) \cdot x^2 + (7.847 \times 10^{-5}) \cdot x + 0.2437 \end{cases} \quad (4.5.15)$$

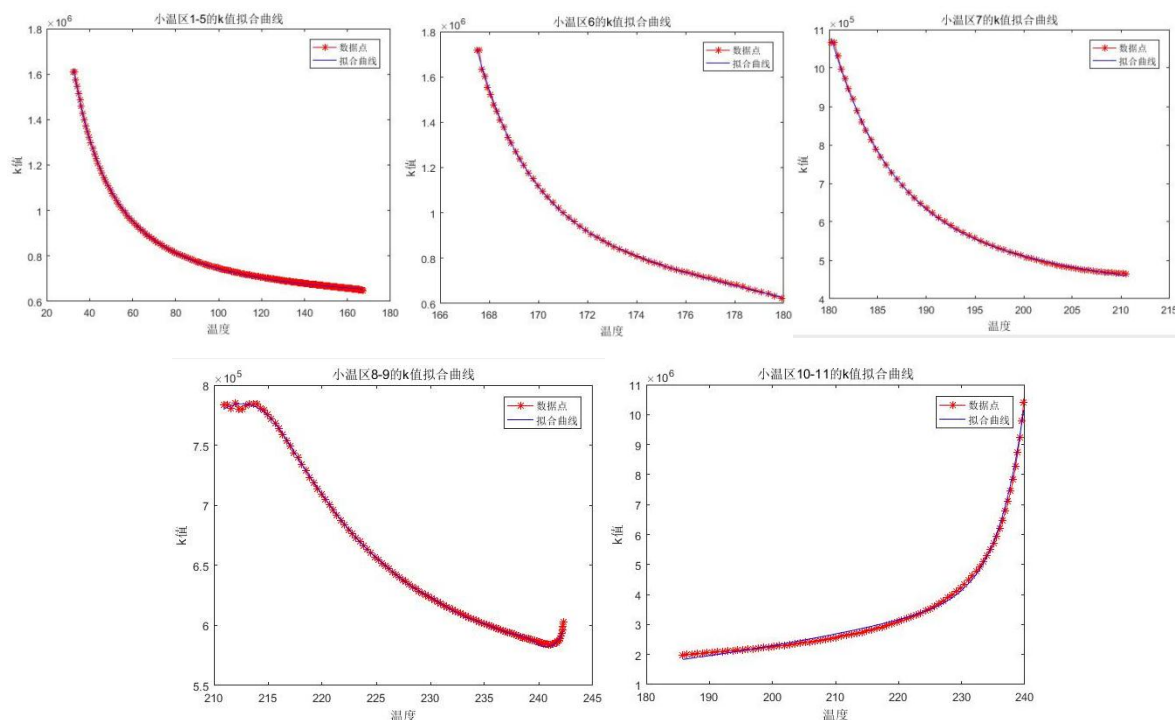


图 4.5.2 各小温区拟合函数图像

小温区1~5的 k 值拟合曲线：R-square: 0.9997；小温区6的 k 值拟合曲线：R-square: 0.9997；小温区7的 k 值拟合曲线：R-square: 0.9996；小温区8~9的 k 值拟合曲线：R-square: 0.9997；小温区10~11的 k 值拟合曲线：R-square: 0.9973，由此可知拟合效果良好。

又由公式（4.5.1），在小温区1~5中，首先令 $T_0 = 32.49^\circ\text{C}$, $t_0 = 21.50\text{s}$, $T_1 = 175^\circ\text{C}$, $t = t_0 + \Delta t$, $\Delta t = 0.5\text{s}$ ，则可得 $h_c(T_0)$ 、 $k(T_0)$ ，则可得当 $t = t_0 + \Delta t$ 时的 T ，于是我们设立了 $T_0 = T(t)$, $t_0 = t$ ，其他参数不变，继续计算，最终可得小温区1~5中的对应时间下的温度，其他温度区间同理可得给定时间下的温度。最后将由公式推导得出的图像与数据点的对比图像（如图4.5.3），发现拟合效果良好。

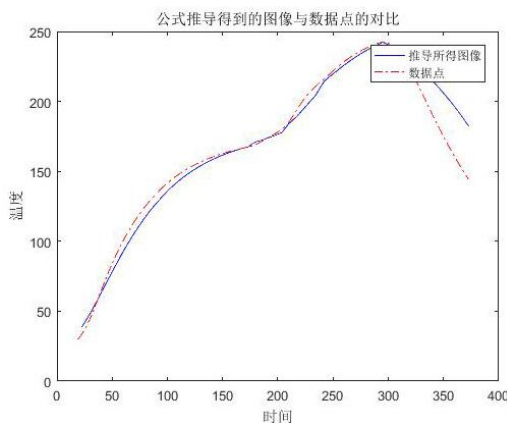


图 4.5.3 检验图像

五、问题二求解

5.1 问题分析

问题二要求在各温度温区的温度设定的情况下，确定允许的最大传送带过炉速度，基于简化模型的思想，我们拟采用穷举遍历对问题进行求解。对允许范围内的传送带过炉速度进行遍历，并将相关数据代入问题一的模型，得出不同传送带过炉速度下时间与温度的数据并进行筛选，选出符合制程界限的最大传送带过炉速度。

5.2 模型建立

在此问中，我们依旧采用问题一中炉温与时间、传送带过炉速度的数学模型，在题目要求中对各温度的温度设定为：小温区1~5： 182°C ，小温区6： 203°C ，小温区7： 237°C ，小温区8~9： 254°C ，因此炉温的影响因素确定为：时间、传送带过炉速度。

5.3 模型求解

穷举遍历的理论实践过程为：

- ①确定穷举遍历的选择范围及影响因素
- ②确定遍历的步长
- ③估计算法的时间复杂度，如复杂度过高，则重新进行步骤②或考虑局部遍历
- ④利用已知模型计算遍历数据
- ⑤利用限制条件筛选数据，得出全局最优解

根据题目给出的条件，确定穷举法遍历的范围为 $65 \sim 100 \text{ cm/min}$ ，在此问中影响温度的因素只有传送带的过炉速度，因此可以适当减少步长以获得优化效果更好的解。因此我们设定步长为 1 cm/min ，遍历范围为 $65 \sim 100 \text{ cm/min}$ 。之后确定限制条件，根据题目给出的制程界限，确定限制条件如下：

- ①峰值温度应维持在区间 $[240^\circ\text{C}, 250^\circ\text{C}]$ 中
- ②温度上升过程中在 $150^\circ\text{C} \sim 190^\circ\text{C}$ 的时间维持在 $[60\text{s}, 120\text{s}]$
- ③温度大于 217°C 的总时间维持在 $[40\text{s}, 90\text{s}]$ 内
- ④温度的变化斜率的绝对值不超过 3°C/s

确定限制条件之后，我们将已知数据及遍历数据代入问题一的模型，得出不同温度下，时间与温度的数据。

最后利用限制条件对遍历出的时间与温度的数据进行筛选，利用 *matlab* 建立限制条件的相关函数并对数据进行筛选，最终得出满足限制条件的最大传送带过炉速度为 85 cm/min 。

六、问题三求解

6.1 问题分析

问题三要求确定最优炉温曲线以及各温区的设定温度和传送带的过炉速度，使得炉温曲线图像中超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小。此题为优化问题，优化目标函数为炉温曲线超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小，我们拟采用遗传算法对模型进行求解。

6.2 模型建立

此问题的数学建模为优化模型。因此我们需要确定模型的目标函数以及约束条件。

6.2.1 模型的目标函数

根据题干中的描述，当炉温曲线处于理想状态时，其超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积最小，因此我们设立目标函数为炉温曲线中温度超过 217°C 到峰值温度所覆盖的面积，即：

$$\min \Delta S \quad (6.2.1)$$

6.2.2 模型的约束条件

问题三模型的约束条件与问题二中约束条件相同，即：

- ①峰值温度应维持在区间 $[240^{\circ}\text{C}, 250^{\circ}\text{C}]$ 中
- ②温度上升过程中在 $150^{\circ}\text{C} \sim 190^{\circ}\text{C}$ 的时间维持在 $[60\text{s}, 120\text{s}]$
- ③温度大于 217°C 的总时间维持在 $[40\text{s}, 90\text{s}]$ 内
- ④温度的变化斜率的绝对值不超过 3°C/s

6.2.3 目标函数的数值积分计算

在计算过程中，时间与温度的数据点都为离散点，无法采用正常的定积分进行计算，因此我们需要采用数值积分对此进行相关的计算，常用的数值分析法有梯形公式、辛普森公式、3/8 辛普森公式以及布尔公式等，下面介绍辛普森公式的推导。

设将求积区间 $[a, b]$ n 等分，步长 $h = \frac{b-a}{n}$ ，在等距节点 $x_k = a + kh$ ，构造出插值型求积公式为：

$$In = (b-a) \sum_{k=0}^n C_k^{(n)} f(x_k) \quad (6.2.2)$$

由插值型求积公式

$$In = (b-a) \sum_{k=0}^n C_k^{(n)} f(x_k) = \sum_{k=0}^n \left[\int_a^b l_k(x) dx \right] f_k \quad (6.2.3)$$

引入变换区间 $x = a + th$ ，则有

$$C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \cdot \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (t-j) dt \quad (6.2.4)$$

当 $n=2$ 时，可得辛普森公式为

$$\int_a^b f(x)dx \approx S = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (6.2.5)$$

6.3 模型求解

关于上述优化模型，我们采用遗传算法进行求解，遗传算法需要模型的初始解（较优初始解），因此我们利用蒙特卡罗算法生成初始解。

6.3.1 蒙特卡罗算法生成初始解

蒙特卡罗方法通过抓住事物运动的几何数量和几何特征，利用数学方法加以模拟，它是一个以概率模型为基础，通过模拟实验的结果作为问题的初始解。蒙特卡罗的具体步骤为：

- ① 设置循环次数 n
- ② 在每一次循环中，在变量所处区间生成一个随机数
- ③ 计算出②中生成随机数据的解
- ④ 重复步骤②③ n 次，得出 n 个解
- ⑤ 在步骤④的 n 个解中筛选出满足限制条件的解，并对其排序，得到一个较优解作为初始解。
- ⑥ 设置初始解个数 m 个，循环②③④⑤得出 m 个初始解。

具体的求解中，我们设置 $n=1000$ ， $m=50$ 传送带过炉速度与各温区温度范围设定与问题二一致，计算出 50 个模型的初始解（全表见附表 2），我们列举出 10 个优化结果最好的初始解（见表 6.3.1）

表 6.3.1 优化效果最好的 10 个初始解

阴影面积/平方厘米	传送带锅炉速度/cm/s	区域 1	区域 2	区域 3	区域 4	区域 5
349.3042	97.8	184	205	232	263	25
351.8383	99	184	203	239	263	25
358.5632	99	185	197	240	264	25
359.4732	97.2	183	204	240	263	25
360.1073	94.8	184	194	241	262	25
362.4154	99	185	203	235	263	25
364.3255	97.8	185	205	232	262	25
369.6166	91.8	183	203	227	261	25
370.189	94.2	182	204	244	262	25
371.3556	93	184	195	238	261	25

6.3.2 遗传算法求解

我们首先定义未编码的染色体为：

$$A=[u, T_1, T_2, T_3, T_4] \quad (6.3.1)$$

其中， u 为传送带速度，单位为 m/s ； T_1 为小温区 1~5 的温度设定值，单位为 $^{\circ}C$ ； T_2 为小温区 6 的温度设定值，单位为 $^{\circ}C$ ； T_3 为小温区 7 的温度设定值，单位为 $^{\circ}C$ ； T_4 为小温区 8~9 的温度设定值，单位为 $^{\circ}C$ ；

u, T_1, T_2, T_3, T_4 的最大数值为 265（为 T_4 的可设置的温度最大值）

令向量

$$B=[u/265, T_1/265, T_2/265, T_3/265, T_4/265] \quad (6.3.2)$$

则向量 B 的每个分量都在 $[0,1]$ 区间上，将向量 B 作为每个方案的染色体编码（每个方案可认为是一个个体）

设置种群数量为 50，进化代数 100，首先令初始种群内的 50 个个体相互交配生成 50 个子代，其交配方式为：令初始种群中的 50 个个体两两随机交配，且每个个体在一次进化中仅交配一次，且令交配的两个个体随机交换一段染色体片段。令 50 个子代中的任意 n 个子代的染色体编码上的任意 3 个位置产生变异。其中 $0 \leq n \leq 50$ ，适应度函数为每个个体对应方案所得到的阴影部分面积。阴影部分面积越小，适应性越好。对父代、子代、变异的子代所组成的群体进行适应度的计算。选取适应度排名前 50 的个体作为新的父代。

6.3.3 求解结果

通过 6.3.1 与 6.3.2 的求解，我们得出优化效果较好的 10 个遗传算法解为：

表 6.3.2 优化效果最好的 10 个遗传算法解

阴影面积/平方厘米	传送带锅炉速度/cm/s	区域 1	区域 2	区域 3	区域 4	区域 5
349.3042	97.8	184	205	232	263	25
351.0004	97.2	184	197	244	262	25
351.8383	99	184	203	239	263	25
353.4367	97.8	184	205	236	262	25
358.5632	99	185	197	240	264	25
358.5632	99	185	197	240	264	25
359.4732	97.2	183	204	240	263	25
360.1073	94.8	184	194	241	262	25
362.4154	99	185	203	235	263	25
364.3255	97.8	185	205	232	262	25

我们选取目标函数最小的情况，即：

表 6.3.3 目标函数最小的情况

阴影面积	传送带锅炉速度 (cm/min)	温区 $1 \sim 5(^{\circ}C)$	温区 $6(^{\circ}C)$	温区 $7(^{\circ}C)$	温区 $8 \sim 9(^{\circ}C)$
349.3042	97.8	184	205	232	263

对应的炉温曲线为图 6.3.1：

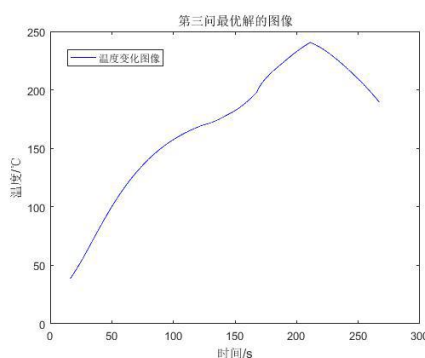


图 6.3.1 炉温曲线

七、问题四求解

7.1 问题分析

问题四的要求与问题三类似，需要的改动为目标函数增加了以峰值温度为中心线的两侧超过 $217^{\circ}C$ 的炉温曲线尽量对称，约束条件与问题三相同。我们拟采用与问题三相同的算法，利用遗传算法对优化模型求解。

7.2.模型建立

7.2.1 目标函数的确定

问题四的目标函数为

- ①峰值温度为中心线的两侧超过 $217^{\circ}C$ 的炉温曲线尽量对称
- ②超过 $217^{\circ}C$ 到峰值温度所覆盖的面积最小。

目标函数②已在问题三中描述，此处只描述目标函数①的建立。目标函数①中的曲线对称可等价为中心线两侧的积分面积之差的绝对值尽量小，因此我们将目标函数①转化为峰值温度中心线两侧超过 $217^{\circ}C$ 的积分面积之差的绝对值尽量小。

7.2.2 约束条件的确定

问题四的约束条件与问题三一致，即：

- ①峰值温度应维持在区间 $[240^{\circ}\text{C}, 250^{\circ}\text{C}]$ 中
- ②温度上升过程中在 $150^{\circ}\text{C} \sim 190^{\circ}\text{C}$ 的时间维持在 $[60\text{s}, 120\text{s}]$
- ③温度大于 217°C 的总时间维持在 $[40\text{s}, 90\text{s}]$ 内
- ④温度的变化斜率的绝对值不超过 $3^{\circ}\text{C}/\text{s}$

7.3.模型求解

问题四的求解过程与问题三相同，先利用蒙特卡洛算法得出初始解，之后利用遗传算法得出较优解。求解步骤与问题三相同，此处不作过多描述，仅给出求解结果。

我们设定 $n = 1000, m = 50$ ，算法的目标函数改为问题四的目标函数，各个变量的范围与问题三相同，得出50个模型的初始解（全表见附表3）为：

表 7.3.1 根据面积差值的绝对值进行排序的 10 个初始解

阴影面积/平方厘米	传送带锅炉速度/cm/s	区域 1	区域 2	区域 3	区域 4	区域 5	面积差
475.0623	84	184	192	236	259	25	0.0034
454.9818	85.8	181	204	240	259	25	0.0163
461.9897	84	183	189	244	259	25	0.041
403.364	90	184	201	228	260	25	0.0473
461.9997	84	185	196	227	259	25	0.0521
388.5727	88.8	183	191	244	260	25	0.0948
485.0577	82.8	185	188	237	259	25	0.0957
432.8203	82.2	179	203	236	260	25	0.1021
531.7281	82.8	182	199	242	258	25	0.1106
403.2018	90	185	187	244	260	25	0.1348

之后对遗传算法进行修改。在问题三的求解基础上，将遗传算法的适应度函数改为问题四的目标函数，得出优化效果较好的50个结果，设定目标函数①为第一优先排序，目标函数②为第二优先排序，得出优化效果较好的10个结果为：

表 7.3.2 十个效果最好的较优解

阴影面积/平方厘米	传送带锅炉速度/cm/s	区域 1	区域 2	区域 3	区域 4	区域 5	面积差
368.6611	97.2	184	203	243	260	25	0.8079
388.5727	88.8	183	191	244	260	25	0.0948
389.6138	88.8	183	201	227	260	25	1.2322
402.9292	90	183	203	231	260	25	0.4443
403.2018	90	185	187	244	260	25	0.1348
403.364	90	184	201	228	260	25	0.0473
403.364	90	184	201	228	260	25	0.0473
403.9822	85.2	183	193	229	260	25	0.7863
404.0916	85.2	183	187	239	260	25	0.9089
404.0916	85.2	183	187	239	260	25	0.9089

我们选用优化效果最优的结果，即：

表 7.3.3 优化效果最好的结果

阴影面积	传送带锅炉速度 /cm/min	区域 1	区域 2	区域 3	区域 4	区域 5	面积差
368.6611	97.2	184	203	243	260	25	0.8079

对应炉温曲线为图 7.3.1。

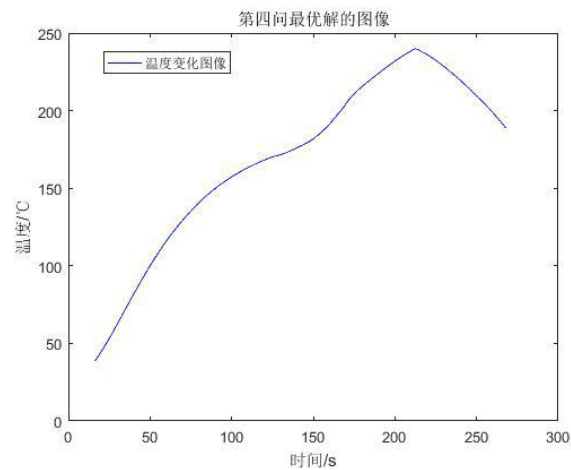


图 7.3.1 炉温曲线

八、模型评价

8.1 模型改进

- (1) 细化间隙温度计算以及冷却区温度计算。
- (2) 增加热辐射与热传导对温度的影响模型。

8.2 模型评价

优点：

- (1) 模型适用范围广。可以用于各类工业温度检测与预测任务。
- (2) 模型变量控制方便。温度变化模型的影响因素为时间、外界温度，对模型的数据控制较为简便。

缺点：

- (1) 温区之间温度处理较为理想化。我们设定间隙的温度与上一个相邻温区的温度相等，此设定会导致炉温曲线出现部分跳跃点。
- (2) 忽略了温区之间的相互影响，尤其是冷却区的温度影响。冷却区的温度与相邻温区的温度相差过大，因此冷却区的温度需要细化处，一个想法是利用合适的函数对冷却区温度进行估计。
- (3) 未考虑热辐射与热传导对温度的影响。在此模型中我们主要考虑的是热对流对温度的影响，传热方式的考虑较为单一。

九、参考文献

- [1] 鲁五一，汪学军，向涛，等. 基于热平衡机理的热风回流焊机多温区系统动态建模及仿真[J] 热加工工艺，2006(19)
- [2] 宋巍. 基于加热机理分析的回流焊过程仿真建模与有限元分析[D]. 东北大学，2012
- [3] 杨世铭，陶文铨. 传热学. 北京：高等教育出版社，559–559,2006
- [4] 韩中庚.数学建模方法及其应用[M]. 北京.高等教育出版社，2009
- [5] 司守奎，孙玺菁.数学建模算法与应用[M]. 北京.国防工业出版社，2013.