

「集思广益一波」

CleanBlue

2022 年 11 月 17 日

目录

1	数据结构	1
1.1	单调队列/滑动窗口	1
1.2	单调栈	1
2	基本算法	1
2.1	二分	1
2.2	三分	2
2.3	ST/静态区间最值	2

1 数据结构

1.1 单调队列/滑动窗口

有一个长为 n 的序列 a ，以及一个大小为 k 的窗口。现在这个从左边开始向右滑动，每次滑动一个单位，求出每次滑动后窗口中的最大值和最小值。

```

1 int n, k;
2 std::cin >> n >> k;
3
4 std::vector<int> a(n);
5 for (int &i : a) {
6     std::cin >> i;
7 }
8
9 std::deque<int> q;
10 for (int i = 0; i < n; ++i) { //输出最小值
11     while (!q.empty() && a[q.back()] >= a[i]) {
12         q.pop_back();
13     }
14     q.emplace_back(i);
15     if (i >= k - 1) {
16         while (!q.empty() && q.front() <= i - k)
17             q.pop_front();
18         std::cout << a[q.front()] << ' ';
19     }
20 }
21 std::cout << '\n';
22 while (!q.empty()) {
23     q.pop_back();
24 }
25
26 for (int i = 0; i < n; ++i) { //输出最大值
27     while (!q.empty() && a[q.back()] <= a[i]) {
28         q.pop_back();
29     }
30     q.emplace_back(i);
31     if (i >= k - 1) {
32         while (!q.empty() && q.front() <= i - k)
33             q.pop_front();
34         std::cout << a[q.front()] << ' ';
35     }
36 }
37 std::cout << '\n';
38
39 }
40

```

1.2 单调栈

输出右边第一个比 a_i 大的数的下标。

```

1 int n;
2 std::cin >> n;
3
4 std::vector<int> a(n), ans(n);
5 for (int &i : a) {
6     std::cin >> i;
7 }
8
9 std::stack<int> s;
10 for (int i = n - 1; i >= 0; --i) {
11     while (!s.empty() && a[s.top()] <= a[i]) {

```

```

12         s.pop();
13     }
14     if (s.empty()) {
15         ans[i] = -1;
16     } else {
17         ans[i] = s.top();
18     }
19     s.emplace(i);
20 }
21
22 for (int i = 0; i < n; ++i) {
23     std::cout << ans[i] + 1 << "\n";
24 }

```

2 基本算法

2.1 二分

```

1 int binary_search_1(const std::vector<int> &a,
2 int x) {
3     // a 单调递增
4     // 在 [0, n) 中查找 x 或 x 的后继的位置
5     int n = a.size(), l = 0, r = n;
6     while (l < r) {
7         int mid = (l + r) / 2;
8         if (a[mid] >= x) {
9             r = mid;
10        } else {
11            l = mid + 1;
12        }
13    }
14    return l;
15 }
16
17 int binary_search_2(const std::vector<int> &a,
18 int x) {
19     // a 单调递增
20     // 在 [0, n) 中查找 x 或 x 的前驱的位置
21     int n = a.size(), l = 0, r = n;
22     while (l < r) {
23         int mid = (l + r + 1) / 2;
24         if (a[mid] <= x) {
25             l = mid;
26        } else {
27            r = mid - 1;
28        }
29    }
30    return l;
31 }
32
33 double float_binary_search(/*...*/) {
34     constexpr double eps = 1e-7;
35     double l = 0, r = 1e18;
36     while (r - l > eps) {
37         double mid = (l + r) / 2;
38         if (/*...*/) {
39             l = mid;
40        } else {
41            r = mid;
42        }
43    }
44    return l;
45 }

```

2.2 三分

如何取 mid1 和 mid2? 有以下两种基本方法。

(1) 三等分: mid1 和 mid2 为 $[l, r]$ 的三等分点, 区间每次可以缩小 $1/3$ 。

(2) 近似三等分: 计算 $[l, r]$ 的中间点 $\text{mid} = (l + r)/2$, 然后让 mid1 和 mid2 非常接近 mid, 如 $\text{mid1} = \text{mid} - \text{eps}$, $\text{mid2} = \text{mid} + \text{eps}$ 。区间每次可以缩小接近一半。

近似三等分比三等分要稍微快一点。不过, 在有些情况下 eps 过小可能导致 mid1 和 mid2 算出的结果相等, 从而判断错方向。

三等分:

```
1 while (r - l > eps) {
2     double k = (r - l) / 3;
3     double mid1 = l + k, mid2 = r - k;
4     if (/*...*/) {
5         r = mid2;
6     } else {
7         l = mid1;
8     }
9 }
```

近似三等分:

```
1 while (r - l > eps) {
2     double mid1 = (l + r) / 2;
3     double mid2 = mid1 + eps;
4     if (/*...*/) {
5         r = mid2;
6     } else {
7         l = mid1;
8     }
9 }
```

整数三分:

```
1 while (r - l > 2) {
2     int mid1 = l + (r - l) / 3;
3     int mid2 = r - (r - l) / 3;
4     if (/*...*/) {
5         r = mid2;
6     } else {
7         l = mid1;
8     }
9 }
```

2.3 ST/静态区间最值

定义 $dp[i][k]$ 表示左断点为 i , 区间长度为 2^k 的区间最值。递推关系为:

$$dp[i][k] = \text{merge}\{dp[i][k-1], dp[i + (1 \ll (k-1))][k]\}$$

$O(n \log n)$ 预处理、 $O(1)$ 查询。

```
1 int N, M;
2 std::cin >> N >> M;
3
4 std::vector<int> a(N);
5 for (int &i : a) {
6     std::cin >> i;
7 }
8
9 std::vector<int> LOG2(N + 1);
10 LOG2[0] = -1;
11 for (int i = 1; i <= N; ++i) {
```

```
12     LOG2[i] = LOG2[i / 2] + 1;
13 }
14
15 int dp[N][21];
16 for (int i = 0; i < N; ++i) {
17     dp[i][0] = a[i];
18 }
19
20 int p = LOG2[N];
21 // 可倍增区间的最大次方:  $2^p \leq N$ 
22 for (int k = 1; k <= p; ++k) {
23     for (int i = 0; i + (1 << k) - 1 < N; ++i) {
24         dp[i][k] = std::max(dp[i][k-1], dp[i +
25                               (1 << (k-1))][k-1]);
26     }
27 }
28 while (M--) {
29     int l, r;
30     // 求  $[l, r]$  中最大值
31     std::cin >> l >> r;
32     --l;
33
34     int len = r - l;
35     int k = LOG2[len];
36
37     std::cout << std::max(dp[l][k], dp[r - (1 <<
38                           k)][k]) << '\n';
39 }
```

封装好的 ST:

```
1 struct ST {
2     size_t n;
3     std::vector<std::vector<int>> info;
4
5     int merge(const int &lshs, const int &rshs) {
6         // TODO: 修改 merge
7         return std::max(lshs, rshs);
8     }
9
10    ST(const std::vector<int> &init) : n(init.size()),
11    info(init.size() + 1, std::vector<int>(std::lg(n) + 1, INT_MIN)) {
12        // TODO: 修改初值
13        for (size_t x = 0; x <= std::lg(n); ++x)
14            for (int i = 0; i + (1ull << x) <= n; ++i)
15                if (x == 0)
16                    info[i][x] = init[i];
17                else
18                    info[i][x] = merge(info[i][x-1], info[
19                        i + (1 << (x-1))][x-1]);
20    }
21
22    int query(int l, int r) { // [l, r)
23        int len = r - l;
24        assert(len > 0);
25        return merge(info[l][std::lg(len)],
26                      info[r - (1 << std::lg(len))][std::
27                        lg(len)]);
28    }
29 }
```