Задача 1.

Давайте раскроем скалярное произведение $\langle Ax, y\rangle$ для равенства $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ для любых x и y?

$\langle Ax\, y\rangle$ по формуле скалярного произведение как

$$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T \cdot y$$

Раскрываем скобку $(Ax)^T$ по формуле $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

$$(Ax)^T \cdot y = x^T \cdot A^T \cdot y$$

и можно представить скалярное призведение как

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x^T, (A^T \cdot y)\rangle$$, тогда

$$\langle x, (A^T \cdot y)\rangle = \langle x, By\rangle$$, тогда равенство действительно при $A^T = B$. И эти матрицы считаются сопряженными

ответ $B = A^T$ или $A = B^T$

Задача 2.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X'X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$XX' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

QR- разложение $X'X$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$q_2 = v_2 - \lambda q_1$, $\quad \langle v_2 - \lambda q_1, q_1 \rangle = \langle v_2, q_1 \rangle - \lambda \cdot \langle q_1, q_1 \rangle = 0$

$q_2 \perp q_1$, $\quad \lambda = \dfrac{\langle v_2 \cdot q_1 \rangle}{\langle q_1 \cdot q_1 \rangle} = \dfrac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{4 + 1} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8.$

$q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$q_2 = v_2 - \lambda q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0{,}8 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}6 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$$

$\|q_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$

$\|q_2\| = \sqrt{-0{,}6^2 + 1{,}2^2} = \sqrt{1{,}8} = 3\sqrt{\frac{1}{5}}$

Тогда QR- разложение будет по формуле

$$\begin{array}{c} m \times n \\ \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_n \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \dfrac{u_1}{\|u_1\|} & \dots & \dfrac{u_k}{\|u_k\|} \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} k \times n \\ \begin{bmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow X'X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \cancel{\begin{pmatrix} 1 & -0{,}6 \\ 2 & 1{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -0{,}2 \cdot \sqrt{5} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0{,}4 \cdot \sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0{,}8 \cdot \sqrt{5} \\ 0 & 3\sqrt{\frac{1}{5}} \end{pmatrix}$$

QR-разложение для XX'

$$XX' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$q_i \perp q_j$.

$q_i^T q_j = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} q_2 = v_2 - \lambda \cdot q_1 \\ q_2 \perp q_1 \end{cases} \Rightarrow \langle q_2, q_1 \rangle = \langle v_2 - \lambda q_1, q_1 \rangle$$

$$= \langle v_2 q_1 \rangle - \lambda \cdot \langle q_1, q_1 \rangle = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\langle v_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle}$$

$$= q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot -1}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)} = \frac{2+1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0{,}5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\langle q_1 q_2 \rangle = 0 \Rightarrow (2 \cdot 0 + 0{,}5 - 0{,}5) = 0.$$

$$\begin{cases} q_3 = v_3 - \lambda_1 q_1 - \lambda_2 q_2 \\ q_3 \perp q_2 \\ q_3 \perp q_1 \end{cases} \Rightarrow \cancel{\langle v_3, q_2 \rangle} = \langle q_3, q_2 \rangle = \langle v_3, q_2 \rangle - \lambda_1 \overset{0}{\langle q_1 q_2 \rangle} - \lambda_2 \langle q_2 q_2 \rangle = 0.$$

$$\langle q_3, q_1 \rangle \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\langle v_3, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} \Rightarrow \qquad \lambda_2 = \frac{\langle v_3, q_2 \rangle}{\langle q_2, q_2 \rangle} = \frac{(-1 \cdot 0 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5)}{(1 + 0 + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{(-1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot -1)}{(2^2 + 1^2 + (-1)^2)} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}. \qquad = \frac{0{,}5}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$q_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix};$$

$$\|q_2\| = \sqrt{0 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\|q_3\| = \sqrt{0 + \frac{3}{8}^2 + \frac{3}{8}^2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$\|q_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \cancel{\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0{,}5 \cdot \sqrt{6} & -0{,}5 \cdot \sqrt{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{\sqrt{6}}{2} & \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 0 & \frac{3\sqrt{2}}{8} \end{pmatrix}$$

Спектральное разложении матрицы $X'X$

$$X'X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0. \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$2 - \lambda = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 3.$$

$$(A - \lambda_i I) \cdot x = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = y.$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = y.$$

$$\lambda_1 = 1 \; ; \; \lambda_2 = 3 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow \det P = 0!$$

обратная матрица не имеется.

Матрица вырожденной

У этой матрицы нету спектрального разложение.

Спектральное разложение матрицы XX'

$$XX' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda) - ((1-\lambda)+(1-\lambda))$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) = (2-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2) - 2(1-\lambda) =$$

$$\cancel{2} - \cancel{\lambda} - \cancel{4\lambda} + 2\lambda^2 + 2\lambda^2 - \lambda^3 \cancel{- 2} + \cancel{2\lambda} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda = 0. \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3$$

$$\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3\lambda) = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3\cancel{\lambda} = 0 \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \sqrt{16 - 12} = 2.$$

$$\cancel{\lambda}_{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 1, 3.$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ (z) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} x - \cancel{z} &= 0 \\ -z + x &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 2-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ -1 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x = y = z = 0. \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

По определению собственный вектор не может равняться нулевому вектору из-за этого для данной матрицы не существуют ~~нулевых~~ спектральный разложение.

Сингулярное разложение матрицы X.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = U \Sigma V^T$$

$$U^T U = I$$

$$X X^T = U \Sigma V^T \cdot V \cdot \Sigma^T U^T = U \cdot \Sigma \Sigma^T \cdot U^T \qquad V^T V = I$$

$$X^T X = V \Sigma^T U^T \cdot U \cdot \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T \qquad U = R^{3\times 3}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad V = R^{2\times 2}.$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 1$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{3}.$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad X = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

$$X \cdot V = U \cdot \Sigma \cdot V^T \cdot V$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X \cdot V = U \cdot \Sigma$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \sqrt{3} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

$$X \cdot V = U_1 \cdot \sigma_1$$

$$V_3 = \begin{cases} 2X + 1 \cdot y = 0 \\ \sqrt{3}X + 2\sqrt{3}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = -\frac{y}{2} \\ X = +\frac{y}{2} \end{cases}$$

$$X \cdot V \cdot \frac{1}{\sigma_1} = U_1$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 2, & -1 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot 1 =$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \sqrt{3}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \end{bmatrix} \cdot 1 = [1, 0, -1].$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \cdot \sqrt{3} = [1, 1, 0] \cdot \sqrt{3} = [\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0]$$

$$\begin{matrix} U_3 \perp U_1 \\ U_3 \perp U_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ x = -y \\ z = -y \end{cases}$$

$$U_3 = [1, -1, 1]$$

$$U = \begin{bmatrix} 1, & 0, & -1 \\ \sqrt{3}, & \sqrt{3}, & 0 \\ 1, & -1, & 1 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = U \cdot \Sigma \cdot V^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{3}, & \sqrt{3}, & 0 \\ 1, & -1, & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задача 4

$f(x,y) = (1+2x+3y)^{2023.}$ $a=0;\ b=0.$

$f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{1!}[f'_{(x)}(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)]$

$\ldots = \cancel{1 + 1 (2023 \cdot 2 +}$

$1 + 1(f'_{(x)(a,b)}(x-a) + f'_{(y)(a,b)}(y-b)] + \frac{1}{2}(f''_{xx(a,b)}(x-a)^2$

$+2f'_{yx}(y-b)(x-a) + f''_{yy}(a,b)(y-b^2] =$

$= 1 + 1(2023 \cdot (1+2x+3y)^{2022}_{(a,b)} \cdot 2 \cdot (x-a) + 2023 \cdot 3 \cdot (1+2x+3y)^{2022}(y-b))$

$+ \frac{1}{2}(2023 \cdot 2022 \cdot 4(1+2x+3y)^{2021}(x-a)^2 + 2 \cdot 2023 \cdot 2022 \cdot (1+2x+3y)^{2021}(x-a)(y-b) \cdot 3 \cdot 2$

$+ 9 \cdot 2023 \cdot 2022 \cdot (1+2x+3y)^{2021}(y-b)^2) =$

$1 + (2023 (1+2x+3y)^{2022}_{(a,b)}(2(x-a) + 3(y-b))$

$+ \frac{1}{2}(2023 \cdot 2022 (1+2x+3y)^{2021}_{(a,b)}(4(x-a)^2 + 4 \cdot 2(x-a)(y-b)$

$+ 9(y-b)^2) = 1 + (2023 (2(x-a) + 3(y-b))$

$+ \frac{1}{2}(2023 \cdot 2022 \cdot (4(x-a)^2 + 12(x-b)(y-b) + 9(y-b))^2).$

Задача 5

$f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$

$\ln x + \ln y + \ln z = 0.$

$f(x,y,z)' =$

$f'_x = 1$

$f'_y = 2$

$f'_{(z)} = 3$

Составим функцию Лагранжа

$L = f(x,y,z) + \lambda \varphi(x,y,z)$

$L = x+2y+3z + \lambda(\ln x + \ln y + \ln z).$

$L'_x = 1 + \lambda \frac{1}{x} = 0$

$L'_y = 2 + \lambda \cdot \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow$

$L'_z = 3 + \lambda \frac{1}{z} = 0$

$1 + \lambda \frac{1}{x} = 0 \quad \lambda = -x \quad x = -\lambda$

$2 + \lambda \frac{1}{y} = 0 \Rightarrow \lambda = -2y \Rightarrow y = -\frac{\lambda}{2}$

$3 + \lambda \frac{1}{z} = 0. \quad \lambda = -3z. \quad z = -\frac{\lambda}{3}$

$\ln(-\lambda) + \ln\left(-\frac{\lambda}{2}\right) + \ln\left(-\frac{\lambda}{3}\right) = 0.$

$\ln\left(-\frac{\lambda^3}{6}\right) = 0$

$\ln\left(-\frac{\lambda^3}{6}\right) = \ln 1$

$-\frac{\lambda^3}{6} = 1$

$\lambda = -\sqrt[3]{6}$

$x = \sqrt[3]{6}$

$y = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

$z = \frac{\sqrt[3]{6}}{3}$

$M\left(\sqrt[3]{6}; \frac{\sqrt[3]{6}}{2}; \frac{\sqrt[3]{6}}{3}\right)$

$f = \sqrt[3]{6}.$

функция $x+2y+3z$ имеют только одно значение и это при значении функции $\sqrt[3]{6}$, функция имеет тенденцию рость из-за этого это функцию можно расмотреть как минимум.

Задача 6

$f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$ при $x+y+z = -23$.

$L = x^2 + 3y^2 + 5z^2 + \lambda(x+y+z+23) = 0$

$L'_x = 2x + \lambda = 0$ $\quad \lambda = -2x \quad x = -\frac{\lambda}{2}$

$L'_y = 6y + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -6y \Rightarrow y = -\frac{\lambda}{6}$

$L'_z = 5z + \lambda = 0$ $\quad \lambda = -5z \quad z = -\frac{\lambda}{5}$

$-\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{6} - \frac{\lambda}{5} + 23 = 0$

$-\left(\frac{15\lambda + 5\lambda + 6\lambda}{30}\right) + 23 = 0$

$23 - \frac{\cancel{26}^{13}\lambda}{\cancel{30}_{15}} = 0$

$23 \cdot 15 - 13\lambda = 0$

$\lambda = \frac{23 \cdot 15}{13} = 26{,}5$

$x = -\frac{26{,}5}{2} = -13{,}25$

$y = -\frac{26{,}5}{6} = 4{,}41$

$z = -\frac{26{,}5}{5} = 5{,}3.$

$M(-13{,}25,\ 4{,}41,\ 5{,}3)$

$f'(x,y,z)$ $\quad L'_x = 2x = 0$ Точки экстимума тогда

$L'_y = 6y = 0$ $\quad M_1(0,0,0)$

$L'_z = 5z = 0$

тогда точка минимума является $M(0,0,0)$ а точкой максимума при условии $x+y+z = -23$ является $M(-13{,}25,\ 4{,}41,\ 5{,}3)$.