

陀螺系统特征值问题的对称解法^{*}

刘书田 顾元宪 程耿东

(大连理工大学工程力学研究所 116024)

摘要 建立了一种求解陀螺系统特征值问题的对称解法. 该算法将含陀螺矩阵的二阶广义特征值问题转化为由单一实对称矩阵定义的标准特征值问题. 数值算例说明该算法是有效的.

关键词: 特征值问题 陀螺系统; 对称解法

分类号: O 175.9

由于存在哥氏力, 旋转结构动力问题的特征方程为包含陀螺矩阵的二阶广义特征问题:

$$\lambda^2 \mathbf{M} \mathbf{X} + \lambda \mathbf{G} \mathbf{X} + \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (1)$$

其中: \mathbf{M} \mathbf{G} \mathbf{K} 分别为质量矩阵、陀螺矩阵和刚度矩阵. \mathbf{M} 和 \mathbf{K} 是对称的, 并且通常是正定的实矩阵, \mathbf{G} 是反对称实矩阵. 由于反对称矩阵的存在, 上述特征值问题有复数形式的特征值和特征向量, 这对问题的求解造成了困难. 为克服这一困难, 在旋转结构的动力分析中, 有的学者假设陀螺矩阵的影响很小, 而将问题化为对称矩阵 \mathbf{M} 和 \mathbf{K} 定义的特征值问题^[1]. 很明显, 当结构转速较高时, 忽略陀螺项将导致大的误差. 另一类方法是通过引入状态向量 $\mathbf{Y} = \lambda \mathbf{X}$, 将原问题化归维数倍增的线性特征值问题^[2]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

由于左边矩阵的非对称性和大的规模, 直接求解线性特征值问题 (2) 是非常困难的. 另一方面, 问题 (2) 中矩阵的各元素在量级上可能相差很大, 这种不良性质也会给求解带来困难和结果的大的误差. 近期, Bauchau^[3] 提出了求解该问题的简化算法, 颇具优势.

目前, 对称矩阵特征值的求解算法已非常成熟, 用于求解陀螺系统特征值问题的有效算法相对较少. 本文建立的对称算法将二阶广义特征值问题转化为对称矩阵定义的标准特征值问题, 使问题的求解变得容易. 在旋转梁的分析算例中, 利用集结法求解转化后的对称矩阵的部分主要特征值.

1 化归对称特征值问题

考虑由对称正定 n 维实矩阵 \mathbf{M} 和 \mathbf{K} 以及反对称 n 维实矩阵 \mathbf{G} 定义的二阶广义特征值问

* 国家自然科学基金资助项目 (19602007) 和辽宁省科学基金资助项目 (941025)

收稿日期: 1996-12-02; 修订日期: 1997-09-20

刘书田: 男, 1962年生, 博士后, 副教授

题 (1). 若引进状态变量 $Y = \lambda X$, 则问题 (1) 可化归由 $2n$ 维的对称实矩阵和反对称实矩阵定义的线性广义特征值问题:

$$Aw = \lambda Bw \quad (3)$$

其中:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & K \\ -K & -G \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad w = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (4)$$

对 K 和 M 实施 Cholesky 分解, $K = PP^T$, $M = QQ^T$. 其中 P Q 为下三角阵, 则有

$$B = LL^T, \quad L = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \quad (5)$$

L 也是下三角阵. 定义线性变换: $w = L^{-T}H$, 并将式 (3) 前乘 L^{-1} , 得

$$A'H = \lambda H \quad (6)$$

其中:
$$G' = Q^{-1}GQ^{-T}, \quad A' = -A'^T = L^{-1}AL^{-T} = \begin{bmatrix} 0 & P^{-1}Q \\ -Q^TP^{-T} & -G' \end{bmatrix} \quad (7)$$

问题 (6) 是一反对称矩阵的标准特征值问题. 由于反对称矩阵 A' 自乘后是对称矩阵, 问题 (6) 可转化为对称矩阵的标准特征值问题. 为此目的, 将式 (6) 前乘 A' , 得

$$S'H = \lambda^2 H, \quad U = \lambda^2 \quad (8)$$

其中:
$$S = A'A' = \begin{bmatrix} -P^{-1}KP^{-T} & -P^{-1}QG' \\ G'Q^TP^{-T} & -Q^TM^{-1}Q + G'G' \end{bmatrix} \quad (9)$$

由于 A' 是反对称的, 所以 S 是对称实矩阵. 至此, 原二阶广义特征值问题已转化为 $2n$ 维对称实矩阵定义的标准特征值问题 (8). 问题 (8) 的求解算法很多, 例如, 求其全部特征解的 Givens 方法、QR 方法及求其部分解的子空间迭代法等; 其求解比原问题要容易得多. 另外, 由于对称矩阵的特征值和特征向量是实数, 所有的运算均在实数空间中进行; 这包括矩阵的运算和问题的求解.

本文使用一种新的求部分特征解的降维算法 (称为集结法). 其求解步骤见文 [4].

2 原问题特征解的识别

由陀螺系统的性质可知, 原问题的特征值是成对出现的, 即, 若 λ 是它的特征值, 则 $-\lambda$ 也是它的特征值. 因此原问题的 $2n$ 个特征值可如下排列: $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{1+n}, \lambda_{2+n}, \dots, \lambda_{2n})$. 只要识别出前 n 个特征值, 则 $2n$ 个特征值就完全确定了. 这 n 个特征值可由问题 (8) 确定的 n 个不同的特征值确定:

$$\lambda_i = \overline{\lambda_{i+n}}, \quad \lambda_{i+n} = -\lambda_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

设原问题的一对特征值 λ_j 和 $\lambda_{j+n} = -\lambda_j$ 所对应的特征向量为 w_j 和 w_{j+n} . 它们均应满足

$$Sw_j = \lambda_j^2 w_j, \quad Sw_{j+n} = \lambda_{j+n}^2 w_{j+n} \quad (11)$$

因此, w_j 和 w_{j+n} 可作为问题 (8) 的特征值 $U = \lambda_j^2$ 对应的特征子空间的基底. 这样, $U = \lambda_j^2$ 对应的两个线性无关的特征向量 H_j 和 H_{j+n} 与 w_j 和 w_{j+n} 可以相互线性表示:

$$w_j = C_j^1 H_j + C_j^2 H_{j+n}, \quad w_{j+n} = C_{j+n}^1 H_j + C_{j+n}^2 H_{j+n} \quad (12)$$

其中: $C_j^1, C_j^2, C_{j+n}^1, C_{j+n}^2$ 是实的或复的常数. 将式 (12) 代入式 (3), 可确定这些常数.

由式 (8) 解出其特征值和特征向量后, 由式 (10) 确定原问题的特征值, 对应的特征向量.

原问题的特征向量就是由式 (12)确定的 w_j 和 w_{j+n} 的前 n 个分量组成的向量.

4 算例与分析

考虑矩形箱形等截面旋转梁的固有频率计算问题. 梁的几何和坐标如图 1所示. 所用材料为各向异性的, 其轴线方向的模量 $E_z=115.4 \text{ MPa}$, 平行与轴线方向的平面内的剪切模量 $G_{xz}=84.8 \text{ MPa}$. 材料线密度 $m=113 \text{ kg/m}$. 有限元离散后的旋转梁振动问题的特征方程具有式 (1)的形式. 在矩阵 $M G K$ 的形成中考虑了耦合变形和截面翘曲的影响. 对称特征值问题 (8)的求解用集结法完成. 所得结果与 Bauchau^[3] 对同一问题的计算结果相吻合 (表 1). 说明本文方法是有效的.

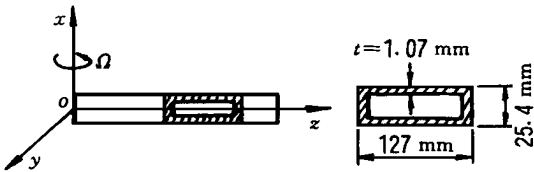


图 1 旋转梁的几何与坐标系

表 1 挥舞方向 ($x-z$ 面内) 的振动前两阶频率

| K/(1/s) | 转 速 | 挥舞一阶频率 | | | 挥舞二阶频率 | | |
|---------|-----|----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|
| | | 本文值 | | 文[3]值 | 本文值 | | 文[3]值 |
| | | k | λ | λ | k | λ | λ |
| 0 | 0 | 2.834 9 | 3.512 | 3.516 | 17.660 5 | 21.88 | 22.03 |
| 1.614 4 | 2 | 3.332 5 | 4.128 | 4.138 | 18.123 0 | 22.45 | 22.61 |
| 3.228 8 | 4 | 4.500 9 | 5.576 | 5.587 | 19.445 1 | 24.07 | 24.28 |
| 4.843 2 | 6 | 5.941 8 | 7.361 | 7.364 | 21.468 3 | 26.60 | 26.83 |
| 6.465 3 | 8 | 7.461 5 | 9.244 | 9.261 | 24.013 2 | 29.75 | 30.03 |
| 8.072 0 | 10 | 9.032 1 | 11.190 | 11.210 | 26.927 4 | 33.36 | 33.70 |
| 9.686 4 | 12 | 10.622 3 | 13.160 | 13.170 | 30.098 5 | 37.29 | 37.73 |

注: $\lambda=k \sqrt{mL^4/EI}$, $\omega=\sqrt{K/mL^4EI}$

5 结 论

本文给出的对称算法可将二阶广义特征值问题转化为一对称实矩阵定义的标准特征值问题. 其优点是能够充分利用对称矩阵特征值问题的丰富算法, 并且所有计算均在实数空间中进行, 使得计算大大简化. 本算法与集结法结合, 可方便地获得大系统的部分特征解.

参 考 文 献

1 Laurenson R M. Model analysis of rotating flexible structures. *AIAA, J*, 1976, **14**: 1444~ 1450

2 Dugundji J, Wendell J H. Some analysis methods for rotating systems with periodic coefficients. *AIAA J*, 1983, **21**(6): 890~ 897

3 Bauchau O A. A solution of the eigenproblem for undamped gyroscopic systems with Lanczos algorithm. *Int J Numer Methods in Eng*, 1986, **23**: 1705~ 1713

4 Qian Lingxi. An order-reduction method for extraction of eigenvalue of dynamic systems. *Comput and Struct*, 1995, **54**(6): 1099~ 1103

A symmetric solution method for eigenproblem of gyroscopic system

Liu Shutian, Gu Yuanxian, Cheng Gengdong

(Res. Inst. of Eng. Mechanics, Dalian Univ. of Technol., China)

Abstract This paper presents an efficient solution method, symmetric method, for solving the quadratic eigenproblem arising in the analysis of gyroscopic systems. The quadratic eigenproblem is reduced to a standard eigenproblem defined by a symmetric real matrix. Numerical example shows that the method is effective.

Key Words characteristic value problems /gyroscopic system; symmetric method

EI收录中国高等学校学报论文数量统计

美国《工程索引》(EI)是国际上著名的工程技术领域的综合性检索工具,它是我国工程技术人员及其他相关人员经常使用的一种工具。被EI收录论文数量的多少,已成为衡量一个国家、地区、单位科研水平以及一个学科发展程度的重要标志之一,也是衡量一种学术期刊质量的依据之一。

截至1999年9月末,我国的学术期刊已有9种被EI收录,所收期刊种数及论文数量均呈上升趋势。我国高等学校学报在学术期刊中占有很重要的地位,但从高等学校学报被EI收录的种数及论文数量来看,却未体现出其相应地位。以上是近三年来EI收录我国高等学校学报论文数量的统计。

| 学 报 名 称 | 收 录 论 文 (篇) | | | 学 报 名 称 | 收 录 论 文 (篇) | | |
|---------------|-------------|------|------|-----------------|-------------|------|------|
| | 1995 | 1996 | 1997 | | 1995 | 1996 | 1997 |
| 北京化工大学学报 | 11 | 0 | 0 | 清华大学学报(自然科学版) | 16 | 111 | 194 |
| 北京航空航天大学学报 | 38 | 70 | 126 | 武汉工业大学学报(材料科学版) | 0 | 41 | 45 |
| 北京理工大学学报(英文版) | 0 | 31 | 16 | 西安交通大学学报 | 86 | 99 | 0 |
| 大连理工大学学报 | 156 | 27 | 22 | 西安石油学院学报 | 6 | 72 | 38 |
| 湖南大学学报(自然科学版) | 0 | 0 | 25 | 西北工业大学学报 | 70 | 104 | 107 |
| 华东理工大学学报 | 0 | 49 | 0 | 湘潭矿业学院学报 | 21 | 34 | 15 |
| 兰州大学学报(自然科学版) | 0 | 0 | 1 | 中国纺织大学学报(英文版) | 14 | 13 | 28 |
| 南京理工大学学报 | 103 | 36 | 20 | 中南工业大学学报(英文版) | 0 | 7 | 0 |
| | 合 计 | | | | 511 | 694 | 627 |

(注: 以上数据均据 EI光盘数据库, 1999年数据统计至9月末)

(国家教委科技查新中心大连工作站 周建阳 毛志远)