第13卷第3期
2014年9月

湖南邮电职业技术学院学报
Journal of Hunan Post and Telecommunication College

Vol.13 No.3
Sept.2014

三次样条插值——三转角方程的算法设计

何丽丽

（佳木斯大学信息电子技术学院，黑龙江佳木斯　154007）

【摘　要】三次样条插值是数值分析中插值问题的一个重要算法，主要解决的问题是已知原曲线上一些离散的点处函数值及端点处导函数值，从而得到曲线方程数值解的过程。该算法根据已知条件不同而分为三转角方程和三弯矩方程两种方法，文章主要讨论三转角方程算法原理及实现。

【关键词】三次样条；三转角方程；算法设计

【doi:10.3969/j.issn.2095-7661.2014.03.014】

【中图分类号】TP301.6　　【文献标识码】A　　【文章编号】2095-7661(2014)03-0056-03

Cubic spline interpolation function—algorithm of trigonometric equation

HE Li-li

（Information Electronics Technology Institute, Jiamusi University, Jiamusi, Heilongjiang, China 154007）

Abstract: Cubic spline interpolation is an important algorithm in numerical analysis, mainly solving the problem of knowing the function value of some discrete point on the original curve and the endpoint derivatives to obtain the curve equation. The algorithm is divided into trigonometric equation and three moment equations according to the different known conditions. This paper mainly discusses the principle and implementation of three angle equation algorithm.

Keywords: cubic spline; three angle equation; algorithm design

数值算法需解决的问题中有一类是将离散的问题连续化,解决这类问题的主要方法就是插值方法。根据给定的插值节点不同，有不同的插值算。在插值区间内进行分段低次插值是避免龙格现象重要手段。所谓龙格现象是指在高次插值时在插值区间端点附近出现严重失真的一种现象。分段插值算法有分段线性插值、Hermite插值、三次样条插值等方法，其中三次样条插值算法精度最高，连续曲线可达二阶光滑。

三次样条中“样条”的概念来源于生产实践,“样条”是一个富有弹性的细长条，它是绘制曲线的一种绘制工具,绘图时用压铁使样条通过指定的样点，调整至满意形状，然后沿样条画出曲线，这种曲线称为样条曲线。由于样条曲线精确度高，故在实际应用中，使用该方法模拟精度要求较高的曲线，如飞机的机翼型线、船体放样型值等，保证曲线的二阶光滑。

1　三次样条算法原理

设函数S(x)为区间[a,b]上的三次样条函数，$a=x_0<x_1<\cdots x_n=b$是给定节点，则S(x)满足：

1）S(x)在每个小区间$[x_k，x_{k+1}]$上是三次多项式；

2）$S(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots，n)$；

3）S(x)在每插值区间[a,b]上为二阶导数连续的函数。

由于S(x)在每个小区间上为三次多项式，故总计4n个待定系数，根据已知条件中二阶导函数连续，

[收稿日期]2014-05-10

[基金项目]本文系佳木斯大学教学研究重点项目（项目编号：JYLA2012-013）；佳木斯大学科学技术项目（项目编号：L2013-075）的研究成果。

[作者简介]何丽丽（1979-），女，黑龙江佳木斯人，佳木斯大学信息电子技术学院讲师，在读研究生，研究方向：人工智能。

在节点 $x_i(i=1,\cdots,n-1)$ 处应满足如下条件：

$$\begin{cases} S(x_i-0)=S(x_i+0) \\ S'(x_i-0)=S'(x_i+0) \\ S''(x_i-0)=S''(x_i+0) \end{cases} \quad (i=1,\cdots,n-1)$$

共有 3n-3 个条件，加上插值条件 $S(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots n)$ 共有 4n-2 个条件，因此另外增加 2 个条件即可，如果增加的条件是 y'_0 和 y'_n，则为三转角方程算法；如果增加的条件是和 y''_n，则为三弯矩方程算法。下面具体分析三转角方程算法原理及实现过程。

2　三转角方程原理

设 $S'(x_i)=m_i$ 已知，则可用 Hermite 插值构造三次多项式 $S(x)=\sum_{i=0}^{n}(y_i\alpha_i(x)+m_i\beta(x))$，若能求得 m_i 则 $S(x)$ 可求，利用 $S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$ 即可求得 $m_i(i=1,\cdots n-1)$。

若 $S(x)$ 在区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上，$h_k=x_{k+1}-x_k(k=0,\cdots n-1)$，

$S(x)=a_k(x)y_k+a_{k+1}(x)y_{k+1}+\beta_k(x)m_k+\beta_{k+1}(x)m_{k+1}$，其中系数函数为：

$$\alpha_k(x)=\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right),\quad \alpha_{k+1}(x)=\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right),$$

$$\beta_k(x)=\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2(x-x_k),\quad \beta_{k+1}(x)=\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2(x-x_{k+1})。$$

然后要对 $S(x)$ 函数求做二阶导函数，主要是对系数函数求解二阶导，即：

$$S''(x)=\alpha''_k(x)y_k+\alpha''_{k+1}(x)y_{k+1}+\beta''_k(x)m_k+\beta''_{k+1}(x)m_{k+1}，其中$$

$$\alpha''_k(x)=\frac{1}{h_k^3}(12x-6x_k-6x_{k+1}),\quad \alpha''_k(x)=-\frac{1}{h_k^3}(12x-6x_k-6x_{k+1}),$$

$$\beta''_k(x)=\frac{1}{h_k^2}(6x-2x_k-4x_{k+1}),\quad \beta''_{k+1}(x)=\frac{1}{h_k^2}(6x-2x_{k+1}-4x_k)。$$

在相邻区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 和 $[x_k, x_{k+1}]$ 临界点 x_k 处有 $S''(x_k-0)=S''(x_k+0)$，则

$$S''(x_k+0)=\frac{6}{h_k^3}(x_{k+1}+x_x-2x)(y_{k+1}-y_k)+\frac{1}{h_k^2}(6x-4x_{k+1}-2x_k)m_k+\frac{1}{h_k^2}(6x-2x_{k+1}-4x_k)m_{k+1}$$

$$S''(x_k-0)=\frac{6}{h_{k-1}^3}(x_k+x_{x-1}-2x)(y_k-y_{k-1})+\frac{1}{h_{k-1}^2}(6x-4x_k-2x_{k-1})m_{k-1}+\frac{1}{h_{k-1}^2}(6x-2x_k-4x_{k-1})m_k$$

由 $S''(x_k-0)=S''(x_k+0)\Rightarrow(1-a_k)m_k-1+2m_k+a_km_{k+1}=b_k$，

$(k=1,\cdots n-1)\cdots\cdots$①其中 $a_k=\dfrac{h_{k-1}}{h_k+h_{k-1}}$，

$$b_k=3\left((1-a_k)\frac{y_k-y_{k-1}}{h_{k-1}}+a_k\frac{y_{k+1}-y_k}{h_k}\right)。$$

另增加边界条件 $y'_0=m_0=S'(x_0)$，$y'_n=m_n=S'(x_n)$，将这两个条件代入①式，可得以下两个等式，$2m_1+a_1m_2=b_1(1-a_1)m_0$，$(1-a_{n-1})m_{n-2}+2m_{n-1}=b_{n-1}-a_{n-1}m_n$，故可得求 $m_1\cdots m_{n-1}$ 的 n-1 个方程，如下：

$$\begin{pmatrix} 2 & a_1 & & & \\ 1-a_2 & 2 & a_2 & & \\ & 1-a_3 & 2 & a_3 & \\ & & & \cdots & \\ & & & 1-a_{n-1} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1-(1-a_1)y'_0 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1}-a_{n-1}y'_n \end{pmatrix}$$

这个线性方程组为主对角占优矩阵，故可用追赶法求解。在三转角方程中，由于边界条件是插值区间端点处的一阶导函数值，故求出其它插值节点处的一阶导函数即可构造三转角方程，代入 $S(x)=a_k(x)y_k+a_{k+1}(x)y_{k+1}+\beta_k(x)m_k+\beta_{k+1}(x)m_{k+1}$。在 $S(x)$ 中

基函数 α(x) 和 β(x) 的函数表达式是根据 Hermite 算法而得。三次样条插值算法是分段函数，故而基函数具有局部非零性质，当插值节点有误差时，这种局部非零性质将误差控制在了一个局部区域内。由于三次样条插值函数是具有二阶光滑的曲线，故而在整个定义域区间上是原函数连续且二阶导函数连续的，在同类分段插值算法中三次样条算法是光滑程度最高的算法，精度高，应用范围更广。

3 三转角方程算法描述

1）for i=1 to n h[i-1]=x[i]-x[i-1]

2）for i=1 to n-1 c[i]=h[i-1]/(h[i]+h[i-1]) b[i]=2

3）for i=1 to n-1 a[i]=1-c[i+1]

4）d[1]=b[1]-(1-a[1])*m_0 d[n]=b[n-1]-a[n-1]*m_n

5）for i=2 to n-1 d[i]=3*((1-a[i])*(y[i]-y[i-1])/h[i-1]+a[i]*(y[i+1]-y[i])/h[i])

6）u[1]=c[1]/b[1] q[1]=d[1]/b[1]

7）for i=2 to n-2 u[i]=c[i]/(b[i]-u[i-1]*a[i]) q[i]=(d[i]-q[i-1]*a[i])/(b[i]-u[i-1]*a[i])

8）m[n-1]=q[n-1]=(d[n-1]-q[n-2]*a[n-1])/(b[n-1]-u[n-2]*a[n-1]

9）for i=n-2 to 1 m[i]=q[i]-u[i]*m[i+1]

4 小结

三转角方程仅需要已知所有插值节点处的原函数值及插值区间端点处的一阶导函数值，故比较容易获得，且精度又较 Hermite 插值高，是一种容易实现，比较成熟的插值算法。三转角方程属于分段插值算法，分段区间内三次插值函数避免了高次插值的边界点处误差较大甚至严重失真的龙格现象。

【参考文献】

[1] Hairer E，Nosett S P，Wanner G.Solving Ordinary Differential Equation I;Nonstiff Problem [M] .Heidelberg:Spriner-Verlag，1993.

[2] Hairer E，Wanner G.Solving Ordinary Differential Equation II：Stiff and Differential-Algebraic Problems[M] .Heidelberg:Spriner-Verlag，1996.

[3] 张诚坚，高健，何南忠 . 计算方法 [M] . 北京：高等教育出版社，2005.

[4] 莫崇勋 . 三次样条插值函数在调洪演算中的应用 [J]. 水力发电，2013（11）.

[5] 陈弘 . 基于三次样条插值的车辆行驶数据分析 [J]. 汽车技术，2013（11）.

(上接 P55）

省直单位的接入方式基本一致，这里不再重复。

（3）县（区、市）直单位的接入方式设计

由于每个县（区、市）的电子政务业务、地理位置、链路资源、技术及资金情况各不相同，可根据自身的发展情况灵活的选择接入方式。

3 结束语

本文根据湖南省电子政务内网组网方案，为合理利用现有网络资源，针对通信线路解决方案进行了规划，就网络平台解决方案分广域网（纵向网）设计和城域网（横向网）设计对网络结构和节点设备配置作了全面规划设计。

电子政务网在充分发挥政府职能，提高政府工作效率，更好地服务现代化建设方面将发挥重要作用。电子政务网必将朝着技术先进、性能完善、安全可靠的方向发展。

【参考文献】

[1] 李千连 . 华为助力北京通信打造面向未来的多业务 IP 城域网 [J]. 电信科学 ,2007.

[2] 白俊峰 ; 赵鹏 . 政府信息化及电子政务的应用系统 [J]. 吉林政报 (2008* 理论专刊), 2008.

[3] 彭炜 , 杨贯中 , 康劲 , 漆华妹 . 宽带城域网网络优化策略探讨 [J]. 信息网络 ,2005.

[4] 杜军龙 . 基于 MPLS-VPN 技术的电子政务网（2）的实现 [D]. 南昌：南昌南昌大学 , 2009.

[5] 陆敬筠 , 邵锡军 . 电子政务标准化技术 [J]. 电子政务 , 2005(Z5).