

目录结构

0 引言

1 陀螺仪动力学模型

2 阻尼条件下的陀螺仪...

3 仿真与分析

4 结 论

文内图表

图1 陀螺仪运动模型Fig 1 Movement model of gyroscope

图2 陀螺仪运动时的力矩矢量Fig 2 Torques vector of moving gyroscope

图3 章动伴随进动Fig 3 Nutation with precession

图4 阻尼下的进动角速度Fig 4 Precession angular velocity with damping

图5 阻尼下的章动角速度Fig 5 Nutation angular velocity with damping

参考文献

陀螺仪进动与章动运动分析

张志利 周召发

第二炮兵工程大学兵器发射理论与技术国家重点学科实验室

导出/参考文献 分享- 创建引文跟踪 收藏 打印

摘 要：为了分析阻尼条件下陀螺仪章动与进动关系，从陀螺仪动力学模型出发，利用动静法建立运动方程，推导出理想条件下和阻尼条件下的进动与章动模型，指出章动方向上角度的变化中包含重力矩引起的章动和铅垂轴方向阻尼力矩引起的转子轴进动2个方面的影响，并通过实验得到进动和章动摆动曲线，同时证明阻尼能有效消除章动，为以后研究陀螺仪章动提供理论依据。

关键词：陀螺仪；进动；章动；运动分析；

收稿日期：2012-03-22

基金：国家自然科学基金资助项目（41174162）；

Movement analysis of precession and nutation of gyroscope

Abstract：In order to analyze the relationship between nutation and precession of gyroscope with damping, equation of motion of gyro is established by static and dynamic method from dynamical model of gyroscope.Models of precession and nutation in condition of ideality and damping are deduced.It is presented that the angle on the direction of nutation includes nutation caused by gravity torque and axis precession caused by damping torque on direction of vertical axis.The swing curves of precession and nutation are produced by experiments and it is proved that damping can effectively eliminate nutation.It can provide theoretical judgment for research on nutation of gyroscope.

Keyword：gyroscope;precession;nutation;movement analysis;

Received：2012-03-22

0 引言

陀螺仪是近些年来兴起的常用导航和定向仪器，在航空、航天、探测、隧道、军事等领域得到广泛应用^[1,2]。随着科技与生产力的发展，相关行业对寻北精度的要求日益提高，尤其是实验室条件下建立方位基准。而章动是陀螺仪完成进动寻北过程中不可避免的^[3]，分析陀螺仪的章动与进动的关系，研究章动的运动规律显得很有必要。文献[4]对陀螺和陀螺仪的进动与章动提出一种初等分析方法^[4]。本文从陀螺仪动力学模型出发，推导进动和章动模型与章动的运动规律，并通过实验验证。

1 陀螺仪动力学模型

依据力学中的达朗伯原理，将牛顿第二定律F=ma变换为F+Q=0，Q=-ma表示物体的惯性力，一般为相对惯性力、牵连惯性力和哥式惯性力三者的矢量和，如此可使动力学问题转变为静力学问题求解，从形式上把受力运动状态转为受力平衡状态，这种处理问题的方法称为动静法

或惯性力法^[4,6]，本文采用此法建立陀螺仪动力学模型。通过如图1的一个简化的陀螺仪模型来分析理想陀螺转子的进动与章动。

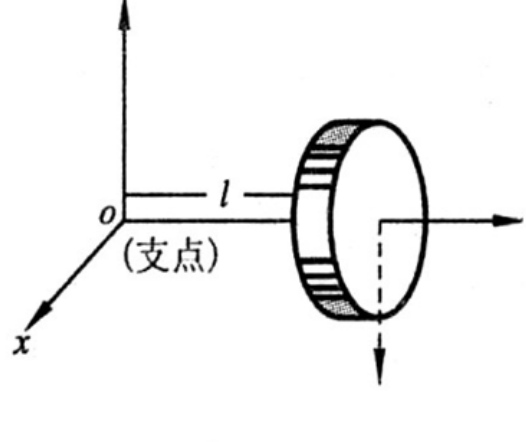


图1 陀螺仪运动模型Fig 1 Movement model of gyroscope 下载原图

设在陀螺仪中，圆盘绕自旋轴的转动惯量为I_s，转动角速度为ω_s，则圆盘自旋角动量的大小H=I_sω_s；绕x轴和z轴的转动惯量为I_p，转动角速度ω_x和ω_z分别为章动角速度和进动角速度。

由于陀螺具有绕x轴和z轴的转动惯量，当陀螺仪绕x轴和z轴出现角加速度 $\dot{\omega}_x$ 和 $\dot{\omega}_z$ 时，就有一般定轴转动刚体的转动惯性力矩，方向与角加速度的方向相反，如图2所示，其表达式为

$$\begin{cases} M_{Ix} = -I_P \dot{\omega}_x \\ M_{Iz} = -I_P \dot{\omega}_z \end{cases} \quad (1)$$

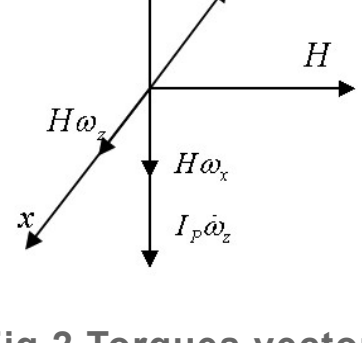


图2 陀螺仪运动时的力矩矢量Fig 2 Torques vector of moving gyroscope 下载原图

由于陀螺仪具有角动量H，当陀螺仪绕x轴和z轴出现角速度ω_x和ω_z时，就有哥式惯性力矩，即陀螺力矩，方向按角动量转向角速度的右手旋进规则确定，如图2所示，在假设转角很小的情况下，其表达式为

$$\begin{cases} M_{Gz} = H \omega_z \\ M_{Gx} = -H \omega_x \end{cases} \quad (2)$$

根据惯性力矩与外力矩互成平衡原理可得

$$\begin{cases} M_{Ix} + M_{Gx} + M_x = 0 \\ M_{Iz} + M_{Gz} + M_z = 0 \end{cases} \quad (3)$$

代入得

$$\begin{cases} I_P \dot{\omega}_x - H \omega_x = -mgl \\ I_P \dot{\omega}_z + H \omega_z = 0 \end{cases} \quad (4)$$

由式（3）消除ω_z即可得到ω_x所满足的微分方程

$$\ddot{\omega}_x + \frac{H^2}{I_P^2} \omega_x = 0. \quad (5)$$

设初始条件:t=0时，ω_x=ω_x（0），解式（5）可得到

$$\omega_x = \begin{cases} C_2 \sin kt, \varphi = 0 \\ \frac{\omega_x(0)}{\sin \varphi} \sin(kt + \varphi), \varphi \neq 0 \end{cases}, \quad (6)$$

式中 $k = \frac{H}{I_P}$ ，为角速度ω_x的角频率，其值取决于自旋角动量H与转动惯量I_p的比值： $\varphi = \arctan \frac{C_1}{C_2}$ 由初始条件决定。

将ω_x代入式（4）可得到陀螺仪绕z轴转动的角速度ω_z（进动角速度）

$$\omega_z = \begin{cases} C_2 \cos kt + \frac{mgl}{H}, \varphi = 0 \\ \frac{\omega_z(0)}{\sin \varphi} \cos(kt + \varphi) + \frac{mgl}{H}, \varphi \neq 0 \end{cases}. \quad (7)$$

设初始条件:t=0时，ω_z=ω_z（0）可得

$$C_2 = \frac{H \omega_z(0) - mgl}{H \cos \varphi}.$$

设ω_x（0）=0，ω_z（0）=0，对2个角速度分别积分，考虑初始条件

$$\begin{cases} \theta_x = -\frac{mgl I_P}{H^2} (1 - \cos kt) \\ \theta_z = -\frac{mgl I_P}{H^2} \sin kt + \frac{mgl}{H} t \end{cases}. \quad (8)$$

2 阻尼条件下的陀螺仪进动与章动

若考虑阻尼，则外力矩M_外包括重力矩在x轴投影和阻尼力矩两项，一般阻尼力矩与角速度的大小呈正比，方向相反

$$M_{\text{外}} = (-mgl - n\omega_x)x - n\omega_z z. \quad (9)$$

其中，n为阻尼系数，则式（4）改写为

$$\begin{cases} I_P \dot{\omega}_x - H \omega_x = -mgl - n\omega_x \\ I_P \dot{\omega}_z + H \omega_z = -n\omega_z \end{cases}. \quad (10)$$

由式（10）消除ω_z，即可得到ω_x所满足的微分方程

$$\ddot{\omega}_x + \frac{2n}{I_P} \dot{\omega}_x + \frac{H^2 + n^2}{I_P^2} \omega_x = \frac{-nmgl}{I_P^2}. \quad (11)$$

解得

$$\omega_x = \exp\left(-\frac{n}{I_P} t\right) (C_3 \cos kt + C_4 \sin kt) - \frac{nmgl}{H^2 + n^2}. \quad (12)$$

由初始条件可得到

$$C_3 = \frac{nmgl}{H^2 + n^2}.$$

将ω_x代入式（10）可得到陀螺仪绕z轴转动的角速度ω_z（进动角速度）

$$\omega_z = \exp\left(-\frac{n}{I_P} t\right) (C_3 \sin kt + C_4 \cos kt) + \frac{Hmgl}{H^2 + n^2}. \quad (13)$$

由初始条件可得:C₄ = $-\frac{Hmgl}{H^2 + n^2}$ ，为简便起见，设N = $\frac{mgl}{H^2 + n^2}$ ，则有

$$\begin{cases} \omega_x = \exp\left(-\frac{n}{I_P} t\right) (nN \cos \frac{H}{I_P} t + NH \sin \frac{H}{I_P} t) - nN \\ \omega_z = \exp\left(-\frac{n}{I_P} t\right) (-nN \sin \frac{H}{I_P} t - NH \cos \frac{H}{I_P} t) + NH \end{cases}. \quad (14)$$

这里要说明的是解出的ω_x并不是单纯章动的角速度，而是包含了重力矩引起的章动和z轴阻尼力矩-nω_z引起的y轴进动对ω_x的影响，后者设为ω'_x，考虑章动时应去掉该影响。由进动角速度计算公式得

$$\begin{aligned} \omega'_x &= \frac{-n\omega_z}{H} = -\frac{n}{H} \exp\left(-\frac{n}{I_P} t\right) (-nN \sin \frac{H}{I_P} t - \\ &NH \cos \frac{H}{I_P} t) - nN. \end{aligned} \quad (15)$$

设章动角速度为ω_N，有

$$\omega_N = \omega_x - \omega'_x = -\frac{mgl}{H} \exp\left(-\frac{n}{I_P} t\right) \sin \frac{H}{I_P} t. \quad (16)$$

3 仿真与分析

对无阻尼状态陀螺转子的进动与章动角度仿真见图3，初始进动和章动的初始角速度均为零，从仿真结果可以看出：随着陀螺仪在重力矩下的进动，章动呈周期性的振荡，陀螺轴在下倾一定角度后又抬回到水平面。

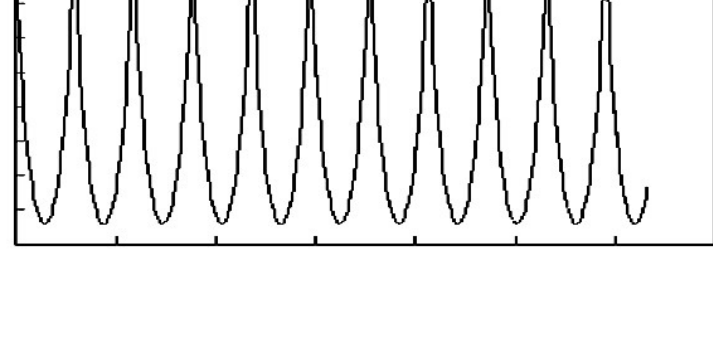


图3 章动伴随进动Fig 3 Nutation with precession 下载原图

对阻尼条件下的陀螺仪进动和章动的角速度变化仿真结果分别如图4和图5所示。从仿真结果可以看出，章动角速度在阻尼影响下逐渐衰减到零，而进动角速度趋于一个定值，即最后阻尼消除了章动，陀螺转子轴只以不变的角度速度绕铅垂轴进动。

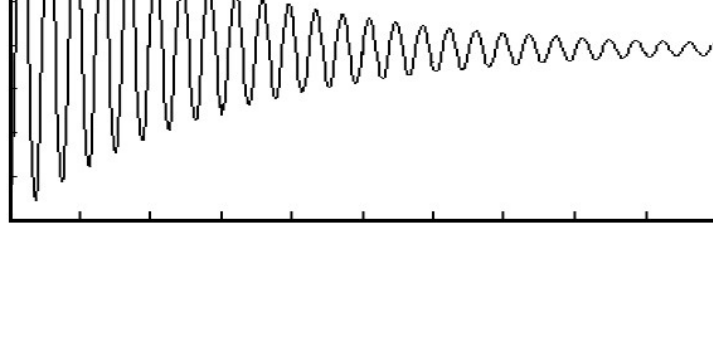


图4 阻尼下的进动角速度Fig 4 Precession angular velocity with damping 下载原图

4 结论

本文通过动静法建立陀螺仪动力学方程，推导进动与章动在无阻尼和有阻尼条件下的表达式，指出了垂直角包含重力矩引起的章动和铅垂轴方向上的阻尼力矩引起的转子轴的进动，在单独分析章动时应该去掉后者。最后，通过仿真验证，章动是伴随进动由重力矩产生的周期振荡，在陀螺仪寻北过程中，利用阻尼能够有效消除章动对进动的影响，以提高寻北精度。

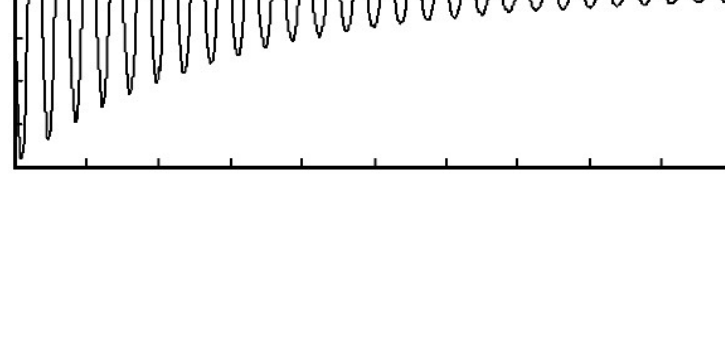


图5 阻尼下的章动角速度Fig 5 Nutation angular velocity with damping 下载原图

参考文献

[1]Chaumet B, Leverrier B, Rougeot C, et al.A new silicon tuningfork gyroscope for aerospace applications[C]//Gyro TechnologySymposium 2009, Karlsruhe, Germany, 2009:1-2.

[2]姜春福.悬挂式二自由度陀螺经纬仪运动规律的研究[D].北京:北京工业大学, 2000.

[3]刘廷柱.陀螺力学[M].2版.北京:科学出版社, 2009:53-63.

[4]廖耀发, 余守宪.陀螺与陀螺仪进动及章动的一种初等分析[J].湖北工学院学报, 2004, 19 (5) :43-46.

[5]郭秀中, 于波, 陈云相.陀螺仪理论及应用[M].北京:航空工业出版社, 1987:63-67.

[6]刘希珠, 雷田玉.陀螺力学基础[M].北京:清华大学出版社, 1987:91-99.