

教 学 研 究

对称陀螺的旋进和章动的简化讨论^{*}

李 复

(清华大学现代应用物理系,北京 100084)^②

摘要 引入陀螺总角动量的旋进角速度,从运动学角度讨论高速自转陀螺的旋进和章动,用简便方法给出旋进角速度和章动角速度的定量关系式并讨论近似结果.

关键词 对称陀螺;旋进;章动

分类号 O 313.3

普物力学中讨论的刚体定点运动,是陀螺的稳定旋进,即在重力矩作用下,陀螺的对称轴(自转轴)绕竖直轴以不变角速度 Ω 转动,运动过程中重力矩 M 的大小和陀螺总角动量 L 的大小都不改变, M 、 L 随陀螺自转轴一起转动,由角动量定理^[1]有: $M=\Omega\times L$.实际陀螺在 M 作用下的定点运动并非如此简单,一般情况下其自转轴的运动是伴随着章动的旋进.为了在普物教学中解释陀螺的实际定点运动,笔者引入 L 的旋进角速度 Ω_L .在陀螺运动中, L 一般不在陀螺的自转轴上而是与之分离,所以 Ω_L 是观察不到的假想角速度,与实际看到的陀螺自转轴旋进角速度不同.有了 Ω_L 和合适坐标系,就可以从运动学角度讨论陀螺高速自转情况下的章动和旋进.本文仅讨论对称陀螺高速自转情况下的定点运动.

建立坐标系如图1, $Oxyz$ 为固定坐标系, $Ox_1x_2x_3$ 为转动坐标系,其中 x_3 轴为陀螺的对称轴即自转轴; x_2 轴在 x_3z 平面内与 x_3 轴垂直; x_1 轴与 x_2 、 x_3 轴垂直,在 xy 平面内. OP 为 x_2x_3 平面与 xy 平面交线.陀螺绕 x_1 、 x_3 轴转动角速度分别为 k_1 、 k_2 、 k_3 , $k_1=\dot{\theta}=\dot{\varphi}$ 为章动角速度,

旋进角速度 h 在 x_2 轴投影为 k_2 ,即 $k_2=h\cos\alpha$. $Ox_1x_2x_3$ 坐标系与理论力学中通常采用的固接在陀螺上的动坐标系不同, x_1 、 x_2 轴位置由 x_3 轴位置决定,与陀螺的自转 k_3 无关, x_3 轴的转动完全由 k_1 、 k_2 决定,这样就将陀螺的自转与对称轴的转动分开,并且将章动与旋进分开,其中 α 、 Z 可正可负,对高速自转陀螺 $|\alpha|$ 、 $|Z|$ 较小.

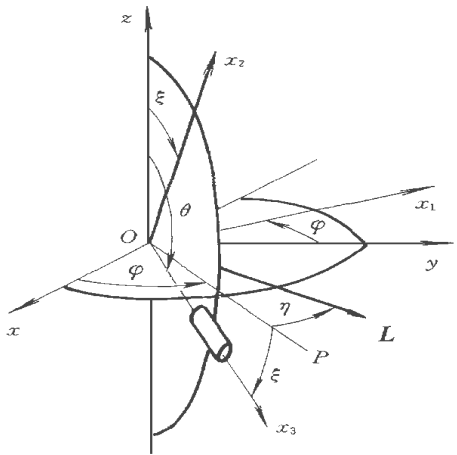


图1

x_1 、 x_3 轴为陀螺的惯量主轴,设相应转动惯量分别为 I_1 、 $I_2=I_1$ 、 I_3 ,则相应角动量

^{*} 清华大学工科物理基地教学改革基金资助项目

^② 收稿日期: 1997-08-15;修回日期: 1998-05-08

$$L_1 = I_1 k_1, L_2 = I_2 k_2 = I_1 k_2, L_3 = I_3 k_3 \quad (1)$$

$$\text{由图知} \quad K_L = h_z \dot{Z} \quad (2)$$

由于重力矩总与 z 轴垂直, 所以 L_z 为守恒量; 由于是对称陀螺, 由欧拉动力学方程^[2]知, L_3 为守恒量.

1 L 水平情况

用手支持 x 轴使之水平, 陀螺稳定自转, $a = Z = 0, L = L_3$. 突然放手, $L_z = 0$, 重力矩作用下 L 立刻在水平面上以 K_L 旋转. 经 dt 后 OP 与 L 之间夹角 $Z = K_L dt$, 这样出现 $L_1 = L \sin Z$, 于是 $a = L \sin Z / I_1 > 0$, x 轴向下章动, 短时间转 a 角度 (所以松手后瞬间陀螺并不旋进而是向下章动), 这样出现 $L_2 = L \cos Z \sin a$, 于是 $h = k_z / \cos a = L \cos Z g a / I_1 > 0$, x 轴绕 z 轴旋进. 但此时 $h < K_L$, 所以 $\dot{Z} = K_L - h > 0$, Z 继续增加, 随之增加, a 更快增大, x_3 轴继续向下, h 迅速增大, x_3 轴旋进加快“追赶” L , 直到 x 轴到 L 正下方, $Z = 0, a = 0$, 而 $h > K_L, \dot{Z} < 0$. 接下去 $Z < 0, a < 0$, x 轴上抬, 旋进减慢. 最后 x_3 轴回到水平面与 L 重合, 完成一个章动循环.

下面计算 a, h, K_L 与参量 a, Z 和守恒量 L_3 的关系 (图 1). 由

$$L_3 = L \cos Z \cos a$$

$$\text{得} \quad L = L_3 / \cos a \cos Z \quad (3)$$

于是章动角速度

$$a = \frac{L_3 \operatorname{tg} Z}{I_1 \cos a}$$

旋进角速度

$$h = \frac{L_3 \operatorname{tg} a}{I_1 \cos a} \quad (4)$$

设陀螺质量为 m , 质心到 O 点距离为 l , 则对 O 点重力矩为

$$M = mgl \cos a e_{x_1} \quad (5)$$

由角动量定理 $M = \dot{L}$. M 分解为平行于 L 方向的分矢量 M_{\parallel} 和垂直于 L 方向的分矢量 M_{\perp} ; L

分解为大小变化率 (平行于 L 方向) 和方向变化率 $\Omega_L \times L$ (垂直于 L 方向), 所以 $M_{\perp} = \Omega_L \times L$, 于是得

$$K_L = \frac{M_{\perp}}{L} = \frac{mgl}{L_3} \cos^2 a \cos^2 Z = K_{L0} \cos^2 a \cos^2 Z \quad (6)$$

其中 $K_{L0} = mgl / L_3$. 式 (2), (4), (6) 是从运动学角度讨论陀螺运动的基本关系式. 由于 a 较小, $\cos a \approx 1$, a, Z 分别是 Z, a 的单调增函数, 这正是前面解释陀螺进行章动循环的根据.

若 $a, Z \ll 1$, 上面各式的一阶近似为

$$L = L_3, K_L = K_{L0}, a = k_0 Z, h = k_0 a \quad (7)$$

其中 $k_0 = L_3 / I_1$. 于是

$$\dot{Z} = K_L - h = K_{L0} - k_0 a \quad (8)$$

对 t 求导后将 a 代入得到: $\ddot{Z} = -k_0^2 Z$ 初始条件:

$$\dot{Z}|_{t=0} = 0, \dot{Z}|_{t=0} = K_{L0}. \text{ 于是 } Z = A_0 \sin k_0 t, \text{ 其中 } A_0 = K_{L0} / k_0 = mgl I_1 / L_3^2 \quad (9)$$

$$\text{代入式 (8) 得 } a = A_0 (1 - \cos k_0 t) \quad (10)$$

$$a, Z \text{ 满足 } (a - A_0)^2 + Z^2 = A_0^2 \quad (11)$$

因此在 $a, Z \ll 1$ 条件下, L, K_L 近似不变, L 近似作稳定旋进; a, Z 作振幅、频率相同的谐振动, 当 L_3 很大, 即陀螺高速自转时, $A_0 \ll 1$, 则 $a, Z \ll 1$.

图 2 实线描绘一个章动循环中 a, Z 的变化, 由此可详细分析一个完整的章动过程: 1) Oa

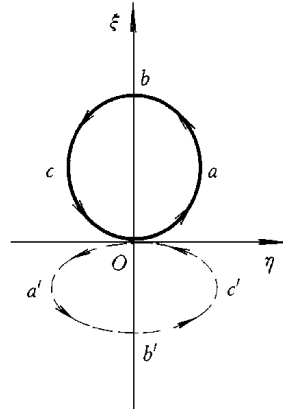


图 2

段: $a \rightarrow Z$ 增大使 h 增大而 Z 减少. 到 a 点 $h = K_L$, $Z = 0$; 2) ab 段: a 继续增大使 h 增加, $Z < 0$, Z 减少使 a 减少. 到 b 点 $Z = 0$, $a = 0$, x 轴到最低点处于 L 正下方; 3) bc 段: $Z < 0$ 使 $a < 0$, a 减小, x_3 轴向上抬起, $|Z|$, $|a|$ 增大. 到 c 点 $h = K_L$, $Z = 0$.

4) co 段: a 减小使 h 减小. 到 O 点 x 轴抬到水平面上与 L 重合, $a = Z = 0$, $h = a = 0$, $Z = K_{L0}$. 整个变化过程可由下表清楚表明, 其中“ \pm ”表示该量的正负, “ \uparrow ”“ \downarrow ”表示该量的增减趋势.

	$O \rightarrow a$	a	$a \rightarrow b$	b	$b \rightarrow c$	c	$c \rightarrow O$	O
Y	$+$ \uparrow	$+$	$+$ \uparrow	$+$ 最大	$+$ \downarrow	$+$	$+$ \downarrow	0 最小
Z	$+$ \uparrow	$+$ 最大	$+$ \downarrow	0	$-$ \downarrow	$-$ 最小	$-$ \uparrow	0
h	$+$ \uparrow	$+$ K_L	$+$ \uparrow	$+$ 最大	$+$ \downarrow	$+$ K_L	$+$ \downarrow	0 最小
Y	$+$ \uparrow	$+$ 最大	$+$ \downarrow	0	$-$ \downarrow	$-$ 最小	$-$ \uparrow	0
Z	$+$ \downarrow	0	$-$ \downarrow	$-$ 最小	$-$ \uparrow	0	$+$ \uparrow	$+$ 最大 K_{L0}

因此陀螺自转轴 x_3 轴的实际运动, 就是伴随章动小循环的旋进, 旋进角速度在 $0 \sim h_{\max}$ 间变化, 端点轨迹如图 3(a) 所示, A 为放手点.

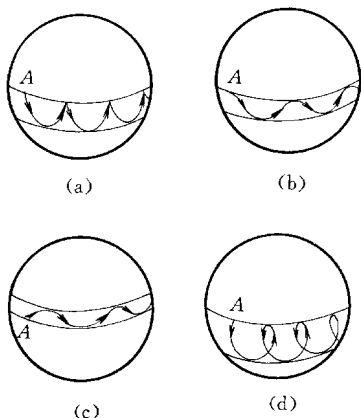


图 3

2 L 非水平情况——不同初始条件下的旋进和章动

用手支持 x 轴使之水平, 若放手瞬间给 x_3 轴端点一个向右冲量, 相当于陀螺具有初始旋进角速度 h_0 , L 不再水平, 有不为零的守恒量 $L_z = I_1 h_0$. 对高速自转陀螺 $|L_z|/|L_3| \ll 1$.

设 L 与 z 轴夹角为 U , 则 L 在 xy 平面上投影为 $L_{xy} = L \sin U$ (图 4). 取 L_{xy} 与 OP 夹角为 Z , 式 (2) 仍然正确. 令 L 在 OP 上投影为 L_P , 则 $L_P = L \sin U \cos Z$. 于是 $L_1 = L \sin U \sin Z$, $L_2 = L_P \sin$

$a + L_z \cos a = L \sin U \sin a \cos Z + L_z \cos a$. 而

$$L_3 = L_P \cos a - L_z \sin a$$

$$L \sin U \cos a \cos Z - L_z \sin a \quad (12)$$

从式 (12) 解出 $L \sin U$ 代入 L_1 , L_2 中得 $L_1 = (L_3 + L_z \sin a) \tan Z / \cos a$, $L_2 = (L_3 + L_z \sin a) \tan a + L_z \cos a$, 于是:

$$a = \frac{L_3 + L_z \sin a}{I_1 \cos a} \tan Z \quad (13)$$

$$h = \frac{L_2}{I_1 \cos a} = \frac{L_3 + L_z \sin a}{I_1 \cos a} \tan a + h_0$$

再由 $L_z = L \cos U$, 与式 (12) 联立解出

$$L^2 = \left[\frac{L_3 + L_z \sin a}{\cos a \cos Z} \right]^2 + L_z^2, \tan U = \frac{L_3 + L_z \sin a}{L_z \cos a \cos Z} L \quad (14)$$

由式 (14), L 还有上下转动 U , L 的总角速度 $\Omega_{\text{总}} = \Omega_L + \beta$. β 垂直于 L , L 构成的平面 (下面简称 zL 面), 则此时 $M_{\perp} = \Omega_{\text{总}} \times L = \Omega_L \times L + \beta \times L$. 其中 $\Omega_L \times L = \Omega_L \times L_{xy}$

垂直于 zL 面; $\beta \times L$

在 zL 面内. 将 M 在 xy 平面内分解为 M_{\perp} 和 M' , M_{\perp} 垂直于 zL 面与 $\Omega_L \times L$ 同方向, 是 M_{\perp}

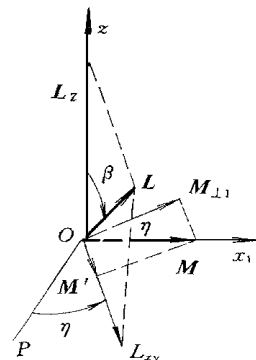


图 4

的一个分量; M' 在 zL 面内. 所以 $M_{\perp 1} = \Omega_L \times L_{xy}$. 由图 4, $M_{\perp 1} = mgl \cos \alpha \cos \theta$, 故

$$K_L = \frac{M_{\perp 1}}{L_{xy}} = \frac{mgl \cos^2 \alpha \cos^2 \theta}{L_{xy} + L_z \sin^2 \alpha} \quad (15)$$

当 $|\alpha|, |\theta| \ll 1$ 时, 取一阶近似有:

$$\alpha = k_0 \theta, \quad \theta = k_0 \alpha, \quad h_0, K_L = K_{L0} (1 - L_z^2 / L^3) \quad (16)$$

$$L^2 = L_{xy}^2 + L_z^2 + 2L_{xy}L_z \sin \alpha, \quad \tan \theta = L_{xy} / L_z + \alpha \quad (17)$$

与 L 水平情况不同, 一阶近似下 K_L, L 随 α 有小的改变.

仿照推导式 (9), (10), (11) 的方法, 由式 (2), (16) 得:

$$\alpha = \frac{k_0}{K} A (1 - \cos kt), \quad \theta = A \sin kt$$

$$\left[\frac{k}{k_0} \alpha - A \right]^2 + \theta^2 = A^2 \quad (18)$$

其中 $k = \frac{I_1 K_{L0} L_{xy} + L_z^3 / I_1}{K_{L0} h_0 + k_0^2}, A = (K_{L0} - h_0) / k$, 此外还有:

$$\theta = K_L - h = (K_{L0} - h_0) - (k_0 + K_{L0} L_z / L^3) \alpha \quad (19)$$

下面从式 (16), (19) 出发分两类讨论 L 非水平情况下陀螺的运动:

1) $h_0 > 0, L_z > 0, L$ 斜向上.

若 $h_0 < K_{L0}$, 放手时就有旋进 h_0 且 $\theta > 0$, 于是 $\theta > 0$ 使 $\alpha > 0$, x 轴向下转动使 h 增加 θ

减小, …… 与 L 水平类似只是章动幅度减小, $h \in (h_0, h_{\max})$, x 轴端点轨迹如图 3(b) 所示.

若 $h_0 = K_{L0}$, 放手时 $\theta = 0$, 于是 $\theta = 0$ 恒为零, $h = K_{L0}$, 陀螺没有章动, 在水平面上以 K_L 稳定旋进 (规则旋进).

若 $h_0 > K_{L0}$, 放手时 $\theta < 0$, 于是 $\theta < 0$ 使 $\alpha < 0$ ($\alpha < 0$ 图 2 虚线), x 轴从水平向上升, 使 h 减小 θ 增大. 到图 2 a' 点 $h = K_L, \theta = 0, |\theta|$ 达最大, x 轴继续抬升 $\theta > 0, |\theta|$ 减小, 到 b' 点 $\theta = 0, \alpha = 0, h = h_{\min} > 0$, x 轴到最高点处于 L

正上方. 此后 x 轴下降经 c' 点回到 O 点完成章动循环, $h \in (h_{\min}, h_0)$, x 轴端点轨迹如图 3 (c) 所示.

2) $h_0 < 0, L_z < 0, L$ 斜向下, 实际给陀螺向左冲量.

放手时陀螺反方向旋进, $\theta > K_{L0}$, 于是迅速出现 $\theta > 0$, x 轴更快下降使 h 迅速增大变为零再为正, 向正方向旋进, x 轴继续下降像 L 水平情况完成循环, $h \in (h_0, h_{\max})$. x 轴端点如图 3 (d) 所示.

3 参考文献

- 1 梁昆森. 力学. 北京: 人民教育出版社, 1965. 337
- 2 周衍柏. 理论力学教程. 北京: 人民教育出版社, 1979. 203

A SIMPLIFIED TREATMENT ON THE PRESSION AND NUTATION OF A SYMMETRIC TOP

Li Fu

(Department of Modern Applied Physics, Tsinghua University, Beijing, 100084, China)

Abstract The angular velocity of procession of the angular momentum of a top is introduced. The formulas of the angular velocity of procession and nutation of the symmetric top, which has large spin angular momentum, are derived simply and approximate results are obtained. The procession and nutation of the top are naturally explained.

Key words symmetric top; procession; nutation