

对称陀螺运动的简明分析方法

兰州大学 江先国

摘要 本文就对称刚体的情况提出一种求解刚体定点运动(即对称陀螺运动)的新方法。即,用节线坐标系代替固定在刚体上的主轴坐标系作为角动量定理的投影坐标系;在重力陀螺运动的分析中,用等效势分析代替解三次方程。此法较之通行的解欧勒动力学方程的方法,在计算方面明显简化,且更具直观性。

一、引言

陀螺运动理论在大量学科中占有重要位置——这些学科遍布于从天文学、应用力学到原子核物理学这样一个广阔的范围内。因此,它是物理和其它许多专业的“理论力学”课程的必修内容。但由于课时压缩,有关的分析又涉及一些繁复的计算,致使这部分内容的教与学成了一件吃力的事。

本文提出一种新的分析方法试图解决上述矛盾。新方法对教科书中传统的分析方法作了两点改动:第一,用节线坐标系代替固定在陀螺上的主轴坐标系;第二,在重力陀螺运动的分析中,用等效势分析代替解三次方程。新的方法在计算方面明显简化,且更具直观性,得到的结果并不减少。它唯一的局限是只适用于对称陀螺。但在教科书的全部习题范围内,以及就大多数的实用目的(包括物理及技术上的应用)而言,这种分析方法已经够用了。学生在掌握此方法之后,很容易掌握非对称陀螺的理论。作者将此法用于教学实践,收到了事半功倍的效果。

二、节线坐标系

在图1中 $Oxyz$ 是固定在陀螺上的本体主轴坐标系。原点 O 为陀螺的支点。陀螺对 Ox 、 Oy 、 Oz 三轴的主转动惯量分别为 I_1 、 I_2 、 I_3 。对于非对称陀螺,三个主转动惯量互不相等,因而 $Oxyz$ 是以 O 点为原点的唯一主轴坐标系。

图1中的 $O\xi\eta\zeta$ 坐标系静止在惯性空间中,其原点亦在 O 点。 Oxy 平面与 $O\xi\eta$ 平面的交线 ON 称为节线。陀螺在惯性空间中的位置由欧勒角坐标 ψ (自转角,绕 z 轴)、 φ (进动角,绕 ζ 轴)、和 θ (章动角,

绕 ON 轴)确定。

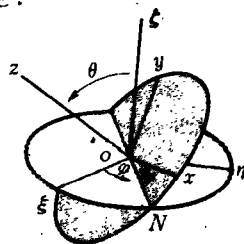


图1 陀螺本体坐标系 $Oxyz$ 和惯性系 $O\xi\eta\zeta$

对于对称陀螺,至少有两个主转动惯量相等,设为 $I_1 = I_2$ 。于是陀螺对 O 点的惯量椭球退化为旋转椭球, z 轴便是其旋转对称轴。此惯量椭球面与 Oxy 平面的交线是以 O 点为圆心的圆。因而, Oxy 平面上一切过 O 点的直线都是陀螺的惯量主轴(相应的主转动惯量值均为 I_1)。此时,与 Oz 轴垂直的两条主轴坐标轴可以在 Oxy 平面内任选,不必固定在陀螺上。

基于以上的认识,我们舍弃 Ox 、 Oy 两轴,改作如下选择:其一选节线 ON ,另一则选 Oxy 平面上与节线垂直的 OL (见图2),此后分别简称为 ON 轴与 OL 轴。由于 OL 、 $O\xi$ 、 Oz 三轴皆与 ON 轴正交,前三轴必在与 ON 轴垂直的平面内。 OL 、 $O\xi$ 两轴夹角为 $90^\circ - \theta$ 。由此我们得到了由 ON 、 OL 、 Oz 三轴组成的右手正交直角坐标系,它是对称陀螺的又一个主轴坐标系,称为节线系。

陀螺作一般运动时,其角速度为章动、进动与自旋角速度之和:

$$\omega = \theta \dot{e}_N + \varphi \dot{e}_\zeta + \psi \dot{e}_z \quad (1)$$

因 $Oxyz$ 坐标系固定在陀螺上, ω 也就是这个坐标系的角速度。 ω 在 Ox 、 Oy 、 Oz 三轴上的投影,便是所谓欧勒运动学方程。

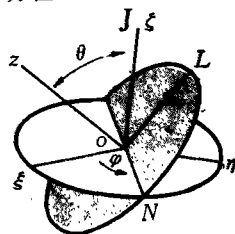


图2 节线坐标系 NLz

由图2知,当陀螺作章动和进动时,节线坐标系将随陀螺一起运动;而当陀螺仅绕 Oz 轴自旋时,节线坐标系是不动的.换言之, ON 、 OL 两轴并未固定在陀螺上,只是被限制在 Oxy 平面内.因而,节线坐标系的角速度为陀螺章动与进动角速度之和:

$$\Omega = \dot{\theta} \hat{e}_N + \dot{\phi} \hat{e}_z \quad (2)$$

以节线系轴向单位矢 \hat{e}_N 、 \hat{e}_ζ 和 \hat{e}_z 为基矢,陀螺对 O 点的惯量张量为

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

陀螺角速度 ω 的轴向分量为

$$\begin{cases} \omega_N = \dot{\theta} \\ \omega_L = \dot{\phi} \sin \theta \\ \omega_z = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (4)$$

(4)式相当于欧勒运动学方程,但比后者简单得多,而且 ω_N 具有明显的直观性:它就是陀螺对称轴(z 轴)倾倒或升起的角速度.这两个优点将给后面的应用分析带来明显的好处.

节线系本身的角速度 Ω 的轴向投影为

$$\begin{cases} \Omega_N = \dot{\theta} = \omega_N \\ \Omega_L = \dot{\phi} \sin \theta = \omega_L \\ \Omega_z = \dot{\phi} \cos \theta \end{cases} \quad (5)$$

陀螺对 O 点的角动量

$$\mathbf{J} = \hat{I} \cdot \omega = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_N \\ \omega_L \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\text{即} \begin{cases} J_N = I_1 \omega_N = I_1 \dot{\theta} \\ J_L = I_1 \omega_L = I_1 \dot{\phi} \sin \theta \\ J_z = I_3 \omega_z = I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \end{cases} \quad (6)$$

陀螺的基本运动微分方程是对 O 点的角动量定理

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J} = \mathbf{M} \quad (7)$$

此处 \mathbf{M} 为外力对 O 点的矩.在一般的教科书中,都取固定在陀螺上的 $Oxyz$ 坐标系为运动坐标系,借以计算

$\frac{d}{dt} \mathbf{J}$,应用矢量求导法则,(7)式可表示为

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J} + \omega \times \mathbf{J} = \mathbf{M} \quad (8)$$

此式中左边第一项为 \mathbf{J} 在 $Oxyz$ 坐标系内的时间变化率.(8)在 Ox 、 Oy 、 Oz 三轴上的投影即所谓欧勒动力学方程.

本文取节线系为运动坐标系,借以计算 $\frac{d}{dt} \mathbf{J}$, (7)式应表示为

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J} + \Omega \times \mathbf{J} = \mathbf{M} \quad (9)$$

上式左边第一项为 \mathbf{J} 在节线系内的时间变化率,(9)式的轴向投影为

$$\begin{cases} \dot{J}_N + (\Omega_L J_z - \Omega_z J_L) = M_N \\ \dot{J}_L + (\Omega_z J_N - \Omega_N J_z) = M_L \\ \dot{J}_z + (\Omega_N J_L - \Omega_L J_N) = M_z \end{cases}$$

把(5)(6)两式代入,上式即化为

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_N + (\Omega_L I_3 \omega_z - \Omega_z I_1 \omega_L) = M_N \\ I_1 \dot{\omega}_L + (\Omega_z I_1 \omega_N - \Omega_N I_3 \omega_z) = M_L \\ I_3 \dot{\omega}_z = M_z \end{cases} \quad (10)$$

(10)式相当于欧勒动力学方程.应用上面的结果,即可简易地导出常见的三种对称陀螺的基本运动规律.

三、三种常见的陀螺运动的分析

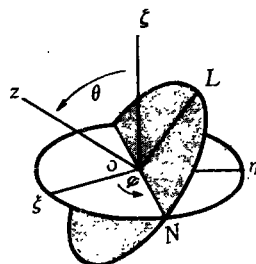


图3 惯性陀螺的 \mathbf{J} 为常矢,沿 ζ 轴方向

1. 惯性陀螺(自由陀螺、潘索陀螺)

因合外力为零,陀螺质心在惯性系 $O\xi\eta\zeta$ 中静止,取质心为原点 O ;又因合外力矩为零,陀螺角动量 \mathbf{J} 为常矢,故可选 $O\xi$ 轴与 \mathbf{J} 重合(见图3).于是 \mathbf{J} 与 Oz 、 OL 轴共面. \mathbf{J} 的轴向投影为:

$$\begin{cases} J_N = 0 \\ J_L = J \sin \theta \\ J_z = J \cos \theta \end{cases} \quad (11)$$

(11)式中, $J = |\mathbf{J}|$ 为守恒量,由初值决定.把(6)式与(11)式比较,得到以下结果

$$\dot{\theta} = 0 \quad \therefore \theta = \text{常值, 无章动} \quad (12)$$

$$I_1 \dot{\phi} = J \quad \therefore \dot{\phi} = \frac{J}{I_1} = \text{常值} \quad (13)$$

$$J_z = I_3 \omega_z = J \cos \theta = \text{常值} \quad (14)$$

$$\omega_z = \frac{J \cos \theta}{I_3} = \text{常值} \quad (15)$$

又由(4)式第三式及(13)(15)两式联合求得

$$\dot{\psi} = \omega_z \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1} \right) = \text{常值} \quad (16)$$

(12)~(16)式告诉我们:惯性陀螺作规则进动.其角速度矢量 $\omega = \dot{\psi} \hat{e}_z + \dot{\phi} \hat{e}_\zeta$ 恒在 $Oz\zeta$ 平面内.在

惯性系 $O\xi\eta\zeta$ 内观察, 矢量 ω 以角速 $\dot{\phi}$ 绕 $O\zeta$ 轴进动, 扫出空间锥面; 在固定于陀螺的坐标系中观察, 矢量 ω 以角速度 $-\dot{\psi}$ 绕 Oz 轴进动, 扫出本体锥面 (见图 4)。

地球可近似地视为一自由对称陀螺。夜间对星空长达数小时的曝光摄影可确定 ω 的方向: 诸恒星的亮迹将绕 ω 的方向画出同心圆。用此法可观察到地球角速度矢量 ω 绕地球对称轴的进动, 其周期的理论值为

$$T = \frac{2\pi}{|\dot{\psi}|} = \frac{2\pi}{\omega_z} \left(\frac{I_1}{I_3 - I_1} \right)$$

注意 $\frac{2\pi}{\omega_z} = 1 \text{ 天} \quad \frac{I_1}{I_3 - I_1} \approx 300$

$$\therefore T \approx 300 \text{ 天}$$

T 的实测值约为 400 天。误差系由地球的非刚性及密度不均匀所致。

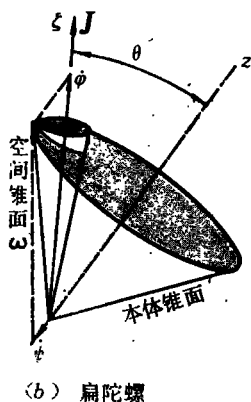
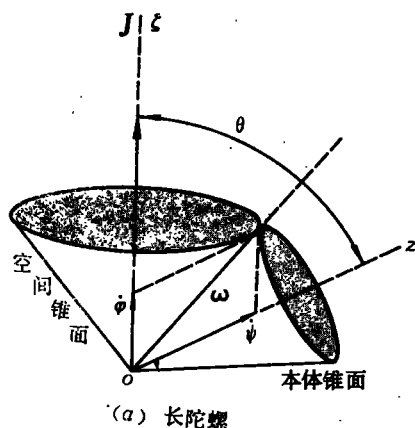


图 4 惯性陀螺的空间锥面和本体锥面

2. 重力陀螺 (拉格朗日陀螺)

以 C 表示陀螺质心, 它到支点的距离 $\overline{CO} = l$ (见图 5)。重力对 O 点的矩为

$$M = \overline{OC} \times m\mathbf{g} = l\hat{e}_z \times (-mg\hat{e}_\zeta) = mgl \sin\theta \hat{e}_N \quad (17)$$

$$\text{故有 } M_z = 0 \quad (18)$$

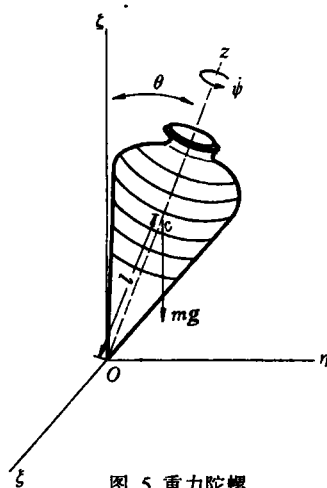
$$\text{和 } M_\zeta = 0 \quad (19)$$

把(18)式代入(10)式第三式, 得

$$J_z = I_3 \omega_z = \text{常值} \quad (20)$$

由(19)式知, \mathbf{J} 在惯性系垂直轴 $O\zeta$ 上的投影 J_ζ 亦为常值。 J_ζ 的值可由下式求得

$$\begin{aligned} J_\zeta &= J_z \cos\theta + J_L \sin\theta \\ &= J_z \cos\theta + I_1 \dot{\phi} \sin^2\theta = \text{常值} \end{aligned} \quad (21)$$



(20)式与(21)式是重力陀螺运动微分方程的两个独立的第一积分。第三个独立的第一积分可直接由机械能守恒得出

$$\begin{aligned} \text{动能 } E_k &= \frac{1}{2} \mathbf{J} \cdot \omega = \frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) \\ &\quad + \frac{I_3}{2} \omega_z^2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{势能 } E_p = mgl \cos\theta \quad (23)$$

注意动能 E_k 中之第二项 $\frac{I_3}{2} \omega_z^2$ 为常值, 机械能守恒又可表示为

$$\frac{I_1}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + mgl \cos\theta = E' \quad (24)$$

(24)式右边之常数 $E' = E - \frac{I_3}{2} \omega_z^2$, E 为总机械能。 E' 之值由初始条件定出。

$$\text{由(21)式解出 } \dot{\phi} = \frac{(J_\zeta - J_z \cos\theta)}{I_1 \sin^2\theta} \quad (25)$$

把(25)代入(24)消去 $\dot{\phi}$, 即得

$$\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(J_\zeta - J_z \cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + mgl \cos\theta = E' \quad (26)$$

定义对称陀螺的等效势能 $U(\theta)$

$$U(\theta) = \frac{(J_z - J_z \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta \quad (27)$$

(26)式即可写成

$$\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2 + U(\theta) = E' \quad (28)$$

(28)式在形式上相当于一个一维运动质点的能量守恒式. 由于动能项 $\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2$ 是非负的, 坐标变量 θ

满足以下条件 $E' - U(\theta) \geq 0$ (29)

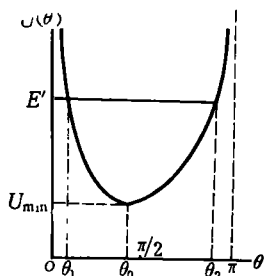


图6 重力陀螺的等效势曲线

(29)式给出 θ 角的变化范围. 它是关于 $\cos \theta$ 的三次方程. 我们现在用图解法来讨论它的解. 图6给出用计算机作出的 $U(\theta) \sim \theta$ 曲线, 即对称陀螺的等效势曲线. 曲线向上开口, 有一个极小, 当 $\theta \rightarrow 0$ 或 $\theta \rightarrow \pi$ 时, $U(\theta) \rightarrow \infty$, 当 $E' > U_{\min}$ 时, 能量水平线 $U(\theta) = E'$ 与 $U(\theta)$ 曲线交两点, 两交点的横坐标 θ_1 与 θ_2 给出章动运动的扭转点, 即 $\dot{\theta} = 0$ 的位置. 在区间 $[\theta_1, \theta_2]$ 内, θ 作周期往复运动. 这可如下看出: 把(28)式对 t 求导, 得

$$I_1 \ddot{\theta} = - \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (30)$$

即 $\ddot{\theta}$ 的方向恒指向位于 θ_1 与 θ_2 之间的极小 θ_0 . θ 不可能小于 θ_1 , 亦不可能大于 θ_2 , 以保证动能项 $\frac{I_1}{2} \dot{\theta}^2$ 不小于零.

若初始条件使 $E' = U_{\min}$, 则 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_0$. 章动运动消失, $\theta = \text{常值 } \theta_0$, 由(25)式和 $\dot{\phi} = \text{常值}$, 又

由(20)式知 $\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \text{常值}$, 从而知 $\dot{\psi} = \text{常值}$, 于是重力陀螺作规则进动.

由上面的分析可知, $\cos \theta$ 的三次方程(29)的三个根中, 两个根满足条件 $|\cos \theta| \leq 1$, 给出 θ_1 与 θ_2 ; 第三根满足 $|\cos \theta| > 1$, 无意义.

由(25)式及(4)式第三式 $\dot{\psi} = \omega_z - \dot{\phi} \cos \theta$ 知, $\dot{\phi}$ 与 $\dot{\psi}$ 的变化周期与 θ 的周期同.

3. 快速重力陀螺

由(6)式知, 陀螺角动量的分量式为

$$\mathbf{J} = I_1 \dot{\theta} \hat{e}_N + I_1 \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_L + I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}_z$$

当 $\dot{\psi} \gg \dot{\phi}$ 且 $\dot{\psi} \gg \dot{\theta}$ 时, 上式近似为

$$\mathbf{J} \approx I_3 \dot{\psi} \hat{e}_z \quad (31)$$

即 \mathbf{J} 近似地可用自旋角动量代替, 而重力矩仍如(17)式所示

$$\mathbf{M} = mgl \sin \theta \hat{e}_N \quad (17)$$

于是, 角动量定理(9)式的分量式为

$$I_3 \ddot{\psi} \hat{e}_z + (\dot{\theta} \hat{e}_N + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_L + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_z)$$

$$\times I_3 \dot{\psi} \hat{e}_z = mgl \sin \theta \hat{e}_N$$

比较等式两边同向分量, 得

$$\ddot{\psi} = 0 \quad \therefore \dot{\psi} = \text{常值} \approx 0 \quad (32)$$

$$\dot{\theta} \dot{\psi} = 0 \quad \therefore \dot{\theta} = 0, \theta = \text{常值} \quad (33)$$

$$I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} = mgl \quad \therefore \dot{\phi} = \frac{mgl}{I_3 \dot{\psi}} = \frac{mgl}{J} \quad (34)$$

(32) — (34)式告诉我们: 快速重力陀螺近似地作规则进动; $\dot{\phi}$ 与 $\dot{\psi}$ 同号; $\dot{\phi}$ 与 J 反比, 与重力矩正比. 这些结果都很容易用实验演示.

参考文献

- [1] V. Barger & M. Olssen: *CLASSICAL MECHANICS: A MODERN PERSPECTIVE*, McGraw-Hill, 1973. 中译本, 孙国鋈译. 《经典力学新编》, 科学出版社, 1981年中译第1版, 第六章.
- [2] 肖士珣, 《理论力学简明教程》, 高教出版社, 1983年第2版, 第四章.

(上接15页)

样时, 远较X射线为优, 这是本文分析过程中自然得出的结论. 蔡 瑛

参考文献

- [1] 芮清泉, 《固体物理学简明教程》, 北京, 人民教育

出版社, 1979年, p. 30

- [2] 程守洙, 江之永: 《普通物理学》(3), 第4版, 北京, 高等教育出版社, 1986年, p. 167—p. 171.